

CAMPOS DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN GRIETAS DE INTERFAZ EN BIMATERIALES ANISÓTROPAS CON CONTACTO CON FRICCIÓN: CASOS ESPECIALES

M.A. Herrera-Garrido^{1*}, V. Mantić¹

¹ Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092 Sevilla, España

*Persona de contacto: mherrera13@us.es

RESUMEN

Se presenta una generalización del modelo de la grieta de interfaz de Comninou para bimetálicos anisótropos desarrollada a partir de la aplicación del formalismo de Stroh y la matriz de impedancia de Ting, y considerando la ley de Coulomb para fricción isotrópica en la interfaz de la grieta. De esta forma, tenemos una solución analítica con la que obtener los diferentes exponentes de singularidad que definen los campos asintóticos de tensiones y desplazamientos en el entorno de la punta de la grieta. A diferencia de los casos encontrados en la literatura, en este trabajo no se impone una dirección relativa de deslizamiento entre ambos materiales, considerando así el ángulo de deslizamiento una incógnita. Una vez se tienen los exponentes de la serie asintótica y los correspondientes ángulos de deslizamiento, se pueden obtener los campos de desplazamientos y tensiones en el entorno de la grieta asociados a cada modo. Entre los casos especiales que se han analizado debido a su importancia, están las soluciones para $\lambda=0.5$ y $\lambda=1$, así como el estudio completo de la variación de los exponentes de singularidad y del ángulo de deslizamiento en el caso de una grieta de interfaz entre dos láminas del mismo material con diferente orientación.

PALABRAS CLAVE: Grieta de interfaz, fricción, materiales anisótropos, tensiones singulares.

ABSTRACT

A generalization of the Comninou interface crack model for anisotropic materials is presented, it is developed by applying the Stroh formalism and Ting's impedance matrix and considering the Coulomb law for isotropic friction at a crack interface. In this way, we have an analytical solution allowing us to obtain the singularity exponents that define the asymptotic stress and displacement fields near the crack tip. In contrast to the cases found in the literature, in this work we do not specify the relative sliding direction between the two materials, so we consider the sliding angle as an unknown. Once the exponents of the asymptotic series and the corresponding slip angles are obtained, the displacement and stress fields near the crack tip associated with each mode are calculated. As special cases, the solutions for $\lambda=0.5$ and $\lambda=1$ are analysed due to their significance, and a complete analysis of the variations of the singularity exponent and the sliding angle in the case of a crack in the interface of two laminates of the same material with different orientations is presented.

KEYWORDS: Interface crack, friction, anisotropic materials, singular stresses.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del fenómeno de la grieta ha sido de interés por más de un siglo [1, 2, 3, 4]. Para el estudio de la grieta de interfaz en bimetálicos tenemos que irnos a 1959, cuando Williams [5] presentó el análisis asintótico de los campos elásticos en la punta de una grieta de interfaz. Este modelo es el llamado *modelo abierto de la grieta de interfaz* y su solución lleva a campos de desplazamientos y tensiones oscilatorios en el entorno de la punta de la grieta. Estas oscilaciones en el campo de desplazamiento implican que puedan aparecer interpenetraciones entre los materiales en la interfaz [6].

Para resolver estas inconsistencias físicas, diferentes modelos fueron desarrollados, entre ellos cobró especial relevancia el propuesto por Comninou [7, 8]. El modelo

de Comninou recibe el nombre de *modelo de contacto* ya que considera el contacto entre los dos materiales impidiendo el desplazamiento relativo en la dirección normal a la interfaz. Estudió este problema tanto para el caso sin fricción [7], como para los casos en que el contacto entre los materiales implicaba fricción [8]. En ambos casos, estudiándolo sólo para bimetálicos isotrópicos, las soluciones del exponente de singularidad permanecen reales, y así se evita el comportamiento oscilatorio del campo de desplazamiento. El modelo de contacto supone que la grieta sólo está parcialmente abierta. La zona que se supone cerrada se denomina *Zona de Contacto* y en el caso de una carga de tracción, suele ser muy pequeña, a veces de escala subatómica. Si esta zona de contacto es pequeña en comparación con la longitud de la grieta, la solución obtenida por el modelo abierto es válida a distancias mayores que la zona de

contacto [9, 10, 11]. Pero, bajo cargas dominadas por el cizallamiento y/o la compresión la zona de contacto puede ser del mismo orden que la longitud de la grieta y los efectos de la zona de contacto no pueden despreciarse. Hills et al. [12] y Mantič et al. [13] discuten las consideraciones físicas que deben tenerse en cuenta para elegir el modelo abierto o cerrado para resolver una grieta de interfaz específica y las dificultades que tiene cada modelo.

Como el uso de materiales anisótropos se ha incrementado en los últimos años, la generalización del estudio de la grieta de interfaz, en su modelo abierto y cerrado, a bimateriales anisótropos ha despertado el interés de los investigadores [14, 15]. La mayoría de estos autores [13, 16, 17, 18, 19, 20, 21] han seguido la línea propuesta por Ting aplicando el formalismo de Stroh [22, 23] para el análisis de los campos de desplazamiento y tensión en materiales anisótropos. En la mayoría de los casos que conllevan fricción [24, 25], los autores restringen su análisis a casos en los que hay cierta simetría en el plano x_1 - x_2 , permitiendo así desacoplar el modo de fractura plano del antiplano.

