UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

UNIVERSALIDAD: U–OPERADORES Y SUCESIONES DE OPERADORES DIFERENCIALES

Memoria presentada por
José Antonio Prado Tendero
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº
del Director

Fdo. Luis Bernal González
Profesor Titular de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Enero de 2003

AGRADECIMIENTOS

A dos personas sin cuya aportación esta memoria nunca se hubiera realizado: Luis, el Director y amigo, ¡cuánta paciencia has tenido!, jamás olvidaré tu desinteresada entrega y el tiempo que te he robado. Y Valme, tu tozudez y cariño fueron esenciales para que no abandonase en aquellos momentos en que las fuerzas flaqueaban.

A mis compañeros que no dudaron que este trabajo tendría algún día un final feliz, en especial a dos de ellos, Carmen y José Antonio, mi hijo, que han contribuido de manera especial con su ayuda, consejos y atinadas críticas.

Al Departamento de Análisis Matemático, que puso todos los medios posibles a mi disposición.

A mi familia, que tuvo que soportarme en mis malos momentos, que fueron muchos.

Y por último a mi padre, que aunque físicamente hace mucho tiempo que no está conmigo, le estoy oyendo decir: ¡no está mal!

Índice general

Introducción

El estudio de la Universalidad, considerado desde el punto de vista del Análisis Funcional, apenas cuenta con 20 años de existencia, de los cuales cabe destacar los tres últimos, en los que tal estudio ha experimentado un gran desarrollo. Baste observar que en el artículo expositivo [50] de K.-G. Grosse-Erdmann, publicado en el año 1999, se citan alrededor de 250 artículos sobre el tema, mientras que sólo entre el 2000 y el 2002 han sido al menos 125 los trabajos publicados. Con la presente memoria, nuestra pequeña contribución a este tema se centra fundamentalmente en el ámbito de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, aunque también nos sumergimos a veces en la teoría general de espacios vectoriales topológicos, sobre todo a la hora de establecer criterios sobre varios tipos de universalidad.

La Universalidad es un fenómeno dinámico que aparece cuando nos encontramos con una autoaplicación continua T de un espacio topológico con una órbita densa. Tal autoaplicación puede ser vista como un sistema dinámico discreto si consideramos las actuaciones sucesivas

$$x \mapsto Tx \mapsto T^2x \mapsto \cdots$$

de las iteradas de T sobre un elemento x del espacio. No obstante, también tiene sentido el estudio de la universalidad para sucesiones (T_n) de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos, en general distintos, y de hecho ya ha habido aplicaciones de tal estudio. En general, al considerar la universalidad en algún fenómeno, se busca la existencia y/o construcción de un elemento que mediante un proceso, por lo general numerable, permite aproximar un gran número de otros elementos. Una investigación ulterior se suele encaminar a la búsqueda de alguna estructura "razonable" para el conjunto de tales elementos "aproximantes".

Desde el punto de vista de la aproximación de funciones analíticas de variable compleja, el primer caso de universalidad fue observado en 1929 por G.D. Birkhoff [26], el cual probó la existencia de una función entera f universal en el sentido de que su sucesión de trasladadas aditivas $\{f(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en el espacio $\mathcal{E}$ de las funciones enteras sobre el plano complejo $\mathbb{C}$. A partir de ahí se ha escrito una gran cantidad de artículos relacionados con este aspecto u otros similares, consiguiendo en muchos casos resultados inesperados. Hacemos una pequeña historia de alguno de tales aspectos, dirigida a motivar la investigación efectuada en esta memoria.

En 1941 W.P. Seidel y J.L. Walsh [79] extendieron el teorema de Birkhoff a las traslaciones no euclídeas del disco unidad $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

A mediados de los años 80 Duios Ruis, Gethner, Shapiro y Grosse-Erdmann probaron la existencia de un conjunto residual, es decir, topológicamente enorme, de funciones universales en el sentido de Birkhoff (ver [39], [45] y [48]).

En 1989 Zappa [83] estableció también un resultado análogo al de Birkhoff, esta vez para el plano perforado $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zappa probó la existencia de una función holomorfa f en $\mathbb{C}^*$ con la propiedad de que para cada compacto $K \subset \mathbb{C}^*$ con complemento conexo, el conjunto de las trasladadas multiplicativas $\{f(cz) : c \in \mathbb{C}^*\}$ es denso en el espacio de las funciones holomorfas en el interior K^0 de K y continuas en K.

Distintas generalizaciones de los teoremas de Birkhoff y Seidel–Walsh han sido estudiadas por varios autores y por varios caminos. En esta línea de investigación, Bernal y Montes [24] han considerado los operadores de composición C_φ sobre el espacio $H(G)$ de las funciones holomorfas sobre un dominio $G \subset \mathbb{C}$, donde φ es un automorfismo de G. En [24] se identifican las sucesiones (φ_n) de automorfismos de G que permiten la existencia de funciones universales respecto de (C_{φ_n}). A tales sucesiones se las llamó *sucesiones fugitivas*, y basta exigirles una condición puramente topológica –que la acción de (φ_n) sea propiamente discontinua en G– para que exista un conjunto residual de funciones universales holomorfas en G. Dichos autores han caracterizado las sucesiones fugitivas de automorfismos de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ y $\mathbb{D}$.

Volviendo por un momento atrás en el tiempo, MacLane [67] probó en 1952 la existencia de una función entera cuyas derivadas forman un subconjunto denso de $\mathcal{E}$. En otras palabras, el operador derivada $D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es hipercíclico (la palabra "hiperciclicidad" es sinónima de "universalidad" cuando las aplicaciones consideradas son lineales). A partir de ese momento, varios autores han trabajado en problemas relativos a la hiperciclicidad de operadores diferenciales o relacionados con ellos. En especial se debe mencionar el resultado de Godefroy y Shapiro [46], quienes en 1991 mostraron que si T es un operador en $\mathcal{E}$ que conmuta con cada operador de traslación, entonces T es hipercíclico si no es un múltiplo de la identidad. La afirmación es también válida para varias variables complejas. Este resultado engloba tanto al de Birkhoff ($T = \tau_a =$ traslación por el vector a) como al de MacLane ($T = D$), con lo que quedaban unificados los dos ejemplos más clásicos de universalidad en Análisis Complejo.

En 1994 Bernal [13] obtiene condiciones para la hiperciclicidad de sucesiones de operadores $(c_n D^n)$ en $H(G)$, donde (c_n) es una sucesión compleja.

Posteriormente, Calderón [34] en 2001 reemplaza cada c_n por una función holomorfa $c_n(z)$.

En 1999 Bernal [18] establece un criterio de hiperciclicidad por autovalores, con el que consigue generalizar el teorema de Godefroy y Shapiro anteriormente citado. En [18] también se estudia la hiperciclicidad de operadores y de sucesiones de operadores diferenciales y antidiferenciales de orden infinito en el espacio de las funciones holomorfas sobre un dominio de Runge $G \subset \mathbb{C}^N$.

Por último, centramos nuestra atención en un resultado de Luh del año 1996 [62, Theorem] que mejora los resultados de Birkhoff y de Zappa pero bajo otro punto de vista. En [62] Luh consigue que la función universal f en el sentido de Birkhoff y Zappa se reemplace por el resultado de la acción sobre f de los operadores de diferenciación y antidiferenciación sin perder su carácter universal, y además, la función f se puede elegir entera, incluso en el caso en que el dominio no sea todo el plano $\mathbb{C}$. En el año 2000, Tenthoff [81] generalizó el teorema de Luh sustituyendo las sucesiones $(z+a_n)$ y $(a_n z)$ por ciertas sucesiones $(S_n(z))$, no necesariamente holomorfas, definidas sobre ciertos subconjuntos de $\mathbb{C}$.

En esta memoria vamos a generalizar y mejorar algunos de los resultados anteriores. Para mejor orientación del lector, finalizamos con una breve descripción de los contenidos de la misma.

En el Capítulo 1, indicamos las notaciones y herramientas que utilizaremos en el desarrollo de la memoria así como los resultados fundamentales con los que trabajaremos.

En el Capítulo 2, proporcionamos una generalización del criterio de hiperciclicidad por autovalores y, como consecuencia, nuevas condiciones suficientes para la hiperciclicidad de una sucesión de operadores diferenciales de orden infinito. En concreto, como consecuencia de tales condiciones, se extiende el teorema de Birkhoff a varias variables, y se generaliza tanto el teorema de Godefroy y Shapiro como algunos resultados de Bernal contenidos en [13]. Además, se establecen condiciones necesarias y se analiza algún caso especial. También se proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la equicontinuidad –concepto que, en cierto sentido, es opuesto al de universalidad– y, en particular, se caracteriza completamente la equicontinuidad en $H(\mathbb{C}^N)$. Los contenidos de este capítulo están publicados en [25].

El Capítulo 3 completa en cierto sentido el capítulo anterior, y en él estudiamos la superciclicidad, noción introducida por Hilden y Wallen [54] en 1974. Un operador se dice que es supercíclico cuando tiene alguna órbita proyectiva densa. Así que es un concepto intermedio entre ciclicidad (existencia de algún vector tal que la variedad lineal generada por su órbita es densa) e hiperciclicidad. El estudio de tales operadores ha experimentado un gran desarrollo en los últimos años. Lógicamente, como en el caso de la hiperciclicidad, tal estudio fuerza al investigador a buscar criterios "practicables" de superciclicidad. Varios autores –Salas, Montes, Bermúdez, Bonilla, Peris, Feldman, V. Miller, L. Miller, entre otros– han proporcionado recientemente algunos de tales criterios. Aquí trataremos el concepto de sucesión supercíclica e introduciremos la propiedad de la c-hiperciclicidad, que está situada entre la hiperciclicidad y la superciclicidad. Probaremos ciertos criterios de superciclicidad y c-hiperciclicidad por autovalores, que aprovecharemos para exhibir condiciones suficientes de superciclicidad y c-hiperciclicidad de una sucesión de operadores diferenciales en el espacio de las funciones holomorfas en un dominio. Obtendremos también condiciones necesarias para ambas propiedades. La relación entre los cuatro conceptos (hiperciclicidad, equicontinuidad, superciclicidad, c-hiperciclicidad) será ilustrada con ejemplos. Por último, se dan algunos resultados de existencia de funciones hipercíclicas y supercíclicas en espacios de funciones holomorfas más restringidos, generalizando así un reciente resultado de Costakis [36].

Finalmente, en el Capítulo 4, inspirado en el teorema de Luh antes citado, introducimos el nuevo concepto de U–operador sobre el espacio de las funciones enteras. Proporcionamos condiciones para que un operador T sea un U–operador y damos ejemplos concretos de U–operadores. En particular, estudiamos los operadores de composición y multiplicación, los operadores diferenciales y antidiferenciales y los operadores integrales generales, así como los operadores ponderados de desplazamiento. Por último, generalizamos y mejoramos un resultado de Luh, Martirosian y Müller de 1998 [64] sobre la existencia de funciones enteras universales con series de potencias lagunares. Las técnicas empleadas son muy distintas a las de estos autores, e incluyen el uso de teoremas de existencia de variedades "comunes" grandes de vectores hipercíclicos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notaciones y algunos teoremas útiles

A lo largo de esta memoria utilizaremos las siguientes notaciones, las cuales son bastante habituales:

- $\mathbb{N}$:= el conjunto de los números enteros positivos
- $\mathbb{Z}$:= el conjunto de los números enteros
- $\mathbb{R}$:= la recta real
- $\mathbb{C}$:= el plano complejo
- $\mathbb{K}$:= el conjunto de escalares ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ = el plano perforado
- $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ = el plano complejo extendido
- G := un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$
- ∂G := la frontera (en $\mathbb{C}$) de G

- $O(\partial G) := \{V \subset \mathbb{C} : \ V \text{ es abierto y } V \cap \partial G \neq \emptyset\}$
- $\mathcal{K}(G) :=$ la familia de subconjuntos compactos de G
- $\mathcal{M}(G) := \{K \in \mathcal{K}(G) : \ \mathbb{C} \setminus K \text{ es conexo}\}$
- $B(a,r) :=$ la bola euclídea abierta con centro a y radio r ($a \in \mathbb{C}$, $r > 0$), es decir, $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < r\}$
- $\overline{B}(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| \leq r\} =$ la bola euclídea cerrada de centro a y radio r
- $\mathbb{D} := B(0,1) =$ el disco unidad.

Notemos que $\mathcal{M}(G) = \{K \in \mathcal{K}(G) : G \setminus K \text{ es conexo}\}$ si G es conexo.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces denotaremos:

- diam(A)= [diámetro de A] $:= \sup\{|a-b| : \ a, b \in A\}$
- $A^0 =$ interior de A
- $\overline{A} =$ clausura de A
- Si g es una función compleja definida en A, $\|g\|_A := \sup\limits_{z \in A} |g(z)|$
- Si $B \subset \mathbb{C}$, $\text{dist}(A,B) := \inf\{|a-b| : \ a \in A, \ b \in B\}$.

Una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos de G se dice que es *exhaustiva* si $K_n \subset K_{n+1}^0$ ($n \in \mathbb{N}$) y $G = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Un subconjunto abierto G de $\mathbb{C}$ se dice que es un *dominio* si es no vacío y conexo. Si además su complemento con respecto al plano extendido $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ es conexo se dirá que G es un dominio *simplemente conexo*. Si $A \subset \mathbb{C}$, cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus A$ se dice que es un *agujero* de A.

Mediante $H(G)$ denotaremos, como es usual, el espacio de todas las funciones holomorfas en G, dotado de la topología τ_{uc} de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de G. Se sabe que la familia

$$\{V(f, K, \varepsilon): \ f \in H(G), \ K \in \mathcal{K}(G), \ \varepsilon > 0\},$$

donde

$$V(f, K, \varepsilon) = \{g \in H(G): \ |g(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in K\},$$

es una base de abiertos para τ_{uc}.

En el caso $G = \mathbb{C}$, denotaremos por $\mathcal{E}$ el espacio $H(\mathbb{C})$ de las funciones enteras.

Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, entonces $A(K)$ denotará el espacio vectorial $C(K) \cap H(K^0)$, el cual es un espacio de Banach cuando consideramos en él la norma del máximo.

En el caso N-dimensional ($N \in \mathbb{N}$) consideramos las siguientes notaciones. Por *multi-índice* entenderemos una N–tupla $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{N}_0^N$.

- D_j $(1 \leq j \leq N)$ es la derivada parcial compleja respecto de la j–ésima variable z_j.
- $|p| = p_1 + \cdots + p_N$.
- $p! = p_1! \cdots p_N!$.
- $D^p = D_1^{p_1} \circ \cdots \circ D_N^{p_N}$ (con $D_j^0 = I =$ el operador identidad, para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$).
- $|z| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{1/2}$, si $z = (z_1, \ldots, z_N)$.
- $z^p = z_1^{p_1} \cdots z_N^{p_N}$.
- Si $z = (z_1, \ldots, z_N)$ y $w = (w_1, \ldots, w_N)$, $zw = z_1 w_1 + \cdots + z_N w_N$.

Como en el caso unidimensional, un *dominio* es un subconjunto abierto, conexo y no vacío de $\mathbb{C}^N$. Un dominio $G \subset \mathbb{C}^N$ se dice que es un *dominio* *de Runge* (ver [57] o [59]) si y sólo si toda función holomorfa en G se puede aproximar por polinomios uniformemente en compactos de G. La notación $H(G)$ tiene el mismo significado que en el caso de una variable. Si $N = 1$, notemos que G es un dominio de Runge si y sólo si es simplemente conexo.

Un espacio topológico X se dice que es un *F-espacio* si es un espacio vectorial topológico metrizable y completo. Si además es localmente convexo se dice que X es un *espacio de Fréchet.* Por ejemplo, $H(G)$ es un espacio de Fréchet.

En un espacio topológico X, un subconjunto A se dice que es

- *denso en ninguna parte* cuando $\overline{A}^0 = \emptyset$,
- *de primera categoría* (de Baire) cuando A se puede expresar como una unión numerable de subconjuntos de X densos en ninguna parte,
- *de segunda categoría* (de Baire) cuando no sea de primera categoría.

Un espacio topológico X se dice que es un *espacio de Baire* si y sólo si cada abierto no vacío es de segunda categoría. Ello equivale a que la intersección de cualquier familia numerable de abiertos densos es de nuevo densa. Se tiene:

Teorema 1.1.1. (Teorema de Baire) *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Entonces, por ser $H(G)$ un espacio métrico completo, obtenemos:

Corolario 1.1.2. *$H(G)$ es un espacio de Baire.*

Recordemos que un subconjunto $A \subset X$ se dice que es un G_δ cuando es intersección numerable de subconjuntos abiertos. En un espacio de Baire X, un subconjunto es *residual* cuando contiene algún G_δ denso, o lo que es equivalente, cuando su complemento es de primera categoría. Un tal conjunto es, por tanto, "muy grande" en X, ver [72, pp. 40–41].

Vamos a recordar a continuación dos teoremas fundamentales de aproximación en Variable Compleja que resultarán imprescindibles en el desarrollo de la memoria: el teorema de Runge [76, Capítulo 13] y el teorema de Mergelyan ([43, pp. 97–109] y [76, Capítulo 20]).

Teorema 1.1.3. (Teorema de Runge)

(a) *Sean K un subconjunto compacto de un abierto G de $\mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f \in H(G)$ y A un conjunto constituido por un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Entonces existe una función racional R tal que* $\{\text{polos de } R\} \subset A$ *y* $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ *para todo* $z \in K$.

(b) *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in H(G)$ y A un subconjunto constituido por un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus G$. Entonces existe una sucesión de funciones racionales $\{R_n\}$ con polos sólo en A, tal que*

$$R_n \to f \quad (n \to \infty) \text{ en } H(G).$$

(c) *Si $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo, entonces el conjunto de los polinomios es denso en $H(G)$.*

Teorema 1.1.4. (Teorema de Mergelyan) *Sean $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto tal que $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, $f \in A(K)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un polinomio $P(z)$ tal que $|P(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.*

1.2. Universalidad: definiciones y primeros resultados

Comencemos con algunos conceptos sencillos sobre dinámica de operadores.

Si X, Y son dos espacios vectoriales topológicos, un *operador* de X en Y es una aplicación lineal y continua $T : X \to Y$.

Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos, $T_i : X \to Y$ ($i \in I :=$ conjunto arbitrario de índices) una familia de operadores y $x \in X$. Se dice que x es *hipercíclico* o *universal* para (T_i) si su órbita $\{T_i x : i \in I\}$ para (T_i) es densa en Y. La familia (T_i) se dice *hipercíclica* siempre que tenga un vector hipercíclico. En el caso $I = \mathbb{N}$ obtenemos que, para que una sucesión (T_n) pueda ser hipercíclica, Y debe ser *separable.*

Vayamos al caso $X = Y$. Si $T : X \to X$ es un operador en X, un vector $x \in X$ se dice *hipercíclico* para T si y sólo si es hipercíclico para la sucesión (T^n) de iteradas de T, es decir, $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n veces). El operador T es *hipercíclico* cuando existe un vector hipercíclico para T.

Por $HC(T)$ y $HC((T_i))$ representamos, respectivamente, el conjunto de vectores hipercíclicos de un operador T y de una familia $T_i : X \to Y$ ($i \in I$) de aplicaciones lineales continuas.

Un subconjunto A de X se dice que es *invariante* bajo T cuando $T(A) \subset A$. Es evidente que un vector $x \in X$ es hipercíclico para T si y sólo si no existe ningún subconjunto propio de X cerrado e invariante por T que contenga a x. Luego el estudio de la hiperciclicidad está directamente relacionado con la existencia de subconjuntos cerrados e invariantes. El *Problema del Subconjunto Invariante*, aún no resuelto para espacios de Hilbert, es por tanto equivalente al de hallar un operador T sobre un espacio de Hilbert tal que cada vector no nulo es hipercíclico para T.

El problema, planteado por Rolewicz [75], de la existencia de operadores hipercíclicos sobre un espacio de Banach separable infinito-dimensional fue resuelto afirmativa e independientemente por Ansari [6] y Bernal [17]. Bonet y Peris [32] extendieron el resultado a espacios de Fréchet.

Como comentábamos en la Introducción, en las dos últimas décadas se ha desarrollado una extensa literatura sobre el tema de la hiperciclicidad; una buena recopilación de la misma, actualizada hasta 1999, se debe a K.-G. Grosse-Erdmann [50].

Observemos que la propiedad de universalidad para sucesiones de operadores está de alguna manera inversamente relacionada con la propiedad de equicontinuidad. Si X, Y son dos espacios vectoriales topológicos no triviales y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión equicontinua de operadores de X en Y, entonces no es difícil ver que la órbita $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ de cada elemento $x \in X$ está acotada. Por tanto, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es universal. El recíproco es falso en general, aunque se conocen casos (por ejemplo, [13, Theorem 4]) en que es cierto.

Una sucesión $T_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ de aplicaciones lineales continuas se dice *densamente hipercíclica* cuando $HC((T_n))$ es denso en X. Decimos que (T_n) es *hereditariamente hipercíclica* cuando (T_{n_k}) es hipercíclica para cada sucesión $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. Por último, (T_n) se dice *densamente hereditariamente hipercíclica* cuando (T_{n_k}) es densamente hipercíclica para cada sucesión (n_k) como antes. Ya que todo operador hipercíclico $T : X \to X$ tiene rango denso, se tiene que todo operador hipercíclico T cumple que $HC(T)$ es denso; además, si una subsucesión (T^{n_k}) es hipercíclica, entonces es también densamente hipercíclica. Más en general, si (T_n) es una sucesión hipercíclica (resp., hereditariamente hipercíclica) que conmuta (es decir, $T_n T_m = T_m T_n$ para todo m, n) y cada T_n tiene rango denso, entonces (T_n) es densamente hipercíclica (resp., densamente hereditariamente hipercíclica), cfr. [50, Proposition 1]. Por otra parte, si X es de Baire e Y es segundo numerable (o equivalentemente, Y es metrizable y separable), entonces $HC((T_n))$ es residual en X si y sólo si es denso en X si y sólo si $HC((T_n))$ es un G_δ denso, ver [50, Theorem 1].

El concepto de superciclicidad, más débil que el de hiperciclicidad, será recordado y estudiado en el Capítulo 3.

Vamos a dar a continuación un criterio de hiperciclicidad, cuya demostración puede verse en [50]. Diversas versiones de este resultado pueden encontrarse en [45, Section 2], [46, Section 1], [48, Satz 1.2.2] y [58, Theorem 2.1]. El criterio resultará de gran utilidad en el Capítulo 2.

Lema 1.2.1. *Sean X un espacio vectorial topológico de Baire, Y un espacio vectorial topológico separable y metrizable y $T_n : X \to Y$ ($n \in \mathbb{N}$) aplicaciones lineales continuas. Supongamos que existen subconjuntos densos X_0 de X e Y_0 de Y y aplicaciones $S_n : Y_0 \to X$ tales que*

(a) *Para todo $x \in X_0$, existe una sucesión creciente $(n_k) = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ de enteros positivos con $T_{n_k}x \to 0$ ($k \to \infty$).*

(b) *Para todo $y \in Y_0$, $(S_n y)$ converge.*

(c) *Para todo $y \in Y_0$, $T_n S_n y \to y$ ($n \to \infty$).*

Entonces (T_n) es densamente hipercíclica.

Tal como se hace observar en [50, Remark 2], si todos los límites de (b) son cero entonces podemos debilitar (a) poniendo: *Para todo $x \in X_0$, existe una sucesión creciente $(n_k) = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ de enteros positivos tal que $(T_{n_k}x)$ converge.* Además, el cuantificador "$\exists(n_k)$" puede desplazarse de (a) a (b), o bien de (a) a (c).

Hemos de añadir aquí que muy recientemente Bonilla, Bermúdez y Peris [9] han demostrado que, en el caso $X = Y$ y para sucesiones conmutativas (es decir, $T_nT_m = T_mT_n$ para todo m, n), el criterio expresado en el Lema 1.2.1 es equivalente en esencia a un útil y conocido criterio de universalidad aparentemente más fuerte en el que las hipótesis son la existencia de X_0, Y_0 densos, de aplicaciones $S_k : Y_0 \to X$ y de una sucesión $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ tales que $T_{n_k} \to 0$ puntualmente en X_0, $S_k \to 0$ puntualmente en X_0 y $T_{n_k}S_k \to I$ puntualmente en Y_0. En [23] y [28] pueden verse otras condiciones equivalentes a las mencionadas aquí.

Observación 1.2.2. Bajo las mismas hipótesis del Lema 1.2.1 para X e Y, se puede probar (ver, por ejemplo [13, Theorem A]) que la siguiente condición es también suficiente para que $HC((T_n))$ sea residual: *Existen subconjuntos densos X_0 de X e Y_0 de Y con la propiedad de que para cada $x \in X_0$ y cada $y \in Y_0$ existe una sucesión creciente (n_k) de enteros positivos y una sucesión $(x_k) \subset X$ tales que $x_k \to 0$, $T_{n_k}x \to 0$ y $T_{n_k}x_{n_k} \to y$ cuando $k \to \infty$.*

Finalmente, usando este último resultado, Bernal estableció en [18, Theorem 7] el siguiente criterio de hiperciclicidad por autovalores. En los Capítulos 2 y 3 de esta memoria probaremos diversas variantes y extensiones del mismo, las cuales serán de gran utilidad para detectar la hiperciclicidad y superciclicidad de sucesiones de operadores diferenciales. Recordemos primero que, en un espacio vectorial topológico, decimos que un subconjunto es *total* si su subespacio lineal generado es denso. Si T es un operador y e es un autovector, $\lambda(T, e)$ denotará su correspondiente autovalor.

Teorema 1.2.3. *Sea X un espacio vectorial topológico de Baire metrizable y separable, y sean T, T_n ($n \in \mathbb{N}$) operadores sobre X.*

(1) *Supongamos que existen dos subconjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de X que verifican:*

(a) *Para todo par de subconjuntos finitos* $\mathcal{F}_1 \subset A$ *y* $\mathcal{F}_2 \subset B$ *existe una sucesión* $\{n_k\}$ *de enteros positivos tal que cada elemento de* $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ *es un autovector para cada* T_{n_k} *de tal modo que* $\lim_{k\to\infty} \lambda(T_{n_k}, a) = 0$ *para todo* $a \in \mathcal{F}_1$ *y* $\lim_{k\to\infty} \lambda(T_{n_k}, b) = \infty$ *para todo* $b \in \mathcal{F}_2$.

(b) $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son totales en* X.

Entonces (T_n) *es densamente hipercíclica.*

(2) *Supongamos que existen dos subconjuntos* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *de* X *que verifican:*

(a) *Todo elemento de* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *es un autovector para* T *de tal modo que* $|\lambda(T, a)| < 1$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$ *y* $|\lambda(T, b)| > 1$ *para todo* $b \in \mathcal{B}$.

(b) $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son totales en* X.

Entonces T *es hipercíclico.*

De hecho, en el apartado (2), T resulta ser hereditariamente hipercíclico, en el sentido de que lo es la sucesión de sus iteradas (T^n).

1.3. Operadores diferenciales y antidiferenciales

Vamos a suponer en este apartado que G es un dominio, en principio de $\mathbb{C}$. Después se permitirá que sea de $\mathbb{C}^N$.

Si $f \in H(G)$ y $j \in \mathbb{N}_0$ denotaremos, como es usual, por $f^{(j)}$ la derivada de orden j de f. Se tiene que la aplicación definida por

$$\begin{array}{rccc} D^j : & H(G) & \to & H(G) \\ & f & \mapsto & D^j f = f^{(j)} \end{array}$$

es lineal y continua. Así, D^j es un operador (en $H(G)$) llamado operador derivada de orden j. En particular, $D^0 = I =$ el operador identidad.

Para definir el operador antiderivada nos hace falta suponer que G es un dominio simplemente conexo. Dado $a \in G$ y $k \in \mathbb{N}$, el operador antiderivada de orden k (con respecto a a) $D_a^{-k} = D^{-k} : H(G) \to H(G)$, se define por $D^{-k}f =$ la única antiderivada g de orden k de f tal que

$$g^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, \ldots, k-1).$$

Denotaremos $D^{-0} = I =$ el operador identidad.

Establecemos a continuación sin demostración el siguiente bien conocido resultado para referencias futuras.

Lema 1.3.1. *Sea $a \in G$. Dado $k \in \mathbb{N}$, se verifica*

$$(D^{-k}f)(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)\, dt \qquad (z \in G,\ f \in H(G)),$$

donde la integral está tomada a lo largo de cualquier curva rectificable contenida en G que una a con z. El operador D^{-k} está bien definido y es un operador en $H(G)$ que cumple

$$(D^{-k}f)^{(j)} = D^{-k+j}f \qquad \textit{para } j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Como dijimos en la Introducción, la universalidad de la familia de operadores $\{D^n\}_{n=1}^{\infty}$ ha sido ampliamente estudiada. En 1952, G.R. MacLane [67] mostró que existen vectores $\{D^n\}_{n=1}^{\infty}$–universales en $H(\mathbb{C})$, o en otras palabras, que el operador D es hipercíclico en $H(\mathbb{C})$. Dicho resultado fue de nuevo obtenido con una prueba más corta por C. Blair y L.A. Rubel [29]. Más tarde, S.M. Duios Ruis [39] probó que el conjunto de funciones enteras hipercíclicas para D es residual. Dicho resultado fue también conseguido, para dominios simplemente conexos, por R.M. Gethner y J.H. Shapiro [45] y Grosse–Erdmann [48, Satz 2.2.8].

Diversos autores han construido, sobre $\mathbb{C}$ o subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, funciones D–hipercíclicas con propiedades adicionales. Citemos algunos de tales resultados: el menor tipo de crecimiento posible para funciones enteras fue establecido independientemente por Grosse–Erdmann [49] y S.A. Shkarin [80]; funciones hipercíclicas enteras sin ceros fueron obtenidas por G. Herzog [55] y Bernal [16]; con otros tipos de universalidad por Blair y Rubel [29], Duios Ruis [39], W. Luh [62, 63]; con propiedades de univalencia por I. Schneider [78]. Otros resultados sobre hiperciclicidad de operadores relacionados con D han sido estudiados por V. Mathew [70], Bernal [13, 15] y A. Peris [73]. En particular, en [13] se estudia la universalidad en $H(G)$ de la sucesión de operadores $\{c_n D^n\}$, donde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos y G es un dominio simplemente conexo.

En cuanto al operador antiderivada, es claro que ninguna función $f \in H(G)$ puede ser $\{D^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$-universal. Sin embargo, en [29] se demuestra la existencia de una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ que satisface la propiedad siguiente: *Para toda función entera* Φ *el conjunto* $\{Q_n(z) = D^{-n}\Phi(z) + \sum_{j=0}^{n-1}(C_{n-j}/j!)z^j \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ *es denso en* $H(\mathbb{C})$. Luh [61] extendió este resultado a funciones Φ holomorfas en un conjunto abierto con componentes simplemente conexas. En [13] también se generalizan estos resultados a la sucesión de operadores $\{c_n D^{-n}\}$ con $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Asimismo, se estudia en tal trabajo la equicontinuidad de $\{c_n D^n\}$ y $\{c_n D^{-n}\}$. Más tarde, Calderón [34] reemplaza cada c_n por una función holomorfa $c_n(z)$.

Vamos a recordar algunos hechos sobre los operadores diferenciales de orden infinito en $\mathbb{C}^N$.

Recordemos que para $1 \leq j \leq N$, D_j denota la diferencial parcial compleja respecto de la j-ésima coordenada, y que si $p = (p_1, \ldots, p_N)$ es un multi-índice, $D^p = D_1^{p_1} \circ \cdots \circ D_N^{p_N}$.

Una función entera $\Phi(z) = \sum_{|p|\geq 0} a_p z^p$ sobre $\mathbb{C}^N$ se dice que es de *tipo* *exponencial* cuando existen dos constantes positivas A y B tales que

$$|\Phi(z)| \leq Ae^{B|z|} \quad (z \in \mathbb{C}^N).$$

Por las desigualdades de Cauchy, sabemos que esto ocurre si y sólo si existe $R \in (0, +\infty)$ para el cual

$$|a_p| \leq \frac{R^{|p|}}{p!} \quad (|p| \geq 0).$$

Para futuras referencias, llamamos $\mathbf{E}$ a la clase de todas las funciones enteras de tipo exponencial.

No es difícil ver que si $\Phi \in \mathbf{E}$ entonces la aplicación $\Phi(D) = \sum_{|p|\geq 0} a_p D^p :$ $H(\mathbb{C}^N) \to H(\mathbb{C}^N)$ está bien definida y es un operador en $H(\mathbb{C}^N)$. Nótese que si Φ es una función entera y $L = \Phi(D)$, entonces $L^n = \Phi^n(D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($L^n = L \circ \cdots \circ L$ (n veces), pero $\Phi^n = \Phi \cdots \Phi$ (n veces)).

Denotemos por τ_a $(a \in \mathbb{C})$ el operador de traslación $(\tau_a f)(z) = f(z + a)$ $(z \in \mathbb{C},\ f \in H(\mathbb{C}))$. Trivialmente, todo operador diferencial lineal con coeficientes constantes conmuta con las traslaciones. En [46, Section 5] se prueba también que los operadores en $H(\mathbb{C}^N)$ que conmutan con las traslaciones son exactamente los operadores diferenciales de orden infinito. En concreto, en tal artículo se demuestra lo siguiente.

