Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Programa de doctorado en Educación

TESIS DOCTORAL

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Autor: José Mariano Bajo Benito

Dirigida por los Doctores:

Dr. José María Gavilán Izquierdo   Dra. Gloria Sánchez-Matamoros García

Sevilla 2023

Dr. José María Gavilán Izquierdo y Dra. Gloria Sánchez-Matamoros García, profesores del Departamento de Didáctica de las Matemáticas con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla.

HACEN CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo la dirección de los firmantes por el Licenciado José Mariano Bajo Benito, con el título *La comprensión del concepto de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria*, reúne todos los requerimientos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública ante la correspondiente Comisión, para la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universidad de Sevilla, por tanto consideramos procedente autorizar su presentación.

Agradecimientos

No podría haber llegado hasta aquí sin los dos pilares que sustentan mi trabajo. De un lado mi familia, que me ha apoyado desde el primer momento, y de otro, mis directores de tesis José María y Gloria, quienes han sido mis maestros en esta difícil tarea de la investigación educativa. A todos quiero agradecer tanto su paciencia como sus enseñanzas.

Y como viga transversal de esos grandes pilares quisiera resaltar mi agradecimiento también a aquellos estudiantes con los que he investigado y a cuantos matemáticos me han precedido con sus estudios.

Gracias a todos

"Las matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el universo"

Galileo Galilei

A mi Familia:

Esposa e hijos, padres y hermano

Presentación

Se presenta esta tesis doctoral para acceder al grado de Doctor en Educación en el ámbito de Didáctica de la Matemática por la Universidad de Sevilla. Esta tesis doctoral se presenta en la modalidad de compendio de publicaciones. Y sigue la estructura básica de contenidos planteada por el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad de Sevilla.

- Sección 1. Introducción a la problemática de estudio.
- Sección 2. Referentes teóricos.
- Sección 3. Método.
- Sección 4. Resultados.
- Sección 5. Discusión de los resultados y Conclusiones.
- Sección 6. Referencias
- Sección 7. Artículos publicados que conforman el compendio.

Autores y afiliación:

José Mariano Bajo Benito, Universidad de Sevilla, España, https://orcid.org/0000-0002-1201-6224, jbajo@us.es

José María Gavilán Izquierdo, Universidad de Sevilla, España, https://orcid.org/0000-0002-3369-5377, gavilan@us.es

Gloria Sánchez-Matamoros García, Universidad de Sevilla, España, https://orcid.org/0000-0002-7502-7924, gsanchezmatamoros@us.es

Revistas

- Enseñanza de las ciencias, ISSN: 2174-6486. ISSN: 0212-4521. Esta revista forma parte del servei de Revistes Digitals de la Universitat Autònoma de Barcelona. Journal Citation Reports JCR Social Science Edition. https://ensciencias.uab.es

- Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education (Abbrev. EURASIA J. Math., Sci Tech. Ed. or EJMSTE). Es una revista académica en inglés, de acceso abierto y que publica artículos sobre todos los aspectos de la educación en matemáticas, ciencia y tecnología con ISSN: 1305-8223 (online) 1305-8215. https://www.ejmste.com/

- European Journal of Educational Research (EU-JER). Online ISSN: 2165-8714, EU-JER. Es una revista de investigación y de acceso abierto que proporciona un foro en línea para estudios en educación, por y para académicos y profesionales, en todo el mundo. https://www.eu-jer.com/

A continuación, se detallan las publicaciones que conforman el compendio.

Artículos e indicios de calidad

Bajo Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Sánchez-Matamoros García, G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias,* *37*(3), 149-167. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

JCR- Factor de Impacto 1.183 Edición SSCI Posición 183/263 Cuartil: Q3 SJR-Factor de Impacto: 0.481 Posición: 468/1324 Cuartil: Q2 CiteScore:1.0 position: 701/1254 Cuartil: Q3

Bajo Benito, J.M., Sánchez-Matamoros García, G. y Gavilán Izquierdo, J.M. (2021). The Use of Logical Implication as an Indicator of Understanding the Concept of Number Sequences. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education, 17* (12), 1-12. https://doi.org/10.29333/ejmste/11429

SJR-Factor de Impacto:0.569 Posición 442/1380 Cuartil: Q2
CiteScore: 4.400 Posición 181/1406 Cuartil: Q1

Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Sánchez-Matamoros García, G. (2023). The concept of number sequence in graphical representations for secondary school students. *European Journal of Educational Research, 12*(1), 155-166. https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.155

SJR-Factor de Impacto: 0.31 Posición: 783/1369 Cuartil: Q3
CiteScore:2.4 position: 479/1406 Cuartil: Q3

Justificación de los trabajos presentados

Los tres artículos que integran el compendio de publicaciones corresponden a estudios realizados con estudiantes de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años). En el primer artículo (Bajo et al., 2019) se caracteriza la compresión del concepto de sucesión numérica en estos estudiantes para ello adaptamos como marco teórico la teoría APOS, y se caracterizó el esquema del concepto de sucesión numérica a través del uso que hacen los estudiantes de los elementos matemáticos, las relaciones que se establecen entre ellos, los registros de representación y las construcciones mentales que se ponen de manifiesto en la resolución de las tareas matemáticas que se les propusieron. El segundo artículo (Bajo et al., 2021) se centra en el papel que juega el uso de las relaciones lógicas, en particular de la implicación lógica, como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica. Y, por último, en el tercer artículo (Bajo et al., 2023) nos centramos en el papel que desempeña, de forma particular, el registro de representación gráfico en el concepto de sucesión numérica en la caracterización de la comprensión de dicho concepto siendo su uso fundamental en la transición entre niveles del desarrollo del esquema.

Índice

Capítulo I: INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Capítulo I: INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Un campo de interés en la investigación en Educación Matemática es la caracterización de la comprensión de conceptos de análisis matemático, debido a las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión de dichos conceptos y que son base para estudios superiores. Como señala Artigue (1995) en referencia a la comprensión de estos conceptos, el simple hecho de simular mecánicamente algunos algoritmos referidos a un concepto, no lo dotan de significado para después poder aplicarlo a situaciones diversas que necesiten de su comprensión.

En nuestro estudio queremos profundizar en la comprensión del concepto de sucesión numérica, ya que como indican Azcárate y Camacho (2015) hay poca presencia de investigaciones sobre dicho concepto, ya sea a nivel nacional como internacional, donde los estudios van encaminados principalmente al concepto de límite, derivada, función, integral y series numéricas.

En este primer capítulo haremos un recorrido histórico del concepto de sucesión numérica, a continuación, situaremos las sucesiones numéricas en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria, y por último nos centraremos en las investigaciones sobre sucesiones numéricas en educación matemática.

1.1 Recorrido histórico del concepto de sucesión numérica

En este epígrafe hacemos un esbozo de los principales aportes de los que se han encontrado evidencias históricas sobre el concepto de sucesión numérica, pues es difícil establecer con precisión la historia de dicho concepto. Para ello, hemos considerado tres periodos: un primer periodo donde se recogen los inicios del concepto en las civilizaciones más antiguas. Este periodo finaliza con el primer tratado donde aparece de forma rigurosa el concepto de sucesión numérica. Un segundo periodo que comienza con la revolución científica que marcó la pauta para una nueva matemática, en este periodo mostramos los avances del concepto hasta el siglo XVIII y un último periodo en el que se separan las ramas de la matemática, marcado por la revolución industrial, en el que aparecen más aplicaciones para la teoría de números, incluyendo a las sucesiones numéricas (tabla 1).

Tabla 1: Periodos del recorrido histórico del concepto de sucesión numérica.

Periodo I: Hasta el S. III a.C.	Periodo II: S. II a.C. hasta S. XVII	Periodo III: S. XVIII hasta S. XXI
Destacamos algunos hechos aislados desde el origen de la Historia, señalando aquellos aspectos más relevantes sobre el concepto de sucesión numérica, hasta el primer escrito donde se trata de forma rigurosa este concepto: • Asta de reno con marcas de números impares (13000 a.C.) • Papiro egipcio de Rhind (1650 a.C.) • Tablas egipcias y tratado sobre hechos numéricos de la escuela pitagórica (S. IV a.C.) • Tratado sobre las progresiones, Euclides (S. III a.C.)	En este periodo no había una diferencia clara entre las disciplinas matemáticas, y la revolución científica marcó la pauta para una nueva matemática: • Tratado Introducción a la aritmética, retomando los trabajos de los pitagóricos, Nicómaco (S. I) • Obra "Liber Abaci" donde se recogen fórmulas sobre sucesiones, Leonardo de Pisa (S. XII) • Las progresiones como punto de partida de los logaritmos, John Napier (1594) • Teorema del binomio, Newton (S. XVII)	Se separan las ramas de la matemática, y con la revolución industrial, aparecen más aplicaciones para la teoría de números, que incluye a las sucesiones numéricas: • Teoría de las series, Taylor (S. XVII) • La distribución de los números primos dentro de la sucesión de números naturales, Euler (S.XVIII) • La convergencia de una sucesión, Otto Stolz (S. XIX) • En la actualidad se estudian las sucesiones dentro de la matemática discreta con sus aplicaciones a la computación y redes

- **Periodo I (Hasta el Siglo III a.C.)**

En este periodo aparecieron las primeras sucesiones numéricas de forma natural. Evidencias empíricas de estas primeras nociones de sucesiones numéricas en nuestra civilización son: las series de números naturales, y las progresiones (primero aritméticas y posteriormente geométricas).

El uso de las sucesiones numéricas aparece muy pronto en la Historia, es una de las ideas más antiguas que se conocen. Así por ejemplo, en el Museo de Aquitania de Burdeos se conserva un asta de reno, hallado en Brassempouy (Las Landas, Francia) y fechado hace unos 15.000 años. En el asta aparecen marcados 1, 3, 5, 7 y 9 con trazos rectilíneos, es decir, contiene una representación gráfica de la sucesión de los primeros números impares (González et al., 2010). También, datado en el año 1650 a.C está el papiro egipcio de Rhind, en el que aparecen progresiones vinculadas al reparto del pan (Maza, 2009).

Otro de los hallazgos más relevantes, situado en la época mesopotámica, fue el descubrimiento de unas tablas, fechadas en el S. IV a.C. en las que se muestran todo tipo de operaciones aritméticas, trabajo con números fraccionarios, números cuadráticos, números enteros, raíces cuadradas, potencias. Esto llevó a la resolución de ecuaciones cuadráticas y sirvió de base para el desarrollo de procedimientos para calcular las sumas de las progresiones, tanto aritméticas como geométricas (Ríbnikov, 1987).

También en el siglo IV a.C., obra de la escuela pitagórica, apareció el primer compendio sobre hechos numéricos abstractos. Entre las primeras preocupaciones de esta escuela se encontraban varios tipos de números como los números cuadrados, rectangulares, triangulares, etc. Estos tipos de números fueron denominados por la ciencia de esa época como números figurados. Estas secuencias constituyen sucesiones cuadráticas y se podían hallar por medio de la representación de figuras (Wussing, 1998).

Posteriormente Euclides, matemático griego del siglo III a.C., fue el primero en tratar de manera precisa las progresiones. Este matemático fundó la Escuela de Matemática de Alejandría, donde escribió su gran obra compuesta por 13 libros en la que desarrolló sobre todo la geometría, pero también resaltó la aritmética. En su libro IX trató las progresiones aritméticas que él llamó proporciones continuas; y en el libro VIII las progresiones geométricas (Solís y Sellés, 2005).

- **Periodo II (S. II a.C. hasta S. XVII)**

En este segundo periodo la revolución científica marcó la pauta para una nueva matemática, sin que hubiera diferencia clara entre las disciplinas matemáticas.

Uno de los tratados sobre teoría de números más importante en esta fase, fue realizado por Nicómaco de Gerasa (100 d. C), titulado: "*Arithmetike eisagoge*" (Introducción a la aritmética), tratado que obtuvo gran relevancia durante más de diez siglos. Nicómaco retomó los trabajos de los pitagóricos y fue uno de los artífices del resurgimiento de la aritmética, alegando que era la base de las demás disciplinas matemáticas tales como geometría, astronomía y música. Nicómaco fue más allá que los pitagóricos al ver relaciones entre conjuntos de números de forma general, descubriendo patrones numéricos como por ejemplo: "Dados los números impares, la suma de cada secuencia dada por los naturales es el cubo de la cantidad que conlleva, es decir, 1 es el cubo de 1; 3+5 es el cubo de 2; 7+9+11 es el cubo de tres, y así sucesivamente.

Nicómaco repite la fórmula de Euclides sobre números perfectos y clasifica todo tipo de razones que fueron muy importantes posteriormente para la música (Kline, 1992).

En el siglo XII, uno de los matemáticos más importantes que realizó estudios sobre sucesiones numéricas fue Leonardo de Pisa (1170-1250), en su obra "*Liber Abaci*" recoge fórmulas sobre sucesiones. Este matemático planteó una serie de problemas aplicados a situaciones reales, que siguen un patrón de comportamiento que le lleva a una serie de números con una regla de formación, en la que cada número es la suma de los dos anteriores, es decir, sigue la serie de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … presente en muchos fenómenos naturales.

Fue en esta época (S. XIII) cuando tuvo gran auge la resolución de problemas relacionados con las progresiones tanto geométricas como aritméticas, y donde se empezaron a plantear los problemas con infinitésimos, es decir, series infinitas que se acercan a un valor real (Struik, 1986).

En el siglo XVI, el punto de partida para el descubrimiento de los logaritmos con John Napier en 1594 fueron las progresiones geométricas y progresiones aritméticas combinadas (Stewart et al. 2013).

Una de las contribuciones de las sucesiones numéricas en esta época fue su aplicación al estudio de series. Así, Newton (1642-1727) desarrolló cualquier potencia de sumandos como una serie finita de términos (Teorema del binomio Newton).

- **Periodo III (S. XVIII hasta S. XXI)**

En este último periodo se dividen las disciplinas matemáticas como ramas de conocimiento, y la revolución industrial marcó la pauta para una matemática con más aplicaciones a la vida cotidiana, lo que conllevó que aparecieran más aplicaciones para la teoría de números, que incluyeron a las sucesiones numéricas.

Aunque una lista de números con un patrón determinado ha suscitado a lo largo de la Historia una atención especial de los matemáticos de todas las épocas, no se le dio un papel fundamental a las sucesiones numéricas hasta el desarrollo de las matemáticas del siglo XVIII, al perfeccionarse el concepto de paso al límite de una sucesión como el valor al cual se acercan de forma progresiva sus términos.

Como mencionamos en el periodo anterior, las sucesiones se aplicaban al estudio de series, infinitésimos y en particular al estudio de límites, lo que nos lleva a destacar a algunos matemáticos de esta época que fundamentaron sus estudios en estos conceptos. Entre ellos destacamos a:

- Otto Stolz (1842-1905) que estudió la convergencia de una sucesión a partir de otras sucesiones monótonas,
- Euler (1707-1783) que utilizó métodos analíticos para descubrir características de cómo los números primos se distribuyen dentro de la sucesión de números naturales y
- Taylor (1685-1731) que construyó la teoría de las series.

Actualmente Weigand (2015) considera que las sucesiones deberían recibir más atención, haciendo énfasis en sus descripciones en términos de relaciones de recurrencia, pues son prototipos de objetos discretos en matemáticas (elementos de las matemáticas discretas). Estos son fundamentales en las comunicaciones (teléfono móvil, conexión a internet, televisión por satélite o cable y cualquier sistema de comunicación que envíe o reciba mensajes que usan secuencias de 0 y 1).

1.2 La noción matemática de sucesión numérica

Según la RAE el término sucesión significa *"Conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada".* Apostol (1996), declara que, en el lenguaje cotidiano, los términos "*serie"* y *"sucesión*" se usan con el mismo significado y se utilizan para designar un conjunto de números, cosas o sucesos dispuestos en un determinado orden.

En matemáticas, los términos sucesión y serie tienen distintos significados. El término sucesión en matemáticas tiene un significado similar al proporcionado por la RAE.

En el pasado, se usaba la palabra progresión para nombrar a las sucesiones, pero, actualmente, el término progresión solo se usa para algunos tipos particulares de sucesiones, donde para obtener un término de la sucesión, a cada término anterior se le suma o se le multiplica siempre por una cantidad constante para obtener el término siguiente, y el término sucesión o secuencia se utiliza de forma general para cualquier tipo de lista numérica.

En nuestra investigación, siguiendo la definición de Stewart et al. (2013) consideramos el concepto de sucesión numérica, como una lista de números, de la siguiente forma:

> Una sucesión es un conjunto infinito de números escritos en un orden específico, a_1, a_2, a_3..., a_n, ..., donde cada miembro del conjunto ha sido etiquetado con un subíndice natural, siendo a1 el primero, y en general el término n-ésimo a_n, notaremos la sucesión como $\{a_n\}$. (p.178).

Existen diversas formas de construir los términos de una sucesión numérica, nosotros vamos a considerar las siguientes: mediante alguna regla o fórmula que defina el término n-ésimo (término general), a través de un conjunto de instrucciones que indican cómo se obtiene un término a partir de los anteriores (por recurrencia), o bien dando una serie de términos consecutivos ordenados uno detrás de otro como una lista infinita de números (por extensión).

Del mismo modo, Stewart et al. (2013) define los distintos tipos de progresiones:

> Una progresión aritmética, es una sucesión de la forma a, a+d, …, a+nd, ..., donde el número a es el primer término y d es la

diferencia común entre dos términos consecutivos. Y una progresión geométrica es una sucesión de la forma a, ar, ..., ar^n, ..., donde el número a es el primer elemento y $r \neq 1$ la razón de la progresión (pp.181-183).

Las sucesiones numéricas pueden tener diferentes propiedades, como la monotonía y la acotación, Stewart et al. (2013) define ambos conceptos de la siguiente forma:

> Una sucesión es monótona creciente cuando para todo número natural n verifica lo siguiente: $a_n \leq a_{n+1}$. Y monótona decreciente cuando para todo número natural n se verifica que $a_n \geq a_{n+1}$. Una sucesión es acotada si tiene cota superior e inferior, donde c es una cota superior (inferior) de una sucesión si para todo término de la sucesión $a_n \leq c$ ($a_n \geq c$) (pp.188-189).

1.2.1 La noción de sucesión numérica en el currículum de Educación Secundaria Obligatoria

Desde el punto de vista curricular, cuando se inició esta investigación el concepto de sucesión numérica aparecía en el Real Decreto 1105/2014 del Boletín Oficial del Estado (B.O.E.) del 3 de enero de 2015, en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y en la de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 3º de Educación Secundaria Obligatoria. Dicho concepto se trataba de la misma forma en ambas asignaturas, situándose en el bloque 2 dedicado a Números y Álgebra, de la siguiente manera: “Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico. Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes Progresiones aritméticas y geométricas.” (BOE, 3 del 3 de enero de 2015 Sec. I, p. 392).

En el currículo actual de Educación Secundaria Obligatoria, BOE, 76 del 30 de marzo de 2022 Sec. I, p. 41732, en la nueva ley de educación LOMLOE, aparece este concepto en dos apartados de saberes básicos, en un primer apartado sobre el sentido numérico, haciendo referencia a relaciones entre números, correspondiendo con el contenido específico: patrones y regularidades numéricas. Y en un segundo apartado sobre sentido algebraico, haciendo referencia a patrones, pautas y regularidades, y más concretamente: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos, generalización y término general.

En relación a las orientaciones curriculares, los libros de textos (SM, Oxford, Santillana, Anaya, Vicens-Vives) concretan en las unidades didácticas de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria de la asignatura de Matemáticas orientada a las enseñanzas académicas la idea de regularidad, siguiendo con la definición de sucesión de números reales y término general.

Ejemplos de tareas en las que se abordan estos contenidos lo encontramos en el libro "Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas" Editorial SM (2017, p.217), en estas tareas se le pide al estudiante que calcule términos de una sucesión a partir de una serie de valores numéricos para que reconozcan la regularidad o que a partir de la expresión analítica calculen varios términos de la sucesión numérica (figura 1).

ACTIVIDADES

1. Calcula los tres primeros términos y el término décimo de las sucesiones:

$a_n = n^2 - 3n$ $\quad b_n = n - \frac{24}{n}$ $\quad c_n = (-1)^n$

2. Escribe en tu cuaderno los tres términos siguientes de estas sucesiones.

a) 1, 3, 6, 10, 15...

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}...$

c) 10, 1, −8, −17...

d) $\frac{7}{5}, \frac{4}{10}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{20}...$

3. Escribe el término general y los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) A cada número natural le corresponde su cubo más dos unidades.

b) A cada número natural le corresponde el cuadrado de su anterior.

c) El primer término es 1 y cada uno de los siguientes es el doble del anterior más 1.

Figura 1: Ejercicios del libro de SM (2017) de 3º de la ESO relativos a las sucesiones, (p.217).

Además, en las tareas aparecen distintas formas en las que pueden expresarse las sucesiones numéricas (lista de números, recurrencia, término general). A continuación, mostramos un ejemplo de este tipo de tareas como aparecen en los libros de texto (figura 2):

4. Calcula los seis primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

a) $a_1 = 6, a_n = a_{n-1} + n$

b) $b_1 = 2, b_2 = 3, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$

c) $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 1, c_n = 2c_{n-3} + c_{n-1}$

5. Encuentra el término general de estas sucesiones:

$(a_n) = (6, 11, 16, 21...)$ $\quad (c_n) = (2, 6, 12, 20...)$

$(b_n) = (1, 4, 9, 16...)$ $\quad (d_n) = (2, 6, 14, 30...)$

7. Encuentra la ley de recurrencia de esta sucesión en función de los tres términos anteriores:

$(a_n) = (1, 2, 3, 6, 11, 20, 37...)$ para $n > 3$

8. Encuentra la ley de recurrencia de estas sucesiones, en función de los dos términos anteriores.

a) $(a_n) = (5, 9, 4, -5, -9, -4, 5...)$ para $n > 2$

b) $(b_n) = (1, 4, 6, 14, 26, 54, 106...)$ para $n > 2$

c) $(c_n) = (1, 3, -1, 7, -9, 23, -41...)$ para $n > 2$

Figura 2: Ejercicios del libro de SM (2017) de 3º de la ESO relativos a las sucesiones (p. 217).

De la misma forma, mostramos algunas tareas del libro de texto de Anaya (2015) referidas a las progresiones aritméticas y geométricas, en las que los estudiantes abordan las regularidades sobre sucesiones numéricas, extraen términos de las sucesiones y calculan las reglas de formación, como mostramos en las figuras 3 y 4.

Actividades

www 4. Refuerza el concepto de progresión aritmética.

1 El primer término de una progresión aritmética es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2{,}5$. Escribe sus diez primeros términos.

Haz lo mismo para otra cuyo primer término es $t_1 = 20$ y cuya diferencia es $d = -3$.

2 Calcula, para las progresiones de arriba:

b_{36} c_{31} d_{1000}

3 Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).

4 a) Si dos términos de una progresión son:

$s_1 = 6$ y $s_3 = 9$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

Figura 3: Tareas del libro de texto de la Editorial Anaya (2015) sobre progresiones aritméticas "Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas", (p.62).

Actividades

1 Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.

2 De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.

3 En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.

4 En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.

5 En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.

Figura 4: Tareas del libro de texto de la Editorial Anaya (2015) sobre progresiones geométricas "Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas", (p.65).

En relación con los registros de representación, indicar que los que aparecen con más frecuencia en los libros de texto referidos al concepto de sucesión numérica son los registros numérico y algebraico; sin embargo, se observa poca presencia de los registros representación gráficos, tanto lineal como cartesiano. Un ejemplo del registro de representación gráfico cartesiano, lo tenemos en los libros de texto de la Editorial Vicens-Vives

(2015) “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas”, (p. 116), y “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas”, (p. 116).

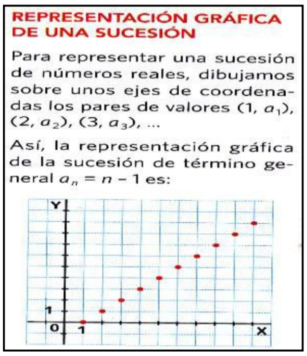


Figura 5: Representación gráfica cartesiana de una sucesión numérica de los libros de la editorial Vicens-Vives (2015, p.116).

También en algunos libros de texto podemos encontrar ejemplos del registro de representación gráfico lineal de una sucesión numérica, como sucede en los libros de “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” y “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas” de la Editorial SM (2017) (Figura 6).

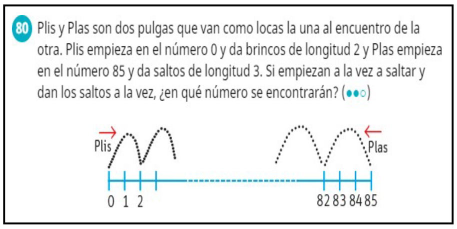


Figura 6: Representación gráfica lineal de una sucesión numérica, libros de la editorial SM (2017, p. 227).

Otro tipo de tareas que aparece en los libros de textos son aquellas en las que a partir de expresiones dadas en el registro de representación algebraico, se le demanda al estudiante una traslación a los registros de representación gráfico lineal y gráfico cartesiano, un ejemplo de este tipo de tarea lo mostramos en la figura 7.

4. Representa sobre la recta real y, a continuación, en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano las sucesiones dadas por la expresión de su término general en cada uno de los siguientes casos:

a) $a_n = n^2 - 2n$

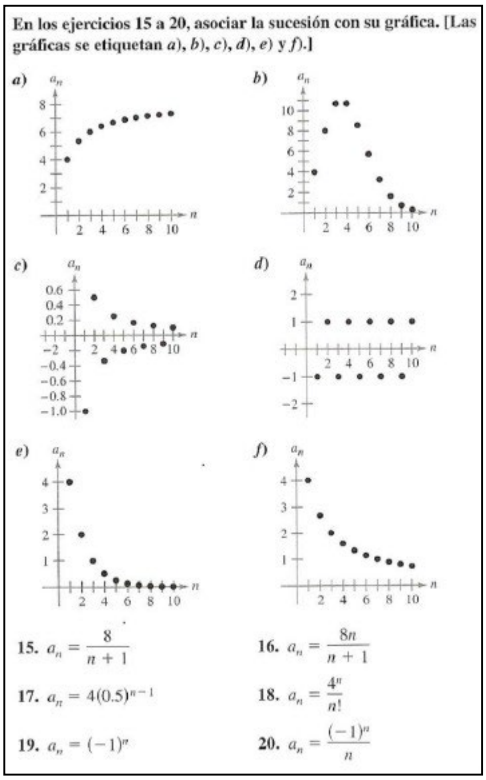
b) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+2}$

d) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

Figura 7: Tarea del libro de la editorial Guadiel (2002, p.206)

Otro tipo de tareas que aparecen en libros especializados son aquellas en las que se le demanda al estudiante que emparejen sucesiones numéricas dadas en distintos registros de representación. Un ejemplo de ello podemos encontrarlo en el libro de Stewart et al. (2013) (Figura 8), en esta tarea, en particular, deben emparejar sucesiones numéricas dadas en registros de representación gráfico-cartesiano con sucesiones dadas en registros de representación algebraico


En los ejercicios 15 a 20, asociar la sucesión con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

15. $a_n = \dfrac{8}{n+1}$

16. $a_n = \dfrac{8n}{n+1}$

17. $a_n = 4(0.5)^{n-1}$

18. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$

19. $a_n = (-1)^n$

20. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Figura 8: Tareas correspondientes al libro de Stewart et al. (2013, p.708).

1.3 Las sucesiones en las investigaciones en Educación Matemática

En relación a la comprensión del concepto de sucesión numérica, diversas investigaciones en distintos conceptos del análisis matemático han mostrado que la relevancia de la comprensión del concepto de sucesión numérica es un requisito previo para la comprensión de otros conceptos como series (Codes, 2013), límites (Mamona-Downs, 1990 y 2001; Roh, 2008; Sierpinska, 1990; Tall y Vinner, 1981), o en la integral cunado se introduce mediante las sumas de Riemann (Boigues et al., 2010).

Una primera muestra de investigaciones en las que se pone de manifiesto que una concepción correcta del concepto de sucesión numérica es una condición necesaria para la comprensión de otros conceptos matemáticos como límites y convergencia de series numéricas, lo tenemos en las investigaciones de Sierpinska (1990). Este autor distinguió diversas percepciones sobre las sucesiones numéricas. Por una parte, una percepción de sucesión numérica relacionada con una fórmula que permite calcular los términos de la misma, y por otra, una percepción de sucesión numérica como lista de números (sucesión infinita). Sierpinska usó estas percepciones para estudiar el paso al límite y la convergencia de sucesiones numéricas.

Además, en la investigación sobre el concepto de límite de Roh (2008) se mostró que un aspecto importante vinculado a las sucesiones numéricas es el uso de diferentes registros de representación. Esta autora usó tareas con sucesiones numéricas expresadas en registro algebraico a través de su término general (figura 9), y en registro de representación gráfico cartesiano relacionándolas con su expresión analítica (figura 10).

Table 1 Sequences used in the interviews

Sequences
$a_n = 1/n$
$a_n = 1/(2n+1)$
$a_n = (1/2)^{n-1}$
$a_n = n/(n+1)$
$a_n = n$
$a_n = \sqrt{n}$
$a_n = n^2/(n+1)$

Figura 9: Ejemplos de término general de sucesiones que aparecen en las entrevistas de la investigación de Roh (2008, p.221).

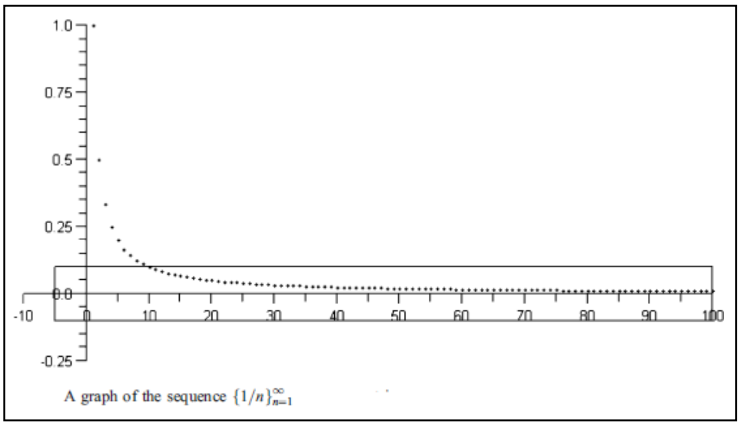


Figura 10: Tarea de la investigación de Roh (2008), relativas a las sucesiones (p.221).

También, Claros et al. (2016) en su investigación hace uso de diferentes registros de representación numérico, algebraico y gráfico (figuras 11 y 12), e introduce el fenómeno aproximación simple intuitiva (a.s.i.) para referirse a la idea informal de límite. Estos autores consideran que los registros de representación de las sucesiones numéricas juegan un papel importante para avanzar en la comprensión de conceptos relacionados con estas.

Fenómeno a.s.i. en el sistema de representación tabular

n	1	2	3	4	5	…	100	….	1000	…
$a_n = \frac{n+1}{n}$	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5		101/100		1001/1000	…
a_n	2	1,5	1,333….	1,25	1,2	…	1,01	….	1,001	…

Figura 11: Ejemplo de representación analítica de Claros et al. (2016, p. 93).

Ejemplo: $a_n = \frac{n+1}{n}$. Representamos esta sucesión, en primer lugar, dando unos cuantos valores «pequeños» a n: 1, 2, 3, 4, 5, 6…

Gráfica 1.
Fenómeno a.s.i. en el sistema de representación gráfico

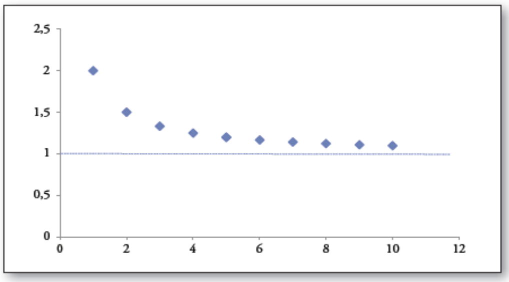


Figura 12: Ejemplo de registro de representación algebraico y registro de representación gráfico-cartesiano, Claros et al. (2016, p. 93).

De la misma forma, distintas investigaciones (Bagni, 2005; Codes, 2010; Codes y González-Martín, 2017; Martínez-Planell et al., 2011) destacan la relevancia de la investigación sobre el concepto de sucesión numérica en relación con las series numéricas, puesto que formalmente la suma de una serie es el límite de una sucesión de sumas parciales, y tanto las sucesiones numéricas como sus límites son claves en la comprensión del concepto de serie numérica e inevitablemente las concepciones erróneas sobre sucesiones numéricas repercuten en la comprensión de las series.

A partir de las investigaciones centradas en otros conceptos matemáticos, ha surgido la necesidad de realizar investigaciones en educación matemática centradas en el concepto de sucesión numérica. Una de las primeras investigaciones centradas en dicho concepto fue la realizada por Mamona-Downs (2001) que vio la conveniencia de introducir el concepto de sucesión sin vincularlo al límite, puesto que los estudiantes confunden el valor final de una sucesión infinita con el límite de la misma.

Diferentes investigadores han planteado sus trabajos centrándose en distintos aspectos relacionados con el concepto de sucesión numérica (Biza et al., 2020; Cañadas, 2007; Crisp et al., 2012; Djasuli et al.,2017; González et al., 2011; McDonald et al., 2000; Montenegro et al., 2018; Mor et al., 2006; Przenioslo, 2006; Rivera, 2013; Roh, 2008). Un interés común en estos trabajos es la necesidad de que los estudiantes construyan generalizaciones mediante la expresión algebraica del término general a partir de una serie de datos expresados en diferentes registros de representación.

Centrándose en las generalizaciones, Mor et al. (2006) en su investigación con estudiantes de Educación Secundaria (10-14 años) observaron que las sucesiones numéricas son consideradas intuitivamente recursivas por los estudiantes de Educación Secundaria. Es decir, más que una relación entre los valores y sus posiciones, respectivamente se ven como relación entre valores sucesivos de una secuencia.

Con este mismo foco, McDonald et al. (2000) hace un estudio con estudiantes universitarios. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes universitarios identifican dos objetos cognitivos diferentes en relación con el concepto de sucesión, por una parte, un objeto como un listado de números que denominaba Seqlist y, por otra parte, otro objeto que sería una función, cuyo dominio pertenece al conjunto de los naturales, que llamó Seqfunc.

McDonald et al. (2000), por las características de los estudiantes (universitarios) con los que realizaron su investigación, centraron su interés en el segundo objeto cognitivo, Seqfunc.

Complementando la investigación de McDonald et al. (2000), Przenioslo (2006) realizó una investigación sobre la comprensión del concepto de sucesión numérica con estudiantes que iban a acceder a estudios universitarios (16-19 años), y se centró en el objeto cognitivo Seqlist. En su trabajo consideró diferentes registros de representación: numérico, algebraico y gráfico (plano cartesiano) (figura 13).

Entre los resultados de su investigación destacamos que la mayoría de los estudiantes percibían una sucesión como una progresión aritmética. Y que se debía profundizar en caracterizar las sucesiones numéricas en diferentes registros de representación (gráficos, tablas, numéricos y expresiones algebraicas).