Ting [26] aplicó el formalismo de Stroh para materiales anisótropos al modelo abierto de grietas de interfaz con la posibilidad de condiciones de contorno libres-fijas o fijas-fijas dando expresiones analíticas para cada caso y en [27] hace una clasificación de los materiales anisótropos que pueden o no aliviar la oscilación para una orientación particular. Wu [28] aplicó el enfoque desarrollado por Ting a la grieta de interfaz cerrada sin fricción entre materiales anisótropos disimilares, y en estos casos, incluso evitando la interpenetración en la zona de contacto, sigue apareciendo el comportamiento oscilatorio de las tensiones. Otros autores plantearon diferentes modelos para evitar el comportamiento oscilatorio, por ejemplo, Gao en [29, 30] propuso imponer siempre la singularidad de la raíz cuadrada inversa para grietas de interfaz cerrada en materiales anisotrópicos aplicando una fuerza de contacto de pseudo-fricción a lo largo de las caras de la grieta siempre normal a la dirección de deslizamientos. En este estudio sólo aparecen los modos de fractura plano y antiplano. Deng [24] estudia la grieta de interfaz con fricción para materiales anisótropos con plano de simetría en $x_3 = 0$. Esto permite simplificar el problema ya que, en estos casos, la deformación en el plano está separada de la deformación fuera del plano, por lo que no es necesario definir ni el ángulo de deslizamiento ω^u ni la dirección de la tensión tangencial ω . Ting y Chou [31] estudian el efecto de contacto con fricción en la grieta de interfaz, pero analizando la tensión singular en otro extremo de la zona de contacto, en lugar de la punta de la grieta. Para evitar tener ω^u y ω como una incógnita, el modelo de fricción utilizado, teniendo un coeficiente de fricción μ constante en toda la interfaz, considera $\sigma_{21} = \sigma_{23} = -\mu\sigma_{22}$ por lo tanto se fuerza que la dirección de la tensión tangencial resultante sea $\omega = \pi/4$. Sung y Chung en [32], resuelven el problema de la grieta cerrada en bimaterial

anisótropo de forma similar a como lo hicieron Ting [26] y Wu [28] aplicando el contacto de fricción definido por Ting y Chou [31].

Chen [33] presenta una nueva metodología para el análisis de las singularidades de tensión en la punta de la grieta de interfaz entre dos materiales anisótropos con una zona de contacto adyacente a la punta de la grieta, aplicando el formalismo de Stroh [22, 23] en deformación plana generalizada y la ley de Coulomb para el contacto friccional. La novedad de su método es que la dirección de cizallamiento ω permanece como una incógnita a diferencia de ser impuesta como en el análisis realizado anteriormente en [31,32].

En este trabajo, nos centraremos en los campos de tensión y desplazamiento en el entorno de la punta de la grieta, por lo que en este caso es necesario aplicar el modelo de contacto propuesto por Comninou y el modelo de fricción propuesto por Chen y otros [33, 34], definiendo ω y ω^u como incógnitas. La novedad de este trabajo frente a la solución propuesta en [32] es que en este trabajo no se impone la dirección de deslizamiento y se calcula como una incógnita extra.

Una vez que se encuentra la solución en tensiones y desplazamientos, algunos pares de valores de λ - ω solución del problema, se pueden descartar si esta solución no cumple la condición de disipación de energía, es decir, la dirección de deslizamiento relativo debe de ser opuesta a la dirección de la tensión tangencial. Se ha comprobado numéricamente que sólo los resultados con $\lambda \geq 0,5$ satisfacen este criterio, en consecuencia, puede decirse que el contacto por fricción hace que las tensiones sean menos singulares que la singularidad de la raíz cuadrada como la existente en el material homogéneo o en el caso sin fricción. Este hecho fue señalado por Audoly [35] y Deng [24].

Los resultados se han verificado con la herramienta genérica presentada en [36] ampliada para el análisis de singularidades de tensión en esquinas multimaterial con contacto con fricción.

2. CAMPOS ASINTÓTICOS DE DESPLAZAMIENTOS Y TENSIONES

Para definir los campos de desplazamientos y de tensiones asintóticos bajo deformación plana generalizada, cerca de la punta de la grieta, el punto singular, usaremos las expresiones

$$\mathbf{u}(r, \theta) = r^\lambda [\mathbf{A}\mathbf{E}(\lambda, \theta)\mathbf{q} + \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{E}}(\lambda, \theta)\hat{\mathbf{q}}], \quad (1)$$

$$\mathbf{t}(r, \theta) = r^{\lambda-1} \lambda [\mathbf{B}\mathbf{E}(\lambda, \theta)\mathbf{q} + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{E}}(\lambda, \theta)\hat{\mathbf{q}}], \quad (2)$$

basadas en el formalismo de Stroh [22, 23] desarrolladas por Ting [37]. λ es el exponente de singularidad, \mathbf{A} y \mathbf{B} son las matrices 3×3 formadas por los autovectores \mathbf{a}_α y \mathbf{b}_α del formalismo de Stroh [22, 23], \mathbf{q} y $\hat{\mathbf{q}}$ son vectores

arbitrarios, la barra denota la matriz conjugada compleja y

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\lambda, \theta) &= \text{diag}[\zeta_1^\lambda(\theta), \zeta_2^\lambda(\theta), \zeta_3^\lambda(\theta)], \\ \hat{\mathbf{E}}(\lambda, \theta) &= \text{diag}[\bar{\zeta}_1^\lambda(\theta), \bar{\zeta}_2^\lambda(\theta), \bar{\zeta}_3^\lambda(\theta)], \end{aligned} \quad (3)$$

con $\zeta_i(\theta) = \cos(\theta) + p_\alpha \sin(\theta)$.

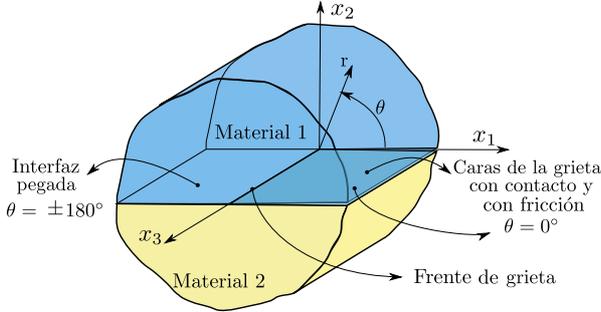


Figura 1 Esquema de grieta de interfaz con condiciones de contorno

3. ECUACIONES Y FÓRMULAS

En la Figura 1 se representan dos materiales anisótropos pegados en $x < 0, y = 0$, y con una grieta con contacto en $x > 0, y = 0$. De aquí en adelante, el subíndice 1 y 2 o superíndice (1) y (2) hacen referencia al material superior e inferior respectivamente, a no ser que se refiera a un eje de coordenadas cartesiano. El material 1 se encuentra desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ y el material 2 desde $\theta = 0$ hasta $\theta = -\pi$.

En la interfaz perfectamente pegada, $\theta = \pm\pi$, debe cumplirse el equilibrio en tensiones

$$\mathbf{t}^{(1)}(r, \pi) = \mathbf{t}^{(2)}(r, -\pi), \quad (4)$$

y desplazamiento relativo nulo entre los puntos en contacto perfectamente pegados de ambos materiales

$$\mathbf{u}^{(1)}(r, \pi) = \mathbf{u}^{(2)}(r, -\pi). \quad (5)$$

Aplicando la expresión (1) a (5) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{E}(\lambda, \pi) \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{E}}(\lambda, \pi) \hat{\mathbf{q}}_1 &= \\ = \mathbf{A}_2 \mathbf{E}(\lambda, -\pi) \mathbf{q}_2 + \bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{E}}(\lambda, -\pi) \hat{\mathbf{q}}_2, \end{aligned}$$

y aplicando la expresión (2) a (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \mathbf{E}(\lambda, \pi) \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{E}}(\lambda, \pi) \hat{\mathbf{q}}_1 &= \\ = \mathbf{B}_2 \mathbf{E}(\lambda, -\pi) \mathbf{q}_2 + \bar{\mathbf{B}}_2 \hat{\mathbf{E}}(\lambda, -\pi) \hat{\mathbf{q}}_2. \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden reducirse teniendo en cuenta que $\mathbf{E}(\lambda, \pm\pi) = e^{\pm i\lambda\pi} \mathbf{I}_{3 \times 3}$ y $\hat{\mathbf{E}}(\lambda, \pm\pi) = e^{\mp i\lambda\pi} \mathbf{I}_{3 \times 3}$

$$e^{2i\lambda\pi} \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_2 + e^{2i\lambda\pi} \bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{q}}_2 \quad (6)$$

$$e^{2i\lambda\pi} \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{B}_2 \mathbf{q}_2 + e^{2i\lambda\pi} \bar{\mathbf{B}}_2 \hat{\mathbf{q}}_2 \quad (7)$$

El equilibrio también debe cumplirse en la interfaz de la grieta ya que se fuerza el contacto entre los dos materiales

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{E}(\lambda, 0) \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{E}}(\lambda, 0) \hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{B}_2 \mathbf{E}(\lambda, 0) \mathbf{q}_2 + \bar{\mathbf{B}}_2 \hat{\mathbf{E}}(\lambda, 0) \hat{\mathbf{q}}_2$$

que con $\mathbf{E}(\lambda, 0) = \hat{\mathbf{E}}(\lambda, 0) = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ queda reescrita como

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{B}_2 \mathbf{q}_2 + \bar{\mathbf{B}}_2 \hat{\mathbf{q}}_2. \quad (8)$$

Para forzar el contacto entre ambos materiales, el desplazamiento relativo en la dirección perpendicular a la grieta debe de ser cero

$$u_2^{(1)}(0) - u_2^{(2)}(0) = 0. \quad (9)$$

Además, en la zona de contacto se aplicará la relación entre las tensiones tangenciales y la normal dada por la ley de Coulomb

$$\sigma_{12}^{(1)}(0) + \mu \cos(\omega) \sigma_{22}^{(1)}(0) = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_{32}^{(1)}(0) + \mu \sin(\omega) \sigma_{22}^{(1)}(0) = 0, \quad (11)$$

donde μ es el coeficiente de fricción de Coulomb y ω es el ángulo medido desde el eje x_1 en el plano $x_2 = 0$ y marca la dirección de la tensión tangencial resultante.

Aplicando (1) a (9) y (2) a (10) y (11) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} [0 \quad 1 \quad 0](\mathbf{A}_1 \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_2 - \bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{q}}_2) &= 0, \\ [1 \quad \mu \cos(\omega) \quad 0](\mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1) &= 0, \\ [0 \quad \mu \sin(\omega) \quad 1](\mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Los casos en los que $\lambda \in \mathbb{Z}$, serán estudiados en la Sección 4.1, ya que para los pasos que se harán a continuación es necesario considerar $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Los vectores $\hat{\mathbf{q}}_1, \mathbf{q}_2$ y $\hat{\mathbf{q}}_2$ se pueden obtener en función de \mathbf{q}_1 mediante las expresiones (6), (7) y (8)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_1 &= -e^{2i\lambda\pi} (\bar{\mathbf{A}}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1)^{-1} (\mathbf{A}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \mathbf{B}_1) \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{B}_2^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1, \\ \hat{\mathbf{q}}_2 &= \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1. \end{aligned} \quad (13)$$

y aplicando el *tensor de impedancia* del material, \mathbf{M}_i , definido en [38,39] y la *matriz del bimaternal*, \mathbf{M}^* propuesta por Hwu [40]

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_1^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_2^{-1} = i(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}), \quad (14)$$

se puede reescribir el sistema (12) como

$$\begin{aligned} (1 - e^{2i\lambda\pi}) [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{M}^* \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 &= 0, \\ i [1 \quad \mu \cos(\omega) \quad 0] (\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi} \bar{\mathbf{M}}^{*-1}) \mathbf{M}^* \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 &= 0, \\ i [0 \quad \mu \sin(\omega) \quad 1] (\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi} \bar{\mathbf{M}}^{*-1}) \mathbf{M}^* \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

donde (15.2) y (15.3) son linealmente independientes, por lo que podemos decir que

$$i(\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi}\bar{\mathbf{M}}^{*-1})\mathbf{M}^*\mathbf{B}_1\mathbf{q}_1 = k \begin{bmatrix} -\mu \cos(\omega) \\ 1 \\ -\mu \sin(\omega) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Para $\lambda = 0.5$, la matriz $(\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi}\bar{\mathbf{M}}^{*-1})$ no es invertible y se analizará en la Sección 4.2. En casos en los que la matriz si es invertible,

$$\mathbf{M}^*\mathbf{B}_1\mathbf{q}_1 = ik(\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi}\bar{\mathbf{M}}^{*-1})^{-1} \begin{bmatrix} -\mu \cos(\omega) \\ 1 \\ -\mu \sin(\omega) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Introduciendo una matriz $\hat{\mathbf{M}}$ tal que

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} & \hat{m}_{13} \\ \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} & \hat{m}_{23} \\ \hat{m}_{31} & \hat{m}_{32} & \hat{m}_{33} \end{bmatrix} = (1 - e^{2i\lambda\pi})(\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi}\bar{\mathbf{M}}^{*-1})^{-1}, \quad (18)$$

la expresión (15.1) queda reescrita como

$$ik \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} & \hat{m}_{13} \\ \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} & \hat{m}_{23} \\ \hat{m}_{31} & \hat{m}_{32} & \hat{m}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu \cos(\omega) \\ 1 \\ -\mu \sin(\omega) \end{bmatrix},$$

que pasa a ser la primera ecuación característica del problema

$$\hat{m}_{21}\mu \cos(\omega) - \hat{m}_{22} + \hat{m}_{23}\mu \sin(\omega) = 0. \quad (19)$$

Para obtener la segunda ecuación, vamos a partir de la dirección ω^u que marca el deslizamiento relativo entre el material 1 y 2 en la interfaz con fricción,

$$\Delta u_1(r, \theta_0) \sin(\omega^u) = \Delta u_3(r, \theta_0) \cos(\omega^u) \quad (20)$$

En este trabajo se considerará que la fricción entre los materiales es isotrópica, es decir la dirección de la resultante de la tensión tangencial, ω , es colineal con la dirección de deslizamiento, ω^u , pero de sentido opuesto, por lo que

$$\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} = \frac{-\sin(\omega^u)}{-\cos(\omega^u)} = \frac{\Delta u_3(r, \theta_0)}{\Delta u_1(r, \theta_0)}. \quad (21)$$

El desplazamiento relativo entre el material 1 y el 2 en la dirección 1 y 3 se obtiene aplicando las mismas expresiones empleadas para el desplazamiento relativo en la dirección 2, por lo que (20) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} (\hat{m}_{11}\mu \cos(\omega) - \hat{m}_{12} + \hat{m}_{13}\mu \sin(\omega)) \sin(\omega) = \\ (\hat{m}_{31}\mu \cos(\omega) - \hat{m}_{32} + \hat{m}_{33}\mu \sin(\omega)) \cos(\omega), \end{aligned} \quad (22)$$

la segunda ecuación característica del problema. Resolviendo el sistema formado por (19) y (22) mediante un procedimiento de resolución de sistemas no lineales se pueden obtener los valores de λ y ω solución del problema. Una vez que se tienen estos valores se pueden obtener sustituyendo en (17) y (13) los valores de los

vectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \hat{\mathbf{q}}_1$ y $\hat{\mathbf{q}}_2$, y con ellos los campos de tensión y desplazamiento.

4. CASOS PARTICULARES

En esta sección se van a analizar las soluciones que no pueden ser obtenidas directamente con el desarrollo propuesto y el caso de especial interés de la grieta de interfaz entre dos laminados con diferentes orientaciones de sus fibras.

4.1. Exponente de singularidad entero ($\lambda \in \mathbb{Z}$)

Los campos de tensión y desplazamientos para $\lambda \in \mathbb{Z}$ son polinomios homogéneos de grado λ en dos variables, x_1, x_2 . La particularidad que esto conlleva al análisis de los campos de desplazamientos de la grieta de interfaz es que el desplazamiento relativo entre ambos materiales es 0, por lo que el ángulo de deslizamiento, ω^u , queda indeterminado, y con este la dirección de la resultante de la tensión tangencial, ω . Este análisis es de particular importancia ya que $\lambda = 1$ se corresponde con la tensión llamada T-stress.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en (1) y en (2) se comprueba que el estado tensional y de desplazamientos corresponde con el de traslación de un sólido rígido. El vector $\mathbf{t}(r, \theta)$ es cero y $\mathbf{u}(r, \theta)$ es constante para ambos materiales independientemente de r y θ .

Por otro lado, el caso de $\lambda = 1$ corresponde a la solución uniforme en tensiones. Del análisis realizado por Ting para la solución de tensiones uniforme [37, Sección 10.5], se observa que se tienen cuatro variables independientes, $\sigma_{22}, \epsilon_{11}, \epsilon_{21}$ y ϵ_{31} que llevan a cuatro posibles modos al preescribir cada vez solo una de las variables como no-nula y el resto como nula. Con $u_{2,1} \neq 0$, los desplazamientos y tensiones obtenidas corresponden con el movimiento de sólido rígido [40, Sección 8.26], las otras tres posibles soluciones corresponden con un estado límite entre pegado y deslizamiento, como se obtiene de la formulación matemática de la ley de Coulomb bajo las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, también conocidas como condiciones complementarias. Dos de las soluciones estarán en el vértice del cono de Coulomb mientras que la correspondiente a $\sigma_{22} \neq 0$ se encuentra en la superficie lateral de dicho cono. Esta última solución puede considerarse como solución genuinamente pegada para un coeficiente de fricción real μ' tal que $\mu' > \mu$ [41, 42, 43, 44].

Cuando $\lambda > 1, \lambda \in \mathbb{Z}$ la solución obtenida es polinómica de grado λ y es estudiada de forma genérica por Wang y Schiavone [45] siguiendo el mismo procedimiento desarrollado por Ting [37], las identidades para conectar las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} y la función $f(z)$ propuesta por Ting [37, Sección 7.9]. Se sigue el mismo procedimiento que se realiza para $\lambda = 1$ añadiendo la condición extra $\epsilon_{13} =$

0 para evitar la sobreposición o apertura entre el material 1 y 2 en la grieta.

Otro caso importante de estudio es $\lambda < 0$. Estas soluciones no son estudiadas comúnmente ya que están relacionadas con soluciones en las que la energía elástica tiende a infinito debido a que la singularidad no es integrable en la punta de la grieta. A pesar de ello, estas soluciones se usan en algunos casos para facilitar el cálculo del factor de intensidad de tensiones.

4.2. Exponente de singularidad 0.5

En este apartado se analizará si el valor $\lambda = 0.5$, caso que no puede ser analizado directamente con la metodología propuesta tal y como se comentó en el paso realizado desde la expresión (16) a la (17). Partiendo de la expresión (16) substituyendo $\lambda = 0.5$ en la matriz $(\mathbf{M}^{*-1} + e^{2i\lambda\pi}\mathbf{M}^{*-1})$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{M}^{*-1} = \tilde{\mathbf{L}} + i\tilde{\mathbf{W}}$, véase [37, Sección 8.8-24]

$$(\mathbf{M}^{*-1} + e^{i\pi}\mathbf{M}^{*-1}) = 2Im(\mathbf{M}^{*-1}) = 2i\tilde{\mathbf{W}}, \quad (23)$$

donde $\tilde{\mathbf{W}}$ es una matriz real antisimétrica. Con esto, (16) puede ser reescrito como

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{w}_3 & -\tilde{w}_2 \\ -\tilde{w}_3 & 0 & \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 & -\tilde{w}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \tilde{k} \begin{bmatrix} -\mu \cos(\omega) \\ 1 \\ -\mu \sin(\omega) \end{bmatrix} \quad (24)$$

con $\mathbf{P} = \mathbf{M}^*\mathbf{B}_1\mathbf{q}_1$ y $\tilde{k} = k/2j$. Substituyendo en (15.1) se obtiene que para $\lambda = 0.5$, $P_2 = 0$. Al substituir en (20)

$$\sqrt{r}[1 \ 0 \ 0]\mathbf{P} \sin(\omega) = \sqrt{r}[0 \ 0 \ 1]\mathbf{P} \cos(\omega),$$

se obtiene la relación entre P_1 y P_3

$$P_3 \cos(\omega) = P_1 \sin(\omega). \quad (25)$$

A continuación, se examina la existencia de una solución no trivial con $\lambda = 0.5$ atendiendo a los términos de la matriz $\tilde{\mathbf{W}}$, términos que están relacionados con las posibles simetrías elásticas de los materiales que conforman la unión. En este apartado se considera siempre el caso con fricción no nula, $\mu > 0$.

En el caso de que ambos materiales tengan las mismas características elásticas, es decir, anisotropía homogénea, $\tilde{\mathbf{W}} = 0$. Substituyendo en (24), se obtiene $\tilde{k} = 0$, quedando P_1 y P_3 libres y por lo tanto ω queda indeterminada. La multiplicidad de $\lambda = 0.5$ es 1 y corresponde con $\sigma_{\theta\theta}(r, 0) = \sigma_{\theta r}(r, 0) = \sigma_{\theta 3}(r, 0) = 0$. La relación entre Δu_r y Δu_3 dependerá del ω seleccionado.

Centrándonos ahora en casos en los que el término $\tilde{w}_2 = 0$, tenemos 3 posibilidades:

a) $\tilde{w}_2 = 0, \tilde{w}_1 \neq 0, \tilde{w}_3 \neq 0$. Este caso corresponde con la unión en la que ambos materiales tienen simetría elástica con respecto al plano $x_2 = 0$, y al menos uno de los dos materiales no tiene simetría en el plano $x_3 = 0$. Substituyendo en (24) es necesario que $\tilde{k} = 0$ de nuevo y entonces

$$-\tilde{w}_3 P_1 + \tilde{w}_1 P_3 = 0. \quad (26)$$

Evitando la solución trivial en la que $P_1 = P_3 = 0$, llegamos a que con $\lambda = 0.5$ y $P_1 \neq 0$, $\omega = \tan^{-1} \frac{\tilde{w}_3}{\tilde{w}_1}$. La solución en tensiones en la interfaz de la grieta en este caso es $\sigma_{\theta\theta}(r, 0) = \sigma_{\theta r}(r, 0) = \sigma_{\theta 3}(r, 0) = 0$ y la relación entre Δu_r y Δu_3 dependerá de los valores \tilde{w}_1 y \tilde{w}_3 .

b) $\tilde{w}_2 = \tilde{w}_3 = 0, \tilde{w}_1 \neq 0$. Substituyendo en (24) es necesario que $\tilde{k} = 0$ de nuevo y entonces

$$\tilde{w}_1 P_3 = 0. \quad (26)$$

Evitando la solución trivial en la que $P_1 = P_3 = 0$, llegamos a que con $\lambda = 0.5$ y $P_1 \neq 0$, $\omega = z\pi$, con $z \in \mathbb{Z}$. En este caso, el campo de tensiones en la interfaz será también nulo y corresponde con un modo plano de deslizamiento ya que $\Delta u_3 = 0$.

c) $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 0, \tilde{w}_3 \neq 0$. Este caso corresponde con el analizado por Ting [37, Capítulo 11], y corresponde con el caso especial de materiales monoclinicos con plano de simetría en $x_3 = 0$. En este caso, la solución también pasa por $\tilde{k} = 0$ y

$$-\tilde{w}_3 P_1 = 0. \quad (26)$$

Con $P_3 \neq 0$ para evitar la solución trivial, tenemos $\cos(\omega) = 0$ en (25), por lo que se llega a la solución antiplana $\omega = z\frac{\pi}{2}$ con $z \neq 0 \in \mathbb{Z}$. En este caso, el campo de tensiones también es nulo en la interfaz de la grieta.

En el caso de que $\tilde{w}_2 \neq 0$ en la matriz del bimaternal, la solución $\lambda = 0.5$ solo lleva a soluciones triviales en las que $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

4.3. Grieta de interfaz entre laminados con diferentes orientaciones

En este apartado se analizará un caso de especial importancia en la industria como es una grieta de interfaz entre dos materiales laminados con fibras en el plano $x_2 = 0$ y diferentes orientaciones. Para ello se tomará como ejemplo la unión entre dos capas de un material con constantes elásticas $E_{11} = 141.3\text{GPa}$, $E_{22} = E_{33} = 9.58\text{GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 5\text{GPa}$, $G_{23} = 3.5\text{GPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.3$ y $\nu_{23} = 0.32$. La capa del material superior está posicionada formando un ángulo $\phi = 60^\circ$ con el eje x_1 . Se va a analizar la variación del exponente de singularidad λ y la dirección de la resultante de la tensión tangencial, ω , frente a la posición de las fibras del

material inferior. El coeficiente de fricción entre las láminas es de $\mu=0.5$ en la Figura 2 y $\mu=1$ en la Figura 3. Se comprueba que los valores del coeficiente de singularidad inferior a 0.5, dan una solución en desplazamientos en la misma dirección que la resultante de la tensión tangencial, por lo tanto, esos resultados no cumplen la condición de disipación de la energía y solo los valores de $\lambda \geq 0.5$ cumplirían que la tensión tangencial se opone al desplazamiento. Este resultado es el esperado, ya que la fricción debe de hacer menos singular a la solución elástica en torno a la punta de la grieta. Comparando los resultados de la Figura 2 con los resultados de la Figura 3 y teniendo en cuenta lo comentado anteriormente, se observa que a un mayor coeficiente de fricción se obtiene un λ solución superior, es decir, a mayor coeficiente de fricción más débil es la singularidad.

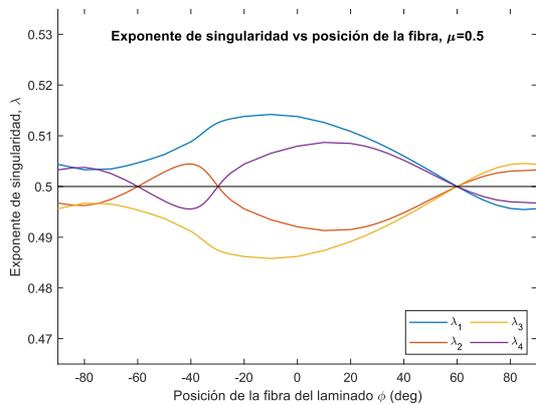


Figura 2 Exponente de singularidad vs posición de la fibra para una grieta de interfaz en un bimaterial con coeficiente de fricción $\mu=0.5$

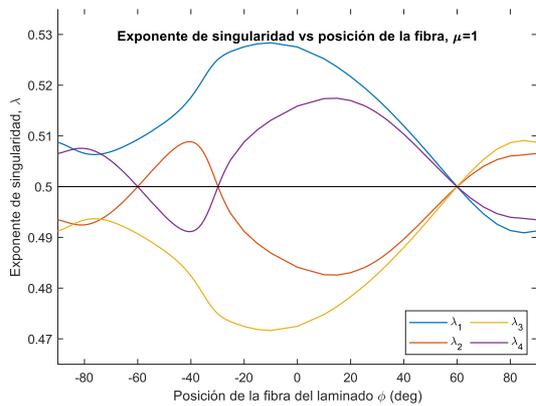


Figura 3 Exponente de singularidad vs posición de la fibra para una grieta de interfaz en un bimaterial con coeficiente de fricción $\mu=1$

En la Figura 4 se representa la dirección de la resultante de la tensión tangencial frente a la posición de la fibra. Se ha observado que en grietas de interfaz de monoclinicos con plano de simetría $x_2 = 0$, el coeficiente de fricción no afecta a la dirección de la tensión tangencial. Cuando se cumple además simetría respecto al plano $x_3 = 0$ entre ambos materiales, en el caso estudiado cuando $\phi = -60$

en el material inferior, se obtienen los modos plano y antiplano. Además de las soluciones presentadas en las imágenes, $\lambda = 0.5$ es solución para cualquier ϕ tal y como se vio en la Sección 4.2.

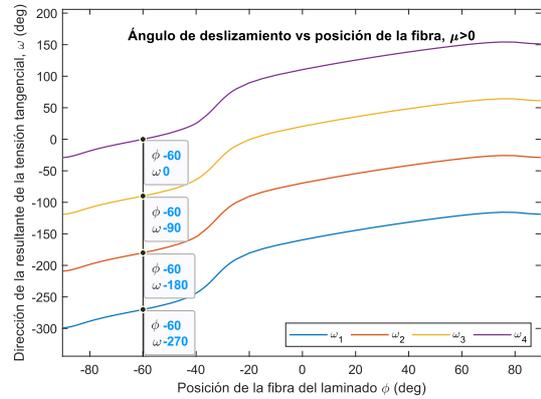


Figura 4 Dirección de tensión tangencial vs posición de la fibra para una grieta de interfaz en un bimaterial con el coeficiente de fricción $\mu>0$

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una metodología para el análisis de los campos de tensiones y desplazamientos en grietas de interfaz con contacto con fricción para casos en los que la dirección de desplazamiento relativo entre ambos materiales no corresponde necesariamente con el modo plano o antiplano de la mecánica de la fractura, casos en los que se basa el análisis de la mayoría de los autores encontrados en la literatura.

Se ha verificado que el contacto con fricción resulta en una singularidad más débil que $\lambda = 0.5$ del caso sin fricción, afirmación propuesta por Audoly [35] y Deng [24]. Además, se ha comprobado que $\lambda = 0.5$ siempre es solución en el caso de materiales monoclinicos, ya sea con plano de simetría $x_2 = 0$ o $x_3 = 0$, pero en estos casos las tensiones en las caras de la grieta se anulan. También se han comprobado los casos límites entre deslizamiento y perfectamente pegado correspondientes a $\lambda = 1$.

Esta metodología ha servido también como verificación del formalismo presentado en [46] en el que se basa la herramienta de cálculo de campos de desplazamientos y de tensiones singulares presentado en [36] para los casos sin fricción.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por la Junta de Andalucía, Consejería de Economía y Conocimiento (US-1266016, P18-FR-1928) y por el Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2021-123325OB-I00). Fondos FEDER (US-1266016)

REFERENCIAS

- [1] C.E. Inglis, Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. R. Inst. Nav. Archit.* 60 (1913) 219-224
- [2] A.A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philos. Trans. A* 221 (1920) 163-198.
- [3] H.M. Westergaard, Stresses at a crack, size of the crack, and the bending of reinforced concrete, *ACI J. Proc.* 30 (1933)
- [4] M.L. Williams, On the stress distribution at the base of a stationary crack, *J. Appl. Mech.* 24 (1956) 109-114
- [5] M.L. Williams, The stresses around a fault or crack in dissimilar media, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 49 (1959) 199-204
- [6] A.H. England, A crack between dissimilar media, *J. Appl. Mech.* 32 (1965) 400-402
- [7] M. Comninou, The interface crack, *J. Appl. Mech.* 44 (1977) 631-636
- [8] M. Comninou, Interface crack with friction contact zone, *J. Appl. Mech.* 44 (1977) 780-781
- [9] J.R. Rice, Elastic fracture concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.* 55 (1988) 98-103
- [10] D.A. Hills, J.R. Barber, Interface cracks, *Int. J. Mech. Sci.* 35 (1993) 27-37
- [11] E. Graciani, V. Mantič, F. París, On the estimation of the first interpenetration point in the open model of interface cracks, *Int. J. Fract.* 143 (2007) 287-290
- [12] D.A. Hills, P.A. Kelly, D.N. Dai, A.M. Korsunsky, Interface cracks. In: *Solution of cracks problems. The distributed dislocation technique*, Ed. Springer Netherlands (1996) 107-136
- [13] V. Mantič, A. Blázquez, E. Correa, F. París, Analysis of interface cracks with contact in composites by 2D BEM, WIT Press, Shouthampton (2006) 189-248
- [14] E.E. Gdoutos. *Fracture mechanics*, Ed. Springer, Dordrecht (2005)
- [15] L. Banks-Sills, *Interface fracture and delaminations in composite materials*, Ed. Springer, Switzerland (2018)
- [16] X. Deng, On stationary and moving interface cracks with frictionless contact in anisotropic bimetals. *Proc.: Math. Phys.* 443 (1993) 563-572
- [17] H. Gao, M. Abbudi, D.M. Barnett, Interfacial crack-tip field in anisotropic elastic solids, *J. Mech. Phys. Solids* 40 (1992) 393-416
- [18] C. Hwu, M. Omiya, K. Kishimoto, A key matrix N for the stress singularity of the anisotropic elastic composite wedges, *JSME Int. J. Series A* 46 (2003) 40-50
- [19] Z. Suo, Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys Sci*, 427 (1990) 40-50
- [20] K.C. Wu, Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between fissimilar anisotropic materials, *ASME J. Appl. Mech.* 57 (1990) 882-886
- [21] K.C. Wu, Explicit solutions for interface cracks in anisotropic bimetals, Ed. J.J. Wu, T.C.T. Ting, D.M. Barnett, *SIAM* (1991) 51-61
- [22] A.N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Philos. Mag.* 3 (1958) 625-646
- [23] A.N. Stroh, Steady state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.* 41 (1962) 77-103
- [24] X. Deng, Asymptotic analysis cracks with frictional contact, *Int. J. Solids Struct.* 31 (1994) 2407-2429
- [25] L. Ni, S. Nemat-Nasser, interface cracks in anisotropic dissimilar materials: an analytical solution. *J. Mech. Phys. Solids* 39 (1991) 113-144
- [26] T.C.T. Ting, Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites, *Int. J. Solids Struct.* 22 (1986) 965-983
- [27] T.C.T. Ting, Interface cracks in anisotropic bimetals, *J. Mech. Phys. Solids* 30 (1990) 505-513
- [28] K.C. Wu, On the contact zone model for interface cracks. *ASME J. Appl. Mech.* 59 (1992) 92-94
- [29] H. Gao, A closed interface crack in anisotropic bimetals, *Int. J. Fract.* 55 (1992) 33-39
- [30] J. Lee, H. Gao, A generalized Comninou contact model for interface cracks in anisotropic elastic solids, *Int. J. Fract.* 67 (1994) 53-68
- [31] T.C.T. Ting, S.C. Chou. Stress singularities at tip of contact zone in anisotropic interface crack. In *Developments in the Science and Technology of Composite Materials, First European Conference on Composite Materials, Bordeaux* (1985) 164-169
- [32] J.C. Sung, W.G. Chung, Frictional interface crack in anisotropic bimaterial under combined shear and compression, *Int. J. Solids Struct.* 40 (2003) 6839-6857
- [33] H.P. Chen, Frictional interface crack-tip singular stress field in anisotropic composites, XII International Conference on Computational Plasticity. *Fundamentals and Applications* (2013) 1087-1096
- [34] H.P. Chen, Z. Guo, X. Zhou, Stress singularities of contact problems with a frictional interface in anisotropic bimetals, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 35 (2012) 718-731
- [35] B. Audoly, Asymptotic study of the interfacial crack with friction, *J. Mech. Phys. Solids* 48 (2000) 1851-1964
- [36] M.A. Herrera-Garrido, V. Mantič, A. Barroso, A powerful matrix formalism for stress singularities in anisotropic multimaterial corners. Homogeneous (orthogonal) boundary and interface conditions, *Theor. Appl. Fract. Mech.* 119 (2022) 103271

- [37] T.C.T. Ting, Anisotropic elasticity, theory and applications, Oxford Science Publications, N.Y. (1996)
- [38] K.A. Ingebrigtsen, A. Tønning, Elastic surface waves in crystal, *Phys Review* 184 (1969) 942-951
- [39] J. Lothe, D.M. Barnett, On the existence of surface wave solutions for anisotropic half-spaces with free surface, *Int. J. Fract.* 47 (1976) 428-433
- [40] C. Hwu, Anisotropic elastic plates, Ed. Springer (2010)
- [41] J.R. Barber, Elasticity, Ed. Springer (2010)
- [42] T.A. Laursen, Computational contact and impact mechanics: Fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis, London (2003)
- [43] S.V. Walker, R.I. Leine, Set-values anisotropic dry friction laws: formulation, experimental verification and instability phenomenon, *Nonlinear Dyn.* 96 (2019) 885-920
- [44] V. Yastrebov, Numerical methods in contact mechanics, ISTE-WILEY, London (2022)
- [45] X. Wang, P. Schiavone. An anisotropic elastic solid with an elliptical inhomogeneity under a non-uniform in-plane and anti-plane remote loading. *Q. J. Mech. Appl. Math* 75 (2022) 301–313
- [46] V. Mantič, A. Barroso, F. París, Singular elastic solutions in anisotropic multimaterial corners. Application to composites, Chapter 11, in *Mathematical Methods and Models in Composites*, Ed. V. Mantič, (2014) 425-495