Teorema 1.3.2. *Sea L un operador en $H(\mathbb{C}^N)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *L conmuta con todo operador de translación τ_a $(a \in \mathbb{C}^N)$.*

(b) *L conmuta con cada uno de los operadores D_k $(1 \leq k \leq N)$.*

(c) *$L = \Phi(D)$, donde Φ es una función entera en $\mathbb{C}^N$ de tipo exponencial.*

(d) *Existe una medida de Borel compleja μ sobre $\mathbb{C}^N$ de soporte compacto tal que* $L(f)(z) = \int_{\mathbb{C}^N} f(z+w)\,d\mu(w) \quad (z \in \mathbb{C}^N,\ f \in H(\mathbb{C}^N)).$

Una función entera $\Phi(z) = \sum_{|p|\geq 0} a_p z^p$ en $\mathbb{C}^N$ se dice que es de *tipo subexponencial* cuando cumple la siguiente propiedad: Dado $\varepsilon > 0$, existe una constante positiva $A = A(\varepsilon)$ tal que $|\Phi(z)| \leq Ae^{\varepsilon|z|}$ $(z \in \mathbb{C}^N)$.

Unos sencillos cálculos con series de potencias y las desigualdades de Cauchy [57, pág. 27] nos permiten asegurar que Φ es de tipo subexponencial si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe una constante positiva $A = A(\varepsilon)$ tal que

$$|a_p| \leq A\frac{\varepsilon^{|p|}}{p!} \quad (|p| \geq 0).$$

Observemos que si $N = 1$, entonces Φ es de tipo subexponencial si y sólo si Φ es de orden de crecimiento menor que uno o de orden de crecimiento igual a uno y tipo minimal. Es claro que toda función entera Φ de tipo subexponencial es también de tipo exponencial.

Es fácil probar que si $G \subset \mathbb{C}^N$ es un abierto no vacío y Φ es una función entera de tipo subexponencial, la serie $\Phi(D) = \sum_{|p|\geq 0} a_p D^p$ define un operador en $H(G)$.

Vamos a considerar ahora una nueva clase de operadores, a saber, los operadores antidiferenciales de orden infinito, ver por ejemplo [18]. Vamos a ver cómo se construyen.

A lo largo del resto de esta sección supondremos que $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo.

Si $\delta \in [0, +\infty)$, denotaremos por $S(\delta)$ el conjunto de todas las series formales de potencias $\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ tales que

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{|c_j|}{j!}\right)^{1/j} \leq \delta.$$

Observación 1.3.3. Observemos que incluso en el caso $\delta = 0$ podemos encontrar series $\Psi \in S(\delta)$ con radio de convergencia nulo: tomemos, por ejemplo, $\Psi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{j/2} z^j$.

Dado $a \in G$, definimos el número, finito o no, siguiente (ver [13]):

$$\Delta_a(G) = \sup_{z \in G} \inf \{r > 0 : \ a \text{ está en la componente conexa de } B(z,r) \cap G \text{ que contiene a } z\}.$$

A título de ejemplo, notemos dos propiedades de $\Delta_a(G)$ (ver [13] y [34] para más propiedades):

- $0 < \operatorname{dist}(a, \mathbb{C} \setminus G) \leq \sup_{z \in G} |z - a| \leq \Delta_a(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.
- G está acotado si y sólo si $\Delta_a(G)$ es finito.

Para terminar, enunciamos el siguiente teorema, que establece una condición bajo la cual un operador antidiferencial de orden infinito está bien definido. Su demostración puede encontrarse en [18].

Teorema 1.3.4. *Si $a \in G$ y $\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in S\left(\frac{1}{\Delta_a(G)}\right)$, entonces la serie*

$$\Psi(D^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j D^{-j}$$

define un operador sobre $H(G)$.

Capítulo 2

Sucesiones hipercíclicas de operadores diferenciales

2.1. Introducción

Recordemos que si $G \subset \mathbb{C}^N$ es un abierto no vacío y Φ es una función entera de tipo subexponencial, la serie $\Phi(D) = \sum_{|p| \geq 0} a_p D^p$ define un operador en $H(G)$. Si $G = \mathbb{C}^N$, se verifica el mismo resultado suponiendo sólo que $\Phi \in \mathbf{E}$.

Entonces $\Phi(D)$ define, en las anteriores condiciones, un operador diferencial lineal de orden infinito con coeficientes constantes. Ya hemos visto en el Capítulo 1 algunas caracterizaciones de este tipo de operadores (Teorema 1.3.2) en el caso $G = \mathbb{C}^N$. Godefroy y Shapiro prueban en [46, Section 5] que, si $\Phi \in \mathbf{E}$ es no constante, entonces $\Phi(D)$ es hipercíclico sobre $H(\mathbb{C}^N)$. Como consecuencia del Criterio de hiperciclicidad por autovalores (Teorema 1.2.3), Bernal obtuvo algunas extensiones del resultado de Godefroy–Shapiro [18, Theorems 8–9] sobre la hiperciclicidad de una *sucesión* de operadores $(\Phi_n(D))$ definidos en el espacio de las funciones holomorfas en un dominio de Runge G de $\mathbb{C}^N$. En [13] ya se había estudiado un caso particular; a saber, se establecen condiciones para la hiperciclicidad de una sucesión $(c_n D^n)$, con $(c_n) \subset \mathbb{C}$. También se investiga en [13] la equicontinuidad de tales operadores, ver asimismo [11].

Nuestro objetivo en este capítulo es proporcionar nuevas condiciones suficientes y nuevas condiciones necesarias para la hiperciclicidad de una sucesión de operadores diferenciales de orden infinito. Para ello, establecemos una generalización adecuada del criterio de los autovalores. También estudiaremos la equicontinuidad de familias de operadores diferenciales.

Veamos algunas notaciones y resultados que necesitaremos en este capítulo.

Decimos que un subconjunto $S \subset \mathbb{C}^N$ es un *conjunto de* **E***–unicidad* cuando verifica: Si $f \in \mathbf{E}$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in S$ entonces $f \equiv 0$.

Señalemos que, por el Principio de identidad para funciones holomorfas, si f es una función entera *arbitraria* que se anula en S y S es un abierto no vacío (o con algún punto de acumulación si $N = 1$) entonces $f \equiv 0$. Esto no es necesario para la clase **E**; por ejemplo, si $N = 1$ y $\chi := \limsup_{r\to\infty} \dfrac{\log n(r)}{\log r} > 1$, donde $n(r)$ es el número de puntos de $S \cap \{|z| \leq r\}$, entonces S es un conjunto de **E**–unicidad (v. gr., si $S = \{n^{1/2} : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\chi = 2$). En efecto, si $f \not\equiv 0$, la última condición implicaría que el exponente de convergencia de la sucesión de ceros de f es mayor estrictamente que el grado de crecimiento de f, lo que es imposible, ver por ejemplo [69].

Por último, incluimos un lema que necesitaremos más adelante, pero previamente introduciremos dos notaciones más:

- Si $c \in \mathbb{C}^N$, llamamos $e_c(z) := \exp(cz)$.
- Si $c \in \mathbb{C}^N$, denotamos $M(S) := \{e_c : c \in S\}$.

Lema 2.1.1. *Si S es un conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad entonces $M(S)$ es total en $H(\mathbb{C}^N)$.*

Demostración. Fijamos un funcional $L \in H(\mathbb{C}^N)^*$ (= el espacio dual topológico de $H(\mathbb{C}^N)$) tal que $L(e_c) = 0$ para todo $c \in S$. Consideremos la transformada de Laplace $\widetilde{L}$ de L (ver [57, pág. 100]) dada por $\widetilde{L}(z) = L(e_z)$ $(z \in \mathbb{C}^N)$. Entonces es fácil ver que $\widetilde{L}$ es una función entera en $\mathbb{C}^N$ de tipo exponencial que se anula en S. Puesto que S es un conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad, tenemos $\widetilde{L} \equiv 0$. Entonces $(D^p\widetilde{L})(0) = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}_0^N$. Pero es fácil demostrar por inducción que

$$(D^p\widetilde{L})(0) = L(\alpha_p), \text{ donde } \alpha_p(t) = t^p \quad (t \in \mathbb{C}^N).$$

Por linealidad, L se anula en cada polinomio, luego $L \equiv 0$ porque el conjunto de los polinomios es denso en $H(\mathbb{C}^N)$. Resumiendo, si $L(f) = 0$ para todo $f \in M(S)$ entonces $L(f) = 0$ para todo $f \in H(\mathbb{C}^N)$. Por el teorema de Hahn–Banach, el subespacio lineal generado de $M(S)$ es denso en $H(\mathbb{C}^N)$ o, lo que es lo mismo, $M(S)$ es total. □

2.2. Un criterio de hiperciclicidad por autovalores

Si utilizamos el Lema 1.2.1 y su nota posterior, podemos probar el siguiente criterio de autovalores.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio vectorial topológico metrizable separable de Baire y sea (T_n) una sucesión de operadores definidos sobre X. Supongamos que existen dos subconjuntos totales $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de X que verifican, al menos, una de las siguientes condiciones:*

(A) *Para todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ existe una sucesión creciente (n_k) en $\mathbb{N}$ tal que todo elemento de $\mathcal{F}$ es un autovector para cada*

T_{n_k}, de modo que $\lambda(T_{n_k}, a) \to 0$ $(k \to \infty)$ para todo $a \in \mathcal{F}$. Además, todo elemento de $\mathcal{B}$ es un autovector para cada T_n tal que para todo $b \in \mathcal{B}$ la sucesión $(\lambda(T_n, b))$ converge a un escalar no nulo.

(B) *Para cada subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ existe una sucesión creciente (n_k) en $\mathbb{N}$ tal que para todo $a \in \mathcal{F}$ la sucesión $(\lambda(T_{n_k}, a))$ converge. Además, todo elemento de $\mathcal{B}$ es un autovector para cada T_n tal que para cada $b \in \mathcal{B}$, $\lambda(T_n, b) \to \infty$ $(n \to \infty)$.*

(C) *Todo elemento en $\mathcal{A}$ es un autovector para cada T_n, de modo que $\lambda(T_n, a) \to 0$ $(n \to \infty)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Además, para cada subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ existe una sucesión creciente (n_k) en $\mathbb{N}$ tal que todo elemento de $\mathcal{F}$ es un autovector para cada T_{n_k}, y de modo que, para cada $b \in \mathcal{F}$, la sucesión $(\lambda(T_{n_k}, b))$ converge a un escalar no nulo.*

(D) *Todo elemento en $\mathcal{A}$ es un autovector para cada T_n, de modo que para todo $a \in \mathcal{A}$ la sucesión $(\lambda(T_n, a))$ es convergente. Además, para cada subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ existe una sucesión creciente (n_k) en $\mathbb{N}$ tal que todo elemento de $\mathcal{F}$ es un autovector para cada T_{n_k} y $\lambda(T_{n_k}, b) \to \infty$ $(k \to \infty)$ para todo $b \in \mathcal{F}$.*

Entonces (T_n) es densamente hipercíclica.

Demostración. Como dijimos antes, vamos a aplicar el Lema 1.2.1 así como la nota que le sigue. Para ello hacemos: $X = Y =$ el espacio de Fréchet de la hipótesis, $X_0 = \mathrm{span}(\mathcal{A})$ e $Y_0 = \mathrm{span}(\mathcal{B})$; como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son totales, entonces X_0 e Y_0 son densos.

Para demostrar (A), fijado un vector $y \in Y_0$, podemos encontrar un número finito de vectores $\{b_1, \ldots, b_k\} \subset \mathcal{B}$ y de escalares $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \subset \mathbb{K}$ tales que $y = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j$. Podemos suponer que $\lambda(T_n, b_j) \neq 0$ para todo n y todo j. Definimos ahora las aplicaciones $S_n : Y_0 \to X$ de la forma

$$S_n y = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j b_j}{\lambda(T_n, b_j)}.$$

Tomamos ahora un vector $x \in X_0$. Como antes, existe un número finito de vectores $\mathcal{F} = \{a_1, \ldots, a_p\} \subset \mathcal{A}$ y de escalares $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subset \mathbb{K}$ tales que $x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_j$. Sea $(n_k) \subset \mathbb{N}$ la sucesión creciente obtenida de la hipótesis (A) aplicada a $\mathcal{F}$. Veamos que se verifican las tres condiciones (a)-(b)-(c) del Lema 1.2.1:

- $T_{n_k} x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda(T_{n_k}, a_j) a_j \to 0$ $(k \to \infty)$ dado que, por hipótesis, $\lambda(T_{n_k}, a) \to 0$ $(k \to \infty)$ para todo $a \in \mathcal{F}$, luego se verifica (a).

- Para cada $y \in Y_0$, $(S_n y)$ converge, ya que $S_n y = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j b_j}{\lambda(T_n, b_j)}$ y, por hipótesis, $(\lambda(T_n, b))$ converge a un escalar no nulo para todo $b \in \mathcal{B}$. Así que se verifica (b).

- Por último, para todo $y \in Y_0$,

$$T_n(S_n y) = T_n \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j b_j}{\lambda(T_n, b_j)} \right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j \lambda(T_n, b_j) b_j}{\lambda(T_n, b_j)} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j = y,$$

  por lo que, evidentemente, se verifica (c).

Para demostrar (B), procedemos de forma idéntica al apartado anterior, con la única diferencia que utilizamos la nota posterior al Lema 1.2.1, lo que es posible, ya que todos los límites $\lim_{n \to \infty} S_n y = 0$, debido a la construcción de y y a que, para cada $b \in \mathcal{B}$, $\lambda(T_n, b) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Para (C), desplazamos en el Lema 1.2.1 el cuantificador "$\exists n_k$" del apartado (a) al apartado (b), mientras que los vectores $a_1, \ldots, a_p$ están en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F} := \{b_1, \ldots, b_k\} \subset \mathcal{B}$, y se procede igual que en la demostración de (A).

Por último, (D) es igual que (C) pero con la variante dada en (B), lo que es posible dado que $\lambda(T_{n_k}, b) \to \infty$ $(k \to \infty)$ para todo $b \in \mathcal{F}$ por lo que todos los límites $\lim\limits_{n\to\infty} S_n y$ son nulos. $\square$

Antes de continuar, consideramos oportuno comentar un punto importante. Si $G \subset \mathbb{C}^N$ es un dominio de Runge y $\Phi \neq 0$ es una función entera de tipo subexponencial (o sólo $\Phi \in \mathbf{E}$ si $G = \mathbb{C}^N$) entonces la imagen $\Phi(D)(H(G))$ es densa porque, por el teorema de Malgrange–Ehrenpreis (ver [41] y [68]) la aplicación $\Phi(D) : H(\mathbb{C}^N) \to H(\mathbb{C}^N)$ es sobreyectiva, luego $\Phi(D)(H(G)) \supset \{\text{polinomios}\}$. Así que $\Phi(D)$ tiene rango denso. Ya que dos operadores diferenciales $\Phi(D)$, $\Psi(D)$ conmutan, resulta que una sucesión de operadores diferenciales $(\Phi_n(D))$ es conmutativa y cada miembro tiene rango denso, luego por un resultado debido a Peris (ver por ejemplo [50, Proposition 1]) se tiene que, al menos en un dominio de Runge, la sucesión $(\Phi_n(D))$ es hipercíclica si y sólo si es densamente hipercíclica.

Ahora vamos a exponer ocho condiciones que puede cumplir o no una sucesión $(\Phi_n) \subset H(\mathbb{C}^N)$. Pero antes, recordemos que si $\Phi(z) = \sum\limits_{|p|\geq 0} a_p z^p \in H(\mathbb{C}^N)$ y Φ no es idénticamente nula, su *multiplicidad* para el cero en el origen es $m(\Phi) = \min\{|p| : a_p \neq 0\}$. Observemos además que $\Phi(D)e_c = \Phi(c)e_c$ para todo $c \in \mathbb{C}^N$, luego e_c es un autovector de $\Phi(D)$ con autovalor $\Phi(c)$.

(P) Existen dos conjuntos de $\mathbf{E}$–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que para cada par de subconjuntos finitos $F_1 \subset A$ y $F_2 \subset B$ existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ con $\Phi_{n_k}(a) \to 0$ $(k \to \infty)$ para todo $a \in F_1$ y $\Phi_{n_k}(b) \to \infty$ $(k \to \infty)$ para todo $b \in F_2$.

(Q) Existe un conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad B en $\mathbb{C}^N$ tal que para todo subconjunto finito $F \subset B$ existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ con

$m(\Phi_{n_k}) \to \infty$ $(k \to \infty)$ y $\Phi_{n_k}(b) \to \infty$ $(k \to \infty)$ para todo $b \in F$.

(R) Existen dos conjuntos de **E**–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que para cada subconjunto finito $F \subset A$ existe una sucesión creciente (n_k) de enteros positivos con $\Phi_{n_k}(a) \to 0$ $(k \to \infty)$ para todo $a \in F$, y para todo $b \in B$ la sucesión $(\Phi_n(b))$ converge a un número complejo no nulo.

(S) Existe un conjunto de **E**–unicidad B en $\mathbb{C}^N$ tal que para cada $b \in B$ la sucesión $(\Phi_n(b))$ converge a un número complejo no nulo, y existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ con $m(\Phi_{n_k}) \to \infty$ $(k \to \infty)$.

(T) Existen dos conjuntos de **E**–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que para cada subconjunto finito $F \subset A$ existe una sucesión creciente (n_k) de enteros positivos que verifica que para cada $a \in F$ la sucesión $(\Phi_{n_k}(a))$ converge. Además, $\Phi_n(b) \to \infty$ $(n \to \infty)$ para todo $b \in B$.

(U) Existen dos conjuntos de **E**–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que $\Phi_n(a) \to 0$ $(n \to \infty)$ para todo $a \in A$, y para cada subconjunto finito $F \subset B$ hay una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ que verifica que para todo $b \in F$ la sucesión $(\Phi_{n_k}(b))$ converge a un número complejo no nulo.

(V) Existe un conjunto de **E**–unicidad B en $\mathbb{C}^N$ tal que para cada subconjunto finito $F \subset B$ existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ que verifica que para todo $b \in F$ la sucesión $(\Phi_{n_k}(b))$ converge a un número complejo no nulo. Además, $m(\Phi_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

(W) Existen dos conjuntos de **E**–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que para todo $a \in A$ la sucesión $(\Phi_n(a))$ converge, y para todo subconjunto finito $F \subset B$ existe sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ con $\Phi_{n_k}(b) \to \infty$ $(k \to \infty)$ para todo $b \in F$.

Estamos en condiciones de enunciar nuestro siguiente resultado. En adelante, Φ y Φ_i ($i \in I :=$ un conjunto arbitrario de índices) serán funciones enteras de tipo subexponencial si $G \neq \mathbb{C}^N$ y de tipo exponencial si $G = \mathbb{C}^N$, donde G es un dominio en $\mathbb{C}^N$. De este modo, los operadores $\Phi(D)$, $\Phi_i(D)$ ($i \in I$) están bien definidos en $H(G)$.

Teorema 2.2.2. *Supongamos que G es un dominio de Runge de $\mathbb{C}^N$ y que (Φ_n) verifica al menos una de las condiciones* (P)–(W). *Entonces la sucesión de operadores $(\Phi_n(D))$ es densamente hipercíclica en $H(G)$.*

Demostración. Recordemos que por el Lema 2.1.1, el conjunto $M(S)$ es total en $H(\mathbb{C}^N)$ (luego lo es en $H(G)$, porque G es de Runge), siempre que S sea un conjunto de **E**–unicidad. Recordemos también que el conjunto $\{z^p : p \in \mathbb{N}_0^N\}$ es total en $H(G)$, porque el subespacio lineal generado es el conjunto de los polinomios. Hacemos $X = H(G)$ y $T_n = \Phi_n(D)$ ($n \in \mathbb{N}$). Entonces:

- Si (Φ_n) verifica (P), aplicamos la primera parte del Teorema 1.2.3 con $\mathcal{A} = M(A)$, $\mathcal{B} = M(B)$.
- Si (Φ_n) verifica (Q), aplicamos el mismo resultado con $\mathcal{A} = \{z^p : p \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\mathcal{B} = M(B)$.
- Si (Φ_n) verifica (R), aplicamos la condición (A) del Teorema 2.2.1 con $\mathcal{A} = M(A)$, $\mathcal{B} = M(B)$.
- Si (Φ_n) verifica (S), aplicamos la misma condición anterior pero haciendo $\mathcal{A} = \{z^p : p \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\mathcal{B} = M(B)$.
- Si (Φ_n) verifica (T), aplicamos la condición (B) del Teorema 2.2.1 con $\mathcal{A} = M(A)$, $\mathcal{B} = M(B)$.
- Si (Φ_n) verifica (U), aplicamos la condición (C) del Teorema 2.2.1 haciendo $\mathcal{A} = M(A)$, $\mathcal{B} = M(B)$.

- Si (Φ_n) verifica (V), aplicamos la condición de apartado anterior pero con $\mathcal{A} = \{z^p : p \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\mathcal{B} = M(B)$.

- Si (Φ_n) verifica (W), aplicamos la condición (D) del Teorema 2.2.1 con $\mathcal{A} = M(A)$, $\mathcal{B} = M(B)$.

En cualquier caso, alguno de los teoremas 1.2.3 ó 2.2.1 es aplicable, lo cual concluye la demostración. $\square$

Los Teoremas 8 y 9 de [18] eran sólo casos particulares del Teorema 2.2.2 bajo hipótesis más fuertes que (P) y (Q). En [18] se exigía que A y B fuesen abiertos no vacíos de $\mathbb{C}^N$ (si $N \geq 2$) o bien conjuntos con algún punto de acumulación (si $N = 1$).

Aportemos ahora varios ejemplos que ilustren el Teorema 2.2.2. Se puede comprobar que ninguna de las conclusiones de los siguientes ejemplos pueden ser derivadas de los Teoremas 8 y 9 de [18]. Pero antes debemos fijar algunos subconjuntos. Consideremos $S = \{n^{1/2} : n \in \mathbb{N}\}$ y sea (r_j) una sucesión de números reales positivos tales que los discos $\{|z - j^{1/2}| < r_j\}$ $(j \in \mathbb{N})$ son disjuntos dos a dos, por ejemplo, $r_j = 1/6j$. Definimos los conjuntos compactos $K_n := (L_n \cup S) \cap I_n$ $(n \in \mathbb{N})$, donde

$$I_n := [-n, n] \times [-n, n]$$

y

$$L_n := \mathbb{C} \setminus \left[((0, +\infty) \times (-1/n, 0)) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \{|z - j^{1/2}| < r_j/n\} \right].$$

Es fácil ver que cada K_n tiene complemento conexo. Definamos las funciones $f_n, g_n : K_n \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ como

$$f_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in L_n \cap I_n \\ n & \text{si } z \in S \cap I_n \end{cases}$$

y

$$g_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in L_n \cap I_n \\ 0 & \text{si } z \in S \cap I_n. \end{cases}$$

Es claro que, para cada n, f_n y g_n son holomorfas en algún abierto que contiene a K_n y que depende de n. Entonces el teorema de Runge asegura la existencia de polinomios P_n, Q_n que verifican

$$||P_n - f_n||_{K_n} < 1/n \quad \text{y} \quad ||Q_n - g_n||_{K_n} < 1/n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Puesto que $L_n \cap I_n$ crece hasta $\mathbb{C} \setminus S$ y $S \cap I_n$ crece hasta S, cuando n tiende a infinito, las dos últimas desigualdades nos llevan a las siguientes convergencias puntuales: $P_n \to 1$ en $\mathbb{C} \setminus S$, $P_n \to \infty$ en S, $Q_n \to 1$ en $\mathbb{C} \setminus S$ y $Q_n \to 0$ en S si $n \to \infty$.

Ejemplos 2.2.3.

1. Existe un conjunto residual de funciones enteras f en $\mathbb{C}$ tal que cada función entera puede ser aproximada localmente uniformemente por funciones enteras de la forma

$$\sum_{j=0}^{n} A_{jn} f^{(j)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

donde $A_{nn} = 1$ y

$$A_{jn} = (-1)^{n-j} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-j} \le n} (i_1 \cdots i_{n-j})^{1/2} \quad (0 \le j \le n-1).$$

En efecto, es suficiente aplicar el Teorema 2.2.2 con la condición (P) o la condición (T) haciendo $A = S$, $B = \mathbb{C} \setminus S$, $\Phi_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - j^{1/2})$ $(n \in \mathbb{N})$ (usar las relaciones de Cardano–Vieta).

2. El conjunto $HC((P_n(D)))$ es residual en $H(\mathbb{C})$ porque se puede aplicar el Teorema 2.2.2 con la condición (T) o (W) para los conjuntos $A = \mathbb{C} \setminus S$, $B = S$.

3. El conjunto $HC((Q_n(D)))$ es residual en $H(\mathbb{C})$ porque se puede aplicar el Teorema 2.2.2 con la condición (R) o (U) para los conjuntos $A = S$, $B = \mathbb{C} \setminus S$.

En su artículo, Birkhoff [26] esencialmente demostró que dada una sucesión no acotada $(a_n) \subset \mathbb{C}$ existe una función entera en $\mathbb{C}$ tal que el conjunto de traslaciones $\{f(z + a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, es decir, la sucesión (τ_{a_n}) es hipercíclica (de hecho, la sucesión (a_n) depende de una particular función entera para ser aproximada; en [60] se muestra que esta dependencia no es necesaria). Su demostración constructiva puede ser aplicada a $\mathbb{C}^N$: ver, por ejemplo, [1] y [2]; ver también [4] para un resultado análogo para funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$. Como una rápida aplicación del último teorema visto aquí, obtendremos el teorema de Birkhoff en varias variables.

Teorema 2.2.4. *Sea $S \subset \mathbb{C}^N$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *S no está acotado.*

(b) *La familia de operadores $(\tau_a)_{a \in S}$ es hipercíclica en $H(\mathbb{C}^N)$.*

(c) *$HC((\tau_a)_{a \in S})$ es residual en $H(\mathbb{C}^N)$.*

(d) *$(\tau_a)_{a \in S}$ no es equicontinua en $H(\mathbb{C}^N)$.*

Demostración. Las implicaciones (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (d) son triviales. Si S está acotado, tomamos $M \in (0, +\infty)$ con $|a| \leq M$ para todo $a \in S$. Dado un entorno básico del origen $V(0, K, \varepsilon)$ en $H(\mathbb{C}^N)$, es claro que

$$\bigcup_{a \in S} \tau_a(V(0, L, \delta)) \subset V(0, K, \varepsilon),$$

donde $\delta = \varepsilon$ y $L = \{z + w : z \in K, \ |w| \leq M\}$. Luego $(\tau_a)_{a \in S}$ es equicontinua, por lo que (d) implica (a).

Para (a) $\Rightarrow$ (c), intentaremos aplicar el Teorema 2.2.2 con la condición (P) (es posible también usar el Teorema 8 de [18]). Por hipótesis, existe una sucesión $(a_n) \subset S$ con $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Supongamos que $a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nN})$ y $b_{nj} = \operatorname{Re} a_{nj}$, $c_{nj} = \operatorname{Im} a_{nj}$ $(j = 1, \ldots, N;\ n \in \mathbb{N})$. Tomando una subsucesión si fuese necesario, y tal vez usando una permutación de las variables $z_1, \ldots, z_N$ junto con un giro en la variable z_1 (las dos operaciones últimas generan automorfismos fijos de $H(\mathbb{C}^N)$ que conservan la hiperciclicidad), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b_{n1} \to \infty$ $(n \to \infty)$ y que existe una $2N$–tupla $(\varepsilon_1, \delta_1, \ldots, \varepsilon_N, \delta_N) \in \{0, 1\}^{2N}$ tal que

$$(a_n) \subset \Pi(\varepsilon_1, \delta_1, \ldots, \varepsilon_N, \delta_N) := \{z = (b_1 + ic_1, \ldots, b_N + ic_N) \in \mathbb{C}^N :$$
$$(-1)^{\varepsilon_1} b_1 \geq 0, (-1)^{\delta_1} c_1 \geq 0, \ldots, (-1)^{\varepsilon_N} b_N \geq 0, (-1)^{\delta_N} c_N \geq 0\}.$$

Tomamos

$$A = (\Pi(1 - \varepsilon_1, \delta_1, 1 - \varepsilon_2, \delta_2, \ldots, 1 - \varepsilon_N, \delta_N))^0$$

y

$$B = (\Pi(\varepsilon_1, 1 - \delta_1, \varepsilon_2, 1 - \delta_2, \ldots, \varepsilon_N, 1 - \delta_N))^0.$$

Trivialmente, A y B son abiertos no vacíos de $\mathbb{C}^N$. Ahora, notemos que $\tau_{a_n} = \Phi_n(D)$, donde $\Phi_n(z) = e^{a_n z}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Para cualquier $z = (z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_N = x_N + iy_N) \in \mathbb{C}^N$ tenemos que

$$|\Phi_n(z)| = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} (b_{nj} x_j - c_{nj} y_j)\right)$$

$$= \exp(b_{n1} x_1) \cdot \exp\left(\sum_{j=2}^{N} b_{nj} x_j - \sum_{j=1}^{N} c_{nj} y_j\right).$$

Observemos que $b_{n1} x_1 \to +\infty$ $(n \to \infty)$ y

$$\sum_{j=2}^{N} b_{nj} x_j - \sum_{j=1}^{N} c_{nj} y_j \geq 0$$

para todo $z \in B$, y que, por otra parte, $b_{n1}x_1 \to -\infty \quad (n \to \infty)$ y

$$\sum_{j=2}^{N} b_{nj}x_j - \sum_{j=1}^{N} c_{nj}y_j \leq 0$$

para todo $z \in A$. En consecuencia, $\Phi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ puntualmente en A y $\Phi_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ puntualmente en B. Esto finaliza la demostración porque si $HC((\tau_{a_n}))$ es residual entonces, trivialmente, $HC((\tau_a)_{a \in S})$ es residual. $\square$

Notemos que para el caso $S = \{na : n \in \mathbb{N}\}$ ($a \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ fijo), la propiedad (c) se deriva del teorema de Godefroy-Shapiro [46, Section 5] en el caso $\Phi(z) = \exp(az)$. Esta propiedad se obtiene también para una sucesión no acotada $S = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ en el caso $N = 1$ mediante un argumento de universalidad muy diferente en [45].

Es posible una leve mejora del teorema de Godefroy–Shapiro si aplicamos el Teorema 2.2.2 introduciendo una sucesión compleja multiplicativa. Notemos que la condición sobre (c_n) en el resultado siguiente implica que $((n!|c_n|)^{1/n})$ no es acotado (compárese con el Teorema 2.3.6), y que el resultado de Godefroy–Shapiro es el caso especial $G = \mathbb{C}^N$, $c_n \equiv 1$.

Teorema 2.2.5. *Sea (c_n) una sucesión compleja. Supongamos que G es un dominio de Runge en $\mathbb{C}^N$ y que Φ no es constante. Supongamos también que se verifica al menos una de las siguientes propiedades:*

(a) $(|c_n|^{1/n})$ *no converge a cero y* $\Phi(0) = 0$.

(b) $0 < \liminf_{n \to \infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n} < +\infty$.

Entonces la sucesión $(c_n \Phi^n(D))$ es densamente hipercíclica.

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones enteras

$$\Phi_n(z) = c_n \Phi(z)^n \quad (n \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{C}).$$

Bajo las hipótesis de (a), existen $M \in (0, +\infty)$ y una sucesión creciente (n_k) de enteros positivos con $|c_{n_k}| \geq M^{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Puesto que Φ no es constante, existe un abierto no vacío $B \subset \mathbb{C}^N$ en el que $|\Phi(z)| > 2/M$, por tanto

$$|\Phi_{n_k}(z)| > 2^{n_k} \to \infty \quad (k \to \infty) \quad \text{para todo } z \in B.$$

Además $m(\Phi_{n_k}) = n_k \cdot m(\Phi) \to \infty$ $(k \to \infty)$ porque $m(\Phi) > 0$. En consecuencia, se puede aplicar el Teorema 2.2.2 porque se verifica la condición (Q), y está hecho. Bajo las hipótesis de (b), tenemos que

$$M^{n_k} \leq |c_{n_k}| \leq M_1^{n_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

para ciertas constantes finitas y positivas M, M_1 y alguna sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$. Tomemos B como en el primer caso. Tomemos también un abierto no vacío $A \subset \mathbb{C}^N$ en el que $|\Phi(z)| < 1/2M_1$. Por lo tanto

$$|\Phi_{n_k}(z)| \leq 1/2^{n_k} \to 0 \quad (k \to \infty) \quad \text{para todo} \quad z \in A.$$

Se verifica esta vez la condición (P) en el Teorema 2.2.2, y así finaliza la demostración. $\square$

2.3. Hiperciclicidad y equicontinuidad de sucesiones de operadores diferenciales

En esta sección vamos a dar otras condiciones suficientes de hiperciclicidad (ver Teoremas 2.3.6, 2.3.7, 2.3.9) de sucesiones de operadores diferenciales, pero esta vez no emplearemos el criterio de los autovalores. No obstante, comenzaremos exponiendo una condición necesaria –de carácter geométrico– para la hiperciclicidad de $(\Phi_n(D))$. También obtendremos resultados sobre equicontinuidad de familias de operadores diferenciales.

Antes necesitamos algunas notaciones adicionales. Si $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ y $r > 0$, denotamos por $D(a, r)$ el polidisco cerrado de centro a y radio r, es decir,

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j - a_j| \leq r,\ 1 \leq j \leq N\}.$$

Consideramos la distancia

$$d(z,a) = \text{máx}\{|z_1 - a_1|, \ldots, |z_N - a_N|\} \quad (z, a \in \mathbb{C}^N).$$

El radio inscrito de G se define como

$$\rho(G) = \sup_{b \in G} \inf_{a \notin G} d(a,b) =$$

$$\sup\{r > 0 : \text{existe un polidisco } D \text{ de radio } r \text{ con } D \subset G\}.$$

El radio circunscrito de G se define como

$$R(G) = \inf_{a \in \mathbb{C}^N} \sup_{b \in G} d(a,b) =$$

$$\inf\{r > 0 : \text{existe un polidisco } D \text{ de radio } r \text{ con } G \subset D\}.$$

En cierta forma, $\rho(G)$ y $R(G)$ dan idea sobre el "tamaño" de G. Es evidente que $0 < \rho(G) \leq R(G)$, y que G es acotado si y sólo si $R(G) < +\infty$. Además $\rho(G) = r = R(G)$ si y sólo si G es un polidisco abierto de radio r. Más propiedades de los radios inscrito y circunscrito pueden encontrarse en [13] y [34].

