UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

TEORIA DEL GRADO MULTIVALUADO

Tesis que presenta
Genaro López Acedo
para aspirar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de
Sevilla.

V B Director de la Tesis

D. Tomás Domínguez Benavides
Catedrático de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Junio de 1987

Quiero expresar mí agradecimiento al Profesor Tomás Dominguez Benavides por el apoyo prestado para la realización de esta Tesis. Así mismo a los Profesores José Real Anguas y Enrique Fernandez Cara, por sus ideas y colaboración.

INDICE

INTRODUCCION.......................................I-VIII

CAPITULO I:Resultados preliminares........................ 1

Sección 1:Grado en dimensión finita........................2-5

Sección 2:Grado en dimensión infinita...................6-10

CAPITULO II:Axiomática......................................11

Sección 1:Axiomas para grado multivaluado...............12-19

Sección 2:Método general de extensión...................20-26

CAPITULO III:Grado para aplicaciones A-compactas...............27

Sección 1:Definición de grado en el conjunto AKG........28-37

Sección 2:Propiedades del conjunto AK(G)................38-48

Sección 3:Fórmula del producto..........................48-60

Sección 4:Extensión del grado a un subconjunto de AK(G).61-66

CAPITULO IV:Aplicación de la teoría del grado para la búsqueda de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales........66-78

BIBLIOGRAFIA.......................................79-82

INTRODUCCION

Multitud de problemas en análisis y en sus aplicaciones pueden ser reducidos al estudio del conjunto de soluciones de una ecuación de la forma $f(x)=p$. El objeto fundamental de la teoría del grado ha sido el estudio del número de soluciones y la naturaleza de las mismas en la ecuación anterior ;así la primera idea intuitiva que nos aparece de grado será la de una aplicación que asocie a una función f, un conjunto G y un punto p un número entero que represente las veces(contadas algebraicamente) que la función f toma el valor p en el conjunto G y que a su vez recoga las propiedades usuales de las soluciones de una ecuación suficientemente regular que esencialmente son:

(1)La identidad toma una sola vez el valor p si $p \in G$ y ninguna si $p \notin G$

(2)El número de soluciones que se alcanza en la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de las soluciones en cada conjunto.

(3)El número de soluciones verifica propiedades de continuidad respecto a la función f y el punto p.

Estas condiciones obligan a introducir restricciones a la hora de definir el grado;así el conjunto G será abierto , las funciones continuas y el punto p verificará la siguiente condición de frontera: $p \notin \overline{f(Fr(G))}$.

La traducción formal de las propiedades (1),(2)y(3) tiene su realización en la exigencia al grado de la verificación de los siguientes axiomas.

(d1)$d(I,G,p)=1$ si $p \in G$

(d2)Si $G_1,G_2 \subset G$, $G_1 \cap G_2=\emptyset$ y $p \notin \overline{f(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))}$ entonces:

$$d(f,G,p)=d(f_{/G_1},G_1,p)+d(f_{/G_2},G_2,p)$$

(d3)Si $H:[0,1]\times G \longrightarrow X$ e $y:[0,1]\longrightarrow X$ son continuas e $y(t) \notin H(t)(Fr(G)$ $\forall t \in [0,1]$ entonces:

$d(H(t),G,y(t))$ es independiente de t

Las primeras definiciones de grado se dan en espacios de dimensión finita,a este grado se le denomina de Brouwer por ser él quién en 1912 desarrollo las ideas antes expuestas.

Nagumo en 1951 define el grado de forma analitica para funciones de C y valores regulares de la siguiente forma:

$$d(f,G,p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sig} J_f(x)$$

Esta definición es consistente con los axiomas definidos para el grado. El mismo autor mediante procedimientos de aproximación(define el grado de una función como el limite de los grados de las funciones de las que ella es limite uniforme)extiende el grado para el caso de funciones continuas en espacios de dimensión finita.

Leray y Schauder son los primeros en tratar el problema para funciones definidas en espacios de dimensión infinita. Las funciones que estudian son las perturbaciones compactas de la identidad,utilizando un procedimiento de aproximación uniforme por funciones de rango finito.

La primera pregunta que se plantea es si seria posible definir un grado que verifique los 3 axiomas anteriores en el conjunto de todas las funciones continuas en espacios de dimensión infinita. La respuesta se da de forma negativa mediante la construcción de un contraejemplo(ver13).

Una vez conocida la respuesta negativa a la anterior pregunta y dada la gran importancia de la teoria del grado en Análisis funcional no es de extrañar que númerosos autores hayan intentado en los últimos 20 años extender la definición a conjuntos más amplios de funciones. La naturaleza de los métodos de extensión exige que estas clases de funciones verifique condiciones restrictivas de compacidad para la verificación de los 3 axiomas anteriores.Si subtituimos la convergencia uniforme por la convergencia puntual se puede extender la definición del grado a un mayor número de funciones, ahora bien cuando se toma limite en los grados de las funciones aproximantes al no ser convergentes las sucesiones de los grados nos aparecen limites de oscilación con lo que el grado resultante habrá de tomar valores sobre conjuntos de números enteros, hecho que obliga a enunciar de forma distinta las propiedades exigibles al grado. Estas ideas fueron desarrolladas fundamentalmente por W.Petrysyn y F.Browder que valiendose de métodos de aproximación del tipo de Galerkin definen un grado multivaluado para un conjunto de funciones más amplio que el anterior y entre los que se encuentran operadores que aparecen en un gran número de ecuaciones como son los operadores P-compactos y otros con propiedades de monotonia como son los acretivos: el articulo-tratado de W.Petrysyn(19) resume los avances conseguidos.

En nuestros dias el tema sigue siendo de gran transcendencia, prueba de ello son los trabajos aparecidos en los últimos anos como el de Werenski(25)y el de Browder(1) y los libros de Gaines-Mawhin(10), Deimling(6)y Lloyd(13)

Partiendo de ésta situación el objetivo que nos planteamos al realizar nuestra mémoria era por una parte sistematizar los últimos resultados construyendo un marco axiomático suficientemente amplio para que incluya los diversos modelos de grado hasta ahora definidos y por otra parte extender el grado a clases más amplias de funciones que como veremos en el último capitulo aparecen en problemas de busqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales

La memoria esta dividida en 4 capitulos:

El primero de los capitulos recoge únicamente los resultados que hemos tenido que utilizar para el desarrollo del trabajo que se presenta;estos resultados han sido extraidos fundamentalmente del libro de K.Deimling(6).

En el segundo capitulo se construye una axiomática para el grado multivaluado en la que el hecho de tomar este valores sobre conjuntos nos ha obligado a introducir determinados cambios en los axiomas cuidando que estos no afectaran en la deducción de las propiedades más importantes. La modificación fundamental se introduce en el axioma (d2) en el que se ha tenido que cambiar la igualdad por una contención en determinados casos; lo cuál permite aún obtener teoremas de existencia para la ecuación f(x)=p o ánalogamente la obtención de puntos fijos. Dadas las distintas formas de extensión del grado,recogidas en la literatura del tema,en la segunda parte del capitulo construimos un método general de extensión,que permite,definido el grado sobre una clase de funciones, extenderlo automáticamente a una clase más amplia formada por limites puntuales de la anterior clase.

El tercer capitulo recoge los resultados que consideramos fundamentales de la mémoria. En primer lugar definimos el grado para un tipo de funciones a las que se les impone una condición de convergencia más débil que las impuestas por W.Petrysyn a las aplicaciones A-propias. El debilitamiento de las hipótesis dificulta notablemente la comprobación de que son verificados los axiomas, principalmente el axioma de homotopia; esto nos permite definir el grado, entre otras,para las aplicaciones compactas,1-bola-contractivas y para aplicaciones con propiedades de invarianza sobre los subespacios de dimensión finita. A continuación se estudian propiedades de esta clase de funciones y del grado que en ellas se ha definido,en particular demostramos que contienen de forma estricta al conjunto de funciones definido por Werinski(25);también se demuestra que en el caso de las perturbaciones compactas de la identidad el grado definido coincide con el de Leray-Schauder. Si ya es dificil probar el teorema de la fórmula del producto para el grado de aplicaciones A-propias (ver 23) no es de extranar que la dificultad se acreciente sensiblemente para nuestras aplicaciones, más generales. al final del capitulo probamos este teorema imponiendo condiciones del mismo tipo de las exigidas por Ship-fah Wong.

El último capitulo esta dedicado a resolver un problema de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales. Utilizando la definición de grado anterior conseguimos probar para dicho problema la existencia de solución. Es de destacar que para resolver este problema los operadores utilizados son los especificamente definidos por nosotros en el capitulo III y no se encuentran entre los A-propios.

CAPITULO I

RESULTADOS PRELIMINARES

En este capitulo exponemos los resultados sobre la teoría del grado que entendemos son necesarios para un mejor desarrollo y comprensión de la memoria que presentamos. Estos resultados presentados en forma de teoremas han sido extraidos del libro de Klaus Deimling (6) y en ellos se exponen los principales resultados sobre los grados de Brower y Leray-Schauder y algunas propiedades topológicas que se pueden deducir de ellos.

CAPITULO I

SECCION 1 Grado en dimensión finita (Brower)

En primer lugar enunciamos un teorema que nos asegura la existencia y unicidad del grado para funciones continuas en R^n. En este teorema se observa que el grado verifica los tres axiomas de los que hablamos en la introducción.

TEOREMA 111.

Existe una función d y solo una del conjunto:

$\{(f,G,y)/\ G \subset R^n$ abierto y acotado, $f:\bar{G} \longmapsto R^n$ continua, $y \notin R^n - f(fr(G))\}$

en el conjunto de los números enteros verificando:

(d1) $d(I,G,y) = 1$ para $y \in G$

(d2) si G_1 y G_2 son subconjuntos disjuntos de G, de forma que $y \notin f(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))$ entonces $d(f,G,y) = d(f,G_1,y) + d(f,G_2,y)$

(d3) $d(h(t,.),G,y(t))$ es independiente de $t \in I=[0,1]$ cuando $h: I\times G \longmapsto R^n$ es continua, $y: I \longmapsto R$ es continua e $y(t) \notin h(t,Fr(G))$ para todo t de I.