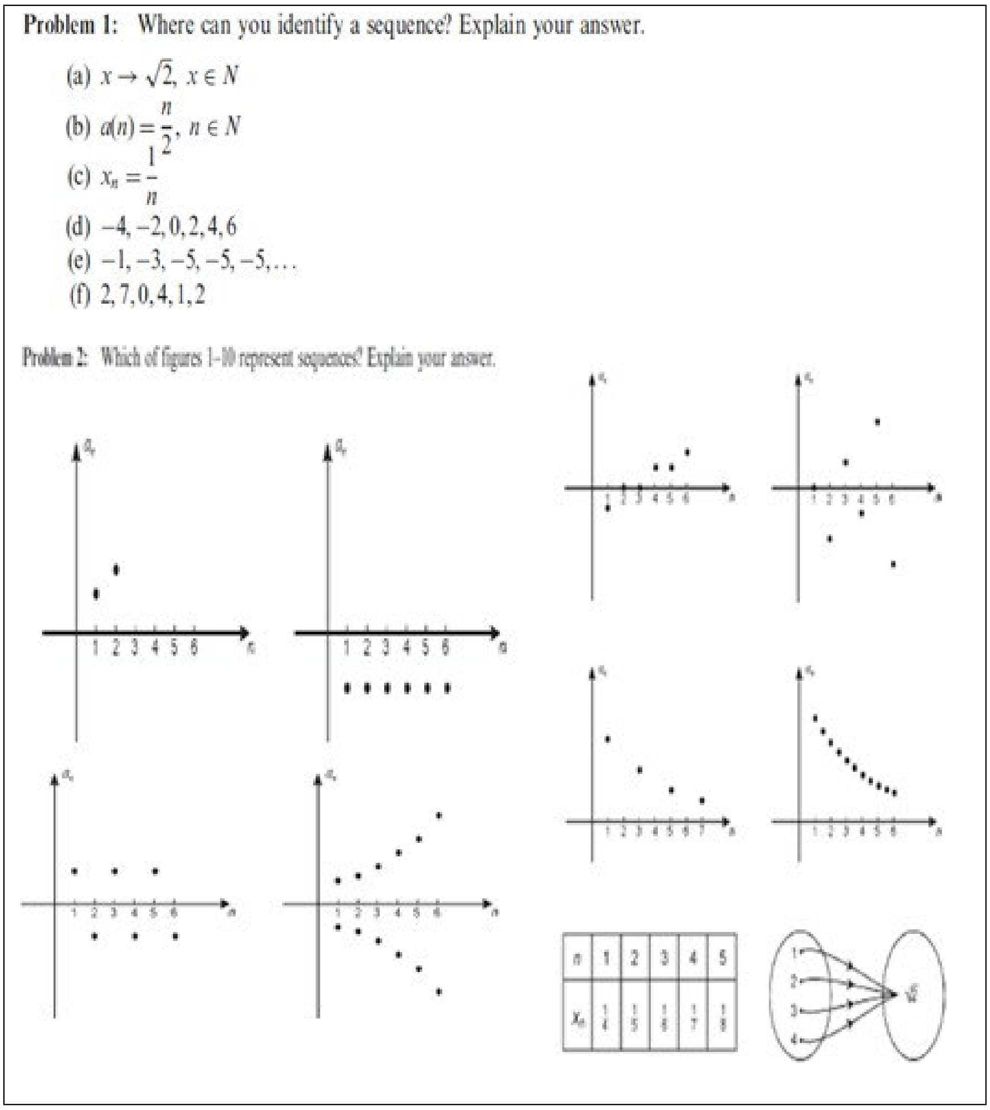


Figura 13: Problemas 1 y 2 de la investigación de Przenioslo (2006, pp.808-809).

También, en una investigación posterior sobre el razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (12-14 años) al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas, Cañadas (2007) considera, en los resultados de su estudio, que no sólo es importante el uso de diferentes registros de representación sino también la traslación entre ellos. Esta investigadora en la presentación de las tareas de su estudio solo usa las representaciones numéricas, verbal y el dibujo (figura 14). Sin embargo, entre los resultados de su estudio considera además de los registros numérico, algebraico y gráfico (plano cartesiano) tratados también en la investigación de Przenioslo (2006), el registro gráfico vinculado a la recta numérica.

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:
3, 7, 13, 21,...
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

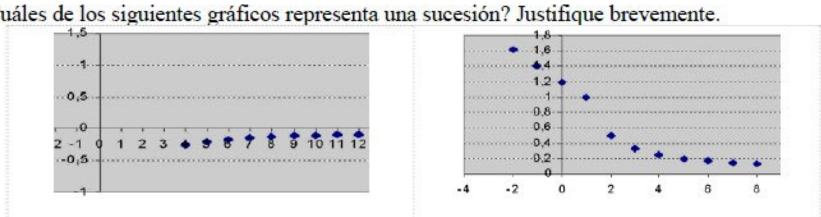
5. Se tiene la siguiente secuencia de números:
1, 4, 7, 10,...
- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

Figura 14: tareas de la investigación de Cañadas (2007, pp. 476).

Una limitación de este trabajo, según señala esta autora en sus conclusiones, ha sido el hecho de centrarse solo en las progresiones, y sugiere ampliar el contenido de las tareas a todo tipo de sucesiones numéricas. Además, aquellos estudiantes que usan un mayor número de registros de representación son los que llegan a la resolución de la tarea, siendo el registro gráfico el menos usado por los estudiantes.

En la investigación de González et al. (2011), realizada con estudiantes universitarios, se plantearon tareas que abordan las traslaciones en distintos registros de representación (figura 15). Uno de los resultados de su estudio es que los estudiantes tienen dificultades en realizar traslaciones entre los registros de representación gráfico y algebraico al abordar el concepto de sucesión numérica, en particular, tienen dificultades con los registros de representación gráfico cartesiano y algebraico, y especialmente las traslaciones entre ellos.

2. ¿Cuáles de los siguientes gráficos representa una sucesión? Justifique brevemente.



6.1) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los primeros términos de las siguientes sucesiones y analiza la convergencia de las mismas.

a) $a_n = \dfrac{1-n}{n}$ $\quad b_n = 4 - \dfrac{2}{n}$ $\quad c_n = a_n + b_n$

b) $a_n = \dfrac{2n+2}{n}$ $\quad b_n = (-1)^n$ $\quad c_n = a_n . b_n$

Figura 15: Tareas de la investigación de González et al. (2011, p.10).

Siguiendo con este mismo foco de interés, Djasuli et al. (2017) proponen una tarea a estudiantes de Educación Secundaria (16-18 años). La tarea demanda a los estudiantes que encuentren el término general de una sucesión numérica a partir de los primeros términos (figura 16). Estos autores consideran que este tipo de tarea es fundamental para la construcción formal de progresiones aritméticas y geométricas.

The research problem of this study is: how students find the formal formulation of n-th term of the following irregular sequence number:

a. Determine the three next numbers from the sequence number 1, 2, 4 , ..., ..., ...

b. If the sequence number is continued to-n, please write the general formulation of the n-th term.

Figura 16: Tarea de la investigación de Djasuli et al. (2017, p. 623).

Por otro lado, la investigación de Biza et al. (2020) realizada con estudiantes universitarios, hace un estudio para identificar las estrategias usadas por los estudiantes para encontrar el enésimo término de sucesiones cuadráticas a partir de los primeros valores presentados en distintos registros de representación (tabular, pares de datos dispersos (n, a_n) y secuenciales (por extensión) (figura 17), con el propósito de identificar si estos registros de representación influyen en la resolución de la tarea por parte de los estudiantes.

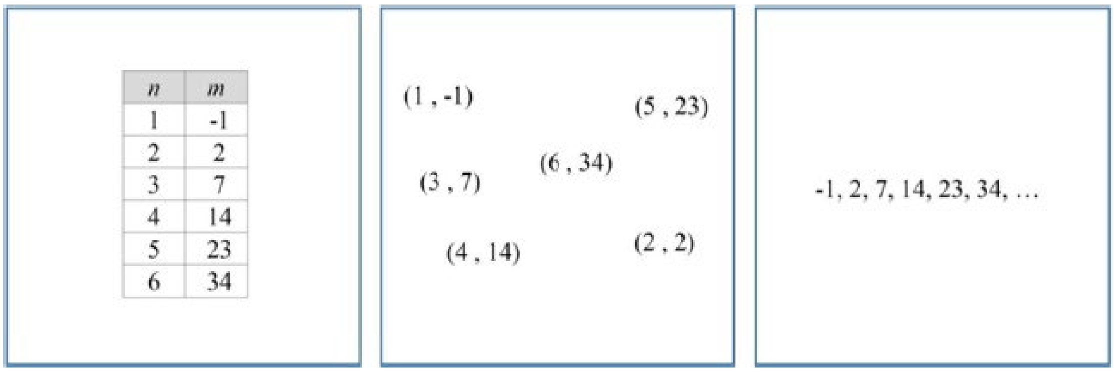


Figura 17: registros de representación usados en las tareas de la investigación de Biza et al. (2020, p.1111).

El análisis de los datos mostró que cuando la tarea viene dada en forma de tabla de valores, los estudiantes usan estrategias recursivas, mientras que cuando la tarea viene dada en forma secuencial, los estudiantes tienen más dificultades en la resolución de la tarea. Estos autores concluyen que es necesario realizar más investigaciones que profundicen en este sentido, pues las evidencias sobre cómo influyen los registros de representación en los que se presenta la tarea en relación con las posibles estrategias de resolución que usan los estudiantes no fueron concluyentes en esta investigación.

En esta misma línea, Montenegro et al. (2018) hacen una investigación en relación a los registros de representación con estudiantes de Educación Secundaria (10-13 años). Estos autores consideran que las representaciones múltiples de un concepto matemático son una de las mayores dificultades con las que se encuentran los estudiantes. El objetivo de su estudio es investigar el impacto del uso de representaciones visuales en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, más concretamente en explorar algunos patrones de crecimiento visual y numérico.

1.4 El problema de investigación.

A partir del estudio de estas investigaciones sobre la comprensión del concepto de sucesión numérica, hemos observado que se ha estudiado la comprensión de dicho concepto atendiendo a algunas de sus características. Así, hay investigaciones que se centran en concepciones del concepto sin profundizar en las traslaciones entre los registros de representación (Przenioslo, 2006). Otras se focalizan en tipos especiales de sucesiones, como las lineales y cuadráticas (Biza et al., 2020; Cañadas, 2007), otros centran la atención en el estudio de las generalizaciones (Djasuli et al., 2017; Mor et al., 2006) y por último, investigadores que estudian algún tipo de traslación entre diferentes registros de representación (González et al.,2011; Montenegro et al., 2018).

Por todo ello, el problema de investigación que nos planteamos se centra en caracterizar la comprensión del concepto de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria.

Capítulo II: MARCO TEÓRICO

Capítulo II: MARCO TEÓRICO

Para estudiar la comprensión del concepto de sucesión numérica, consideramos como marco teórico la Teoría APOS (Arnon et al., 2014; Dubinsky, 1991). Este marco aborda el desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos en términos de la construcción de esquemas, mediante el mecanismo de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1983). En este modelo se define un esquema "como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática" (Trigueros, 2005, p. 11). Un esquema se puede transformar en una estructura estática (objeto) y/o se puede usar como una estructura dinámica que asimila otros objetos o esquemas relacionados.

Fundamentalmente, la teoría APOS es un marco utilizado para explicar cómo los individuos construyen, a partir de constructos mentales, la comprensión de una noción matemática. Por lo tanto, desde una perspectiva cognitiva, es un modelo para describir la comprensión de conceptos matemáticos.

Desde el marco APOS, una herramienta poderosa a la hora de describir y conjeturar el pensamiento matemático, detallando las estructuras involucradas en el aprendizaje de un concepto matemático, es la descomposición genética (Arnold et al., 2014).

2.1 Descomposición Genética de un Concepto Matemático.

Uno de los constructos principales de la teoría APOS es la descomposición genética de un concepto, definida por Asiala et al. (1996) "La descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, que pueden describir cómo el concepto se desarrolla en la mente del individuo" (p. 7).

La descomposición genética de una noción matemática no es única y proporciona una trayectoria posible del estudiante para la formación del concepto, sin embargo, no tiene que ser representativa de todas las trayectorias posibles que pueden realizar los estudiantes.

La construcción de la descomposición genética está basada en la experiencia de los investigadores sobre la enseñanza/aprendizaje del concepto sobre el que se está trabajando, el conocimiento de estos sobre el modelo APOS, el conocimiento de estos sobre las matemáticas, el desarrollo histórico del concepto y la revisión de investigaciones sobre el mismo (Arnon et al., 2014).

Por lo tanto, una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras (acción, proceso, objeto) y mecanismos mentales (interiorización, encapsulación, desencapsulación, reversión, coordinación) que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.

Según Arnon et al. (2014) un concepto se concibe primero como una acción, es decir como una transformación externa de un objeto u objetos concebidos previamente. Una acción es externa ya que cada transformación necesita ser realizada explícitamente y guiada por instrucciones externas, además cada paso demanda el siguiente, es decir, los pasos no pueden ser imaginados ni saltados. Un individuo que está limitado a una concepción acción se basa en señales externas.

A medida que las acciones se repiten, el individuo pasa de depender de señales externas a tener control interno sobre ellas. Esto se caracteriza por la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin necesariamente tener que realizar cada uno de manera explícita y por ser capaz de saltar pasos o invertir los pasos del proceso sin necesidad de hacerlo.

Los procesos se construyen utilizando uno de los dos mecanismos mentales: interiorización o coordinación, y cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos procesos.

La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental. Esta permite ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones. (Dubinsky, 1991), es decir, un proceso es una estructura mental que realiza la misma transformación que la acción siendo interiorizada, pero completamente en la mente del individuo, permitiéndole así realizar la transformación sin tener que ejecutar cada paso explícitamente. Una acción interiorizada es un proceso. En contraste con una acción, un proceso es percibido por el individuo como interno y bajo su control.

La coordinación de procesos es el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. De forma general la coordinación puede transformar procesos en procesos o procesos en objetos a partir de la encapsulación, ya que esta es el resultado de aplicar transformaciones a un proceso para convertirlo en una estructura estática donde se le pueden aplicar acciones.

La encapsulación se produce cuando un individuo aplica una acción a un proceso, es decir, ve una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática a la que se pueden aplicar acciones. Si uno se da cuenta del proceso como una totalidad, vislumbra que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y puede realmente construir tales transformaciones (explícitamente o en su imaginación). Entonces decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo.

Una vez que un proceso ha sido encapsulado en un objeto, puede ser desencapsulado, cuando sea necesario, y volver a su proceso subyacente. En otras palabras, aplicando el mecanismo de desencapsulación, un individuo puede volver al proceso que dio origen al objeto (figura 18).

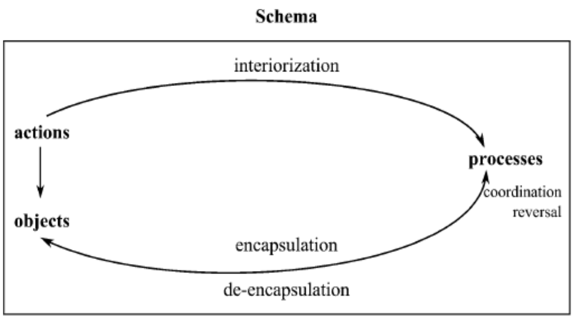


Figura 18: Mecanismos y estructuras mentales para la construcción del conocimiento matemático, Arnon et al. (2014) (p.10).

Además, la descomposición genética de un concepto es la base del ciclo de investigación en la teoría APOS. Un ciclo de investigación consta principalmente de tres partes: Análisis teórico, Diseño e implementación y Observación, análisis y verificación de datos (figura 19).

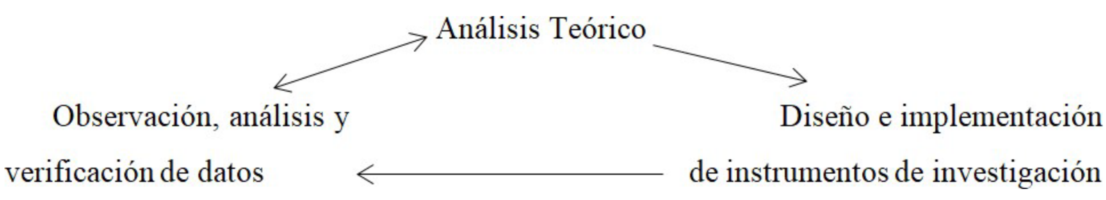


Figura 19: Adaptado del ciclo de investigación (Arnon et al., 2014)

Cada vez que se implementa un ciclo permite obtener una descripción más detallada y cercana a la construcción de los conceptos matemáticos, y la descomposición genética inicial se refina como resultado del análisis sobre los datos empíricos que se obtuvieron.

Los trabajos de investigación en educación matemática han aportado descomposiciones genéticas de diversos conceptos matemáticos, como ejemplos podemos citar los trabajos Cottrill et al. (1996) referido al concepto de límite; MacDonald et al. (2000) relativo al concepto de sucesión como función; Martinez-Planell et al. (2012) en relación con el concepto de series numéricas; Vargas et al. (2011) referido a la función exponencial; Roa-Fuentes y Oktaç (2010) y (2012), en relación al concepto de transformación lineal, y Orts et al. (2016) referido al concepto de recta tangente, entre otros.

2.2 La noción y desarrollo de un esquema en la teoría APOS

El desarrollo de un esquema, basado en la caracterización de Piaget y García (1983), ha sido considerado en distintas investigaciones para describir la comprensión de diferentes conceptos matemáticos (Ariza y Llinares, 2009; Arnold et al. 2014; Baker et al., 2000; Fuentealba et al., 2019; McDonald et al., 2000; Sánchez-Matamoros et al., 2006). En dichas investigaciones, un esquema se desarrolla pasando por tres etapas o niveles (triada): INTRA – INTER – TRANS, en un orden fijo.

A continuación, vamos a describir cada uno de estos niveles según Piaget y García y según las diferentes adaptaciones que cada uno de estos autores han realizado sobre cada uno de estos niveles.

Nivel INTRA:

Para Piaget y García (1983), este nivel se caracteriza por:

> El descubrimiento de diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus propiedades, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay, coordinación de esta pre-operación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores (p.163).

Para estos autores, esta es la fase inicial del conocimiento de un concepto. El individuo toma contacto por vez primera con este nuevo concepto e intenta interactuar con él para ver sus propiedades, es decir, utiliza el concepto de distintas formas para ver sus limitaciones y dónde lo puede aplicar, aunque no sea correcto.

Una de las primeras adaptaciones del desarrollo del esquema basada en esta investigación fue la de McDonald et al. (2000) apoyándose en la descripción de Clark et al. (1997) que caracteriza este nivel por la inexistencia de vínculos entre los constructos mentales. Los estudiantes en este nivel van formando estructuras cognitivas de un concepto matemático de forma aislada y sin relación, de forma que usan estas estructuras sin conexión entre ellas. Según estos autores, para los estudiantes situados en el nivel Intra, las dos construcciones de Seqlist y Seqfunc son distintas y no están relacionados cognitivamente. En este nivel de desarrollo del esquema, hacen uso de manera más frecuente de la sucesión como sucesión numérica, sin tener la percepción de la equivalencia de dos representaciones del mismo concepto.

En esta misma línea Baker et al. (2000) consideran que en el nivel Intra el estudiante se centra en repetir una acción, pero no relaciona distintas facetas del concepto. Los objetos se analizan en términos de sus propiedades, pero los estudiantes no los reconocen como necesarios. Estos investigadores a lo largo de sus distintos trabajos han refinado esta caracterización del nivel Intra considerando que en este nivel un individuo se centra en acciones, procesos y objetos individuales de forma aislada de otros procesos cognitivos. En este nivel, el individuo se concentra en una acción que se repite y se pueden reconocer algunas relaciones o transformaciones entre acciones en diferentes componentes del esquema Arnon et al. (2014).

Otra de las adaptaciones de este marco teórico es la de Sánchez-Matamoros (2004), en esta investigación se considera un esquema como “la estructura matemática formada por las relaciones lógicas (conjunción lógica, contrarrecíproco y equivalencia lógica) que se establecen entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema" (p.73).

Para esta autora el nivel Intra

> viene caracterizado, en general, por el descubrimiento de una acción operatoria (en este caso, el uso de un elemento matemático en la resolución del problema) y la búsqueda de sus consecuencias inmediatas, que algunas veces se realiza con errores y mostrando algunas lagunas en las inferencias que el estudiante realiza. Los estudiantes situados en este nivel podían usar los elementos matemáticos para inferir informaciones o para interpretar la situación dada, pero no establecían ninguna relación entre dichos elementos. Suelen usar algunos elementos matemáticos (pocos) de forma correcta y, generalmente, vinculados a un modo de representación (p.154).

Nivel INTER:

El segundo nivel de desarrollo, INTER viene caracterizado de la siguiente forma:

> Una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que

> solamente pueden proceder con elementos contiguos. (Piaget y García, 1983, p.165).

En la investigación de McDonald et al. (2000) este nivel se caracteriza porque los estudiantes toman conciencia de las relaciones entre constructos mentales referidos al concepto estudiado, y aunque no se dan todas las relaciones necesarias para su comprensión, hay intentos de relacionar los constructos mentales, aunque a veces con errores. Para este autor la diferencia con la etapa anterior radica en que mientras en el nivel Intra el foco de atención estaba en un constructo solamente, con un relativo aislamiento de los demás, los estudiantes en este nivel pueden ser conscientes simultáneamente de varias construcciones del mismo concepto, pero no conscientes de su equivalencia. Para estos autores, los estudiantes en el nivel Inter, hacen uso de los constructos Seqlist y Seqfunc como objetos, y empiezan a establecer conexiones entre ellos, sin establecer los vínculos necesarios para tomar consciencia de la percepción de ambos constructos como un todo.

Respecto a este nivel, Baker et al. (2000) consideran que los estudiantes partiendo de la operación inicial, pueden inferir otras operaciones que están contenidas en ellas, al tomar conciencia de las relaciones presentes. A medida que se comprende el concepto, van mostrando nuevas transformaciones del mismo, coordinando y agrupando nuevas estructuras extraídas de las relaciones surgidas. Para estos autores, en este nivel se tiene un hilo conductor de las operaciones y propiedades que permite unir operaciones similares, pero no se tiene una idea global. En este nivel, un individuo puede comenzar a agrupar elementos e incluso relacionarlos bajo unas mismas estructuras (Arnon et al. 2014).

La adaptación de Sánchez-Matamoros (2004) considera que "La característica principal de este nivel de desarrollo es que los estudiantes empiezan a establecer relaciones entre los elementos matemáticos" (p.155). Además, señala que en este nivel comienzan a establecerse relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que se encuentran en el mismo registro de representación, siendo la más usada la conjunción lógica, existiendo dificultades para establecer relaciones de equivalencia lógica y no dándose la síntesis de los registros de representación y se van incorporando paulatinamente más elementos matemáticos.

Nivel TRANS:

En este nivel, Piaget y García (1983) indican que:

> Es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras" aunque permaneciendo en el plano de las acciones, que, aunque están interiorizadas, no han sido tematizadas (p.165).

En la adaptación de este nivel en la investigación de McDonald et al. (2000), basada en la descripción de Clark et al. (1997), los alumnos han construido los objetos cognitivos individuales y han establecido fuertes conexiones entre ellos, siendo conscientes de estas conexiones, lo que les permitirá vincularlos al concepto tratado y enfrentarse a situaciones nuevas. Para estos autores lo fundamental no es la cantidad de constructos mentales que cada estudiante tenga de un determinado concepto matemático, sino la capacidad del estudiante para relacionarlos entre sí para poder llegar a la comprensión del concepto y poderlo utilizar en nuevas situaciones. Por lo tanto, para estos autores, en el nivel Trans del desarrollo del esquema de sucesión numérica, los estudiantes han construido los objetos cognitivos individuales Seqlist y Seqfunc, también han construido fuertes conexiones entre la sucesión como función y la sucesión como lista, son conscientes de estas conexiones, y ahora se pueden vincular cada uno de estos objetos al concepto de sucesión numérica, es decir, ambos constructos son representaciones de un mismo concepto.

Para Baker et al. (2000) este nivel puede caracterizarse por medio de la síntesis de las transformaciones del nivel Inter, el estudiante toma conciencia de que el esquema está completo, y puede percibir propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles. En este nivel de desarrollo del esquema, la colección de acciones, procesos, puede ahora referirse como un esquema, teniendo ya la coherencia necesaria. En este nivel se tiene una idea general del concepto y se puede aplicar a otras situaciones, es decir, se manifiesta la coherencia del esquema; lo que significa que el individuo es capaz de reflexionar sobre la estructura explícita del esquema y seleccionar de él el contenido que sea adecuado para la solución del problema (Arnon et al., 2014).

Por otro lado, el nivel Trans, según Sánchez-Matamoros (2004) se caracteriza por "que los estudiantes son capaces de establecer diferentes relaciones entre los elementos del esquema sin demasiadas restricciones y estableciendo la síntesis" (p.157). Es decir, aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas (y lógica, contra recíproco, equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos, produciéndose la "síntesis" de los registros de representación. Todo ello conlleva la construcción de la estructura matemática.

Una vez construido el esquema, este puede ser tematizado. Piaget y García (1983) definen la tematización como: "El pasaje del uso o aplicación implícita a la utilización consciente, a la conceptualización" (p.103).

2.2.1 Caracterización del desarrollo del esquema de sucesión numérica adoptado en nuestra investigación

Según nos indican investigaciones previas sobre el desarrollo del esquema de un concepto matemático, donde debemos centrar nuestro foco de atención es en las relaciones que se establecen entre los elementos matemáticos del concepto matemático considerado.

En nuestra investigación, tomaremos la definición de elemento matemático de Sánchez-Matamoros (2004) ["un elemento matemático será el producto de una disociación o de una segregación en el interior del concepto o la noción matemática" (p.72)] basada en la definición de Piaget y García (1983) ["los elementos son siempre el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa" (p.8)],.

En este trabajo caracterizamos los niveles del desarrollo del esquema de sucesión numérica mediante los registros de representación, las estructuras mentales, y los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que llegan a establecerse entre ellos cuando los estudiantes resuelven una tarea (Bajo et al., 2019).

En nuestra investigación consideramos las siguientes relaciones lógicas entre los elementos matemáticos:

- Conjunción lógica (o y lógica): es la relación que se produce entre elementos matemáticos cuando se usan conjuntamente para hacer inferencias.
- Implicación lógica: [$A \rightarrow B$]: Esta relación es una estructura en la que un elemento matemático es consecuencia lógica de otro u otros.
- Contrarrecíproco: es la relación que se establece en un condicional directo y su negación [$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$]
- Equivalencia lógica (o doble implicación): es la relación que se establece en un bicondicional y la conjunción de los condicionales [$(A \leftrightarrow B)$;$(A \rightarrow B)$ ^ $(B \rightarrow A)$]

Caracterización

Nivel INTRA sucesión:

Está caracterizado por el uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún registro de representación, sin establecer relaciones. Es decir, los registros de representación son considerados por el estudiante como distintos y no los relaciona cognitivamente. Un individuo en este nivel del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos con otros ítems cognitivos.

Nivel INTER sucesión:

Está caracterizado por el uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos registros de representación y se establecen relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo registro de representación. Este nivel está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

Nivel TRANS sucesión:

En este nivel aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. Es aquí donde se produce la "síntesis" de los registros de representación. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática. En este nivel es cuando el estudiante reflexiona sobre las conexiones y las relaciones desarrolladas en la etapa anterior aparecen nuevas estructuras. A través de las síntesis de estas relaciones, el estudiante es consciente de las transformaciones que se desarrollan en el esquema y construye una estructura nueva. En esta etapa aparece el desarrollo de la coherencia, que se demuestra por la capacidad de un individuo para reconocer las relaciones que se incluyen en el esquema y para reflexionar sobre la estructura explícita del esquema y de ella considerar el contenido que es adecuado en la solución de un problema.

En cada nivel de la tríada, el estudiante reorganiza conocimientos adquiridos en el nivel anterior. El paso de un nivel al siguiente por parte del estudiante, incluye un aumento en el repertorio de los elementos matemáticos y la construcción de nuevas formas de relaciones o transformaciones entre los elementos matemáticos usados en la resolución de un problema.

Una vez formado/construido el esquema, este puede ser tematizado. Piaget y García (1983/89) definen la tematización como: "el pasaje del uso o aplicación implícita a la utilización consciente, a la conceptualización" (p.103).

2.3 Preguntas de investigación

A partir de las ideas planteadas en este marco teórico, las preguntas que abordamos en esta investigación son las siguientes:

¿Qué caracteriza el esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria a los que se les ha introducido previamente dicho concepto?

¿Cuáles son las características de los niveles de desarrollo del esquema de sucesión numérica?

¿Qué elementos matemáticos, qué relaciones lógicas y qué registros de representación se ponen de manifiesto en los niveles de desarrollo del esquema del concepto de sucesión numérica?

Capítulo III: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Capítulo III: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

En esta sección presentamos la metodología de la investigación que hemos dividido en tres partes. En la primera presentamos a los participantes en ella, en la segunda presentamos el diseño y aplicación de los instrumentos de recogida de datos que nos han servido para desarrollar nuestra investigación, y por último el procedimiento de análisis.

3.1 Participantes

Los participantes que formaron parte de esta investigación son 105 estudiantes de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante ESO) (14-16 años) de un centro de la comunidad autónoma andaluza. Los estudiantes (tabla 2) accedieron de forma voluntaria a realizar el cuestionario, previamente se les había introducido el concepto de sucesión numérica en el tercer trimestre de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO.

Tabla 2: Número de estudiantes seleccionados en cada curso

ESTUDIANTES	
3er curso de ESO	75
4º curso de ESO	30

En relación a a la codificación, informar que en un primer momento se codificaron los estudiantes teniendo en cuenta el curso y el grupo en el que estaban, por ejemplo, el estudiante codificado como 3b2 se correspondía con un estudiante de 3º de ESO del grupo b con el número 2 de lista. Posteriormente consideramos que era más anónimo si reorganizábamos la forma de codificar a los estudiantes que intervenían en la investigación. En lugar de codificarlos por curso, clase y número de lista, se codificaron desde el primero (e1) hasta el último (e105) de forma consecutiva.

3.2 Diseño del instrumento de recogida de datos

El procedimiento de elaboración de los instrumentos de recogida de datos se llevó a cabo en tres etapas:

_ Análisis del concepto de sucesión numérica, con el objetivo de identificar los elementos matemáticos, relaciones lógicas y registros de representación que pueden darse entre ellos para la resolución de tareas que involucran a las sucesiones numéricas.

_ Descomposición genética del concepto.

_ Selección de problemas del cuestionario.

3.2.1 Elementos matemáticos, relaciones lógicas y registros de representación

Elementos matemáticos

A partir del análisis del concepto de sucesión numérica realizado consultando libros de texto de Educación Secundaria (Editoriales: SM, Oxford, Santillana, Anaya, Vicens-Vives), libros de nivel universitario (Autores: Apostol, Stewart, González) e investigaciones previas sobre dicho concepto, los elementos matemáticos vinculados al concepto de sucesión numérica considerados en nuestra investigación son los siguientes:

E1 Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, para todo número natural n existe un número real

E2 Términos: se definen como los integrantes de la sucesión. El lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.

E3 Término General: se define como el término que, dependiendo de su posición (subíndice) sabemos su valor, y se denota por "a_n" (con n perteneciente a los naturales)

E4 Progresión Aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.

E5 Término general de una progresión aritmética:

$\{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d, n \in N\}$. Siendo a_1 el primer término y d la diferencia entre términos consecutivos

E6 Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.

E7 Término general de una progresión geométrica:

$\{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, n \in N\}$. Siendo a_1 el primer término y r la razón de la progresión

E8 Sucesión Recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.

E9 Sucesión por Extensión: se define una sucesión por extensión cuando se da una serie de términos consecutivos de la misma.

E10 Sucesión Creciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in N\}$ es creciente si cada término es menor o igual que el término siguiente.

E11 Sucesión Decreciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in N\}$ es decreciente si cada término es mayor o igual que el término siguiente.

Relaciones lógicas

Las relaciones lógicas que se pueden establecer entre los elementos matemáticos consideradas en nuestra investigación son las siguientes:

- Conjunción lógica (o y lógica): es la relación que se produce entre elementos matemáticos cuando se usan conjuntamente para hacer inferencias.

  Un ejemplo de esta relación lo podemos ver en el uso conjunto de los elementos matemáticos, términos de una sucesión (E2) y sucesión como lista (E1) para identificar una sucesión numérica.
- Implicación lógica: [A→B]: Esta relación es una estructura en la que un elemento matemático es consecuencia lógica de otro u otros.

  Un ejemplo es la relación que existe entre progresiones y sucesiones numéricas: progresión aritmética o geométrica (E4 o E6) implica sucesión numérica (E1).
- Contrarrecíproco: es la relación que se establece en un condicional directo y su negación [(A→B) ↔ (┐B→┐A)]

  Un ejemplo de esta relación lógica la podemos encontrar la relación entre sucesiones numéricas y términos de una sucesión numérica, es decir, si existe una sucesión numérica (E1) implica que existen todos sus términos (E2), y su negación si no existe algún término (E2) entonces no existe sucesión numérica (E1).
- Equivalencia lógica (o doble implicación): es la relación que se establece en un bicondicional y la conjunción de los condicionales [(A↔B); (A→B) ^ (B → A)]

Registros de Representación

Los resultados de investigaciones sobre diferentes conceptos matemáticos ponen de manifiesto cómo los registros de representación pueden jugar un papel relevante para caracterizar el desarrollo de la comprensión de estos conceptos (Duval, 2006), ya que el uso de varios registros de representación y la coordinación entre ellos pueden informarnos de los mecanismos y estructuras mentales que se ponen de manifiesto a la hora de resolver tareas que involucren al concepto. En particular, en nuestro caso, el uso de diferentes registros de representación nos permitirá caracterizar la comprensión del concepto de sucesión numérica que se pone de manifiesto cuando se resuelven tareas.

Los registros de representación que hemos considerado en nuestra investigación vinculados al concepto de sucesión numérica son los siguientes: registro de representación numérico, registro de representación algebraico, registro de representación gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y registro de representación gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

3.2.2 La descomposición genética del concepto de sucesión numérica

Para la descomposición genética inicial del concepto de sucesión numérica hemos tenido en cuenta el estudio histórico del concepto, las características de enseñanza/aprendizaje del concepto a través de las investigaciones referidas al concepto, y un análisis del concepto matemático de sucesión numérica. Proponemos la siguiente descomposición genética (Bajo et al., 2019):

0.- Prerrequisitos:

Los conceptos previos para la construcción del esquema de sucesión numérica son expresión algebraica y valor numérico de expresión algebraica en modo algebraico y numérico respectivamente como objetos y representaciones gráficas de puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano como proceso.

1.- Acción de calcular términos de la sucesión a partir de la posición que ocupa:

1a.- Acción de calcular en una sucesión dada por su término general (E3) (expresión algebraica), un término concreto(E2) (a_n) a partir de su posición (n), dando valores a la variable para obtener los valores numéricos que componen los términos de la sucesión(E1).

1b.- Acción de calcular en una sucesión dada gráficamente en la recta numérica (gráfico lineal), un término concreto a partir de su posición en la recta numérica mediante una correspondencia biunívoca: (relación de equivalencia) donde a cada posición (n) le corresponde un término de la sucesión (an).

1c.- Acción de calcular en una sucesión dada gráficamente en el plano cartesiano (gráfico cartesiano), un término concreto (E2) (an), representado en el eje de ordenadas, a partir de su posición (n), representado en el eje de abscisas.

2.- Interiorización de la acción de calcular términos de la sucesión a partir de la posición que ocupa (relación de contrarrecíproco):

2a.- Interiorización de la acción dada en el 1a como Proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de calcular diferentes términos de la sucesión sustituyendo en el término general.

2b.- Interiorización de la acción dada en el **1b** como Proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de identificar diferentes términos de la sucesión en la recta numérica por la posición que ocupa.

2c.- Interiorización de la acción dada en el **1c** como Proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de identificar diferentes términos de la sucesión en el plano cartesiano a partir de la coordinación de ambos ejes cartesianos.

3.- Inversión del proceso construido en el punto **2**.

3a.- Inversión del proceso **2a** para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica (relación de contrarrecíproco).

3b.- Inversión del proceso **2b** para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica a partir de su valor en la recta numérica.

3c.- Inversión del proceso **2c** para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica a partir de su valor en el eje de ordenadas.

4.- Coordinación de los procesos **2a**, **2b** y **2c** en un nuevo proceso, donde es posible considerar estos procesos como el mismo independientemente del registro de representación usado.