A cada sucesión $\left(\Phi_n(z) = \sum_{|p| \geq 0} c_{pn} z^p\right) \subset H(\mathbb{C}^N)$, donde cada Φ_n es de tipo exponencial, le asociamos el número en $[0, +\infty]$ dado por

$$\alpha = \alpha((\Phi_n)) := \limsup_{n \to \infty} \left(\sup_{|p| > 0} (p! \cdot |c_{pn}|)^{1/|p|} \right).$$

Señalemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el número $\sup_{|p|>0} (p! \cdot |c_{pn}|)^{1/|p|}$ es finito.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que* $\Phi_n(z) = \sum_{|p|\geq 0} c_{pn} z^p$ $(n \in \mathbb{N})$ *son funciones enteras tales que la sucesión* $(\Phi_n(0))$ *está acotada. Si la sucesión* $(\Phi_n(D))$ *es hipercíclica en* $H(G)$ *entonces* $\rho(G) \leq \alpha$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos $K_n = \sup_{|p|>0} (p! \cdot |c_{pn}|)^{1/|p|}$, de modo que $\alpha = \limsup_{n\to\infty} K_n$. Sea $\beta \in (0, +\infty)$ con $|c_{0n}| = |\Phi_n(0)| \leq \beta$ $(n \in \mathbb{N})$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\limsup_{n\to\infty} K_n < \rho(G)$ y que $f \in H(G)$ es una función hipercíclica para $(\Phi_n(D))$. Fijamos números reales positivos r, R con

$$\limsup_{n\to\infty} K_n < r < R < \rho(G).$$

Entonces existe un polidisco $D(a, R) \subset G$. De las desigualdades de Cauchy (ver [57, Theorem 2.2.7]) obtenemos

$$|(D^p f)(a)| \leq p! \cdot \frac{||f||_{D(a,R)}}{R^{|p|}} \quad (|p| \geq 0).$$

Además, existe $m \in \mathbb{N}$ con $K_n \leq r$ para todo $n \geq m$. Por lo tanto

$$|c_{pn}| \leq \frac{r^{|p|}}{p!} \quad (|p| > 0;\ n \geq m),$$

luego

$$|(\Phi_n(D)f)(a)| = \left| \sum_{|p|\geq 0} c_{pn} D^p f(a) \right|$$

$$= \left| c_{0n} f(a) + \sum_{|p|>0} c_{pn} D^p f(a) \right| \leq \beta |f(a)| + \sum_{|p|>0} \frac{r^{|p|}}{p!} \cdot p! \cdot \frac{||f||_{D(a,R)}}{R^{|p|}}$$

$$\leq ||f||_{D(a,R)} \cdot \left(\beta + \sum_{|p|\geq 0} (r/R)^{|p|} \right) = ||f||_{D(a,R)} \cdot \left(\beta + \left(\frac{R}{R-r} \right)^N \right),$$

para todo $n \geq m$. En consecuencia, la sucesión $\{(\Phi_n(D)f)(a) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada, lo que es absurdo, con lo que termina la demostración. $\square$

Observamos que este último teorema generaliza el Teorema 2 de [13], el cual aseguraba que si G es un dominio en $\mathbb{C}$ y $(c_n D^n)$ es hipercíclica en $H(G)$ entonces $\limsup_{n\to\infty}(n!|c_n|)^{1/n} \geq \rho(G)$; este resultado es exactamente el caso $N = 1$, $\Phi_n(z) = c_n z^n$ del Teorema 2.3.1 . Observemos también que el Teorema 2.3.1 implica, en particular, que si $(\Phi_n(D))$ es hipercíclica en $H(\mathbb{C}^N)$ entonces al menos una de las sucesiones $\{\Phi_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{\sup_{|p|>0}(p!|c_{pn}|^{1/|p|} : n \in \mathbb{N}\}$ es no acotada.

También puede formularse una correspondiente condición suficiente para la equicontinuidad, pero en tal caso la sucesión $(\Phi_n(D))$ puede incluso sustituirse por una familia general $\{\Phi_i(D) : i \in I\}$ de operadores diferenciales. Esto lo conseguiremos en el Teorema 2.3.3. Pero antes necesitamos una definición y un resultado auxiliar.

Un *polidominio* en $\mathbb{C}^N$ es un producto $G = G_1 \times \cdots \times G_N$ de dominios en $\mathbb{C}$.

El siguiente lema es una generalización del Teorema 13.5 de [76]. Proporcionamos, por motivos de completitud, una demostración, ya que no hemos podido encontrar el resultado en ninguna referencia a nuestro alcance. Recordemos que un ciclo en $\mathbb{C}$ es una suma finita de arcos cerrados rectificables.

Lema 2.3.2. *Si G es un polidominio en $\mathbb{C}^N$ y $K \subset G$ es un compacto, entonces existen ciclos $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ con $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_N \subset G \setminus K$ tales que para cada $f \in H(G)$, cada $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}_0^N$ y cada $z = (z_1, \dots, z_N) \in K$, se verifica la siguiente fórmula de Cauchy:*

$$D^p f(z) = \frac{p!}{(2\pi i)^N} \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_N} \frac{f(t_1, \dots, t_N)}{\prod_{j=1}^N (t_j - z_j)^{1+p_j}} \, dt_1 \dots dt_N.$$

Demostración. Es suficiente probarlo en el caso $p = (0, 0, \dots, 0)$, porque un razonamiento estándar de diferenciación parcial bajo el signo integral extendería la fórmula a cualquier multi-índice $p \in \mathbb{N}_0^N$.

Procedemos por inducción sobre N. El caso $N = 1$ es evidentemente el Teorema 13.5 de [76]. Supongamos que la fórmula se verifica en $\mathbb{C}^N$ y supongamos también que $G = G_1 \times \cdots \times G_N \times G_{N+1}$ es un polidominio en $\mathbb{C}^{N+1}$ y que $K \subset G$ es un compacto. Sea K_j la proyección de K en G_j ($j = 1, \ldots, N+1$). Entonces K_j es un compacto de G_j y $L = K_1 \times \cdots \times K_N$ es un compacto del polidominio $\Omega = G_1 \times \cdots \times G_N$ de $\mathbb{C}^N$. Por la hipótesis de inducción, existe un "policiclo" $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_N \subset \Omega \setminus L$ tal que para toda función $g \in H(\Omega)$ y todo punto $z_0^* = (z_1, \ldots, z_N) \in L$ se tiene

$$g(z_0^*) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_N} \frac{f(t_1, \ldots, t_N)}{\prod_{j=1}^N (t_j - z_j)} dt_1 \ldots dt_N.$$

Debido a que el resultado es cierto para $N = 1$ tenemos garantizada la existencia de un ciclo $\alpha \in G_{N+1} \setminus K_{N+1}$ tal que para todo $\xi_0 \in K_{N+1}$ y toda $h \in H(G_{N+1})$ se tiene

$$h(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{h(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi.$$

Si fijamos una función $f \in H(G)$ y un punto $z = (z_1, \ldots, z_N, \xi_0) \in K$, entonces el punto $z_0^* = (z_1, \ldots, z_N) \in L$ y, puesto que la función

$$h(w) := f(z_0^*, w) \in H(G_{N+1}),$$

resulta

$$f(z) = h(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{h(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(z_1, \ldots, z_N, \xi)}{\xi - \xi_0} d\xi$$

Pero para un ξ fijo, la función $g(z^*) := f(z^*, \xi) \in H(\Omega)$. En consecuencia,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{1}{\xi - \xi_0} \left(\frac{1}{(2\pi i)^N} \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_N} \frac{f(t_1, \ldots, t_N, \xi)}{\prod_{j=1}^N (t_j - z_j)} dt_1 \ldots dt_N \right) d\xi$$

y el teorema de Fubini nos da el resultado deseado si tomamos el policiclo $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_N \times \alpha$ que sólo depende de G y de K. $\square$

Antes de continuar, recordemos dos caracterizaciones bien conocidas (ver por ejemplo [30]): Una función entera $\Phi(z) = \sum_{|p|\geq 0} C_p z^p$ es de tipo exponencial si y sólo si $\sup_{|p|>0} (p!|C_p|)^{1/|p|} < \infty$, y es de tipo subexponencial si y sólo si $\lim_{|p|\to\infty} (p!|C_p|)^{1/|p|} = 0$.

Teorema 2.3.3. *Supongamos que G es un dominio en $\mathbb{C}^N$ y que $\{\Phi_i(z) = \sum_{|p|\geq 0} c_{pi} z^p : i \in I\}$ es una familia de funciones enteras. Se verifica lo siguiente:*

(a) *Si G es un polidominio y existe una función entera mayorante $\Phi(z) = \sum_{|p|\geq 0} C_p z^p$ para la familia (Φ_i) –es decir, $C_p \geq 0$ y $|c_{pi}| \leq C_p$ para todo $p \in \mathbb{N}_0^N$ y todo $i \in I$– de tipo subexponencial, entonces la familia de operadores $(\Phi_i(D))$ es equicontinua en $H(G)$.*

(b) *Si $(\Phi_i(D))$ es equicontinua en $H(G)$ entonces la sucesión (Φ_i) admite una función entera mayorante de tipo exponencial.*

Demostración. Por la nota anterior al teorema, tenemos que (Φ_i) admite una función entera mayorante de tipo subexponencial si y sólo si la sucesión $\{c_{pi} : i \in I\}$ está acotada para cada p y

$$\lim_{|p|\to\infty} (p! \sup_i |c_{pi}|)^{1/|p|} = 0,$$

mientras que (Φ_i) admite una función entera de tipo exponencial si y sólo si la sucesión $\{c_{0i} : i \in I\}$ está acotada y

$$\sup_{|p|>0, i\in I} (p!|c_{pi}|)^{1/|p|} \text{ es finito.}$$

En esta demostración llamamos $T_i = \Phi_i(D)$ $(i \in I)$.

Probemos (a). Por hipótesis, $G = G_1 \times \cdots \times G_N$, donde cada G_j es un dominio en $\mathbb{C}$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y un compacto $K \subset G$. Para el correspondiente entorno básico del origen $V(0,K,\varepsilon)$ en $H(G)$ debemos encontrar un $\delta > 0$ y un compacto $L \subset G$ que verifiquen

$$\bigcup_{i\in I} T_i(V(0,L,\delta)) \subset V(0,K,\varepsilon). \tag{1}$$

El Lema 2.3.2 nos permite elegir un policiclo $\gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_N \subset G \setminus K$ tal que se cumple la fórmula de Cauchy de su enunciado para $p \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in K$ y $f \in H(G)$. Puesto que G es un polidominio podemos suponer sin pérdida de generalidad que $K = K_1 \times \cdots \times K_N$, donde cada K_j es un compacto de G_j. Sea

$$\mu := \inf\{|t_j - z_j| : t_j \in \gamma_j;\ z_j \in K_j;\ j = 1,\ldots,N\} > 0.$$

Por hipótesis, $\lim_{|p|\to\infty} (p! \sup_{i\in I} |c_{pi}|)^{1/|p|} = 0$, luego existe un entero positivo m con $(p!|c_{pi}|)^{1/|p|} \leq \mu/2$ para todo $i \in I$ y todo p con $|p| > m$. Pero cada familia $\{c_{pi} : i \in I\}$ ($|p| \leq m$) está acotada, luego existe una constante finita positiva M tal que

$$\frac{p!|c_{pi}|2^{|p|}}{\mu^{|p|}} \leq M \quad (i \in I,\ |p| \geq 0).$$

Elegimos

$$L = \gamma \quad \text{y} \quad \delta = \frac{(\pi\mu)^N \cdot \varepsilon}{M \cdot \prod_{j=1}^N \text{longitud}\,(\gamma_j)}.$$

Si $i \in I$, $f \in V(0,L,\delta)$ y $z \in K$ tenemos

$$|(T_i f)(z)| = \left| \sum_{|p|\geq 0} c_{pi} D^p f(z) \right|$$

$$= \left| \sum_{|p|\geq 0} \frac{p! c_{pi}}{(2\pi i)^N} \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_N} \frac{f(t_1,\ldots,t_N)}{\prod_{j=1}^N (t_j - z_j)^{1+p_j}}\, dt_1 \ldots dt_N \right|$$

$$\leq \sum_{|p|\geq 0} \frac{p!|c_{pi}|}{(2\pi)^N} \cdot \frac{\delta}{\mu^{N+|p|}} \cdot \prod_{j=1}^N \text{longitud}\,(\gamma_j)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2^N} \cdot \sum_{|p|\geq 0} (1/2)^{|p|} = \frac{\varepsilon}{2^N} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k\right)^N = \varepsilon.$$

Esto prueba (1), como requeríamos.

Probemos ahora (b). Puesto que (T_i) es una familia equicontinua podemos encontrar un $\delta > 0$ y un compacto $L \subset G$ tales que

$$\bigcup_{i\in I} T_i(V(0, L, \delta)) \subset V(0, \{a\}, 1), \tag{2}$$

donde a es cualquier punto fijo de G. Consideremos la familia de monomios f_p $(p \in \mathbb{N}_0^N)$ dada por

$$f_p(z) = \delta \cdot \left(\frac{z-a}{R}\right)^p,$$

donde $R = \sup\{|t - a| : t \in L\}$. Puesto que podemos tomar L distinto de $\{a\}$, vemos que $0 < R < +\infty$. Entonces $f_p \in V(0, L, \delta)$ para todo p, por lo que $T_i f_p \in V(0, \{a\}, 1)$ por (2), esto es,

$$|(\Phi_i(D) f_p)(a)| \leq 1 \quad (i \in I,\, p \in \mathbb{N}_0^N).$$

Pero

$$(\Phi_i(D) f_p)(a) = \sum_{|q|\geq 0} c_{qi} D^q f_p(a) = c_{pi}\delta \cdot p! \cdot \frac{1}{R^{|p|}},$$

porque $D^q f_p(z) \equiv 0$ si $|q| \geq |p|$ con $q \neq p$ y $D^q f_p(a) = 0$ si $|q| < |p|$. Luego $|c_{pi}\delta \cdot p! \cdot R^{-|p|}| \leq 1$, por lo que

$$|c_{0i}| \leq 1/\delta \quad (i \in I)$$

y

$$\sup_{|p|>0,\, i\in I} (p!|c_{pi}|)^{1/|p|} \leq R \cdot \sup_{|p|>0} (1/\delta)^{1/|p|} < +\infty.$$

Las dos últimas desigualdades prueban que (Φ_i) admite una función entera mayorante de tipo exponencial, como queríamos ver, con lo que termina la demostración. $\square$

En el caso especial de una sucesión (Φ_n) conseguimos con el Teorema 2.3.3(a) una generalización de la parte "si" de [13, Theorem 3]. En efecto, el Teorema 3 de [13] establece que si G es un dominio en $\mathbb{C}$ y si $\limsup_{n\to\infty}(n!|c_n|)^{1/n} = 0$ entonces la familia $(c_n D^n)$ es equicontinua en $H(G)$, y el recíproco es cierto si $G \neq \mathbb{C}$. Observemos que su parte "si" es también el caso particular $\Phi_n(z) = c_n z^n$ del siguiente resultado. Para leerlo, se necesita la definición del número α dada inmediatamente antes del Teorema 2.3.1.

Corolario 2.3.4. *Supongamos que $G \subset \mathbb{C}^N$ es un polidominio, que la sucesión $(\Phi_n(0))$ está acotada y que $\alpha = 0$. Entonces $(\Phi_n(D))$ es equicontinua en $H(G)$.*

Demostración. Sea $\Phi_n(z) = \sum_{|p|\geq 0} c_{pn} z^p$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces la sucesión $\{c_{0n} : n \in \mathbb{N}\}$ es acotada y además $\lim_{n\to\infty} \sup_{|p|>0} (p!\,|c_{pn}|)^{1/|p|} = 0$, de lo cual se deduce fácilmente que $\{c_{pn} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada para cada multiíndice p y $\lim_{|p|\to\infty} (p! \sup_n |c_{pn}|)^{1/|p|} = 0$ (para esto se usa el hecho de que para cada n fijo se tiene $(p!\,|c_{pn}|)^{1/|p|} \to 0$ cuando $|p| \to \infty$). Pero esto significa que (Φ_n) admite una función entera mayorante de tipo subexponencial. Entonces el apartado (a) del Teorema 2.3.3 nos da el resultado que queremos. □

Para $G = \mathbb{C}^N$ es posible caracterizar las familias equicontinuas de operadores diferenciales.

Teorema 2.3.5. *La familia de operadores $\{\Phi_i(D) : i \in I\}$ es equicontinua en $H(\mathbb{C}^N)$ si y sólo si (Φ_i) admite una función entera mayorante de tipo exponencial.*

Demostración. El apartado "sólo si" se deduce del Teorema 2.3.3(b). Para el recíproco, seguimos paso a paso la prueba del apartado (a) del Teorema 2.3.3 con la única excepción de que podemos escoger el policiclo γ suficientemente alejado del compacto K (así que μ puede ser elegido tan grande como se quiera) de tal manera que

$$\sup_{|p|>0,\, i\in I} (p!\,|c_{pi}|)^{1/|p|} \leq \mu/2.$$

La constante M se puede elegir como $M = \text{máx}\,\{1, \sup_{i\in I} |c_{0i}|\}$, y a partir de aquí se escogen L y δ como en la citada prueba. $\square$

En [13, Theorem 1] se demuestra la siguiente condición suficiente de hiperciclicidad de carácter geométrico: Si $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo y (c_n) es una sucesión compleja con

$$R(G) \leq \limsup_{n\to\infty} (n!\,|c_n|)^{1/n}$$

entonces $HC((c_n D^n))$ es residual en $H(G)$.

Una ligera generalización se puede obtener en el caso N–dimensional.

Teorema 2.3.6. *Supongamos que $G \subset \mathbb{C}^N$ es un dominio de Runge y que $(p(n))$ es una sucesión de multi-índices con $|p(n)| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Si (c_n) es una sucesión de números complejos con*

$$R(G) \leq \limsup_{n\to\infty} (p(n)!\,|c_n|)^{1/|p(n)|}$$

entonces la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es densamente hipercíclica en $H(G)$.

Demostración. Seguiremos pasos análogos a los de la demostración del Teorema 1 de [13]. Por la definición de $R(G)$ tenemos que existe un $a \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$d(z,a) < R(G) \quad (z \in G),$$

es decir,

$$|z_i - a_i| < R(G) \quad (j = 1, \ldots, N).$$

Entonces, para todo compacto $K \subset G$ tenemos que

$$\sup_{z \in K} d(z, a) < R(G). \tag{3}$$

Aplicamos la Observación 1.2.2 haciendo

$$X = Y = H(G), \ X_0 = Y_0 = \{\text{polinomios}\}, \ \text{ y } \ T_n = c_n D^{p(n)}.$$

Fijamos dos polinomios P, Q con $Q(z) = \sum_{|q| \le m} a_q (z-a)^q$.

Por hipótesis,

$$\limsup_{n \to \infty} (p(n)!|c_n|)^{1/|p(n)|} \ge R(G),$$

luego existe una subsucesión $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} (p(n_j)!|c_{n_j}|)^{1/|p(n_j)|} \ge R(G),$$

por lo que teniendo en cuenta (3),

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\left(\sup_{z \in K} d(z, a)\right)^{p(n_j)}}{p(n_j)!|c_{n_j}|} = 0. \tag{4}$$

Notemos que puede suponerse $c_{n_j} \ne 0$ para todo j.

Definimos ahora las funciones

$$f_j = \sum_{|q| \le m} \frac{q! a_q (z-a)^{p(n_j)+q}}{(p(n_j)+q)! c_{n_j}} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Observamos las siguientes propiedades:

- $T_{n_j}(P) = 0$, siempre que $|p(n_j)| >$ grado(P). Así que $\lim_{j \to \infty} T_{n_j}(P) = 0$ porque $|p(n_j)| \to \infty$.

- $T_{n_j}(f_j) = Q$ para cada $j \in \mathbb{N}$; luego, trivialmente, $\lim_{j \to \infty} T_{n_j}(f_j) = Q$.

- $\lim_{j \to \infty} f_j = 0$ uniformemente en compactos de G debido a (4). Es decir, $f_j \to 0$ en $H(G)$.

Por tanto, por la Observación 1.2.2, $(c_n D^{p(n)})$ es densamente hipercíclica.

$\square$

Como consecuencia de los Teoremas 2.3.5, 2.3.6 podemos dar una caracterización de la equicontinuidad y de la hiperciclicidad de una sucesión de operadores del tipo $(c_n D^{p(n)})$ sobre $H(\mathbb{C}^N)$. Esto se recoge en el siguiente resultado que, de hecho, es una generalización a N dimensiones de [13, Theorem 4] (ver también [11]).

Teorema 2.3.7. *Supongamos que (c_n) es una sucesión compleja y que $(p(n))$ es una sucesión de multi-índices no nulos tales que $|p(n)| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *La sucesión $((p(n)!\,|c_n|)^{1/|p(n)|})$ está acotada.*

(b) *No existen funciones enteras hipercíclicas para $(c_n D^{p(n)})$.*

(c) *El conjunto $HC((c_n D^{p(n)}))$ no es residual en $H(\mathbb{C}^N)$.*

(d) *La sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es equicontinua en $H(\mathbb{C}^N)$.*

Demostración. Es evidente que (b) implica (c) y que (d) implica (b). Puesto que $R(\mathbb{C}^N) = +\infty$, del Teorema 2.3.6 obtenemos que (c) implica (a). Supongamos que se verifica (a). Podemos aplicar ahora el Teorema 2.3.5 haciendo $I = \mathbb{N}$ y $\Phi_n(z) = c_n z^{p(n)}$. En efecto, existe una constante M con $p(n)!|c_n| \leq M^{|p(n)|}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la función

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^{|p(n)|}}{p(n)!} z^{p(n)} \quad (z \in \mathbb{C}^N)$$

es una función entera mayorante de tipo exponencial para la familia (Φ_n). Entonces (d) es cierto con lo que concluye la demostración. $\square$

Anotamos aquí que en [51, Corollary to Theorem 4] la parte sobre hiperciclicidad de [13, Theorem 4] se generaliza para el caso $N = 1$ a sucesiones ponderadas de "pseudo-shifts" en el espacio $H(\mathbb{C})$, considerado éste como espacio de sucesiones.

Es posible extender la parte "sólo si" de [13, Theorem 3] (ver el párrafo anterior al Corolario 2.3.4) al caso N–dimensional, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.8. *Sea $G = G_1 \times \cdots \times G_N \subset \mathbb{C}^N$ un polidominio con $G_j \neq \mathbb{C}$ $(j = 1, \ldots, N)$. Supongamos que (c_n) es una sucesión compleja y que $(p(n))$ es una sucesión de multi-índices no nulos tales que la sucesión de operadores $(c_n D^{p(n)})$ es equicontinua en $H(G)$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (p(n)!\,|c_n|)^{1/|p(n)|} = 0.$$

Demostración. Consideremos el número

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} (p(n)!|c_n|)^{1/|p(n)|}.$$

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\alpha > 0$. Fijemos un punto $a = (a_1, \ldots, a_N) \in G$. Entonces $a_j \in G_j$ y existen puntos $b_j \in \mathbb{C}\setminus G_j$ $(j = 1, \ldots, N)$ tales que

$$|a_j - b_j| = \inf\{|a_j - t| : t \in \mathbb{C} \setminus G_j\}.$$

Llamemos

$$R = \min\{|a_j - b_j| : j = 1, \ldots, n\} > 0.$$

Fijemos $r \in (0, R)$ con $R - r < \alpha$ y pongamos $K = D(a, r)$. Entonces K es un subconjunto compacto de G. Sea L un subconjunto compacto de G y δ un número positivo. Sea $m > 0$ lo suficientemente pequeño para que

$$\frac{m}{(\inf\{|z_j - b_j| : j \in \{1, \ldots, N\},\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in L \cup K\})^N} < \delta.$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{m}{\prod_{j=1}^N (z_j - b_j)}.$$

Entonces $f \in H(G)$ y, además, f está en $V(0, L, \delta)$. Más aún, para $z = (z_1, \dots, z_N) \in G$, se tiene

$$|(T_n f)(z)| = \frac{p(n)!\, m|c_n|}{\prod_{j=1}^{N} |z_j - b_j|^{1+p_j(n)}},$$

donde $p(n) = (p_1(n), \dots, p_N(n))$ y $T_n = c_n D^{p(n)}$. Puesto que

$$\inf\{|t - b_j| : |t - a_j| < r\} \geq R - r \text{ para todo } j \in \{1, \dots, N\},$$

tenemos

$$\sup\{|(T_n f)(z)| : z \in K\} \leq \frac{p(n)!|c_n|m}{(R-r)^{N+|p(n)|}} = \frac{m}{(R-r)^N} \cdot \frac{p(n)!|c_n|}{(R-r)^{|p(n)|}}.$$

Pero

$$\frac{p(n_k)!|c_{n_k}|}{(R-r)^{|p(n_k)|}} \to \infty \quad (k \to \infty)$$

para alguna sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$, porque $\alpha > R - r$. Entonces

$$\sup\{|T_n f(z)| : z \in K\} = \infty.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n(V(0, L, \delta)) \not\subset V(0, K, 1),$$

lo que implica que (T_n) no es equicontinua, con lo que concluye la demostración. $\square$

Nuestro último resultado vuelve a la hiperciclicidad y tiene un aspecto algo diferente a los otros. Sus condiciones ponen especial énfasis en el primer coeficiente no nulo de cada Φ_n. Esta vez trabajamos en el plano complejo $\mathbb{C}$. Observemos que recuperamos una vez más el teorema de MacLane si tomamos $\Phi_n(z) = z^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.9. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Supongamos que $(\Phi_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^j)$ es una sucesión de funciones enteras no nulas* *y llamamos* $p(n) := m(\Phi_n)$ $(n \in \mathbb{N})$*. Supongamos también que se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) *La sucesión* $(p(n))$ *no está acotada.*

(b) *Para todo* $k \in \mathbb{N}$, $p(n)|c_{p(n),n}|^{k/p(n)} \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$*.*

(c) *Cada sucesión* $\{c_{j+p(n),n} : n \in \mathbb{N}\}$ $(j \in \mathbb{N})$ *está acotada.*

Entonces la sucesión $(\Phi_n(D))$ *es densamente hipercíclica en* $H(G)$*.*

Demostración. Vamos a intentar aplicar el Lema 1.2.1 con $X = H(G) = Y$, $X_0 = \{\text{polinomios}\} = Y_0$ y $T_n = \Phi_n(D)$ $(n \in \mathbb{N})$.

En primer lugar, debido a (a), existe una sucesión $\{n(1) < n(2) < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ tal que $p(n(k)) \to \infty$ $(k \to \infty)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(n(k))$ es la sucesión completa de enteros positivos. Si P es un polinomio, entonces, por lo anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $p(n) >$ grado(P) para todo $n \geq n_0$, luego $D^j P = 0$ para todo $j \geq p(n)$ $(n \geq n_0)$. Por lo tanto se tendrá $T_n P = 0$ para n suficientemente grande y se verifica la condición (a) del Lema 1.2.1. Ahora fijamos m y n en $\mathbb{N}$ e intentamos resolver la ecuación $T_n f = z^m$. Observemos que $T_n = \Psi_n(D) \circ D^{p(n)}$, donde $\Psi_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} z^j$ y $a_{jn} = c_{j+p(n),n}$, luego $a_{0n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la ecuación

$$\Psi_n(D)g = z^m, \tag{5}$$

donde g es un polinomio de grado no mayor que m, digamos $g(z) = \sum_{k=0}^{m} b_{kn} z^k$. Es fácil ver que existe una solución polinómica. En efecto, (5) es equivalente a

$$\sum_{j=0}^{m} a_{jn} \left(\sum_{k=0}^{m} b_{kn} z^k \right)^{(j)} = z^m,$$

que a su vez es lo mismo que el sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{m} a_{j-k,n} b_{jn} \cdot \frac{j!}{k!} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \\ a_{0n} b_{mn} = 1. \end{cases}$$

Éste es un sistema cuadrado recurrente, el cual es de Cramer ya que su determinante es $a_{0n}^{m+1} \neq 0$, luego tiene una única solución $(b_{0n}, \ldots, b_{mn})$, la cual es de la forma

$$b_{kn} = \frac{1}{a_{0n}^{m+1}} \cdot \sum_{j=1}^{m} P_{jkm}(a_{1n}, \ldots, a_{mn})\, a_{0n}^{j} \tag{6}$$

para $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, donde P_{jkm} $(j = 1, \ldots, m)$ son polinomios de m variables complejas que no dependen de n. Por (c), existe una constante positiva M, que no depende de n, tal que

$$|P_{jkm}(a_{1n}, \ldots, a_{mn})| \leq M \tag{7}$$

para todo $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ y todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto, una solución de $T_n f = z^m$ es

$$f(z) = f_n(z) = \sum_{k=0}^{m} b_{kn} \frac{z^{k+p(n)}}{(k + p(n))!} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

donde cada b_{kn} viene dado por (6). Fijemos $R > 1$. De (7) obtenemos para $|z| \leq R$ que

$$|f_n(z)| \leq (m+1) \sum_{j=1}^{m} \frac{MR^m}{|a_{0n}|^{m+1-j}} \cdot \frac{R^{p(n)}}{p(n)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

por lo que (b) y la fórmula de Stirling nos llevan a

$$(p(n)!\, |a_{0n}|^{m+1-j})^{1/p(n)} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

luego los términos de la última sucesión serán para n suficientemente grande mayores que, por ejemplo, $1/2R$. Por tanto (f_n) tiende a cero en

$H(G)$. La demostración para el caso $m = 0$ es más fácil y no la escribimos. Definimos

$$S_n(z^m) := f_n(z) \quad (m \in \mathbb{N}_0;\, n \in \mathbb{N})$$

y extendemos S_n a Y_0 por linealidad. Entonces, es claro que $S_nP \to 0$ $(n \to \infty)$ y $T_n(S_nP) = P \to P$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, se verifican las condiciones (b) y (c) del Lema 1.2.1, de dónde se deduce la conclusión del teorema. □

Demos un ejemplo: Existe una función entera f en $\mathbb{C}$ con la propiedad de que toda función entera puede aproximarse local y uniformemente por funciones de la forma

$$c_n(f^{(n)} + f^{(n+1)}) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

donde $c_n = n^{-n/(\log n)^{1/2}}$. En efecto, la sucesión $\{\Phi_n(z) = c_n z^n(1+z)\}$ verifica todas las hipótesis del último teorema, porque (c_n) está acotada, $p(n) \to \infty$ y $p(n) \cdot n^{-kn/(p(n)\,(\log n)^{1/2})} \to \infty$ $(n \to \infty)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $p(n) \equiv n$. Este ejemplo muestra que el Teorema 2.3.9 no está incluido en el Teorema 2.2.2: de hecho, $\Phi_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego no se dispone del conjunto de **E**–unicidad B para aplicar el mencionado teorema.

Para finalizar este capítulo, permítasenos comentar que, bajo hipótesis convenientes sobre las funciones Φ_n, más fuertes que respectivamente las de los Teoremas 2.2.1, 2.2.5, 2.3.6 y 2.3.9, podía probarse que la sucesión $(\Phi_n(D))$ es densamente *hereditariamente* hipercíclica, en cuyo caso existiría una variedad lineal densa $M \subset H(G)$ de funciones tales que cada $f \in M \setminus \{0\}$ es $(\Phi_n(D))$–hipercíclica, ver [19, Theorem 2]. Las hipótesis que se exigirían son tales que no aparece seleccionada ninguna subsucesión (n_k), sino que se involucra a toda la sucesión de enteros positivos (en el caso del Teorema 2.3.9, la conclusión "mejorada" se obtendría sustituyendo la condición (a) por " $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$"). En [19, Theorem 4] se da uno de tales resultados. En el caso de la superciclicidad (ver Capítulo 3) sí especificaremos los correspondientes criterios de hereditariedad para esta propiedad en el caso de sucesiones $(\Phi_n(D))$, ya que en el momento de redactar esta memoria no aparece registrado –hasta donde alcanza nuestra información– ningún criterio en ese sentido.

Capítulo 3

Sucesiones supercíclicas de operadores diferenciales

3.1. Introducción

En el capítulo anterior generalizábamos el criterio de hiperciclicidad por autovalores de Bernal [18, Theorem 7], a la vez que estudiábamos condiciones necesarias y condiciones suficientes para la hiperciclicidad de sucesiones de operadores diferenciales de orden infinito. Gran parte de la terminología que utilizamos en dicho capítulo nos será válida en el actual. En especial, recomendamos al lector interesado repasar las notaciones $\mathbf{E}$, e_c, $M(S)$, $\alpha((\Phi_n))$, así como los conceptos de conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad y de radios inscrito $(\rho(G))$ y circunscrito $(R(G))$. Por G seguiremos denotando un dominio de $\mathbb{C}^N$.

En este capítulo vamos a trabajar con el concepto de superciclicidad, noción introducida por Hilden y Wallen [54] en 1974.

Si T es un operador en un espacio vectorial topológico X en $\mathbb{K}$ (:= la recta real $\mathbb{R}$ o el plano complejo $\mathbb{C}$), entonces un vector $x \in X$ se llama *supercíclico* para T siempre que su órbita proyectiva $\{\lambda T^n : \lambda \in \mathbb{K},\ n \in$

$\mathbb{N}\}$ sea densa en X. El operador T se llama *supercíclico* si existe algún vector supercíclico para T. Evidentemente, si T es hipercíclico entonces es supercíclico, lo cual a su vez implica que T es cíclico, esto es, la órbita de algún vector es total en X. La conexión entre ciclicidad (hiperciclicidad) y el problema del subespacio (subconjunto, respectivamente) invariante es bien conocida.