A d(f,G,y) se le denomina grado de la función f asociado al abierto G en el punto y.

A partir de la verificación de las propiedades (d1),(d2)y(d3) son facilmente deducibles propiedades como las que se enuncian en el siguiente teorema:

<u>TEOREMA</u> <u>1.1.2</u>

Sea $M=\{(f,G,y)/\ G\subset R^n$ abierto y acotado,$f\in C(G),y\notin f(Fr(G))\}$ y sea $d:M\longrightarrow Z$ el grado topológico dado en el teorema 111. Entonces d tiene las siguientes propiedades:

(d4) $d(f,G,y)\neq 0$ implica $f^{-1}(y)\neq\emptyset$

(d5) $d(.,G,y)$ y $d(f,G,.)$ son constantes en $\{g\in C(G)/\|g-f\|_0<r\}$ y $Br(y)\subset R^n$, respectivamente, donde $r=d(y,f(Fr(G)))$. Por consiguiente $d(f,G,y)$ es constante en cualquier componente conexa de $R^n-f(Fr(G))$.

(d6) $d(g,G,y) = d(f,G,y)$ cuando $g\equiv f$ en $Fr(G)$.

(d7) $d(f,G,y) = d(f,G\ ,y)$ para cualquier subconjunto G_1 de G de forma que $y\notin f(\bar{G}-G_1)$.

De las propiedades hasta ahora expuestas se deducen resultados topológicos como los siguientes:

TEOREMA 1.1.3

Sea $D \subset R^n$ un conjunto compacto convexo y no vacio y $f: D \longrightarrow D$ continua. Entonces f tiene un punto fijo.

TEOREMA 1.1.4

Sea $G \subset R^n$ un abierto acotado con $0 \in G$ y sea $f: Fr(G) \longrightarrow R^n - \{0\}$ continua. Si la dimensión del espacio n es impar, entonces existen $x \in Fr(G)$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$.

TEOREMA 1.1.5

Sea $G \subset R^n$ abierto, acotado, simetrico y $0 \in G$. Si $f \in C(G)$, es impar y $0 \notin f(Fr(G))$ entonces $d(f,G,0)$ es impar.

COROLARIO 1.1.1

Sea $G \subset R^n$ un conjunto abierto, acotado, simetrico y $0 \in G$. Sea $f \in C(G)$ con $0 \notin f(Fr(G))$ y $f(-x) \neq \lambda f(x)$ en $Fr(G)$ para todo $\lambda > 1$. Entonces $d(f,G,0)$ es impar.

TEOREMA 1.1.6

Sea $G \subset R^n$ abierto y $f: \bar{G} \subset R^n \longrightarrow R^n$ continua y localmente inyectiva. Entonces f es una aplicación abierta.

Vamos a ver ahora un Teorema que nos relaciona el grado de la composición de dos funciones con los grados de las dos funciones y que es conocido como la Fórmula de Producto.

TEOREMA 1.1.7 Fórmula del Producto

Sea G R un conjunto abierto y acotado, $f \in C(G)$, g $C(R^n)$ y $\{K_i\}_{i \in I}$ las componentes conexas acotadas de $R^n - f(Fr(G))$. Supongamos que $y \notin (gf)(Fr(G))$. Entonces:

$$d(gf,G,y) = \sum_{i \in I} d(f,G,y).d(g,K_i,y)$$

Donde solamente un número finito de sumandos es distinto de cero.

COROLARIO 1.1.2 Teorema de separación de Jordan

Si $G_1, G_1 \subset R^n$ son conjuntos compactos y homeomorfos el úno en el ótro, entonces R^n-G y R^n-G tiene el mismo número de componentes conexas.

CAPITULO I

SECCION 2 Grado en dimensión infinita (Leray-Schauder)

En esta sección exponemos los resultados concernientes a la extensión de la definición de grado para el caso en que la dimensión del espacio es infinita y los operadores son perturbaciones de la identidad mediante funciones que vienen definidas en términos de las medidas de no compacidad de Kuratowski. La definición de estas medidas, α y β, así como los principales resultados que hay sobre ellas los supondremos conocidos.

DEFINICION 1.2.1

Sea X un espacio de Banach, $\gamma(A)$ representará $\alpha(A)$ o $\beta(A)$ para conjuntos acotados de X. Sea $G \subset X$ y $F:\bar{G} \subset X \longrightarrow X$ continua, entonces:

F es llamada γ-Lipschitz si $\gamma(F(B)) < K\,\gamma(B)$ para algún $K>0$ y para todo $B \subset G$, B acotado. Si $K<1$ es llamada una γ-contracción estricta.

F es llamada γ-condensante si $\gamma(F(B)) \geq \gamma(B)$ implica que $\gamma(B)=0$.

Denominaremos $C_\gamma(G) = \{F:\bar{G} \longrightarrow X /\ F$ es γ-condensante$\}$

A continuación enunciamos un Teorema en el que de forma implícita se define el grado para perturbaciones γ-condensantes de la identidad, que incluyen como caso particular el de perturbaciones compactas de la identidad.

<u>TEOREMA</u> <u>1.2.1</u>

Sea X un espacio de Banach y el conjunto:

$$M=\{(I-F,G,y) /\ G \subset X \text{ abierto acotado, } F \in C_\gamma(G),\ y \notin I-F(Fr(G))\}$$

Entonces existe una y solo una aplicación $d_{LS}: M \longrightarrow Z$ cumpliendo:

(d1) $d_{LS}(I,G,y) = 1$ si $y \in G$

(d2) si G_1 y G_2 son subconjuntos disjuntos de G, de forma que $y \notin (I-F)(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))$ entonces:
$d_{LS}(I-F,G,y) = d_{LS}(I-F,G_1,y) + d_{LS}(I-F,G_2,y)$

(d3) $d_{LS}(I-H(t,.),G,y(t))$ es independiente de $t \in I=[0,1]$ cuando $H: I \times G \longrightarrow X$ es continua y $H(t,.) \in C_\gamma(G)$ para todo $t \in I$; $y: I \longrightarrow X$ es continua e $y(t) \notin H(t,Fr(G))$ para todo $t \in I$.

Las propiedades usales del grado en dimensión finita se mantienen y esencialmente quedan recogidas en el siguiente Teorema.

<u>TEOREMA 1.2.2</u>

En las condiciones del Teorema 1.2.1 la función d_{LS} allí definida verifica las siguientes propiedades:

(d4) $d_{LS}(I-F,G,y) \neq 0$ implica que $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$

(d5) $d_{LS}(I-F,G,y) = d_{LS}(I-T,G,y)$ cuando $T \equiv F$ en $Fr(G)$

(d6) $d_{LS}(I-F,G,y) = d_{LS}(I-F,G_1,y)$ para cualquier subconjunto G de G de forma que $y \notin (I-F)(\bar{G}-G_1)$.

Por último en este capitulo de resultados preliminares vamos a enunciar dos Teoremas relativos al grado para perturbaciones compactas de la identidad, el primero recoge una relación entre el grado de Leray-Schauder y el grado de Brower; en el segundo se extiende la Fórmula de Producto a espacios de dimensión infinita.

TEOREMA 1.2.3

Sea X un espacio de Banach real y el conjunto:

$$M=\{(I+C,G,y)\ /\ G\subset X \text{ abierto acotado, } C\in K(G),\ y\notin (I+C)(Fr(G))\}$$

Entonces existe una función $d:M\longrightarrow Z$ verificando los axiomas de grado. El entero $d(I+C,G,y)$ viene dado por $d((I+C_1)/_{\bar{G}_1},G_1,y)$ donde C_1 es una aplicación de K(G) que verifica:

$$\sup\{\|C_1x - Cx\|\ /\ x\in\bar{G}\} < d(y,(I+C\ )(Fr(G)))$$

$G_1 = G\cap X$, X es un subespacio de X de forma que $\dim X <+\infty$, $y\in X_1$, $C_1(G)\subset X_1$ y d es el grado de Brower de X .

TEOREMA 1.2.4

Sea G X abierto acotado, $C\in K(G)$ y $F=I-C$. Si $T:X\longrightarrow X$ es completamente continua, $y\notin TF(Fr(G))$ y $\{K_i\}_{i\in I}$ son las componentes conexas de X-F(Fr(G)), entonces:

$$D(TF,G,y) = \sum_{i\in I} d(F,G,K_i)\ d(T,K_i,y)$$

Donde solamente un número finito de sumandos no son nulos.

COROLARIO 1.2.1

Si A y B son dos subconjuntos de un espacio de Banach X y T=I-C es un homeomorfismo de A en B, con $C \in K(A)$. Entonces X-A y X-B tienen el mismo número de componentes conexas.

CAPITULO II

AXIOMATICA

En este capitulo en primer lugar se construye una axiomática para el grado multivaluado teniendo que introducir variantes en el axioma (2)(ver 13) ya que los modelos de grado que se tratan de recoger se caracterizan por tomar valores sobre un subconjunto de P(Z) y y no sobre el conjunto de los números enteros, al obtenerse estos grados por procesos de aproximación no uniformes que conllevan la aparición de limites de oscilación. Sin embargo se puede observar que con este obligado cambio en la axiomática no se pierden ninguna de las propiedades que de ella se deducían en el caso univaluado,pudiendo obtenerse resultados sobre existencia de solucion en la ecuación $f(x)=p$ y un teorema del punto fijo. Una vez construida la axiomática y tomandola como punto de partida construimos un método general de extensión del grado que será el que utilicemos en el capitulo III.

CAPITULO II

SECCION I Axiomática para el grado multivaluado

En esta sección se construye un sistema axiomático y se estudian las propiedades que de él se deducen. Este sistema recoge los modelos de grado multivaluado y univaluado construidos hasta ahora y el que se construye en el Capitulo III.