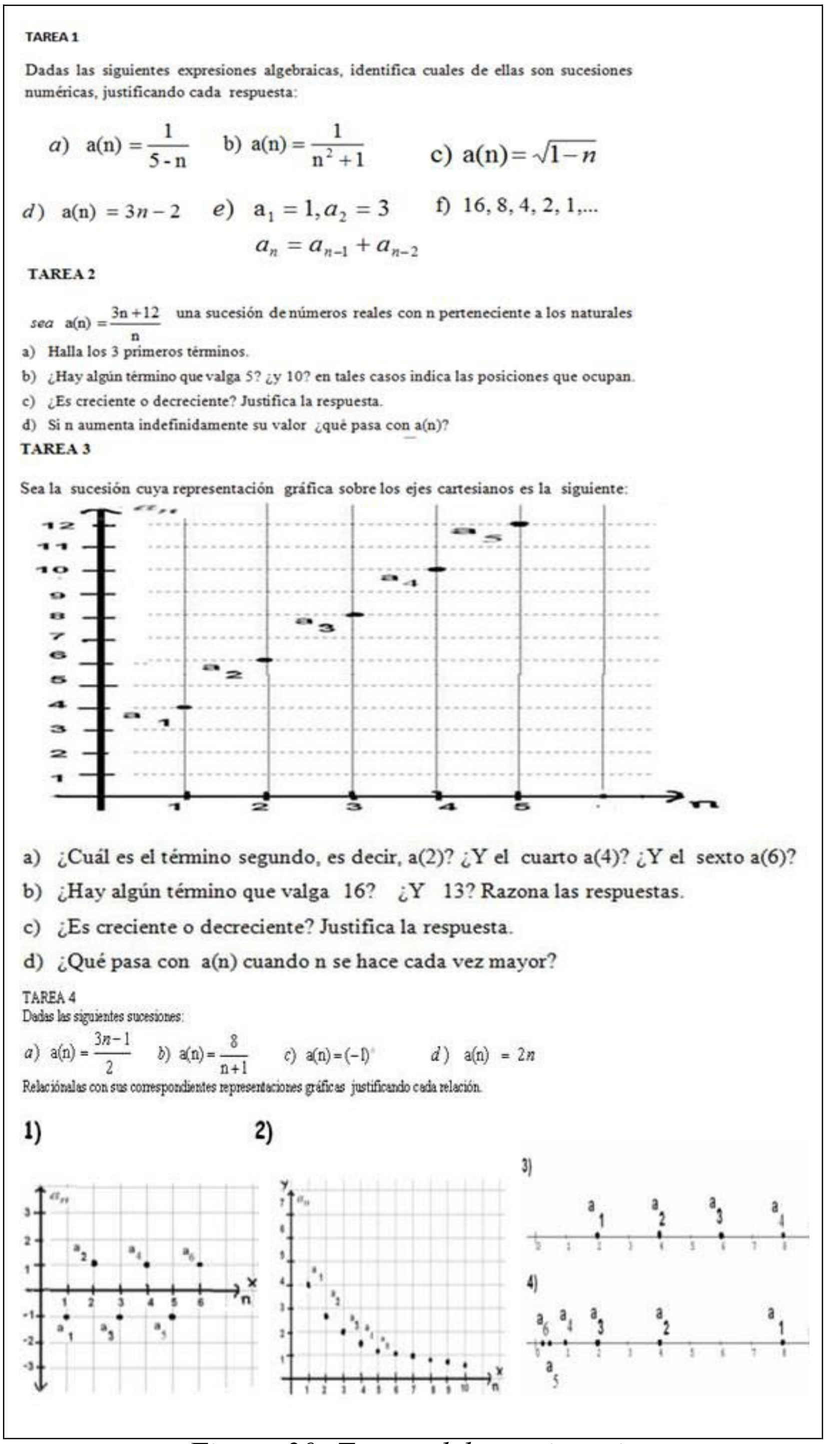
5.- Encapsulación del proceso **4** como un objeto sobre el que realizar acciones o procesos para el estudio de propiedades globales donde están implicados todos los términos de la sucesión (a_n= [a_1, a_2, …,]).

6.- Desencapsulación del objeto **5** como proceso, donde puede considerarse la sucesión completa y algunos de sus términos concretos, por ejemplo, en situaciones de comparación de sucesiones, tendencia, etc.

3.2.3 Tareas del cuestionario

El cuestionario se diseñó a partir de una selección de tareas de diversos libros de texto e investigaciones referidas a las sucesiones numéricas. Fueron discutidas y resueltas por los investigadores de diversas maneras, con el fin de identificar los registros de representación, las estructuras mentales, los elementos matemáticos y las relaciones que se pueden dar entre ellos cuando se resuelven dichas tareas. Un análisis de un posible proceso de resolución de cada una de estas tareas está recogido en Bajo et al. (2019) entre las páginas 155-157.

Teniendo en consideración la descomposición genética del concepto de sucesión numérica descrita anteriormente, se seleccionaron las tareas que formarían el cuestionario. A continuación, mostramos dichas tareas, indicando la procedencia de cada tarea con sus respectivas modificaciones:



TAREA 1

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

a) $a(n) = \frac{1}{5-n}$ b) $a(n) = \frac{1}{n^2+1}$ c) $a(n) = \sqrt{1-n}$

d) $a(n) = 3n-2$ *e)* $a_1 = 1, a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ f) 16, 8, 4, 2, 1,...

TAREA 2

sea $a(n) = \frac{3n+12}{n}$ una sucesión de números reales con n perteneciente a los naturales

a) Halla los 3 primeros términos.

b) ¿Hay algún término que valga 5? ¿y 10? en tales casos indica las posiciones que ocupan.

c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.

d) Si n aumenta indefinidamente su valor ¿qué pasa con a(n)?

TAREA 3

Sea la sucesión cuya representación gráfica sobre los ejes cartesianos es la siguiente:

a) ¿Cuál es el término segundo, es decir, a(2)? ¿Y el cuarto a(4)? ¿Y el sexto a(6)?

b) ¿Hay algún término que valga 16? ¿Y 13? Razona las respuestas.

c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.

d) ¿Qué pasa con a(n) cuando n se hace cada vez mayor?

TAREA 4

Dadas las siguientes sucesiones:

a) $a(n) = \frac{3n-1}{2}$ *b)* $a(n) = \frac{8}{n+1}$ *c)* $a(n) = (-1)^n$ *d)* $a(n) = 2n$

Relaciónalas con sus correspondientes representaciones gráficas justificando cada relación.

1) **2)** 3) 4)

Figura 20: Tareas del cuestionario

La tarea 1, presentada en los registros de representación algebraico y numérico, es semejante al primer problema de la investigación de Przenioslo

(2006) (figura 13, p. 25), donde hemos suprimido aquellos apartados relativos a las sucesiones como funciones y se han incluido progresiones geométricas. Esta tarea 1 muestra varias expresiones analíticas (numéricas y algebraicas) y les demanda a los estudiantes que señalen cuáles de ellas son sucesiones numéricas. Hay sucesiones definidas por recurrencia, progresiones geométricas, progresiones aritméticas, sucesiones definidas a partir de expresiones racionales y otras expresiones analíticas que no son sucesiones.

La tarea 2, dada en el registro de representación algebraico, es similar a la utilizada por González et al. (2011), mostrada en la figura 16 (p. 28), se ha modificado y se pregunta por la monotonía en lugar de por la convergencia, ya que la convergencia no se ha introducido aún en este nivel de enseñanza. Además, también se pide la posición de dos valores de la sucesión, aunque uno de ellos no pertenece a la misma.

La tarea 3 es similar a la tarea 2, tiene los mismos apartados y la diferencia está en que se presenta la gráfica cartesiana de la sucesión, en lugar de la expresión algebraica.

La consideración conjunta de las tareas 2 y 3 permite apreciar las distintas estructuras mentales del concepto de sucesión numérica en diferentes registros de representación, pudiéndose poner de manifiesto la síntesis entre los mismos

La tarea 4 es similar a una tarea del libro de Stewart et al. (2013), mostrada en la figura 8 (p.35), en dicha tarea aparecen sucesiones numéricas en diferentes registros de representación, y se demanda a los estudiantes que relacionen las expresiones algebraicas con su correspondiente registro de representación gráfico-cartesiano o gráfico-lineal. En este trabajo se modificó la tarea original de tal forma que no todas las expresiones algebraicas tenían su correspondiente registro de representación gráfico-cartesiano o gráfico-lineal, en particular, el gráfico-lineal 4) y la expresión algebraica a) no se podían emparejar.

A continuación, mostramos los objetivos que se pretenden alcanzar con cada una de las tareas del cuestionario (tabla 3).

Tabla 3: Objetivo de las tareas del cuestionario

TAREA	REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	OBJETIVOS
T1	Algebraico y numérico	Movilizar el concepto de sucesión como lista numérica para distinguir entre aquellas que son sucesiones numéricas y aquellas que no lo son.
T2	Algebraico	A partir de una sucesión dada en registro de representación algebraico, realizar, mediante la estructura mental acción, traslaciones del registro de representación algebraico al registro de representación numérico, y viceversa, obtener a partir de un valor, su posición o decidir si ese valor corresponde o no a la sucesión.

		Movilizar los elementos sucesión decreciente a partir de la estructura mental proceso y obtener una aproximación de la sucesión al aumentar la posición.
T3	Gráfico-cartesiano	A partir de una sucesión dada en registro de representación gráfico-cartesiano, realizar traslaciones del registro de representación gráfico-cartesiano al registro de representación numérico, y viceversa, obtener a partir de un valor, su posición o decidir si ese valor corresponde o no a la sucesión. Movilizar los elementos sucesión creciente a partir de la estructura mental proceso y obtener una aproximación de la sucesión cuando la posición aumenta.
T4	Gráfico-lineal, gráfico-cartesiano y algebraico	Movilizar el uso de las traslaciones entre los diferentes registros de representación, gráfico-lineal o gráfico-cartesiano, registro de representación algebraico y registro de representación numérico.

Un análisis detallado de las características de la comprensión del concepto de sucesión numérica que se pondrían de manifiesto en un estudiante que resuelva cada una de las tareas se describe en Bajo et al. (2019)

El cuestionario se presentó con el siguiente formato: una primera hoja independiente, donde identificábamos al estudiante, con el objetivo de localizar al estudiante para posteriormente hacer la entrevista semiestructurada escrita. Y en las siguientes cuatro hojas se le presentaba la tarea en forma de tabla, donde en la parte superior se mostraba el enunciado de la tarea a realizar y en la parte inferior se dividía en dos cuadros, uno para la realización de la tarea, y en el otro cuadro donde se le pedía al estudiante que justificase todas las respuestas dadas (Figura 21).

TAREA 2 *sea* $a(n) = \frac{3n+12}{n}$ una sucesión de números reales con n perteneciente a los naturales a) Halla los 3 primeros términos b) ¿Hay algún término que valga 5? ¿y 10? en tales casos indica las posiciones que ocupan c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta. d) Si n aumenta indefinidamente su valor ¿qué pasa con a(n)?	
. RESOLUCION DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)	JUSTIFICA LA RESPUESTA

Figura 21: Formato del cuestionario.

3.3 Aplicación de los Instrumentos de recogida de datos

Para nuestra investigación, hemos diseñado dos instrumentos de recogida de datos, un cuestionario que consta de cuatro tareas (descritas en el apartado anterior) que se respondió en una hora de clase, y una entrevista semiestructurada escrita, diseñada para cada estudiante, a partir de las respuestas dadas al cuestionario. El objetivo de este segundo instrumento fue profundizar en aquellas respuestas que no habían sido suficientemente justificadas.

Un ejemplo de cómo se diseñó la entrevista semiestructurada escrita a partir de las respuestas de los estudiantes a cada una de las tareas del cuestionario lo mostramos con la tarea 1 del cuestionario del estudiante e39:

En el apartado b) de la tarea 1 (figura 20), el estudiante e39 escribe que "*no sería sucesión [la expresión a_n= 1/ n^2 +1] porque el término general* *no se va sumando, multiplicando, restando o dividiendo por un número fijo"* (figura 22).

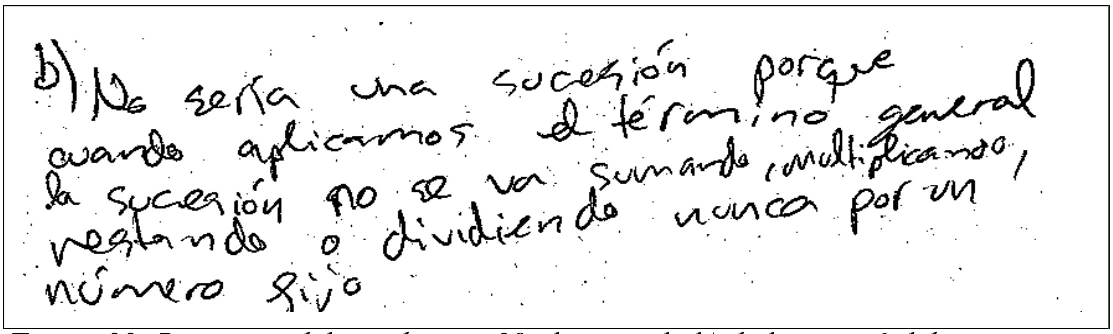
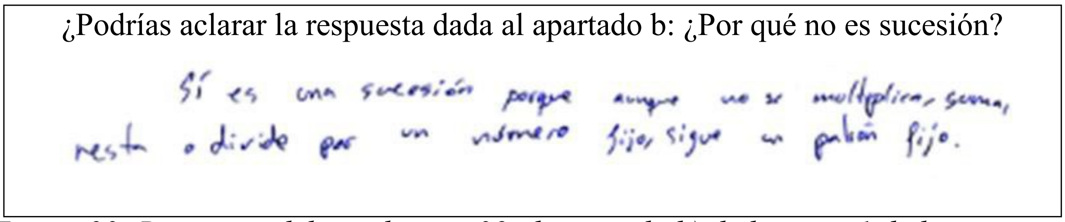

b) No sería una sucesión porque cuando aplicamos el término general la sucesión no se va sumando, multiplicando, restando o dividiendo nunca por un número fijo

Figura 22: Respuesta del estudiante e39 al apartado b) de la tarea 1 del cuestionario

En la entrevista semiestructurada escrita, para saber qué estaba queriendo decir el estudiante con esta respuesta, le preguntamos: ¿Podrías aclarar la respuesta dada al apartado b) (¿Por qué no es sucesión?). Y es entonces cuando el estudiante e39 modifica su respuesta haciendo uso del elemento matemático término general (E3), respondiendo que a pesar de no ser una progresión ("no se multiplique, sume, reste o divida por un número fijo"), si es una sucesión numérica porque "sigue un patrón fijo" (refiriéndose al término general de la sucesión proporcionado en el enunciado) (figura 23). Con esta nueva respuesta del estudiante pudimos ampliar la información sobre la comprensión que ese estudiante tenía sobre el concepto de sucesión numérica.


¿Podrías aclarar la respuesta dada al apartado b: ¿Por qué no es sucesión?

Sí es una sucesión porque aunque no se multiplica, suma, resta o divide por un número fijo, sigue un patrón fijo.

Figura 23: Respuesta del estudiante e39 al apartado b) de la tarea 1 de la entrevista semiestructurada escrita.

Esta entrevista se elaboró para cada estudiante en función a las respuestas que previamente cada uno había dado en el cuestionario tres semanas antes. Esta entrevista semiestructurada escrita nos permitió indagar en aquellas respuestas que o no habían sido argumentadas, no estaban suficientemente justificadas, o no habían sido respondidas. Los estudiantes, para responder a esta entrevista semiestructurada escrita, tenían a su disposición el cuestionario que ya habían contestado hacía tres semanas.

3.4 Procedimiento de análisis

En este epígrafe describimos tanto la caracterización de los distintos niveles de desarrollo del esquema de sucesión numérica a partir del marco teórico (descrito en la sección anterior) como el procedimiento de análisis realizado a las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario y la entrevista semiestructurada escrita de forma conjunta.

3.4.1 Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema

A partir del marco teórico, caracterizamos el esquema de sucesión numérica por los elementos matemáticos, los registros de representación, las diferentes relaciones entre los elementos matemáticos y las estructuras mentales (Tabla 4)

Tabla 4: Caracterización de los niveles del esquema de sucesión numérica.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
INTRA	Un mismo elemento puede ser usado de forma correcta en determinadas tareas e incorrecta en otras, vinculadas a un registro de representación. Las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores. Se pone de manifiesto la estructura mental acción del concepto de sucesión numérica.
INTER	Los elementos matemáticos se usan de forma correcta en un mismo registro de representación. Uso correcto de las relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) entre elementos matemáticos en algunas ocasiones y en un mismo registro de representación. Se pone de manifiesto la traslación entre registros de representación en algunas situaciones. Se pone de manifiesto la estructura mental proceso del concepto de sucesión numérica. Se pone de manifiesto la coordinación proceso en algunas situaciones.
TRANS	Uso de todos los elementos matemáticos de forma correcta en el registro de representación necesario en cada tarea. Uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos de forma correcta. Se pone de manifiesto la síntesis entre los diferentes registros de representación. Se pone de manifiesto la estructura mental objeto del concepto de sucesión numérica y desencapsulación de este en procesos.

3.4.2 Descripción de las fases del análisis

A continuación, procedemos a mostrar el procedimiento de análisis llevado a cabo en esta investigación. La primera fase se centró en identificar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, los registros de representación, las traslaciones entre ellos y las estructuras mentales del concepto de sucesión numérica que se ponían de manifiesto en las respuestas de los estudiantes en la resolución de cada una de las tareas, considerando conjuntamente las respuestas dadas a la tarea en el cuestionario y la entrevista semiestructurada escrita. Con ello obtuvimos una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión por parte del estudiante para cada una de las tareas.

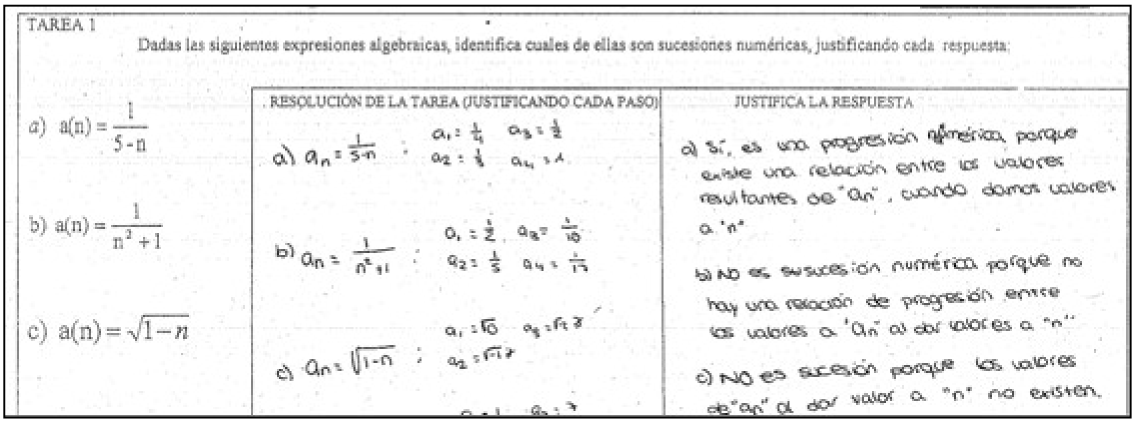
En la segunda fase del análisis, a partir de los resultados obtenidos en la primera fase, se analizó la resolución de todas las tareas para cada uno de los estudiantes. De esta manera se obtuvo una caracterización del nivel comprensión del concepto de sucesión numérica que ha alcanzado el estudiante.

A continuación, mostramos cómo se han realizado ambas fases con un ejemplo en cada una de ellas, el estudiante e5 para la fase 1, y el estudiante e17 para la fase 2.

Fase 1

Vemos a continuación un ejemplo de esta fase de análisis con la tarea 1 del estudiante e5.

Este estudiante, en el apartado a) de la tarea 1 del cuestionario, hace uso de la relación "Implicación lógica" cuando responde que como hay términos hay sucesión, es decir, dando valores a la posición obtenemos los términos de la sucesión E1=>E3, por lo que el estudiante hace uso de la estructura mental acción para ir dando valores a la expresión algebraica y obteniendo los distintos valores según la posición, seguidamente hace uso de la estructura mental proceso del concepto de sucesión numérica, ya que considera que es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión al decir que hay una relación entre los valores de a_n cuando se le dan valores a "n", como muestra la figura 25.

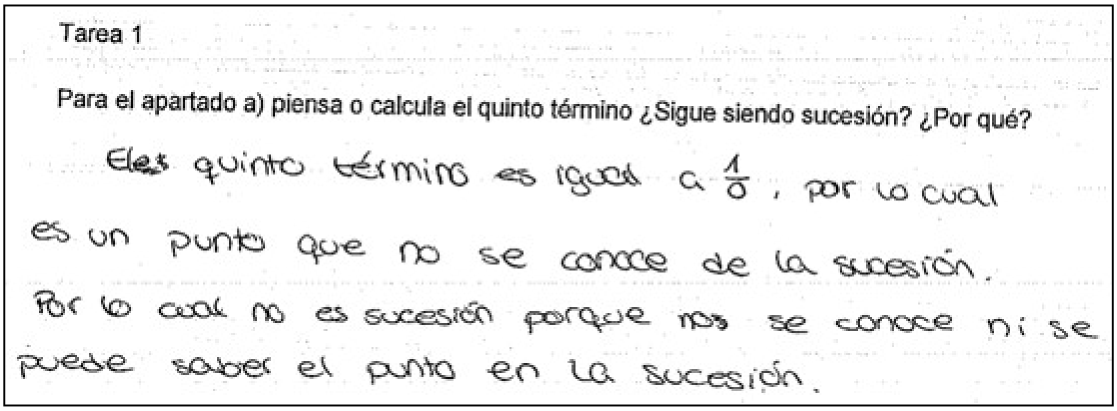

TAREA 1

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

	RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)	JUSTIFICA LA RESPUESTA
a) $a(n) = \frac{1}{5-n}$	a) $a_n = \frac{1}{5-n}$; $a_1 = \frac{1}{4}$ $a_3 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_4 = 1$	a) Sí, es una progresión numérica porque existe una relación entre los valores resultantes de "a_n", cuando damos valores a "n"
b) $a(n) = \frac{1}{n^2+1}$	b) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$; $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{10}$ $a_2 = \frac{1}{5}$ $a_4 = \frac{1}{17}$	b) NO es su sucesión numérica porque no hay una relación de progresión entre los valores a "a_n" al dar valores a "n"
c) $a(n) = \sqrt{1-n}$	c) $a_n = \sqrt{1-n}$; $a_1 = \sqrt{0}$ $a_3 = \sqrt{-2}$ $a_2 = \sqrt{-1}$	c) NO es sucesión porque los valores de "a_n" al dar valor a "n" no existen.

Figura 25: Respuesta del estudiante e5 al apartado a) de la tarea 1 del cuestionario

Este estudiante no se da cuenta del quinto término, lo que nos indica que en la entrevista semiestructurada escrita debemos preguntárselo:


Tarea 1

Para el apartado a) piensa o calcula el quinto término ¿Sigue siendo sucesión? ¿Por qué?

El quinto término es igual a $\frac{1}{0}$, por lo cual es un punto que no se conoce de la sucesión. Por lo cual no es sucesión porque no se conoce ni se puede saber el punto en la sucesión.

Figura 26: Respuesta del estudiante e5 al apartado a) de la tarea 1 de la entrevista semiestructurada escrita

Por la respuesta de este estudiante, comprobamos que hace uso de la relación lógica de contrarrecíproco, es decir, ┐ E2 => ┐ E1 al decir que no hay sucesión al no existir el quinto término (figura 26). De esta manera el estudiante indica que no es sucesión numérica en este apartado por no existir el término correspondiente a n=5.

Por lo tanto, el estudiante e5 en el apartado a) de la tarea 1 muestra evidencias del uso de las relaciones "implicación lógica" y la relación de "contrarrecíproco" entre elementos matemáticos relativos a las sucesiones numéricas; usando la traslación del registro de representación algebraico al registro numérico y también utiliza las estructuras mentales acción y proceso para ir extrayendo los cuatro primeros términos de la expresión algebraica y respondiendo de forma adecuada a la tarea 1 del cuestionario.

En ocasiones, a través del análisis realizado, no obtenemos información clara sobre las respuestas dadas por los estudiantes, y hay que realizar una inferencia, por lo que realizamos una hipótesis de trabajo sobre el desarrollo del esquema que deberá ser aceptada o rechazada a través del análisis de la Fase 2.

Fase 2

Para mostrar un ejemplo de esta fase nos fijamos en el estudiante e17. A partir del análisis de cada tarea por separado que hemos realizado en la fase primera, nos fijamos cómo resuelve todas las tareas, con el objetivo de caracterizar el nivel de desarrollo del esquema de sucesión alcanzado por este estudiante.

El estudiante e17 en la respuesta de la primera tarea en sus distintos apartados, pone de manifiesto el uso incorrecto de la equivalencia lógica entre progresión y sucesión, es decir este estudiante no diferencia entre progresión y sucesión.

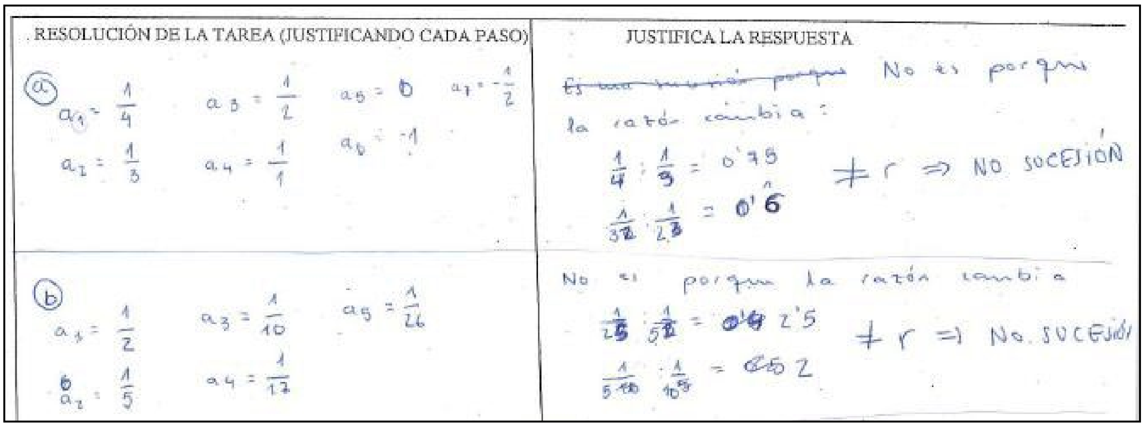


Figura 27: Respuesta del estudiante e17 al apartado a) y b) de la tarea 1 del cuestionario

Como nos muestra en estos dos primeros apartados, donde usa de forma errónea la implicación lógica en forma negativa (┐ E4 ≠> ┐ E1 o ┐ E6 ≠> ┐ E1), es decir, no hay progresión entonces no hay sucesión, al responder que la razón no se mantiene entre dos pares de números consecutivos.

Cuando la sucesión es progresión no tiene problemas como muestra en el apartado d) donde usa correctamente la relación de implicación lógica, es decir, progresión implica sucesión:

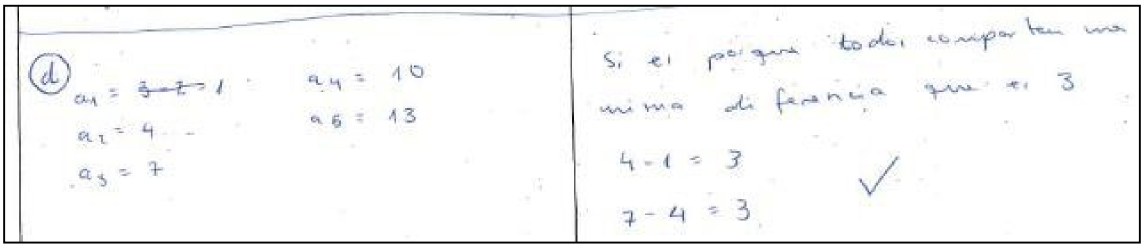
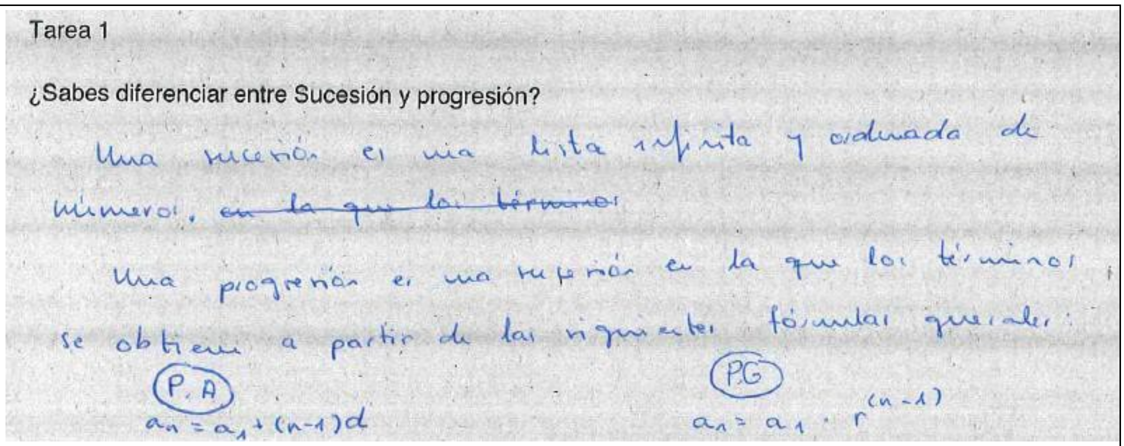


Figura 28: Respuesta del estudiante e17 al apartado d) de la tarea 1 del cuestionario

Este hecho se lo preguntamos explícitamente en la entrevista semiestructurada escrita, si sabe la diferencia entre sucesión y progresión:



Transcripción de la respuesta del estudiante:

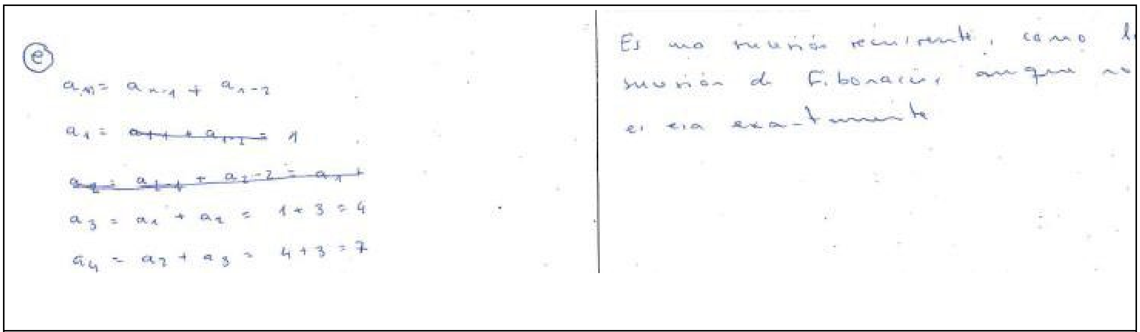
Una sucesión es una lista infinita y ordenada de número, una progresión es una sucesión en la que los términos se obtienen a partir de las siguientes fórmulas Progresión Aritmética (P.A.) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ y Progresión Geométrica (P.G.) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Figura 29: Respuesta del estudiante e5 al apartado a) de la tarea 1 de la entrevista semiestructurada escrita.

Esta respuesta generó una hipótesis de trabajo.

Hipótesis de trabajo: ¿Considera este estudiante que progresión y sucesión como lista numérica son equivalentes o es debido a que conoce estos elementos como acción y ello le impide saber usarlos de forma correcta en todos los problemas planteados?

La respuesta que da este estudiante en el apartado e) de la primera tarea:

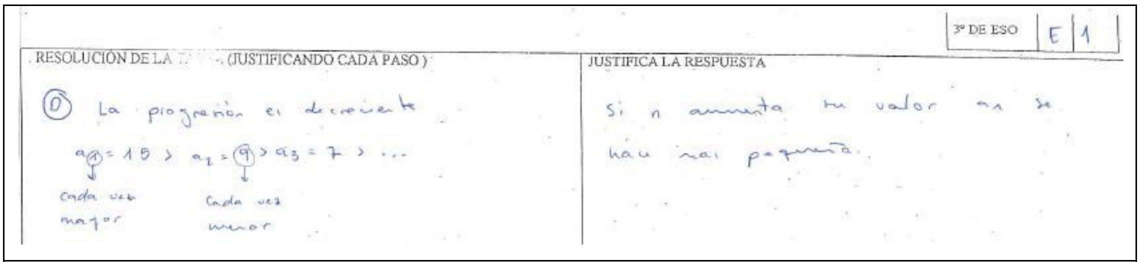


Transcripción de la tarea del estudiante:
Es una sucesión recurrente, como la sucesión de Fibonacci, aunque no es esa exactamente

Figura 30: Respuesta del estudiante e17 al apartado e) de la tarea 1 del cuestionario

Esto es una evidencia de que el estudiante e17 ha memorizado en la instrucción previa que hay sucesiones que no son progresiones, al hacer referencia en su justificación a la sucesión de Fibonacci.

Sin embargo, en el apartado d) de la tarea 2 responde, de nuevo usando la palabra "progresión" para referirse a una sucesión que no es progresión, el estudiante escribe "que la progresión decrece", cuando la expresión del apartado d) de la tarea 2 no es progresión.

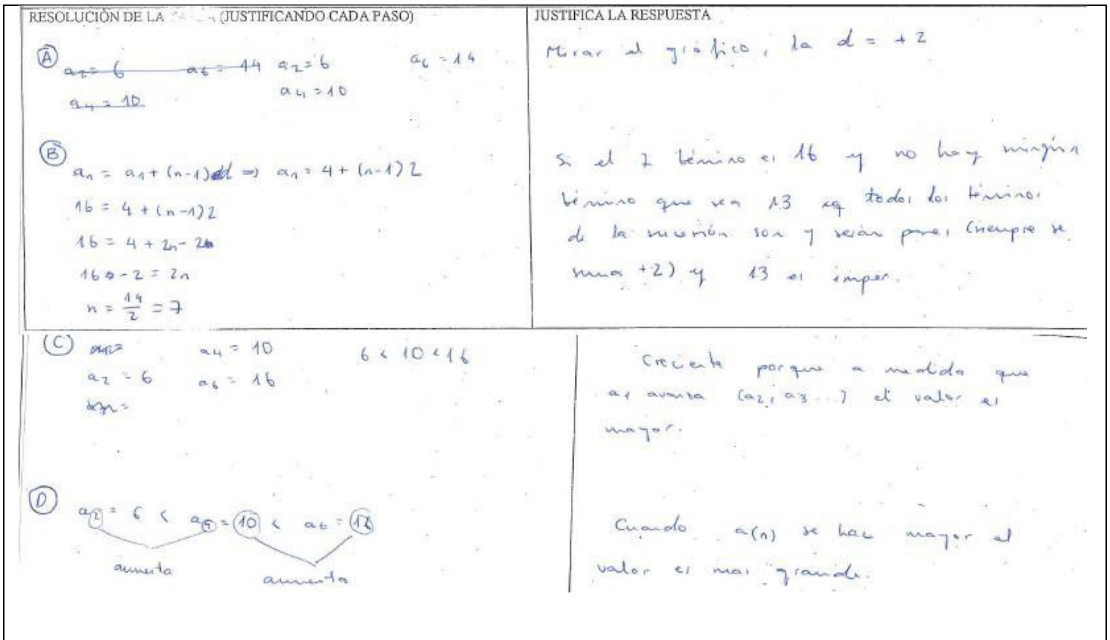


Transcripción de la tarea del estudiante:
Si n aumenta, su valor a_n se hace más pequeño

Figura 31: Respuesta del estudiante e17 al apartado d) de la tarea 2 del cuestionario

Lo que nos lleva a aceptar la hipótesis de trabajo, es decir, este estudiante conoce o tiene memorizada la diferencia entre sucesión y progresión, mostrando que conoce los elementos de sucesión como lista numérica y de progresión como acción lo que le lleva a aplicarlo de forma correcta sólo en determinadas situaciones o ante determinados problemas.