Así que en este capítulo vamos a tratar con una propiedad intermedia. Por el teorema de Godefroy–Shapiro y el Teorema 8(c) de [18], no podemos añadir nada nuevo en cuanto a la superciclicidad de *un operador* diferencial $\Phi(D)$ en $H(G)$, donde G es un dominio de Runge: $\Phi(D)$ es hipercíclico (luego supercíclico) salvo para $\Phi =$ una constante, pero en este caso $\Phi(D)$ tampoco es supercíclico. Por lo tanto, el interés debe concentrarse en la superciclicidad de una *sucesión* de operadores diferenciales $(\Phi_n(D))$ (en general, de orden infinito).

Una sucesión $T_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ de aplicaciones lineales y continuas entre dos espacios vectoriales topológicos X, Y sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ se llama *supercíclica* si y sólo si existe al menos un vector $x \in X$ –llamado *supercíclico* para (T_n)– cuya órbita proyectiva $\{\lambda T_n x : \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$ es densa en Y. Como en el caso hipercíclico, Y debe ser separable para que (T_n) pueda ser supercíclica. Denotamos por $SC((T_n))$ el conjunto de vectores supercíclicos para (T_n). Decimos que (T_n) es *densamente supercíclica* si y sólo si el conjunto $SC((T_n))$ es denso en Y. Frecuentemente, demostrar que una sucesión es supercíclica se hace probando su superciclicidad densa.

En la Sección 3.2 daremos algunos criterios generales para esta última propiedad, incluyendo uno que se basa en la existencia de una "buena cantidad" de autovectores comunes; es decir, obtendremos de nuevo un criterio de autovalores. Puntualizamos aquí que la introducción del concepto de superciclicidad densa para un operador único T es totalmente inútil porque –como en el caso de la hiperciclicidad– el conjunto $SC((T^n))$ es denso siempre que T sea supercíclico, ver [58, Chapter 3]. También consideraremos la propiedad de c-hiperciclicidad, que está situada entre la hiperciclicidad y la superciclicidad. Los resultados de la Sección 3.2 se aplican en la Sección 3.3 para mostrar condiciones suficientes de superciclicidad y de c-hiperciclicidad de una sucesión de operadores diferenciales.

Obtendremos también condiciones necesarias, e ilustraremos con ejemplos la relación con la hiperciclicidad y la equicontinuidad, propiedades consideradas en el capítulo anterior.

Finalmente, en la Sección 3.4 proporcionaremos resultados de existencia de funciones supercíclicas en espacios de funciones holomorfas más restringidos, extendiendo a nuestro marco un reciente resultado sobre D- universalidad debido a Costakis [36, Theorem 2.11].

3.2. Criterios de superciclicidad por autovalores

Como decíamos en la Introducción, el estudio de operadores supercíclicos ha experimentado un gran impulso durante los últimos años. Para la investigación de tal propiedad en espacios concretos, se han realizado esfuerzos por encontrar un buen "Criterio de Superciclicidad" de carácter general, es decir, una condición suficiente adecuada para superciclicidad. Varios autores –Salas, Montes, Bermúdez, Bonilla, Peris, Feldman, V. Miller, L. Miller, entre otros– han proporcionado recientemente algunos de tales criterios para un único operador T, ver [77, Lemma 2.6], [71, Theorem 2.], [9, Theorem 1.2] y [42, Theorems 5.1–5.2]. Tales criterios contienen todos ellos como parte de la hipótesis la existencia de una sucesión creciente "absoluta" $(n_k) \subset \mathbb{N}$ (y también de una sucesión escalar (λ_k) "absoluta" en la segunda y tercera referencias anteriores) tal que la correspondiente subsucesión (T^{n_k}) de iteradas verifican ciertas condiciones (ver también [44, Lemma 5.5] para un criterio esencialmente diferente, basado en "ángulos"; y ver [58, Theorem 3.2], [77, Corollary 2.8] y [9, Proposition 3.2] para criterios sucesivamente mejorados que involucran el núcleo generalizado de T; ver asimismo [10, Theorem 4]).

Apuntamos aquí que Bermúdez, Bonilla y Peris han podido demostrar que todos los criterios referenciados al principio son esencialmente equivalentes, ver [9, Theorem 3.1]; para esto, usan algunas ideas de [28] que utilizan sumas directas $S \oplus S$.

En esta sección demostraremos, en primer lugar, una condición suficiente para la superciclicidad de una sucesión de operadores en la que a las sucesiones (n_k) y (λ_k) se les permite que dependan de un par de puntos arbitrarios de ciertos subconjuntos de X e Y convenientemente elegidos, ver Teorema 3.2.1. Es decir, tales sucesiones no van a ser "absolutas". Pero necesitamos una nota preliminar.

Obsérvese que si X, Y son espacios vectoriales topológicos con Y metrizable y $T_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas, entonces

$$SC((T_n)) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{\lambda\in\mathbb{K}\\ n\in\mathbb{N}}} T_n^{-1}(\lambda V_m), \tag{1}$$

donde (V_m) es una base numerable de abiertos de Y (tal base existe porque Y debe ser metrizable y separable, luego es segundo-numerable). Por la continuidad de cada λT_n, tenemos que $SC((T_n))$ es un subconjunto G_δ de X. Si, además, X es un espacio de Baire, tenemos que (T_n) es densamente supercíclica si y sólo si $SC((T_n))$ es residual.

Teorema 3.2.1. *Supongamos que X, Y son espacios vectoriales topológicos, con X Baire e Y metrizable separable. Supongamos también que $T_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas, de modo que existen subconjuntos densos $X_0 \subset X$ e $Y_0 \subset Y$ que verifican la* *siguiente condición: Dados $x \in X_0$ e $y \in Y_0$, existen sucesiones $(x_j) \subset X$, $(\lambda_j) \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ con $\lambda_j x_j \to 0$, $\lambda_j^{-1} T_{n_j} x \to 0$ y $T_{n_j} x_j \to y$ cuando $j \to \infty$. Entonces (T_n) es densamente supercíclica.*

Demostración. Fijemos un abierto no vacío $V \subset Y$ y definamos

$$G(V) := \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ n \in \mathbb{N}}} T_n^{-1}(\lambda V).$$

Por (1), es suficiente probar que el abierto $G(V)$ es denso en X. Para ello, fijamos un abierto no vacío $U \subset X$ y tomamos vectores $x \in X_0 \cap U$ e $y \in V$. Ahora consideramos las correspondientes sucesiones $(x_j), (\lambda_j), (n_j)$ dadas en la hipótesis. Definimos la sucesión de vectores $z_j = x + \lambda_j x_j$ $(j \in \mathbb{N})$. Entonces $z_j \to x$ $(j \to \infty)$, pero $x \in U$, luego existe $j_0 \in \mathbb{N}$ con $z_j \in U$ para todo $j \geq j_0$. Por otro lado, por linealidad,

$$\lambda_j^{-1} T_{n_j} z_j = \lambda_j^{-1} T_{n_j} x + T_{n_j} x_j \to 0 + y = y \quad (j \to \infty).$$

Pero $y \in V$, por tanto, para algún $j_1 \in \mathbb{N}$ tenemos $\lambda_j^{-1} T_{n_j} z_j \in U$ $(j \geq j_1)$. Entonces, si $J = \text{máx}\{j_0, j_1\}$ obtenemos $z_J \in U \cap T_{n_J}^{-1}(\lambda_J V)$. En consecuencia, $U \cap G(V)$ no es vacío, que es lo que queríamos. □

Bermúdez, Bonilla y Peris observaron en [9, Section 3] que si T es un operador supercíclico, existen $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ y $(\lambda_k) \subset \mathbb{K}$ tales que la sucesión $(\lambda_{n_k} T^{n_k})$ es hipercíclica. Es fácil extender tal observación a sucesiones, incluso con una formulación más sencilla. El resultado nos será útil en la Sección 3.3. El apartado final de la siguiente proposición está inspirado en otra observación –debida también a Peris– que podemos encontrar en [50, Proposition 1].

Proposición 3.2.2. *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos con Y metrizable. Supongamos que $T_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ son aplicaciones lineales continuas. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *La sucesión* (T_n) *es supercíclica.*

(b) *Existe una sucesión* $(\lambda_n) \subset \mathbb{K}$ *tal que* $(\lambda_n T_n)$ *es hipercíclica.*

Si además (T_n) *es una sucesión conmutativa (es decir,* $T_n T_m = T_m T_n$ *para todo* m, n*) y cada* T_n *tiene rango denso, entonces* (a) *y* (b) *son también equivalentes a la siguiente propiedad:*

(c) *La sucesión* (T_n) *es densamente supercíclica.*

Demostración. Es evidente que (b) implica (a). Supongamos que se verifica (a). Puesto que Y debe ser separable, existe una sucesión densa $(y_k) \subset Y$. Tomemos un vector $x \in SC((T_n))$. Entonces existen $n_1 \in \mathbb{N}$ y un escalar μ_1 con $d(\mu_1 T_{n_1} x, y_1) < 1$, donde d es una distancia en Y compatible con su topología. Puesto que el conjunto $\{T_n x : n > n_1\}$ es denso en Y, existen $n_2 > n_1$ y un escalar μ_2 tales que $d(\mu_2 T_{n_2} x, y_2) < \frac{1}{2}$. Siguiendo el proceso, tenemos una sucesión $(\mu_k) \subset \mathbb{K}$ y una sucesión estrictamente creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ que verifican

$$d(\mu_k T_{n_k} x, y_k) < \frac{1}{k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Por otra parte, dado un vector $y \in Y$ podemos, por densidad, elegir una sucesión $\{k(1) < k(2) < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ con

$$\lim_{l \to \infty} d(y_{k(l)}, y) = 0. \tag{3}$$

Entonces por (2), (3) y la desigualdad triangular se verifica

$$d(\mu_{k(l)} T_{n_{k(l)}} x, y) \leq \frac{1}{k(l)} + d(y_{k(l)}, y) \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Por lo tanto x es hipercíclico para $(\mu_k T_{n_k})$, lo que prueba (b) en cuanto definamos

$$\lambda_n = \begin{cases} \mu_k & \text{si } n = n_k \\ 0 & \text{si } n \neq n_k \text{ para todo } k. \end{cases}$$

Por otro lado, es obvio que (c) siempre implica (a). Supongamos ahora que (b) se verifica bajo la suposición de que la sucesión (T_n) es conmutativa y de que todos sus elementos tienen rango denso. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_n \neq 0$ para todo n. Elegimos un vector hipercíclico x para $(\lambda_n T_n)$. Entonces la órbita

$$\{\lambda_n T_n x : n \in \mathbb{N}\}$$

es densa en Y. Fijemos $j \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\lambda_j T_j$ tiene rango denso. Pero observemos que

$$\{\lambda_n T_n(\lambda_j T_j x) : n \in \mathbb{N}\} = \lambda_j T_j(\{\lambda_n T_n x : n \in \mathbb{N}\}),$$

luego el conjunto

$$\{\lambda T_n(\lambda_j T_j x) : n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

es denso; en otras palabras,

$$\lambda_j T_j x \in SC((T_n)).$$

Puesto que esto es cierto para todo j, tenemos que la órbita completa $\{\lambda_j T_j x : j \in \mathbb{N}\}$ está contenida en $SC((T_n))$. En consecuencia, $SC((T_n))$ es denso en Y, que es la propiedad (c). □

A continuación, enunciamos el principal resultado de esta sección, que está diseñado bajo la suposición de la existencia de un número suficiente de autovectores. Como en el capítulo anterior, si T es un operador y e es un autovector, entonces denotamos por $\lambda(T, e)$ su correspondiente autovalor.

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio vectorial topológico de Baire metrizable y separable, y sea (T_n) una sucesión de operadores sobre dicho espacio. Supongamos que existen dos subconjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de X que verifican:*

(a) *$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son totales en X.*

(b) *Para todo par de subconjuntos finitos* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{A}$ *y* $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{B}$ *existe una sucesión* $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ *tal que cada vector de* $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ *es un autovector para cada* T_{n_k} *de tal modo que* $\lambda(T_{n_k}, b) \neq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y todo* $b \in \mathcal{F}_2$, *y*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(T_{n_k}, a)}{\lambda(T_{n_k}, b)} = 0 \quad (a \in \mathcal{F}_1, \ b \in \mathcal{F}_2).$$

Entonces (T_n) *es densamente supercíclica.*

Demostración. Vamos a intentar aplicar el Teorema 3.2.1. Para ello, definimos $Y := X$, $X_0 := \operatorname{span} \mathcal{A}$, $Y_0 := \operatorname{span} \mathcal{B}$. Entonces X_0 e Y_0 son densos en X, puesto que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son totales. Fijemos dos vectores $x \in X_0$ e $y \in Y_0$. Entonces existen escalares $\alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_q$ y dos conjuntos finitos de vectores $\mathcal{F}_1 = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{F}_2 = \{b_1, \cdots, b_q\} \subset \mathcal{B}$ tales que $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$ e $y = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_q b_q$. Por hipótesis, existe $(n_k) \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que todos los elementos de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ son autovectores para cada T_{n_k} y, además, $\lambda(T_{n_k}, b_j) \neq 0$ $(k \in \mathbb{N}, \ j = 1, \dots, q)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(T_{n_k}, a_l)}{\lambda(T_{n_k}, b_j)} = 0 \quad (l = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, q). \tag{4}$$

Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, el vector

$$x_k = \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{\lambda(T_{n_k}, b_j)} b_j \in X$$

y el escalar

$$\lambda_k = \begin{cases} \max\limits_{1\leq l\leq m} |\lambda(T_{n_k}, a_l)|^{1/2} \cdot \min\limits_{1\leq j\leq q} |\lambda(T_{n_k}, b_j)|^{1/2} & \text{si } \lambda(T_{n_k}, a_l) \neq 0 \\ & \text{para algún } l = 1, \dots, m \\ \dfrac{1}{k} \cdot \min\limits_{1\leq j\leq q} |\lambda(T_{n_k}, b_j)| & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que $(\lambda_k) \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Notemos también que, por (4),

$$\mu_k := \text{máx} \left\{ \frac{1}{k}, \max_{\substack{1 \le l \le m \\ 1 \le j \le q}} \left| \frac{\lambda(T_{n_k}, a_l)}{\lambda(T_{n_k}, b_j)} \right|^{\frac{1}{2}} \right\} \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{5}$$

Trivialmente, por linealidad,

$$T_{n_k} x_k = \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{\lambda(T_{n_k}, b_j)} \cdot \lambda(T_{n_k}, b_j) b_j = y \to y \quad (k \to \infty).$$

Por otro lado, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k x_k = \sum_{j=1}^{q} \frac{\lambda_k}{\lambda(T_{n_k}, b_j)} \beta_j b_j.$$

Notemos que para cualquier $J \in \{1, \dots, q\}$ fijo, tenemos $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda(T_{n_k}, b_J)} \right| \le \mu_k$ en ambos casos $\lambda(T_{n_k}, a_l) \neq 0$ (para algún l) y $\lambda(T_{n_k}, a_l) = 0$ (para todo l). Entonces, debido a (5), $\lambda_k x_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Finalmente, calculamos

$$\lambda_k^{-1} T_{n_k} x = \sum_{l=1}^{m} \lambda_k^{-1} \alpha_l T_{n_k} a_l = \sum_{l=1}^{m} \lambda_k^{-1} \alpha_l \lambda(T_{n_k}, a_l) a_l,$$

que es cero si $\lambda(T_{n_k}, a_l) = 0$ para todo l. En el caso en que $\lambda(T_{n_k}, a_l) \neq 0$ para algún l, tenemos que para todo $L \in \{1, \dots, m\}$,

$$\left| \frac{\lambda(T_{n_k}, a_L)}{\lambda_k} \right| \le \max_{\substack{1 \le l \le m \\ 1 \le j \le q}} \left| \frac{\lambda(T_{n_k}, a_l)}{\lambda(T_{n_k}, b_j)} \right|^{\frac{1}{2}} \le \mu_k.$$

Por tanto, de nuevo por (5), $\lambda_k^{-1} T_{n_k} x \to 0$ cuando $k \to \infty$. En consecuencia, se verifican las hipótesis del Teorema 3.2.1, como queríamos ver. □

Como una consecuencia inmediata, podemos dar un enunciado correspondiente para un único operador, ver el Corolario 3.2.4 siguiente. En este punto, parece oportuno introducir algunas nociones que son análogas a las homólogas de hiperciclicidad, ver [19] y [50, Sección 2].

Supongamos que X, Y son espacios vectoriales topológicos, que (T_n) es una sucesión de aplicaciones lineales continuas entre X e Y, y que T es un operador definido sobre X. Entonces decimos que (T_n) es *hereditariamente supercíclica*, siempre que cada subsucesión (T_{n_k}) sea supercíclica para toda sucesión $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, y decimos que T es *hereditariamente supercíclico* si la sucesión de iteradas (T^n) es hereditariamente supercíclica. Finalmente, decimos que (T_n) es *densamente hereditariamente supercíclica*, siempre que cada subsucesión (T_{n_k}) como antes sea densamente supercíclica. Como en el caso de hiperciclicidad, si T es hereditariamente supercíclico entonces (T^n) es densamente hereditariamente supercíclica.

Corolario 3.2.4. *Sea X un espacio vectorial topológico de Baire metrizable y separable, y sea T un operador sobre X. Supongamos que existen dos subconjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de X que verifican:*

(a) *$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son totales en X.*

(b) *Todo elemento de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un autovector para T tal que*

$$|\lambda(T,a)| < |\lambda(T,b)| \text{ para todo } a \in \mathcal{A} \text{ y todo } b \in \mathcal{B}. \tag{6}$$

Entonces T es hereditariamente supercíclico.

Demostración. Fijemos una sucesión $(m(n)) \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente y hagamos $T_n := T^{m(n)}$. Tenemos que cada vector $e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un autovector para cada T_n, de forma que $\lambda(T_n, e) = \lambda(T, e)^{m(n)}$. Por tanto, debido a (6),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(T_{m(n)}, a)}{\lambda(T_{m(n)}, b)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda(T,a)}{\lambda(T,b)} \right)^{m(n)} = 0$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y todo $b \in \mathcal{B}$. De este modo, se cumplen las condiciones (a)–(b) del Teorema 3.2.3. De hecho, podemos elegir como (n_k) la sucesión de todos los enteros positivos, independientemente de los subconjuntos finitos $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$.

Resumiendo, toda subsucesión $(T^{m(n)})$ de iteradas es supercíclica, como queríamos ver. $\square$

Apuntamos aquí que el Corolario 3.2.4 debe compararse con el siguiente enunciado de Feldman, Miller y Miller dado en [42] para un operador T en un espacio de Hilbert: *T es supercíclico siempre que se verifique, al menos, una de las condiciones siguientes:*

(a) *Existe un $\rho > 0$ tal que* $\bigcup_{\rho-\varepsilon<|\lambda|<\rho} \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ *es total para todo $\varepsilon > 0$.*

(b) *Existe un $\rho \geq 0$ tal que* $\bigcup_{\rho<|\lambda|<\rho+\varepsilon} \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ *es total para todo $\varepsilon > 0$.*

Con una pequeña suposición adicional sobre los autovectores comunes, obtenemos algo más sobre la superciclicidad densa de (T_n). El siguiente resultado se debe comparar con [19, Theorem 3], y se puede obtener también mediante el criterio de superciclicidad dado en [9, Theorem 1.2].

Corolario 3.2.5. *Sea X un espacio vectorial topológico de Baire metrizable y separable y sea (T_n) una sucesión de operadores sobre él. Supongamos que existen dos subconjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de X que verifican:*

(a) *$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son totales en X.*

(b) *Todo vector en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un autovector para cada T_n de tal modo que $\lambda(T_n, b) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $b \in \mathcal{B}$, y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(T_n, a)}{\lambda(T_n, b)} = 0 \quad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}).$$

Entonces (T_n) es densamente hereditariamente supercíclica.

Demostración. Es evidente que, para cada sucesión $\{m(1) < m(2) < \cdots\}$ de enteros positivos, la subsucesión $(T_{m(n)})$ de T_n satisface las condiciones del Teorema 3.2.3. $\square$

Ahora, consideraremos la propiedad de la c-hiperciclicidad, que se encuentra a medio camino entre la hiperciclicidad y la superciclicidad. Decimos que un operador T en un espacio vectorial topológico X es *c-hipercíclico* si λT es hipercíclico para algún escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, necesariamente no nulo.

Por ejemplo, el "backward shift"

$$B : (x_0, x_1, x_2, \dots) \in l^2 \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2$$

en el espacio l^2 de las sucesiones de cuadrado sumable no es hipercíclico (porque su norma es 1) pero sí es c-hipercíclico (luego supercíclico). De hecho, λB es hipercíclico para todo escalar λ de módulo mayor que uno, ver [75]. De acuerdo con esto, introducimos el siguiente concepto. Si (T_n) es una sucesión de aplicaciones lineales continuas entre dos espacios vectoriales topológicos X, Y, entonces decimos que (T_n) es *c-hipercíclica* si y sólo si existe un escalar λ tal que la sucesión $(\lambda^n T_n)$ es hipercíclica. Análogamente podemos dar definiciones para los conceptos de sucesión de operadores densamente c-hipercíclica, hereditariamente c-hipercíclica y densamente hereditariamente c-hipercíclica de operadores, o para un único operador, atendiendo en este caso a la sucesión de sus iteradas (con el escalar λ independiente tanto de vectores como de subsucesiones (n_k)).

En el siguiente teorema damos un criterio de autovalores para la c-hiperciclicidad de un único operador. Para su prueba, se ha tenido en cuenta que si u es un autovector para $c^n T_n$ (para cT respectivamente) entonces $\lambda(c^n T_n, u) = c^n \lambda(T_n, u)$ $(\lambda(cT, u) = c\lambda(T, u)$, respectivamente).

Teorema 3.2.6. *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico de Baire metrizable y separable, y que T y T_n $(n \in \mathbb{N})$ son operadores en X. Tenemos:*

(1) *Supongamos que existen dos subconjuntos totales $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ en X y números α, β con $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ que verifican que, para cada par de subcon-*

juntos finitos $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{A}$ *y* $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{B}$*, existe una sucesión* $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ *tal que todo vector en* $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ *es un autovector para cada* T_{n_k} *de tal modo que*

$$\limsup_{k\to\infty} |\lambda(T_{n_k}, a)|^{\frac{1}{n_k}} \leq \alpha \text{ para todo } a \in \mathcal{F}_1$$

y

$$\liminf_{k\to\infty} |\lambda(T_{n_k}, b)|^{\frac{1}{n_k}} \geq \beta \text{ para todo } b \in \mathcal{F}_2.$$

Entonces (T_n) *es densamente c-hipercíclica.*

(2) *Supongamos que existen dos subconjuntos totales* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *en* X *y números* α*,* β *con* $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ *que verifican que todo vector de* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *es un autovector para cada* T_n *de tal modo que*

$$\limsup_{n\to\infty} |\lambda(T_n, a)|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha \text{ para todo } a \in \mathcal{A}$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} |\lambda(T_n, b)|^{\frac{1}{n}} \geq \beta \text{ para todo } b \in \mathcal{B}.$$

Entonces (T_n) *es densamente hereditariamente c-hipercíclica.*

(3) *Si existe una constante* $\alpha > 0$ *tal que los conjuntos*

$$\bigcup_{|\lambda|<\alpha} \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \quad y \quad \bigcup_{|\lambda|>\alpha} \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$$

son totales en X*, entonces* T *es hereditariamente c-hipercíclico.*

Demostración. Con objeto de probar (1), tomemos tres números γ, γ_1 y γ_2 tales que $\alpha < \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 < \beta$.

Ya que $\limsup_{k\to\infty} |\lambda(T_{n_k}, a)|^{\frac{1}{n_k}} \leq \alpha$ para todo $a \in \mathcal{F}_1$, se tiene que, por ser $\mathcal{F}_1$ finito, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda(T_{n_k}, a)|^{1/n_k} < \gamma_1$ para todo $k \geq k_0$ y todo $a \in \mathcal{F}_1$, es decir, $|\lambda(T_{n_k}, a)| \leq \gamma_1^{n_k}$, luego

$$\left|\frac{\lambda(T_{n_k}, a)}{\gamma^{n_k}}\right| < \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{n_k} \quad (k \geq k_0,\ a \in \mathcal{F}_1).$$

Por tanto $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\lambda(T_{n_k}, a)}{\gamma^{n_k}} = 0$, luego

$$\lim_{k\to\infty} \lambda\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n_k} T_{n_k}, a\right) = 0 \quad (a \in \mathcal{F}_1).$$

De igual modo, partiendo de que $\liminf_{k\to\infty} |\lambda(T_{n_k}, b)|^{\frac{1}{n_k}} \geq \beta$ para todo $b \in \mathcal{F}_2$, obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n_k} T_{n_k}, b\right) = \infty \quad (b \in \mathcal{F}_2).$$

Luego por el Teorema 1.2.3, la sucesión $\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n T_n\right)$ es densamente hipercíclica, así que (T_n) es densamente c-hipercíclica.

Para demostrar (2) basta tomar una subsucesión (T_{n_k}) de (T_n) y comprobar que cumple las hipótesis del apartado (1), lo cual es evidente a partir de las hipótesis de (2). Al final resultará que $\left(\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{n_k} T_{n_k}\right)$ es densamente hipercíclica, con γ como antes. Así que γ no depende de (n_k), luego (T_n) es densamente hereditariamente c-hipercíclica.

Para demostrar (3) hacemos

$$\mathcal{A} = \bigcup_{|\lambda|<\alpha} \mathrm{Ker}\,(T - \lambda I) \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \bigcup_{|\lambda|>\alpha} \mathrm{Ker}\,(T - \lambda I)$$

Notemos que $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ ($b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$) si y sólo si a (b) es un autovector de T con $|\lambda(T, a)| < \alpha$ ($|\lambda(T, b)| > \alpha$, resp.). Es claro que $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ son totales en X.

Si hacemos $T_n = T^n$, entonces $\lambda(T_n, e) = (\lambda(T, e))^n$, luego

$$\lambda((1/\alpha)^n T_n, a) = \left(\frac{\lambda(T, a)}{\alpha}\right)^n \to 0 \ (n \to \infty) \quad (a \in \mathcal{A})$$

y

$$\lambda((1/\alpha)^n T_n, b) = \left(\frac{\lambda(T, b)}{\alpha}\right)^n \to \infty \ (n \to \infty) \quad (b \in \mathcal{B})$$

Por lo tanto, por [19, Theorem 3], $((1/\alpha)^n T_n)$ es hereditariamente hipercíclica, por lo que T es hereditariamente c-hipercíclico. $\square$

Queremos terminar esta sección con algunos comentarios sobre la existencia de *grandes subespacios vectoriales invariantes de vectores supercíclicos.* Herrero [53, Sección 4], Bourdon [33] y Bès [27] establecieron a lo largo de los años 90 que si T es un operador hipercíclico en un espacio X localmente convexo (real o complejo), existe un subespacio vectorial *denso* T–invariante $M \subset X$ tal que cada vector no nulo en M es hipercíclico para T (Wengenroth [82] ha demostrado muy recientemente que la hipótesis de convexidad local puede suprimirse). Bernal [20] probó que si X es Banach entonces M puede escogerse con *máxima* cardinalidad, es decir, con el cardinal del continuo.

El punto crucial en la demostración de los resultados anteriores es el hecho de que el espectro puntual $\sigma_p(T^*)$ del adjunto T^* –esto es, el conjunto de sus autovalores– de T es vacío bajo la suposición de que T es hipercíclico, ver [58]. Por lo tanto, si T es supercíclico y $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, la demostración de [53], [33], [27], [20] puede seguirse paso a paso comenzando con la existencia de un vector supercíclico para T. Esto daría lugar a un espacio denso T–invariante $M \subset X$, el cual es supercíclico en el sentido anterior. De hecho, esto es cierto "casi" siempre, porque Herrero [53, Proposition 3.1] estableció que si T es supercíclico entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ o $\{\alpha\}$ (con $\alpha \neq 0$) (él da una demostración para espacios de Hilbert, mientras que Ansari y Bourdon [7, Theorem 3.2] dan una demostración para espacios de Banach, que es bastante diferente de la de Herrero). El caso $\sigma_p(T^*) \neq \emptyset$ es posible. Por ejemplo, si L es un operador hipercíclico en un espacio de Hilbert H y $X := H \oplus \mathbb{K}$ entonces el operador

$$T : (x, \lambda) \in X \mapsto (Lx, \lambda) \in X \tag{7}$$

es supercíclico (ver [53, Lemma 3.2]) y $\sigma_p(T^*) = \{1\}$. Montes y Salas [71, Proposition 4.3] probaron que si T es un operador sobre un espacio de Banach X que verifica las hipótesis de su criterio de superciclicidad [71, Theorem 2.2] (ellos, a su vez, probaron que éste es equivalente a [77, Lemma 2.6]) entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. Tales hipótesis son la existencia de sucesiones $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, $(\lambda_k) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, de subconjuntos densos X_0, $Y_0 \subset X$ y de una aplicación $S : Y_0 \to Y_0$ tales que $TS = I$, $\lambda_k T_{n_k} x \to 0$ para todo $x \in X_0$ y $\lambda_k^{-1} S^{n_k} y \to 0$ para todo $y \in Y_0$. En [71, Section 8] afirman que si T es "hereditariamente supercíclico" en un espacio de Banach entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, pero su concepto de superciclicidad hereditaria es diferente del nuestro. Efectivamente, si L es hereditariamente hipercíclico en el ejemplo dado en (7) entonces es fácil ver que el correspondiente operador T en $H \oplus \mathbb{K}$ es hereditariamente supercíclico (en nuestro sentido); sin embargo, $\sigma_p(T^*) = \{1\} \neq \emptyset$ esta vez. Incidentalmente, la noción definida por Ansari en [5, Section 3] coincide con la nuestra, y ella establece una interesante condición suficiente de superciclicidad hereditaria basada en sucesiones "escalables", ver [5, Theorem 5].

Concluimos esta sección mostrando que, si T es un operador en un espacio vectorial topológico que verifica las hipótesis de nuestro (aparentemente más débil) criterio de superciclicidad establecido en el Teorema 3.2.1, entonces el espectro puntual de su adjunto es vacío, dando así la existencia de una gran variedad lineal supercíclica bajo adecuadas condiciones sobre el espacio X. La demostración difiere bastante de la de Montes–Salas.

Teorema 3.2.7. *Supongamos que T es un operador en un espacio vectorial topológico X, de tal modo que existen subconjuntos densos X_0, Y_0 de X que verifican la siguiente condición: Dados $x \in X_0$ e $y \in Y_0$, existen sucesiones $(x_j) \subset X$, $(\lambda_j) \subset \mathbb{K}\setminus\{0\}$ y $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ con $\lambda_j x_j \to 0$, $\lambda_j^{-1} T^{n_j} x \to 0$ y $T^{n_j} x_j \to y$ cuando $j \to \infty$. Entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$.*

Demostración. Como es usual, llamamos X^* al espacio dual topológico de

X. Por reducción al absurdo, supongamos que existe algún $\alpha \in \sigma_p(T^*)$. Entonces existe un autovector $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ para dicho α, esto es, $T^*\varphi = \alpha\varphi$. Puesto que $\varphi \neq 0$ y X_0, Y_0 son densos, podemos encontrar vectores $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ con $\varphi(x) \neq 0$ y $\varphi(y) \neq 0$. Consideremos las sucesiones (x_j), (λ_j), (n_j) que existen por hipótesis para tales vectores x e y. Puesto que $\lambda_j x_j \to 0$ y φ es lineal y continua, tenemos

$$\lambda_j \varphi(x_j) \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{8}$$

Por otro lado, $\varphi(T^n z) = \alpha^n \varphi(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in X$, luego

$$\lambda_j^{-1} \alpha^{n_j} \varphi(x) = \varphi(\lambda_j^{-1} T^{n_j} x) \to \varphi(0) = 0.$$

Por lo tanto

$$\lambda_j^{-1} \alpha^{n_j} \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{9}$$

porque $\varphi(x) \neq 0$. Finalmente,

$$\alpha^{n_j} \varphi(x_j) = \varphi(T^{n_j} x_j) \to \varphi(y) \neq 0 \quad (j \to \infty).$$

Pero, por (8) y (9),

$$\alpha^{n_j} \varphi(x_j) = (\lambda_j^{-1} \alpha^{n_j})(\lambda_j \varphi(x_j)) \to 0 \quad (j \to \infty),$$

lo cual es absurdo. $\square$

3.3. Superciclicidad y c-hiperciclicidad de sucesiones de operadores diferenciales

Nuestro objetivo en esta sección es dar condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de operadores diferenciales sea supercíclica o c-hipercíclica. Hacemos notar que hiperciclicidad implica c-hiperciclicidad y no-equicontinuidad, y que c-hiperciclicidad implica superciclicidad. Desde luego, en general, no se verifica ninguna implicación más entre estas cuatro propiedades. Ilustraremos este hecho con algunos ejemplos. Todos los operadores están considerados en $H(G)$, donde G es un dominio de $\mathbb{C}^N$. No obstante, en la Sección 3.4 consideraremos otros espacios de funciones holomorfas.

De modo similar a como comentábamos en la Sección 2.2, el teorema de Malgrange-Ehrenpreis conjuntamente con la Proposición 3.2.2 garantizan que, si $G \subset \mathbb{C}^N$ es un dominio de Runge, entonces una sucesión de operadores diferenciales $(\Phi_n(D))$ es (hereditariamente) supercíclica en $H(G)$ si y sólo si es densamente (hereditariamente, resp.) supercíclica. Un hecho análogo ocurre con la c-hiperciclicidad de sucesiones $(\Phi_n(D))$. Por este motivo omitiremos en esta sección el adverbio "densamente" en las conclusiones de los resultados.