DEFINICION 2.1.1

Sean (X,T), (Y,T') dos espacios vectoriales topológicos. W una familia de abiertos en T de forma que $\emptyset \in W$ y $W \neq \{\emptyset\}$. Para cada G de W sea $C(G)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas de $\bar{G} \subset X$ en Y y $M(G)$ un subconjunto de $C(G)$ verificando:

(1) $I \in M(G)$ $\forall G \in W$. I será una aplicación distinguida que en el caso de ser $X=Y$ coincidirá con la identidad.

(2) Si $G_1, G \in W$, $G_1 \subset G$ y $F \in M(G)$ entonces se tiene $F/_{\bar{G}_1} \in M(G_1)$.

(3) Si $F \in M(G)$ entonces $\forall p \in X$ se tiene $F-p \in M(G)$.

A la familia $M(W) = \{ M(G) / G \in W \}$ la denominaremos una clase admisible de aplicaciones de X en Y.

Sea H(G) una clase de homotopías definidas dentro del conjunto M(G) y que incluyen a las de la forma F-tp, $\forall F \in M(G)$ y $\forall p \in X$

Al conjunto $H(W) = \{ H(G) / G \in W \}$ lo denominaremos una clase de homotopías para M(W).

Denominaremos $W' = W - \{\emptyset\}$.

DEFINICION 2.1.2

Sea $Z^* = Z \cup \{ +\infty \} \cup \{ -\infty \}$ y $A, B \in P(Z^*)$, definimos:

$A + B = \{ c \in Z^* / c = a+b ; a \in A \text{ y } b \in B \}$ donde $(+\infty) + (-\infty) = Z^*$.

DEFINICION 2.1.3

Sean (X,T),(Y,T),W,M(W)y H(W) en las condiciones de la definición 1.1.1. Para cada tripleta (F,G,p) de forma que $G \in W$, $F \in M(G)$ y $p \notin \overline{F(Fr(G))}$ le asociamos un subconjunto de Z^*. Diremos que esta aplicación es un grado multivaluado si verifica los siguientes axiomas:

(D1) $D(I,G,p) = \{1\}$ si $p \in G$ y $D(I,G,p) = \{0\}$ si $p \notin G$

(D2) Si $G \in W$ y G_1, G_2 son subconjuntos disjuntos de G y $G_1, G_2 \in W$, $F \in M(G)$ con $p \in \overline{F(\bar{G} - (G_1 \cup G_2))}$ entonces:

$$D(\ F, G, p\ ) \subseteq D(F/_{\bar{G}_1}, G_1, p\ ) + D(\ F/_{\bar{G}_2}, G_2, p\ )$$

dandose la igualdad si $D(\ F/_{\bar{G}_1}, G_1, p\ )$ ó bien $D(F/_{\bar{G}_2}, G_2, p)$ son de la forma $\{a\}$ con a de Z

Observación: Si $p \notin \overline{F(G-(G\ \ G\ ))}$ entonces se tiene que $p \notin F/_{\bar{G}_1}(Fr(G_1)) \cup F/_{\bar{G}_2}(Fr(G_2))$ y por tanto estan bien definidos $D(\ F/_{\bar{G}_1}, G_1, p\ )$ y $D(\ F/_{\bar{G}_2}, G_2, p\ )$.

(D3) Si $G \in W$, $h_t \in H(G)$ e $\{y_t\}_{t \in [0,1]}$ es una curva continua en Y que verifica $y \notin \overline{h_t(Fr(G))}$ entonces:

$$D(\ h_t, G, y_t\ ) \text{ es constante } \forall t \in [0,1].$$

Si $D(\ F, G, p\ ) = \{a\}$ con a de Z diremos que el grado es univaluado.

<u>PROPOSICION 2.1.1</u>

El sistema axiomático dado en la definición 2.1.3 es compatible.

Demostración: Consideremos como $(X,T),(Y,T)$ a R^n con su topológia usual y sea $d(F,G,p)$ el del teorema (1.1.1); si definimos:

$$D(F,G,p) = \{d(F,G,p)\}$$

es trivial comprobar que nos encontramos en la situación de la definición (2.1.3).

PROPOSICION 2.1.2

Los axiomas (D1),(D2) y (D3) son independientes.

Demostración:

(a) El axioma (D1) es independiente de (D2) y (D3).

Bastaría definir $D(F,G,p) = \{+\infty\}$ siempre.

(b) El axioma (D2) es independiente de (D1) y (D3).

Bastaría definir $D(F,G,p) = \{d(F,G,p)^3\}$ donde $d(F,G,p)$ es el grado de Brower.

(c) El axioma (D3) es independiente de los axiomas (D1) y (D2).

Definimos el grado de la siguiente forma

$$D(F,G,p) = \{1\} \text{ si } p \in G \text{ y } \forall U \in W \text{ de forma que } p \in U \text{ y } F/_{\bar{U}} = I \text{ y}$$
$$D(F,G,p) = \{0\} \text{ en los otros casos}$$

Este grado verifica los axiömas (D1) y (D2) y si verificarâ el axioma

(D3) debería ser valida la igualdad D(I,G,p) = D(I-p,G,0) que en este caso es falsa.

PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LOS AXIOMAS

Mediante los teoremas que exponemos a continuación podemos observar que las propiedades que se deducen de los axiomas para el grado multivaluado son substancialmente las mismas que en el caso del grado univaluado,en particular los resultados que nos permiten buscar soluciones en las ecuaciones funcionales.

<u>TEOREMA</u> <u>2.1.1</u>

(a) Si $\exists G \in W$ verificando que D(F,G,p) esté definido para algún p, entonces D(F,$\emptyset$,p) = {0}.

(b) Si K es un subconjunto de G de forma que $G-K \in W$ y si $p \notin F(K)$ se tiene D(F,G,p) = D(F,G-K,p)

Demostración:

(a) Utilizando el axioma (D2) con G_1 = G , G_2 =$\emptyset$ y F=I. Como siempre se tiene D(I,G,p) = {a} con a de Z se tendría D(I,$\emptyset$,p) = {0} y aplicando el axioma (D3) se tiene el resultado.

(b) En axioma (D2) considero G_1 = G-K y G_2=$\emptyset$,bastará probar que

$p \in \overline{F(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))}$ ó sea que $p \in \overline{F(\bar{G}-(G-K))}$ pero $\bar{G}-(G-K) = Fr(G) \cup K$ y como $p \notin \overline{F(Fr(G))}$ y $p \notin F(K)$ se tiene el resultado.

<u>TEOREMA</u> <u>2.1.2</u>

(a) Si $p \notin \overline{F(G)}$ entonces $D(F,G,p) = \{0\}$.

(b) Si $F(G)$ es cerrado y $D(F,G,p) \neq \{0\}$ entonces $\exists x \in D$ verificando $F(x) = p$.

Demostración:

(a) Se deduce del axioma (D2) tomando $G_1 = \emptyset$ y $G_2 = \emptyset$

(b) Se deduce directamente de (a).

<u>TEOREMA</u> <u>2.1.3</u>

(a) $\forall q \in X \quad D(F,G,p) = D(F-q,G,p-q)$.

(b) El grado es constante en las componentes conexas de $Y-\overline{F(Fr(G))}$.

Demostración:

(a) Se deduce de él axioma (D3) considerando la homotopia $h_t = F-tq$ y la curva $y_t = p-tq$ pues si $p \notin \overline{F(Fr(G))}$ entonces $p-tq \notin \overline{F-tq(Fr(G))}$, puesto que $\overline{(F-tq)(Fr(G))} = \overline{F(Fr(G))}-tq$.

(b) Si p y q pertenecen a la misma componente conexa de $Y-\overline{F(Fr(G))}$ entonces existe $\{y_t\}_{t\in[0,1]}$ con $y(0) = p, y(1) = q$, $y_t \notin \overline{F(Fr(G))}$ $\forall t \in [0,1]$ y por tanto $D(F,G,p) = D(F,G,q)$.

TEOREMA 2.1.4

Sea $G \in W$ acotado y $F,T \in M(G)$ verificando:

(1) $F \equiv T$ en $Fr(G)$.

(2) $tF+(1-t)T \in M(G)$.

(3) $p \notin F(Fr(G))$. Entonces;

$$D(F,G,p) = D(T,G,p)$$

Demostración: Es inmediata.

TEOREMA 2.1.5

Sea G un abierto acotado de X y $F:\bar{G}\subset X \longrightarrow X$ de forma que $F \in M(G)$ y $0 \in G$ si:

(1) $(I-tF) \in M(G)$ $\forall t \in [0,1]$.

(2) $(I-tF)(Fr(G))$ es cerrado e $(I-F)(\bar{G})$ es cerrado.

(3) $F(x) \neq m.x$, $m>1$ y $x \in Fr(G)$.

Entonces: $\exists x \in G / F(x) = x$

Demostración: Vamos a probar que $D(I,G,0) = D(I-F,G,0)$ con lo que se tendría el resultado; bastará ver que $0 \notin (I-tF)(Fr(G))$ $\forall t \in [0,1]$. Si $\exists x \in Fr(G)/(I-tF)(x) = 0$ se iría contra la hipotesis (3) y caso contrario podemos aplicar el axioma de homotopía.

CAPITULO II

SECCION 2 Método de Extensión del grado

En esta sección se construye un método general de extensión del grado que recoge las diversas ideas de extensión aparecidas en la construcción del grado de Leray-Schauder y del grado de aplicaciones A-propias, este método será el que utilicemos en el Capitulo III a la hora de definir el grado para un conjunto muy amplio de funciones.