En la tarea 3 del cuestionario:



Transcripción de la tarea del estudiante:

A) Mirar el gráfico, la d=+2

B) Sí, el 7 término es 16 y no hay ningún término que valga 13 xq todos los términos de la sucesión son y serán pares (siempre se suma +2) y 13 es impar

C) Creciente porque a medida que a1 avanza (a2, a3, ...) el valor es mayor

D) Cuando a(n) se hace mayor el valor es más grande

Figura 32: Respuesta del estudiante e17 a la tarea 3 del cuestionario

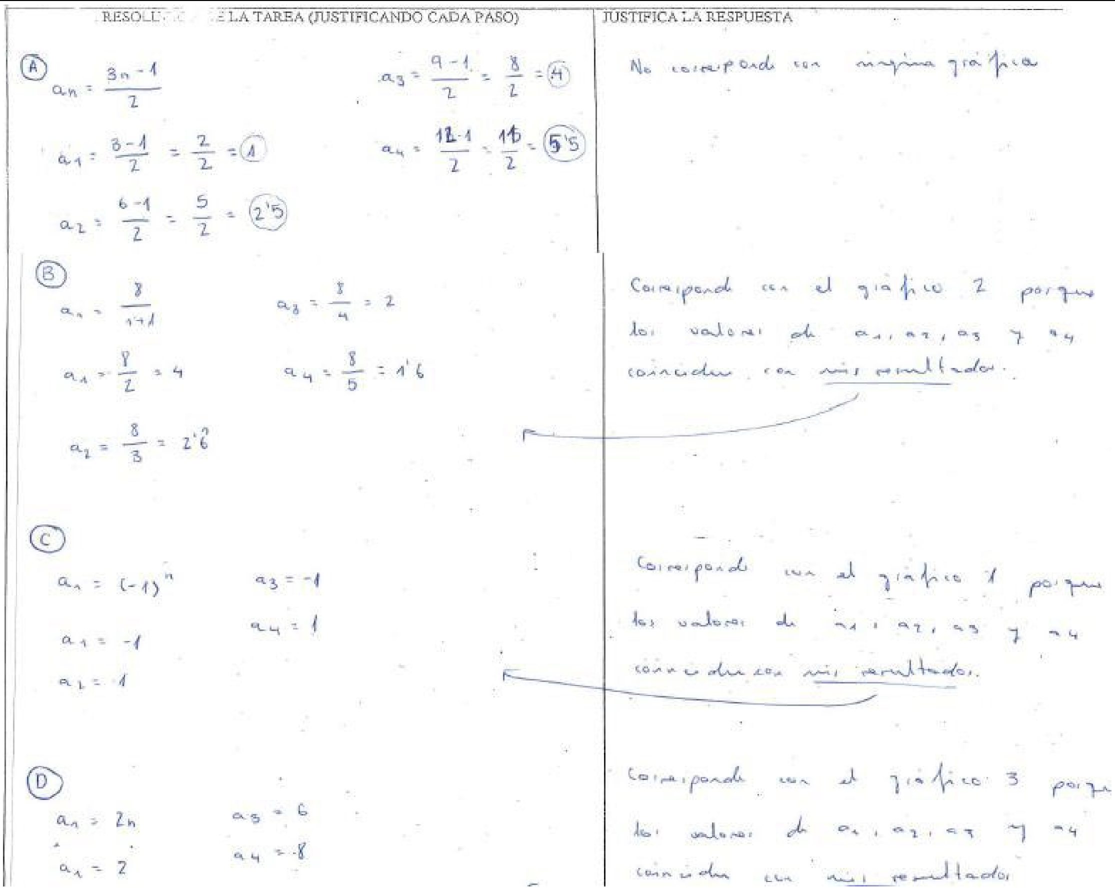
Vemos que este estudiante hace traslaciones del registro gráfico-cartesiano al registro numérico en el apartado a), y hace una traslación del registro de representación gráfico-cartesiano al registro de representación algebraico en el apartado b). Este hecho generó una nueva hipótesis de trabajo.

Hipótesis de trabajo: ¿Se pone de manifiesto en este estudiante la síntesis entre los distintos registros de representación?

En la resolución de la tarea 4 el estudiante hace también traslaciones de forma correcta entre los registros de representación gráfico-cartesiano y gráfico-lineal al registro numérico (figura 33).

Lo que pone de manifiesto traslaciones entre el registro de representación algebraico y los registros de representación gráficos (lineal y cartesiano) en ambos sentidos para probar los términos que extrae de las expresiones algebraicas.

Y nos lleva a aceptar dicha hipótesis entre algunos registros, en particular, se pone manifiesto en este estudiante la síntesis entre el registro de representación algebraico y los registros de representación gráficos (lineal y cartesiano). En los demás registros hay evidencia de traslaciones, aunque no podemos afirmar que manifieste la síntesis de los demás registros de representación.



RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO) | JUSTIFICA LA RESPUESTA

A)
$a_n = \frac{3n-1}{2}$
$a_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
$a_2 = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2} = 2'5$
$a_3 = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
$a_4 = \frac{12-1}{2} = \frac{11}{2} = 5'5$
No corresponde con ninguna gráfica

B)
$a_n = \frac{8}{n+1}$
$a_1 = \frac{8}{2} = 4$
$a_2 = \frac{8}{3} = 2'\hat{6}$
$a_3 = \frac{8}{4} = 2$
$a_4 = \frac{8}{5} = 1'6$
Corresponde con el gráfico 2 porque los valores de a_1, a_2, a_3 y a_4 coinciden con mis resultados.

C)
$a_n = (-1)^n$
$a_1 = -1$
$a_2 = 1$
$a_3 = -1$
$a_4 = 1$
Corresponde con el gráfico 1 porque los valores de a_1, a_2, a_3 y a_4 coinciden con mis resultados.

D)
$a_n = 2n$
$a_1 = 2$
$a_3 = 6$
$a_4 = 8$
Corresponde con el gráfico 3 porque los valores de a_1, a_2, a_3 y a_4 coinciden con mis resultados

Transcripción de la tarea del estudiante:

A) No corresponde con ninguna gráfica

B) Corresponde con el gráfico 2 porque a_1, a_2, a_3 y a_4 corresponde con mis resultados

C) Corresponde con el gráfico 1 porque a_1, a_2, a_3 y a_4 corresponde con mis resultados

D) Corresponde con el gráfico 3 porque a_1, a_2, a_3 y a_4 corresponde con mis resultados

Figura 33: Respuesta del estudiante e17 a la tarea 4 del cuestionario

Estos hechos, nos llevan a considerar que este comportamiento es característico de los estudiantes que se encuentran en el nivel inter de desarrollo del esquema de sucesión numérica en transición al nivel Trans. Es decir, los elementos matemáticos se usan de forma correcta, vinculados a determinadas tareas o registros de representación, evidenciándose las traslaciones entre algunos registros de representación. Además, en este nivel se empiezan a poner de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre elementos de forma correcta (en el caso del estudiante e17 se ha puesto de manifiesto con las relaciones conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) pero en algunos casos las relaciones lógicas se establecen con errores (en el caso del estudiante e17 se ha puesto de manifiesto en la tarea 1 con la equivalencia lógica o implicación lógica en forma negativa que lleva al estudiante a identificar las progresiones con las sucesiones). Se ponen de manifiesto las estructuras mentales del concepto de sucesión numérica: acción y proceso.

Capítulo IV: RESULTADOS

Capítulo IV: RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados expuestos en los tres artículos que conforman la tesis. En Bajo et al. (2019) se muestra la caracterización de los niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica puesto de manifiesto por los estudiantes de Segundo Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, según las relaciones lógicas (que se establecen entre los elementos matemáticos), el repertorio de elementos matemáticos utilizados por los estudiantes en las diferentes tareas del cuestionario, los registros de representación involucrados en su resolución, y las estructuras mentales que se ponen de manifiesto en las respuestas de los estudiantes en la resolución de las diferentes tareas del cuestionario.

En Bajo et al. (2021) focalizamos el papel que tiene la relación de implicación lógica como indicador de la transición de nivel Inter al nivel Trans en el concepto de sucesión numérica. Y, por último, en Bajo et al.

(2023) nos centramos en el papel que desempeña el registro de representación gráfico en la caracterización del esquema del concepto de sucesión numérica, al ser el uso de este registro de representación fundamental en la transición de niveles.

4.1 Caracterización de los niveles de comprensión del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria

El análisis realizado nos permitió asignar cada individuo a un determinado nivel de comprensión del esquema de sucesión numérica poniéndose de manifiesto que:

- La construcción del esquema de sucesión numérica se hacía de forma progresiva a partir de la cantidad de elementos y relaciones consideradas por los estudiantes asignados a un mismo nivel, es decir, a medida que avanzamos en cada nivel, se iban incorporando nuevos elementos matemáticos y sus relaciones entre ellos, dotando de una estructura más consistente al esquema de sucesión numérica.

- Los registros de representación tienen una influencia crucial en la construcción del esquema de sucesión numérica. Y esto, tanto en la forma de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos en un mismo registro de representación, como a la hora de realizar traslaciones entre varios registros de representación cuando el estudiante resuelve la tarea.

4.1.1 Nivel INTRA del desarrollo del esquema de sucesión numérica

Este nivel se caracteriza por el uso que hace el estudiante de elementos matemáticos de forma correcta en determinadas tareas e incorrecta en otras, vinculadas a un mismo registro de representación, sin establecer relaciones entre los registros de representación. Es decir, los registros de representación son considerados como diferentes y no los relaciona cognitivamente. Se pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica. Las relaciones lógicas entre elementos matemáticos se producen siempre con errores. Los elementos usados en este nivel son: E1, E2, E3, E4 y E6. Un ejemplo de un estudiante típico de este nivel Intra del desarrollo del esquema de sucesión numérica está recogido en Bajo et al. (2019) en la página 158.

En la siguiente tabla (tabla 5), se muestran los estudiantes situados en este nivel:

Tabla 5: Estudiantes situados en el nivel INTRA

Nivel	Estudiantes	Número
INTRA	e2, e13, e14, e20, e29, e32, e34, e35, e37, e38, e42,e43,e45,e48,e49,e50,e51,e54,e57,e62,e63,e66 e67, e68, e69, e70, e71, e72, e74, e75, e76, e77, e78, e79, e80, e81, e82, e84, e85, e86, e87, e88, e89, e90, e92, e93, e94, e95, e96, e97, e98, e99, e100, e101, e102, e105.	56

4.1.2 Nivel INTER del desarrollo del esquema de sucesión numérica

Este nivel de desarrollo se caracteriza porque aumenta el repertorio de elementos matemáticos relativos a las sucesiones numéricas. Además de los elementos matemáticos usados en el nivel Intra, los estudiantes en el nivel Inter usan los elementos matemáticos E5, E7, E8, E9, E10 y E11.

También, en este nivel, se pone de manifiesto un uso correcto de las relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) entre elementos matemáticos situados en un mismo registro de representación. Uso incorrecto de la relación lógica de equivalencia (implicación lógica en forma negativa).

También en este nivel de desarrollo se pone de manifiesto por parte del estudiante el uso de las traslaciones de un registro de representación a otro como, por ejemplo:

-Manipulan varios registros de representación de forma aislada, sin conexión entre ellos.
-Uso de los registros de representación gráfico (lineal y cartesiano) con errores.
-Traslaciones de los registros numéricos y algebraicos a los registros gráfico lineal y cartesiano a veces con errores.

Para este nivel de desarrollo, los estudiantes empiezan a interiorizar las acciones para convertirlas en procesos.

Un ejemplo de un estudiante típico de este nivel Inter del desarrollo del esquema de sucesión numérica está recogido en Bajo et al. (2019) en la página 159.

En la tabla 6, se muestran los estudiantes participantes en nuestro estudio situados en este nivel:

Tabla 6: Estudiantes situados en el nivel INTER

Nivel	Estudiantes	Número
INTER	e1, e4, e5, e6, e8, e11, e12, e15, e17, e18, e19, e21, e22, e26, e27, e28, e30, e31, e33, e36, e41, e44, e46, e47, e52, e53, e55, e56, e58, e59, e60, e61, e64, e65, e73, e83, e91, e103, e104.	39

4.1.3 Nivel TRANS del desarrollo del esquema de sucesión numérica

Este nivel se caracteriza porque los estudiantes hacen uso de todos los elementos matemáticos de forma correcta en el registro de representación necesario en cada tarea, y apenas tienen restricciones a la hora de establecer relaciones entre los elementos del esquema (usando todas las relaciones de forma correcta), y también se produce coordinación entre los distintos registros de representación, estableciéndose la síntesis entre los diferentes registros de representación a través de las traslaciones entre ellos.

Se pone de manifiesto la estructura mental objeto del concepto de sucesión numérica y la desencapsulación de éste en proceso.

Un ejemplo de un estudiante típico de este nivel Trans de desarrollo del esquema de sucesión numérica está recogido en Bajo et al. (2019) en la página 161.

En la tabla 7, se muestran los estudiantes participantes en nuestro estudio situados en este nivel:

Tabla 7: Estudiantes situados en el nivel TRANS

Nivel	Estudiantes	Número
TRANS	e3, e7, e9, e10, e16, e23, e24, e25, e39, e40	10

El análisis de los datos realizado nos permitió caracterizar el esquema de sucesión numérica. En la tabla 8 se muestran las características propias de cada nivel, sin olvidar su carácter progresivo, es decir, en cada nivel superior se van añadiendo todos los elementos matemáticos y las relaciones lógicas de los niveles anteriores (Bajo et al., 2019).

Tabla 8: Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de sucesión numérica.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	Nº EST
INTRA ↓	Un mismo elemento puede ser usado de forma correcta en determinadas tareas e incorrecta en otras, vinculadas a un registro de representación. Las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores. Se pone de manifiesto la estructura mental acción del concepto de sucesión numérica.	Sucesión como lista (E1) Términos de la sucesión (E2) Término general (E3) Progresión aritmética (E4) Progresión geométrica (E6)	56

INTER ↓	Los elementos matemáticos se usan de forma correcta en un mismo registro de representación. Uso correcto de las relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) entre elementos matemáticos en un mismo registro de representación. Uso incorrecto de la relación lógica de equivalencia (implicación lógica en forma negativa). Se pone de manifiesto la traslación entre registros de representación en algunas situaciones. Se pone de manifiesto la estructura mental proceso del concepto de sucesión numérica. Se pone de manifiesto la coordinación proceso en algunas situaciones.	Sucesión creciente (E10) Sucesión decreciente (E11) Sucesiones recurrentes(E8) Sucesiones por extensión (E9) Término general progresión aritmética(E5) Término general de una progresión geométrica (E7)	39
TRANS	Uso de todos los elementos matemáticos de forma correcta en el registro de representación necesario en cada tarea. Uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos de forma correcta. Se pone de manifiesto la síntesis entre los diferentes registros de representación. Se pone de manifiesto la estructura mental objeto del concepto de sucesión numérica y desencapsulación de este en procesos.		10

Esta caracterización también nos ha permitido identificar algunos indicadores de la comprensión del concepto de sucesión numérica, tratados de forma detallada en Bajo et al. (2021) y (2023). En Bajo et al. (2021) se trata de forma pormenorizada el papel que desempeña la relación de implicación lógica entre progresiones y sucesiones en la transición del nivel

Inter al Trans en el esquema de sucesión numérica. Y en Bajo et al. (2023) se trata el uso de los registros de representación gráfico (gráfico-lineal y gráfico-cartesiano) como indicador de la transición entre niveles en el esquema de sucesión numérica. Pasamos a describirlos en los apartados siguientes.

4.2 La implicación lógica entre sucesiones numéricas y progresiones numéricas como indicador de nivel

Centrando nuestro foco de atención en las relaciones lógicas entre elementos matemáticos cuando los estudiantes resuelven una tarea, nos damos cuenta que, el uso de la implicación lógica cuando los estudiantes resuelven tareas relativas a las sucesiones numéricas es un indicador del desarrollo del esquema de sucesión numérica. Este indicador permite caracterizar la transición entre los niveles Inter y Trans de desarrollo del esquema de sucesión numérica. En Bajo et al. (2021) se describe de forma detallada estos resultados a través de la resolución de la tarea 1 del cuestionario (figura 20, p. 78) por parte de los estudiantes 3b4, 3b13 y 314 codificados posteriormente como e31, e39 y e40 respectivamente en las páginas 6-9.

Los resultados de este artículo mostraban dos formas diferentes de usar la implicación lógica en la resolución de las tareas por parte del estudiante. Por un lado, están aquellos estudiantes que hacen un uso correcto de esta relación, tanto para afirmar como para negar, es decir, si se verifica

"A" entonces se verifica "B" (si A $\rightarrow$ B, forma afirmativa), pero si no se verifica "A" no implica que no se verifique "B" ($\neg A \not\Rightarrow \neg B$, forma negativa), evidenciándose un uso flexible de dicha relación. Dichos estudiantes se encuentran en el nivel Trans del desarrollo del esquema de sucesión numérica. Y por otro lado los estudiantes que hacen uso correcto de algunas relaciones (por ejemplo, Y lógica) y sin embargo no siempre hacen uso correcto de otras relaciones como es el caso de la relación de implicación lógica en su forma negativa, que la usan de manera incorrecta. Estos estudiantes se encuentran en el nivel Inter del desarrollo del esquema de sucesión numérica. Por tanto, el uso correcto de esta implicación en forma negativa es un indicador del nivel Trans del esquema de sucesión numérica.

En particular, en este artículo, mostramos estos resultados centrándonos en la relación de implicación lógica que se establece entre los elementos matemáticos sucesión numérica (E1) y progresión aritmética (E4) o geométrica (E6), es decir, progresión (aritmética o geométrica) implica sucesión numérica [(E4 o E6) => E1]. Sin embargo, no progresión (aritmética o geométrica) no implica no sucesión, [$\neg$ E4 $\not\Rightarrow$ $\neg$ E1 o $\neg$ E6 $\not\Rightarrow$ $\neg$ E1]. La tabla 9 muestra los estudiantes situados en los niveles Inter y Trans que hacen uso correcto e incorrecto de la relación de implicación lógica.

El hecho de que la tarea del cuestionario requiera utilizar la relación de implicación lógica en su forma negativa nos ha permitido identificar un indicador de la transición entre los niveles Inter y Trans en el desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión numérica.

Podemos considerar como caso particular los estudiantes e1 y e8, estos estudiantes hacen un uso correcto de la implicación lógica en forma negativa, sin embargo, han manifestado tener dificultades vinculadas a la síntesis entre los registros de representación. Por tanto, estos dos estudiantes pueden considerarse en transición entre los niveles Inter y Trans.

Tabla 9: Estudiantes que hacen uso correcto e incorrecto de la implicación lógica en forma negativa

Nivel	Uso incorrecto	Uso correcto
INTER	e4, e5, e6, e11, e12, e15, e17, e18, e19, e21, e22, e26, e27, e28, e30, e31, e33, e36, e41, e44, e46, e47, e52, e53, e55, e56, e58, e59, e60, e61, e64, e65, e73, e83, e91, e103, e104	e1, e8
TRANS		e3, e7, e10, e9, e16, e23, e25, e24, e39, e40

4.3 Uso de registros de representación para caracterizar los niveles

En el análisis de las respuestas expuesto en artículo Bajo et al. (2023), se ha observado diferentes formas de proceder en los estudiantes a la hora de resolver las tareas del cuestionario haciendo uso del registro de representación gráfico. Por un lado, están los estudiantes que hacen uso de elementos matemáticos en diferentes registros de representación numérico, algebraico y/o gráfico lineal de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran evidencias de traslaciones entre estos registros de representación, pero no hacen uso del registro de representación gráfico-cartesiano. Y, por otro lado, están algunos estudiantes que muestran cuando usan el registro de representación gráfico en la resolución de las tareas la coordinación entre ambos ejes (lugar que ocupa y término correspondiente) correspondiente a la representación cartesiana.

De los resultados de nuestra investigación se desprenden que el uso correcto del registro de representación gráfico-cartesiano indica mayor grado de desarrollo de la comprensión del esquema de sucesión como lista numérica que el uso correcto del registro de representación gráfico-lineal. Aquellos estudiantes que evidencian un uso correcto del registro de representación gráfico-cartesiano también son capaces de hacer un uso correcto del gráfico-lineal cuando lo exige la resolución de la tarea; pero no ocurre lo mismo en sentido inverso, es decir el uso correcto por parte del estudiante de elementos matemáticos del concepto de sucesión como lista numérica en registro de representación gráfico-lineal no conlleva el uso de estos mismos elementos en registro gráfico-cartesiano cuando la resolución de la tarea lo exige, como queda evidenciado en la resolución de las tareas 3 y 4 del cuestionario (figura 20, p. 78) por parte de los estudiantes analizados en Bajo et al. (2023) en las páginas 164-168.

En las tablas 10 y 11 se muestra los estudiantes situados en los niveles Inter y Trans que hacen uso correcto e incorrecto del registro de representación gráfico (lineal y cartesiano).

Tabla 10: Estudiantes que hacen uso correcto e incorrecto de registro de representación gráfico en los niveles Inter y Trans.

Nivel	Uso incorrecto	Uso correcto
INTER	e1, e4, e5, e6, e8, e12, e15, e18, e19, e21, e22, e26, e27, e28, e30, e31, e33, e36, e41, e44, e46, e47, e52, e53, e55, e56, e58, e59, e60, e61, e64, e65, e73, e83, e91, e103, e104	e11, e17
TRANS		e3, e7, e10, e9, e16, e23, e25, e24, e39, e40

Tabla 11: Número de estudiantes en el nivel Inter que hacen diferentes usos del registro de representación gráfico.

Registros de representación	Número de estudiantes
Uso correcto del registro de representación gráfico (lineal y cartesiano)	2
Uso correcto solo del registro de representación gráfico-lineal	15
Uso incorrecto de los registros de representación gráfico	22

De los doce estudiantes que usan el registro de representación gráfico de forma correcta, diez están situados en el nivel Trans del esquema de sucesión numérica. Los otros dos (e11 y e17) están situados en el nivel Inter del esquema pues hacen un uso correcto del registro de representación gráfico (lineal y cartesiano) sin embargo, tienen dificultades en el uso de la implicación lógica en forma negativa. De ello, se puede inferir que el uso correcto del registro de representación gráfico cartesiano es un indicador de la transición del nivel Inter al Trans, y podría considerarse que estos estudiantes están en un nivel Trans inicial.

Capítulo V: CONCLUSIONES

Capítulo V: CONCLUSIONES

Mostramos algunas conclusiones que se derivan de los resultados obtenidos en nuestra investigación sobre la comprensión del esquema de sucesión numérica, señalando características propias de cada nivel de comprensión del esquema.

Y de forma específica nos fijamos en dos indicadores relevantes en la caracterización de dicho esquema como son el uso de las relaciones lógicas, y los registros de representación por parte de los estudiantes cuando resuelven tareas que involucran a las sucesiones numéricas.

Además, proponemos, en base a los resultados que hemos obtenido, una revisión de la descomposición genética inicial del concepto de sucesión numérica. Indicamos algunas implicaciones para la enseñanza de las sucesiones numéricas en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. Finalmente, mostramos algunas limitaciones y perspectivas de futuro de nuestra investigación.

5.1 Desarrollo del esquema de sucesión numérica

Esta investigación ha permitido identificar características de los diferentes niveles de la comprensión del concepto de sucesión numérica, Intra, Inter y Trans (Bajo et al., 2019).

Para ello hemos considerado los elementos matemáticos que conforman el concepto, las relaciones lógicas que se establecen entre ellos (Y lógica, equivalencia lógica, implicación lógica y el contrarrecíproco), las transformaciones y traducciones entre los diferentes registros de representación, numérico, algebraico y gráfico (lineal y cartesiano). Así como, las estructuras mentales (acción, proceso, objeto y esquema) y los mecanismos de construcción (interiorización, encapsulación, desencapsulación).

Las características propias de cada nivel de comprensión del esquema de sucesión numérica (Intra, Inter y Trans) son las siguientes:

- Características del nivel Intra del esquema de sucesión numérica: dicho nivel se caracteriza porque el estudiante, en la resolución de las diferentes tareas del cuestionario, a veces usa un mismo elemento tanto de forma correcta como incorrecta, vinculando el uso de los elementos matemáticos a un registro de representación y no se realizan traslaciones entre registros de representación. Las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores, poniéndose de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica.

Los estudiantes, para este nivel de desarrollo del esquema de sucesión numérica, hacen uso de las estructuras mentales orientadas a acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos entre sí. De este registro, el estudiante hace uso de (pocos) elementos matemáticos de forma aislada (a veces de forma correcta) en algún registro de representación, sin establecer relaciones, es decir, no los relaciona cognitivamente.

-Características del nivel Inter del esquema de sucesión numérica: en este nivel el estudiante usa los elementos matemáticos de forma correcta vinculados a determinadas tareas, pero solo en algunos registros de representación, y establecen relaciones entre los elementos matemáticos cuando se encuentran en un mismo registro de representación, a veces de forma incorrecta. Se empiezan a poner de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) y en otros casos con errores (la equivalencia lógica que lleva al estudiante a identificar las progresiones con las sucesiones). Se ponen de manifiesto las diferentes las estructuras mentales del concepto de sucesión numérica (acción, proceso y coordinación de procesos). También en este nivel se ponen de manifiesto las traslaciones de un registro de representación a otro.

-Características del nivel Trans del esquema de sucesión numérica: aquí el estudiante usa siempre los elementos matemáticos necesarios en la resolución de las diferentes tareas vinculadas a los distintos registros de representación, lo que evidencia la síntesis entre ellos.

Además, se establecen diferentes tipos de relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica, contrarrecíproco, equivalencia lógica) cuando son necesarias en la resolución de la tarea, porque los estudiantes no tienen restricciones a la hora de establecer relaciones entre los elementos del esquema, se producen coordinaciones entre los distintos registros de representación de forma fluida, y se ponen de manifiesto las diferentes las estructuras mentales del concepto de sucesión numérica, evidenciándose la síntesis entre los registros de representación.

La investigación de McDonald et al. (2000) sobre el concepto de sucesión señaló que para la construcción de dicho concepto los estudiantes construyen dos objetos cognitivos diferentes, la sucesión como lista numérica (Seqlist) y la sucesión como función de dominio los números naturales (Seqfun), centrándose estos investigadores en el segundo de ellos, puesto que los estudiantes con los que realizan su investigación tienen construido el concepto Seqlist (estudiantes universitarios) como objeto. Nosotros, en nuestro trabajo complementamos dicha investigación centrándonos en la construcción del primero de ellos Seqlist.

Además, esta investigación nos ha permitido identificar dos indicadores de la transición entre los niveles Inter y Trans en el esquema de sucesión numérica que son, por un lado, la relación de implicación lógica que hay entre el concepto de sucesión numérica y progresión numérica. Y por otro lado, el uso del registro de representación gráfico (lineal y cartesiano) vinculado a dicho concepto.

5.1.1 Relaciones lógicas: la implicación lógica como indicador de nivel del esquema

Un tipo particular de sucesión numérica son las progresiones aritméticas. En relación con este tipo de sucesiones, uno de los resultados obtenidos en la investigación de Przenioslo (2006) fue que los estudiantes consideraban las sucesiones como progresiones aritméticas.

Este resultado está en coherencia con los resultados obtenidos en nuestra investigación, en la que de los estudiantes situados en el nivel Inter del esquema de sucesión numérica establecen una relación de equivalencia lógica entre sucesión numérica y progresión. En este sentido, los resultados de nuestra investigación complementan los resultados de Przenioslo (2006) al considerar los estudiantes las sucesiones como progresiones, tanto las progresiones aritméticas como las geométricas.

La relación entre las progresiones y las sucesiones numéricas, hemos podido estudiarlas y caracterizarlas a través de la relación de implicación lógica (Bajo et al., 2021). En este sentido, nuestros resultados nos han permitido poner de manifiesto que el uso correcto de la implicación lógica en la resolución de las tareas por parte del estudiante es un indicador de la transición entre los niveles inter y trans del desarrollo del esquema del concepto de sucesión numérica. Aquellos estudiantes que hacen un uso correcto de esta relación, tanto para afirmar como para negar, es decir, si se verifica "A" entonces se verifica "B" (si A → B, forma afirmativa), pero si no se verifica "A" no implica que no se verifique "B" (no A ≠> no B, forma negativa), evidencian un uso flexible de dicha relación y son estudiantes que se encuentran en el nivel Trans del desarrollo del esquema de sucesión numérica. En nuestra investigación, dicho uso flexible se ha evidenciado en la relación de implicación lógica que se establece entre los elementos matemáticos sucesión numérica (E1) y progresión aritmética (E4) o geométrica (E6), es decir, progresión (aritmética o geométrica) implica sucesión numérica [(E4 o E6) => E1], sin embargo, no progresión (aritmética o geométrica), no implica no sucesión, [┐ E4 ≠> ┐ E1 o ┐ E6 ≠> ┐ E1].

Y por otro lado están aquellos estudiantes que haciendo uso correcto de algunas relaciones (por ejemplo, Y lógica) sin embargo la relación de implicación lógica, cuando la resolución de la tarea les exige hacer uso de dicha relación en su forma negativa, la usan de manera incorrecta. Estos estudiantes se encuentran en el nivel inter del desarrollo del esquema de sucesión numérica.

Estos resultados de nuestra investigación están en consonancia con investigaciones previas en relación a otros conceptos matemáticos como el de función derivada (Fuentealba et al., 2019; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2008). En dichas investigaciones se puso de manifiesto cómo el uso de las relaciones lógicas Y lógica, contrarrecíproco y equivalencia lógica son indicadores del desarrollo del esquema del concepto de función derivada. En nuestra investigación hemos podido corroborar cómo, además de estas relaciones lógicas, también la relación de implicación lógica es un indicador del desarrollo del esquema del concepto de sucesión numérica. Este hecho nos permite considerar que el uso que hacen los estudiantes de las relaciones lógicas cuando resuelven tareas son indicadores del desarrollo del esquema de conceptos matemáticos.

5.1.2 Registros de representación gráfico: gráfico lineal y gráfico-cartesiano

El uso de diferentes registros de representación se ha considerado como un elemento clave para caracterizar la comprensión de conceptos matemáticos. Diversas investigaciones (Cañadas, 2007; González et al., 2011; Przenioslo, 2006) señalan la importancia del uso de los diferentes registros de representación para el estudio del concepto de sucesión numérica, considerando los registros numérico, algebraico, gráfico lineal y gráfico cartesiano. Nuestros resultados ratifican dicha importancia y constatan la dificultad en las conversiones o traslaciones entre distintos registros de representación.

Además, dentro del registro de representación gráfico, nuestros resultados han permitido evidenciar el diferente comportamiento de los estudiantes situados en el nivel Inter en relación a los registros de representación gráfico lineal y gráfico cartesiano (Bajo et al., 2023). Así, todos los estudiantes situados en el nivel Inter muestran esbozos de síntesis entre los registros de representación numérico, algebraico y gráfico lineal, sin embargo, no sucede lo mismo con el registro de representación gráfico-cartesiano.

Este trabajo ha abordado el estudio y la diferenciación de dos registros de representación gráfico relacionados mediante conversión, el registro de representación gráfico-lineal y el registro de representación gráfico-cartesiano. Se han caracterizado ambos registros de representación mediante dos procesos presentes en ambos, como son la lectura y la interpretación. Por un lado, la lectura es un proceso que podemos considerar puntual, ya que está vinculado a puntos concretos (términos particulares de la sucesión numérica, bien sea a un solo punto como a un conjunto finito de términos de la sucesión) y por otro lado la interpretación que es de naturaleza global, es decir, vinculada a la sucesión numérica completa con sus infinitos términos.

Esta investigación ha permitido considerar que diferenciar entre el registro de representación gráfico-lineal y gráfico-cartesiano puede ayudar a caracterizar la progresión en el aprendizaje del concepto de sucesión numérica en el registro gráfico. Todos los estudiantes que hacen un uso correcto del registro de representación gráfico-cartesiano, también usan de manera correcta el registro de representación gráfico-lineal, pero no a la inversa. Por lo que puede concluirse que el aprendizaje del registro de representación gráfico del concepto de sucesión numérica se produce haciendo primero un uso correcto del registro gráfico-lineal para pasar a un uso correcto del registro gráfico en sus dos formas (gráfico-lineal y gráfico-cartesiano).

Los resultados de nuestra investigación están en consonancia con aquellos trabajos que resaltan la presencia de los registros de representación y la relevancia de las conversiones entre ellos para la comprensión del concepto de sucesión numérica (Biza et al., 2020; Cañadas, 2007; Djasuli et al., 2017; Przenioslo, 2006; Roh, 2008). Además, coincidimos con Biza et al. (2020) que la estrategia más utilizada por los estudiantes de nuestra investigación para resolver una tarea ha sido mayoritariamente la conversión al registro de representación numérico.

También nuestros resultados están en consonancia con Duval (2006) que considera que para un concepto cada registro de representación tiene asociadas unas características propias del mismo, pero no todas; de esta forma la comprensión conceptual surge de la coordinación de varios registros de representación. En nuestra investigación, los estudiantes en el nivel Inter del desarrollo del esquema de sucesión numérica coordinan los registros de representación numérico, algebraico y gráfico lineal, sin embargo, no sucede lo mismo con el registro de representación gráfico-cartesiano, esto es debido a que el concepto de sucesión numérica en el registro de representación gráfico tiene asociadas características distintas según sea gráfico lineal o gráfico cartesiano. En el primero de ellos no es necesario coordinar la posición y el valor del término, mientras que, en el segundo, es necesario dicha coordinación en todas las situaciones. Por tanto, los estudiantes situados en el nivel Trans del desarrollo del esquema de sucesión numérica coordinan los diferentes registros de representación, evidenciándose con ello, en dichos estudiantes, que han llegado a la comprensión conceptual del concepto de sucesión numérica.

Resaltar que esta investigación ha evidenciado que no todos los conceptos matemáticos hacen uso de los registros de representación de la misma forma.

5.2 Revisión de la descomposición genética del concepto de sucesión numérica

El marco APOS implementa un ciclo de investigación que consta principalmente de tres partes: análisis teórico, diseño e implementación de instrumentos de investigación, y observación, análisis y verificación de datos (figura 19, p.53).

El análisis teórico de este ciclo tiene como base una descomposición genética inicial de un concepto. Cada vez que se implementa este ciclo permite obtener una descripción más detallada y cercana a la construcción de los conceptos matemáticos. Y esta descomposición genética se refina como resultado del análisis sobre los datos empíricos analizados. De esta manera comienza un nuevo ciclo a partir de la descomposición genética refinada.

Nuestra investigación nos ha permitido, a partir de los resultados obtenidos, refinar la descomposición genética inicial (p. 76):

0.- Prerrequisitos:

Los conceptos previos para la construcción del esquema de sucesión numérica son expresión algebraica y valor numérico de expresión algebraica en registro algebraico y numérico respectivamente como objetos y representaciones gráficas de puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano como proceso.

1.- Acción de calcular términos de la sucesión a partir de la posición que ocupan:

1a.- Acción de calcular en una sucesión dada por su término general (expresión algebraica), un término concreto (a_n) a partir de su posición (n), dando valores a la variable para obtener los valores numéricos que componen los términos de la sucesión.

1b.- Acción de calcular en una sucesión dada gráficamente en la recta numérica (gráfico lineal), un término concreto a partir de su posición en la recta numérica mediante una correspondencia biunívoca: donde a cada posición (n) le corresponde un término de la sucesión (a_n).

1c.- Acción de calcular en una sucesión dada gráficamente en el plano cartesiano (gráfico cartesiano), un término concreto (a_n), representado en el eje de ordenada, a partir de su posición (n), representado en el eje de abscisa.

2.- Interiorización de la acción de calcular términos de la sucesión a partir de la posición que ocupan:

2a.- Interiorización de la acción dada en el 1a como Proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de calcular diferentes términos de la sucesión sustituyendo en el término general.

2b.- Interiorización de la acción dada en el 1b como Proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de identificar diferentes términos de la sucesión en la recta numérica por la posición que ocupan.

2c.- Interiorización de la acción dada en el 1c como Proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de identificar diferentes términos de la sucesión en el plano cartesiano a partir de la coordinación de ambos ejes cartesianos.

3.- Inversión del proceso construido en el punto 2.

3a.- Inversión del proceso 2a para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica.

3b.- Inversión del proceso 2b para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica a partir de su valor en la recta numérica.

3c.- Inversión del proceso 2c para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica a partir de su valor en el eje de ordenadas.

4.- Coordinación de los procesos 2a, 2b y 2c en un nuevo proceso, donde es posible considerar estos procesos como el mismo independientemente del registro de representación usado.

5.- Encapsulación del proceso 4 como un objeto sobre el que realizar acciones o procesos para el estudio de propiedades globales donde están implicados todos los términos de la sucesión ($a_n = [a_1, a_2, ...]$).

6.- Desencapsulación del objeto 5 como proceso, donde puede considerarse la sucesión completa y algunos de sus términos concretos, por ejemplo, en situaciones de comparación de sucesiones, tendencia, etc.
Esta descomposición genética refinada puede ser el punto de partida de un ciclo de investigación nuevo.

5.3 Implicaciones para la enseñanza

El aprendizaje del concepto de sucesión numérica es un desafío para los estudiantes de Educación Secundaria ya que es uno de los primeros conceptos matemáticos que no se desarrolla en un contexto finito sino en un contexto infinito. Específicamente, un contexto infinito discreto (se basan en los números naturales, que es un conjunto numerable infinito) que es la transición hacia conceptos del análisis matemático en contexto infinitos no discretos (continuos, conjunto no numerable) con base en los números reales. Estas investigaciones son fundamentales cuando se plantea el diseño de la enseñanza en estos niveles educativos que permita a los estudiantes comprender el concepto.

Por ejemplo, este trabajo pone de manifiesto que los dos registros de representación gráficos de las sucesiones numéricas no tienen la misma naturaleza: el registro grafico-lineal se representa en una dimensión (recta real) y requiere unas habilidades de lectura diferentes al registro gráfico-cartesiano que se representa bidimensionalmente (plano euclídeo). En este registro de representación gráfico, las conversiones entre ambos gráfico-lineal y gráfico-cartesiano no son inmediatas. Una posible forma de facilitar estas conversiones puede ser a través de tareas que permitan la conversión al registro de representación numérico.