Comenzamos con una afirmación que caracteriza la superciclicidad en un caso especial. Señalemos que, en el mismo caso, para la hiperciclicidad sólo habíamos sido capaces de obtener condiciones suficientes, ver Teorema 2.2.5. De ahora en adelante, suponemos que Φ, Φ_n $(n \in \mathbb{N})$ son funciones enteras en $\mathbb{C}^N$ de *tipo subexponencial* (o de *tipo exponencial*, si $G = \mathbb{C}^N$), así que $\Phi(D), \Phi_n(D)$ $(n \in \mathbb{N})$ son operadores diferenciales bien definidos en $H(G)$.

Teorema 3.3.1. *Sean un dominio de Runge $G \subset \mathbb{C}^N$, una sucesión $(c_n) \subset \mathbb{C}$ y una función entera Φ como antes. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *La sucesión $(c_n\Phi(D)^n)$ es supercíclica en $H(G)$.*

(b) *La función Φ no es constante, y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es infinito.*

Demostración. Es evidente que (a) implica (b). Supongamos que (b) es cierta. Entonces Φ no es constante y podemos escribir

$$\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\} = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$$

para alguna sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$. Por [18, Theorem 8(a)] aplicado a $\Phi_k := \Phi^{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ obtenemos que $(\Phi(D)^{n_k})$ es hipercíclica (es también posible aplicar el Teorema 2.2.2 bajo la condición (P), ya que, por ser Φ no constante, existen abiertos no vacíos A, B $\subset \mathbb{C}^N$ tales que $|\Phi| < 1$ en A y $|\Phi| > 1$ en B). Definimos λ_k $(k \in \mathbb{N})$ como $\lambda_k = 1/c_{n_k}$, y sea $T_n := c_n \Phi(D)^n$. Entonces $(\lambda_k T_{n_k})$ es hipercíclica, por tanto (T_{n_k}) es supercíclico por la Proposición 3.2.2. En consecuencia, trivialmente, (T_n) es supercíclica. □

Observación 3.3.2. Del mismo modo podemos probar que la sucesión $(c_n \Phi(D)^n)$ es hereditariamente supercíclica si y sólo si Φ no es constante y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_n = 0\}$ es finito.

A continuación, damos una condición necesaria y otra suficiente para la c-hiperciclicidad de sucesiones de la forma $(c_n D^{p(n)})$, donde los $p(n)$ son multi-índices y (c_n) es una sucesión compleja. En tal caso, la sucesión de funciones enteras asociada es $\Phi_n(z) = c_n z^{p(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, para la cual se tiene $\alpha := \alpha((\Phi_n)) = \limsup_{n\to\infty} (p(n)!|c_n|)^{1/|p(n)|}$; en particular, $\alpha = \limsup_{n\to\infty} (n!|c_n|)^{1/n}$ si $N = 1$ y $(\Phi_n(D)) = (c_n D^n)$. Notemos pues que nuestra notación es consistente con la de [13].

Teorema 3.3.3. *Supongamos que $G \subset \mathbb{C}^N$ es un dominio, que (c_n) es una sucesión compleja, y que $(p(n))$ es una sucesión de multi-índices que verifican $\liminf_{n\to\infty} |p(n)|/n > 0$. Si la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es* c*-hipercíclica entonces $\alpha > 0$.*

Demostración. Consideremos la sucesión $\Phi_n(z) = c_n z^{p(n)}$ $(n \in \mathbb{N}, z \in$

$\mathbb{C}^N$). Entonces $(\Phi_n(D))$ es c-hipercíclica. Por tanto existe una constante $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $(\Psi_n(D))$ es hipercíclica, donde $\Psi_n(z) := c^n z^{p(n)}$. Puesto que $|p(n)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y la sucesión $(\Psi_n(0))$ es, trivialmente, acotada, el Teorema 2.3.1 nos asegura que $\rho(G) \leq \alpha((\Psi_n))$. Pero $0 < \rho(G)$ y $\alpha((\Psi_n)) \leq \alpha \cdot \limsup_{n\to\infty} |c|^{n/|p(n)|}$, por lo tanto $0 < \alpha \cdot \limsup_{n\to\infty} |c|^{n/|p(n)|}$. El último lím sup es finito (de hecho, ≤ 1) si $|c| \leq 1$, pero si $|c| > 1$ es también finito porque $\limsup_{n\to\infty} n/|p(n)| < \infty$. Esto hace que α deba ser positivo. □

Teorema 3.3.4. *Supongamos que $G \subset \mathbb{C}^N$ es un dominio de Runge y que $(p(n))$ es una sucesión de multi-índices con $|p(n)| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Supongamos también que (c_n) es una sucesión compleja. Entonces la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es c-hipercíclica siempre que se verifiquen, al menos, una de las condiciones siguientes:*

(a) $\alpha = \infty$.

(b) $\alpha > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} |p(n)|/n = 0$.

(c) *G es acotado,* $\alpha > 0$ *y* $\limsup_{n\to\infty} |p(n)|/n < \infty$.

Demostración. Consideremos otra vez la sucesión $\Phi_n(z) = c_n z^{p(n)}$, de tal modo que $\alpha((\Phi_n)) = \alpha$.

Si se verifica (a) entonces, evidentemente, $\alpha \geq R(G)$, luego $(c_n D^{p(n)})$ es hipercíclica por el Teorema 2.3.6. Luego es c-hipercíclica.

Si se verifica (b), tenemos que $\alpha > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{|p(n)|} = \infty$, por lo tanto $2^{n/|p(n)|} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} (p(n)! 2^n |c_n|)^{1/|p(n)|} = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} 2^{n/|p(n)|} = \infty \geq R(G),$$

de donde $(2^n c_n D^{p(n)})$ es hipercíclica de nuevo por el Teorema 2.3.6. Pero esto nos dice que $(c_n D^{p(n)})$ es c–hipercíclica.

Supongamos, finalmente, que se verifica (c). Entonces $R(G) < \infty$, $\alpha > 0$ y existe una constante $K \in (0,\infty)$ con $n \geq K|p(n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Elegimos $t > 1$ tal que $t \geq (R(G)/\alpha)^{1/K}$. Tenemos así que

$$\limsup_{n\to\infty}(p(n)!t^n|c_n|)^{1/|p(n)|} \geq t^K \cdot \limsup_{n\to\infty}(p(n)!|c_n|)^{1/|p(n)|} \geq$$

$$\geq \frac{R(G)}{\alpha}\cdot\alpha = R(G),$$

luego, una vez más, $(t^n c_n D^{p(n)})$ es hipercíclica debido al Teorema 2.3.6, con lo que finaliza la demostración. □

Corolario 3.3.5. *Sea $G \subset \mathbb{C}^N$ un dominio de Runge acotado, (c_n) una sucesión compleja y $(p(n)) \subset \mathbb{N}_0^N$ una sucesión de multi-índices con*

$$0 < \liminf_{n\to\infty}\frac{|p(n)|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{|p(n)|}{n} < \infty. \tag{10}$$

Entonces la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es c-*hipercíclica si y sólo si $\alpha > 0$.*

Demostración. Si la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es c-hipercíclica, de la condición $\liminf_{n\to\infty}\frac{|p(n)|}{n} > 0$ y del Teorema 3.3.3 se deduce que $\alpha > 0$.

Si $\alpha > 0$ y se verifica (10) puede ocurrir que $\alpha = \infty$ (luego $(c_n D^{p(n)})$ es c-hipercíclica por la condición (a) del Teorema 3.3.4), o que $\alpha < \infty$; pero ya que G es acotado y $\limsup_{n\to\infty}\frac{|p(n)|}{n} < \infty$, obtenemos que $(c_n D^{p(n)})$ es c-hipercíclica al cumplirse la condición (c) del teorema citado anteriormente.

□

Observación 3.3.6. Supongamos que G es un polidominio en $\mathbb{C}^N$, es decir, es un producto $G = G_1 \times \cdots \times G_N$ de dominios en $\mathbb{C}$. Si $\alpha = 0$ para $\Phi_n(z) = c_n z^{p(n)}$ entonces puesto que $(\Phi_n(0))$ está acotada, la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es equicontinua en $H(G)$ por el Corolario 2.3.4. Recíprocamente, si $G_j \neq \mathbb{C}$ $(j = 1,\ldots,N)$ y $(c_n D^{p(n)})$ es equicontinua entonces $\alpha = 0$ debido al Teorema 2.3.8. De este modo, si $G = G_1 \times \cdots \times G_N \subset \mathbb{C}^N$ es un polidominio de Runge acotado y $(p(n))$ verifica (10) entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) La sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es c-hipercíclica.

(ii) La sucesión $(c_n D^{p(n)})$ no es equicontinua.

(iii) $\alpha > 0$.

En el caso $G = \mathbb{C}^N$, el Teorema 2.3.7 muestra que si $|p(n)| \to \infty$ entonces la sucesión $(c_n D^{p(n)})$ es hipercíclica si y sólo si no es equicontinua si y sólo si $\alpha = \infty$. No es difícil demostrar que suponiendo (10) todas estas propiedades son equivalentes a la c-hiperciclicidad de $(c_n D^{p(n)})$ en $H(\mathbb{C}^N)$.

Con todo este material estamos en condiciones de proporcionar algunos ejemplos que clarifican las relaciones existentes entre todos los tipos de comportamiento "salvaje" considerados hasta ahora para sucesiones de operadores diferenciales.

Ejemplos 3.3.7.

(1) Para cualquier dominio $G \subset \mathbb{C}^N$, la sucesión $(T_n) := (0)$ es, trivialmente, equicontinua en $H(G)$ pero no supercíclica.

(2) Si $G = \mathbb{C}$ entonces la sucesión $\left(\frac{1}{n!} D^n\right)$ es supercíclica por el Teorema 3.3.1 y equicontinua por [13, Theorem 4]. Sin embargo, no es c-hipercíclica porque $\alpha = 1 \neq \infty$.

(3) Si $G = \mathbb{D}$, la sucesión $\left(\frac{1}{n!2^n} D^n\right)$ no es equicontinua ni hipercíclica, pero sí es c-hipercíclica, ya que $\alpha = \frac{1}{2}$, por tanto $\alpha > 0$ y $\alpha < 1 = \rho(G)$; aplicamos ahora el Teorema 3.3.4 (con $N = 1$ y $p(n) = n$) junto con [13, Theorems 2–3].

(4) Si $G = \{z = x + iy : y > 0\}$, la sucesión $\left(\frac{1}{n!}D^n\right)$ es supercíclica por el Teorema 3.3.1, pero ni es equicontinua ($\alpha = 1 \neq 0$) ni c-hipercíclica. En efecto, si fuera c-hipercíclica entonces $\left(\frac{c^n}{n!}D^n\right)$ sería hipercíclica para alguna constante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero en ese caso debería ser $\infty = \rho(G) \leq \alpha\left(\left(\frac{c^n z^n}{n!}\right)\right) = |c|$ por [13, Theorem 2], que es una contradicción.

(5) Para cualquier dominio $G \subset \mathbb{C}^N$, la sucesión $(T_n) := (nI)$ no es ni equicontinua ni supercíclica.

(6) Hasta este momento *no* conocemos ninguna sucesión equicontinua $(\Phi_n(D))$ que sea c-hipercíclica. Sin embargo, esta situación es posible en otros ámbitos. Por ejemplo, el "backward shift" B mencionado en la sección anterior es c-hipercíclico en l^2 y la sucesión (B^n) es equicontinua pues $||B^n|| = 1$ para todo n.

En conexión con el Ejemplo 3.3.7(4), anotemos aquí que en [42, Section 8] se dan ejemplos de operadores sobre un espacio de Hilbert que son supercíclicos pero no c-hipercíclicos.

A continuación, podemos usar el criterio de autovalores dado en la Sección 3.2 para obtener condiciones suficientes de superciclicidad y de c-hiperciclicidad de una sucesión general $(\Phi_n(D))$ de operadores diferenciales en $H(G)$. Los dos resultados siguientes completan los dados en [18, Theorems 8–9], [19, Theorem 3] y el Teorema 2.2.2 del capítulo anterior, para hiperciclicidad. Recordemos que si $\Phi(z) = \sum_{|p|\geq 0} a_p z^p \in H(\mathbb{C}^N)$ y Φ no es idénticamente nula, su multiplicidad para el cero en el origen es $m(\Phi) = \text{mín}\{|p| : a_p \neq 0\}$. Recordemos asimismo que $\Phi(D)e_c = \Phi(c)e_c$ para todo $c \in \mathbb{C}^N$, luego e_c es un autovector de $\Phi(D)$ con autovalor $\lambda(\Phi(D), e_c) = \Phi(c)$.

Teorema 3.3.8. *Sean un dominio de Runge $G \subset \mathbb{C}^N$ y una sucesión (Φ_n) de funciones enteras. Entonces la sucesión de operadores $(\Phi_n(D))$ es supercíclica si se verifica, al menos, una de las siguientes propiedades:*

(P) *Existen dos conjuntos de* $\mathbf{E}$*–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que para todo par de subconjuntos finitos $F_1 \subset A$ y $F_2 \subset B$ existe una sucesión creciente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ con $\Phi_{n_j}(b) \neq 0$ $(j \in \mathbb{N},\ b \in F_2)$ y*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\Phi_{n_j}(a)}{\Phi_{n_j}(b)} = 0 \quad (a \in F_1,\ b \in F_2). \tag{11}$$

(Q) *Existe un conjunto de* $\mathbf{E}$*–unicidad B en $\mathbb{C}^N$ tal que para todo subconjunto finito $F \subset B$ existe una sucesión creciente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que $\Phi_{n_j}(b) \neq 0$ $(j \in \mathbb{N}, b \in B)$ y $m(\Phi_{n_j}) \to \infty$ cuando $j \to \infty$.*

Demostración. Recordemos que si S es un conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad su conjunto de exponenciales $M(S)$ es total en $H(\mathbb{C}^N)$ (Lema 2.1.1), y por tanto en $H(G)$, ya que G es un dominio de Runge. Observemos que el conjunto $\{z^p : p \in \mathbb{N}_0^N\}$ es también total en $H(G)$ puesto que su subespacio lineal generado es el conjunto de todos los polinomios. Vamos a intentar aplicar el Teorema 3.2.3 con $X = H(G)$ y $T_n = \Phi_n(D)$, $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que se verifica (P), y hagamos $\mathcal{A} = M(A)$, $\mathcal{B} = M(B)$, que son totales en X. Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos finitos, entonces existen subconjuntos finitos $F_1 \subset A$, $F_2 \subset B$ con $\mathcal{F}_1 = M(F_1)$, $\mathcal{F}_2 = M(F_2)$. Por hipótesis, existe una sucesión $\{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\Phi_{n_j}(b) \neq 0$ para todo j y todo $b \in B$. Además se verifica (11). Por lo tanto $\lambda(T_{n_j}, e_b) \neq 0$ $(j \in \mathbb{N}, b \in B)$ y

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\lambda(T_{n_j}, e_a)}{\lambda(T_{n_j}, e_b)} = \lim_{j\to\infty} \frac{\Phi_{n_j}(a)}{\Phi_{n_j}(b)} = 0 \quad (a \in F_1, b \in F_2).$$

Entonces $(\Phi_n(D))$ es supercíclica por el Teorema 3.2.3.

Con la propiedad (Q), la demostración es parecida, ya que basta reemplazar $\mathcal{A}$ por el conjunto de monomios $\mathcal{A} = \{z^p : p \in \mathbb{N}_0^N\}$. Notemos que dado $p \in \mathbb{N}_0^N$ la función z^p es un autovector de $\Phi_{n_j}(D)$ con $\lambda(\Phi_{n_j}(D), z^p) = 0$ debido a la hipótesis "$m(\Phi_{n_j}) \to \infty$ $(j \to \infty)$". De este modo, una aplicación del Teorema 3.2.3 resuelve de nuevo el problema. $\square$

Ejemplo 3.3.9. Consideremos una sucesión $(p(n)) \subset \mathbb{N}_0^N$ con $|p(n)| \to \infty$ $(n \to \infty)$, un dominio de Runge $G \subset \mathbb{C}^N$ y *cualquier* sucesión (Φ_n) de funciones enteras no nulas en $\mathbb{C}^N$ de tipo subexponencial (o sólo $\Phi_n \in \mathbf{E}$ si $G = \mathbb{C}^N$). Entonces la sucesión $(D^{p(n)}\Phi_n(D))$ es supercíclica. En efecto, definamos las funciones enteras $\Psi_n(z) := z^{p(n)}\Phi_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$; entonces $(D^{p(n)}\Phi_n(D)) = (\Psi_n(D))$ y

$$m(\Psi_n) \geq |p(n)| \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Ahora, consideremos el conjunto

$$B := \mathbb{C}^N \setminus \left[\{z \in \mathbb{C}^N : z_j = 0 \text{ para algún } j\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{-1}(\{0\}) \right].$$

Cada conjunto de ceros $\Phi_n^{-1}(\{0\})$ es un cerrado de $\mathbb{C}^N$ con interior vacío, luego B es una intersección numerable de abiertos densos en $\mathbb{C}^N$. Por el teorema de Baire, B es denso, así que B es un conjunto de unicidad (luego, trivialmente, es un conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad) y, por la definición de B, $\Psi_n(b) \neq 0$ para todo $b \in B$. En consecuencia, $(\Psi_n(D))$ es supercíclica debido al Teorema 3.3.8. De hecho, es hereditariamente supercíclica, ver la condición (Q) en el Teorema 3.3.10 más abajo. Pero observemos que puede no ser c-hipercíclica, como muestra el Ejemplo 3.3.7(2).

Enunciamos a continuación un resultado correspondiente para las propiedades de superciclicidad hereditaria, c-hiperciclicidad y c-hiperciclicidad hereditaria.

Teorema 3.3.10. *Sean dados un dominio de Runge $G \subset \mathbb{C}^N$ y una sucesión $(\Phi_n(D))$ de funciones enteras. Tenemos:*

(1) *La sucesión $(\Phi_n(D))$ es hereditariamente supercíclica si se verifica, al menos, una de las siguientes propiedades:*

(P) *Existen dos conjuntos de* $\mathbf{E}$*–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ tales que $\Phi_n(b) \neq 0$ $(n \in \mathbb{N},\ b \in B)$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n(a)}{\Phi_n(b)} = 0 \quad (a \in A,\ b \in B).$$

(Q) *Existe un conjunto de* $\mathbf{E}$*–unicidad B en $\mathbb{C}^N$ tal que $\Phi_n(b) \neq 0$ $(n \in \mathbb{N},\ b \in B)$ y $\lim_{n\to\infty} m(\Phi_n) = \infty$.*

(2) *La sucesión $(\Phi_n(D))$ es* c*-hipercíclica si se cumple la siguiente propiedad: Existen dos conjuntos A, B en $\mathbb{C}^N$ y números α, β con $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ tales que para cada par de subconjuntos finitos $F_1 \subset A$ y $F_2 \subset B$ existe una sucesión creciente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ que verifica*

$$\limsup_{j\to\infty} |\Phi_{n_j}(a)|^{1/n_j} \leq \alpha \ (a \in F_1) \ \text{y} \ \liminf_{j\to\infty} |\Phi_{n_j}(b)|^{1/n_j} \geq \beta \ (b \in F_2).$$

(3) *La sucesión $(\Phi_n(D))$ es hereditariamente* c*-hipercíclica si se verifica la siguiente propiedad: Existen dos conjuntos de* $\mathbf{E}$*–unicidad A, B en $\mathbb{C}^N$ que verifican*

$$\sup_{a\in A} \limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(a)|^{1/n} < \inf_{b\in B} \liminf_{n\to\infty} |\Phi_n(b)|^{1/n}.$$

Demostración. Respecto del apartado (1), es evidente a partir del Teorema 3.3.8 que, bajo las actuales condiciones (P) o (Q), cada subsucesión $(\Phi_{m_k}(D))$ es supercíclica, luego $(\Phi_n(D))$ es hereditariamente supercíclica.

Para demostrar (2) utilizamos el apartado (1) del Teorema 3.2.6, haciendo

$$\mathcal{A} = M(A),\ \mathcal{B} = M(B),\ \mathcal{F}_1 = M(F_1),\ \mathcal{F}_2 = M(F_2) \ \text{ y } T_n = \Phi_n(D) \ (n \in \mathbb{N}).$$

Tenemos

$$\limsup_{j\to\infty} |\lambda(T_{n_j}, e_a)|^{1/n_j} = \limsup_{j\to\infty} |\Phi_{n_j}(a)|^{1/n_j} \le \alpha \quad (e_a \in \mathcal{F}_1)$$

$$\liminf_{j\to\infty} |\lambda(T_{n_j}, e_b)|^{1/n_j} = \liminf_{j\to\infty} |\Phi_{n_j}(b)|^{1/n_j} \ge \beta \quad (e_b \in \mathcal{F}_2),$$

por lo que $(\Phi_n(D))$ es c-hipercíclica.

Para demostrar (3), utilizaríamos el apartado (2) del Teorema 3.2.6. Omitimos los detalles por ser análogos. □

3.4. Hiperciclicidad y superciclicidad en otros espacios de funciones holomorfas

En esta corta sección generalizamos un reciente resultado debido a Costakis. Específicamente, y con nuestra terminología, él prueba en [36, Theorem 2.11] que la sucesión de restricciones

$$D^n|_Z : f \in Z \mapsto f^{(n)} \in H(\mathbb{D}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

es densamente hipercíclica, siempre que X sea uno de los espacios $A(\mathbb{D})$ (= el álgebra del disco), $H^p(\mathbb{D})$ (= el espacio de Hardy, $0 < p < \infty$), $B^q(\mathbb{D})$ (= el espacio de Bergman, $0 < q < \infty$), dotados cada uno de ellos con su topología habitual, ver [8] y [40]. En concreto, en $A(\mathbb{D})$ consideramos la norma del máximo, en $H^p(\mathbb{D})$ consideramos la norma

$$||f|| = \left(\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p},$$

mientras que en $B^q(\mathbb{D})$ la norma es

$$||f|| = \left(\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \, \frac{dxdy}{\pi}\right)^{1/q}.$$

Tales normas hacen que los espacios correspondientes sean de Banach.

Mostramos aquí que algunos de los resultados de esta memoria sobre diversos tipos de ciclicidad de sucesiones $(\Phi_n(D))$ siguen siendo válidos cuando el espacio inicial $H(G)$ se sustituye por otro más pequeño $Z \subset H(G)$ con una topología más fina.

En lo que sigue denotaremos por G un dominio de Runge de $\mathbb{C}^N$, mientras que Z será un espacio vectorial topológico que verifique las tres condiciones siguientes:

(a) Z es un espacio de Baire.

(b) $H(\mathbb{C}^N) \subset Z \subset H(G)$ con inclusiones continuas.

(c) El conjunto $H(\mathbb{C}^N)$ es denso en Z.

Por supuesto, el conjunto $H(\mathbb{C}^N)$ debe considerarse aquí como la colección de restricciones a G de todas las funciones enteras en $\mathbb{C}^N$. Notemos que la segunda inclusión (continua) de (b) garantiza la continuidad de cada restricción $\Phi_n(D)|_Z : Z \to H(G)$.

Si $G = \mathbb{D}$ y $Z = A(\mathbb{D}), H^p(\mathbb{D})$ o $B^q(\mathbb{D})$ entonces Z claramente satisface (a)–(c). De hecho, en cada uno de estos tres casos Z es un F-espacio donde los polinomios son densos; además, la convergencia uniforme en la clausura de $\mathbb{D}$ implica la convergencia en Z, y esto, a su vez, implica la convergencia local uniforme en $\mathbb{D}$.

Si analizamos cuidadosamente los criterios de suficiencia dados en este capítulo y en el anterior –así como en [13], [18], [19]– para hiperciclicidad, superciclicidad o c-hiperciclicidad de una sucesión $\Phi_n(D) : H(G) \to H(G)$ de operadores diferenciales, entonces podemos darnos cuenta de que sus demostraciones se apoyan en las siguientes propiedades:

(1) El conjunto de exponenciales $M(S) = \{e_c : c \in S\}$ –donde S es un conjunto de **E**–unicidad– es denso en $H(G)$.

(2) El conjunto de los polinomios es denso en $H(G)$.

(3) El espacio $H(G)$ es de Baire como espacio inicial, y metrizable separable como espacio final.

(4) Si Z es un espacio vectorial topológico y (μ_j) es una sucesión de escalares que tienden a cero, entonces $\mu_j u \to 0$ en Z cuando $j \to \infty$, para todo $u \in Z$.

Esta última propiedad se usa en las demostraciones de los enunciados que involucran autovalores. Por otro lado, es fácil ver que si Z verifica (c) junto con la primera inclusión continua de (b) entonces el conjunto de los polinomios y cada conjunto $M(S)$ correspondiente a un conjunto de $\mathbf{E}$–unicidad S son densos en Z.

En consecuencia, bajo las condiciones anteriores (a)–(c), todos los resultados funcionan para la sucesión de restricciones $(\Phi_n(D)|_Z)$, generalizando así el resultado de Costakis. Para finalizar el capítulo vamos a dar, a título de ejemplo, una de tales generalizaciones, específicamente la del Teorema 3.3.8.

Teorema 3.4.1. *Sea $G \subset \mathbb{C}^N$ un dominio de Runge y sea (Φ_n) una sucesión de funciones enteras. Supongamos que Z es un espacio vectorial topológico que verifica las condiciones* (a), (b) *y* (c) *anteriores. Supongamos también que (Φ_n) cumple al menos una de las propiedades* (P), (Q) *del enunciado del Teorema* 3.3.8. *Entonces la sucesión $\Phi_n(D)|_Z : Z \to H(G)$ $(n \in \mathbb{N})$ es densamente supercíclica.*

De manera análoga se enunciarían los restantes criterios de suficiencia a los que nos referíamos anteriormente para la restricción a Z de una sucesión de operadores diferenciales.

Capítulo 4

U-operadores

4.1. Introducción

Comenzamos con un poco de historia, con el objeto de motivar y enfocar adecuadamente este capítulo.

Birkhoff probó en 1929 [26] la existencia de una función entera f universal en el sentido de que su sucesión de trasladadas aditivas $\{f(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en el espacio de las funciones enteras $\mathcal{E} := H(\mathbb{C})$. En 1941 Seidel y Walsh [79] extendieron el teorema de Birkhoff al disco unidad $\mathbb{D}$ sustituyendo las trasladadas euclídeas por no euclídeas. En 1989 Zappa [83] estableció también un resultado análogo al de Birkhoff, esta vez para el plano perforado $\mathbb{C}^*$. Específicamente, Zappa probó la existencia de una función holomorfa f en $\mathbb{C}^*$ con la propiedad de que, para cada compacto $K \subset \mathbb{C}^*$ con complemento conexo (es decir, $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$ en nuestra notación), el conjunto de trasladadas multiplicativas $\{f(cz) : c \in \mathbb{C}^*\}$ es denso en $A(K)$. En esta línea de investigación Bernal y Montes [24] han caracterizado las sucesiones $(\varphi_n) \subset Aut(G) := \{\text{automorfismos de } G\}$ –donde $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio– para las que existen funciones $f \in H(G)$ tales que la sucesión $(f \circ \varphi_n)$ posee la propiedad universal análoga –esto es, tal sucesión es densa– para compactos de G. Se establecerá esta caracterización en el Teorema 4.1.1 siguiente (su demostración puede verse en [24]), pero antes necesitaremos una definición. Una sucesión $(\varphi_n) \subset Aut(G)$ se dice que es "fugitiva" si su acción es propiamente discontinua en G, es decir, dado $K \in \mathcal{K}(G)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap \varphi_n(K) = \emptyset$. Teniendo en cuenta que $\{z \mapsto z + n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{z \mapsto nz : n \in \mathbb{N}\}$ y $\left\{z \mapsto \frac{n-1-nz}{(n-1)z-n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ son sucesiones fugitivas de automorfismos de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ y $\mathbb{D}$ respectivamente, el siguiente resultado extiende y unifica los teoremas de Birkhoff, Seidel–Walsh y Zappa.

Teorema 4.1.1. *Sea $(\varphi_n) \subset Aut(G)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La sucesión (φ_n) es fugitiva.*

(b) *Existe una función $f \in H(G)$ tal que la sucesión $\{f \circ \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(G)$.*

(c) *Existe un conjunto residual de funciones $f \in H(G)$ tal que la sucesión $\{f \circ \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(G)$.*

Apuntamos aquí que en los apartados (b) y (c) la densidad de $(f \circ \varphi_n)$ se da en el propio espacio $H(G)$, siempre que G no sea isomorfo a $\mathbb{C}^*$.

Centraremos ahora nuestra atención en un resultado reciente de Luh que mejora los teoremas de Birkhoff y Zappa, pero esta vez siguiendo otro punto de vista. Él prueba su resultado de forma constructiva [62, Theorem] y, tras adaptar las notaciones, queda como sigue.

Teorema 4.1.2. *Sea $(a_n) \subset \mathbb{C}$ una sucesión con $a_n \to \infty$. Entonces existe una función entera f con la siguiente propiedad:*

(a) *Para cualquier entero positivo j fijo la sucesión de "trasladadas aditivas" $\{f^{(j)}(z + a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.*

(b) *Para cualquier entero positivo j fijo la sucesión de "trasladadas multiplicativas" $\{f^{(j)}(a_n z) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$.*

Aquí $f^{(j)}$ denota, como es usual, la derivada de orden j si $j \in \mathbb{N}_0$, y si $j \in \mathbb{N}$ el símbolo $f^{(-j)}$ denotará la única antiderivada F de f de orden j que verifica $F^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \{0, 1, ..., j-1\}$. En [62, Theorem] se supone que la sucesión (a_n) es no acotada, pero la formulación es equivalente pues entonces se puede extraer una subsucesión que tiende a infinito. El teorema de Luh también asegura una propiedad adicional de f, a saber, que la sucesión de derivadas $\{f^{([|a_n|])} : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ($[x]$ denota la parte entera de x). No consideraremos esta propiedad puesto que es de una naturaleza diferente y porque, además, puede deducirse usando métodos de categoría de Baire junto con el hecho de que el operador diferencial D sobre $\mathcal{E}$ es densamente hereditariamente hipercíclico –ver [50] para resultados y referencias–, lo que a su vez es una fuerte generalización del teorema de MacLane.

Como decíamos en la introducción de esta memoria, el Teorema 4.1.2 nos proporciona dos novedades si lo comparamos con los teoremas de Birkhoff y Zappa: en primer lugar, la función f puede reemplazarse por el resultado de la acción sobre f de los *operadores* de diferenciación y antidiferenciación, y en segundo lugar, la función universal f se puede elegir *entera*, incluso en el caso en que el dominio ($\mathbb{C}^*$, esta vez) no sea el todo el plano $\mathbb{C}$.

Las dos novedades descritas en el último párrafo motivan la introducción del nuevo concepto de "U–operadores", que se desarrollará en las siguientes secciones de este capítulo. Se darán ejemplos concretos de este nuevo tipo de operadores así como condiciones suficientes, y se generalizará fuertemente el Teorema 4.1.2.

Finalmente, en la parte final de la Sección 4.6 mejoraremos un reciente y fuerte resultado debido a Luh, Martirosian y Müller [65, Theorem 1], quienes prueban de manera constructiva la existencia de una función entera con desarrollo en serie de potencias lagunar que tiene trasladadas aditivas y multiplicativas densas. Una versión mejorada de su resultado se establece en el Teorema 2 de [66] por los mismos autores. Tal versión queda como sigue.

Teorema 4.1.3. *Sea $Q \subset \mathbb{N}_0$ con densidad superior $\overline{\Delta}(Q) = 1$ y sea (a_n) una sucesión compleja con $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Entonces existe una función entera f con serie de potencias lagunar*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{con} \quad c_n = 0 \quad \text{para} \quad n \notin Q,$$

que verifica las siguientes propiedades:

(a) *La sucesión $\{f(z + a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.*

(b) *La sucesión $\{f(a_n z) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$.*

Como en el Teorema 4.1.2, puede suponerse que la sucesión (a_n) es sólo no acotada, ya que en tal caso se puede extraer una subsucesión que tiende a ∞. En la Sección 4.6 recordaremos algunas nociones de densidad de un subconjunto de $\mathbb{N}_0$.

4.2. Definición, condiciones suficientes y primeros ejemplos

Obsérvese primero que en el Teorema 4.1.2 las sucesiones $(z + a_n)$ y $(a_n z)$ tienden a infinito uniformemente en compactos, en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^*$ respectivamente. Por tanto, en lo que respecta al nuevo tipo de operadores que introduciremos, el dominio G considerado debe ser *no acotado*, porque de otra forma, toda función entera sería acotada en G, lo que impediría la deseada densidad de sucesiones de sus "G–trasladadas". Específicamente, queremos que el conjunto

$$\omega(G) := \{(\varphi_n) \subset Aut(G) : \varphi_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

$$\text{uniformemente en compactos en } G\}$$

sea no vacío, en cuyo caso diremos que G es un *ω–dominio*. Es evidente que si $(\varphi_n) \in \omega(G)$, entonces (φ_n) es fugitiva. Observemos que las sucesiones $(z + a_n)$ y $(a_n z)$ están en $\omega(\mathbb{C})$ y $\omega(\mathbb{C}^*)$, luego $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^*$ son ω–dominios. De hecho, no es difícil ver que $\omega(\mathbb{C}) = \{(a_n + b_n z) : b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to \infty$, $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ cuando $n \to \infty\}$ y $\omega(\mathbb{C}^*) = \{(a_n z) : a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty\}$. Un ejemplo esencialmente diferente nos lo proporciona el semiplano superior $\{\text{Im } z > 0\}$, que es también un ω–dominio; en efecto, tomemos $\psi(z) = \frac{2z-1}{2-z}$ $(\in Aut(\mathbb{D}))$, $\psi_n = \psi \circ \cdots \circ \psi$ (n–veces), $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ y $\varphi_n = h^{-1} \circ \psi_n \circ h$ $(n \in \mathbb{N})$; entonces $(\varphi_n) \in \omega(\{\text{Im } z > 0\})$.