DEFINICION 2.2.1

Sean (X,T), (Y,T) dos espacios vectoriales topológicos, W, M(W), H(W) unas familias admisibles de conjuntos, funciones y homotopias respectivamente. Un esquema de aproximación de grado va a venir definido por una familia numerable de conjuntos $\{ (X_n,T_n),(Y_n,T_n),\ W_n,\ M_n(W),\ H_n(W),\ D_n \}_{n\in N}$ donde (X_n,T_n), (Y_n,T_n) son espacios vectoriales topológicos, W_n, $H_n(W)$, $M_n(W)$ familias admisibles sobre (X_n,T_n), (Y_n,T_n) de conjuntos, de funciones y homotopias y D_n es un grado multivaluado definido en ellas de forma que dados $F\in M(W)$, $G\in W$ y $p\in Y$ existen $F_n\in M_n(W)$, $G_n\in W_n$ y $p_n\in Y_n$ verificando:

(1) G_1, $G \in M(W)$ $G_1 \subset G$ entonces $G_{1n} \subset G_n$ y $F_{1n} = F_n/_{\bar{G}_n}$.

(2) si I es la aplicación distinguida de X en Y, entonces I_n son las aplicaciones distinguidas de X_n en Y_n.

DEFINICION 2.2.2

En las hipótesis de la definición anterior diremos que la aproximación $\{ (X_n,T_n),(Y_n,T_n),W_n, M_n(W), H_n(W), D_n \}_{n\in N}$ es admisible si se verifican las siguientes condiciones:

(1) si $p \notin \overline{F(Fr(G))}$ existe un n_0/ si $n>n_0$ $p_n \notin \overline{F_n(Fr(G))}$

(2) si G_1 y G_2 son disjuntos G_{1n} y G_{2n} son disjuntos

(3) si $G \in W'$ y $G_1, G_2 \in W$ son disjuntos y $p \notin \overline{F(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))}$ entonces existe un n_0/ si $n>n_0$ se tiene $p \notin \overline{F_n(G_n-(G_{1n} \cup G_{2n}))}$

(4) si $G \in W$, $h_t \in H(G)$ e y_t es una curva continua en Y de forma que $y_t \notin \overline{h_t(Fr(G))}$, entonces existe un n_1/ si $n>n_1$ $h_{nt} \in H_n(G)$ e $y_{nt} \notin \overline{h_{nt}(Fr(G))}$.

DEFINICION 2.2.3

Sean (X,T), (Y,T), W, $M(W)$, $H(W)$ una familia admisible de conjuntos, funciones y homotopías y $\{ (X_n,T_n), (Y_n,T_n), W_n, M_n(W), H_n(W), D_n \}_{n\in N}$ una aproximación admisible. Sea $G\subset W$, $F\in M(W)$ y $p\notin F(Fr(G))$, definimos:

$D(F,G,p) = \{ z\in Z^* /$ existe $\{z_{n_j}\}_{n_j\in N}$, n_j una subsucesión de N, $z_{n_j}\in D_{n_j}(F_{n_j},G_{n_j},p_{n_j})$; z_{n_j} converge a $z \}$.

TEOREMA 2.2.1

En las condiciones de la definición anterior D es un grado multivaluado para (X,T), (Y,T), W, $M(W)$ y $H(W)$.

Demostración:

(1) $D(F,G,p)\in P(Z^*)-\emptyset$. En efecto existe un n_0 tal que si $n>n_0$ $p_n\notin \overline{F_n(Fr(G))}$ lo que implica que $D(F_n,G_n,p)$ pertenece a $P(Z^*)-\emptyset$ luego existe $z\in Z^*$ con $z\in D(F,G,p)$.

(2) sean G_1 y G_2 subconjuntos disjuntos de W, G_1,G_2 contenidos en G y $p\notin \overline{F(\bar{G}-(G_1\cup G_2))}$. Tendremos que para todo n se verifica que G_{1n} y G_{2n} son disjuntos y que existe un n_1 tal que si $n>n_1$:

$$p_n \notin \overline{F_n(\bar{G}_n - (G_{1n} \cup G_{2n}))}$$

tomando $n = \max(n_0, n_1)$ se tendrá:

$$D(F_n, G_n, p_n) \subseteq D(F_n/_{\bar{G}_{1n}}, G_{1n}, p_n) + D(F_n/_{\bar{G}_{2n}}, G_{2n}, p_n)$$

a partir de esto probaremos que:

$$D(F, G, p) \subseteq D(F/_{\bar{G}_1}, G_1, p) + D(F/_{\bar{G}_2}, G_2, p)$$

y que se da la igualdad si alguno de los dos sumandos es de la forma $\{a\}$ con $a \in Z$.

Si $+\infty$ $D(F/_{\bar{G}_1}, G_1, p)$ y $-\infty$ $D(F/_{\bar{G}_2}, G_2, p)$ entonces ya estaria probado, luego a partir de ahora supondremos que no se da esta situación (*).

a) Sea $a \in D(F, G, p)$ y $a \in Z$ entonces existe $\{n_j\}_{n_j \in N}$ tal que $a \in D_{n_j}(F_{n_j}, G_{n_j}, p_{n_j})$, sin perder generalidad podemos suponer que $a \in D(F_n, G_n, p_n)$ con lo que se tendrá $a = a_{1n} + a_{2n}$ para $n > n$ y $a_{1n} \in D_n(F_n/_{\bar{G}_{1n}}, G_{1n}, p_n)$ y $a_{2n} \in D_n(F_n/_{\bar{G}_{2n}}, G_{2n}, p_n)$ además se tendrá que tanto $\{a_{1n}\}_{n \in N}$ como $\{a_{2n}\}_{n \in N}$ son sucesiones acotadas, pues en caso contrario estariamos en la situación (*), entonces existe n_j y $a', a'' \in Z$ tales que $a' + a'' = a$ y $a' \in D_{n_j}(F_{n_j}/_{\bar{G}_{1n_j}}, G_{n_j}, p_{n_j})$ y $a'' \in D_{n_j}(F_{n_j}/_{\bar{G}_{2n_j}}, G_{n_j}, p_{n_j})$ y por tanto que $a' \in D(F/_{\bar{G}_1}, G_1, p)$ y

$a'' \in D(F/_{\bar{G}_2} ,G_2 ,p)$ con lo que $a \in D(F/_{\bar{G}_1} ,G_1 ,p) + D(F/_{\bar{G}_2} ,G_2 ,p)$ como queriamos ver.

b) Si $+\infty \in D(F,G,p)$, el caso $-\infty$ es igual, entonces existirá $\{a_{u_j}\}_{u_j \in N}$, $a_{u_j} \in D_{u_j}(F_{u_j} ,G_{u_j} ,p_{u_j})$, $a_{u_j} \in Z^{d}$ y a_{u_j} diverge a $+\infty$, por lo que existe $\{a'_{u_j}\}_{u_j \in N}$ $a'_{u_j} \in D_{u_j}(F_{u_j}/_{\bar{G}_{1u_j}} ,G_{1u_j},p_{u_j})$ y $\{a''_{u_j}\}_{u_j \in N}$ $a''_{u_j} \in D_{u_j}(F_{u_j}/_{\bar{G}_{2u_j}} ,G_{2u_j},p_{u_j})$ y $a'_{u_j} + a''_{u_j} = a$ pasando a subsucesión de nuevo, deberá existir una de $\{a'_{u_j}\}_{u_j \in N}$ o de $\{a''_{u_j}\}_{u_j \in N}$ que diverge a $+\infty$ y de nuevo quedaria probado.

Vamos a ver ahora que si uno de los dos sumandos, por ejemplo $D(F/_{\bar{G}_1} ,G_1,p)$ es de la forma $\{a\}$ a Z se da la igualdad, o lo que es lo mismo que en este caso también se tiene $D(F/_{\bar{G}_1} ,G_1 ,p) + D(F/_{\bar{G}_2} ,G_2 ,p) \subseteq D(F,G,p)$ en la hipótesis que suponemos se tendrá que existe n_0 tal que si $n>n_0$ $D(F/_{\bar{G}_1} ,G_1 ,p) = \{a\}$ podemos imponer ,sin perder generalidad por ello, que esto es cierto para todo n. Ahora bién si $k \in D(F/_{\bar{G}_1} ,G_1 ,p) + D(F/_{\bar{G}_2} ,G_2 ,p)$ y $k \in Z$ entonces $k-a \in D(F/_{\bar{G}_2} ,G_2 ,p)$ y por tanto existe n_j tal que $k-a \in D_{u_j}(F_{u_j}/_{\bar{G}_{2u_j}} ,G_{2u_j},p_{u_j})$ como $a \in D_{u_j}(F_{1u_j}/_{\bar{G}_{1u_j}} ,G_{1u_j} ,p_{u_j})$ se tendria que $k \in D_{u_j}(F_{u_j}/_{G_{1u_j}} ,G_{1u_j},p_{u_j}) + D_{u_j}(F_{u_j}/_{\bar{G}_{2u_j}} ,G_{2u_j},p_{u_j})$ y de aquí el resultado que buscabamos es directo.

Si $+\infty$ o $-\infty \in D(F/_{\bar{G}_1}, G_1, p) + D(F/_{\bar{G}_2}, G_2, p)$ se tendria $+\infty$ o $-\infty \in D(F/_{\bar{G}_1}, G_1, p)$ y el resultado seria igual que antes.

(3) El que los axiomas (D1) y (D2) se verifiquen es consecuencia directa de la definición de esquema de aproximación y de la condición (4) impuesta para que estos fueran admisibles.

De la definición del método de aproximación se deduce que si los grados de la sucesión aproximante son univaluados y existe un n_0 de forma que para $n>n_0$ D(F ,G ,p) permanece constante, entonces el grado que se obtiene también es univaluado, un ejemplo de esto como lo vamos a ver extendiendo el grado de Brower al caso de abiertos no acotado en R^n para funciones continuas que sean propias.

Ejemplo de extensión del grado.