Asimismo, los resultados de esta investigación pueden ser útiles para la enseñanza cuando el profesor en su planificación elabore trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon, 1995). En la elaboración de estas trayectorias, nuestro trabajo proporciona una posible progresión en el aprendizaje del concepto de sucesión numérica.

También, los resultados obtenidos en esta investigación pueden usarse para el diseño de un módulo de formación para (futuros) profesores de Educación Secundaria (Sánchez-Matamoros, 2014).

5.4 Limitaciones y perspectivas de futuro

El tamaño de la muestra y los cambios curriculares que se han propuesto en los últimos años pueden ser una limitación de este trabajo.

Para futuras investigaciones a partir de la caracterización de los niveles Intra, Inter y Trans para el concepto de sucesión numérica podemos empezar a considerar la identificación de subniveles dentro de cada uno de los niveles considerados ya que cada nivel implica a su vez algunos subniveles siguiendo el mismo orden de progresión, así como la tematización del esquema (Piaget y García, 1983).

Además, dado que este trabajo se ha realizado con estudiantes de Secundaria Obligatoria (14-16 años), una línea de investigación futura es realizar la investigación con estudiantes de niveles de Bachillerato y/o universitarios para indagar en el desarrollo de la comprensión de dicho concepto, caracterizar con más detalle el nivel Trans- y poder evidenciar la tematización del esquema.

También la realización de un análisis cuantitativo de los datos nos permitirá confirmar y refinar las caracterizaciones realizadas de los niveles de desarrollo del esquema, dando lugar a una metodología mixta (Fuentealba, 2019).

Asimismo, los resultados obtenidos de esta investigación nos han proporcionado una descomposición genética refinada del concepto de sucesión numérica que puede utilizarse como punto de partida del ciclo de desarrollo curricular e investigación para la enseñanza (Arnon et al., 2014) de dicho concepto.

Además, el uso de esta investigación para el diseño de un módulo de formación para (futuros) profesores de Educación Secundaria, permitirá realizar investigaciones en el contexto de aula sobre el aprendizaje de los (futuros) profesores (Sánchez-Matamoros, 2014).

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Altay, M. K., Akyüz, E. Ö., y Erhan, G. K. (2014). A study of middle grade students' performances in mathematical pattern tasks according to their grade level and pattern presentation context. *Procedia – Social and Behavioural Sciences*, 116, 4542–4546. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.982

Amaya, T. (2020). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas en el desarrollo de una clase utilizando funciones. *Bolema, 34*(66), 110-131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Apostol T.M. (1996). Calculus. Reverte.

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de la superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina, N. y Planas (Eds.), *Investigación en Educación*

Matemática XIX (pp. 123-131). SEIEM https://core.ac.uk/outputs/83544060

Ariza, A. y Llinares, S. (2009) Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 121-136. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

Arnon, I.,Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas) (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2016). Educación matemática investigación a nivel universitario: Logros y desafíos. En E. Nardi,C. Winslow, y T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 1st Conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 11–27). INDRUM.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A Framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, 6*, 1-32.

Azcárate, C. y Camacho-Machín, M. (2015). El pensamiento matemático como marco de referencia. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González y M. Moreno (Eds.). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp.17-30). Universidad de la Laguna.

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. www.cimt.org.uk/journal/bagni.pdf

Bajo, J. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Los registros de representación gráfico lineal y cartesiano en la comprensión del concepto de sucesión numérica en estudiantes de segundo ciclo Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157-166). SEIEM.

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de Segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 143-151). SEIEM.

Bajo Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Sánchez-Matamoros García, G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(3), 149-167. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

Bajo Benito, J.M., Sánchez-Matamoros García, G. y Gavilán Izquierdo, J.M. (2021). The use of logical implication as an indicator of understanding the concept of number sequences. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education, 17* (12), 1-12. https://doi.org/10.29333/ejmste/11429

Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., y Sánchez-Matamoros García, G. (2023). The concept of number sequence in graphical representations for secondary school students. *European Journal of Educational Research, 12*(1), 155-166. https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.159

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Biza, I., Hewitt, D., Watson., y Mason, J. (2020). Generalization strategies in finding the nth term rule for simple quadratic sequences. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(6), 1105–1126. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10009-0

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 5, de 5 de enero de 2007, 677-773. Ministerio de Educación y Ciencia. https://www.boe.es/eli/es/rd/2006/12/29/1631/con

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 3 del 3 de enero de 2015. Ministerio de Educación y Ciencia.

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 76 del 30 de marzo de 2022*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 129–158.

BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. BOJA, 171, 23-65. Consejería de Educación.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema, 28*(48), 64–88.

https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., et al. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *The Journal of Mathematical Behavior,16,* 345–364.

Claros, F. J. (2010). *Límite de una función, fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Claros Mellado, J., Coriat Benarroch, M., y Sánchez Compaña, T., (2016) Estructura cognitiva y fenomenología: El caso de la sucesión convergente. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(2), 87-105.

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Codes, M., González Astudillo, M.T., Delgado Martín, M.L., y Monterrubio Pérez, M.C. (2013). Growth in the understanding of infinite numerical series: a glance through the Pirie and Kieren theory. *International*

Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 652-662. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.781690

Codes, M. y González-Martín, A. S., (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(1), 89-110. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning whit a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.

Crisp, R., Inglis, M., Mason, J. y Watson, A. (2012) Individual differences in generalisation strategies, *Research in Mathematics Education, 14*(3), 291-292. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.734981

Djasuli, M., Sa'dijah, C., Parta, I. N., y Daniel, T. (2017). Students' reflective abstraction in solving number sequence problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 12*(3), 621–632. https://doi.org/10.29333/iejme/638

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1984436

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas:*

Perspectivas semióticas seleccionadas (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval R. (2017) *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, (2.ed.). Universidad del Valle.

El Mouhayar, R., y Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalisation type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197–215. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1068391

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2016). Thematization of derivative schema in university students: Nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *48*(3), 374-392. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Cárcamo, A. (2019). The understanding of the derivative concept in higher education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2). https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Fuentealba, C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G., y Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (21), 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

García, M., Llinares, S. y Sánchez–Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1023–1045. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9227-2

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178–203). Routledge.

González Redondo, F., Martín-Loeches, M. y Pobes, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: Pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. *Dynamis*, 30, 167-195. http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0211-95362010000100007&lng=es&tlng=es.

Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S., y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, *26*,1-19.

González, M. T., y Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. En A. Contreras y L. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). SEIEM.

Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.

Mamona, J. (1990). Sequences and series–Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), 333–337.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 259–288. https://doi.org/10.1023/A:1016004822476

Martínez-Planell, R., González,A., Di Cristina,G., y Acevedo, V. (2011). Construcciones SERLIST y SERFUNC de series infinitas. *Educación Matemática*, *23*(3), 183-207.

Martínez-Planell, R., Gonzalez, A. C., Di Cristina, G., y Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 235-249. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9401-2

Maza, C. (2009). *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto*. Universidad de Sevilla.

McDonald, M. A., Mathews, D. M., y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, *8*, 77–102.

Montenegro, P., Costa, C., y Lopes, B. (2018). Transformations in the visual representation of a figural pattern. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(2), 91-107. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1441599

Moyer-Packenham, P. S. (2005). Using virtual manipulation to investigate patterns and generate rules in algebra. *Teaching Children Mathematics, 11*(8), 437–444.

Mor Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K., y Simpson, G. (2006). Designing to see and share structure in number sequences. T*he International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(2), 65-78.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 1-18.

https://doi.org/10.1007/BF00704699

Orts, A., Llinares, S., y Boigues, F. J. (2016). Elementos para una descomposición genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 111-134.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI Editores.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J.Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). SEIEM.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(7), 805–823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Mir.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer.

Rivera, F. D., y Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalisations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 65–82. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0062-z

Roa-Fuentes, S., y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89–112.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(2), 199-232.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Sánchez-Matamoros, G. (2004*). Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 41-53). Salamanca: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), pp. 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema,* 27(45) 281-302.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24–36.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114- 145. https://doi.org/10.2307/749205

Solís, C. y Sellés, M. (2005). *Historia de la Ciencia.* Espasa-Calpe.

Stewart, J. Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2013). *Introducción al cálculo*. S.A. Ediciones Thomson.

Struik, D.J. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* Instituto Politécnico Nacional de México.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educative a nivel superior. *Educación Matemática, 17(*1), 5-31.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.637

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2011). Atlas.ti como herramienta de análisis de la práctica docente: El caso de la función exponencial. En M. M. Moreno y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. *Comunicaciones de los grupos de investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM* (pp. 187-199). Edicions de la Universitat de Lleida

Vargas, J. (2012*). Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca

Warren, E., y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support eight year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171–185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Weigand, H-G. (2015). Discrete or continuous? – A model for a technology supported discrete approach to calculus. En K. Krainer y N. Vondrová

(Eds.). *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2580-2586). ERME.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI.

Žakelj, A., y Klančar, A. (2022). The role of visual representations in geometry learning. *European Journal of Educational Research, 11*(3), 1393-1411. https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.3.1393

ARTÍCULOS

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-3 (2019), 149-167
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria

Characterization of the numeric sequence schema among Compulsory Secondary Education students

José Mariano Bajo Benito, José María Gavilán-Izquierdo, Gloria Sánchez-Matamoros García
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Sevilla (España)
jbajo@us.es, gavilan@us.es, gsanchezmatamoros@us.es

RESUMEN • El objetivo de esta investigación es la caracterización de la compresión del concepto de sucesión numérica en los estudiantes de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años), considerando como marco teórico APOS, a través del uso que hacen los estudiantes de los elementos matemáticos, las relaciones que se establecen entre ellos, los modos de representación y los modos de conocer que se ponen de manifiesto en la resolución de las tareas matemáticas que se les proponen. Nuestra metodología es cualitativa, usando datos provenientes de dos cuestionarios de distinta naturaleza. A partir del análisis conjunto de los dos cuestionarios contestados por cada estudiante, se caracterizan los distintos niveles de comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica.

PALABRAS CLAVE: Sucesiones numéricas; Estudiantes de educación secundaria obligatoria; Teoría APOS; Desarrollo de un esquema.

ABSTRACT • The aim of this research is to characterize the understanding of the numerical sequence concept in high school students (14-16 years old). The study draws on the APOS theory, which considers how students use mathematical elements, the relationships established between them, theirs modes of representation and the cognitive structures that are showed in the resolution of mathematical tasks. Our methodology is qualitative, using data from two questionnaires of diverse nature. The different levels of understanding of the scheme of the concept of numerical sequence were characterized taking into consideration the analysis of the two questionnaires.

KEYWORDS: Numerical sequences; High school students; APOS theory; Schema development.

Recepción: mayo 2018 • Aceptación: abril 2019 • Publicación: noviembre 2019

Bajo Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Sánchez-Matamoros García, G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 149-167
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han resaltado la importancia de la investigación sobre el concepto de sucesión numérica por las implicaciones en la comprensión de otros conceptos de análisis matemático. Así, Mamona-Downs (2001) y Roh (2008), en sus investigaciones sobre el concepto de límite, destacaron que una buena concepción del concepto de sucesión es fundamental para la comprensión del concepto de límite. Vinculadas a la comprensión del concepto de serie numérica, las investigaciones de Bagni (2005) y Codes Valcarce y González-Martín (2017) señalan la relevancia de las investigaciones sobre el concepto de sucesión numérica, ya que formalmente una serie numérica es una sucesión de sumas parciales. Debido al auge de la tecnología, actualmente Weigand (2015) considera que se debería prestar más atención a las sucesiones numéricas en términos de relaciones de recurrencia, pues son prototipos de objetos discretos en matemáticas.

El análisis de la comprensión del concepto de sucesión ha sido abordado por diferentes investigadores desde distintas perspectivas teóricas. Así, McDonald, Mathews y Strobel (2000), en su investigación con estudiantes universitarios, en relación con el tipo de construcciones mentales que hacen los estudiantes sobre la comprensión de dicho concepto, indican que construyen dos objetos cognitivos diferentes: por una parte, un objeto como listado de números (*Seqlist*), y, por otra, otro objeto como función, cuyo dominio pertenece al conjunto de los naturales (*Seqfun*), centrando su estudio en este último. Przenioslo (2006), en su investigación con estudiantes de secundaria (16-19 años), dividió las concepciones de los estudiantes en dos grupos: en un primer grupo se percibía una sucesión como una función, y en un segundo grupo se percibía una sucesión conectada con un conjunto ordenado de números, en el que debe existir una relación entre los términos o una cierta regularidad. Esta autora considera que para la comprensión del concepto de sucesión numérica es conveniente el uso de diferentes modos de representación, distinguiendo dentro del modo gráfico entre gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

Por su parte, Mor, Noss, Hoyles, Kahn y Simpson (2006), en su investigación también con estudiantes de Secundaria, observaron que las secuencias numéricas son consideradas intuitivamente recursivas por dichos estudiantes. Es decir, más que como una relación entre los valores y sus posiciones respectivamente, se ven como una relación entre valores sucesivos de una secuencia. Cañadas (2007), en su investigación sobre sucesiones de números naturales lineales y cuadráticos, se centra en cuatro sistemas relacionados con las representaciones discretas (numérica, gráfica, algebraica y verbal) y sus variantes. González, Medina, Vilanova y Astiz (2011), en su investigación con estudiantes universitarios, identificaron dificultades en la relación entre la interpretación gráfica y la algebraica en el concepto de sucesión.

En este trabajo, nos centramos en caracterizar la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica en alumnos de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años) a través del desarrollo de un esquema (Arnon et al., 2014).

Desde el punto de vista curricular, el concepto de sucesión numérica aparece en segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, recogido en el bloque de Álgebra, en los siguientes términos «Estudio y análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas. Sucesiones recurrentes. Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en los conjuntos de números» (BOE, n.º 5, 05/01/2007, p. 756).

En nuestra investigación, siguiendo la definición de Stewart, Hernández y Sanmiguel (2007), consideramos el concepto de sucesión numérica de la siguiente forma: una sucesión es un conjunto infinito de números escritos en un orden específico, $a_1, a_2, a_3..., a_n...$, donde cada miembro del conjunto ha sido etiquetado con un subíndice natural, siendo a_1 el primero y, en general, el término n-ésimo a_n. Anotaremos la sucesión como $\{a_n\}$.

Existen diversas formas de construir los términos de una sucesión numérica; nosotros vamos a considerar las siguientes: mediante una fórmula que defina el término n-ésimo (término general), a través de un conjunto de instrucciones que indican cómo se obtiene un término a partir de los anteriores (por recurrencia) o dando una serie de términos consecutivos ordenados, uno detrás de otro, como una lista infinita de números (por extensión).

Del mismo modo, una progresión aritmética es una sucesión de la forma a, a+d… a+nd..., y una progresión geométrica es una sucesión de la forma a, ar..., ar^n... (Stewart et al., 2007).

En consecuencia, en este trabajo vamos a considerar los siguientes elementos matemáticos con relación al concepto de sucesión como lista numérica:

- E1 Sucesión (como lista): secuencia de números reales dispuestos en un orden, es decir, para todo número natural n existe un número real.
- E2 Términos de una sucesión: se definen como los integrantes de la sucesión; el lugar que ocupa lo determina su posición, que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
- E3 Término general de una sucesión: se define como el término que, dependiendo de su posición, es decir, subíndice, sabemos su valor, y se denota por «a_n» (con n perteneciente a los naturales).
- E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
- E5 Término general de una progresión aritmética:

  $\{a_n=a_1+(n-1)\cdot d, n \in N\}$ siendo a_1 el primer término y d la diferencia entre términos consecutivos.
- E6 Progresión geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo una cantidad fija que denominamos razón.
- E7 Término general de una progresión geométrica:

  $\{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, n \in N\}$ donde a_1 es el primer término y r la razón de la progresión.
- E8 Sucesión recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.
- E9 Sucesión por extensión: se define una sucesión por extensión cuando se dan una serie de términos consecutivos de ella.
- E10 Sucesión creciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in N\}$ es creciente cuando cada término es menor o igual que el término siguiente.
- E11 Sucesión decreciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in N\}$ es decreciente cuando cada término es mayor o igual que el término siguiente.

MARCO TEÓRICO

Consideramos como marco teórico para estudiar la comprensión del concepto de sucesión numérica el marco APOS (Arnon et al., 2014; Dubinsky, 1991). En este marco, acciones, procesos, objetos y esquemas son constructos mentales para la construcción de conocimiento matemático que se organizan en la descomposición genética de un concepto, entendida como «un conjunto estructurado de constructos mentales, que pueden describir cómo el concepto se desarrolla en la mente del individuo» (Asiala et al., 1996). La descomposición genética de un concepto matemático no es única y proporciona una posible progresión en el aprendizaje del estudiante para la formación del concepto.

Según Arnon et al. (2014), un concepto se concibe primero como una acción, es decir, como una transformación externa que necesita ser realizada explícitamente sobre un objeto u objetos concebidos previamente. A medida que las acciones se repiten, el individuo pasa de depender de señales externas a tener control interno sobre ellas, pasando a concebir el concepto como un proceso. Los procesos se construyen utilizando uno de los siguientes mecanismos mentales: interiorización, inversión o coordinación, y cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos procesos.

La interiorización permite ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones (Dubinsky, 1991). Una acción interiorizada es un proceso. La inversión de un proceso es la posibilidad de pensarlo invertido en el sentido de deshacer los pasos del proceso interiorizado, lo que da lugar a un nuevo proceso.

La coordinación de procesos es el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. En general, la coordinación puede transformar procesos en procesos o procesos en objetos a partir de la encapsulación.

La encapsulación se produce cuando un individuo aplica una acción o proceso a un proceso, es decir, ve una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática (objeto) a la que se pueden aplicar acciones.

Desarrollo de un esquema en la teoría APOS

La teoría APOS aborda el desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos en términos de construcción de esquemas, mediante el mecanismo de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1983). En este modelo se define un esquema

> como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática (Trigueros, 2005: 11).

Un esquema se puede transformar en una estructura estática (objeto) y/o se puede usar como una estructura dinámica que asimila otros objetos o esquemas relacionados.

Esta aproximación al desarrollo de un esquema ha sido considerada en distintas investigaciones para caracterizar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos como, por ejemplo, el de derivada (Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktac, 2010) o límite (Valls, Pons y Llinares, 2011). En dichas investigaciones, un esquema se desarrolla pasando por tres niveles (tríada): intra-inter-trans, en un orden fijo. En el esquema de sucesión como lista numérica, estos tres niveles se caracterizan de la siguiente forma:

Nivel intra

Está caracterizado por el uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún modo de representación, sin establecer relaciones. Es decir, los modos de representación son considerados por el estudiante como distintos y no los relaciona cognitivamente. Es decir, los estudiantes, en este nivel, no son capaces de entender que un elemento matemático puede estar representado en diferentes modos de representación. Un individuo, en este nivel de desarrollo de un esquema, se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos con otros.

Nivel inter

Está caracterizado por el uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y se establecen relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Este nivel está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

Nivel trans

En este nivel aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. Se produce la *síntesis* de los modos de representación. Es decir, los estudiantes, en este nivel, son capaces de entender que un elemento matemático puede estar representado en diferentes modos de representación y tratarse de un mismo objeto. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática. En este nivel es cuando el estudiante reflexiona sobre las conexiones y las relaciones desarrolladas en el nivel anterior y aparecen nuevas estructuras. A través de las síntesis de estas relaciones, el estudiante es consciente de las transformaciones que se desarrollan en el esquema y construye una estructura nueva. En este nivel aparece el desarrollo de la coherencia del esquema, que se demuestra por la capacidad de un individuo para reconocer las relaciones que se incluyen en el esquema, reflexionar sobre la estructura explícita del esquema y considerar el contenido del esquema adecuado a la resolución de un problema.

En los niveles inter y trans de la tríada, el estudiante reorganiza conocimientos adquiridos en el nivel anterior. El paso de un nivel al siguiente por parte del estudiante incluye un aumento en el repertorio de los elementos matemáticos, así como la construcción de nuevas formas de relaciones o transformaciones entre los elementos matemáticos usados por el estudiante en la resolución de un problema.

A partir de las ideas planteadas en este marco teórico, la pregunta que abordamos en este trabajo es la siguiente: ¿Podemos caracterizar los niveles de comprensión del esquema de sucesión numérica en estudiantes de segundo ciclo de Educación Secundaria?

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes en esta investigación son 105 estudiantes de segundo ciclo de la ESO (14-16 años) de un centro de la Comunidad Autónoma de Andalucía. A dichos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica según el currículo oficial (BOE, n.º 5, 5/01/2007, p. 756; BOJA, n.º 171, 10/08/2007, p. 54). Es en este ciclo de ESO donde aparece por primera vez este concepto en el currículo.

Instrumentos de recogida de datos

Como instrumentos de recogida de datos, usamos dos cuestionarios. Un primer cuestionario con cuatro tareas y un segundo cuestionario diseñado para cada estudiante a partir de las respuestas dadas en el primer cuestionario (entrevista semiestructurada escrita), y profundizar así en aquellas respuestas que no habían sido explicadas.

El primer cuestionario se diseñó a partir de una descomposición genética del concepto de sucesión como lista numérica, construida a partir de la experiencia de los investigadores sobre la enseñanza-aprendizaje de dicho concepto, su conocimiento del modelo APOS, su conocimiento matemático, el desarrollo histórico de dicho concepto y la revisión de investigaciones sobre este (Arnon et al., 2014). Dicha descomposición genética es la siguiente:

0. Prerrequisitos
   Los conceptos previos para la construcción del esquema de sucesión numérica son expresión algebraica y valor numérico de expresión algebraica como objetos y representaciones gráficas de puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano como proceso.
1. Acción de calcular términos de una sucesión a partir de la posición que ocupa.
2. Interiorización de la acción de calcular términos de la sucesión a partir de la posición que ocupa como proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de calcular diferentes términos de la sucesión sustituyendo en el término general.
3. Inversión del proceso construido en el punto 2 para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica.
4. Coordinación del proceso construido en el punto 2 en los diferentes modos de representación.
5. Encapsulación del proceso 4 como un objeto sobre el que realizar acciones o procesos para el estudio de propiedades globales donde están implicados todos los términos de la sucesión ($a_n = [a_1, a_2, \ldots]$).
6. Desencapsulación del objeto 5 como proceso, donde puede considerarse la sucesión completa y algunos de sus términos concretos, por ejemplo en situaciones de comparación de sucesiones, tendencia, etc.

En relación con los modos de representación del concepto de sucesión numérica, teniendo en cuenta la revisión de la literatura, consideramos los siguientes: modo de representación numérico, modo de representación algebraico, modo de representación gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y modo de representación gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

Las tareas fueron diseñadas teniendo en cuenta la descomposición genética de sucesión numérica, la revisión de la literatura, los elementos matemáticos que constituyen el concepto de sucesión numérica (enumerados en la introducción) y las relaciones que se podían establecer entre ellos en los diferentes modos de representación.

Tarea 1

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

a) $a_n = \frac{1}{5 - n}$ b) $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ c) $a_n = \sqrt{1-n}$

d) $a_n = 3n - 2$ *e)* $a_1 = 1, a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ f) 16, 8, 4, 2, 1,...

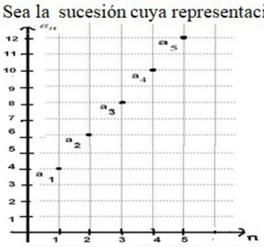
Tarea 2

Sea $a_n = (3n+2)/n$ una sucesión de números reales con n perteneciente a los naturales.

a) Halla los 3 primeros términos
b) ¿Hay algún término que valga 5? ¿y 10? en tales casos indica las posiciones que ocupan
c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.
d) Si n aumenta indefinidamente su valor ¿qué pasa con a_n?

Tarea 3

Sea la sucesión cuya representación gráfica sobre los ejes cartesianos es la siguiente:



a) ¿Cuál es el término segundo, es decir, a_2? , ¿Y el cuarto a_4? ¿Y el sexto a_6?
b) ¿Hay algún término que valga 16? ¿Y 13? Razona las respuestas.
c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.
d) ¿Qué pasa con a_n cuando n se hace cada vez mayor?

Tarea 4

Dadas las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{3n-1}{2}$ *b)* $a_n = \frac{8}{n+1}$ *c)* $a_n = (-1)^n$ *d)* $a_n = 2n$

Relaciónalas con sus correspondientes representaciones gráficas justificando cada relación.

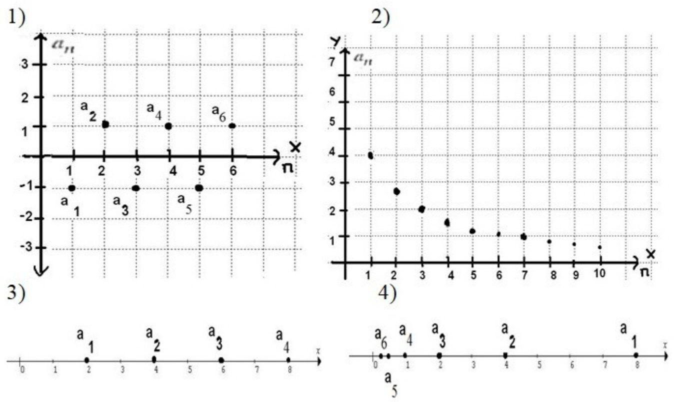


Fig. 1. Tareas del cuestionario 1

El primer cuestionario se respondió en una hora de clase y el segundo fue respondido un par de semanas después. A continuación, describimos las cuatro tareas del cuestionario primero (figura 1).

En la tarea 1, a partir de expresiones analíticas (numéricas y algebraicas), se pide a los estudiantes que determinen cuáles de ellas son sucesiones numéricas. Ello requiere del estudiante, en los apartados b y d, una *forma de conocer acción* del concepto de sucesión numérica, a través del uso conjunto (relación «Y lógica») de los elementos matemáticos, término (E2), sucesión como lista (E1) y término general (E3). Y para considerar que dicha expresión algebraica es una sucesión, requiere de los estudiantes una *forma de conocer proceso* del concepto de sucesión numérica, ya que debe considerar que es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión.

En los apartados a y c, requiere del estudiante una *coordinación de procesos* en el concepto de sucesión numérica a través del uso de la relación lógica de contrarrecíproco de los elementos sucesión como lista (E1) y términos de una sucesión (E2) (no E2 → no E1); de esta manera el estudiante indicará que no son sucesiones numéricas, en el apartado a), por no existir el término correspondiente a n = 5, y en el apartado c) por solo existir el término correspondiente a n = 1.

El apartado e) requiere del estudiante una forma de conocer acción para calcular los términos desde el primero (ley de recurrencia [E8]), y en el apartado f) requiere del estudiante una forma de conocer acción para identificar los términos de la progresión geométrica de razón ½ (E6). Y manifiesta una forma de conocer proceso al considerar los infinitos valores a través de su término general (E7).

En la tarea 2, a partir de una sucesión numérica expresada en forma algebraica, se requiere del estudiante, por un lado, una *forma de conocer acción* del concepto de sucesión numérica para el apartado a), ya que para ello el estudiante debe hacer uso de los elementos término (E2) y término general (E3) mediante la relación «y lógica». Por otro lado, se requiere de los estudiantes una *forma de conocer proceso* para el apartado b) como proceso inverso del descrito anteriormente en la tarea 1 (apartados b, d, e y f); para este apartado b) se necesita la relación recíproca del elemento término general (E3), donde a cada valor se le asigna su posición. En el apartado c) se requiere del estudiante una *forma de conocer objeto*, ya que debe considerar la sucesión completa y por lo tanto tenerla encapsulada, pues debe decidir si la sucesión es creciente (E10) o decreciente (E11). Al tratarse de una propiedad global, afecta o están implicados todos los términos de la sucesión. El apartado d) requiere del estudiante desencapsular el objeto de sucesión numérica creciente (E10) o decreciente (E11) utilizado en el apartado anterior para decidir qué ocurre con la sucesión cuando n aumenta indefinidamente.

En la tarea 3, a partir de una sucesión numérica expresada en forma gráfica-cartesiana, en el apartado a) se requiere del estudiante una *forma de conocer acción* del concepto de sucesión numérica (E1) en modo gráfico-cartesiano, para poder hallar los términos segundo y cuarto (E2); por otro lado, para hallar el término sexto se requiere del estudiante una *forma de conocer proceso*, con el fin de considerar la sucesión como una progresión aritmética (E4) y, a partir del quinto término representado en la gráfica, calcular el siguiente. Y en el apartado b), el proceso inverso del término general de una progresión aritmética (E5), donde a partir del valor (eje Y) obtener la posición mediante la coordinación entre ambos ejes (E2). En el apartado c), igual que en la tarea anterior, se requiere del estudiante una *forma de conocer objeto*, para decidir si la sucesión es creciente (E10) o decreciente (E11). Y, por último, en el apartado d) se requiere del estudiante desencapsular el objeto de sucesión numérica al igual que en la tarea anterior.

La consideración conjunta de las tareas 2 y 3 permite apreciar las distintas formas de conocer el concepto de sucesión numérica en diferentes modos de representación, pudiéndose poner de manifiesto la síntesis entre ellos.

En la tarea 4, a partir de 4 sucesiones numéricas expresadas en modo algebraico y 4 sucesiones numéricas expresadas en modo gráfico (2 en forma gráfico-lineal y 2 en forma gráfico-cartesiana), se le pide al estudiante que relacione cada expresión algebraica con su correspondiente representación gráfica. Esta tarea requiere del estudiante una *forma de conocer objeto* del concepto de sucesión numérica, en los modos de representación algebraico, gráfico-lineal y gráfico-cartesiano. Por un lado, a través de la coordinación (mediante una relación de conjunción lógica) como objetos de los elementos matemáticos, términos (E2), sucesión como lista numérica (E1) y término general (E3), el estudiante debe ser capaz de desencapsular el elemento término general (E3), en la expresión algebraica (apartados a, b, c y d), a un proceso para obtener los términos (E2) y para considerar que es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión numérica (E1). Por otro lado, en el modo de representación gráfico-lineal (apartados 3 y 4) y gráfico-cartesiano (apartados 1 y 2) debe ser capaz de desencapsular el elemento matemático términos (E2) a un proceso para obtener la sucesión como lista numérica (E1) mediante la relación «implicación lógica» E2 $\rightarrow$ E1.

Finalmente, el estudiante debe establecer una relación de equivalencia lógica entre los elementos matemáticos, sucesión como lista numérica (E1), términos (E2) y término general (E3), en diferentes modos de representación donde a cada término de la expresión en modo algebraico le corresponda su equivalente en modo gráfico-lineal o gráfico-cartesiano, y viceversa, poniéndose de manifiesto la síntesis entre los modos de representación, lo que le lleva a emparejar el apartado b) con el apartado 2), el c) con el 1) y el d) con el 3), y a no poder establecer la relación de equivalencia del apartado a), puesto que el primer término del apartado a) ($a_1 = 1$) no se corresponde con el primer término de ninguna gráfica, y el primer término de la gráfica 4) $a_1 = 8$ no se corresponde con el primer término de ninguna expresión algebraica.

Procedimiento de análisis

El análisis se centró en identificar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, los modos de representación, las traslaciones entre ellos y las formas de conocer el concepto de sucesión numérica que se ponían de manifiesto en las repuestas de los estudiantes en la resolución de las tareas.

El análisis se realizó considerando conjuntamente los datos procedentes de los dos cuestionarios. Una característica del proceso de análisis seguido es que el segundo cuestionario se respondió en días posteriores a la realización del primer cuestionario, con el objetivo de aclarar el proceso de resolución llevado a cabo por el estudiante en el primer cuestionario. Para ello, previamente a la realización del segundo cuestionario, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes en el primer cuestionario, a fin de adecuar el segundo cuestionario a las respuestas dadas por los estudiantes en el primero. De esta manera, el segundo cuestionario era personalizado para cada estudiante y permitió ampliar la información.

El procedimiento de análisis se ha realizado en dos fases. En la primera fase, se analizó cada una de las tareas, considerando conjuntamente las respuestas dadas a la tarea en los dos cuestionarios; con ello obtuvimos una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión para cada una de las tareas.

En la segunda fase del análisis, a partir de los resultados obtenidos en la primera fase, se analizó la resolución de todas las tareas para cada uno de los estudiantes. De esta manera se obtuvo una caracterización del nivel comprensión del concepto de sucesión numérica que ha alcanzado el estudiante.

RESULTADOS

En esta sección de resultados mostramos la caracterización de los diferentes niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica puestos de manifiesto por los estudiantes. Esta sección está organizada presentando las características de los diferentes niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica, a través de una selección de respuestas de estudiantes que describen comportamientos prototípicos de estos en los diferentes niveles de compresión del concepto de sucesión numérica (intra, inter y trans).

Nivel intra del desarrollo del esquema de sucesión numérica

Un individuo, en este nivel de desarrollo del esquema, se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos con otros. Este nivel se caracteriza por el uso que hace el estudiante de (pocos) elementos matemáticos de forma aislada (a veces de forma correcta) en algún modo de representación, sin establecer relaciones, es decir, no los relaciona cognitivamente.

Un ejemplo de este nivel lo muestra la estudiante e29. Esta estudiante, en el apartado a) de la tarea 1 del primer cuestionario (figura 1), hace uso correcto del elemento matemático término general de una sucesión (E3) para calcular algunos términos concretos, a_1 y a_2, a partir de la expresión algebraica, lo que pone de manifiesto que e29 conoce como acción el concepto de sucesión numérica. Por otra parte, esta estudiante hace un uso incorrecto de la relación lógica entre sucesión numérica (E1) y progresión (E4) (figura 2) al considerar una relación de equivalencia lógica entre ambos elementos en lugar de la relación de implicación (E4 → E1).

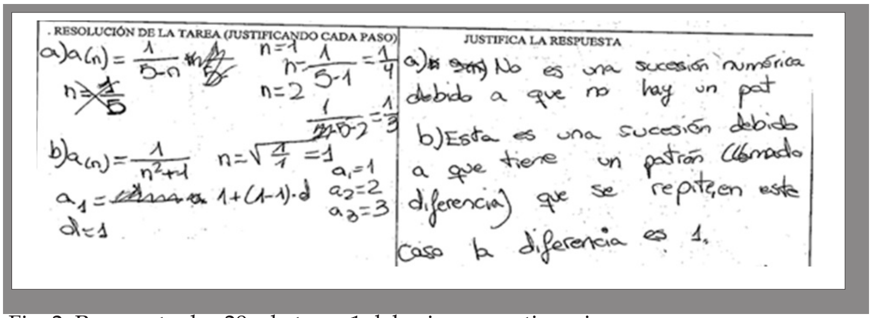


Fig. 2. Respuesta de e29 a la tarea 1 del primer cuestionario

Para indagar sobre esta respuesta nos apoyamos en el segundo cuestionario, donde le pedimos que nos aclare dicha respuesta: «Pregunta: Para el apartado a), ¿por qué no es una sucesión?». «e29: Porque no había nada que se repita».

En el apartado b) de la tarea 1, hace un uso incorrecto del elemento matemático término general (E3), que había usado anteriormente de forma correcta, es decir, no obtiene los términos de la sucesión numérica a partir de la expresión algebraica dada por el término general (figura 2). Esto la ha llevado a considerar que la expresión es una sucesión al identificarla como una progresión aritmética de diferencia 1. Considerando conjuntamente este apartado con el anterior, se vuelve a evidenciar la relación de equivalencia que esta estudiante establece incorrectamente entre sucesión y progresión.

A partir de estas respuestas podemos inferir que e29 se encuentra en el nivel intra, pues usa un mismo elemento de forma correcta e incorrecta (término general E3). Y usa las relaciones de equivalencia lógica e implicación lógica con errores, al establecer relaciones entre sucesión y progresión. Lo mismo sucede en los restantes apartados de esta tarea 1 y en las tareas 2 y 3.

En la tarea 4, donde e29 tiene que relacionar cada expresión algebraica con su correspondiente representación gráfica, justificando la respuesta (figura 1), no coordina los elementos matemáticos necesarios para resolver la tarea (términos (E2), sucesión como lista numérica (E1) y término general (E3)), al no tenerlos como objeto. Tan solo es capaz de emparejar de forma correcta la expresión algebraica del apartado d ($a_n = 2n$) con la gráfica-lineal 3. Esto puede deberse a que se trata de la sucesión correspondiente a los pares, que e29 puede conocer como acción, puesto que no se evidencia que pueda conocerla como objeto que desencapsula. De ser así podría haberla considerado como progresión aritmética de diferencia 2 en lugar de hablar de la construcción de los números pares («se va multiplicando por 2 el término n») (figura 3).