Debemos advertir que no todo dominio no acotado es un ω–dominio. Por ejemplo, si G tiene conectividad finita ≥ 3 entonces por el teorema de Heins [52] el grupo $Aut(G)$ es finito, por tanto ninguna sucesión en $Aut(G)$ puede ser fugitiva y, consecuentemente, $\omega(G) = \emptyset$. Finalmente, un dominio conexo, no acotado y de orden de conexión infinito puede no ser un ω–dominio: basta tomar $G = \mathbb{C} \setminus [\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}]$; una simple aplicación del teorema de Cassorati–Weierstrass y del teorema de la aplicación abierta para funciones holomorfas nos muestra que en este caso $Aut(G)$ se reduce a la identidad en G.

Seguidamente daremos la definición de U–operador. Observemos que, de hecho, la condición de ser G un ω–dominio no es necesaria, pero la mantenemos porque en otro caso la propiedad resultaría vacía. Por *operador* entenderemos ahora una aplicación continua (*no* necesariamente lineal) de algún espacio en sí mismo. En la mayor parte de los casos, tal espacio será el espacio $\mathcal{E}$ de las funciones enteras.

Definición 4.2.1. Decimos que un operador $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es un *U–operador* siempre que verifique la siguiente propiedad:

> Dado un ω–dominio $G \subset \mathbb{C}$ y una sucesión $(\varphi_n) \in \omega(G)$, existe un subconjunto denso de funciones enteras f tal que la sucesión
>
> $$\{((Tf) \circ \varphi_n)|_K : n \in \mathbb{N}\}$$
>
> es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(G)$.

Por conveniencia, reescribimos la última definición en el lenguaje de la universalidad. Durante todo este capítulo, aunque los operadores que manejemos no sean lineales en general, vamos a seguir manteniendo la misma terminología de "hiperciclicidad" vista en el Capítulo 1, tanto para operadores como para sucesiones de aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Con tal convenio de lenguaje, la condición dada en la Definición 4.2.1 nos dice que, dados G y (φ_n) como en tal definición, la sucesión

$$T_n : f \in \mathcal{E} \to ((Tf) \circ \varphi_n)|_K \in A(K) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

es densamente hipercíclica para todo $K \in \mathcal{M}(G)$.

Necesitamos reformular la Definición 4.2.1 para hacerla más manejable. Lo haremos en el Teorema 4.2.2, pero para ello es necesario el siguiente lema de carácter topológico. Lo podemos encontrar en [24, Lemma 2.9] (ver [62, Lemma 3] para el caso especial $G = \mathbb{C}^*$).

Lema 4.2.1. *Para cada dominio $G \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión $(K_m) \subset \mathcal{M}(G)$ tal que para cada $K \in \mathcal{M}(G)$ existe un entero positivo m_0 con $K \subset K_{m_0}^0$.*

Hacemos notar que mientras en la Definición 4.2.1 la función universal f no dependía del compacto K, en el apartado (b) del siguiente resultado sí se permite que *dependa* de K.

Teorema 4.2.2. *Supongamos que T es un operador sobre $\mathcal{E}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *T es un U-operador.*

(b) *Dados un ω–dominio $G \subset \mathbb{C}$, una sucesión $(\varphi_n) \in \omega(G)$ y un compacto $K \in \mathcal{M}(G)$, la sucesión (T_n) definida en (1) es densamente hipercíclica.*

(c) *Dados un ω–dominio $G \subset \mathbb{C}$, $\sigma = (\varphi_n) \in \omega(G)$, $K \in \mathcal{M}(G)$, $\varepsilon > 0$ y $g \in A(K)$, el conjunto*

$$A(T, G, K, \sigma, \varepsilon, g) := \{f \in \mathcal{E} : \textit{existe } n \in \mathbb{N} \textit{ con } \|(Tf) \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon\} \tag{2}$$

es denso en $\mathcal{E}$.

(d) *Dados un ω–dominio $G \subset \mathbb{C}$, $\sigma = (\varphi_n) \in \omega(G)$, $K \in \mathcal{M}(G)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $g \in A(K)$ y $h \in \mathcal{E}$, el conjunto*

$$\begin{aligned} U(T, G, K, \sigma, \varepsilon, r, g, h) := \{f \in \mathcal{E} : \|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon \\ \textit{y existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \|(Tf) \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{3}$$

es no vacío.

Demostración. Los apartados (c) y (d) son equivalentes porque la familia de conjuntos $D(h, \varepsilon, r)$ $(h \in \mathcal{E},\ \varepsilon > 0,\ r > 0)$ dada por

$$D(h, \varepsilon, r) = \{f \in \mathcal{E} : \|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon\}$$

es una base para la topología de $\mathcal{E}$, y

$$U(T,G,K,\sigma,\varepsilon,r,g,h) = A(T,G,K,\sigma,\varepsilon,g) \cap D(h,\varepsilon,r).$$

Por otro lado, es trivial que (a) implica (b).

Supongamos ahora que se verifica (b). Es evidente que

$$HC((T_n)) = \bigcap \{A(T,G,K,\sigma,\varepsilon,g) : \varepsilon > 0,\ g \in A(K)\},$$

por tanto se verifica (c).

Finalmente, nuestro objetivo es probar que T es un U–operador partiendo de (c). Obsérvese primero que cada conjunto definido por (2) puede escribirse como

$$A(T,G,K,\sigma,\varepsilon,g) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n{}^{-1}(B_K(g,\varepsilon)),$$

donde $B_K(G,\varepsilon)$ es la bola abierta $\{h \in A(K) : \|h-g\|_K < \varepsilon\}$ en $A(K)$. Por lo tanto, la continuidad de T_n demuestra que $A(T,G,K,\sigma,\varepsilon,g)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}$. Pero vemos que si (g_j) es un subconjunto denso numerable de $A(K)$ (por ejemplo, (g_j) puede ser el conjunto de las restricciones a K de los polinomios cuyos coeficientes tienen las partes real e imaginaria racionales) entonces

$$HC((T_n)) = \bigcap_{j,k\in\mathbb{N}} A(T,G,K,\sigma,\frac{1}{k},g_j).$$

Por tanto $HC((T_n))$ es una intersección numerable de subconjuntos densos en el espacio de Baire $\mathcal{E}$. En este punto es conveniente escribir $T_n = T_n^{(K)}$, haciendo énfasis en el hecho de que dados G,σ la sucesión (T_n) depende de K. Para ver que T es un U–operador debemos probar que el conjunto

$$\mathcal{L}(T,G,\sigma) := \bigcap \{HC((T_n^{(K)})) : K \in \mathcal{M}(G)\}$$

es denso en $\mathcal{E}$. Pero si (K_m) es la sucesión de compactos dada por el Lema 4.2.1 entonces

$$\mathcal{L}(T,G,\sigma) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} HC((T_n^{(K_m)})). \tag{4}$$

En efecto, dado $K \in \mathcal{M}(G)$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ con $K \subset K_{m_0}$. Si $f \in HC((T_n^{(K_{m_0})}))$ entonces, fijado un polinomio $P(z)$, existe una sucesión creciente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$(Tf)(\varphi_{n_j}(z)) \to P(z) \quad (j \to \infty)$$

uniformemente en K_{m_0}, luego también en K. Por el teorema de Mergelyan (Teorema 1.1.4) el conjunto de los polinomios es denso en $A(K)$, por tanto la sucesión $\{((Tf) \circ \varphi_n)|_K : n \in \mathbb{N}\}$ es también densa en $A(K)$, lo que prueba (4). De este modo, $\mathcal{L}(T, G, \sigma)$ es una intersección numerable de subconjuntos residuales en $\mathcal{E}$. Entonces $\mathcal{L}(T, G, \sigma)$ es residual, y en consecuencia es denso, como queríamos probar. □

Viendo la demostración anterior está claro que en los apartados (c)–(d) podemos suponer que g es un polinomio.

Nuestra próxima tarea debe ser, evidentemente, identificar algunos U–operadores. Comenzamos por el más elemental.

Teorema 4.2.3. *El operador identidad I sobre $\mathcal{E}$ es un U–operador.*

Demostración. Vamos a aplicar la condición (d) del Teorema 4.2.2. Fijamos G, $\sigma = (\varphi_n)$, K, ε, r y g como en el citado teorema y consideramos el conjunto $U := U(T = I, G, K, \sigma, \varepsilon, r, g, h)$ dado por (3). Queremos probar que $U \neq \emptyset$, es decir, que existe una función entera f y un $n \in \mathbb{N}$ con $\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$ y $\|f \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon$. Puesto que $\varphi_n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$ uniformemente en K, existe n con $|\varphi_n(z)| > r$ para todo $z \in K$. Entonces $\overline{B}(0, r) \cap \varphi_n(K) = \emptyset$. Además, $\varphi_n(K)$ es un compacto de G con complemento conexo, porque φ_n es un automorfismo de G (luego es un homeomorfismo). Por tanto el conjunto $L := \overline{B}(0, r) \cup \varphi_n(K)$ es un compacto de $\mathbb{C}$ con complemento conexo. Consideremos la función $F : L \to \mathbb{C}$

definida por

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } |z| \leq r \\ g(\varphi_n^{-1}(z)) & \text{si } z \in \varphi_n(K) \,. \end{cases}$$

Tenemos que $F \in A(L)$, luego por el teorema de Mergelyan existe un polinomio f con $\|f - F\|_L < \varepsilon$. Esto implica que $\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$ y $\|f - g \circ \varphi_n^{-1}\|_{\varphi_n(K)} < \varepsilon$. Pero esta última desigualdad es lo mismo que $\|f \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon$, con lo que termina la demostración. □

Vamos ahora a producir una gran familia de U–operadores mediante la composición de operadores.

Teorema 4.2.4. *Supongamos que T, S son operadores sobre $\mathcal{E}$ tales que T es un U–operador y S es lineal y sobreyectivo. Entonces TS es un U-operador.*

Demostración. Si seguimos la notación de la demostración del Teorema 4.2.3, debemos demostrar que fijados un ω–dominio G y una sucesión $\sigma \in \omega(G)$ el conjunto $\mathcal{L}(TS, G, \sigma)$ es denso en $\mathcal{E}$. Pero vemos que

$$\mathcal{L}(TS, G, \sigma) = S^{-1}(\mathcal{L}(T, G, \sigma));$$

por tanto, $\mathcal{L}(TS, G, \sigma)$ es denso porque $\mathcal{L}(T, G, \sigma)$ es denso y el teorema de la Aplicación Abierta (recordemos que $\mathcal{E}$ es un F-espacio) garantiza que si $V \subset \mathcal{E}$ es un abierto no vacío entonces $S(V)$ es también un abierto no vacío. □

Este último teorema nos lleva a una importante consecuencia: Cada operador de diferenciación D^j $(j \geq 0)$ es un U–operador, donde $D^0 = I$ y $D^j f = f^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$. Pero podemos obtener mucho más. Recordemos que si $\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ es una función entera de tipo exponencial, la serie

$\Phi(D) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j D^j$ define un operador diferencial de orden infinito con coeficientes constantes sobre $\mathcal{E}$. Recordemos también (Teorema 1.3.2) que un operador lineal S sobre $\mathcal{E}$ es de esta forma si y sólo si conmuta con las traslaciones τ_a $(a \in \mathbb{C})$.

Teorema 4.2.5.

(a) *Si S es un operador lineal y sobreyectivo definido sobre $\mathcal{E}$ entonces S es un U–operador.*

(b) *Si S es un operador lineal $\mathcal{E}$ que conmuta con las traslaciones entonces S es un U–operador.*

Demostración. En cuanto al apartado (a), combinamos los Teoremas 4.2.3 y 4.2.4. El apartado (b) es una consecuencia del teorema de Malgrange–Ehrenpreis que asegura que todo operador diferencial $\Phi(D)$ es sobreyectivo en $\mathcal{E}$, ver [41] y [68]. □

Podríamos creer que tener rango denso y ser un U–operador son equivalentes. Sin embargo, esto es *falso*, pues cada operador antidiferencial D^{-N} $(N \in \mathbb{N})$ dado por $D^{-N}(f) = f^{(-N)}$ es un U–operador (ver Sección 4) pero, evidentemente, no tiene rango denso. Sin embargo, *no* sabemos hasta la fecha si todo operador definido sobre $\mathcal{E}$ con rango denso es un U–operador, comparar con el Teorema 4.2.5(a).

Vamos ahora a centrar nuestra atención en buscar condiciones practicables bajo las cuales un operador T definido sobre $\mathcal{E}$ sea un U–operador. Para ello, introducimos dos nuevos conceptos.

Diremos que T tiene *rango ω–denso* siempre que exista $R > 0$ tal que la aplicación restricción

$$T_M : f \in \mathcal{E} \to (Tf)|_M \in A(M)$$

tiene rango denso para algún $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$. Un operador sobre $\mathcal{E}$ con rango denso tiene, evidentemente, rango ω–denso.

Diremos que T es *ω–estable* siempre que se verifique la siguiente propiedad:

> Para cada $r > 0$ existe un $R > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{E}$, cada $\varepsilon > 0$ y cada $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$ existen $\delta > 0$ y $S \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ tales que si $g \in \mathcal{E}$ y $||f - g||_S < \delta$ entonces $||Tf - Tg||_M < \varepsilon$.

Esta propiedad tiene, obviamente, una formulación más sencilla si T es lineal. A saber, un operador lineal T sobre $\mathcal{E}$ es ω–estable si y sólo si para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$ existen $\delta > 0$ y $S \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ tales que si $g \in \mathcal{E}$ y $||g||_S < \delta$ entonces $||Tg||_M < \varepsilon$.

Por ejemplo, usando el teorema de Malgrange–Ehrenpreis junto con el de Mergelyan, es fácil ver que todo operador diferencial $\Phi(D)$ no nulo tiene rango ω–denso. También el operador antidiferencial D^{-N} tiene rango ω–denso; en efecto, una adecuada aplicación del teorema de Mergelyan muestra que los polinomios con un cero de orden mayor o igual que N en el origen son densos en $A(M)$, siempre que $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con $0 \notin M$, y estos polinomios están claramente en el rango de D^{-N}. Por otra parte, de la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas se deduce que $\Phi(D)$ es ω–estable siempre que Φ sea de *tipo subexponencial.* En efecto, dado $r > 0$, tomemos $R = r$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$. Tomemos una región cerrada de Jordan S con frontera Γ rectificable tal que $S^0 \supset M$ y $S \subset \{|z| > r\}$. Ya que $\Phi(z)$ $(:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)$ es de tipo subexponencial, existe una constante $K \in (0, +\infty)$ tal que $|a_n| \leq \frac{K}{n!} \cdot \left(\frac{\text{dist}(M, \Gamma)}{2}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Sea $\delta := \dfrac{\varepsilon \cdot \text{dist}(M, \Gamma)}{K \cdot \text{longitud}\,(\Gamma)}$. Entonces $\delta > 0$. Tomemos $g \in \mathcal{E}$ con $||g||_S < \delta$. Se deduce que $||g||_\Gamma < \delta$ y que, suponiendo que Γ está orientada positivamente y que $z \in M$,

$$|(\Phi(D)g)(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot g^{(n)}(z)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{K}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}(M,\Gamma)}{2}\right)^n \cdot \frac{||g||_{\Gamma} \cdot \text{longitud}(\Gamma)}{\text{dist}(M,\Gamma)^{n+1}} =$$

$$= \frac{K \cdot \text{longitud}(\Gamma)}{\text{dist}(M,\Gamma)} \cdot ||g||_{\Gamma} < \varepsilon,$$

lo que muestra que $||\Phi(D)g||_M < \varepsilon$. Ya que $\Phi(D)$ es lineal, lo anterior nos dice que $\Phi(D)$ es ω–estable.

Una combinación de ω–densidad y ω–estabilidad permite dar un resultado positivo.

Teorema 4.2.6. *Supongamos que T es un operador en $\mathcal{E}$ tal que para cada $r > 0$ existe un $R > 0$ tal que para cada $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *La aplicación restricción T_M tiene rango denso.*

(ii) *Para cada $f \in \mathcal{E}$ y cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $S \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ tales que si $\varphi \in \mathcal{E}$ y $||f - \varphi||_S < \delta$ entonces $||Tf - T\varphi||_M < \varepsilon$.*

Entonces T es un U–operador.

Demostración. Fijemos un ω–dominio $G \subset \mathbb{C}$, una sucesión $\sigma = (\varphi_n) \in \omega(G)$, un compacto $K \in \mathcal{M}(G)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $g \in A(K)$, $h \in \mathcal{E}$, y el correspondiente conjunto $U(T, G, K, \sigma, \varepsilon, r, g, h) := U$ dado por (3). Nuestro objetivo es probar que $U \neq \emptyset$.

Puesto que $\sigma \in \omega(G)$ existe $m \in \mathbb{N}$ con $\varphi_m(K) \subset \{|z| > R\}$, donde $R > 0$ es el número asociado a r dado en la hipótesis. Tenemos que $\varphi_m(K) \in \mathcal{M}(G)$ $(\subset \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ porque φ_m es un homeomorfismo de G en sí mismo. Por lo tanto, debido a (i), existe una función entera f_1 tal que

$$||Tf_1 - g \circ \varphi_m^{-1}||_{\varphi_m(K)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Hemos utilizado el hecho evidente de que $g \circ \varphi_m^{-1} \in A(\varphi_m(K))$. Ahora, gracias a (ii) existen $\delta > 0$ y $S \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con $S \subset \{|z| > r\}$ tales que, para toda función $\varphi \in \mathcal{E}$,

$$\|\varphi - f_1\|_S < \delta \text{ implica que } \|T\varphi - Tf_1\|_{\varphi_m(K)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Nótese que el complemento del compacto $L := \overline{B}(0,r) \cup S$ es conexo porque S y $\overline{B}(0,r)$ tienen dicha propiedad y son disjuntos. Por tanto, el teorema de Mergelyan permite escoger un polinomio f (luego $f \in \mathcal{E}$) que satisface

$$\|f - F\|_L < \min\{\delta, \varepsilon\},$$

donde $F : L \to \mathbb{C}$ es la función perteneciente a $A(L)$ dada por

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \overline{B}(0,r) \\ f_1(z) & \text{si } z \in S\,. \end{cases}$$

De este modo, obtenemos $\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$ y, además, $\|f - f_1\|_S < \delta$, luego por (6), se verifica $\|Tf - Tf_1\|_{\varphi_m(K)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, esto, junto con (5) y la desigualdad triangular nos da $\|Tf - g \circ \varphi_m^{-1}\|_{\varphi_m(K)} < \varepsilon$, que es equivalente a $\|(Tf) \circ \varphi_m - g\|_K < \varepsilon$. Resumiendo, f es una función entera que satisface $\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$ y $\|(Tf) \circ \varphi_m - g\|_K < \varepsilon$ para algún $m \in \mathbb{N}$. En otras palabras, $f \in U$, luego $U \neq \emptyset$. □

Corolario 4.2.7. *Supongamos que T es un operador en $\mathcal{E}$ que es ω–estable y que tiene rango ω–denso. Entonces T es un U–operador.*

Demostración. Es evidente porque las hipótesis de ω–estabilidad y ω–densidad implican conjuntamente las condiciones (i) y (ii) del teorema anterior. □

La nota sobre $\Phi(D)$ justo antes del Teorema 4.2.6, junto con el Corolario 4.2.7, muestra de nuevo que, por lo menos para funciones enteras Φ de tipo subexponencial, $\Phi(D)$ es un U–operador. Obsérvese que esta vez la demostración no depende de que I es un U–operador, compárese con la prueba del Teorema 4.2.5.

4.3. Operadores de composición y de multiplicación

En esta sección, investigaremos condiciones para que los operadores de composición y de multiplicación sean U–operadores. Recordemos que si $f \in \mathcal{E}$ entonces sus operadores asociados de composición por la derecha C_φ, de composición por la izquierda (o superposición) L_φ y de multiplicación M_φ están definidos en $\mathcal{E}$ como:

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \quad L_\varphi(f) = \varphi \circ f, \quad M_\varphi(f) = f \cdot \varphi.$$

Obsérvese que C_φ y M_φ son lineales pero L_φ no lo es salvo en casos triviales.

Por lo que respecta a los operadores de composición por la derecha, conjeturamos que sólo las semejanzas en el plano, esto es, los polinomios $\varphi(z) = az + b$ de grado uno, o lo que es lo mismo, los automorfismos de $\mathbb{C}$ (que de hecho son las únicas funciones enteras inyectivas) generan U–operadores. Aunque no hemos podido dar una caracterización completa, hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. *Supongamos que φ es una función entera. Tenemos:*

(a) *Si C_φ es un U–operador entonces φ es un polinomio.*

(b) *Si φ es una semejanza entonces C_φ es un U–operador.*

(c) *Si $\varphi(z) = P((z-\alpha)^N)$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$, algún entero positivo $N \geq 2$ y algún polinomio P entonces C_φ no es un U–operador.*

(d) *Si φ es un polinomio de grado 2 entonces C_φ no es un U–operador.*

Demostración. Fijemos un punto $a \in \mathbb{C}$. Si φ no fuese un polinomio, entonces el infinito sería una singularidad esencial de φ, por lo que por el teorema de Cassorati–Weierstrass, encontraríamos una sucesión $(z_n) \subset \mathbb{C}$ con $z_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ tal que $\varphi(z_n) \to a$ $(n \to \infty)$. Consideremos el ω–dominio $G := \mathbb{C}$, la sucesión $\sigma := (\varphi_n(z) = z + z_n) \in \omega(\mathbb{C})$ y el compacto $K := \{0\} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Supongamos que f satisface la propiedad de la Definición 4.2.1 para $T := C_\varphi$. Entonces para $g \equiv 0$ podríamos encontrar un sucesión creciente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ con $f(\varphi(\varphi_{n_j}(z))) \to g(z)$ $(j \to \infty)$ en $A(K)$, esto es, $f(\varphi(z_{n_j})) \to 0$ $(j \to \infty)$. Pero $(f(\varphi(z_{n_j})))$ tiende a $f(a)$, luego $f(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$, es decir, $f \equiv 0$, que, evidentemente, es imposible. Esto prueba (a).

Por otro lado, si φ es una semejanza entonces C_φ es lineal, sobreyectiva (luego tiene rango denso) y ω–estable. Por tanto el apartado (b) es una consecuencia del Teorema 4.2.5(a) o del Corolario 4.2.7.

Por lo que respecta a (d), observamos que todo polinomio de grado dos $\varphi(z) = az^2 + bz + c$ puede escribirse de la forma $\varphi(z) = P((z-\alpha)^2)$, donde $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ y $P(z) = az - c - \dfrac{b^2}{4a}$. Entonces (d) se deduce de (c).

Veamos finalmente (c). Supongamos que $\varphi(z) = P((z-\alpha)^N)$ con α, N, P como en la hipótesis, y consideremos el ω–dominio $G := \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$, la sucesión dada por $(\varphi_n(z) := \alpha + n(z-\alpha)) \in \omega(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\})$ y el arco de circunferencia $K := \left\{\alpha + \exp(it) : 0 \leq t \leq \dfrac{2\pi}{N}\right\}$, que está en $\mathcal{M}(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\})$ puesto que $N \geq 2$. Supongamos, por reducción al absurdo, que C_φ es un U–operador. Entonces obtendríamos una función entera f tal que se puede asociar a $g(z) := \dfrac{1}{z-\alpha} \in A(K)$ una adecuada sucesión creciente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ con $(C_\varphi f)(\varphi_{n_j}(z)) \to g(z)$ $(j \to \infty)$ uniformemente en K, o lo que es lo mismo, $f(P(n_j^N(z-\alpha)^N)) \to \dfrac{1}{z-\alpha}$ $(j \to \infty)$ uniformemente en K. Por tanto, tras tomar potencias de orden N,

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{z\in K} \left| \left[f(P(n_j^N(z-\alpha)^N)) \right]^N - \frac{1}{(z-\alpha)^N} \right| = 0.$$

Consideremos los arcos de circunferencia $K_\nu = \alpha + \omega_\nu(K-\alpha)$ $(\nu \in \{0,1,\ldots,N-1\})$, donde $\omega_\nu = \exp\frac{2\pi\nu i}{N}$. Por supuesto, $K_0 = K$. Llamemos S a la circunferencia de centro α y radio 1. Entonces $S = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_{N-1}$. Dado $z \in S$ existe $\nu \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ con $z \in K_\nu$, luego $\alpha + \omega_\nu^{-1}(z-\alpha) \in K$. Por tanto

$$\left| \left[f(P(n_j^N(\alpha+\omega_\nu^{-1}(z-\alpha)-\alpha)^N)) \right]^N - \frac{1}{(\alpha+\omega_\nu^{-1}(z-\alpha)-\alpha)^N} \right| =$$

$$= \left| \left[f(P(n_j^N(z-\alpha)^N)) \right]^N - \frac{1}{(z-\alpha)^N} \right|$$

porque $\omega_\nu^N = 1$. Entonces el $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{z\in S}$ de la última expresión es igual a cero; en otras palabras,

$$f\left[P(n_j^N(z-\alpha)^N) \right]^N \to \frac{1}{(z-\alpha)^N} \quad \text{cuando} \quad j \to \infty$$

uniformemente en S. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \left[f(P(n_{j_0}^N(z-\alpha)^N)) \right]^N - \frac{1}{(z-\alpha)^N} \right| < 1 \quad (z \in S),$$

luego $\left| \left[(z-\alpha) f(P(n_{j_0}^N(z-\alpha)^N)) \right]^N - 1 \right| < |z-\alpha|^N = 1$ para todo $z \in S$. Pero, por el Principio del Módulo Máximo, se verifica la última desigualdad para todo z en la bola abierta de centro α y radio 1, en particular para $z = \alpha$, es decir, $1 < 1$. Esto es absurdo, por lo que el teorema queda demostrado. □

Seguidamente, mostraremos una caracterización para que L_φ sea U–operador en términos de existencia de una “inversa aproximada por la derecha” para φ, ver [22, Section 3]. El problema de tal caracterización en términos *sólo* de φ permanece como una pregunta abierta.

Teorema 4.3.2. *Si φ es una función entera, entonces son equivalentes:*

(a) *El operador de superposición L_φ es un U–operador.*

(b) *Existe una sucesión $(f_n) \subset \mathcal{E}$ tal que $(\varphi \circ f_n)$ tiende a la función identidad localmente uniformemente en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que se verifica (a). Haciendo $T = L_\varphi$, $G = \mathbb{C}$, y $\varphi_n(z) = z + n$ $(n \in \mathbb{N})$ en la Definición 4.2.1 obtenemos la existencia de al menos una función entera f tal que, para toda bola cerrada B, $(L_\varphi f)(\varphi_n(z)) \to z$ $(n \to \infty)$ en $A(B)$. Equivalentemente, $\varphi(f(z+n)) \to z$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en B. Por tanto se verifica (b) si tomamos $f_n(z) = f(z+n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Recíprocamente, supongamos que (b) es cierto. A partir de la continuidad de φ es fácil ver que L_φ es también ω–estable. Por otro lado, si fijamos un conjunto $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ y una función $g \in \mathcal{E}$ entonces tenemos que $g(M)$ es compacto, por lo que

$$\sup_{z \in g(M)} |\varphi(f_n(z)) - z| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sup_{z \in M} |\varphi(f_n(g(z))) - g(z)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Esto nos dice que

$$L_\varphi(f_n \circ g) \to g \quad (n \to \infty) \quad \text{en} \quad A(M),$$

de donde se deduce que la aplicación restricción

$$(L_\varphi)_M : f \in \mathcal{E} \to (L_\varphi f)|_M \in A(M)$$

tiene rango denso debido al teorema de Mergelyan. Consecuentemente, L_φ tiene rango ω–denso, luego por el Corolario 4.2.7 el resultado está probado.

□

Apuntamos que, para que (b) se verifique, es suficiente pero no necesario que φ sea inyectiva (de hecho, una función entera universal en el sentido de Birkhoff satisface (b)). Por el contrario, la sobreyectividad de φ es necesaria –por el teorema de Hurwitz [3, pág. 178]– pero no suficiente. En efecto, la función $\varphi(z) := z^2$ no cumple (b); esto sigue del teorema de Rouché [3, pág. 153], porque si $f_n(z)^2 \to z$ $(n \to \infty)$ localmente uniformemente en $\mathbb{C}$ para alguna sucesión $(f_n) \subset \mathcal{E}$, entonces, para algún n suficientemente grande, f_n^2 tendría exactamente un cero –contando las multiplicidades– lo cual es evidentemente falso.

Concluimos esta sección caracterizando los U–operadores de multiplicación.

Teorema 4.3.3. *Sea φ una función entera. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *Para todo operador T en $\mathcal{E}$ que sea ω–estable y tenga rango ω–denso, $M_\varphi T$ es un U–operador.*

(b) *El operador de multiplicación M_φ es un U–operador.*

(c) *Existe un operador T en $\mathcal{E}$ tal que $M_\varphi T$ es un U–operador.*

(d) *El conjunto $Z(\varphi)$ de ceros de φ es finito.*

Demostración. Que (a) implica (b) es cierto porque el operador identidad I es trivialmente ω–estable y tiene rango ω–denso. Por otra parte, es trivial que (b) implica (c), pues basta tomar $T = I$.

Supongamos ahora que se verifica (c), esto es, $M_\varphi T$ es un U–operador para algún operador T sobre $\mathcal{E}$. Admitamos, por reducción al absurdo, que (d) es falso. En tal caso, existirían puntos z_n $(n \in \mathbb{N})$ tendiendo a infinito con $\varphi(z_n) = 0$ para todo n. Así $(\varphi_n(z) := z + z_n) \in \omega(\mathbb{C})$, y entonces debe existir una función entera f tal que la sucesión $(\varphi \circ \varphi_n) \cdot ((Tf) \circ$

φ_n) es densa en $A(K := \{0\}) = \{\text{constantes}\}$, lo que es absurdo porque $\varphi(\varphi_n(0))(Tf)(\varphi_n(0)) = 0$ para todo n. Por tanto, el conjunto de ceros de φ es finito.

Finalmente, partimos del hecho de que $Z(\varphi)$ es finito. Nuestro objetivo es probar (a). Para ello fijamos un operador T sobre $\mathcal{E}$ que sea ω–estable y de rango ω–denso. Es inmediato por la continuidad de φ que $M_\varphi T$ es también ω–estable. Por otro lado, existe $R > 0$ tal que la restricción $T_M : f \in \mathcal{E} \mapsto (Tf)|_M \in A(M)$ tiene rango denso para cualquier $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $R > \max\{|z| : z \in Z(\varphi)\}$. Fijemos $\varepsilon > 0$, $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$ y $g \in A(M)$. Entonces el cociente $\dfrac{g}{\varphi} \in A(M)$. En consecuencia, existe una función $f \in \mathcal{E}$ con $\left\|Tf - \dfrac{g}{\varphi}\right\|_M < \dfrac{\varepsilon}{\|\varphi\|_M}$. Luego $\|(M_\varphi T)f - g\|_M < \varepsilon$ y $M_\varphi T$ también tiene rango ω–denso. Ahora, gracias de nuevo al Corolario 4.2.7, terminamos la demostración. □

4.4. Operadores integrales

En esta sección vamos a ver cómo algunos operadores integrales definidos en el espacio $\mathcal{E}$, incluyendo el operador de antidiferenciación D^{-N}, son U–operadores.

A lo largo de esta sección, φ denotará una función entera $\varphi : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de dos variables complejas. El operador de Volterra de primera especie asociado a φ se define por

$$\varphi : f \in \mathcal{E} \mapsto V_\varphi f \in \mathcal{E}, \quad (V_\varphi f)(z) = \int_0^z f(t)\varphi(z,t)\,dt \quad (z \in \mathbb{C}),$$

donde la integral se toma a lo largo de cualquier arco rectificable que una el origen con z. Demostraremos a su debido tiempo que, bajo condiciones adecuadas sobre el núcleo φ, el operador de Volterra V_φ, con o sin perturbaciones por operadores diferenciales, es un U–operador. En particular, nuestros resultados también incluyen operadores de Volterra de segunda especie $\lambda I + V_\varphi$.

En este punto, es conveniente recordar las condiciones bajo las cuales una serie formal compleja de potencias $\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ define un operador antidiferencial $\Psi(D^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j D^{-j}$ de orden infinito con coeficientes constantes sobre $\mathcal{E}$. Aplicando el Teorema 1.3.4 a $G = \mathbb{C}$, obtenemos que $\Psi(D^{-1})$ queda definido si $\lim_{j\to\infty} \frac{|c_j|^{\frac{1}{j}}}{j} = 0$. Observamos que en efecto tenemos un caso particular de operador integral, pues si hacemos

$$\varphi(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{(z-t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

entonces φ es entera en ambas variables y $\Psi(D^{-1}) = c_0 I + V_\varphi$ (así que $\Psi(D^{-1})$ es de Volterra de segunda especie si $c_0 \neq 0$). Por supuesto, los operadores de Volterra y los operadores $\Psi(D^{-1})$ incluyen los operadores D^{-N} ($N \in \mathbb{N}$).

Los siguientes lemas serán útiles para encontrar U–operadores integrales. Pero necesitamos algo de notación adicional. Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y $a \in K$ entonces $A_a(K)$ será el subespacio de todas las funciones de $A(K)$ con un cero en a, dotado con la misma norma $\|\cdot\|_K$. Para evitar problemas con la integración a lo largo de arcos, consideraremos la clase Π de regiones de Jordan cerradas L cuya frontera ∂L es una curva poligonal cerrada consistente en un número finito de segmentos paralelos a los ejes. Obsérvese que cada integral $\int_a^b F(t)\,dt$ tiene sentido y está bien definida para cada $F \in A(L)$ y cada par de puntos $a, b \in L$, siempre que $L \in \Pi$. En efecto, el complemento de L es conexo y a, b pueden unirse por un arco continuamente diferenciable a trozos contenido en L.