Sea: $(X,T) = (R^n, \|\cdot\|_E)$, $W = \{ G \ / \ G$ abierto de $R^n \}$

$M(G) = \{ F:\bar{G} \subset R^n \longrightarrow R^n \ / \ F$ es continua y propia $\}$,

$H(G) = \{$ todas las homotopias en $M(G) \}$

$(X_n, T_n) = (R^n, \|\cdot\|_E)$, $W = \{ G \subset R^n \ / \ G$ abierto acotado $\}$

$M(G) = \{ F:G \subset R^n \longrightarrow R^n \ / \ F$ es continua $\}$

$D(F,G,y) = \{ d(F,G,y) \}$

Definimos $G_n = B(0,n) \cap G$, $F_n = F/_{\bar{G}_n}$, $y_n = y$. Es directo comprobar que el esquema de aproximación definido es admisible sin más que tener en cuenta que al ser las funciones del esquema propias si $y \notin F(Fr(G))$ como $F^{-1}(y)$ es compacto existe un n_0 tal que si $n > n_0$ $y \notin F_n(Fr(G_n))$. Las demás condiciones de admisibilidad se verifican trivialmente por definición.

CAPITULO III

GRADO PARA APLICACIONES A-COMPACTAS

Este Capitulo consta de 4 secciones. En la primera de ellas, utilizando el metodo de aproximación construido en el Capitulo II, se define el grado para un conjunto de funciones, AK(G), que incluye entre otras a las aplicaciones A-propias y a las compactas. En la segunda seccion se estudian las propiedades de las funciones antes aludidas (a partir de ahora las llamaré (A-compactas) y su relación con otros conjuntos de funciones para los que se ha definido el grado. En la sección 3 se realiza una generalización de la fórmula del producto del Capitulo I para algunas de las funciones de AK(G). Por último en la sección 4, de nuevo utilizando el método de extensión del Capitulo II, definimos el grado para un subconjunto del cierre de AK(G) que entre otras contiene a las perturbaciones de la identidad por funciones 1-bola-contractivas.

CAPITULO III

SECCION 1: Definición de un grado multivaluado para un conjunto de aplicaciones que contiene de forma estricta a las A-propias y entre las que se encuentran las compactas.

DEFINICION 3.1.1(17)

Dado un espacio de Banach X, se dice que esta dotado de un esquema proyeccionalmente completo $\{X, P_n, X_n\}$ si:

(1) $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \subset X_n$ y $\dim X_n = n$.

(2) $P_n : X \longrightarrow X_n$ son aplicaciones lineales y continuas.

(3) $P_m P_n(x) = P_n(x) \quad \forall x \in X$ y $m > n$.

(4) $\lim_{n \to \infty} P_n(x) = x \quad \forall x \in X$.

Como consecuencia de estas propiedades se deducen las siguientes:

(1') $\overline{\bigcup_{n \in N} X_n} = X$

(2') $1 \leq \|P_n\| \leq \alpha$

Cuando $\alpha = 1$ se dice que $\{X, P_n, X_n\}$ es un Π_1-esquema.

Ejemplo 3.1.1: Sea $X=c_0$ donde $c_0=\{ \{x_n\}_{n\in N} / x_n \in R$ y $x_n \longrightarrow 0 \}$ dotado de la norma del supremo

Si $e_n = (0,0,0,\ldots,\underset{n}{1},0,0,\ldots)$ y $X_m = \text{span}\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ y definimos:

$$P(a_1,a_2,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots\ldots)=(a_1,a_2,\ldots\ldots a_m,0,0,\ldots)$$

entonces $\{ c_0,X_n,P_n \}$ es un Π_1-espacio.

EJEMPLO 3.1.2: En general si X es un espacio de Banach y $\{e_n\}_{n\in N}$ es una base de Schauder monótona si consideramos:

$$X = \text{span}\{ e_1,e_2,\ldots,e_m \} \text{ y } P_m\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{m} a_i e_i$$

tendremos que $\{ X,P_n,X_n \}$ es un Π_1-espacio

PROPOSICION 3.1.1(24)

Si $\{ X,P_n,X_n \}$ es un espacio proyeccionalmente completo y $K\subset X$ es compacto, entonces se verifica:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists\ n_0/n>n_0 \qquad \sup_{x\in K} \|P(x)-x\| < \varepsilon$$

COROLARIO 3.1.1(24)

Si $\{z_n\}_{n\in N}$ es una sucesión convergente en X entonces:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists\ n_0 / \forall n>n_0 \qquad \|P(z_n)-z_n\|<\varepsilon$$

DEFINICION 3.1.2(17)

Sea $\{X, P_n, X_n\}$ un espacio proyeccionalmente completo, $G\subset X$ un abierto acotado no vacio y F un operador continuo definido en G, se dirá que es A-propio, si verifica la siguiente condición:

Si $\{x_n\}_{n\in A}$ es una sucesión donde $x_n\in G\cap X_n$ y A es subsucesión de N y si $\exists\, y\in X / \lim_{n\to\infty} P_n F(x_n)=y$, entonces existe una subsucesión de la anterior $\{x_{n_j}\}_{n_j\in N}$ y $\exists\, x\in X / \lim_{n_j\to\infty} x_{n_j}=x$ y $F(x)=y$

El conjunto de las de las aplicaciones A propias verifica las siguientes propiedades:

(1) I es A-propia.

(2) 0 no es A-propia.

(3) $a\in R$ aF es A-propia si F lo es.

(4) En general la suma de dos aplicaciones A-propias no es A-propia.

(5) Las aplicaciones A-propias no contienen a las compactas.

(6) El limite uniforme de aplicaciones A-propias no es en

general una aplicación A-propia.

Al conjunto de las aplicaciones A-propias lo designaremos por A(G).

DEFINICION 3.1.2

Sea $\{X, P_n, X_n\}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo, G un abierto acotado y F un operador continuo definido en G, diremos que F es un operador A-compacto si verifica:

Si $\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión donde $x_n \in X_n \cap G$ y A es subsucesión de N y $\exists\, y \in X /\ \lim_{n\to\infty} P_n F(x_n)=y$ entonces existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{n_j \in N}$ tal que $\lim_{n_j\to\infty} F(x_{n_j})=y$.

AL conjunto de operadores A-compactos definidos en G lo designaremos por AK(G).

Es trivial comprobar que $A(G) \subset AK(G)$, más adelante comprobaremos que esta contención es estricta.

TEOREMA 3.1.1

Sea $\{X, P_n, X_n\}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo y sea:

$W=\{\, G\subset X /\ G$ es abierto y acotado $\}$, $M(G)=AK(G)$ y $H(G)$ un conjunto de homotopias verificando;

(a) $H(t,.)\in AK(G)\quad \forall t\in [0,1]$.

(b) $\{\, H(.,x)\,\}_{x\in \bar{G}}$ es una familia equicontinua de funciones, es decir verifica:

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0/\ |t_1-t_2|<\delta \quad \|H(t_1,x)-H(t_2,x)\|<\varepsilon \quad \forall x\in \bar{G}$

entonces W, $M(W)$ y $H(W)$ son familias admisibles de conjuntos, funciones y homotopias respectivamente.

Demostración: La demostración es trivial, basta observar que las homotopias de la forma $tF+(1-t)p$ donde $p\in X$ son equicontinuas.

LEMA 3.1.1

Sea $\{\, X,P_n,X_n \,\}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo y G un abierto acotado de X si $F\in AK(G)$ entonces: $\forall\ y\notin \overline{F(Fr(G))}\quad \exists\delta>0$ y $\exists n_0/\ n>n_0 \quad \|P_nF(x)-P_n(y)\|>\delta$ $\forall\, x\in Fr(G)\cap X=(Fr)_n(G)$.

Demostracion: Supongamos que $y \in \overline{(Fr)(G)}$ y A subsucesión de N de forma que $\exists \{x_n\}_{n \in N} / x_n \in (Fr)_n(G)$ y $\|P_n F(x_n) - P_n(y)\| < 1/n$. Como $\lim_{n \to \infty} P_n(y) = y$ entonces se tendrá $\lim_{n \to \infty} P_n F(x_n) = y$; por ser $F \in AK(G)$ existirá una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{n_j \in N}$ de forma que $\lim_{n_j \to \infty} F x_{n_j} = y$ y $x_{n_j} \in (Fr)_{n_j}(G)$ pero en ese caso tendríamos $y \in \overline{F(Fr(G))}$ contradiciendo hipótesis.

TEOREMA 3.1.2

Sea $(X, \| . \|)$, W, M(W) y H(W) en la situación del teorema 3.1.1, si consideramos:

$\{ (X_n, \| . \|), W_n, M_n(W), H_n(W)$, donde:

(1) W_n es la familia de abiertos y acotados de X .

(2) $M_n(W) = \{ F : G_n \longrightarrow X_n / F$ es continua y $G_n \in W_n \}$.

(3) $H_n(W) = \{$ homotopias en $M_n(G_n) / G_n \in W_n \}$

(4) $D_n(W)$ es el grado definido en dimensión finita

(5) Si $G \in W$ $G_n = G \cap X_n$.

(6) Si $y \in X$ $y_n = P_n(y)$.

(7) Si $F \in M(G)$ $F_n = P_n F/_{\bar{G}_n}$

Entonces el esquema de aproximación definido es admisible.

Demostración:

(a) Se tiene que $P_n I = I/_{\bar{G}_n}$

(b) Si $y \notin \overline{F(Fr(G))}$, entonces $\exists n_0 / n > n_0 \; P_n(y) \notin F_n(Fr(G_n))$.

Esto se deduce directamente del lema 3.1.1 .

(c) Si $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, entonces $\forall n \; G_{1n} \cap G_{2n} = \emptyset$.