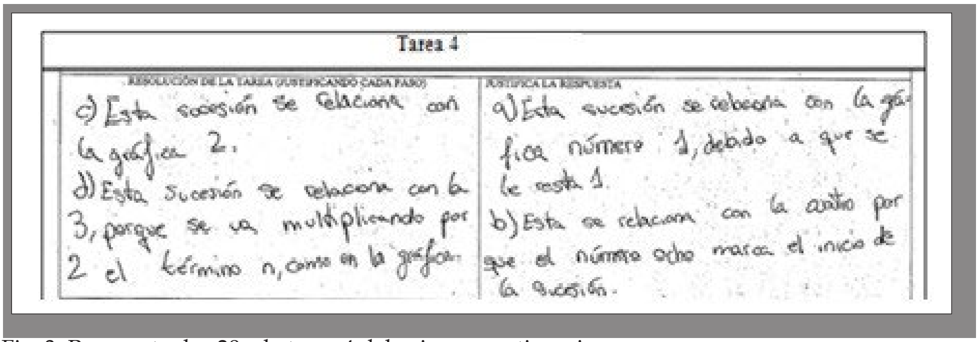


Fig. 3. Respuesta de e29 a la tarea 4 del primer cuestionario

Estos hechos nos llevan a considerar que este comportamiento es característico de los estudiantes que se encuentran en el nivel intra de desarrollo del esquema de sucesión como lista numérica. Es decir, se pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica, lo que conlleva que a veces un mismo elemento pueda ser usado de forma correcta en determinadas tareas e incorrecta en otras. Los elementos matemáticos se usan vinculados a un modo de representación, y no se realizan traslaciones entre modos de representación. Además, en este nivel las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores.

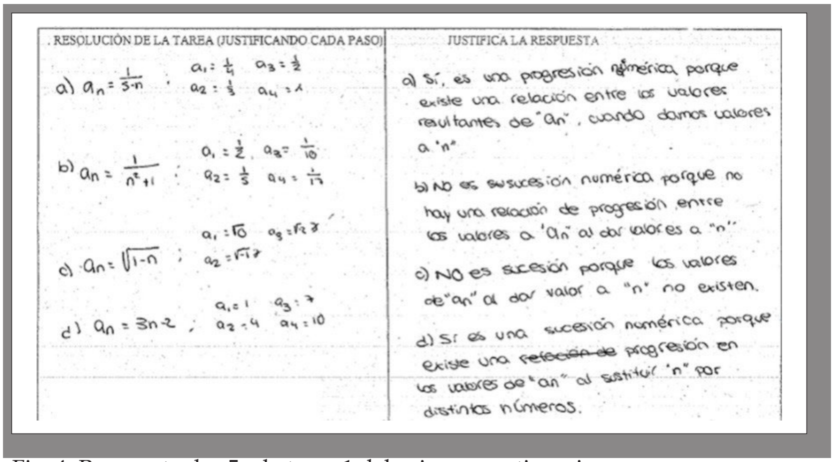
Nivel inter del desarrollo del esquema de sucesión numérica

En este nivel de desarrollo, los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma correcta y establecen relaciones entre ellos cuando se encuentran en un mismo modo de representación, a veces de forma incorrecta. También en este nivel se ponen de manifiesto las traslaciones de un modo de representación a otro y diferentes formas de conocer el concepto.

Un ejemplo de este nivel es e5, estudiante que en la respuesta a la tarea 1 pone de manifiesto el uso correcto de la relación de conjunción lógica a través del uso conjunto de los elementos matemáticos, términos de una sucesión (E2), sucesión como lista (E1) y término general de una sucesión (E3), para obtener términos concretos a partir de una expresión algebraica o numérica en el apartado a). Y el uso incorrecto de la relación de equivalencia lógica en el apartado b), en el que justifica la respuesta dada de la siguiente manera: «No es sucesión numérica porque no hay una relación de progresión entre los valores a_n al dar valores a n» (figura 4), afirmación que pone de manifiesto que la relación no progresión (E4-E6) implica no sucesión (E1), lo que muestra un uso incorrecto de la relación lógica de contrarrecíproco. Sin embargo, sí hace uso correcto de la implicación lógica E4 $\rightarrow$ E1 (apartado d) y E6 $\rightarrow$ E1 (apartado f).

En el segundo cuestionario le preguntamos sobre este hecho y e5 responde: «Una progresión es un tipo concreto de sucesión en la cual entre los términos que la forman hay una diferencia/razón (aritmética o geométrica) común». Esta respuesta muestra que, aunque e5 conoce la relación que existe entre sucesiones o progresiones (progresión como tipo de sucesión), cuando debe hacer uso de ello en la resolución de una tarea no es capaz de hacerlo de forma correcta. Este hecho pone de manifiesto que una característica del nivel inter es el uso incorrecto de algunas relaciones lógicas.

Además, también se pone de manifiesto en e5 una forma de conocer proceso del concepto de sucesión numérica, al considerar que no es sucesión porque no existe un término a_5 (tarea 1 apartado a). Para contestar de esta manera, el estudiante coordina dos procesos a través del uso de la relación lógica de contrarrecíproco de los elementos sucesión como lista (E1) y términos de una sucesión (E2) (no E2 $\rightarrow$ no E1).

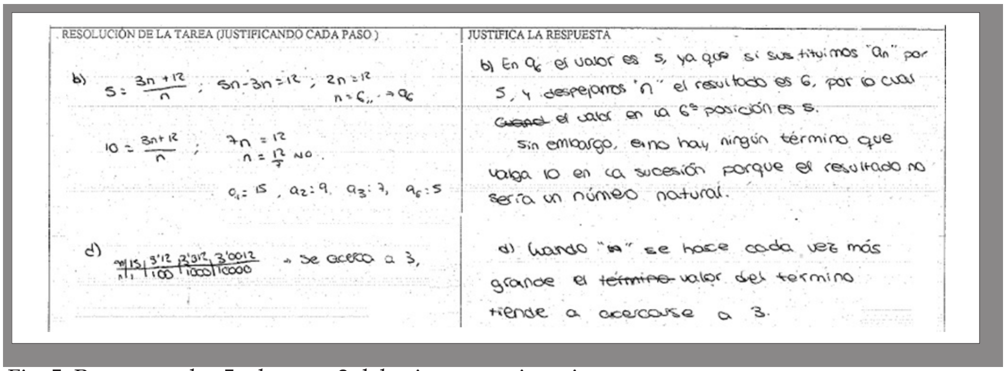


RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)	JUSTIFICA LA RESPUESTA
a) $a_n = \frac{1}{5-n}$; $a_1: \frac{1}{4}$ $a_3 = \frac{1}{2}$ $a_2: \frac{1}{3}$ $a_4 = 1$	a) Sí, es una progresión numérica porque existe una relación entre los valores resultantes de "a_n", cuando damos valores a "n"
b) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$; $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{10}$ $a_2 = \frac{1}{5}$ $a_4 = \frac{1}{17}$	b) NO es sucesión numérica porque no hay una relación de progresión entre los valores a "a_n" al dar valores a "n"
c) $a_n = \sqrt{1-n}$; $a_1 = \sqrt{0}$ $a_3 = \sqrt{-2}$ $a_2 = \sqrt{-1}$	c) NO es sucesión porque los valores de "a_n" al dar valor a "n" no existen.
d) $a_n = 3n-2$; $a_1 = 1$ $a_3 = 7$ $a_2 = 4$ $a_4 = 10$	d) Sí es una sucesión numérica porque existe una ~~relación de~~ progresión en los valores de "a_n" al sustituir "n" por distintos números.

Fig. 4. Respuesta de e5 a la tarea 1 del primer cuestionario

En la tarea 2, e5 pone de manifiesto una forma de conocer proceso el concepto de sucesión numérica, a través de la traslación del modo de representación algebraico al modo numérico, construyendo una tabla de valores (figura 5), y responde que «se acerca a 3» (figura 5).

En el apartado b) se manifiesta una forma de conocer proceso a través de la relación de recíproco del elemento término general (E3), ya que a partir del valor dado (5) debe decidir si pertenecen o no a la sucesión, lo que le lleva a demostrar que el valor (5) se alcanza en el sexto término ($a_6 = 5$) y que 10 no es un término de la sucesión (figura 5).



RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)	JUSTIFICA LA RESPUESTA
b) $5 = \frac{3n+12}{n}$; $5n-3n=12$; $2n=12$ $n=6 \to a_6$ $10 = \frac{3n+12}{n}$; $7n = 12$ $n = \frac{12}{7}$ NO. $a_1: 15$, $a_2: 9$, $a_3: 7$, $a_6: 5$	b) En a_6 el valor es 5, ya que si sustituimos "a_n" por 5, y despejamos "n" el resultado es 6, por lo cual ~~cuando~~ el valor en la 6ª posición es 5. Sin embargo, eno hay ningún término que valga 10 en la sucesión porque el resultado no sería un número natural.
d) $\frac{n}{a_n} \left\| \frac{1}{15} \right\| \frac{100}{3'12} \left\| \frac{1000}{3'012} \right\| \frac{10000}{3'0012}$ → se acerca a 3,	d) Cuando "n" se hace cada vez más grande el ~~término~~ valor del término tiende a acercarse a 3.

Fig. 5. Respuesta de e5 a la tarea 2 del primer cuestionario

En la tarea 3 se pone de manifiesto la traslación del modo de representación gráfico-cartesiano a los modos algebraico (término general de una progresión aritmética, apartado b) y numérico (tabla de valores, apartado d) (figura 6), así como una forma de conocer objeto del concepto de sucesión numérica, ya que debe considerar la sucesión completa para justificar la monotonía de la sucesión numérica a través de la coordinación de los elementos término general de la progresión aritmética (E5) y sucesión creciente (E11) (apartado c) (figura 6): «Es creciente porque mientras más grande sea el valor de n, al colocarlo en la fórmula de término general el valor de a_n es siempre mayor».

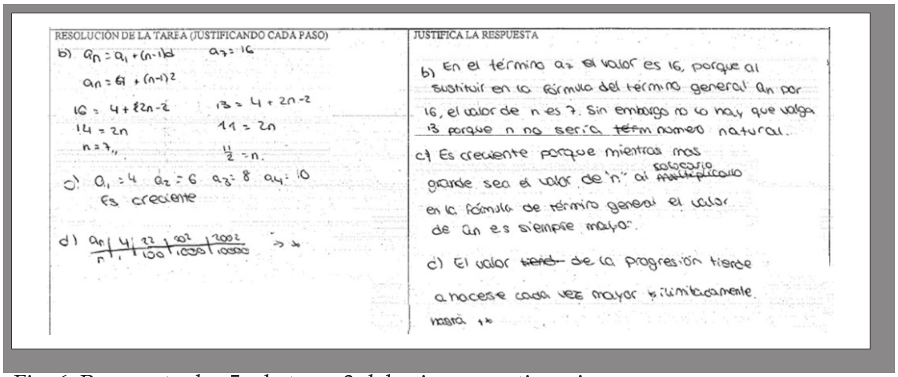


Fig. 6. Respuesta de e5 a la tarea 3 del primer cuestionario

El estudiante e5, en la tarea 4, pone de manifiesto el uso correcto de diferentes elementos y traslaciones entre los distintos modos de representación; esto le lleva a emparejar las distintas sucesiones y responder que el apartado a) no se corresponde con ninguna gráfica (figura 7).

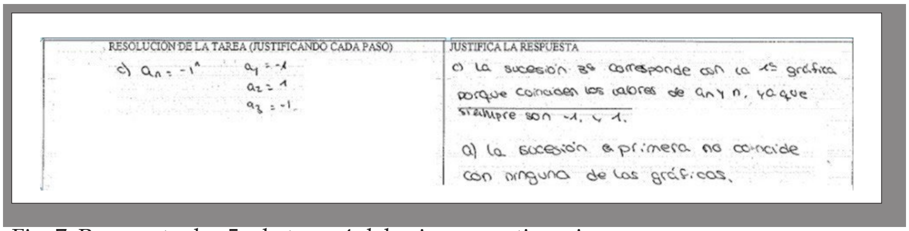


Fig. 7. Respuesta de e5 a la tarea 4 del primer cuestionario

Este comportamiento es característico de los estudiantes que se encuentran en el nivel inter de desarrollo del esquema de sucesión como lista numérica. Es decir, se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer el concepto de sucesión numérica y los elementos matemáticos se usan de forma correcta, pero vinculados a determinadas tareas o modos de representación. Además, se empieza a poner de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre elementos de forma correcta, pero en algunos casos estas se establecen con errores (equivalencia lógica).

Nivel trans del desarrollo del esquema de sucesión numérica

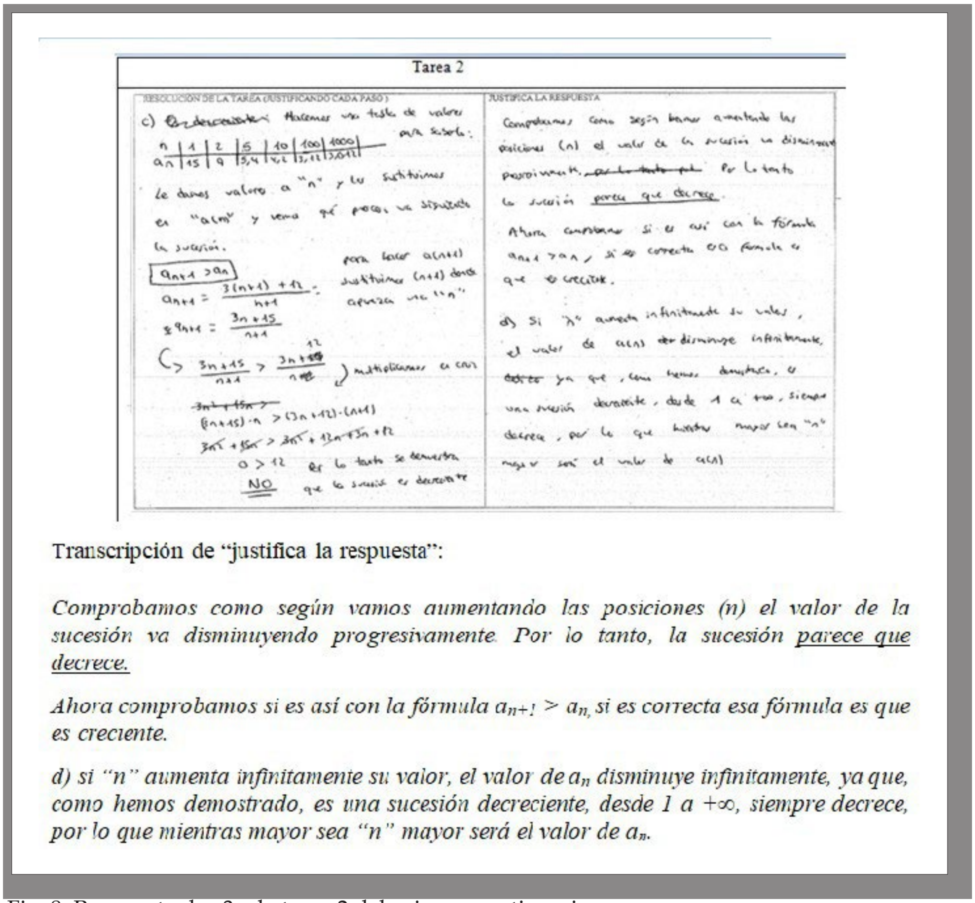
Este nivel se caracteriza por que los estudiantes no tienen restricciones a la hora de establecer relaciones entre los elementos del esquema, se producen coordinaciones entre los distintos modos de representación de forma fluida (síntesis de los modos de representación) y se manifiestan diferentes formas de conocer el concepto.

Un ejemplo de este nivel es el estudiante e3, que en la tarea 1 pone de manifiesto, además del uso correcto de diferentes elementos matemáticos y las relaciones lógicas entre ellos, una forma de conocer proceso del concepto de sucesión numérica cuando considera que para que exista una sucesión es necesario que existan todos sus términos, a través de la relación lógica de contrarrecíproco no E2 (términos de una sucesión) $\rightarrow$ no E1 (sucesión como lista). De esta manera, e3 señala en el apartado a) que no es sucesión numérica, ya que no existe a_5, pues obtiene como valor $1/0$. En el segundo cuestionario le preguntamos expresamente por esa respuesta: «Pregunta: ¿Si no puedes encontrar el valor entonces es sucesión?». «e3: No, porque le falta un término».

Y en los apartados b) y d), para afirmar que sí son sucesiones, el estudiante e3 escribe como justificación de estos apartados: «es sucesión numérica porque nos da un valor para a_n según el valor que le demos a "n"».

En el apartado f) hace uso de la relación de implicación lógica que se da entre estos elementos E6 (progresión geométrica) y E7 (término general progresión geométrica (E6 → E7); y de la relación que se establece entre progresiones geométricas y sucesiones numéricas (E1), (E6 → E1) cuando escribe: «es una sucesión porque a partir de este término general que hemos hallado con la fórmula $a_n = a_1 r^{(n-1)}$ para cada valor de n obtenemos a_n». Y, además, se pone de manifiesto, de nuevo, una forma de *conocer proceso* cuando responde: «para cada valor de n obtenemos a_n», es decir, considera este estudiante que, al ser progresión geométrica, es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión.

Además, en la tarea 2, en el apartado c) se evidencia una *forma de conocer objeto el concepto de sucesión numérica* por parte de e3, ya que debe considerar la sucesión completa para desencapsularla en un proceso y así construir la tabla de valores (figura 8). Este hecho se confirma en el apartado d), cuando a partir del término general desencapsula para obtener un proceso con infinitos términos y responde que: «según va aumentando la posición, el valor de la sucesión disminuye» (elemento sucesión decreciente E11).


Tarea 2

RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO) | JUSTIFICA LA RESPUESTA

Transcripción de "justifica la respuesta":

Comprobamos como según vamos aumentando las posiciones (n) el valor de la sucesión va disminuyendo progresivamente. Por lo tanto, la sucesión parece que decrece.

Ahora comprobamos si es así con la fórmula $a_{n+1} > a_n$, si es correcta esa fórmula es que es creciente.

d) si "n" aumenta infinitamente su valor, el valor de a_n disminuye infinitamente, ya que, como hemos demostrado, es una sucesión decreciente, desde 1 a +∞, siempre decrece, por lo que mientras mayor sea "n" mayor será el valor de a_n.

Fig. 8. Respuesta de e3 a la tarea 2 del primer cuestionario

El estudiante e3, en las tareas 3 y 4, pone de manifiesto la síntesis de los modos de representación. Por ejemplo, en el apartado c) de la tarea 3 se manifiesta dicha síntesis entre los modos algebraico y gráfico-cartesiano cuando responde que

> es creciente porque como podemos ver la gráfica [refiriéndose al modo de representación gráfico-cartesiano del enunciado], y según el término general [refiriéndose al modo de representación algebraico especificado por e3 en el apartado a de esta tarea] mientras mayor sea n mayor será a_n, ya que cada término es dos cifras mayor que el anterior [refiriéndose a la diferencia de la progresión aritmética].

Estos hechos son característicos de los estudiantes que se encuentran en el nivel trans de desarrollo del esquema de sucesión como lista numérica. Es decir, hacen siempre uso correcto de los elementos matemáticos necesarios en la resolución de las diferentes tareas vinculadas a los distintos modos de representación, lo que evidencia la síntesis entre ellos. Además, establece diferentes tipos de relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica, contrarrecíproco, equivalencia lógica) cuando son necesarias en la resolución de la tarea, y se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer del concepto de sucesión numérica.

Para finalizar, en cada una de las secciones hemos descrito un nivel de compresión del concepto de sucesión numérica a través de una selección de casos representativos. La siguiente figura muestra los resultados descritos en esta sección indicando el número de estudiantes en cada uno de los niveles (figura 9). Además, en la figura se recogen las características propias de cada nivel. Sin olvidar su carácter progresivo, es decir, los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, en el nivel trans son, además de las que figuran en dicho nivel, las que figuran en el nivel inter e intra. Y lo mismo sucede con los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que figuran en el nivel inter con los que figuran en el nivel intra.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	Nº Est.
INTRA	Un mismo elemento matemático puede ser usado de forma correcta en determinadas tareas e incorrectas en otras vinculados a un modo de representación. Las relaciones lógicas entre elementos matemáticos se producen siempre con errores. Se pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica.	Sucesión como lista(E1) Términos de la sucesión(E2) Término general (E3) Progresión Aritmética(E4) Progresión Geométrica(E6)	61
INTER	Los elementos matemáticos se usan de forma correcta en un mismo modo de representación. Los elementos matemáticos se usan de forma incorrecta cuando hacen traslaciones entre distintos modos de representación. Uso correcto de las relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) entre elementos matemáticos en un mismo modo de representación. Uso incorrecto de la relación lógica de equivalencia. Se pone de manifiesto la traslación entre modos de representación en algunas situaciones. Se pone de manifiesto una forma de conocer proceso del concepto de sucesión numérica. Se pone de manifiesto la coordinación procesos en algunas situaciones.	Sucesión Creciente(E10) Sucesión Decreciente(E11) Sucesiones recurrentes (E8) Sucesión por extensión(E9) Término general de una progresión aritmética (E5) Término general de una progresión geométrica (E7)	37
TRANS	Uso de todos los elementos matemáticos de forma correcta en el modo de representación necesario en cada tarea. Uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos de forma correcta. Se pone de manifiesto la síntesis entre los diferentes modos de representación a través de traslaciones entre los diferentes modos de representación. Se pone de manifiesto una forma de conocer objeto del concepto de sucesión numérica y desencapsulación de este en procesos.		7

Fig. 9. Caracterización de niveles del esquema de sucesión numérica

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos caracterizado los diferentes niveles de la comprensión del concepto de sucesión numérica (figura 9). Así, el nivel intra del esquema de sucesión numérica se caracteriza por que, en la resolución de las diferentes tareas del cuestionario por parte del estudiante, un mismo elemento es usado en algunas ocasiones de forma correcta y en otras de forma incorrecta, vinculando el uso de los elementos matemáticos a un modo de representación. Las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores, lo que pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica. En el nivel inter, el estudiante usa los elementos matemáticos de forma correcta, pero solo en algunos modos de representación. Se empieza a poner de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre elementos de forma correcta (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco), y en otros casos con errores (la equivalencia lógica que lleva al estudiante a identificar las progresiones con las sucesiones). Se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer el concepto de sucesión numérica (acción, proceso y coordinación de procesos). Por último, en el nivel trans, el estudiante usa siempre los elementos matemáticos necesarios en la resolución de las diferentes tareas y se evidencia la síntesis entre los modos de representación. Además, establece los diferentes tipos de relaciones lógicas necesarias en la resolución de la tarea. Y se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer del concepto de sucesión.

La investigación de McDonald et al. (2000) sobre el concepto de sucesión señaló que para la construcción de dicho concepto los estudiantes construyen dos objetos cognitivos diferentes, la sucesión como listado de números (seqlist) y la sucesión como función de dominio de los números naturales (seqfun), centrándose estos investigadores en el segundo de ellos. En nuestro trabajo complementamos dicha investigación centrándonos en la construcción del primero de ellos, la construcción del objeto cognitivo de sucesión como listado de números (seqlist).

En la investigación de Przenioslo (2006) hubo estudiantes que consideraron que en una sucesión «la diferencia entre términos sucesivos es la misma». Para esta investigadora esto podría deberse a que se consideran las sucesiones como progresiones aritméticas. Este resultado está en relación con los resultados obtenidos en nuestra investigación en la caracterización de los estudiantes situados en el nivel inter del esquema de sucesión numérica, en el sentido del establecimiento erróneo de la relación de equivalencia lógica entre sucesión numérica y progresión (Bajo, Sánchez-Matamoros y Gavilán-Izquierdo, 2015).

Diversas investigaciones (Cañadas, 2007; González et al., 2011; Przenioslo, 2006) señalan la importancia del uso de los diferentes modos de representación para el estudio del concepto de sucesión numérica, considerando los modos numérico, gráfico algebraico y sus variantes. Nuestros resultados corroboran dicha importancia e indican la dificultad en las traslaciones entre distintos modos de representación. Además, dentro del modo gráfico cabe señalar, a la vista de nuestros resultados, el diferente comportamiento de los estudiantes situados en el nivel inter en relación con los modos gráfico-lineal y gráfico cartesiano. Todos los estudiantes situados en el nivel inter muestran esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico lineal; sin embargo, solo 17 de los 37 estudiantes situados en dicho nivel hacen un uso correcto del modo gráfico-cartesiano (Bajo, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2016). Este hecho nos podría permitir abordar la identificación de diferentes subniveles de desarrollo del nivel inter.

Para futuras investigaciones a partir de la caracterización de los niveles intra, inter y trans para el concepto de sucesión numérica, podemos empezar a considerar la identificación de subniveles dentro de cada uno de los niveles considerados, ya que cada nivel implica a su vez algunos subniveles, siguiendo el mismo orden de progresión, así como la tematización del esquema (Piaget y García, 1983).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlín: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *6*, 1-32.

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [revista en línea]. University of Plymouth, Reino Unido. Obtenido el 30 de junio de 2005 de: http://cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Bajo, J. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Los modos de representación gráfico lineal y cartesiano en la comprensión del concepto de Sucesión Numérica en estudiantes de segundo ciclo Enseñanza Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157-166). Málaga: SEIEM.

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 143-151). Alicante: SEIEM.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.
https://doi.org/10.2307/749887

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 5, 677-773. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. BOJA, 171, 23-65. Sevilla: Consejería de Educación.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (tesis doctoral inédita). Granada.

Codes Valcarce, M. y González-Martín, A. S. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(1), 89-110.
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

González, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, *26*, 1-19.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 259-288.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, *8*, 77-102.

Mor Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. y Simpson, G. (2006). Designing To See And Share Structure In Number Sequences. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *13*(2), 65-78.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(7), 805-823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Roh, K. H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 217-233.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Stewart, J., Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al cálculo*. Buenos Aires: Thomson Learning.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5-31.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.637

Weigand, H-G. (2015). Discrete or continuous? –A model for a technology supported discrete approach to calculus. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2580-2586). Praga: ERME.

Characterization of the numeric sequence schema among Compulsory Secondary Education students

José Mariano Bajo Benito, José María Gavilán-Izquierdo, Gloria Sánchez-Matamoros García
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Sevilla (España)
jbajo@us.es, gavilan@us.es, gsanchezmatamoros@us.es

An understanding of the numeric sequence concept presents difficulties for Compulsory Secondary Education students (ESO in Spanish) (14-16 years). This, together with the fact that the concept is the basis of other mathematical concepts, such as limits, derivatives, integrals, and numeric series, justifies its relevance. The purpose of this research is to characterize the understanding of the concept of sequence as a numeric list in second cycle ESO students.

The instruments used for the collection of data consisted of two questionnaires, the former consisting of four tasks, the latter customized for each student. The students' responses were analyzed using the APOS theoretical framework, based on the contributions of Piaget and García with regards to the development of a schema through intra, inter, and trans levels.

The participants in the research were 105 ESO second course students, and a qualitative methodology was used throughout. For the analysis process of our study, the two questionnaires answered by each student were considered. This procedure provided two types of information. On the one hand, it enabled us to describe each student's understanding of the concept of sequence as a numeric list. On the other, it provided us with information regarding the way in which the understanding of the sequence schema seemed to be developed as a numeric list at three levels: intra, inter and trans.

The results allowed us to identify the characterization of the different levels involved in the mathematical elements used, their relationships, their representation modes, the translations among them, and the mental construction of the concept (action, process, and object).

The intra-level is characterized by the correct use of a single element in a representation mode, such use being incorrect in others. The logical relations between elements always occur with errors. This reveals an action conception. The inter-level is characterized by the correct use of mathematical elements in some representation modes. They start to show the establishment of correct logical relations between mathematical elements (logical conjunction, logical equivalence, and contrapositive), in other cases with errors (the logical equivalence that leads students to identify progressions with sequences). The different notions of action, process, and coordination of these processes are revealed. Finally, the trans-level is characterized by the use of the necessary mathematical elements for the resolution of different tasks, revealing the synthesis of the representation modes. Furthermore, the different types of logical relations necessary for task resolution are established. These reveal the different mental constructions with regards to the concept of sequence.

Our results corroborate the outcomes of diverse research works, indicating the importance of the use of the different representation modes (numeric, graphic, algebraic and corresponding variants) for the study of the concept of numeric sequence. Moreover, they indicate the difficulty in the translations of these. Thus, in view of our results, in the graphical mode, the different behaviors of students found at the inter-level, as related to lineal graph and cartesian graphic modes, should be noted. This could enable us to address the identification of different development sub-levels of the sequence schema as a numeric list for future research.

MODESTUM EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2021, 17(12),em2058
ISSN:1305-8223 (online)
OPEN ACCESS Research Paper https://doi.org/10.29333/ejmste/11429

The Use of Logical Implication as an Indicator of Understanding the Concept of Number Sequences

José Mariano Bajo-Benito [1*], Gloria Sánchez-Matamoros García [1], José María Gavilán-Izquierdo [1]

[1] Universidad de Sevilla, SPAIN

Received 20 April 2021 ▪ Accepted 27 October 2021

Abstract
This paper aims to characterise an indicator of the development of the number sequence scheme among students at the level of Compulsory Secondary Education (14-16 years old students). To do so, we use a scheme development proposed by the APOS theory to characterise students' use of relations between mathematical elements when solving a mathematical task. We use a qualitative methodology and the data collection instruments are a written questionnaire and a semi-structured interview. In this work we show the questionnaire task that provides analytical expressions and ask students to determine which of them numbers sequences are. We find that students' use of logical implication when solving tasks related to number sequences is an indicator of the development of the scheme. This indicator helps to locate the transition mechanisms between the levels of development of the number sequence scheme. Moreover, our research shows that arithmetic and geometric progressions play a key role as an indicator of the development of the number sequence scheme.

Keywords: number sequences, arithmetic and geometric progressions, APOS theory, scheme, compulsory secondary education

INTRODUCTION

Several studies have underlined the importance of research into the concept of number sequences due to its implications for understanding other concepts in mathematical analysis. In their research into the concept of limits, Mamona-Downs (2001) and Roh (2008) stressed that a good grasp of the concept of sequences is fundamental for understanding the concept of limits. In relation to understanding of the concept of number series, studies by Bagni (2005), Codes and González-Martín (2017), and Codes et al. (2013) noted the relevance of research into the concept of number sequences, given that a number series is formally a sequence of partial additions. Due to the growth in technology, Weigand (2015) has recently argued that more attention should be given to number sequences in terms of recurrence relations, as these are prototypical discrete objects in maths.

Various researchers have analysed understanding of the concept of sequences from a range of distinct theoretical perspectives. Cañadas (2007) carried out a study on the inductive reasoning used by secondary-school students when solving tasks related to linear and quadratic sequences, which noted the presence of different modes of analytical (numerical, algebraic) and graphical (number lines and Cartesian planes) representation. Cañadas (2007) concludes that using different modes of representation when solving tasks helps to understand the concept of number sequences.

Furthermore, regarding the mode of numerical representation, research conducted by Djasuli et al. (2017) with a secondary-school student, where he is given a task in which he must find the general term of a number sequence from the first terms, concludes that this type of task is fundamental for the formal construction of arithmetic and geometric progressions.

Additionally, McDonald et al. (2000) research with university students into the type of mental constructions used by students for understanding the aforementioned concept indicated that they construct two different cognitive objects: an object comprising a list of numbers (Seqlist), and an object comprising a function whose domain belongs to the set of natural numbers (Seqfun),

✉ jbajo@us.es **(*Correspondence)** ✉ gsanchezmatamoros@us.es ✉ gavilan@us.es

Contribution to the literature

- The understanding of the number sequence concept is important by its implications for understanding other concepts in mathematical analysis and there are few studies of it.
- The methodological design proposed in this research can be used as a model of data-collection instruments when it is not possible to do an oral interview. This is a written semi-structured interview designed for each student on the basis of the responses given in the written questionnaire.
- The results related to logical relationships as indicators of understanding of a concept confirm and extend conclusions obtained on the development of schema of other concepts.

their study focusing on the latter. In her research with secondary-school students (16-19 years old students), Przenioslo (2006) divided the students' conceptions into two groups. The first group perceived sequences as a function, and the second group saw a sequence as being associated with an ordered set of numbers, in which a relation between the terms or a certain regularity must be present.

In contrast, Mor et al. (2006) observed in another study of secondary-school students that number sequences are intuitively considered to be recursive by these students. In other words, they are seen more as a relation between successive values of a sequence than as a relation between the values and their respective positions. In the paper of González et al. (2011) with university students, the authors noted that the relation between graphic and algebraic interpretation presented difficulties in relation to the concept of sequences.

The study presented is part of a more extensive research project focused on characterising understanding of the concept of number sequences. Specifically, we outline the identification of indicators for levels of understanding of the number sequences concept.

Looking at the issue in terms of the curriculum, the concept of number sequences appears in the second stage (14-16 years old students) of Compulsory Secondary Education in Spain, as part of the algebra module, in the following terms: "Study and analysis of number sequences. Arithmetic and geometric progressions. Recurrent sequences. Curiosity and interest in investigating the regularities, relations and properties that appear in sets of numbers". (Boletín Oficial del Estado [BOE] 5 of 5 January 2007, p. 756).

THEORETICAL FRAMEWORK

This section has been partitioned into two subsections: one providing number sequences notions, and the other concerning APOS theory and its application to this work.

Number Sequences Notions

Our research considers the concept of number sequences, in line with the definition of Stewart et al. (2007), as follows: a sequence is an infinite set of written numbers in a specific order, a_1, a_2, a_3 ..., a_n ,..., in which every member of the set has been labelled with a natural-number subscript, a_1 being the first and an being the general nth term; we will designate the sequence $\{a_n\}$.

There are various ways of constructing the terms of a number sequence, of which we will take into account the following: (i)through some kind of rule or formula that defines the nth term (the general term); (ii) through a set of instructions that indicates how to obtain a term using the preceding ones (through recurrence); or (iii) by providing a series of ordered, consecutive terms, one after another, as an infinite list of numbers (through extension).

Similarly, an arithmetic progression is a sequence of the type a, a+d ..., a+nd … in which the number "a" is the first term and d≠0 is the common difference between two consecutive terms (Stewart et al., 2007, p. 181). Finally, a geometric progression is a sequence of the type a, ar ..., ar^n ... in which the number "a" is the first term and r≠1 is the ratio of the progression (Stewart et al., 2007).

The APOS Theory

In this subsection, we will describe the APOS theoretical framework (Arnon et al., 2014; Dubinsky, 1991) that we have used in this research. The APOS theory explores how understanding of mathematical concepts is developed in terms of the construction of schemas, through the mechanism of reflective abstraction (Piaget & García, 1983). Within this model, a schema is defined:

> A Schema is a coherent collection of structures (Actions, Processes, Objects, and other Schemas) and connections established among those structures. It can be transformed into a static structure (Object) and/or used as a dynamic structure that assimilates other related Objects or Schemas, (Arnond et al. 2014, p. 25).

This way of conceptualising the development of a schema has been referenced in a range of research aiming to characterise the understanding of various mathematical concepts, such as derivative (Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros, 2004), linear transformations (Roa-Fuentes & Oktac, 2010), and limit (Valls et al., 2011).

In these studies, a schema is developed by progressing through three stages in a fixed order, and these are identified in terms of: mental structures of the concept, modes of representation, mathematical elements and the logical relations among them.

There are several mental structures - actions, processes, objects and schemas - which are organised in the genetic decomposition of a concept. The genetic decomposition is understood as "a structured set of mental constructs, which can describe how the concept is developed in the mind of the individual" (Asiala et al., 1996). Genetic decomposition of a mathematical concept provides a potential progression in the student's learning towards formation of the concept.

According to Arnon et al. (2014), a concept is first conceived as an action: an external transformation that has to be explicitly performed upon an object or objects that were conceived beforehand (as recipe). As the actions are repeated and the individual reflects on them, then the individual progresses from depending on external signals to gaining internal control over them and begins to see the concept as a process.

- Interiorisation is the mechanism that allow the shift from action to process.
- Reversal of a process is the ability to think about it in reverse, in the sense of breaking down the steps of the interiorised process, giving rise to a new process.
- Coordination of processes is the cognitive act of taking two or more processes and using them to construct a new process. In general, coordination may transform processes into processes.
- Encapsulation occurs when an individual applies an action or a process to another process; in other words, the individual sees a dynamic structure (process) as a static structure (object) to which actions may be applied. Once a process has been encapsulated in an object, it may be de-encapsulated, when necessary, and returned to its underlying process.

In light of our literature review (Cañadas, 2007; Duval, 2006; González et al., 2011) on modes of representation, we have taken into account the following: numerical representation, algebraic representation, representation in a line graph (representing number sequences as points on a number line) and representation in a Cartesian graph (representing number sequences as points on a Cartesian plane).

In this study, we will consider the following mathematical elements (E) in relation to the concept of sequences as numerical lists:

(1) E1 Number sequence (as a list): a sequence of real numbers arranged in an order. In other words, for each natural number n, a real number exists.

(2) E2 Terms of a number sequence: are defined as the elements of a number sequence. The place that each occupies is determined by its position, denoted by a subscript which is a natural number.

(3) E3 General term of a number sequence: is defined as the term whose value is known on the basis of its position - its subscript - and which is denoted by "a_n" (n being a natural number).

(4) E4 Arithmetic progression: a number sequence in which each term is obtained from the preceding one by adding a fixed quantity to it, which we call the difference.

(5) E5 General term of an arithmetic progression: a_1 being the first term and d the difference between consecutive terms.

(6) E6 Geometric progression: a number sequence in which each term is obtained from the preceding one by multiplying it by a fixed quantity, which we call the ratio.

(7) E7 General term of a geometric progression: a_1 being the first term and r the ratio of the progression.

(8) E8 Recurrent number sequence: a number sequence is recurrent if it is defined by a law of recurrence - a relation between one term and those that precede it.

(9) E9 Number sequence by extension: a number sequence is defined by extension when a series of terms that follow on from it are given.

(10) E10 Increasing number sequence: a number sequence is described as increasing when each term is lower or equal to the following term.

(11) E11 Decreasing number sequence: a number sequence is described as decreasing when each term is greater or equal to the following term.

The logical relations considered in our research are:

- Logical conjunction: is the relation that is established between mathematical elements when they are used jointly to make inferences.

When, for example, terms of the number sequence are obtained by using an algebraic expression, and when any value may be obtained on the basis of that position, one can define it as a number sequence. In other words, the general term of a number sequence (E3) and the terms of a number sequence (E2) are used in conjunction to infer that the baseline algebraic expression is a number sequence.

- Logical implication: [A→B] Implication is a structure in which a mathematical element is a logical consequence of another or others. This means that if the mathematical element on the left is verified, the mathematical element on the right is also verified.

An example is the relation that exists between progressions and number sequences: arithmetic or geometric progression (E4 or E6) → number sequences (E1).

- Counter-reciprocal: is the relation that is established between a logical implication and its counter-reciprocal [(A→B) ↔ (not B→not A)].

For example, numerical sequence as a list (E1) and terminus of a sequence (E2) are related through logical implication (E1→E2) and by the ratio of their counter-reciprocal (not E2 → not E1), i.e. if there is no term then there is no sequence.

As mentioned earlier in the discussion of APOS theory, genetic decomposition of a mathematical concept provides a potential progression in a student's learning towards formation of a concept. In our work, with respect to the concept of number sequence, we have specifically explored the following genetic decomposition (Bajo-Benito et al., 2019):

Prerequisites to the Genetic Decomposition of number sequence

The concepts required for the construction of a number sequence schema are: algebraic expressions and the numerical value of algebraic expressions, as objects; and graphical representations of points on a number line and on a Cartesian plane, as a process.

Genetic decomposition of number sequence

(1) The action of calculating terms of a number sequence on the basis of the position they occupy.

(2) Interiorisation of the action of calculating terms of a number sequence on the basis of the position they occupy, as a process, reflecting on the results obtained through repetition of the action of calculating different terms of the number sequence, substituting them for the general term.

(3) Reversal of the process constructed in point 2, to obtain the position occupied by a specific term of the number sequence.

(4) Coordination of the process constructed in point 2 in the different modes of representation.

(5) Encapsulation of process 4 as an object, upon which to carry out actions or processes to study the overall properties involving all the terms of the sequence (a_n=[a_1, a_2,…]).

(6) De-encapsulation of object 5 as a process, whereby the complete sequence and some of its specific terms may be considered. For example, in situations of comparing number sequences, trends, etc.

In this study, the levels of development of the schema for number sequences as numerical lists are characterised as follows:

Intra level

Characterised by the use of mathematical elements in isolation, in a certain mode of representation, without establishing relations. An individual at this level of development of a schema focuses on individual actions, processes and objects without relating them to others.

Inter level

Characterised by the correct use of mathematical elements in certain modes of representation and establishing logical relations between mathematical elements that are in the same mode of representation. This level is characterised by the construction of relations and transformations between the processes and objects that make up the schema.

Trans level

At this level, there is an expansion in the repertoire of logical relations between the mathematical elements employed. "Synthesis" of the modes of representation occurs. This leads to construction of the mathematical structure. It is at this level that the student reflects on the connections and relations developed at the previous level, and that new structures appear. Through the synthesis of these relations, the student is made aware of the transformations that occur in the schema and constructs a new structure. The schema develops coherence at this level, demonstrated by an individual's ability to recognise the relations that are included in the schema, in order to reflect upon the explicit structure of the schema, and thereby think about what content in the schema is suitable for solving a problem.

At the inter and trans levels of the three stages, the student reorganises the knowledge acquired in the preceding level. A student's progression from one level to the next includes an expansion in their repertoire of mathematical elements, and the construction of new forms of relations or transformations between the mathematical elements used by the students to solve a problem (Table 1).

In this study, we address the following question:

Is the logical implication an indicator that can help characterise the transition between the different levels of understanding of the number sequences schema in students in the last two years of Compulsory Secondary Education (14-16 years old students)?

METHODOLOGY

Participants

The participants in this research are 105 students from the last two years of Compulsory Secondary Education (14-16 years old students) in Spain. These students have been coded with the first two codes representing the course and the following codes

Table 1. Characteristics of the levels of the numerical sequence scheme

Level	Characteristics
Intra	• The same element can be used correctly in certain tasks and incorrectly in others linked to a representation mode. • No logical relationships between elements are established. • They show a mental structure action of the numerical sequence concept.
Inter	• Use of the logical conjunction, logical implication and counter-reciprocal ratios but in some cases with errors. o Use, with errors, of the logical implication ratio in its negative form between sequences and progressions. o Use, with errors, of the reciprocal ratio of the general term element and sequence. • They show a mental structure process of the numerical sequence concept.
Trans	• Use of logical ratios: logical conjunction, logical implication, and counter-reciprocal correctly • They show a mental structure object of the numerical sequence concept. • They use all modes of representation (numerical, algebraic, graphical-linear and graphical-cartesian), and are able to move from one representation mode to another without difficulty.

Task

Given the following algebraic expressions, identify which of them are number sequences. Justify each answer.

a) $a_n = \dfrac{1}{5-n}$ b) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ c) $a_n = \sqrt{1-n}$

d) $a_n = 3n-2$ e) $a_1 = 1, a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ f) 16, 8, 4, 2, 1,...

Figure 1. Questionnaire task

representing the student within the course (3b1, 3b2, 3b22...).

These students had been introduced, for the first time, to the concept of number sequences, in accordance with the official state curriculum (BOE, 2015):

> Investigation of regularities, relations and properties that appear in sets of numbers. Expressions using algebraic language. Number sequences. Recurrent sequences. Arithmetic and geometric progressions. (BOE 3 of 3 January 2015, Section I, p. 392).

Data-Collection Instruments

The data-collection instruments used were a questionnaire with four tasks (Bajo-Benito et al., 2019) and a written, semi-structured interview designed for each student on the basis of the responses given in the questionnaire, so as to explore in greater depth those responses which had not been explained.

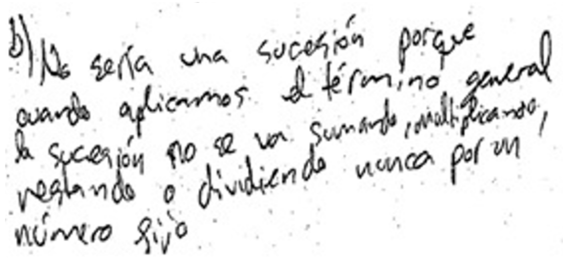
The design of the questionnaire tasks took into account the genetic decomposition of number sequences, literature review (for instance, González et al., 2011; Przenioslo, 2006; Stewart et al., 2007), mental structures, the mathematical elements that form part of the concept of number sequences (listed in the introduction), the relations that may be established between them and the various modes of representation.

In this study, we will focus on one questionnaire task (Figure 1).

Participants responded to the questionnaire in one hour of class, and the semi-structured interview was completed a couple of weeks later. We will now describe the task of the questionnaire (Figure 1).

Task provides analytical expressions (which are numerical and algebraic) and asks students to determine which of them numbers sequences are. This requires, in itemsb) and d), the student to have a mental structure action of the concept of number sequences, by using the following mathematical elements in conjunction (“logical conjunction” relation): term (E2), sequence as a list (E1) and general term (E3). This is because, in solving said sections, they should obtain specific terms of certain algebraic expressions (giving values to position “n”, n=1, n=2, etc.). Additionally, identifying that said algebraic expression is a number sequence requires students to have a mental structures process of the concept of number sequences, given that they should understand that it is possible to obtain the infinite values that make up the number sequence.

Items a) and c) require the student to engage in coordination of processes in the concept of number sequences by using the counter-reciprocal logical relation of number sequences as a list (E1) and terms of a sequence (E2) (not E2→ not E1). The student will thereby indicate that these are not number sequences: in item a) because there is no term corresponding to n=5



Transcription:
b) It is not a number sequence because when we apply the general term, the sequence is not progressively added to, multiplied, subtracted or divided by a fixed number.

Figure 2. Response of student 3b13 to item b of the questionnaire task

and in item c) because only the term corresponding to n=1 is present.

Item e), which is defined by recurrent relation, requires the student to have a mental structure action to calculate the terms on the basis of the first term (law of recurrence (E8)), and item f), as a geometric progression (E6 and E7) in numerical form by extension (E9), requires the student to have a mental structures action to identify the terms. Further, in order to identify that the expressions given in items e) and f) are number sequences, students are required to have amental structures process of the concept of number sequences, as they must understand that it is possible to obtain the infinite values that make up the sequence: in section e), through the law of recurrence, and in item f) they should identify that it is a geometric progression with a ½ ratio (E6) and determine the infinite values from the general term (E7).

Analysis Method

The analysis focused on identifying the mathematical elements, the logical relations established between them and the mental structures of the concept of number sequences that were exhibited in the responses of the students when solving the tasks.

The analysis was performed by considering the data from the questionnaire in conjunction with those from the written, semi-structured interview. A feature of the analysis method used is that the semi-structured interview was carried out in the days following the completion of the questionnaire, with the objective of clarifying the problem-solving process carried out by the student in the questionnaire. To this end, the questionnaire responses provided by the students were examined before carrying out the semi-structured interview, in order to adapt the semi-structured interview to the responses given by the students in the questionnaire. The semi-structured interview was thereby customised for each student, enabling us to expand the information gathered.

We will now illustrate how this analysis method was carried out, using one student as an example.

In student 3b13's solution to item b) of task of the questionnaire, the student considered a_n not to be a sequence, because the student established a relation of equivalence between number sequences and progression (E1, E4 and E5), as can be seen in Figure 2.

However, when we asked the student 3b13 about this in the written, semi-structured interview, the student thought about it and responded:

> Question: Could you explain the response given in item b: Why is it not a sequence?
>
> 3b13: It is a sequence because, although you do not multiply, add, subtract or divide by a fixed number, it follows a set pattern.

In the written, semi-structured interview, the student makes use of the general term (E3) provided in the text to respond correctly that, although it is not a progression (neither an arithmetic nor a geometric one: "you do not multiply, add, subtract or divide by a fixed number"), it is a number sequence because "it follows a set pattern" (referring to the general term of the sequence provided in the text).

The analytical procedure was performed by considering the responses given to the task in the questionnaire in conjunction with the written, semi-structured interview, for each of the students. We were thereby able to characterise understanding of the concept of sequences through the use students made of logical relation when solving the task.

Based on our joint analysis of the questionnaire and the written, semi-structured interview, we can therefore conclude that student 3b13 made correct use of the mathematical elements related to progressions and the general term of a sequence, and of the relations established between progressions and sequences.

RESULTS

The logical implication relation between mathematical elements, when students in Compulsory Secondary Education solve a task on number sequences, can be considered as an indicator of understanding the scheme of that concept. On the one hand, there are those students who make correct use of this relation, both to confirm and to deny—that is, if "A" is verified then "B" is verified (if $A \rightarrow B$, affirmative form), but "A" not being verified does not imply that "B" is not verified (no A ≠> no B, negative form), evidencing a flexible use of this relation. These students are at the trans level of development of the number sequence scheme. On the other hand, there are those students who, while making correct use of some relations (e.g. conjunction logic), still use the logical implication relation incorrectly when solving the task requires them to make use of that relation in its negative form. These students are at the inter level of development of the number sequence scheme. Therefore, the use of this indicator shows the transition between levels of understanding of the concept of number sequences.

More specifically, these results show the coordination of processes in the concept of number sequences by using the logical implication relation that is established between the mathematical elements of number sequence (E1) and arithmetic (E4) or geometric (E6) progression, that is, progression (arithmetic or geometric) implies number sequence [(E4 or E6) → E1]; however, no progression (arithmetic or geometric) does not imply no sequence, [no E4 ≠> no E1 or no E6 ≠> no E1].

Next, we present two sections. In the first one, we show a correct use of this logical implication, and in the second one, we show an incorrect use.

Correct Use of the Logical Implication Relation

Evidence of the correct use of this relation is found in the answer to the task in items d) (E4 → E1) and f) (E6→ E1) in an affirmative form, that is, if the arithmetic (E4) or geometric (E6) progression element is verified, it implies that the number sequence element (E1) is verified. The negative form is used in item e) (no E4 ≠> no E1 or no E6 ≠> no E1), i.e., if the mathematical element of arithmetic progression (no E4) or geometric progression (no E6) is not verified, it does not imply that the mathematical element of number sequence (E1) is not verified.

As an example of the correct use of this relation, we look at the student 3b14 who, when solving different items of the proposed task, shows the coordination of processes in the concept of number sequences by using of this relation of logical implication between sequences and progressions correctly, both in its affirmative form [(E4 or E6) → E1] and in its negative form [no E4 ≠> no E1 or no E6 ≠> no E1].

Thus, the student in item d), by the way of answering, makes use of the logical implication relation between sequence and arithmetic progression in the affirmative form, E4 →E1:

> Question: Why have not you done item d)?
>
> 3b14: I forgot, but it is a number sequence since the terms follow each other and go in threes with respect to the previous one.

And, in item e) of the written semi-structured interview, it can be inferred that the student makes correct use of the logical implication in the negative form, since he/she answers that it is a number sequence, even if it is not a progression. That is, not verifying arithmetic progression (not E4) or geometric progression (not E6) does not imply that it is not a number sequence (E1):

> Question: Is it a number sequence or not?
>
> 3b14: Yes, it is a number sequence because it follows a rule by which I can calculate any value.

Moreover, it can be inferred from these answers that the student is using a mental structure process of the concept of number sequence, since the student 3b14 considers that it is possible to obtain the infinite values that make up the number sequence through the recurrence relation given by the formula. This can be considered a manifestation of the internalisation of the action to calculate specific terms of the sequence.

Item f) confirms our hypothesis, since the student uses the implication relation between geometric progression (E6) and number sequence in affirmative form, that is, E6 →E1, when they answer: “It is a progression because the terms follow each other, specifically it is a G.P. [geometric progression] and the ratio is 1/2” (Figure 3). From this answer, it can be inferred that this student views progressions as a special case of number sequences.

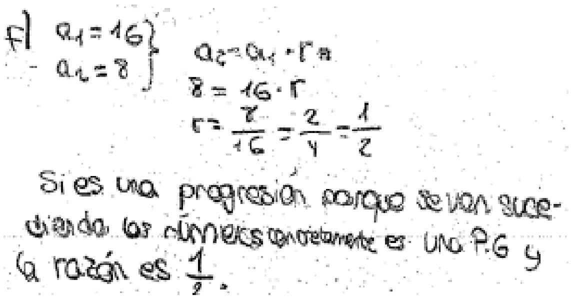
Furthermore, at different points in the written semi-structured interview, this student proves that they differentiate number sequences and progressions:

> Question: Explain the difference between number sequence and progression.
>
> 3b14: A progression is a sequence of numbers where to find its terms you have to add or multiply, while a number sequence follows a rule by which its terms are found.

Incorrect Use of the Logical Implication Relation

Evidence of the incorrect use of this relation can be found in the answer to the task in items a), b), and e), where the student 3b4 states no E4 → no E1 or no E6 → no E1, that is, if the mathematical element of arithmetic progression (no E4) or geometric progression (no E6) is not verified, it implies that the mathematical element of number sequence (E1) is not verified, thus showing incorrect use of the logical implication relation in the negative form.

However, this same student demonstrates the coordination of processes in the concept of number sequences by using of the implications (E4 → E1) in item d) and of (E6→ E1) in item f) correctly; i.e., if the arithmetic (E4) or geometric (E6) progression element is verified, it implies that the number sequence element (E1) is verified.


f) $a_1 = 16$, $a_2 = 8$
$a_2 = a_1 \cdot r$
$8 = 16 \cdot r$
$r = \frac{8}{16} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
Si es una progresión porque se van sucediendo los números concretamente es una P.G y la razón es $\frac{1}{2}$.

Transcription:
f) It is a progression because the numbers follow one another, specifically it is a geometric progression and the ratio is 1/2

Figure 3. Response of student 3b14 to item b) of the questionnaire task

Evidence of incorrect use of this relation is found in a student who makes correct use of it in the affirmative form but makes incorrect use of it in the negative form, as shown below.

Thus, in the answers to item d), student 3b4 uses a mental structure action to obtain the first three terms of the algebraic expression [a_n=3n-2], and answering the question of whether it is number sequence in affirmative form with: "Yes, d is 3", referring to the fact that it is an arithmetic progression (E4) of difference 3; the student then concludes that it is a number sequence (E1), i.e. [E4 → E1], demonstrating a correct use of the affirmative form of the logical implication between arithmetic progression and number sequence.

The written semi-structured interview confirms student 3b4's use when he/she is asked about the answer given in the questionnaire.

> Question: Justify the answer to item d)
>
> 3b4: It is a sequence because it is an arithmetic progression.
>
> E: Justify why in paragraph e) you say it is not a sequence.
>
> 3b4: It is not a sequence because there is no matching number, i.e., it is fixed, to find the next one.
>
> E: Do you know of any sequence that is not a progression?
>
> 3b4: There can be a sequence that is not a progression if there is no r, i.e., a sequence of numbers that you invent, any number one after another.
>
> E: So, for you, what is a sequence?
>
> 3b4: A series of numbers one after the other.
>
> E: Then there is no reason or difference, is there?
>
> 3b4: Of course, there doesn't have to be.
>
> E: Then you contradict yourself in the previous section, don't you?
>
> 3b4: No.

This correct use of logical implication in an affirmative form is also evident in this student through the geometric progressions, so in his/her answers to item f), which shows a number sequence given by extension (E9) [16, 8, 4, 2,...], he/she again answer: "Yes, [referring to the fact that it is a number sequence (E1)] it is a geometric progression(E6)and the ratio is 2", that is, [E6 → E1].

Since the ratio of the geometric progression is not 2, as the student answers, but 1/2, the student is asked to clarify his/her answer in the written semi-structured interview:

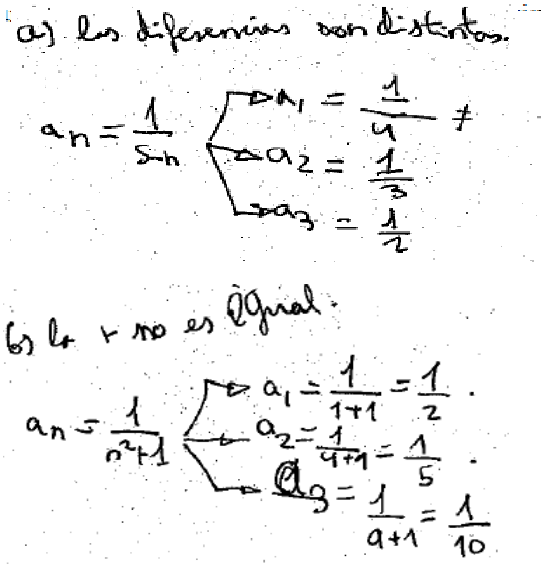
> Question: For item f), why do you say that it is a number sequence?
>
> 3b4: Because the values decrease when it is a geometric progression when divided by two.

Based on this answer, we can infer that the student recognises that the ratio of the geometric progression is 1/2, as he/she write that it is a decreasing progression when divided by two, and that it is a number sequence (E1) because it is a geometric progression (E6). This shows a correct use of the affirmative form of the logical implication between geometric progression and number sequence.

The answers given by student 3b4 in these sections are not enough to evidence a correct use of the logical implication between progressions and number sequences; for this, we need proof that the student is making correct use of the logical implication in negative form [no E4 ≠> no E1 or no E6 ≠> no E1].

To evidence this fact, we look at how such a logical implication relation in the negative form is used incorrectly by this student when he/she states that, as it is not an arithmetic (E4) or geometric (E6) progression, it implies that it is not number sequence, as we see below.

Thus, in item a), in which the algebraic expression an = 1/(5-n) is presented, the student correctly uses the



Transcription:
a) the differences are different
b) r is not equal

Figure 4. Response of student 3b14 to item b) of the questionnaire task

elements general term (E3) and term (E2) to determine if it is a number sequence, jointly through the "conjunction logic", demonstrating a mental structure action to obtain the first three terms of the expression.

However, although student 3b4 answers that it is not a number sequence, the justification given shows that he/she incorrectly uses the negative form of the logical implication [no arithmetic progression implies no number sequence (no E4 → no E1)], since he/she does not consider it to be a number sequence because "the differences are different" (Figure 4). This fact is corroborated in the written semi-structured interview, when we asked:

> Question: For item a), what does it mean that the differences are different and therefore it is not a number sequence?
>
> 3b4: It is not a number sequence because the differences are different...

In item b), student 3b4 proceeds in the same way as in item a), linking the incorrect use of the negative form of logical implication to geometric progressions [no geometric progression implies no number sequence (no E6 → no E1)], stating that "r is not equal" (Figure 4). This fact is corroborated in the written semi-structured interview, when we asked:

> Question: For item b), what does it mean that r is not equal and therefore it is not a number sequence?
>
> 3b4: It is not a number sequence because the numbers do not follow each other, nor is each number multiplied by the same one to get the next one.

Then, this student's answers to a) and b) show the incorrect use of the logical implication in its negative form, that is, if it is not a progression (arithmetic or geometric) then it is not a number sequence.

DISCUSSION AND CONCLUSIONS

The fact that the questionnaire task requires using the logical implication relation in its negative form allowed us to identify an indicator of the transition between the inter and trans levels in developing the understanding of the concept of number sequences. This can be considered a manifestation of the process encapsulation mechanism for the purpose of the concept of sequence as a numerical list.

These results corroborate those obtained in previous studies such as that of Djasuli et al. (2017), which show the importance of arithmetic and geometric progression tasks for the understanding of the concept of number sequences. Furthermore, our research shows that this type of task facilitates the transition between the levels of development of the number sequence scheme, since arithmetic and geometric progressions play a key role as an indicator of the development of this scheme.

In addition, regarding the use of logical implication, the results of our research are in line with previous research in relation to other mathematical concepts such as derivative function (Fuentealba et al., 2017, 2019a, 2019b; Sánchez-Matamoros, 2004; Sanchez-Matamoros et al., 2008, 2013). These studies showed how the use of the logical relations conjunction logic, counter-reciprocal and logical equivalence are indicators of the development of the derivative function concept scheme. Through our research, we were able to confirm how, in addition to these logical relations, the logical implication relation is also an indicator of the development of the number sequence concept scheme. This fact allows us to consider that the students' use of logical relations when solving tasks is indicator of the development of the mathematical concept scheme.

Our research complements the results obtained in the McDonald et al. (2000) research. These authors focus on identifying the mechanisms of transition between the levels of development of the schema for sequences as functions (Seqfunc as defined in the McDonald et al. (2000) research) among university students. In our paper, we show the transition mechanisms of the construction of the concept of sequence as a numerical list (Seqlist as defined in the McDonald et al. (2000) research) among compulsory secondary-school students, complementing the transition mechanisms of the two ways of conceiving the concept of sequence (Seqlist and seqfunc).

Przenioslo (2006) research on secondary-school students' understanding of a sequence as an ordered set of numbers indicates that they had notions that were far removed from the meaning of the concept. This is because they only treated those characterised by some regularity (arithmetic or geometric progression) as sequences. In this sense, our results are in line with Przenioslo's research, since students characterised at the inter level of development of the scheme in our research linked sequences and progressions through logical equivalence, which led them to consider number sequences as only arithmetic or geometric progressions.

Studys by Cañadas (2007) and González et al. (2011) indicate that using different modes of representation when solving tasks helps in the understanding of the concept of number sequences. We have found that those students who use logical relations correctly solve tasks by translating between different modes of representation.

Since this work has been conducted with students in Compulsory Secondary Education (14-16 years old), one future line of research is to carry out research with students at pre-university or university levels to explore the development of the understanding of this concept, including new tasks in the data collection instruments.

Author contributions: All authors have sufficiently contributed to the study, and agreed with the results and conclusions.

Funding: The research reported here was financially supported by Departamento de didáctica de las matemáticas. All authors belong group FQM226.

Declaration of interest: No conflict of interest is declared by authors.

REFERENCES

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, 6*, 1-32. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* https://www.cimt.org.uk/journal/bagni.pdf

Bajo Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Sánchez-Matamoros García, G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria [Characterization of the numeric sequence schema among Compulsory Secondary Education students]. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(3), 149-167. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578. https://doi.org/10.2307/749887

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria* [Royal Decree 1631/2006, of December 29, which establishes the minimum education corresponding to Compulsory Secondary Education]. *Official State Gazette, 5*, 677-773. https://www.boe.es/eli/es/rd/2006/12/29/1631/con

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* [Description and characterization of inductive reasoning used by high school students when solving tasks related to linear and quadratic sequences] (Unpublished doctoral thesis) Universidad de Granada.

Codes Valcarce, M., & González-Martín, A. S. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS [Sequence of partial sums as an infinite iterative process: A step towards the understanding of numerical series from an APOS perspective]. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(1), 89-110. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Codes, M., González Astudillo, M. T., Delgado Martín, M. L., & Monterrubio Pérez, M. C. (2013). Growth in the understanding of infinite numerical series: A glance through the Pirie and Kieren theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 652-662. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.781690

Djasuli, M., Sa'dijah, C., Parta, I. N., & Daniel, T. (2017). Students' reflective abstraction in solving number sequence problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 12*(3), 621-632. https://doi.org/10.29333/iejme/638

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación [A crucial issue in mathematics education: The ability to change the register of representation]. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Fuentealba, C, Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Trigueros M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 374-392. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019a). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada [Identification and characterization of the development sub-levels of the derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Cárcamo, A. (2019b). The understanding of the derivative concept in higher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), em1662. https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S., & Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra [A contribution to work numerical sequences with Geogebra]. *Revista de Educación Matemática, 26*, 1-19.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259-288. https://doi.org/10.1023/A:1016004822476.

McDonald, M. A., Mathews, D. M., & Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 8*, 77-102. https://doi.org/10.1090/cbmath/008/05

Mor, Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K., & Simpson, G. (2006). Designing to see and share structure in number sequences. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(2), 65-78.

Piaget, J. & García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia* [Psychogenesis and history of science]. Siglo XXI Editores.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(7), 805-823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Roa-Fuentes, S. & Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal [Constructing a genetic decomposition: Theoretical analysis of the linear transformation concept]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 217-233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)* [Analysis of the understanding in high school and first year university students about the mathematical notion of derivative (concept development)] (Doctoral thesis). Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática [The understanding of derivative as the object of investigation in mathematics education]. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función [Some Indicators of the Development of Derivative Schema]. *Bolema*, 27(45) 281-302.

Stewart, J., Hernández, R., & Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al cálculo* [Introduction to calculus]. S.A. Ediciones Thomson.

Valls, J., Pons, J., & Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función [Coordination of approximations in secondary school students' understanding of the concept of limit of a function]. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.637

Weigand, H.-G. (2015). Discrete or continuous?- A model for a technology supporteddiscrete approach to calculus. In K. Krainer & N. Vondrová

(Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2580-2586). ERME.

Research Article https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.159

European Journal of Educational Research
Volume 12, Issue 1, 159 - 172.
ISSN: 2165-8714
https://www.eu-jer.com/

The Concept of Number Sequence in Graphical Representations for Secondary School Students

José Mariano Bajo-Benito*
Universidad de Sevilla, SPAIN

José María Gavilán-Izquierdo
Universidad de Sevilla, SPAIN

Gloria Sánchez-Matamoros García
Universidad de Sevilla, SPAIN

Received: March 4, 2022 ▪ Revised: July 8, 2022 ▪ Accepted: November 25, 2022

Abstract: The aim of this work is to characterise the understanding that students in compulsory secondary education (14-16 years old) have of number sequences in graphical representations. The learning of numerical sequences is one of the first mathematical concepts to be developed in an infinite context. This study adopts the focus of semiotic representations as its theoretical framework. The participants consisted of 105 students and a qualitative methodology was used. The data collection instruments were a questionnaire and a semi-structured interview. The results allowed for three student profiles regarding number sequences in graphical representations to be identified. These profiles may facilitate a possible progression in the learning of number sequences for students in compulsory secondary education to be considered. Therefore, the results presented in this study can provide information about the learning hypotheses of mathematical tasks related to numerical sequences and can help in the design of such tasks.

Keywords: *Compulsory secondary education students, graphical representation, number sequences, progression in learning.*

To cite this article: Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Sánchez-Matamoros García, G. (2023). The concept of number sequence in graphical representations for secondary school students. *European Journal of Educational Research, 12*(1), 159-172. https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.159

Introduction

Different studies have highlighted the importance of understanding the concept of sequences as a prerequisite for the understanding of other mathematical analysis concepts, such as understanding the concept of number series (Codes et al., 2013; Codes & González-Martín, 2017), in the concept of limits (Mamona, 1990; Roh, 2008; Sierpinska, 1990) or the introduction of the integral using Riemann sums (McDonald et al., 2000).

Moreover, studies examining the concepts of mathematical analysis have noted the relevant role that representations have in the teaching and learning of said concepts, limits (Pons et al., 2012) in the concept of function (Amaya, T., 2020; Tall & Vinner, 1981) in the concept of derivatives (Ariza & Llinares, 2009; García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006), in the concept of integrals (Boigues et al., 2010; González & Aldana, 2010; Orton, 1983; Aranda & Callejo, 2015), in the concept of number sequences (Biza et al., 2020; Cañadas, 2007; Montenegro et al., 2018; Przenioslo 2006; Rivera, 2013; Roh, 2008).

Furthermore, regarding the concept of number sequences, different studies have outlined the role of representations. Some papers have specifically been focused on determining whether representation formats influence how students solve tasks (Biza et al., 2020; Djasuli et al., 2017; Przenioslo, 2006; Roh, 2008). The results of these studies show not only the importance of different representations being present but also the transformations between them. More specifically, Cañadas (2007) highlights the importance of representations for the understanding of the presence of analytical (numerical, algebraic) and graphical (number line and cartesian plane) means of representation.

Regarding the concept of number sequence, in this paper, it is considered as the following:

"A sequence is an infinite set of numbers that are written in a specific order: $a_1, a_2, a_3..., a_n...$ The most fundamental point is that each member of the set has to be named with a natural subscript, with a_1 being the first and, a_2 the second, and in general, the nth term being a_n. We define the sequence as $\{a_n\}$, or simply a_n" (Stewart et al., 2007, p.178).

* **Corresponding author:**
José Mariano Bajo-Benito, Universidad de Sevilla, Spain. ✉ jbajo@us.es

In the same way, Stewart defines arithmetic progressions in the following way: “An arithmetic sequence or progression, AP, consists of the form a, a+d, a+2d,... a+nd... The number “a” is the first term and d is the common difference between two consecutive terms. The nth term is given by a_n= a+(n-1)d” (Stewart et al., 2007, p.181).

Lastly, Stewart defines a geometric progression as the following: “A geometric sequence or progression, GP, consists of the form a, ar, ar^2, ar^3,..., ar^n,... where a is the first element and “r ≠1” is the ratio of the progression. The nth term is given by $a_n=ar^{n-1}$. Unlike an arithmetic progression, where the difference between two consecutive terms is “d”, in a geometric progression, the quotient between a_{n+1} and a_n is “r” for all “n” (Stewart et al., 2007, p.183).

There are many ways of expressing the terms in a number sequence: through the general term, by recurrence through a set of steps that allow a term to be obtained from the previous ones, and by extension by giving a series of consecutive ordered terms.

The aim of this study is to characterise the understanding that students in compulsory education have about the concept of number sequences through the coordination of two representations; graphical-linear and graphical-cartesian.

The theoretical framework regarding the semiotic representations in mathematics considered in this work (Duval, 2006) is outlined below. The qualitative methodology used in the study and the results obtained through the analysis of the data are also detailed. The paper finishes with the conclusions and a discussion of the study.

Literature Review

A common denominator in studies about students’ understanding of mathematical concepts is the presence of representations. In this regard, many researchers note the presence and impacts of using representations: verbal, numerical, algebraic and graphic (Lesh et al., 1987), to gain an understanding of mathematical concepts (Altay et al., 2014; Biza et al., 2020; Callejo & Zapatera, 2014; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Montenegro et al., 2018; Moyer-Packenham, 2005; Rivera & Becker, 2008; Warren & Cooper, 2008).

A representation in mathematics is defined by Goldin (2008) as a configuration that can substitute an entity in any form. These representations are important when solving tasks that involve mathematical concepts. Montenegro et al. (2018) consider that the multiple representations of a mathematical concept are one of the main difficulties that students find themselves struggling with.

Moreover, Duval (2006, 2017) notes that the change and coordination between different representations is a relevant factor for the understanding of mathematical concepts, and outlines that analysing the cognitive processes behind learning mathematics requires a change or orientation in the way tasks and problems are selected for students’ learning. These representations, changes and coordination must be considered as cognitive variables. Therefore, it is considered that to reach a certain level of understanding, the change between representations and the coordina tion in the different representations are important (Duval, 2006, 2017).

The solving of a mathematical task is carried out in one representation but students must identify the same mathematical concept in different representations and use them. The representations used in the solving of a mathematical task always involve some transformation or conversion of semiotic representations.

Moreover, although individuals may use different semiotic representations, solving of a mathematical task requires that they only choose one. In other words, the solving of a mathematical task requires internal coordination between the representations without this coordination of the two different representations meaning two different concepts, and without there being any relation between them. Therefore, for Duval (2016), conceptual understanding arises from the coordination of various representations and not from only one of them.

This paper focuses on the graphical representation of the concept of number sequences. Two representations are considered: graphical-linear and graphical-cartesian. In the graph-linear representations, number sequences are represented as points on a number line (Figure 1); and in the graph-cartesian representations, number sequences are represented as points (n, an) on a cartesian plane (Figure 2).

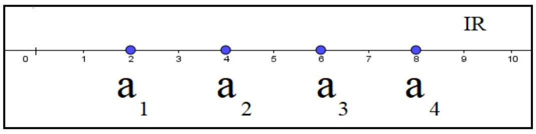


Figure 1. Graphical-linear representation

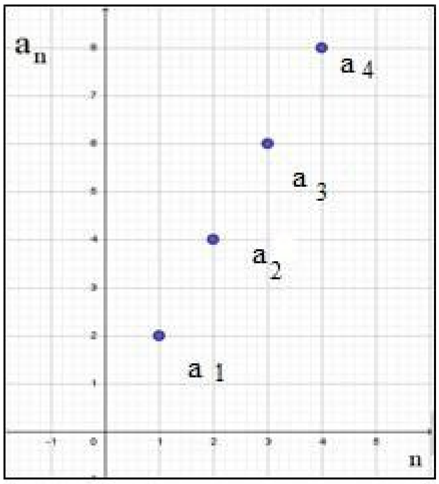


Figure 2. Graphical-cartesian representation

Methodology

Research Design

The methodology we are using is qualitative, using as a source of data two questionnaires of different nature, a first questionnaire of four tasks, which the students answered in a class session, and a second questionnaire designed for each student, based on the answers given to the first questionnaire, to deepen in those answers that either had not been argued, were not sufficiently justified or had not been answered.

In this section we present the research methodology, which we have divided into three parts. In the first part we present the participants in the study, in the second part we present the data collection instruments used to carry out our research, and finally, we present the design of the analysis procedure, which has guided us in achieving our objectives for this study.

Participants

In this study, 105 students participated. They were in their final years of compulsory secondary education (14-16 years old) in a center offering this educational stage in a Spanish city. The students studied the didactic unit about number sequences in accordance with their official syllabus: the concept of sequence, finding regularities in sequences with integer and rational terms, arithmetic and geometric progressions (Official State Bulletin, 2015).

Data Collection Instrument

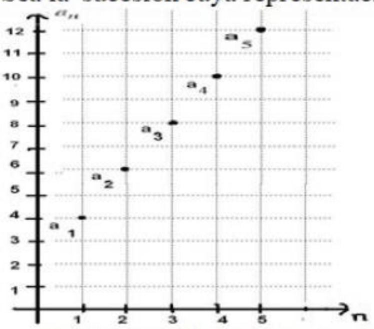
In this study, the data collection instrument consisted of two tasks that made up a more extensive questionnaire, which was based on a literature review of research on number sequences, Figures 3 and 4.

The students responded to the questionnaire during class time. Once an analysis of the students' responses and reasoning had been done, a semi-structured interview was carried out with each participant. The objective of the interview was to obtain further details about the responses that had not been explained or that brought about doubts in their interpretation. In the interview, the students had their written answers to the first questionnaire.

Task 1 (Figure 3) presented a number sequence in a graphical-cartesian representation and, in order to solve it, students were required, in section a), to identify whether the points of the cartesian plane (n, a_n) corresponded with the nth term of the given sequence. In this way, and using a conversion to a numerical representation, students needed to identify that $a_2=6$ was the equivalent of the point (2,6). Likewise, an analysis needed to be done to obtain a_4 and a_6.

Tarea 1

Sea la sucesión cuya representación gráfica sobre los ejes cartesianos es la siguiente:



a) ¿Cuál es el término segundo, es decir, a_2? , ¿Y el cuarto a_4? ¿Y el sexto a_6?
b) ¿Hay algún término que valga 16? ¿Y 13? Razona las respuestas.
c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.
d) ¿Qué pasa con a_n cuando n se hace cada vez mayor?

Translation

Task 1

Let there be the number sequence whose graphical representation on the cartesian axes is as follows

a) What is the second term, i.e. a_2? and the fourth term a_4 ? and the sixth term a_6 ?

b) Is there any term which is 16? and 13? Reason the answers

c) Is it increasing or decreasing? Justify the answer

d) What happens to a_n when n gets bigger and bigger?

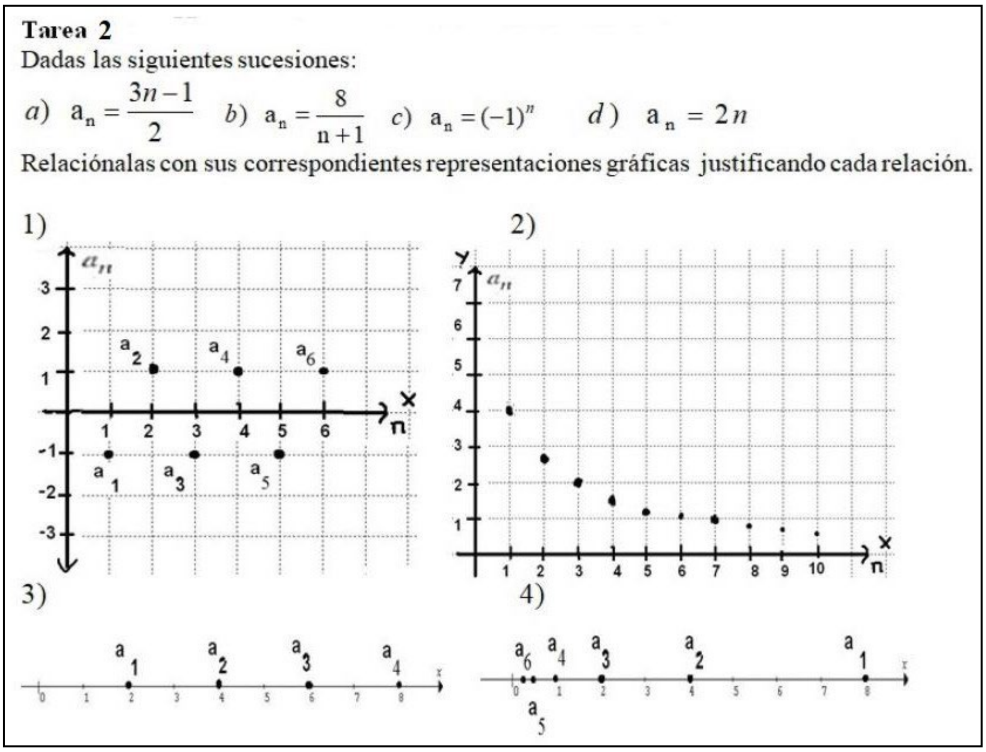
Figure 3. Task 1 of the questionnaire

In order to respond to section b), students needed to follow the same method as for section a) but also needed to explicitly mention that the value of the abscissa had to be a natural number for it to be a term in the sequence and that this value also indicated which term of the sequence it was.

For section c), students needed to analyse the data to compare consecutive terms. This analysis could be done directly on the graph or through a conversion to the numerical representation. They also needed to interpret the data to infer the behaviour of terms that were not specified in the graphical-cartesian representation.

For section d), the students needed to follow the same method as section c) and interpret the data again. The expected answers could have been, among others, their strictly increasing monotonicity or divergence.

In task 2 (Figure 4), sequences in three representations were presented: algebraic expressions, and graphical-linear and graphical-cartesian representations. Students were asked to relate the algebraic expression with one of the graphical-linear or graphical-cartesian representations. Not all the algebraic expressions of the sequences provided could be paired with one of the graphical representations; specifically, the number sequence in section a). Similarly, not all the graphical representations could be paired with an algebraic representation; in this case, specifically, graphical-linear representation 4.



Translation

Task 2

Given the following numbers sequences:

Relate them to their corresponding graphical representations, justifying each relation.

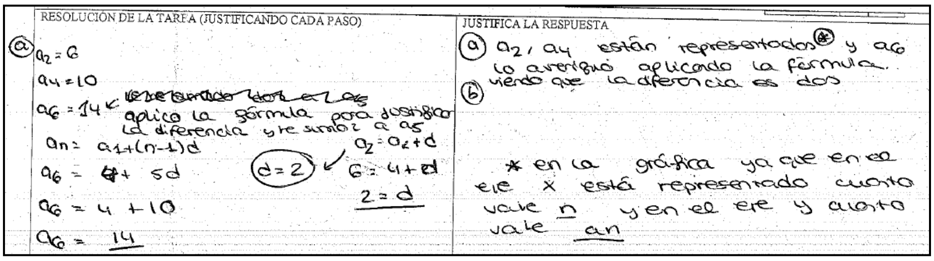
Figure 4. Task 2 of the questionnaire

To solve the task, students could find some concrete terms in the algebraic representation, find the equivalence in the graphical representation (linear or cartesian) and make a subsequent comparison. If one of the values did not correspond with the comparison, the students needed to discard the corresponding representation. If all values matched, the students needed to interpret that the same was true for all the values that were not explicitly listed.

Analysis Procedure

The analysis was focused on identifying the use of graphical-linear and graphical-cartesian representations, as well as the transformations and conversions that could be identified in the students' answers. The data from the two data sources (the written questionnaire and the subsequent semi-structured interview which was personalised for each student according to the answers given to the written questionnaire) were considered together. We will now show, by means of an example, how we carried out the analysis procedure using the two data sources.

Regarding the graphical-cartesian representation, in the first section of task 1 given in this representation, student e12 had to carry out a conversion to a numerical representation to be able to respond to the section, in which they were asked for the value of certain terms of the sequence a_2, a_4 and a_6. This student correctly analysed the graphical-cartesian representation as they correctly assigned meaning to the role of each of the axes in it (the x-axis was the location of the term of the sequence and the y-axis was the value of the term of the sequence (n, an)). This can be seen in Figure 5, as interpreting the point (1,4) and the point (2,6) gives an answer of $a_2=a_1+d$. 6=4+d, then d=2, $a_4=10$, $a_6=14$, carrying out the conversion from the graphical-cartesian representation to the algebraic representation and then to the numerical representation correctly.



RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

a) $a_2 = 6$
$a_4 = 10$
$a_6 = 14$ ← aplico la fórmula para justificar la diferencia y le sumo 2 a a_5
$a_n = a_1 + (n-1)d$ $\quad a_2 = a_1 + d$
$a_6 = 4 + 5d$ $\quad d = 2$ $\quad 6 = 4 + d$
$a_6 = 4 + 10$ $\quad 2 = d$
$a_6 = 14$

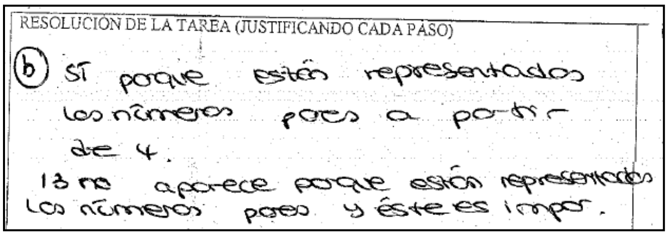
JUSTIFICA LA RESPUESTA

a) a_2, a_4 están representados* y a_6 lo averiguo aplicando la fórmula viendo que la diferencia es dos
b)
* en la gráfica ya que en el eje x está representado cuánto vale n y en el eje y cuánto vale an

Translation:	Justify the answer
Resolution of the task (justifying each step) I apply the formula to justify the difference and add 2 to a_5.	a) a_2, a_4 are represented in the graph and that in the x-axis is represented when it is n and in the y-axis when it is an and a_6 I find out by applying the formula seeing that the difference is two.

Figure 5. Answer of student e12 to item a) of the questionnaire task 1

In response to section b) from task 1, this student responded that 16 was a term in the sequence but that 13 was not as the sequence terms were all even (Figure 6).



RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

b) Sí porque están representados los números pares a partir de 4.
13 no aparece porque están representados los números pares y éste es impar.

Translation:
b) yes because all the even numbers from 4 onwards are represented 13 Does not appear because the even numbers are represented and this one is odd.

Figure 6. Answer of student e12 to item b) of the questionnaire task 1

Later, in the semi-structured interview, we asked the student to clarify their response. They told us that, when carrying out a conversion to an algebraic representation, the subscript n needed to be a natural number. The joint consideration of the questionnaire and the interview guarantees the reliability of the inference made (triangulation of data):

Question: In section b from task 1, does the simple fact of being odd ensure that there is no term? Explain.

e12: $a_n = 2 + 2n \Rightarrow a_7 = 2 + 2n = 16$,

$13 = 2 + 2n \Rightarrow 11 = 2n \Rightarrow n = 11/2$ $n = 5{,}5 \Rightarrow$ no, because n has to be a natural number.

Findings / Results

The results from the analysis of the students' responses to the questionnaire and the semi-structured interview allowed us to characterise the different uses of the graphical representations, which are shown in the following table (Table 1).

Table 1. Number of students in each of the graphical representations

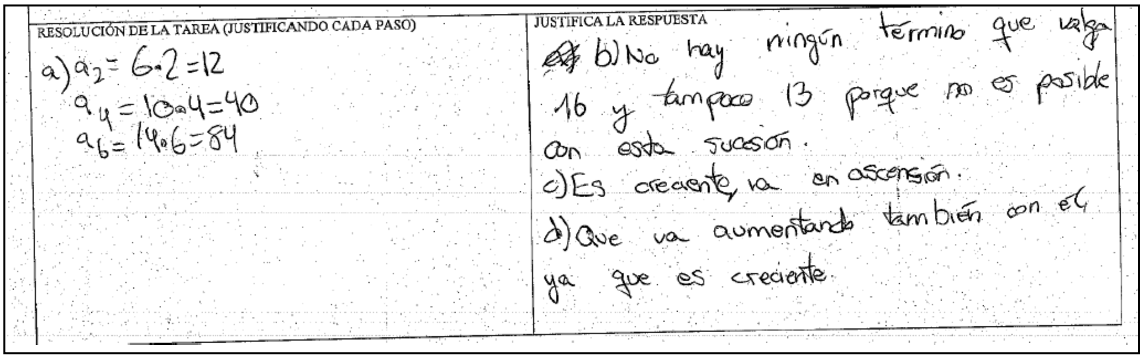
Representation	Number of students
Incorrect use of the graphical representation	12
Correct use of only the graphical-linear representation	15
Correct use of the graphical representations	78

We will now describe each of them.

Incorrect use of the graphical representation

The students from this group were characterised by an incorrect use of both the graphical-linear representation and the graphical-cartesian representation when solving the tasks.

An example of this error can be seen in student e31. When solving task 1, this student did not correctly analyse the graphical-cartesian representation since, when correctly converted to a numerical representation, the value of a_2 was 6. However, this student considered that a_2 equalled 6•2=12, and acted accordingly with a4 and a6 (Figure 7).


RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

a) $a_2 = 6 \cdot 2 = 12$

$a_4 = 10 \cdot 4 = 40$

$a_6 = 14 \cdot 6 = 84$

JUSTIFICA LA RESPUESTA

b) No hay ningún término que valga 16 y tampoco 13 porque no es posible con esta sucesión.

c) Es creciente, va en ascensión.

d) Que va aumentando también con él ya que es creciente.

Translation:

b) There is no term worth 16 and no term worth 13 with this number sequence.

c) It is increasing, it is ascending

d) It is also increasing with it, since it is increasing.

Figure 7. Answer of student e31 to task 1 of the questionnaire

We confirmed this in the semi-structured interview:

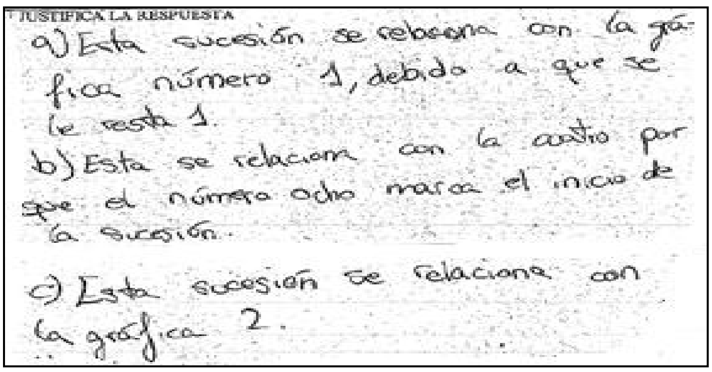
Question: For task 1, can you explain how you calculated the sequence terms using the graphic?

e31: As it was the cartesian plane, what I did was place the cartesian product of the numbers below and above and what I got was the value of each term.

This student responded to sections b), c) and d) carrying out the same conversion of the graphical-cartesian representation to the numerical representation as in the previous section.

In task 2, the student incorrectly analysed the graphical-cartesian representation. In all sections of this task, the students needed to identify the same sequence in two different representations by carrying out a conversion. One of the representations was algebraic and a conversion needed to be done in section d) with the graphical-linear representation in section 3 and in section c) and b) with the graphical-cartesian in sections 1 and 2, respectively.

Moreover, student e31 again carried out incorrect conversions between the algebraic and graphical-cartesian representations as they linked section c) with 2) and similarly carried out an incorrect conversion between the graphical-linear representation and the algebraic representation, due to an incorrect analysis of the graphical-linear representation, which became apparent when linking section b) with 4), as shown in Figure 8.


JUSTIFICA LA RESPUESTA

a) Esta sucesión se relaciona con la gráfica número 1, debido a que se le resta 1.

b) Esta se relaciona con la cuatro porque el número ocho marca el inicio de la sucesión.

c) Esta sucesión se relaciona con la gráfica 2.

Translation:

a) This number sequence is related to graph number1, because 1 is subtracted from it

b) This number sequence is related to four because the number eight marks the beginning of the number sequence.

c) This number sequence is related to graph number 2

Figure 8. Answer of student e31 to task 2 of the questionnaire

In the semi-structured interview, we asked the student about this and they confirmed that their errors came from incorrectly analyzing thegraphical-cartesian and graphical-linear representations.

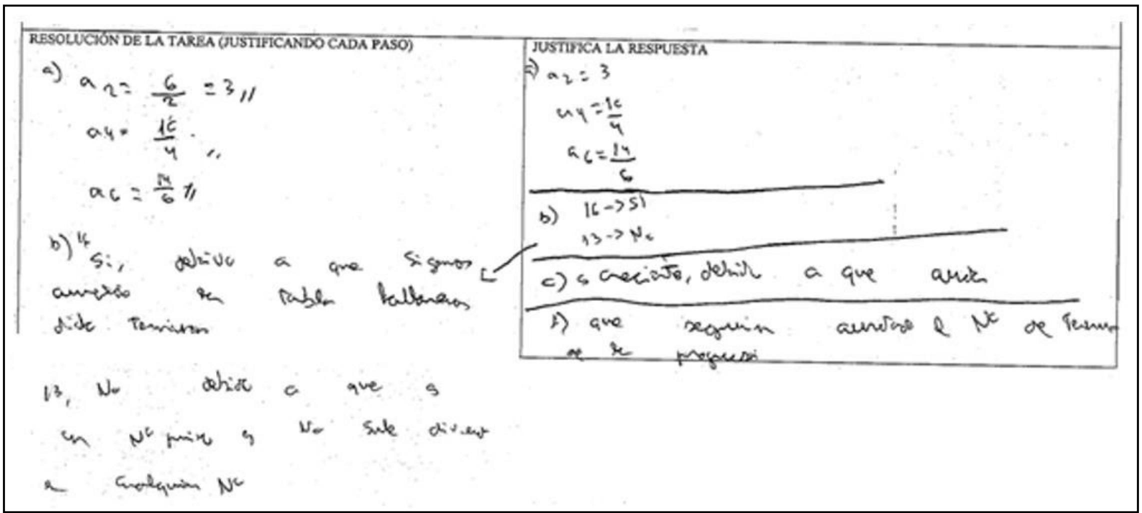
Question: For task 2, can you explain sections c) and b)?

e31: In section c, it is 2 because, with it being negative, it is worth less and less and has a downward trend. In section b, the first value is 8 and, therefore, I found the 8 in the line.

Correct use of only the graphical-linear representation

The students from this group are characterised by the correct use of the graphical-linear representation when solving the task using a conversion (converting to a numerical or algebraic representation) when necessary. However, the students were not correct when solving the task that required them to use the graphical-cartesian representation.

An example of this type of student can be seen in student e17. When solving task 1, this student did not correctly analyse the graphical-cartesian representation since, when correctly converted to a numerical representation, the value of a_2 was 6. However, the student considered that the second term a_2 was 6: 2=3, and acted accordingly with a_4 and a_6 (Figure 9).



Translation	Justify the answer
Resolution of the task (justifying each step)	b) 16 yes
b) 16 yes because if we increase n in the table we arrive at the term	13 No
13 no because it is a prime number and does not divide by any number.	c) It is increasing, because it increases d) That we keep increasing the number of the term ofthe number sequence.

Figure 9. Answer of student e17 to task 1 of the questionnaire

We confirmed this in the semi-structured interview:

Question: For task 1 can you explain how you calculated the sequence terms using the graphic?

e17: I calculated them using the two values from the line, the top one divided by the bottom one and I got the value of the final number, I think.

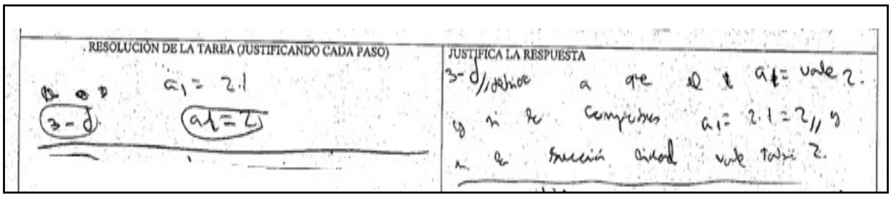
Question: Can you further explain section b)?

e17: 16 is indeed a value because you can divide it and get the number but 13 cannot do the same because as it is a prime number, it cannot be divided by another number to make 13.

This student incorrectly responded to section b) as they considered divisibility, which was not related to the question. The student solved sections c) and d) with the same analysis errors in the graphical-cartesian representation as in the previous section.

This same student, for all sections from task 2, needed to identify the same sequence in two different representations by carrying out a conversion. One of the representations was algebraic and the conversion needed to be carried out in section d) with the graphical-linear representation in section 3, and in section c) and b) with the graphical-cartesian in sections 1 and 2, respectively.

When the task needed a graphical-linear representation for its solution, student e17 used it correctly. This fact can be seen when, in answering, the student related section d in the algebraic representation given by the analytical expression $a_n = 2\ n$ with the graphical-linear representation of graph 3. The student wrote: "3-d, because a1 is 2 and if we check $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$ and the linear function is also 2", (see Figure 10).



Translation:

3-d) Because a_1 is 2 and if you check $a_2 = 2\text{-}1 = 2$, and the linear function is also 2.

Figure 10. Answer of student e31 to task 2 of the questionnaire

Therefore, we can consider that this student correctly converted the algebraic representation to a numerical representation and subsequently to a graphical-linear representation, as they confirmed in the semi-structured written interview.

Question: So, what type of graphics do you think are the easiest to use for your interpretation?

e17: Those that are on one line [referring to the graphical-linear representations] as you can see the values faster and they are much better represented. I have more problems with the ones that are two numbers above and below [referring to the graphical-cartesian representations].

In summary, when using the graphical-cartesian representation, the student had many difficulties in their interpretation, but when they used the graphical-linear representation, they correctly did so, carrying out correct conversions between the algebraic representation and the graphical-linear representation.

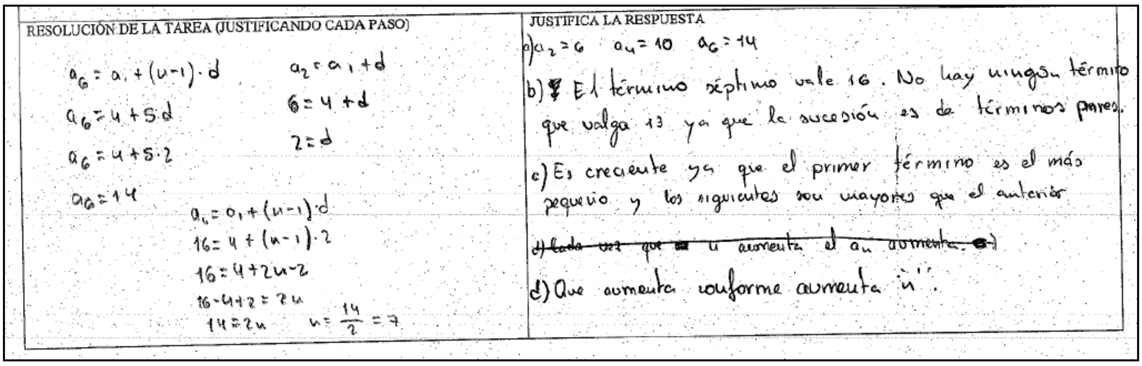
Correct Use of Graphical Representation

The students of this group are characterised by a correct use of both the graphical-linear and graphical-cartesian representation when solving the tasks using a conversion (converting to a numerical or algebraic representation), when necessary.

An example of this can be found with student e92 who correctly used the graphical-cartesian representation. This can be seen when analysing the point (1,4), which led the student, through a conversion to the numerical representation, to the fact that $a_1=4$. The same happens with point (2,6). This allowed the student to find the value of the difference of the arithmetic progression given in the task. Subsequently, the student used the formula that corresponded to the general term of an arithmetic progression to answer the different sections of the task. They obtained the sixth term correctly and answered that there was a term with a value of 16 and there was no term with a value of 13 (Figure 11).

For section c), the student analysed the data to compare consecutive terms and interpreted the data to infer the behaviour of the terms that were not specified in the graphical-cartesian representation.

For section d), the student continued in a similar way to the previous section, inferring the behaviour of the whole number sequence.



RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

$a_6 = a_1 + (n-1)\cdot d$ $\quad a_2 = a_1 + d$

$a_6 = 4 + 5\cdot d$ $\quad 6 = 4 + d$

$a_6 = 4 + 5\cdot 2$ $\quad 2 = d$

$a_6 = 14$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$16 = 4 + (n-1)\cdot 2$

$16 = 4 + 2n - 2$

$16 - 4 + 2 = 2n$

$14 = 2n$ $\quad n = \frac{14}{2} = 7$

JUSTIFICA LA RESPUESTA

a) $a_2 = 6$ $a_4 = 10$ $a_6 = 14$

b) El término séptimo vale 16. No hay ningún término que valga 13 ya que la sucesión es de términos pares.

c) Es creciente ya que el primer término es el más pequeño y los siguientes son mayores que el anterior.

d) Que aumenta conforme aumenta "n".

Translation:

a) a_2=6 a_4=10 a_6=14

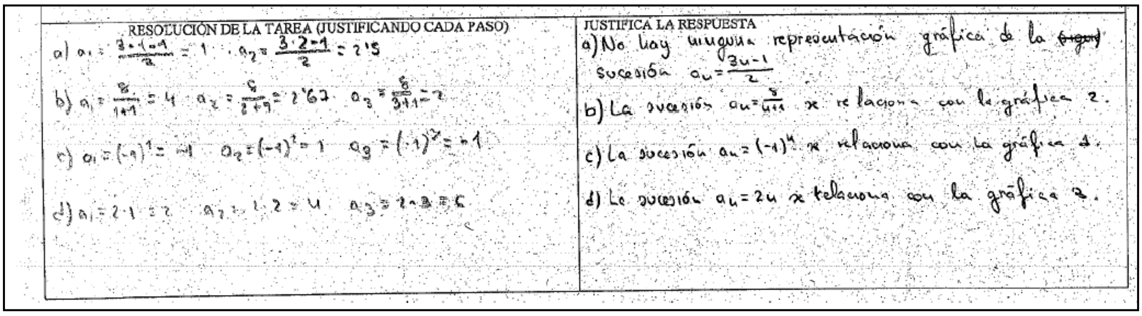
b) The seventh term is worth 16. There is no term that is worth 13 since the number sequence is of even terms.

c) It is increasing, the first term is the smallest and the following terms are larger than the previous one.

d) Increasing as "n" increases.

Figure 11. Answer of student e92 to task 1 of the questionnaire

In task 2, the student used the general term from the four task sections in the algebraic representation and carried out a conversion to a numerical representation in order to find the three first terms. The student also analysed the graphical representation (linear or cartesian) and made a subsequent comparison. For this student, the number sequences b) and c) coincided with their corresponding graphical-cartesian representations and section d) with its corresponding graphical-linear representation. Likewise, they did not pair the number sequence a) with any graphical representation nor the graphical-linear representation 4 with any algebraic representation (Figure 12).



RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

a) $a_1 = \frac{3\cdot 1-1}{2} = 1$; $a_2 = \frac{3\cdot 2-1}{2} = 2'5$

b) $a_1 = \frac{8}{1+1} = 4$ $\quad a_2 = \frac{8}{2+1} = 2'67$ $\quad a_3 = \frac{8}{3+1} = 2$

c) $a_1 = (-1)^1 = -1$ $\quad a_2 = (-1)^2 = 1$ $\quad a_3 = (-1)^3 = -1$

d) $a_1 = 2\cdot 1 = 2$ $\quad a_2 = 2\cdot 2 = 4$ $\quad a_3 = 2\cdot 3 = 6$

JUSTIFICA LA RESPUESTA

a) No hay ninguna representación gráfica de la sucesión $a_n = \frac{3n-1}{2}$

b) La sucesión $a_n = \frac{8}{n+1}$ se relaciona con la gráfica 2.

c) La sucesión $a_n = (-1)^n$ se relaciona con la gráfica 1.

d) La sucesión $a_n = 2n$ se relaciona con la gráfica 3.

Translation:

a) There is no graphical representation of this number sequence

b) This number sequence is related to the graph 2

c) This number sequence is related to the graph 1

d) This number sequence is related to the graph 3

Figure 12. Answer of student e92 to task 2 of the questionnaire

In summary, student e92 correctly used the different representations, showing conversions between the graphical (linear and cartesian), numerical and algebraic representations.

Discussion

The use of different representations has been considered as a key element for characterising the understanding of mathematical concepts. This work examines the consideration and differentiation of two graphical representations that are related through conversion; graphical-linear and graphical-cartesian representations. Both representation types were characterised using two processes: reading and interpretation. On the one hand, reading is a process that we can consider punctual as it is linked to concrete points (particular terms from a number sequence, either to a single point or as a finite set of terms in the sequence). On the other hand, interpretation is an overall process in nature, that is, it is linked with the complete number sequence with its infinite terms. Our results show that the cartesian graphical representation register presents greater difficulty than the linear graph because the former requires a double reading, one to coordinate the position with the value of the term of the numerical sequence, while the latter requires only one reading to coordinate the position with the value of the term of the numerical sequence.

The results of this paper are in line with those of other studies that note the presence of representations and the relevance of the conversions between them for understanding the concept of number sequences (Biza et al., 2020; Cañadas, 2007; Djasuli et al., 2017; Przenioslo, 2006; Roh, 2008). Moreover, our study is in line with the results obtained by Biza et al. (2020). The most used strategy among the students in this study to solve the task involving different representations was, as can be seen in the results, the conversion to a numerical representation.

Moreover, our results agree with Duval (2006, 2017) who considers that for a concept, each representation has some, but not all, of its own characteristics associated with it. In this way, conceptual understanding arises from the coordination of several different representations. Žakelj and Klančar (2022) show the importance of the use of representation registers, since they develop the cognition of mathematical concepts. The concept of number sequences in a graphical representation has different associated characteristics according to whether it is a graphical-linear or graphical-cartesian representation. In the former, there is no need to coordinate the position and the value of the term, and in the latter coordination is needed in all situations. We cannot consider that the student has conceptually understood the graphical representations of number sequences until they have carried out the coordination process. It is noteworthy that this work has shown that not all mathematical concepts make use of representations in the same way, as can be seen in the different uses of graphical-linear and graphical-cartesian representations.

Conclusions

The results obtained in this study allow for the consideration that differentiating between graphical-linear and graphical-cartesian representations can help to characterise progression in learning the concept of number sequences in a graphical representation. All students who correctly used the graphical-cartesian representation, also correctly used the graphical-linear representation, but not vice versa. Due to this, it can be concluded that learning number sequences using graphical representations takes place by first correctly using the graphic-linear representation and then moving on to correctly using the graphical representation in its two forms (graphical-linear and graphical-cartesian).

This work demonstrates that the two graphical representations of a sequence are not the same; a graphical-linear representation is shown in one dimension (real line) and requires different analysis skills to those needed for a graphical-cartesian representation, which is shown in two dimensions (cartesian plane). Due to this, conversions between the two types of representations are not always instinctive. To be better able to carry out conversions between the graphical representations, it is recommended that a conversion to a numerical representation is done.

Recommendations

Learning number sequences is a challenge for students in secondary education as it is one of the first mathematical concepts that they do not develop in a finite context, but rather, an infinite one. More specifically, this particular discrete infinite context (based on natural numbers, which is an infinite countable set) is the transition to mathematical analysis concepts in a non-discrete infinite context (continuous, non-countable set) that is based on real numbers. This study has focused on this concept, putting an emphasis on graphical representations. These types of studies are vital when designing teaching plans at these educational levels that aim to help students understand particular concepts.

These ideas, as outlined in this study, may be useful for teaching when the teacher develops prospective learning plans (Simon, 1995). For the development of these plans, this work may provide information regarding the learning hypotheses of mathematical tasks relating to numerical sequences and can help in the design of such tasks. More specifically, and as we have shown, this study may be useful in the learning progression of the student regarding graphical representations of number sequences, moving from the correct use of graphical-linear representations to the correct use of both graphical-linear and graphical-cartesian representations.

Limitations

Given that this work has been carried out with compulsory secondary school students (14-16 years old), a future line of research is to carry out the research with students at pre-university or university levels and to investigate the use of the graphic representation register by these students.

Funding

The research reported here was financially supported by Departamento de didáctica de las matemáticas de la Universidad de Sevilla (Spain). All authors belong research group FQM226.

Authorship Contribution Statement

Bajo-Benito: Conceptualization, methodology, analysis, results, discussion, conclusions, writing—original draft preparation and writing—review and editing. Gavilán-Izquierdo, Conceptualization, methodology, analysis, results, discussion, conclusions, writing—original draft preparation and writing—review and editing. Sánchez-Matamoros García: Conceptualization, methodology, analysis, results, discussion, conclusions, writing—original draft preparation and writing—review and editing.

References

Altay, M. K., Akyüz, E. Ö., & Erhan, G. K. (2014). A study of middle grade students' performances in mathematical pattern tasks according to their grade level and pattern presentation context. *Procedia – Social and Behavioural Sciences*, *116*, 4542–4546. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.982

Amaya, T. (2020). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores de matemáticas en el desarrollo de una clase utilizando funciones [Evaluation of the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of future mathematics teachers in a class development using functions]. *Bolema, 34*(66), 110-131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de la superficie bajo una curva [Student profiles in understanding the approximation to the surface area under a curve]. In C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 123-131). SEIEM

Ariza, A., & Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad [The usefulness of derivative concept in learning economic concepts by high school and university students]. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 121-136. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

Biza, I., Hewitt, D., Watson, A., & Mason, J. (2020). Generalization strategies in finding the nth term rule for simple quadratic sequences. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 1105–1126. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10009-0

Boigues, F. J., Llinares, S., & Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza [Development of a scheme of the definite integral in engineering students related to natural sciences]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 129–158.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria [Secondary school students' flexibility when solving problems of recognition of lineal patterns]. *Bolema, 28*(48), 64–88.https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* [Description and characterization of inductive reasoning used by high school students when solving tasks related to linear and quadratic sequences] [Unpublished doctoral dissertation]. Universidad de Granada.

Codes, M., González Astudillo, M. T., Delgado Martín, M. L., & Monterrubio Pérez, M. C. (2013). Growth in the understanding of infinite numerical series: A glance through the Pirie and Kieren theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 652-662. https://doi.org/jnk6

Codes, M., & González-Martín, A. S. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: Un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS [Sequence of partial sums as an infinite iterative process: A step towards the understanding of numerical series from an APOS perspective]. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(1), 89-110. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Djasuli, M., Sa'dijah, C., Parta, I. N., & Daniel, T. (2017). Students' reflective abstraction in solving number sequence problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education,12*(3), 621–632. https://doi.org/jnk7

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación [A crucial issue in mathematics education: The ability to change the register of representation]. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos [Cognitive conditions of geometry learning. Development of visualization, differentiation of reasoning, coordination of its functions]. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [Semiosis and human thought: Semiotic registers and intellectual learning] (2nd ed.). Universidad del Valle.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalisation type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197–215. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1068391

García, M., Llinares, S., & Sánchez–Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1023–1045. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9227-2

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178–203). Routledge.

González, M. T., & Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE [Understanding the definite integral in the framework of APOE theory]. In A. Contreras & L. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). SEIEM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.

Mamona, J. (1990). Sequences and series–Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), 333–337.

McDonald, M. A., Mathews, D. M., & Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, J. Kaput, C. Kessel & M. Keynes (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 77–102). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/008/05

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2018). Transformations in the visual representation of a figural pattern. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(2), 91-107. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1441599

Moyer-Packenham, P. S. (2005). Using virtual manipulation to investigate patterns and generate rules in algebra. *Teaching Children Mathematics, 11*(8), 437–444. https://doi.org/10.5951/TCM.11.8.0437

Official State Bulletin. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 3 del 3 de enero de 2015* [Royal Decree 1105/2014, of December 26, establishing the minimum teachings corresponding to Compulsory Secondary Education. BOE, 3 of January 3, 2015]. Ministerio de Educación y Ciencia.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 1-18. https://doi.org/10.1007/BF00704699

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto [Understanding the approximation to a number in accessing the meaning of limit of a function at a point]. In A. Estepa, Á. Contreras, J.Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). SEIEM.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(7), 805–823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer. https://doi.org/jnk8

Rivera, F. D., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalisations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*, 65–82. https://doi.org/d4nqnk

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. [The development of the derivative scheme]. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3816

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24–36.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114- 145. https://doi.org/10.2307/749205

Stewart, J., Hernández, R., & Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al cálculo* [Introduction to calculus]. S.A. Ediciones Thomson.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support eight year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171–185. https://doi.org/fgftwp

Žakelj, A., & Klančar, A. (2022). The role of visual representations in geometry learning. *European Journal of Educational Research, 11*(3), 1393-1411. https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.3.1393