Lema 4.4.1. *Sean S un operador definido sobre $\mathcal{E}$ y $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera de dos variables. Supongamos que existe un $R > 0$ tal que para cada $r > R$ y cada $M \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ existen $L \in \mathcal{M}(\{|z| > r\}) \cap \Pi$ con $M \subset L$ y un punto $a \in L \setminus M$ tales que*

(a) *el operador S se extiende continuamente a una aplicación $S_1 : A(L) \to A(M)$,*

(b) *la aplicación $Q : A_a(L) \to A(M)$ definida por*

$$Qf(z) = S_1 f(z) + \int_a^z f(t)\varphi(z,t)dt \quad (z \in M)$$

tiene rango denso.

Entonces $S + V_\varphi$ es un U–operador.

Demostración. Fijemos un conjunto $U = U(T = S + V_\varphi, G, K, \sigma = (\varphi_n), \varepsilon, r, g, h)$ como en (3). Según el Teorema 4.2.2, debemos demostrar que $U \neq \emptyset$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que r es mayor que el número R dado en la hipótesis. Puesto que K es un subconjunto compacto de G y $\sigma \in \omega(G)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n(K) \cap \overline{B}(0,r) = \emptyset$. Entonces $M := \varphi_n(K) \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ porque φ_n es un automorfismo de G. Por hipótesis, existen $L \in \mathcal{M}(\{|z| > r\}) \cap \Pi$ con $M \subset L$ y un punto $a \in \partial L$ tales que se verifican (a) y (b). Es claro que podemos encontrar un arco rectificable de Jordan γ que una el origen y a con $\gamma \cap L = \{a\}$ y tal que el conjunto compacto $\overline{B}(0,r) \cup \gamma \cup L$ tenga complemento conexo. Usando una adecuada parametrización del arco γ, podemos construir una función f_1 que sea continua en $\overline{B}(0,r) \cup \gamma$, que coincida con h en $\overline{B}(0,r)$ y que satisfaga $f_1(a) = 0$. Consideremos la aplicación $S_2 : A(\gamma) \to A(M)$ dada por

$$S_2 f(z) = g(\varphi_n^{-1}(z)) - \int_\gamma f(t)\varphi(z,t)\,dt \quad (z \in M). \tag{7}$$

Está bien definida porque $g \in A(K)$, $K \subset G$, $M = \varphi_n(K)$ y $\varphi_n^{-1} \in H(G)$. Gracias a (b) obtenemos que existe una función $f_2 \in A_a(L)$ tal que

$$|Qf_2(z) - S_2 f_1(z)| < \varepsilon \quad (z \in M). \tag{8}$$

Por otro lado, la aplicación $S_1 : A(L) \to A(M)$ es continua (por (a)). También las aplicaciones S_2 y

$$S_3 : A(L) \to A(M), \quad S_3 f(z) = \int_a^z f(t)\varphi(z,t)\, dt \quad (z \in M)$$

son evidentemente continuas. Por tanto Q es continua y, por (8), existe $\delta > 0$ tal que si $f \in \mathcal{E}$ verifica

$$|f(z) - f_1(z)| < \delta \quad (z \in \gamma) \ \text{ y } \ |f(z) - f_2(z)| < \delta \quad (z \in L) \tag{9}$$

entonces

$$|Qf(z) - S_2 f(z)| < \varepsilon \quad (z \in M) \tag{10}$$

Consideremos la función $f_3 : L_0 \to \mathbb{C}$ definida como

$$f_3(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in \overline{B}(0,r) \cup \gamma \\ f_2(z) & \text{si } z \in L, \end{cases}$$

donde $L_0 := \overline{B}(0,r) \cup \gamma \cup L$ que, evidentemente, es compacto. Del hecho $f_1(a) = 0 = f_2(a)$ se obtiene que $f_3 \in A(L_0)$. Pero el conjunto compacto L_0 tiene complemento conexo. En consecuencia, se deduce del teorema de Mergelyan que existe un polinomio f que verifica $\|f - f_3\|_{L_0} < \text{mín}\{\varepsilon, \delta\}$, por lo que $\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$ y f verifica (9). Entonces f también satisface (10), que se puede reescribir como $|Tf(z) - g(\varphi_n^{-1}(z))| < \varepsilon$ $(z \in M)$. Pero esto equivale a $\|(Tf) \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon$. En resumen, $f \in U$, luego $U \neq \emptyset$. $\square$

Notemos que si el operador S es lineal entonces, por la densidad de $\mathcal{E}$ en $A(L)$, la condición (a) es equivalente a la siguiente: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $f \in \mathcal{E}$ y $\|f\|_L < \delta$ entonces $\|Sf\|_M < \varepsilon$.

Lema 4.4.2. *Para cada $L \in \Pi$ y cada $a \in L$, existe una constante finita positiva $\beta = \beta(L, a)$ que satisface la siguiente propiedad:*

A cada $z \in L$ se le puede asociar un arco continuamente diferenciable a trozos $\gamma_z : [0,1] \to L$ que une a con z y un subconjunto finito $F_z \subset [0,1]$ tales que $|\gamma_z'(u)| \leq \beta |z - a|$ para todo $u \in [0,1] \setminus F_z$.

Demostración. Fijemos L y a como en el enunciado. A partir de la forma de L es evidente que el número $R \in (0, +\infty)$ puede escogerse de modo que $B(a, R) \cap L$ sea estrellado con respecto a a. Si $z \in B(a, R) \cap L$ entonces simplemente definimos γ_z como el segmento que une a con z, es decir, $\gamma_z(u) = a + (z - a)u \quad (0 \leq u \leq 1)$, por tanto $|\gamma_z'(u)| = |z - a|$ para todo $u \in (0, 1)$. Supongamos ahora que $z \in L \setminus B(a, R)$. Sea $N =$ el número de segmentos de ∂L. Entonces es evidente que podemos tomar un arco poligonal $\gamma_z \subset L$ que una a con z consistente en $m = m(z)$ segmentos que son paralelos a los ejes, con $m \leq N$. Ahora, si parametrizamos cada segmento del modo usual sobre $\left[0, \frac{1}{m}\right]$, $\left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$, entonces $|\gamma_z'(u)|$ no es más grande que $m \cdot \mathrm{diam}(L)$ en el interior de cada uno de los segmentos. Por lo tanto $|\gamma_z'(u)| \leq N \cdot \mathrm{diam}(L)$ para todo $u \in [0,1] \setminus F_z$, donde $F_z = \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, 1\}$. Luego $|\gamma_z'(u)| \leq \dfrac{N \cdot \mathrm{diam}(L)}{R} |z - a|$ para esos valores de u siempre que $z \in L \setminus B(a, R)$. De este modo, la constante

$$\beta := \text{máx} \left\{ 1, \frac{N \cdot \mathrm{diam}(L)}{R} \right\}$$

es la que resuelve el problema. □

Lema 4.4.3. *Si $L \in \Pi$, $a \in L$, φ es una función entera de dos variables y α es una función entera con $\alpha(z) \neq 0$ para todo $z \in L$, entonces el operador $Q_{\alpha,\varphi} : A_a(L) \to A_a(L)$ dado por*

$$Q_{\alpha,\varphi} f(z) = \alpha(z) f(z) + \int_a^z f(t) \varphi(z,t) dt \quad (z \in L)$$

es sobreyectivo.

Demostración. Observemos en primer lugar que $Q_{\alpha,\varphi}f$ está bien definido porque $Q_{\alpha,\varphi}f(a) = 0$ para todo $f \in A_a(L)$. Puesto que $\alpha(z) \neq 0$ para todo $z \in L$, el enunciado se desprende del hecho de que el operador $I - K : A_a(L) \to A_a(L)$ es invertible (luego sobreyectivo), donde K es el operador

$$Kf(z) = \int_0^z f(t)\varphi_1(z,t)dt \quad (z \in L)$$

y

$$\varphi_1(z,t) = \frac{-\varphi(z,t)}{\alpha(z)}.$$

Si el espectro $\sigma(K)$ se reduce a $\{0\}$ tendríamos que $\sigma(I-K) = \{1\}$, luego $0 \notin \sigma(I-K)$, así que $I - K$ sería invertible. Por tanto, de acuerdo con la fórmula de Gelfand para el radio espectral, hemos de probar que $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, donde $\|K\| = \sup\{\|Kf\|_L : \|f\|_L \leq 1\}$ es la norma en el espacio $\mathcal{L}(A_a(L))$ de operadores lineales en $A_a(L)$. Tomemos una constante $\beta \in (0, +\infty)$ y la familia de arcos $\{\gamma_z : z \in L\}$ que unen a con z como en el Lema 4.4.2. Entonces la longitud de cada arco parcial $\gamma_z|_{[0,u]}$ desde a hasta $\gamma(u)$ no es mayor que $\beta u|z-a|$ y, en particular, $|\gamma_z(u) - a| \leq \beta u|z-a| \quad (u \in [0,1])$.

Fijemos $f \in A_a(L)$ con $\|f\|_L \leq 1$ y llamemos $C = \sup\{|\varphi_1(z,t)| : z, t \in L\}$. De la definición del operador K obtenemos, para todo $z \in L$,

$$|Kf(z)| = \left|\int_0^1 f(\gamma_z(u))\varphi_1(z,\gamma_z(u))\gamma_z'(u)\,du\right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f(\gamma_z(u))||\varphi_1(z,\gamma_z(u))||\gamma_z'(u)|\,du \leq C\beta|z-a|.$$

Entonces

$$|K^2f(z)| = \left|\int_{\gamma_z} (Kf)(t)\varphi_1(z,t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (Kf)(\gamma_z(u))\varphi_1(z,\gamma_z(u))\gamma_z'(u)\,du\right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |Kf(\gamma_z(u))| \cdot C \cdot |\gamma_z'(u)|\,du \leq$$

$$\leq C^2\beta \int_0^1 |\gamma_z(u) - a| \cdot \beta \cdot |z - a|\, du \leq$$

$$\leq C^2\beta^3|z-a|^2 \int_0^1 u\, du = \frac{C^2\beta^3|z-a|^2}{2!}.$$

Por inducción llegamos a la siguiente desigualdad, que se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|K^n f(z)| \leq \frac{C^n\beta^{n+1}|z-a|^n}{n!} \leq \frac{C^n\beta^{n+1}(\mathrm{diam}(L))^n}{n!}.$$

Por lo que

$$\|K^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C\beta \frac{\mathrm{diam}(L)\beta^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

de donde se deduce lo que queríamos. □

Recordemos que $Z(f)$ denotaba el subconjunto de G formado por los ceros de la función $f : G \to \mathbb{C}$. Ya estamos en condiciones de enunciar nuestro teorema.

Teorema 4.4.4. *Supongamos que* $N \in \mathbb{N}_0$ *y que* a_n $(n = 0, \ldots, N)$ *son funciones enteras, tales que* a_N *tiene una cantidad finita de ceros. Supongamos también que* P *es un polinomio y que* Φ *es una función entera de tipo subexponencial. Sea* $\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ *una serie formal con* $\lim_{j\to\infty} \left(|c_j|^{\frac{1}{j}}/j\right) = 0$. *Tenemos:*

(A) *El operador* T *en* $\mathcal{E}$ *definido por*

$$Tf(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j(z) f^{(j)}(z) + V_\varphi f(z) \quad (f \in \mathcal{E},\ z \in G)$$

es un U*–operador.*

(B) *Si* P *no es idénticamente nula entonces* $P(D) + V_\varphi$ *es un* U*–operador. Si* P *no es constante entonces* $P(D) + \Psi(D^{-1})$ *es un* U*–operador. Si*

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *entonces el operador de Volterra de segunda especie* $\lambda I + V_\varphi$ *es un U–operador.*

(C) *Si para algún* $N \in \mathbb{N}_0$ *la función entera* $w \mapsto \dfrac{\partial^N \varphi}{\partial z^N}(w,w)$ *tiene un número finito de ceros y cada función* $w \mapsto \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(w,w)$ $(n = 0,\dots,N-1)$ *se anula idénticamente, entonces* V_φ *es un U–operador.*

(D) *Si* Ψ *no es idénticamente nula entonces* $\Psi(D^{-1})$ *es un U–operador. En particular, si* P *no es idénticamente nulo entonces* $P(D^{-1})$ *es un U–operador.*

(E) *Si* Φ *no es constante entonces* $\Phi(D) + P(D^{-1})$ *es un U–operador.*

Demostración. Es evidente que (B) es una consecuencia de (A). Además, (D) se deriva de (C). En efecto, si $c_0 = 0$, hacemos $N = \text{mín}\{j \in \mathbb{N}_0 : c_{j+1} \neq 0\}$. Entonces $\Psi(D^{-1}) = V_\varphi$ con $\varphi(z,t) = \displaystyle\sum_{j=N}^{\infty} c_{j+1}\frac{(z-t)^j}{j!}$, por tanto $\dfrac{\partial^N \varphi}{\partial z^N}(w,w) = c_{N+1} \neq 0 = \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(w,w)$ $(n = 0,\dots,N-1)$ para todo $w \in \mathbb{C}$ y (C) se puede aplicar. El caso $c_0 \neq 0$ se demuestra de igual modo aplicando (B).

Así, nuestro objetivo es probar (A), (C) y (E).

En cuanto a (A), comprobemos que las hipótesis del Lema 4.4.1 se verifican cuando S se define como $Sf = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} a_j(\cdot)D^j f$.

Claramente, (a) se cumple para todo par de conjuntos $M, L \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con $M \subset L$. Por otro lado, escojamos $R = 1 + \text{máx}\{|z| : z \text{ es un cero de } a_N\}$ y fijemos $r > R$ y $M \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$. No es difícil darse cuenta de que se puede construir un compacto conexo $L \subset \{|z| > r\}$ de tal modo que $M \subset L^0$, $\mathbb{C} \setminus L$ sea conexo, y ∂L sea una unión finita de segmentos paralelos a los ejes, esto es, $L \in \mathcal{M}(\{|z| > r\}) \cap \Pi$. Luego la condición (b) del Lema 4.4.1 se verificará si demostramos que el operador

$Q : A_a^N(L) \to A(M)$ definido por

$$Qf(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j(z) f^{(j)}(z) + \int_a^z f(t)\varphi(z,t)\,dt \quad (z \in M)$$

tiene rango denso, donde a es un punto fijo en ∂L (luego $a \in L \setminus M$) y $A_a^N(L)$ es el subespacio de $A_a(L)$ formado por todas las funciones $f \in A(L)$ que son N veces continuamente diferenciables en L y cumplen $f^{(n)}(a) = 0$ para $n = 0, \ldots, N$.

Para ello, consideremos una función entera $\psi(z,t)$ de dos variables complejas tal que para cada $z \in G$ la función $t \in \mathbb{C} \mapsto \psi(z,t) \in \mathbb{C}$ es una N–antiderivada de $\varphi(z,\cdot)$ (por supuesto, $\psi = \varphi$ si $N = 0$). Después de integrar por partes N veces obtenemos, para $f \in A_a^N(L)$,

$$\int_a^z f(u)\varphi(z,u)\,du = \int_a^z f(u)\frac{\partial^N \psi}{\partial t^N}(z,u)\,du =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \left[f^{(n)}(z)\frac{\partial^{N-n-1}\psi}{\partial t^{N-n-1}}(z,z) - f^{(n)}(a)\frac{\partial^{N-n-1}\psi}{\partial t^{N-n-1}}(z,a)\right] +$$

$$+(-1)^N \int_a^z f^{(N)}(u)\psi(z,u)\,du =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f^{(n)}(z)\frac{\partial^{N-n-1}\psi}{\partial t^{N-n-1}}(z,z) + (-1)^N \int_a^z f^{(N)}(u)\psi(z,u)\,du.$$

Luego

$$Qf(z) = a_N(z) f^{(N)}(z) + \sum_{n=0}^{N-1} b_n(z) f^{(n)}(z) + (-1)^N \int_a^z f^{(N)}(t)\psi(z,t)\,dt,$$

para ciertas funciones enteras b_n $(n = 0, \ldots, N-1)$.

Pero $f^{(n)} = D_a^{-N+n} f^{(N)}$ $(n = 0, \ldots, N-1)$ para toda función $f \in A_a^N(L)$, donde $D_a^{-j}h$ denota la única antiderivada H de orden j de h tal que $H^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, \ldots, j-1$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_n(z) f^{(n)}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(z) D_a^{-N+n} f^{(N)}.$$

Entonces nuestra aplicación puede escribirse como

$$Qf(z) = a_N(z)D^N f(z) + \int_a^z D^N f(t)\psi_1(z,t)\,dt,$$

donde ψ_1 es una función entera de dos variables; específicamente,

$$\psi_1(z,t) = (-1)^N\psi(z,t) + \sum_{n=0}^{N-1} b_n(z)\frac{(z-t)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}.$$

A continuación, consideramos el operador $Q_{a_N,\psi_1} : A_a(L) \to A(M)$, donde Q_{a_N,ψ_1} está definido como en el Lema 4.4.3; debe observarse que $a_N(z) \neq 0$ para todo $z \in L$ porque $L \subset \{|z| > r\}$. Entonces, por el Lema 4.4.3, se verifica que la aplicación $Q_{a_N,\psi_1} : A_a(L) \to A_a(L)$ es sobreyectiva. Pero $A_a(L)$ es denso en $A(M)$; en efecto, si $g \in A(M)$ entonces la función $\dfrac{g(z)}{z-a}$ también pertenece a $A(M)$ porque $a \notin M$; entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe, por el teorema de Mergelyan, un polinomio P con $\left|P(z) - \dfrac{g(z)}{z-a}\right| < \dfrac{\varepsilon}{\text{diam}(L)}$ $(z \in M)$, luego la función $P_1(z) := (z-a)P(z)$ está en $A_a(L)$ y verifica $\|P_1 - g\|_M < \varepsilon$. Por tanto, $Q_{a_N,\psi_1} : A_a(L) \to A(M)$ tiene rango denso. Luego Q tiene también rango denso porque $Q = Q_{a_N,\psi_1} \circ D^N$ y la aplicación $D^N : A_a^N(L) \to A_a(L)$ es, evidentemente, sobreyectiva. Esto completa la demostración de (A).

Probemos ahora (C). Intentaremos de nuevo aplicar el Lema 4.4.1. La condición (a) se verifica trivialmente para $S = 0$. Sea $R = \text{máx}\{|z| : z \in Z(\alpha)\}$, donde $\alpha(w) := \dfrac{\partial^N\varphi}{\partial z^N}(w,w)$, y fijemos $r > R$ y $M \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$. Como antes, elegimos un compacto $L \in \Pi$ con $L \subset \{|z| > r\}$ y $M \subset L^0$. Fijamos un $a \in \partial L$ arbitrario, luego $a \in L \setminus M$. Debemos verificar la condición (b) del Lema 4.4.1.

Por hipótesis,

$$\frac{\partial^N\varphi}{\partial z^N}(w,w) \neq 0 = \frac{\partial^n\varphi}{\partial z^n}(w,w) \quad (w \in L,\ n = 0,\ldots,N-1). \tag{11}$$

Consideremos la aplicación $Q : A_a(L) \to A(M)$ dada por

$$Qf(z) = \int_a^z f(t)\varphi(z,t)\,dt.$$

Nuestro objetivo es probar que Q tiene rango denso. Usando una aplicación del teorema de Mergelyan similar a la que usamos en la demostración del apartado (A) obtenemos que las combinaciones lineales de $(z-a)^m$ $(m \geq N+2)$ son densas en $A(M)$. Luego Q tendrá rango denso en cuanto encontremos para cada $m \geq N+2$ fijo una función $f \in A_a(L)$ tal que

$$Qf(z) = (z-a)^m \quad (z \in L). \tag{12}$$

Por (11) y la regla de Leibnitz, la función Qf es $N+1$ veces continuamente diferenciable en L con

$$D^n(Qf)(w) = \int_a^w f(t)\frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(w,t)\,dt \quad (n = 0,\dots,N) \tag{13}$$

y

$$D^{N+1}(Qf)(w) = f(w)\frac{\partial^N \varphi}{\partial z^N}(w,w) + \int_a^w f(t)\frac{\partial^{N+1}\varphi}{\partial z^{N+1}}(w,t)\,dt$$

para todo $w \in L$. Ahora, la desigualdad de (11) junto con el Lema 4.4.3 para $\alpha(w) := \frac{\partial^N \varphi}{\partial z^N}(w,w)$ y φ cambiada por $\frac{\partial^{N+1}\varphi}{\partial z^{N+1}}$ implican que la aplicación

$$D^{N+1} \circ Q : A_a(L) \to A_a(L)$$

es sobreyectiva, por lo que existe una función $f \in A_a(L)$ tal que

$$D^{N+1}(Qf)(w) = \frac{m!}{(m-N-1)!}(w-a)^{m-N-1} \text{ para todo } w \in L.$$

Entonces $D^{N+1}[Qf - h] = 0$ en L, donde $h(z) := (z-a)^m$. Pero $D^n[Qf-h](a) = 0$ $(n = 0,\dots,N)$ gracias a (13), luego $Qf - h = 0$ en L, lo que demuestra (12) y (C).

Finalmente, probamos (E). Sean $\Phi(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función entera de tipo subexponencial, $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $L \in \Pi$ con $L^0 \supset M$ y $a \in \partial L$. Puesto que $(n!|a_n|)^{\frac{1}{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$, obtenemos $|a_n| \leq \dfrac{(\mathrm{dist}(M, \partial L)/2)^n}{n!}$ para n suficientemente grande. De esto y de la desigualdad de Cauchy obtenemos fácilmente que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $f \in \mathcal{E}$ y $\|f\|_L < \delta$ entonces $\|\Phi(D)f\|_M < \varepsilon$. En otras palabras, la condición dada justo después del Lema 4.4.1 se satisface para el operador lineal $S = \Phi(D)$, luego la condición (a) del citado lema se cumple. La extensión de $\Phi(D)$ a una aplicación continua $A(L) \to A(M)$ también será denotada por $\Phi(D)$, y de manera similar para operadores relacionados. Por lo tanto, nuestra tarea final es verificar la condición (b) del Lema 4.4.1, esto es, debemos comprobar que la aplicación $Q : A_a(L) \to A(M)$ dada por $Qf = \Phi(D)f + P(D^{-1})$ tiene rango denso. Por el teorema de Mergelyan es suficiente probar que dados un $\varepsilon > 0$ y un polinomio g existe $f \in A_a(L)$ tal que $\|Qf - g\|_M < \varepsilon$.

Para ello, supongamos que $P(z) = p_0 z^N + p_1 z^{N-1} + \cdots + p_N$ y definamos una nueva función entera Φ_1 de tipo subexponencial mediante la expresión

$$\Phi_1(z) = z^N \Phi(z) + \sum_{n=0}^{N} p_n z^n.$$

Entonces

$$Q = \Phi_1(D) \circ J \circ D_a^{-N},$$

donde

$$D_a^{-N} : A_a(L) \to A_a^N(L),\ J : A_a^N(L) \to A(K) \text{ y } \Phi_1(D) : A(K) \to A(M).$$

Aquí K es un elemento de Π que podemos elegir de manera que verifique $M \subset K^0 \subset K \subset L^0$ (luego $a \notin K$), y J es la inclusión $J(f) = f$. Notemos que $\Phi_1(D) : A(K) \to A(M)$ está bien definido por la misma razón que la señalada al comienzo de la demostración de este apartado. Puesto que $\Phi_1 \neq 0$ (porque Φ no es constante) el teorema de Malgrange–Ehrenpreis asegura que $\Phi_1(D) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es sobreyectiva, luego $\Phi_1(D) : A(K) \to A(M)$ tiene rango denso porque $\mathcal{E}$ es denso en $A(M)$ debido al teorema de

Mergelyan. De nuevo mediante una adecuada aplicación del teorema de Mergelyan (el hecho $a \notin K$ es crucial), tenemos que J tiene rango denso. Además D_a^{-N} es claramente sobreyectiva, así que tiene rango denso. En consecuencia, Q también tiene rango denso, con lo que terminamos la demostración. □

Recalcamos aquí que no todo operador de Volterra es un U–operador. Por ejemplo, sea $\varphi(z,t) := \operatorname{sen}(\pi z)$, $G := \mathbb{C}$, $(\varphi_n(z)) := (z+n) \in \omega(G)$ y $K := \{0\}$, y fijemos $f \in \mathcal{E}$. Entonces

$$((V_\varphi f) \circ \varphi_n)(z) = 0 \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ para todo } z \in K,$$

luego $((V_\varphi f) \circ \varphi_n)$ no es denso en $A(K) = \{\text{constantes}\}$ y V_φ no puede ser un U–operador.

4.5. Espacios lineales grandes de funciones enteras con trasladadas universales

Antes de continuar con nuestra búsqueda de nuevos tipos de U–operadores, vamos a establecer en esta sección la mejora que se prometió del Teorema 4.1.2, ver el Teorema 4.5.2 siguiente. Probaremos que la familia de funciones enteras que es universal en el sentido del anterior teorema es muy grande tanto algebraica como topológicamente.

El siguiente lema será necesario para la prueba del Teorema 4.5.2. Nos proporciona una condición suficiente para la existencia de grandes espacios lineales de vectores que son simultáneamente hipercíclicos con respecto a cada miembro de una familia numerable de sucesiones de aplicaciones lineales. De hecho es una extensión de un resultado de Bernal [19, Theorem 2]. Debemos decir que el enunciado del lema recoge esencialmente el contenido del Teorema 3.1 de [21], con la variante de que en el lema los espacios de llegada Y_k pueden ser distintos. Sin embargo, consideramos oportuno dar una prueba del mismo debido a que el trabajo [21] ha sido publicado sólo muy recientemente y a que el resultado es esencial en la obtención del Teorema 4.5.2.

Lema 4.5.1. *Sean X e Y_k $(k \in \mathbb{N})$ espacios vectoriales topológicos metrizables de modo que, además, X es de Baire y separable. Supongamos que para cada entero positivo k, $T_n^{(k)} : X \to Y_k \quad (n \in \mathbb{N})$ es una sucesión densamente hereditariamente hipercíclica de aplicaciones lineales continuas. Entonces existe un subespacio lineal denso $M \subset X$ tal que*

$$M \setminus \{0\} \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} HC\left((T_n^{(k)})\right).$$

Demostración. Obsérvese en primer lugar que la hipótesis de hiperciclicidad hace que los espacios Y_k deban ser separables y por tanto segundo numerables. Escojamos una sucesión (z_n) densa en X y denotemos por d una distancia en X compatible con su topología. Consideremos las bolas abiertas

$$G_N = \left\{x \in X : d(x, z_N) < \frac{1}{N}\right\} \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Puesto que X es un espacio de Baire y cada Y_k es segundo-numerable, los conjuntos $HC((T_n^{(k)}))$ $(k \in \mathbb{N})$ son residuales en X [50, Theorem 1], porque son densos. Por lo tanto la intersección $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} HC((T_n^{(k)}))$ es también residual, y por consiguiente, densa, luego existe un vector

$$x_1 \in G_1 \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} HC((T_n^{(k)})).$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una subsucesión estrictamente creciente $\{p(1, k, j) : j \in \mathbb{N}\}$ de enteros positivos tal que

$$T_{p(1,k,j)}^{(k)} x_1 \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Pero, dado que $(T_n^{(k)})$ $(k \in \mathbb{N})$ es densamente hereditariamente hipercíclica, cada conjunto $HC((T_{p(1,k,j)}^{(k)}))$ es de nuevo residual. De este modo, como antes, podemos tomar un vector x_2 en $G_2 \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} HC((T_{p(1,k,j)}^{(k)}))$. Ahora para cada k escogemos una subsucesión $\{p(2,k,j) : j \in \mathbb{N}\}$ de $(p(1,k,j))$ con

$$T_{p(2,k,j)}^{(k)} x_2 \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Observemos que también $T_{p(2,k,j)}^{(k)} x_1 \to 0 \quad (j \to \infty)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Puesto que la nueva sucesión $(T_{p(2,k,j)}^{(k)})$ $(k \in \mathbb{N})$ es también densamente hipercíclica, se puede encontrar un vector $x_3 \in G_3 \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} HC((T_{p(2,k,j)}^{(k)}))$.

Procediendo por inducción, obtenemos una sucesión $\{x_N : N \in \mathbb{N}\} \subset X$ y una familia de sucesiones de enteros positivos $\{\{p(n,k,j) : j \in \mathbb{N}\} : n, k \in \mathbb{N}\}$ que verifica

$$x_N \in G_N \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$x_N \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} HC((T_{p(N-1,k,j)}^{(k)})) \tag{15}$$

y

$$T_{p(n,k,j)}^{(k)} x_N \to 0 \quad (j \to \infty) \quad \text{para todo } n \geq N \text{ y todo } k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

donde $(p(0,k,j))$ representa la sucesión de todos los enteros positivos, para cada $k \in \mathbb{N}$. Definamos

$$M = \operatorname{span}(\{x_N : N \in \mathbb{N}\}).$$

Puesto que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X y $d(x_n, z_n) < \dfrac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (debido a (14)), el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es también denso, luego M es un subespacio vectorial denso de X.

Nos falta probar que cada vector no nulo de M es hipercíclico para cada sucesión $(T_n^{(k)})$ $(k \in \mathbb{N})$. Para ello, fijemos $x \in M \setminus \{0\}$. Existe un número finito de escalares $a_1, \ldots, a_N$ con $a_N \neq 0$ tales que $x = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$. Puesto que un múltiplo no nulo de un vector hipercíclico es también hipercíclico, podemos suponer que $a_N = 1$. Fijemos un entero positivo k y un vector $y \in Y_k$. Debemos encontrar una subsucesión $\{T_{r(j)}^{(k)} : j \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$T_{r(j)}^{(k)} x \to y \quad (j \to \infty).$$

Debido a (15), existe una subsucesión $(r(j))$ de $(p(N-1, k, j))$ tal que

$$T_{r(j)}^{(k)} x_N \to y \quad (j \to \infty). \tag{17}$$

Pero, puesto que $(r(j))$ es una subsucesión de $(p(N-1, k, j))$, de (16) deducimos que $T_{r(j)}^{(k)} x_n \to 0$ $(j \to \infty)$ para todo $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, luego $\sum_{n=1}^{N-1} a_n T_{r(j)}^{(k)} x_n \to 0$ $(j \to \infty)$. Por último, por linealidad y debido a (17),

$$T_{r(j)}^{(k)} x = T_{r(j)}^{(k)} x_N + \sum_{n=1}^{N-1} a_n T_{r(j)}^{(k)} x_n \to y + 0 = y \quad (j \to \infty),$$

con lo que concluye la demostración. □

Incidentalmente, S. Grivaux [47] ha logrado demostrar muy recientemente el mismo resultado sin exigir la hereditariedad, a cambio de imponer que X sea un espacio de Banach, que $Y_k = X$ para todo k y que, para cada k, $T_n^{(k)}$ sea la n–iterada de un solo operador lineal $U_k : X \to X$.

Teorema 4.5.2. *Supongamos que (S_j) es una familia numerable de U–operadores definidos sobre $\mathcal{E}$ y que (G_k) es una familia numerable de ω–dominios en $\mathbb{C}$. Para cada k, supongamos que $\{\varphi_{n,k} : n \in \mathbb{N}\} \in \omega(G)$. Entonces tenemos:*

(a) *Existe un subconjunto residual de funciones enteras f tales que cada sucesión $\{((S_j f) \circ \varphi_{k,n})|_K : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para cada $K \in \mathcal{M}(G_k)$, cada k y cada j.*

(b) *Si cada S_j es lineal entonces existe un subespacio lineal denso $M \subset \mathcal{E}$ tal que cada función no nula $f \in M$ verifica la misma propiedad de densidad dada en* (a).

Demostración. Con la notación de la Sección 4.2 tenemos que, para cada j, cada k y cada $K \in \mathcal{M}(G_k)$, la sucesión de aplicaciones

$$S_{j,k,n}^{(K)} : f \in \mathcal{E} \mapsto ((S_j f) \circ \varphi_{k,n})|_K \in A(K) \quad (n \in \mathbb{N})$$

es densamente hipercíclica. Puesto que $\mathcal{E}$ es un espacio de Baire y $A(K)$ es segundo-numerable el conjunto $HC((S_{j,k,n}^{(K)}))$ de vectores hipercíclicos para esta sucesión es un G_δ denso de $\mathcal{E}$, ver [50, Theorem 1]. Ahora, dado $k \in \mathbb{N}$, elegimos una sucesión $(K_{k,m}) \subset \mathcal{M}(G_k)$ tal y como se hace en el Lema 4.2.1. Denotamos por A el subconjunto de funciones $F \in \mathcal{E}$ que verifican la propiedad dada en (a). Entonces es fácil ver que

$$A = \bigcap_{j,k,K} HC((S_{j,k,n}^{(K)})) = \bigcap_{j,k,K_m} HC((S_{j,k,n}^{(K_{k,m})})),$$

donde la segunda igualdad se obtiene como en la demostración del Teorema 4.2.2. Entonces A es una intersección numerable de subconjuntos G_δ densos de $\mathcal{E}$; por lo tanto, A es también un G_δ denso, luego es un subconjunto residual de $\mathcal{E}$, lo que demuestra (a).

Para (b) hacemos $X := \mathcal{E}$, $Y_{k,m} := A(K_{k,m})$ y $T_n^{(j,k,m)} := S_{j,k,n}^{(K_{k,m})}$ en el Lema 4.5.1 (se usa una variante trivial del mismo empleando índices dobles y triples) y obtenemos que cada subsucesión $(T_{n_p}^{(j,k,m)})$ de $(T_n^{(j,k,m)})$ es densamente hipercíclica porque cada S_j es un U–operador y una subsucesión de elementos de $\omega(G_k)$ también pertenece a $\omega(G_k)$, con lo que finaliza la demostración. □

Corolario 4.5.3. *Dadas una familia numerable (G_k) de ω–dominios en $\mathbb{C}$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, una sucesión $\{\varphi_{k,n} : n \in \mathbb{N}\} \in \omega(G_k)$, existen* *un subconjunto residual $A \subset \mathcal{E}$ y un subespacio lineal denso $M \subset \mathcal{E}$ que verifican lo siguiente:*

(a) *Para cada función $f \in A$, cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de "G_k-trasladadas" $\{f^{(j)}(\varphi_{k,n}(z)) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(G_k)$.*

(b) *Se tiene la inclusión $M \setminus \{0\} \subset A$.*

Demostración. Los operadores diferenciales y antidiferenciales D^j con $j \in \mathbb{Z}$ son U–operadores. □

4.6. "Taylor shifts" y series lagunares

En esta última sección estudiaremos una clase de operadores sobre $\mathcal{E}$ cuando éste es considerado en el espacio de las sucesiones complejas (a_n) con $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$ si $n \to \infty$. En este marco y conectando con la universalidad, en [46], [70], [15] y [51] se estudian los "backward weighted shifts". (desplazamientos ponderados hacia atrás). Si $w = \{w_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una sucesión compleja entonces el weighted backward shift asociado a w es la aplicación definida sobre $\mathcal{E}$ como

$$B_w : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (B_w f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_{n+1} z^n.$$

Si la sucesión $\{|w_n|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada entonces B_w define de hecho un operador sobre $\mathcal{E}$. Obsérvese que el operador de diferenciación D es el caso especial $D = B_w$ con sucesión de pesos $w_n = n + 1$. En [15], Bernal introduce un tipo de operadores más generales que son cerrados para la composición, a saber, los "Taylor shifts". Un operador $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ se dice que es un *Taylor shift* si y sólo si existen una sucesión compleja

$w = \{w_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ y una aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ tales que

$$Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_{\varphi(n)} z^n \text{ siempre que } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (f \in \mathcal{E},\ z \in \mathbb{C}).$$

De forma equivalente, T es un Taylor shift si y sólo si T es un operador lineal y, para alguna sucesión $(w_n) \subset \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$T(z^n) = \begin{cases} w_m z^m & \text{si} \quad n = \varphi(m) \\ 0 & \text{si} \quad n \notin \varphi(\mathbb{N}_0). \end{cases}$$

En tal caso denotaremos $T = T_{w,\varphi}$. Notemos que $B_w = T_{w,\varphi}$ con $\varphi(n) = n + 1$. Evidentemente, $T_{w,\varphi}$ no es inyectiva si φ no es sobreyectiva.

Anotamos aquí que en [51] los Taylor shifts son llamados "pseudoshifts" y se estudian en un marco mucho más general.

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente para que un Taylor shift sea un U–operador. Abarca el caso de los operadores de diferenciación D^N ($N \in \mathbb{N}_0$), que ya conocemos que son U–operadores al ser casos particulares de los operadores $\Phi(D)$.

Teorema 4.6.1. *Sean una sucesión compleja $\{w_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ y una aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ que verifican las siguientes propiedades:*

(a) $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} |w_n|^{\frac{1}{n}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n|^{\frac{1}{n}} < +\infty$ *y* $w_0 \neq 0$,

(b) $0 < \liminf_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\varphi(n)}{n} < +\infty.$

Entonces el Taylor shift $T_{w,\varphi}$ es un U–operador.

Demostración. Como se puede ver en [15, Theorem 3.2], la última desigualdad de (a) junto con la primera desigualdad de (b) garantiza que $T := T_{w,\varphi}$ es un operador bien definido sobre $\mathcal{E}$. Recordemos que T es lineal. De acuerdo con el Corolario 4.2.5(a), es suficiente probar que T

es sobreyectivo. Para ello, fijemos una función entera $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Definamos

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{b_{\varphi^{-1}(n)}}{w_{\varphi^{-1}(n)}} & \text{si} \quad n \in \varphi(\mathbb{N}_0) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observamos que $w_j \neq 0$ para todo j. Consideremos la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Es claro que, formalmente, $Tf = g$. Luego es suficiente ver que $f \in \mathcal{E}$, es decir, $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$. Tenemos

$$\left| \frac{b_{\varphi^{-1}(n)}}{w_{\varphi^{-1}(n)}} \right|^{\frac{1}{n}} = \left(\left| b_{\varphi^{-1}(n)} \right|^{\frac{1}{\varphi^{-1}(n)}} \right)^{\varphi^{-1}(n)/n} \cdot \left(\frac{1}{\left| w_{\varphi^{-1}(n)} \right|^{\frac{1}{\varphi^{-1}(n)}}} \right)^{\varphi^{-1}(n)/n}.$$

Observemos ahora que $\left| w_{\varphi^{-1}(n)} \right|^{\frac{1}{\varphi^{-1}(n)}}$ está alejada inferiormente de cero gracias a la primera desigualdad de (a), que $\varphi^{-1}(n)/n$ está asintóticamente alejada inferiormente de cero gracias a la última desigualdad de (b) y que $\left| b_{\varphi^{-1}(n)} \right|^{\frac{1}{\varphi^{-1}(n)}} \to 0$ cuando $n \to \infty$ porque g es entera. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{\varphi^{-1}(n)}}{w_{\varphi^{-1}(n)}} \right|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

como se pedía. □

Es natural preguntarse si pueden existir Taylor shifts no sobreyectivos que sean U–operadores. Vamos a ver que de hecho existen, incluso si φ es la identidad en $\mathbb{N}_0$. Específicamente, estudiamos a continuación el operador diferencial de Euler, que definimos en el siguiente párrafo. Tal operador está relacionado con ciertas series de potencias lagunares, de las que trataremos también al final de la sección.

Sea $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una función entera de tipo subexponencial. Consideremos el operador $E : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dado por $Ef(z) = zf'(z)$. Entonces el *operador diferencial de Euler* $\Phi(E)$ asociado a Φ se define como

$$\Phi(E) : f \in \mathcal{E} \to \Phi(E)f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n E^n f.$$

Se tiene que $\Phi(E)$ es, de hecho, un operador lineal bien definido sobre $\mathcal{E}$, y además

$$\Phi(E)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) a_n z^n \text{ cuando } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

ver [56, páginas 46–54]. Por tanto, $\Phi(E) = T_{w,\varphi}$ con $w_n = \Phi(n)$ y $\varphi(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Para poder probar la deseada propiedad de $\Phi(E)$ necesitamos dos lemas auxiliares. El primero es clásico y puede encontrarse en [30, Theorem 9.1.4]. El segundo es un reciente resultado sobre lagunaridad y puede verse en [64, Lemma] y [66, Lemma], ver también [65, Lemma 2]. Necesitamos también algo más de notación adicional. Recordemos que si $Q \subset \mathbb{N}_0$ y $\nu(A)$ es el número de elementos de un conjunto finito A entonces la *densidad superior* (*inferior*, respectivamente) $\overline{\Delta}(Q)$ ($\underline{\Delta}(Q)$, respectivamente) de Q y la *densidad maximal* (*minimal*, respectivamente) $\Delta_{\text{máx}}(Q)$ ($\Delta_{\text{mín}}(Q)$, respectivamente) de Q en el sentido de Pólya se definen como

$$\overline{\Delta}(Q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu(Q \cap [0,n])}{n},$$

$$\underline{\Delta}(Q) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\nu(Q \cap [0,n])}{n},$$

$$\Delta_{\text{máx}}(Q) = \lim_{\alpha\to 1^-} \left(\limsup_{r\to\infty} \frac{\nu(Q \cap [0,r]) - \nu(Q \cap [0,\alpha r])}{(1-\alpha)r} \right),$$

$$\Delta_{\text{mín}}(Q) = \lim_{\alpha\to 1^-} \left(\liminf_{r\to\infty} \frac{\nu(Q \cap [0,r]) - \nu(Q \cap [0,\alpha r])}{(1-\alpha)r} \right).$$

La *densidad* $\Delta(Q)$ de Q se define como

$$\Delta(Q) = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu(Q\cap[0,n])}{n},$$

siempre que exista el límite, esto es, si $\overline{\Delta}(Q) = \underline{\Delta}(Q)$.

Además, llamemos $\mathcal{E}_Q$ al subespacio de $\mathcal{E}$ de todas las funciones enteras cuyo n–ésimo coeficiente de Taylor en el origen sea nulo para cada $n \notin Q$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_Q$ es un espacio de series lagunares. Señalemos que $\Phi(E)f \in \mathcal{E}_Q$ si $Q = \mathbb{N}_0 \setminus \Phi^{-1}(0)$. Por otra parte, para cada subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ y cada $\alpha \in [0,\pi)$ hacemos

$$S_\alpha := \{ze^{i\theta} : \ z \in E, \ |\theta| \leq \alpha\}.$$

Lema 4.6.2. *Si Φ es una función entera de tipo subexponencial no nula, entonces $\Delta\left(\mathbb{N}_0 \setminus \Phi^{-1}(0)\right) = 1$.*

Lema 4.6.3. *Sea $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con $0 \in K^0$ y supongamos que Q es un subconjunto de $\mathbb{N}_0$ que verifica, al menos, una de las siguientes condiciones:*

(a) *La componente de K que contiene a 0 es estrellada con respecto a 0 y $\overline{\Delta}(Q) = 1$.*

(b) *La densidad minimal $\Delta_{\text{mín}}(Q) = \delta \in (0,1]$ y existe un arco de Jordan γ que une ∞ con la frontera del disco máximo de centro 0 contenido en K^0 y que tiene la propiedad $\gamma_{\pi(1-\delta)} \cap K = \emptyset$.*

Supongamos que $\varepsilon > 0$ y que f es holomorfa en algún abierto que contenga a K, de modo que f se represente en torno al origen por una serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \textit{con} \ \ a_n = 0 \ \ \textit{para}\ n \notin Q.$$

Entonces existe un polinomio $P \in \mathcal{E}_Q$ tal que $|f(z) - P(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.

La idea de la prueba del siguiente teorema está inspirada en un resultado de Calderón y Müller [35].

Teorema 4.6.4. *Si Φ es una función entera de tipo subexponencial no nula, entonces el operador de Euler $\Phi(E)$ es un U–operador.*

Demostración. De acuerdo con el Corolario 4.2.7, en cuanto probemos que $\Phi(E)$ tiene rango ω–denso y es ω–estable, la prueba habrá concluido.

Fijemos un $R > 0$, un compacto $M \in \mathcal{M}(\{|z| > R\})$ y una función $g \in A(M)$. Por el teorema de Mergelyan, existe un polinomio P_1 tal que

$$|g(z) - P_1(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (z \in M). \tag{18}$$

Consideremos

$$\Omega := B(0,R) \cup \{|z| > R\}, \quad K := \overline{B}(0,R/2) \cup M \ \text{ y } \ Q := \mathbb{N}_0 \setminus \Phi^{-1}(0).$$

Entonces, por el Lema 4.6.2, $\Delta(Q) = 1$. Pero $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $0 \in K^0$ y Ω es un abierto que contiene a K, luego por el Lema 4.6.3 (bajo la condición (a)) existe algún polinomio $P \in \mathcal{E}_Q$ tal que

$$|f(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (z \in K), \tag{19}$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se define como

$$f(z) := \begin{cases} P_1(z) & \text{si } |z| > R \\ 0 & \text{si } |z| < R. \end{cases} \tag{20}$$

Por (18), (19) y (20) conseguimos

$$|g(z) - P(z)| < \varepsilon \quad (z \in K). \tag{21}$$

Ahora definimos el polinomio h de la siguiente forma. Supongamos que $P(z) = \sum_{n \in Q \cap \{0,1,\ldots,N\}} a_n z^n$. Entonces $h(z) := \sum_{n \in Q \cap \{0,1,\ldots,N\}} \frac{a_n}{\Phi(n)} z^n$. Es evidente que $h \in \mathcal{E}$ y $\Phi(E)h = P$. Luego, por (21),

$$|(\Phi(E)h)(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K.$$

Esto prueba que la aplicación restricción $\Phi(E)_M : \mathcal{E} \to A(M)$ tiene rango denso, luego $\Phi(E)$ tiene rango ω–denso.

En cuanto a la ω-estabilidad, fijemos $r > 0$ y elijamos $R := r$. Dados $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ tenemos que encontrar $\delta > 0$ y $S \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$ tal que se verifique $\|\Phi(E)f\|_M < \varepsilon$ siempre que f sea una función entera con $\|f\|_S < \delta$. Podemos tomar un compacto $S \in \Pi$ (ver la notación justo antes del Lema 4.4.1) tal que $M \subset S^0 \subset S \subset \{|z| > r\}$, luego $S \in \mathcal{M}(\{|z| > r\})$. Hagamos $\alpha := \inf\{|t - z| : t \in \Gamma,\ z \in M\} > 0$, donde $\Gamma = \partial S$. Llamemos $\beta := \text{máx}\{|t| : t \in \Gamma\}$, por tanto $\beta \in (0, +\infty)$. Puesto que la función $\Phi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es de tipo subexponencial, existe $C \in (0, +\infty)$ constante tal que

$$|c_n| \leq \frac{C}{n!}\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Definamos $\delta := \dfrac{\varepsilon\pi\alpha}{C \text{ longitud}(\gamma)}$ y fijemos una función $f \in \mathcal{E}$ con $\|f\|_S < \delta$. De acuerdo con [56, páginas 46–54], tenemos

$$E^n f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{P_n(z,t)f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ z \in M),$$

donde $P_n(z,t)$ es un polinomio de dos variables que verifica $|P_n(z,t)| \leq n!\beta^n$ para todo $z \in M$ y todo $t \in \Gamma$. De hecho, P_n no depende de f. Por último, para cada $z \in M$ obtenemos

$$|\Phi(E)f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n (E^n f)(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\left|\oint_\Gamma \frac{P_n(z,t)f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C}{n!}\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^n \cdot \frac{n!\beta^n\|f\|_S}{\alpha^{n+1}} \cdot \text{ longitud}(\gamma) <$$

$$< \frac{C\delta \text{ longitud}(\gamma)}{2\pi\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \varepsilon,$$

como pretendíamos. □

Existen otros Taylor shift no sobreyectivos $T_{w,\varphi}$ con $\varphi(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$ que son U–operadores y que son esencialmente diferentes de los operadores de Euler, pero que también están relacionados con las series de Taylor lagunares. Nuestro resultado se expondrá en el Teorema 4.6.5 y mejora el Teorema 4.1.3. Por otro lado, la condición $\overline{\Delta}(Q) = 1$ es "esencialmente" necesaria para que la propiedad de densidad en $A(K)$ $(K \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ pueda verificarse para alguna $f \in \mathcal{E}_Q$; en efecto, se demuestra en [65, Theorem 2] que $\Delta_{\text{máx}}(Q) = 1$ en tal caso.

Consideramos ahora el "operador lagunar" $I_Q : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dado por

$$(I_Q f)(z) = \sum_{n \in Q} a_n z^n, \text{ para cada } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde $Q \subset \mathbb{N}_0$ es fijo. Observemos que $I_Q = T_{w,\varphi}$ con $\varphi_n(n) = n$ para todo n y

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in Q \\ 0 & \text{si } n \notin Q. \end{cases}$$

Hacemos notar que el siguiente teorema *no* está contenido en el Teorema 4.6.4 porque, dado $Q \subset \mathbb{N}_0$ con $\overline{\Delta}(Q) = 1$ y $Q \neq \mathbb{N}_0$, no existe una función entera Φ de tipo subexponencial que verifique $\Phi(n) = 1$ para $n \in Q$ y $\Phi(n) = 0$ para $n \notin Q$. En efecto, si tal función existiese entonces $\Phi_1(z) := \Phi(z) - 1$ sería también de tipo subexponencial; pero $\Phi_1^{-1}(0) = Q$, luego $\Delta(\mathbb{N}_0 \setminus \Phi_1^{-1}(0)) = \Delta(\mathbb{N}_0 \setminus Q) = 0 \neq 1$, por tanto $\Phi_1 \equiv 0$ por el Lema 4.6.2.

Teorema 4.6.5. *Supongamos que $Q \subset \mathbb{N}_0$ con $\overline{\Delta}(Q) = 1$. Tenemos:*

(a) *El operador lagunar I_Q es un U-operador.*

(b) *Sea (G_k) una familia numerable de ω–dominios de $\mathbb{C}$. Para cada k, supongamos que $\{\varphi_{k,n} : n \in \mathbb{N}\} \in \omega(G_k)$. Entonces existe un subespacio lineal infinito-dimensional $M \subset \mathcal{E}_Q$ tal que para cada función*

$F \in M \setminus \{0\}$ la sucesión $\{(F \circ \varphi_{k,n})|_K : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(G_k)$ y todo k.

Demostración. (a) Fijemos un conjunto del tipo

$$U := U(T = I_Q,\ G,\ K,\ \sigma = (\varphi_n),\ \varepsilon,\ r,\ g,\ h)$$

como en el apartado (d) del Teorema 4.2.2. Por la nota posterior al Teorema 4.2.2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que g es un polinomio. Tenemos que probar que $U \neq \emptyset$. Puesto que $\sigma \in \omega(G)$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $\overline{B}(0,r) \cap \varphi_n(K) = \emptyset$. Consideremos el conjunto $L := \overline{B}(0,r) \cup \varphi_n(K)$. Entonces $L \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ porque $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ y φ_n es un homeomorfismo de G en sí mismo. Además, $0 \in L^0$ y la componente de L que contiene a 0 $(= \overline{B}(0,r))$ es estrellada respecto a 0. Sea la función

$$F(z) = \begin{cases} (I_Q h)(z) & \text{si } z \in \overline{B}(0,r) \\ g(\varphi_n^{-1}(z)) & \text{si } z \in \varphi_n(K). \end{cases}$$

Observemos que F es holomorfa en algún abierto que contiene a L; en efecto, $I_Q h$ es entera y $g \circ \varphi_n^{-1} \in H(G)$. Por otro lado, F se puede representar, obviamente, por una serie de potencias en torno al origen con ceros en los coeficientes cuyos índices pertenecen a $\mathbb{N}_0 \setminus Q$. Por el Lema 4.6.3(a), existe un polinomio $P \in \mathcal{E}_Q$ tal que

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon \quad (z \in L).$$

En particular,

$$\|I_Q h - P\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$$

y

$$\|P \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon.$$

Ahora definimos

$$f := P + I_{\mathbb{N}_0 \setminus Q} h.$$

Está claro que $f \in \mathcal{E}$ y que $I_Q f = P$. Luego

$$\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} = \|P + I_{\mathbb{N}_0 \setminus Q} h - I_Q h - I_{\mathbb{N}_0 \setminus Q} h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon$$

y

$$\|(I_Q f) \circ \varphi_n - g\|_K < \varepsilon.$$

En consecuencia, $f \in U$, que es lo que queríamos.

(b) Sean (G_k) y $\{\varphi_{k,n} : n \in \mathbb{N}\}$ $(k \in \mathbb{N})$ como en la hipótesis. Si aplicamos el apartado (b) del Teorema 4.5.2 a la sucesión constante $S_j = I_Q$ obtenemos un subespacio lineal denso $\widetilde{M} \subset \mathcal{E}$ tal que, para cada función $f \in \widetilde{M} \setminus \{0\}$, se tiene que cada sucesión $\{((I_Q f) \circ \varphi_{k,n})|_K : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(G_k)$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos

$$M := I_Q(\widetilde{M}).$$

Entonces M es un subespacio lineal de $\mathcal{E}_Q$. Además, si $F \in M \setminus \{0\}$, entonces $F = I_Q f$ para alguna función $f \in \widetilde{M} \setminus \{0\}$, luego la propiedad de aproximación del enunciado se verifica. Finalmente, M es denso en $I_Q(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_Q$, por tanto M debe ser infinito-dimensional. $\square$

Finalmente, nos gustaría decir algo en el caso de la condición más débil $\Delta_{\text{mín}}(Q) > 0$ para el subconjunto $Q \subset \mathbb{N}_0$. En este caso, Luh, Martirosian y Müller pudieron probar (ver [64, Theorem 1]) que dada una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{C}$ que tiende a ∞ (de nuevo, el enunciado es equivalente a "(a_n) no está acotada") existe una función $F \in \mathcal{E}_Q$ tal que la sucesión de traslaciones $\{f(z + a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $A(K)$ para todo $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. En nuestro siguiente (y último) teorema obtenemos una fuerte mejora del resultado de Luh–Martirosian–Müller con una demostración diferente. Hacemos notar que por el teorema de Mergelyan la densidad en $\mathcal{E}$ implica la densidad en cada $A(K)$ con $K \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Teorema 4.6.6. *Sean un subconjunto $Q \subset \mathbb{N}_0$ con $\Delta_{\text{mín}}(Q) > 0$ y una sucesión $(\varphi_n) \in \omega(\mathbb{C})$. Entonces existe un espacio lineal infinito-dimensional $M \subset \mathcal{E}_Q$ tal que para cada $F \in M \setminus \{0\}$ la sucesión $\{F \circ \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Tenemos que $\varphi_n(z) = a_n + b_n z$ $(n \in \mathbb{N})$ para ciertas sucesiones complejas (a_n), (b_n) con $b_n \neq 0$ para todo n y $a_n \to \infty$, $a_n/b_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Dados $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $R > 0$ y dos polinomios g y h podemos elegir, como se hizo en la demostración del Teorema 4.6.5, un entero positivo n tal que $\overline{B}(0,r) \cap \varphi_n(\overline{B}(0,R)) = \emptyset$. Consideremos también la correspondiente función F definida sobre $L := \overline{B}(0,r) \cup \varphi_n(\overline{B}(0,R))$ por

$$F(z) = \begin{cases} (I_Q h)(z) & \text{si } z \in \overline{B}(0,r) \\ g(\varphi_n^{-1}(z)) & \text{si } z \in \varphi_n(\overline{B}(0,R)). \end{cases}$$

Ahora, podemos elegir n tal que exista una arco de Jordan γ que conecte el punto ∞ con la frontera de $\overline{B}(0,r)$ tal que

$$\gamma_{\pi(1-\delta)} \cap L = \emptyset, \tag{22}$$

donde $\delta := \Delta_{\text{mín}}(Q)$ (lo probaremos al final de la demostración). Por tanto, aplicando el Lema 4.6.3(b), obtenemos un polinomio $P \in \mathcal{E}_Q$ con $\|P - f\|_L < \varepsilon$. Entonces, como en la demostración del Teorema 4.6.5, obtenemos una función $f \in \mathcal{E}$ tal que

$$\|f - h\|_{\overline{B}(0,r)} < \varepsilon \ \text{ y } \ \|(I_Q f) \circ \varphi_n - g\|_{\overline{B}(0,R)} < \varepsilon.$$

Definimos

$$G(g,R,\varepsilon) := \{f \in \mathcal{E} : \|(C_{\varphi_n} I_Q)f - g\|_{\overline{B}(0,R)} < \varepsilon \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Con esta notación, acabamos de probar que cada $G(g,R,\varepsilon)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}$. Por otro lado, no es difícil ver que los $G(g,R,\varepsilon)$ son abiertos y que

$$HC((C_{\varphi_n}I_Q)) = \bigcap_{j,k,l\in\mathbb{N}} G(g_j,k,1/l),$$

donde (g_j) es una enumeración de los polinomios que tienen partes real e imaginaria racionales. Por el teorema de Baire, $HC((C_{\varphi_n}I_Q))$ es denso. En otras palabras, la sucesión $C_{\varphi_n}I_Q : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ $(n \in \mathbb{N})$ es densamente hipercíclica. Pero lo mismo se verifica para cada subsucesión $(C_{\varphi_{n_j}}I_Q)$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \cdots)$ porque, evidentemente, (φ_{n_j}) también pertenece a $\omega(\mathbb{C})$. Por el Lema 4.5.1 aplicado a $X := \mathcal{E} =: Y_k$ para todo k, existe un subespacio lineal denso $\widetilde{M} \subset \mathcal{E}$ con $\widetilde{M} \setminus \{0\} \subset HC((C_{\varphi_n}I_Q))$. Si ahora definimos $M := I_Q(\widetilde{M})$ podemos terminar como en la demostración del apartado (b) del Teorema 4.6.5.

De este modo, habríamos acabado si lográsemos mostrar que (22) se verifica para un arco de Jordan γ adecuado. Recordemos que $L = \overline{B}(0,r) \cup \varphi_n(\overline{B}(0,R))$, donde n se ha elegido de forma que la unión es disjunta. Observemos también que $\varphi_n(\overline{B}(0,R)) = \overline{B}(a_n, R|b_n|)$. Si $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$, consideremos el ángulo

$$S(n) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \theta_n - \pi\delta < \arg z < \theta_n + \pi\delta\}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$, podemos elegir nuestro entero n tal que $\left|\dfrac{b_n}{a_n}\right| < \operatorname{sen}(\pi\delta)$, luego $\overline{B}(a_n, R|b_n|) \subset S(n)$. Definimos el arco de Jordan

$$\gamma := \{-te^{i\theta_n} : t > r\},$$

que une ∞ con el punto $-r$ de la frontera de $\overline{B}(0,r)$. Además,

$$\gamma_{\pi(1-\delta)} \cap \overline{B}(0,r) = \emptyset \ \text{ y } \ \gamma_{\pi(1-\delta)} \subset \mathbb{C} \setminus S(n),$$

por lo que (22) se verifica. $\square$

Referencias

[1] Y. Abe, *Universal holomorphic functions in several variables*, Analysis **17** (1997), 71–77.

[2] Y. Abe and P. Zappa, *Universal functions in complex general linear groups*, J. Approx. Theory **100** (1999), 221–232.

[3] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, London, 1979.

[4] D.H. Armitage and P.M. Gauthier, *Recent developments in harmonic approximation, with applications*, Results in Math. **29** (1996), 1–15.

[5] S. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374–383.

[6] S. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), 384–390.

[7] S. Ansari and P. Bourdon, *Some properties of cyclic operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **63** (1997), 195–207.

[8] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[9] T. Bermúdez, A. Bonilla and A. Peris, *On hypercyclicity and supercyclicity criteria*, Prepublicación.

[10] T. Bermúdez and V. Miller, *On operators T such that $f(T)$ is hypercyclic,* Integr. Equ. Oper. Theory **37** (2000), 332–340.

[11] L. Bernal-González, *Una nota sobre sucesiones complejas y equicontinuidad de operadores,* Rev. Roum. Math. Pures Appl. **34** (1989), 643–645.

[12] L. Bernal-González, *Omnipresent holomorphic operators and maximal cluster sets*, Colloq. Math. **63** (1992), 315–322.

[13] L. Bernal-González, *Derivative and antiderivative operators and the size of complex domains,* Ann. Polon. Math. **59** (1994), 267–274.

[14] L. Bernal-González, *Plane sets having dense holomorfics images*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **40** (1995), 567–569.

[15] L. Bernal-González, *Universal functions for Taylor shifts*, Complex Variables **31** (1996), 121–129.

[16] L. Bernal-González, *On universal entire functions with zero-free derivatives*, Arch. Math. **68** (1997), 145–150.

[17] L. Bernal-González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1003–1010.

[18] L. Bernal-González, *Hypercyclic sequences of differential and antidifferential operators,* J. Approx. Theory **96** (1999), 323–337.

[19] L. Bernal-González, *Densely hereditarily hypercyclic sequences and large hypercyclic manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3279–3285.

[20] L. Bernal-González, *Universal images of universal elements,* Studia Math. **138** (2000), 241–250.

[21] L. Bernal-González and M.C. Calderón-Moreno, *Dense linear manifolds of monsters*, J. Approx. Theory **119** (2002), 156–180.

[22] L. Bernal-González, M.C. Calderón-Moreno and K.G. Grosse-Erdmann, *Strongly omnipresent operators: general conditions and applications to composition operators*, J. Austral. Math. Soc. **72** (2002), 335–348.

[23] L. Bernal-González and K.G. Grosse-Erdmann, *The Hypercyclicity Criterion for sequences of operators*, Studia Math., en prensa.

[24] L. Bernal-González and A. Montes-Rodríguez, *Universal functions for composition operators*, Complex Variables **27** (1995), 47–56.

[25] L. Bernal-González and J.A. Prado-Tendero, *Sequences of differential operators: exponentials, hypercyclicity and equicontinuity,* Ann. Polon. Math. **77** (2001), 169–187.

[26] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières,* C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[27] J.P. Bès, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case,* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1801–1804.

[28] J.P. Bès and A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators,* J. Funct. Anal. **167** (1999), 94–113.

[29] C. Blair and L.A. Rubel, *A universal entire function*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 331–332.

[30] R.P. Boas, *Entire functions*, Academic Press, New York, 1954.

[31] J. Bonet, *Hypercyclic and chaotic convolution operators,* J. London Math. Soc. **62** (2000), 253–262.

[32] J. Bonet and A. Peris, *Hypercyclic oprators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 587–595.

[33] P.S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 845–847.

[34] M.C. Calderón-Moreno, *Universality of derivative and antiderivative operators with holomorphic coefficients,* Ann. Polon. Math. **77** (2001), 197–207.

[35] M.C. Calderón-Moreno and J. Müller, *Universal holomorphic and harmonic functions with additional properties*, Prepublicación.

[36] G. Costakis, *Some remarks on universal functions and Taylor series,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000), 157–175.

[37] D.G. Dickson, *Expansions in series of solutions of linear difference–differential and infinite order differential equations with constant coefficients*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **23**, Providence, Rhode Island, 1957.

[38] S.M. Duios Ruis, *On the existence of universal functions*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983), 9–13.

[39] S.M. Duios Ruis, *Universal functions of the structure of the space of entire functions*, Soviet Math. Dokl. **30** (1984), 713–716.

[40] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[41] L. Ehrenpreis, *Mean periodic functions I,* Amer. J. Math. **77** (1955), 293–328.

[42] N. Feldman, V. Miller and L. Miller, *Hypercyclic and supercyclic cohyponormal operators,* Acta Sci. Math. (Szeged) **68** (2002), 303–328.

[43] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, Basel–London–Stuttgart, 1987.

[44] E.A. Gallardo-Gutiérrez and A. Montes-Rodríguez, *The role of the spectrum in the cyclic behavior of composition operators,* Memoirs of the Amer. Math. Soc., en prensa.

[45] G. Gethner and J.H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281–288.

[46] G. Godefroy and J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vectors manifolds,* J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[47] S. Grivaux, *Construction of operators with prescribed behaviour,* Arch. Math., en prensa.

[48] K.G. Grosse-Erdmann, *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Giessen **176** (1987).

[49] K.G. Grosse-Erdmann, *On the universal functions of G. R. MacLane*, Complex Variables **15** (1990), 193–196.

[50] K.G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 345–381.

[51] K.G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, Studia Math. **139** (2000), 47–68.

[52] M. Heins, *On the number of 1–1 directly conformed maps which a multiply–connected plane region of finite connectivity* p (> 2) *admits onto itself*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 454–457.

[53] D. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators,* J. Funct. Anal. **99** (1991), 179–190.

[54] H.M. Hilden and L.J. Wallen, *Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators,* Indiana Univ. Math. **24** (1974), 557–565.

[55] G. Herzog, *On zero-free universal entire functions*, Arch. Math. **63** (1994), 329–332.

[56] E. Hille, *Analytic Function Theory, II,* Chelsea Publishing Company, New York, 1987.

[57] L. Hormander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[58] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators,* Thesis, University of Toronto, 1982.

[59] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[60] W. Luh, *On universal functions*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **19** (1976), 503–511.

[61] W. Luh, *Approximation by antiderivatives*, Constr. Approx. **2** (1986), 179–187.

[62] W. Luh, *Entire functions with various universal properties*, Complex Variables **31** (1996) 87–96.

[63] W. Luh, *Multiply universal holomorphic functions*, J. Approx. Theory **89** (1997), 135–155.

[64] W. Luh, V.A. Martirosian and J. Müller, *T–universal functions with lacunary power series*, Acta Sci. Math. (Szeged) **64** (1998), 67–79.

[65] W. Luh, V.A. Martirosian and J. Müller, *Universal entire functions with gap power series*, Indag. Math., N. S., **9** (1998), 529–536.

[66] W. Luh, V.A. Martirosian and J. Müller, *Restricted T–universal functions*, J. Approx. Theory **114** (2002), 201–213.

[67] G.R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families,* J. Analyse Math. **2** (1952/53), 72–87.

[68] B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955/1956), 271–355.

[69] A. Markushevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Mir, Moscú, 1987.

[70] V. Mathews, *A note on hypercyclic operators on the space of entire sequences*, Indian J. Pure Appl. Math. **25** (1994), 1181–1184.

[71] A. Montes-Rodríguez and H.N. Salas, *Supercyclic subspaces: spectral theory and weighted shifts,* Adv. Math. **163** (2001), 74–134.

[72] J.C. Oxtoby, *Measure and Category,* 2nd. ed., Springer, New York, 1980.

[73] A. Peris, *Chaotic polynomials on Fréchet spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3601–3604. "Erratum" in Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3579–3760.

[74] G. Pólya, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (1. Mitteilung)*, Math. Z. **29** (1929), 549–640.

[75] S. Rolewicz, *On orbits of elements,* Studia Math. **32** (1969), 17–22.

[76] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, 3ª ed., McGraw–Hill, Madrid, 1988.

[77] H.N. Salas, *Supercyclicity and weighted shifts,* Studia Math. **135** (1999), 55–74.

[78] I. Schneider, *Schlichte Funktionen mit universellen Approximationseigenschaften*, Mitt. Math. Sem. Giessen **230** (1997).

[79] W. Seidel and J. L. Walsh, *On approximation by euclidean and non-euclidean translation of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1941), 916–920.

[80] S.A. Shkarin, *On the growth of D–universal functions*, Moscow Univ. Math. Bull. **48** (1993), no. 6, 49–51.

[81] R. Tenthoff, *Universelle holomorphe Funktionen mit vorgegeben Approximationswegen*, Shaker Verlag, Aachen, 2000.

[82] J. Wengenroth, *Hypercyclic operators on non-locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., en prensa.

[83] P. Zappa, *On universal holomorphic functions*, Bolletino U. M. I. 2-A **7** (1988), 345–352.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. José Antonio Prado Tendero

titulada Universalidad: U-operadores y sucesiones de operadores diferenciales

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude por unanimidad

Sevilla, 27 de Marzo 2003

El Vocal, F.M. [signature]

El Vocal, José Bonet

El Vocal, Antonio Bonet

EL PRESIDENTE

El Secretario,

El Doctorado