(d) Sean $G \in W'$ y $G_1, G_2 \in W, G_1 \cap G_2 = \emptyset$ e $y \notin \overline{F(\bar{G}-(G_1 U G_2))}$ entonces:

$$\exists n_1 / n > n_1 \; y_n \notin \overline{F_n(\bar{G}_n-(G_{1n} U G_{2n}))}$$

si suponemos que no es cierto lo anterior $\exists \{y_{n_j}\}_{n_j \in N}$ de forma que:

$$P_{n_j}(y) \in \overline{F_{n_j}(\bar{G}_{n_j}-(G_{1n_j} U G_{2n_j}))}$$

Ahora bien $\bar{G}_{n_j}-(G_{1n_j} U G_{2n_j}) = (\bar{G}-G_1 U G_2) \cap X_{n_j}$ y F_{n_j} son funciones continuas por tanto $P_{n_j}(y) \in F_{n_j}(\bar{G}-(G_1 U G_2)) \cap X_{n_j}$ entonces existirá $x_{n_j} \in (\bar{G}-(G_1 U G_2)) \cap X_{n_j}$ verificando $P_{n_j}(y) = F_{n_j}(x_{n_j})$ y por tanto $\text{Lim}\, F_{n_j}(x_{n_j}) = y$ entonces existirá una subsucesión, sin perder generalidad suponemos que ella misma, de forma que:

$$\lim_{n_j \to \infty} F(x_{n_j}) = y \quad y \quad x_{n_j} \in (\bar{G}-(G_1 U G_2)) \cap X_{n_j}$$

y de lo anterior $y \in \overline{F(\bar{G}-(G_1 U G_2))}$ contra hipótesis.

(d) Por último hemos de probar que si $G \in W, \{h_t\}_{t \in [0,1]} \in H(G)$ y $\{y_t\}_{t \in [0,1]}$ es una curva continua en X con $y_t \notin \overline{h_t(Fr(G))}$ $\forall t \in [0,1]$ entonces:

$$\exists\, n_0 / n > n_0 \quad h_{nt} \in H_n(G) \text{ e } y_{nt} \in \overline{h_{nt}(Fr(G_n))}$$

si lo anterior fuese falso existirían subsucesiones:

$\{x_{n_j}\}_{n_j \in N}$ y $\{t_{n_j}\}_{n_j \in N}$ con $x_{n_j} \in Fr(G) \cap X_{n_j}$ y $t_{n_j} \in [0,1]$ de forma que:

$$h_{n_j}(t_{n_j}, x_{n_j}) = P_{n_j}(y_{t_{n_j}})$$

Como [0,1] es compacto podemos suponer que $t_{n_j} \longrightarrow t_0$ y por el corolario 3.1.1 se tiene $y_{t_{n_j}} \longrightarrow y_{t_0}$ y entonces:

$$P_{n_j}(y_{t_{n_j}}) \longrightarrow y_{t_0} \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$\|h_{n_j}(t_{n_j}, x_{n_j}) - h_{n_j}(t_0, x_{n_j})\| = \|P_{n_j} h(t_{n_j}, x_{n_j}) - P_{n_j} h(t_0, x_{n_j})\| \leq$$
$$\leq \alpha \sup \{ \|h(t_{n_j}, x) - h(t_0, x)\| \,/\, x \in \overline{G} \}.$$

Como $\{h_t(x)\}_{x \in \overline{G}}$ es una familia equicontinua de funciones si :

$$t_{n_j} \longrightarrow t_0 \text{ y } h_{n_j}(t_{n_j}, x_{n_j}) = P_{n_j}(y_{t_{n_j}}) \longrightarrow y_{t_0}$$

se tendría:

$$h_{n_j}(t_0, x_{n_j}) \longrightarrow y_{t_0} \qquad (2)$$

Si $y_{t_0} \notin \overline{h(t_0 \times Fr(G))}$ por el lema 3.1.1 se tendría que:

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \exists\, n_0 \,/\, n_j > n_0 \quad \|h_{n_j}(t\;, x_{n_j}) - P_{n_j}(y_{t_0})\| > \delta \qquad (3)$$

Veamos que (1) ,(2) y (3) no se pueden dar simultaneamente; si así fuera tendríamos las siguientes desigualdades:

$$\|h_{u_j}(t_0,x_{u_j})-P_{u_j}(y_{t_0})\| \leq \|h_{u_j}(t_0,x_{u_j})\pm y_{t_0}+P_{u_j}(y_{t_0})\| \leq$$
$$\|h_{u_j}(t_0,x_{u_j})-y_{t_0}\| + \|y_{t_0}-P_{u_j}(y_{t_0})\|$$

de (1) y(2) se tiene que $\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_0/n_j>n_0 \quad \|h_{u_j}(t_0,x_{u_j})-P_{u_j}(y_{t_0})\| < \varepsilon$ lo que contradiría (3).

Una vez que se ha probado el anterior teorema queda definido un grado multivaluado en el conjunto AK(G) y por consiguiente para este grado se verifican todas las propiedades que de la axiomática se deducían.

A continuación damos un teorema en el que se viene a decir que el grado es constante para funciones que estén suficientemente próximas

TEOREMA 3.1.3

Dada $F\in AK(G)$. Si $y\in \overline{F(Fr(G))}$ $\exists\ r=r(F,y)>0$ que verifica:

$\forall\ T\in AK(G)/\ \|F-T\|<r$ se tiene $D(F,G,y) = D(T,G,y)$

Demostración: Si tomo $r < \delta/2$ donde $\delta = d(y,F(Fr(G))$ se tendría:

$$d(y,T(Fr(G))) \geq d(y,F(Fr(G)) - \|F-T\| > \delta/2$$

Por tanto tiene sentido hablar de D(T,G,y) y me bastaría ver que existe a partir de un cierto n_0 homotopías $h_n(t,x)$ que unen las funciones P_nF y P_nT verificando $P_n(y) \notin h_n([0,1] \times G_n)$.

Si $y \in \overline{F(Fr(G))}$ por lema 3.1.1 $\exists \delta > 0$ y $\exists n_0 / n > n_0$ $\|P_nF(x_n) - P_n(y)\| > \delta \quad \forall \quad x_n \in Fr(G_n)$.

Consideremos $h_n(t,x) = F_n(x) + t.(T_n - F_n)(x) \quad (t,x) \in [0,1] \times G_n$.

$\| h_n(t,x) - P_n(y)\| > \|F_n(x) - P_n(y)\| - t \|T_n(x) - F_n(x)\| > \delta - \alpha r$ si $x \in Fr(G_n)$ si tomamos $r = \delta/2\alpha$, tendremos $P_n(y) \notin h_n([0,1] \times Fr(G_n))$ y por tanto:

$$D(F,G,y) = D(T,G,y)$$

CAPITULO III

SECCION 2: Propiedades del conjunto AK(G).

En esta sección se estudian algunas propiedades de las funciones del conjunto AK(G) y su relación con otros conjuntos de funciones así como la relación del grado definido con el grado de Leray-Schauder para el caso de las perturbaciones compactas de la identidad.

TEOREMA 3.2.1

Sea $\{X, P_n, X_n\}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo y G un abierto acotado, si consideramos el conjunto AK(G)se verifican las siguientes propiedades:

(1) $\forall a \in R$ si $F \in AK(G)$ entonces $a.F \in AK(G)$.

(2) Si F es una aplicación compacta $F \in AK(G)$.

(3) AK(G) contiene de forma estricta a los conjuntos K(G) y A(G).

(4) Si el espacio esta dotado de una base de Schauder y el esquema es el del ejemplo 3.1.2, si F es una función continua y acotada de X en X y $F(X_n) \subset X_n$ se tiene $F \in AK(G)$ para todo G abierto acotado de X.

(5) En general la suma de dos aplicaciones de AK(G) no es de AK(G).

(6) Si $C \in K(G)$ y $F \in AK(G)$ entonces $F+C \in AK(G)$

(7) $AK(G) \neq \overline{AK(G)}$.

Demostración: Las demostraciones de (1) y (2) son inmediatas.

(3) Consideremos el espacio c_o en la situación del ejemplo 3.1.1 y la aplicación

$$F: c_o \longrightarrow c_o \text{ y } F(\{x_n\}_{n\in N}) = \{x'_n\}_{n\in N} \text{ donde } \begin{array}{l} x'_n = x_n \text{ si n es impar} \\ \\ x'_n = x_n/n \text{ si n es par} \end{array}$$

Si consideramos $G=B(0,2)$, F es continua y acotada y se tiene:

(a) $F \notin K(G)$: para verlo consideremos la sucesión:

$x_1 = (1,0,0,.............)$

$x_2 = (1,0,1,0,0,.........)$

$......................)$

$x_n = (1,0,1,...0,1,0,0,..)$

$.......................$

Se tiene $F(\{x_n\}_{n\in N})=\{x_n\}_{n\in N}$ y $\{x_n\}_{n\in N}$ no es relativamente compacto

(b) $F\notin A(G)$: consideremos la sucesión siguiente:

$x_1=(0,0,0,\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$x_2=(0,1,0,\ldots\ldots\ldots\ldots)$

....

$x_n=(0,1,0,1,0..,0,1,0..)$

....

Se tiene $\{x_n\}_{n\in N}$ no es relativamente compacto y $\{F(x_n)\}_{n\in N}$ es convergente y por tanto lo son también las proyecciones.

Por Ultimo $F\in AK(G)$ si probamos (4) ya que $F(X_n)\subset X_n$.

(4) Si T de X en X es continua y acotada y $T(X_n)\subset X_n$ entonces $T\in AK(G)$.

Efectivamente al ser $P_nT(x_n)=T(x_n)$ se tiene que la convergencia de ambas sucesiones es la misma.

(5) La suma de aplicaciones de AK(G) no es de AK(G).

Consideremos de nuevo c_0 en la situación del ejemplo 3.1.1 y el mismo abierto que en la demostración de (3), si en G definimos la siguiente función lineal:

$$F(e_n)=-(e_n+e_{n+1}) \text{ si n es impar}$$

$$F(e_n)=0 \qquad \text{si n es par}$$

$$\text{ó sea } F\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big)=-\sum_{i=1}^{\infty} a_{2i-1}\, e_{2i} - \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i-1}\, e_{2i-1}$$

(a) Veamos que $F \in AK(G)$. F es continua pues:

$$\|F(x)-F(y)\| < 2\, \|x-y\|$$

Sea $x_{n_k} \in X_{n_k} \cap G$ y $\{P_{n_k} F(x_{n_k})\}$ convergente si $x_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} a_i^{n_k} e_i$, se tendrá:

$$F(x_{n_k})=-\sum_{i=1}^{n_k/2} a_{2i-1}\, e_{2i} - \sum_{i=1}^{n_k/2} a_{2i-1}\, e_{2i-1} \text{ si n es par}$$

$$F(x_{n_k})=-\sum_{i=1}^{n_k/2} a_{2i-1}\, e_{2i} - \sum_{i=1}^{n_k/2+1} a_{2i-1}\, e_{2i-1} \text{ si n es impar}$$

$P_{n_k}F(x_{n_k})=F(x_{n_k})$ si n es par y $P_{n_k}F(x_{n_k})=F(x_{n_k})-a_{n_k}e_{n_k+1}$ si n es impar

Si $\{n_k\}$ tiene una subsucesión de indices pares esta clara la propiedad, si a partir de uno todos los n_k son impares, entonces:

Si $m>n$ $\|F(x_m)-F(x_n)\| = \|P_mF(x_m)-P_nF(x_n)\|$ y por tanto si una sucesión converge la ótra también.

(b) Veamos que $I+F\notin AK(G)$. Consideremos la siguiente sucesión:

$$x_1 = (1,0,0,\ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$x_3 = (0,0,1,0,0,\ldots\ldots\ldots)$$
$$x_{2n+1} = (0,0,0\ldots 1,\ldots\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\{(I+F)(x_{2n+1})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(0,0,\ldots -1,0,0\ldots)\}$ no tiene subsucesión convergente y sin embargo $\{P_{2n+1}(I+F)(x_{2n+1})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(0,0,0\ldots)\}$ es convergente.

(6) Si $C\in K(G)$ y $F\in AK(G)$ entonces $F+C\in AK(G)$.

He de ver que si $P(F+C)(x_n)\longrightarrow y$ $\exists\{x_{n_j}\}$ / $(F+C)(x_{n_j})\longrightarrow y$.

Por ser C compacta existe una subsucesión verificando $C(x_{n_j})\longrightarrow y'$ y por tanto $P_{n_j}C(x_{n_j})\longrightarrow y'$ de donde $P_{n_j}F(x_{n_j})\longrightarrow y-y'$ pero como $F\in AK(G)$ existe una subsucesión, puedo suponer sin perder generalidad que ella misma, de forma que $F(x_{n_j})\longrightarrow y-y'$ y por tanto $(F+C)(x_{n_j})\longrightarrow y$.

En particular deducimos que las perturbaciones de la identidad por operadores compactos pertenecen a AK(G).

(7) $AK(G) \neq \overline{AK(G)}$.

Consideremos la aplicación F utilizada en la demostración de la propiedad (5). Si probamos que $\forall\, a \in [0,1)$, se tiene que $aI+F$ es una aplicación de AK(G), entonces como $aI+F$ converge uniformemente a F tendríamos el resultado.

Tendré que probar que si $P_{n_k}(aI+F)(x_{n_k}) \longrightarrow y$ existe una subsucesión, suponemos que ella misma, verificando que $(aI+F)(x_{n_k})$ es convergente.

Por el mismo razonamiento que en la demostración de (5) podemos suponer que los n_k son impares ó sea

$$x \;=(a_j^{n_k},\ldots\ldots\ldots,a_{n_k}^{n_k},0,0,\ldots)$$

Si $P_{n_k}(aI+F)(x_{n_k}) \longrightarrow y$ se tendrá $\forall \varepsilon>0 \;\exists\, n_0/n>n_0 \;\; |a_{n_k}^{n_k}|< \varepsilon$ y como:

$$\|(aI+F)(x_{n_k})-(aI+F)(x_{n_j})\| \leq$$
$$\leq \;\|P_{n_k}(aI+F)(x_{n_k})-P_{n_j}(aI+F)(x_{n_j}) \;+|a_{n_j}^{n_j}| \quad \text{si } n_j>n_k.$$

Werenski en (8) define el indice, utilizando un método de aproximación análogo a los esquemas de proyección, para un conjunto de funciones, las llama admisibles, que caracteriza por que contienen a las compactas, en el teorema que veremos a continuación se prueba que este conjunto está contenido en AK(G).

DEFINICION 3.2.1 (25)

Sea X un espacio de Banach y $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de espacios orientados de forma que:

(a) dim $X_n=n$, para todo n

(b) $X_n \subset X_{n+1}$, para todo n

(c) $\overline{\bigcup_{n\in N} X_n} = X$

La sucesión $\{X_n\}_{n\in N}$ es llamada una filtración de X.

DEFINICION 3.2.2 (25)

Sea X un espacio de Banach, G un abierto acotado de X y $\{X_n\}_{n\in N}$ una filtración de X. Una aplicación continua $F:\bar{G}\subset X \longrightarrow X$ es llamada admisible con respecto a la filtración $\{X_n\}_{n\in N}$ si:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in \bar{G}_n} d(F(x),X_n) = 0$$

donde $G = G \cap X_n$ y $d(a,B) = \inf_{b\in B} \| a-b \|$.

TEOREMA 3.2.2

Sea $\{X,P_n,X_n\}$ un espacio de Banach dotado de un esquema de aproximación completo, G un abierto acotado y F una aplicación admisible respecto a la filtración $\{X_n\}_{n\in N}$. Entonces $F\in AK(G)$.

Demostración.

Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in \bar{G}_n} d(F(x),X\ )=0$ y por tanto:

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$ / si $n>n_0$ $d(F(x),X\ )< \varepsilon/2$, de aqui

(1) $\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$ / si $n>n_0$ $x\in G_n$ $\exists\ y(x)\in X_n$ / $\|F(x)-y(x)\| < \varepsilon/2$

Sea $\{X\ \}_{n\in N}$ una sucesión acotada $x_n\in G_n$ y $P_nF(x_n)$ convergente a y. dada la sucesión $\{F(x_n)\}_{n\in N}$ por (1) se tiene que:

$\exists\ \{X_{n_j}\}_{n_j\in N}$; $\exists\ \{y(x_{n_j})\}_{n_j\in N}$ $y(x_{n_j})\in X_{n_j}$ con

$d(F(x_{n_j}),y(x_{n_j})) < 1/2^j$

(a) Si $y(x_{n_j})$ es convergente, entonces $F(x_{n_j})$ es convergente. Para más comodidad y sin perder generalidad se trabaja con $F(x_n)$ e $y(x_n)$.

$$\| F(x_n)-F(x_m) \| \leqslant \| F(x_n)-y(X_n) \| + \| y(x_n)-y(x_m) \| +$$

$$+ \| y(x_m)-F(x_m) \| \leqslant 1/2^m + \| y(x_m)-y(x_n) \| + 1/2^n$$

(b) Si $P_n F(x_n)$ es convergente, entonces $y(x_n)$ es convergente:

$$\| y(x_n)-y(x_m) \| = \| P_n y(x_n) \pm P_n F(x_n) + P_m F(x_m) - P_m y(x_m) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| P_n y(x_n) - P_n F(x_n) \| + \| P_n F(x_n) - P_m F(x_m) \| + \| P_m F(x_m) - P_m y(x_m) \| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \| y(x_n)-F(x_n) \| + \| P_n F(x_n) - P_m F(x_m) \| + \alpha \| y(x_m) - F(x_m) \| <$$

$$< \alpha/2^n + \| P_n F(X_n) - P_m F(x_m) \| + \alpha/2^m$$

De (a) y (b) deducimos que si $P_n F x_n$ converge a y, existe y' tal que $F x_n$ converge a y', veamos que y=y':

$$\| y'-y \| = \| y' + P_n F x_n - y \| \leqslant \| y' \pm P_n F x_n \pm P_n F y' - y \| <$$

$$< \| y' - P_n y' \| + \| P_n y' - P_n F x_n \| + \| P_n F x_n - y \| <$$

$$< \| y' - P_n y' \| + \alpha \| y' - F(x_n) \| + \| P_n F(x_n) - y \|$$

pero al ser $P_n y'$ convergente a y, $F(x_n)$ convergente a y' y $P_n F x_n$ convergente a y se tendria y=y', con lo que quedaria probado el teorema.

Para las perturbaciones compactas de la identidad, existen definidos dos grados, por una parte el de Leray-Schauder al que ya hemos hecho referencia en el capitulo de resultados préliminares, y por otra parte el que se les ha construido como funciones pertenecientes a AK(G). a continuación se enuncia un teorema que viene a decir que ambos grados son iguales.

TEOREMA 3.2.3

Sea $\{X,P_n,X_n\}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo, G un abieto acotado, $I+C:\bar{G}\subset X \longrightarrow X$, $C\in K(G)$ y sea $y\notin (I+C)(Fr(G))$. Entonces:

$$D(I+C,G,y) = \{ D_{LS}(I+C,G,y) \}$$

Demostración.

El resultado seria cierto si:

$$\exists\, n_0 \ /\ si\ n>n_0\ d(P_n(I+C),G_n,P_n y) = D_{LS}(I+C,G,y)$$

Como $P_n y$ converge a y, tomando n_1 tal que si $n>n_1$:

$$\|P_n y-y\| < d(y,(I+C)(Fr(G))$$

Bastaria probar que , por continuidad del grado:

$$\exists\ n_1 \ /\ \text{si } n>n_1 \ d(P_n(I+C),G_n,P_n y)=D_{LS}(\ I+C,G,P_n y\ )$$

ó sea, que:

$$d(I+P_n C,G_n,P_n y)=D_{LS}(I+C,G,P_n y)$$

Por el teorema 1.2.3, tendriamos que ver:

$$\sup_{x\in\bar{G}} \|((I+C)-(I+P_n C)(x)\| < d(P_n y,(I+C)(Fr(G))) = b$$

ó sea , que:

$$\sup_{x\in\bar{G}} \|(C-P_n C)(x)\| < b$$

ahora bien:

$$\sup_{x\in\bar{G}} \|(C-P_n C)(x)\| = \sup_{y\in C(\bar{G})} \|y-P_n y\|$$

pero al ser $C(\bar{G})$ compacto y el esquema proyeccionalmente completo, se tiene que:

$$\exists\ n_0 \ /\ \text{si } n>n_0 \ \|y-P\ y\| < \varepsilon \quad \forall y\in C(\bar{G})$$

con lo que tendria el resultado.

CAPITULO III

SECCION 3: Fórmula del producto

En esta sección se estudia para aplicaciones del tipo $F,T\in AK(G)$ la relación existente y las condiciones bajo las que se puede dar una relación entre el grado de la aplicación TF y el grado de las aplicaciones T y F, o sea una generalización de la Fórmula del Producto; obviamente la búsqueda de una relación entre ambos grados pasará directamente por encontrar una relación entre el grado de las aplicaciones $P_n TF$ y el de las aplicaciones $P_n T$ y $P_n F$ que a su vez sabemos por el Teorema 1.1.7 que determinan el grado de la aplicación $P_n TP_n F$.

TEOREMA 3.3.1

Sea $\{X,P_n,X_n\}$ un espacio proyeccionalmente completo, $F:\bar{G}\subset X\longrightarrow X$ y $T:\bar{U}\subset X\longrightarrow X$ verificandose:

(1) existe un n_0 / si $n>n_0$ $P_n F(\bar{G})\subset\bar{U}$

(2) si $x_n\in X_n$ $P_n(x_n)=x_n$

(3) $y\notin\overline{TF(Fr(G))}$

(4) las aplicaciones F y T estan en una de las situaciones siguientes:

(a) $F \in AK(G)$ y $T=I+C$ con $C \in K(G)$

(b) $F=I+C$ ó $F=C$ con $C \in K(G)$ y $T \in AK(G)$

Entonces existe un n_0 tal que si $n>n_0$ se verifica:

$$d(\,P_nTP_nF, G_n, P_ny\,) = d(\,P_nTF, G_n, P_ny\,)$$

Demostración.

Por la propiedad de homotopía para el caso de funciones continuas definidas en R^n, bastará probar que existe un n_0 tal que si $n>n_0$ $P_ny \notin (tP_nTF+(1-t)P_nTP_nF(Fr(G_n))$ para todo t de [0,1].

Si suponemos que esto no es cierto existirá una subsucesión de N $\{n_k\}_{n_k \in N}$ y un par de sucesiones $\{t_{n_k}\}_{n_k \in N}$, $t_{n_k} \in [0,1]$ y $\{x_{n_k}\}_{n_k \in N}$, $x_{n_k} \in Fr_{n_k}(G_{n_k})$, verificando:

$$t_{n_k}P_{n_k}TPx_{n_k} + (1-t)P_{n_k}TP_{n_k}Fx_{n_k} = P_{n_k}y$$

Como $\{t_{n_k}\}_{n_k \in N} \subset [0,1]$ existirá una subsucesión, sin perder generalidad podemos suponer que es ella misma, y un punto t_0 de [0,1] tal que t_{n_k} converge a t_0. Como también se tiene que $P_{n_k}y$ converge a y se tendrá que:

$$t_0 P_{n_k} T F x_{n_k} + (1-t_0) P_{n_k} T P_{n_k} F x_{n_k} \text{ converge a } y \quad (1)$$

Veamos que (1) no puede ocurrir en ninguno de los tres supuestos sobre las funciones T y F.

(a) $T=I+C$ y $F \in AK(G)$. Entonces:

$$t_0 P_{n_k}(I+C)F x_{n_k} + (1-t_0) P_{n_k}(I+C) P_{n_k} F x_{n_k} \text{ converge a } y$$

reagrupando y teniendo en cuenta que $P_{n_k} P_{n_k} = P_{n_k}$

$$P_{n_k} F x_{n_k} + t_0 P_{n_k} C F x_{n_k} + (1-t_0) P_{n_k} C P_{n_k} F x_{n_k} \text{ converge a } y$$

Como la aplicación C es compacta, pasando a subsucesiones y sin perder generalidad CFx_{n_k} converge a a y $CP_{n_k}Fx_{n_k}$ converge a b. Por tanto $P_{n_k}CFx_{n_k}$ converge a a y $P_{n_k}CP_{n_k}Fx_{n_k}$ converge a b. De esto tendríamos que $P_{n_k}Fx_{n_k}$ es convergente y como $F \in AK(G)$, Fx_{n_k} convergería al mismo límite y por tanto los límites, en n_k, de $P_{n_k}CFx_{n_k}$ y $P_{n_k}CP_{n_k}Fx_{n_k}$ coincidirían.

Por consiguiente $P_{n_k}CFx_{n_k}+P_{n_k}CP_{n_k}Fx_{n_k}$ converge a y, a partir de ahí $P_{n_k}(I+C)Fx_{n_k}$ converge a y con $x_{n_k} \in Fr(G_{n_k})$ y esto va contra la hipótesis de $(I+C)F \in AK(G)$ e $y \in \overline{(I+C)F(Fr(G))}$.

(b) $F=C$ y $T \in AK(G)$. Tendriamos:

$$t_0 P_{n_k} TCx_{n_k} + (1-t_0) P_{n_k} TP_{n_k} Cx_{n_k} \text{ converge a } y,$$

Cx_{n_k} converge a a y de ahi $P_{n_k} Cx_{n_k}$ converge a a.

Por el mismo razonamiento anterior bastaría probar que $P_{n_k}TCx_{n_k} - P_{n_k}TP_{n_k}Cx_{n_k}$ converge a cero y para ello que $TCx_{n_k} - TP_{n_k}Cx_{n_k}$ converge a cero, pero esto es cierto al coincidir los limites, en n_k, de Cx_{n_k} y $P_{n_k}Cx_{n_k}$ y ser la función T continua.

(c) $F=I+C$ y $T \in AK(G)$

Este caso es directo sin más que tener en cuenta los razonamientos anteriores y el hecho de que los P_{n_k} dejan invariante a x_{n_k}.

<u>LEMA</u> <u>3.3.1</u>

En la situación del Teorema 3.3.1 y si:

(1) $F=I+C$ y $T \in AK(G)$

(2) T es propia

(3) $U-F(Fr(G)) = V$ es conexo

Entonces existe un n_1 tal que si $n>n_1$ se cumple:

$$d(P_nFP_nT,G_n,P_ny) = D(\ F,G,V\ )\ d(P_nT,V_n,P_ny)$$

Demostración.

Por la Fórmula del Producto para funciones de R :

$$d(P_nTP_nF,G_n,P_ny)=\sum_{i_n=1}^{K} d(P_nF,G_n,V_n^{i_n})\ D(P_nT,V_n^{i_n},P_ny)$$

siendo $V_n^{i_n}$ las componentes conexas de $V - P_nF\,(Fr(G_n))$ donde $d(P_nT,V_n^{i_n},P_ny)\neq 0$, que sabemos que son un número finito.

Para probar el resultado bastaria ver (*) que si $h\neq k$ y $d(P_{n_j}T,V_{n_j}^{h},P_{n_j}y)$ y $d(P_{n_j}T,V_{n_j}^{k},P_{n_j}y)$ son distintos de cero entonces no puede ocurrir que:

$$d(P_{n_j}F,G_{n_j},V_{n_j}^{h}) \text{ ó } d(P_{n_j}F,G_{n_j},V_{n_j}^{k}) \neq D(F,G,V)\ \forall\, n_j$$

ya que si esto fuera así existiría un n_0 tal que si $n>n_0$:

$$d(P_nT,G_n,P_ny) = D(F,G,V) \sum_{i_n=1}^{K} d(P_nT,V_n^{i_n},P_ny) \quad \text{y}$$

$$\sum_{i_n=1}^{K} d(P_nT,V_n^{i_n},P\ y) = d(P_nT,V_n,P_ny)$$

por la propiedad de descomposición del dominio.

Por tanto pasemos a demostrar el supuesto (*). Si $d(P_{n_j}T, V^k_{n_j}, P_{n_j}y)$ y $d(P_{n_j}T, V^h_{n_j}, P_{n_j}y)$ son no nulos entonces existe $\{x^h_{n_j}\}_{n_j\in N}$, $x_{n_j}\in V^h_{n_j}$ y $\{x^k_{n_j}\}_{n_j\in N}$, $x_{n_j}\in V^k_{n_j}$ verificando $P_{n_j}Tx^h_{n_j} = P_{n_j}Tx^k_{n_j} = P_n y$.

Veamos que $d(P_{n_j}F, G_{n_j}, x^i_{n_j}) = D(F,G,V)$ para $i=h$ ó k. Para ello seria suficiente ver que si, sin perder generalidad pasamos a sucesión, $\{x_n\}_{n\in N}$ $x_n \in V_n - P_nF(Fr(G))$ y $P_nTx_n = P_ny$ entonces existe un n_1 tal que si $n>n_1$ $D(P_nF, G_n, x_n) = D(F,G,V)$.

En primer lugar veamos que si $\{x_n\}_{n\in N}$ está en la situación anterior entonces existe un $\delta>0$ tal que:

$$d(\{x_n\}, F(Fr(G))) > \delta > 0 \quad (**)$$

Si esto no fuera cierto considerando los conjuntos:

$$V^j = \{ x\in V \;/\; d(x, F(Fr(G))) < 1/j \}$$

tendría que existir una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{n_j\in N}$ de $\{x_n\}_{n\in N}$ de forma que $\{x_{n_j}\}\subset V^j$.

Como $P_nTx_n = P_ny$ se sigue $P_{n_j}Tx_{n_j} = P_{n_j}y$ y por tanto Tx_{n_j} converge a y, como la aplicación T es cerrada existe un x^j tal que $d(x^j, F(Fr(G))) < 1/j$ y $T(x^j) = y$.

Al ser la aplicación T propia se tendría que dada la sucesión $\{x^j\}_{j\in N}$ existiría una cierta subsucesión convergente a un cierto valor x que por construcción y por ser F(Fr(G)) cerrado verificaría T(x)=y $x \in F(Fr(G))$ contra la hipótesis. