

NUEVO ELEMENTO FINITO PARA SINGULARIDADES LOGARÍTMICAS DE TENSIÓN EN GRIETAS DE INTERFASE TIPO WINKLER EN MODO III

A. Vázquez, V. Mantič, M. Muñoz-Reja, L. Távara*

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España
Persona de contacto: ltavara@us.es

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es aumentar la precisión de las soluciones obtenidas usando el método de los elementos finitos (MEF) para grietas de interfases débiles (tipo muelle) entre adherentes elásticos lineales. Este modelo de fractura de interfases se denomina Modelo de Interfase Elástico Lineal Frágil (LEBIM por sus siglas en inglés), y puede utilizarse, para analizar la fractura de uniones adhesivas que incluyen una capa fina de adhesivo. Para ello, se propone un elemento finito singular especial triangular de 5 nodos. Las funciones de forma singular desarrolladas reproducen el comportamiento de una solución asintótica analítica desarrollada previamente en dirección radial. Estos elementos especiales se implementan en un código MEF escrito en Matlab. El nuevo elemento permite modelar grietas de interfase sin necesidad de utilizar mallas excesivamente refinadas, que es una de las desventajas actuales del LEBIM cuando se consideran interfases muy rígidas. Los resultados numéricos con mallas uniformes muestran que el nuevo elemento proporciona resultados significativamente más precisos que cuando se usan solamente elementos estándar, especialmente para mallas relativamente gruesas.

PALABRAS CLAVE: Modelo de Interfase Elástica-Lineal Frágil (LEBIM), muelle, interfase, elemento singular, MEF

ABSTRACT

The aim of this research is to increase the accuracy of Finite Element Method (FEM) solutions for cracks propagating in spring-type interfaces between linear elastic adherents. This computational model is sometimes called Linear Elastic Brittle Interface Model (LEBIM) and it can be used to analyse the fracture behaviour of adhesive joints. Thus, a special 5-node triangular crack-tip finite element is proposed. The developed special singular shape functions reproduce the radial behaviour of a previously developed analytical asymptotic solution. These special elements are implemented in a FEM code written in Matlab. The new element allows to model interface cracks without the need of using excessively refined FEM meshes, which is one of the current disadvantages in the use of LEBIM when very stiff interfaces are considered. Numerical results using uniform meshes show that the use of the new singular element provides significantly more accurate results than those obtained using the standard elements, especially for relatively coarse meshes.

KEYWORDS: Linear Elastic Brittle Interface Model (LEBIM), spring, interface, singular element, FEM

1. INTRODUCCIÓN

La solución de la ecuación de Laplace se utiliza para diferentes tipos de problemas físicos tales como: transferencia de calor, electrostática, conducción eléctrica, magnetostática, etc. [1]. En el presente trabajo, la solución de dicha ecuación se utiliza para describir el comportamiento mecánico de una grieta en modo III puro (conocido en mecánica de la fractura como problema antiplano) entre materiales elásticos lineales. La figura 1 muestra las condiciones de contorno para una grieta de interfase bajo las condiciones antes mencionadas.

Una forma de modelar las grietas que se propagan a lo largo de una interfase débil (que puede representar, por ejemplo, una capa adhesiva) es mediante el Modelo de Interfase Elástico Lineal Frágil (LEBIM por sus siglas en inglés) [2, 3, 4, 5]. En este modelo la interfase se mo-

delo como una distribución continua de muelles con una ley elástica lineal frágil que relaciona el desplazamiento relativo (separación de materiales en el modo I) y los componentes del vector tensión [6]. En cualquier caso, el crecimiento de la grieta en LEBIM necesita un cálculo preciso de la Tasa de Liberación de Energía (ERR por sus siglas en inglés), que depende de los valores del vector tracción y de los desplazamientos relativos en el vértice de la grieta [6]. Por ello, se requieren mallas muy finas cuando se utiliza una aproximación numérica, especialmente para interfases muy rígidas [7, 8, 9]. El LEBIM puede considerarse como un caso límite del conocido Modelo de Zona Cohesiva (CZM por sus siglas en inglés) [5, 10, 11, 12, 13, 14]. En el pasado, hubo numerosos intentos para encontrar la serie asintótica de soluciones singulares en las proximidades del vértice de la grieta en modelos de mecánica de fractura no clásicos como el LEBIM [4, 15, 16]. Recientemente se introdujo una solu-

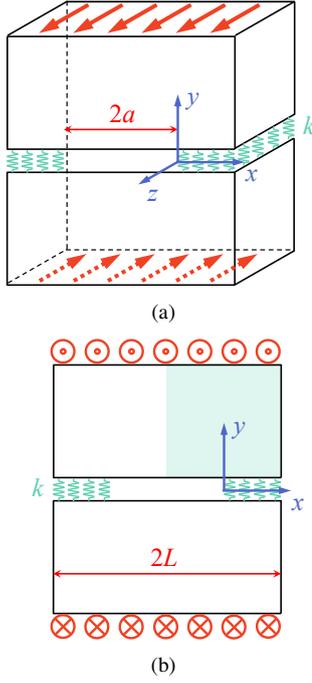


Figura 1: Condiciones de contorno asociadas a un problema de grieta de interfase modelizado en modo de fractura III puro, es decir, problema antiplano, (a) vista 3D y (b) vista 2D. La parte sombreada representa el subdominio que puede modelizarse una vez aplicadas las condiciones de simetría.

ción general para este tipo de interfaces en [17], y luego se particularizó para una grieta trabajando en Modo III en [18].

El objetivo principal de este trabajo es maximizar la precisión de las soluciones numéricas, especialmente en la predicción de la propagación de grietas que aparecen en diversos materiales y sus uniones, y minimizar los recursos computacionales utilizados, evitando la necesidad de un refinamiento excesivo de la discretización de sólidos, que a menudo es necesario para lograr la convergencia de la solución numérica en la actualidad. Los elementos especiales desarrollados (basados en la solución asintótica de [18]) implementados en un código MEF permitirán la discretización de sólidos con grietas sin necesidad de mallas refinadas, que es uno de los problemas actuales en el uso de LEBIM y CZMs y que suelen conllevar problemas de convergencia numérica de la solución.

2. ELEMENTO ESPECIAL PARA SINGULARIDAD LOGARÍTMICA DE TENSIÓN

Tomando como base la forma de la solución local, se desarrolla un elemento finito capaz de reproducir ese comportamiento. Así, en primer lugar se describen las fun-

ciones de forma 1-D y, a continuación, se presentan las funciones de forma 2-D.

2.1. Funciones de forma 1D

Para deducir el conjunto de funciones de forma de un elemento 1D, con nodos en $r_1 = 0$, $r_2 = 0.5$ y $r_3 = 1$, se consideran las siguientes funciones base definidas en el intervalo $[0, 1]$:

$$\tilde{N}_1(r) = 1; \quad \tilde{N}_2(r) = r; \quad \tilde{N}_3(r) = r \ln(r) \quad (1)$$

A continuación, las nuevas funciones de forma del elemento 1D se obtienen mediante una combinación lineal de las funciones de base:

$$N_i(r) = C_{ij} \tilde{N}_j(r), \quad (2)$$

imponiendo la conocida propiedad de interpolación de Lagrange

$$N_i(r_j) = \delta_{ij}, \quad (3)$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene el siguiente conjunto de funciones:

$$N_1(r) = 1 - r - \frac{r \ln(r)}{\ln(\frac{1}{2})}, \quad (4)$$

$$N_2(r) = \frac{2r \ln(r)}{\ln(\frac{1}{2})}, \quad (5)$$

$$N_3(r) = r - \frac{r \ln(r)}{\ln(\frac{1}{2})}. \quad (6)$$

2.2. Funciones de forma 2D

Una vez obtenidas las funciones de forma en el espacio unidimensional, es necesario adaptarlas a un espacio de referencia bidimensional $\xi - \eta$. Para ello se genera un elemento de referencia con 6 nodos que incluye un comportamiento lineal en η y con funciones de forma específicas adaptadas a ξ , sustituyendo r por ξ en las Ecs. (4-6).

Una vez obtenida la evolución de cada función de forma en el eje ξ , se pueden adaptar a un espacio bidimensional incluyendo una evolución lineal de dos nodos en el eje η , como se observa en las siguientes funciones de forma:

$$N_1(\xi, \eta) = (1 - \eta) \left(1 - \xi - \xi \frac{\ln(\xi)}{\ln(\frac{1}{2})} \right) \quad (7)$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1 - \eta) \left(\xi - \xi \frac{\ln(\xi)}{\ln(\frac{1}{2})} \right) \quad (8)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \left(\xi - \xi \frac{\ln(\xi)}{\ln(\frac{1}{2})} \right) \quad (9)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \eta \left(1 - \xi - \xi \frac{\ln(\xi)}{\ln(\frac{1}{2})} \right) \quad (10)$$

$$N_5(\xi, \eta) = (1 - \eta) \left(2\xi \frac{\ln(\xi)}{\ln(\frac{1}{2})} \right) \quad (11)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \eta \left(2\xi \frac{\ln(\xi)}{\ln(\frac{1}{2})} \right) \quad (12)$$

tomando ξ y η valores entre $[0,1]$.

Funciones de forma singulares:

Finalmente partiendo de las funciones de forma definidas para el espacio $\xi - \eta$ y basándose en [19], el elemento singular cuadrilátero se colapsa en un elemento triangular donde todos los nodos del lado con $\xi = 0$ se colapsan en un nodo solamente.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS Y ESTUDIO DE CONVERGENCIA

3.1. Definición de la malla y el problema analizado

La Fig. 2 muestra el problema de referencia que se utilizará para analizar el comportamiento del elemento singular presentado en este trabajo. En esta configuración se aplican condiciones de contorno tipo Neumann con $\sigma_{yz} = 1$ en el borde superior, condiciones de contorno tipo Robin (muelle) en la mitad derecha del borde inferior y los bordes restantes son bordes libres de tensión. Además, para simplificar el problema se ha utilizado condiciones de simetría en el plano que corta el sólido por el centro de la grieta.

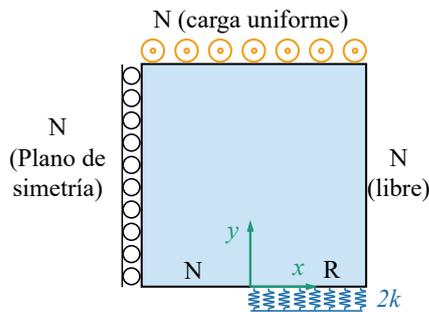


Figura 2: Condiciones de contorno del problema analizado.

Se emplea un refinamiento tipo h de mallas uniformes para analizar el comportamiento de convergencia del nuevo elemento triangular singular para modelar grietas que se propagan a lo largo de interfases de muelles. Se utilizan elementos triangulares lineales estándar en todo el dominio, excepto en la proximidad del vértice de la grieta, donde se utilizan los elementos singulares. A efectos comparativos, también se emplean las mismas mallas utilizando únicamente elementos triangulares lineales estándar en todo el dominio, incluida la vecindad de

la punta de la grieta. Para estos estudios, se utilizarán mallas cuadradas compuestas de elementos triangulares.

Los resultados se obtienen mediante una implementación del MEF en el software Matlab. Se evaluarán los resultados obtenidos con diferentes números de elementos de la malla que se muestran en la Fig. 3.

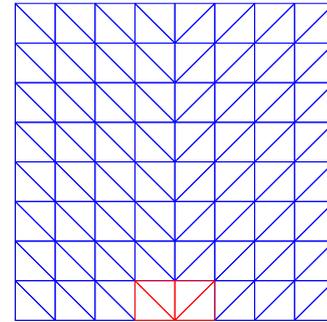


Figura 3: Malla estudiada para $N=4$.

El número total de elementos se asocia a la variable N que corresponde al número de elementos a lo largo del borde inferior con condiciones de contorno Robin (la mitad derecha). Entonces, N también se puede definir como:

$$N = \frac{a}{h} \quad (13)$$

donde a es la zona libre de tensiones (normalmente asociada a la semi-longitud de la grieta) y h la longitud característica de un elemento.

3.2. Resultados numéricos

Se probaron diferentes valores de rigidez de la interfase variando el valor de δ , manteniendo constante la geometría modelada.

$$\delta = \frac{2kL_{ch}}{\mu} = \frac{4ka}{\mu} \quad (14)$$

donde k es la rigidez del muelle (en el problema completo), L_{ch} es una longitud característica del problema (aquí se utilizó la longitud de grieta $2a$) y μ es el módulo de cizalladura. Los valores δ analizados son 0.1, 1, 10, 100 y 1000.

La Fig. 4 muestra el campo de desplazamiento obtenido a lo largo del borde inferior para la malla analizada y para dos valores de δ . Es interesante ver que la solución tiende a la solución de interfase perfecta cuando la rigidez de la interfase crece.

También se analiza la mejora obtenida cuando se utilizan elementos singulares. Dado que no se tiene una solución analítica de este problema, se ha calculado el error tomando como referencia los resultados obtenidos con la malla

más fina (es decir el mayor número de elementos en el borde Robin) que en este caso es $N = 512$. Los resultados muestran que la mejora obtenida cuando se utilizan elementos singulares es relevante. El error relativo en el vértice de la grieta se define como:

$$e_{rel} = \frac{\tau_{tip}(N) - \tau_{tip}(N_{max})}{\tau_{tip}(N_{max})} \quad (15)$$

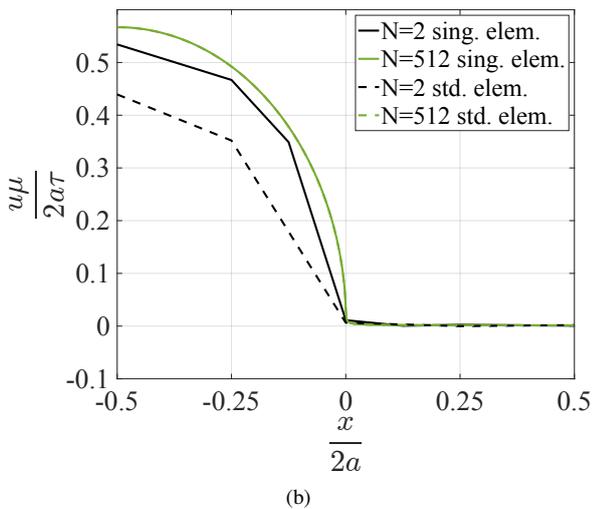
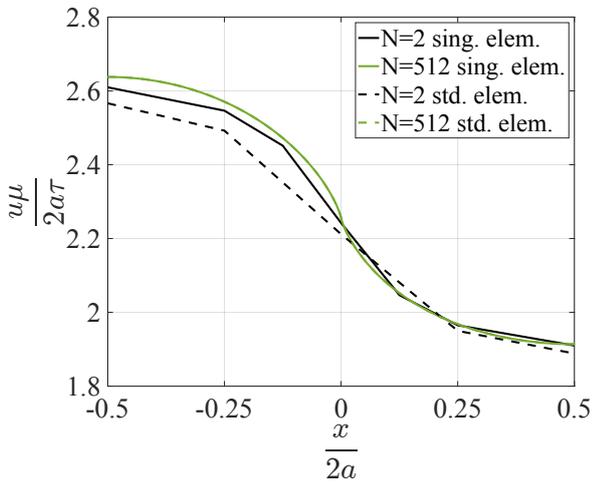


Figura 4: Soluciones en desplazamiento obtenidas para (a) $\delta = 1$ y (b) $\delta = 1000$

En la Fig. 5, se presenta la variación del error respecto al aumento del número de elementos, N , en el vértice de la grieta para $\delta = 0.1, 10$ y 1000 . Los resultados muestran que cuando la rigidez de la interfaz es pequeña ($\delta = 0.1$), el error relativo es similar para ambos tipos de elementos analizados, estándar y singular. Las principales diferencias se producen para los valores más pequeños de N . Por otra parte, cuando la rigidez de la interfaz es mayor ($\delta \geq 10$), el error relativo entre las distintas configuraciones se hace más evidente. Además, las principales diferencias se producen para los valores más altos de N e interfaces rígidas ($\delta = 1000$). También es interesante ob-

servar que los errores obtenidos al utilizar elementos singulares son siempre menores que los obtenidos utilizando únicamente elementos estándar.

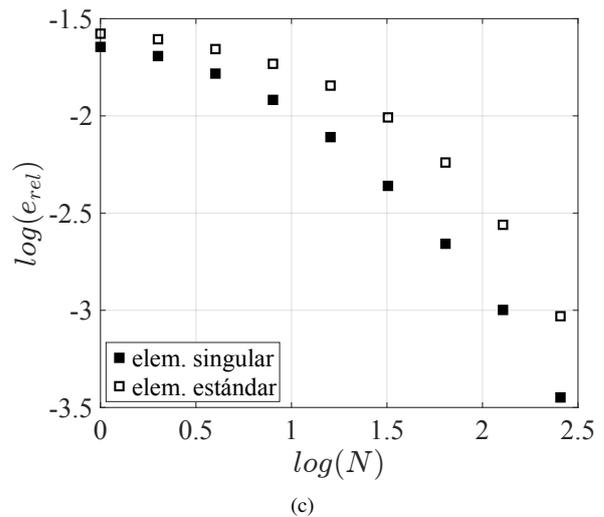
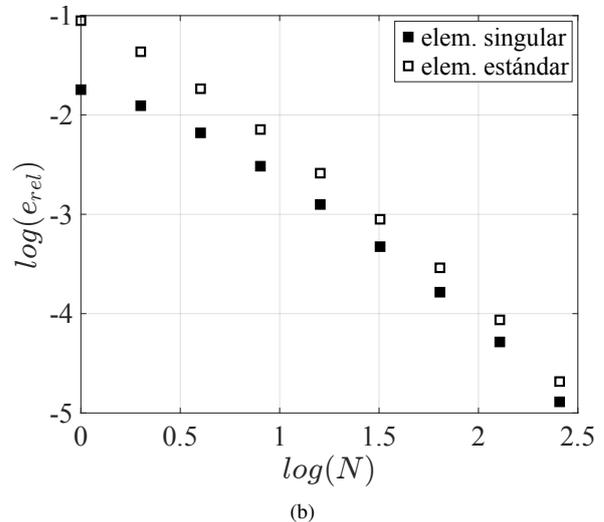
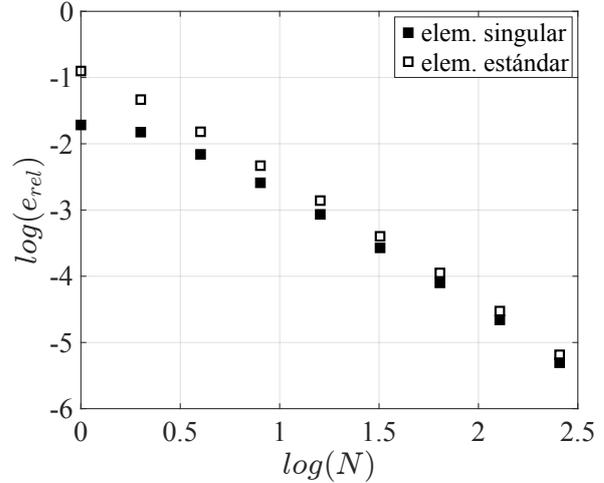


Figura 5: Variación del error relativo con respecto al aumento del número de elementos en el vértice de la grieta para (a) $\delta = 0.1$, (b) $\delta = 10$ y (c) $\delta = 1000$.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un nuevo elemento finito. Este elemento es capaz de mejorar la precisión de las soluciones MEF para grietas que crecen a lo largo de interfases tipo Winkler (resorte) entre adherentes elásticos lineales.

Las funciones de forma propuestas se basan en la solución elástica asintótica de tensiones con singularidad logarítmica en las proximidades del vértice de la grieta de interfase tipo muelle trabajando en modo III de fractura. Además, el nuevo elemento puede aplicarse a cualquier otro problema físico regido por la ecuación de Laplace. El elemento reproduce el comportamiento radial de la solución asintótica, es triangular y está formado por 5 nodos.

El elemento se implementa en un código MEF escrito en Matlab. Los resultados numéricos obtenidos muestran que el nuevo elemento permite modelar grietas de interfase sin necesidad de utilizar mallas de elementos finitos excesivamente refinadas, incluso para interfaces bastante rígidas. Un análisis de refinamiento tipo h , utilizando mallas uniformes, mostró que el nuevo elemento singular proporciona resultados más precisos que los elementos finitos estándar, especialmente cuando se utilizan mallas gruesas. El uso del elemento propuesto permitirá minimizar los recursos computacionales al modelar grietas de interfase relativamente rígidas.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha contado con el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación de España y del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (Proyectos PGC2018-099197-B-I00 y PID2021-123325OB-I00) y de la Junta de Andalucía y el Fondo Social Europeo (Proyecto P18-FR-1928).

REFERENCIAS

- [1] F. París and J. Cañas. *Boundary Element Method, Fundamentals and Applications*. Oxford University Press: Oxford, 1997.
- [2] L. Prandtl. A thought model for the fracture of brittle solids. *Zeitschrift für Physik Angewandte Mathematik und Mechanik*, 13(2):129–133, 1933.
- [3] V.M. Entov and R.L. Salganik. On the Prandtl brittle fracture model. *Mechanics of Solids*, 3:79–89, 1968. (translated from Russian).
- [4] S. Lenci. Analysis of a crack at a weak interface. *International Journal of Fracture*, 108(3):275–290, 2001.
- [5] P. Cornetti, V. Mantič, and A. Carpinteri. Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 49:1022–1032, 2012.
- [6] V. Mantič, L. Távara, A. Blázquez, E. Graciani, and F. París. A linear elastic - brittle interface model: Application for the onset and propagation of a fibre-matrix interface crack under biaxial transverse loads. *International Journal of Fracture*, 195:15–38, 2015.
- [7] L. Távara, V. Mantič, E. Graciani, J. Cañas, and F. París. Analysis of a crack in a thin adhesive layer between orthotropic materials: an application to composite interlaminar fracture toughness test. *Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)*, 58(3):247–270, 2010.
- [8] M. Muñoz Reja, L. Távara, V. Mantič, and P. Cornetti. Crack onset and propagation at fibre-matrix elastic interfaces under biaxial loading using finite fracture mechanics. *Composites Part A*, 82:267–278, 2016.
- [9] M. Muñoz-Reja, L. Távara, and Vladislav Mantič. Convergence of the BEM solution applied to the CCFFM for LEBIM. In *Key Engineering Materials*, volume 774, pages 355–360. Trans Tech Publ, 2018.
- [10] M. Bialas and Z. Mróz. Modelling of progressive interface failure under combined normal compression and shear stress. *International Journal of Solids and Structures*, 42(15):4436–4467, 2005.
- [11] N. Valoroso and L. Champaney. A damage-mechanics-based approach for modelling decohesion in adhesively bonded assemblies. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(18):2774–2801, 2006.
- [12] M.E. Jiménez, J. Cañas, V. Mantič, and J.E. Ortiz. Numerical and experimental study of the interlaminar fracture test of composite-composite adhesively bonded joints. (in Spanish). *Materiales Compuestos 07, Asociación Española de Materiales Compuestos, Universidad de Valladolid*, pages 499–506, 2007.
- [13] P. Cornetti, A. Saporá, and A. Carpinteri. Short cracks and V-notches: Finite Fracture Mechanics vs. Cohesive Crack Model. *Engineering Fracture Mechanics*, 168:2–12, 2016.
- [14] R. Dimitri, P. Cornetti, V. Mantič, M. Trullo, and L. De Lorenzis. Mode-I debonding of a double cantilever beam: A comparison between cohesive crack modeling and finite fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 124:57 – 72, 2017.
- [15] F. Erdogan. *Fracture mechanics of interfaces*, In: *Damage and Failure of Interfaces*. Balkema Publishers: Rotterdam, 1997.
- [16] G. Mishuris. Interface crack and nonideal interface concept (mode III). *International Journal of Fracture*, 107:279–296, 2001.
- [17] S. Jiménez-Alfaro, V.r Villalba, and V. Mantič. Singular elastic solutions in corners with spring bound-

- dary conditions under anti-plane shear. *International Journal of Fracture*, 223(1):197–220, 2020.
- [18] S. Jiménez-Alfaro and V. Mantič. FEM benchmark problems for cracks with spring boundary conditions under antiplane shear loadings. *Aerotecnica Missili & Spazio*, 99:309–319, 2020.
- [19] R.S. Barsoum. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International journal for numerical methods in engineering*, 10(1):25–37, 1976.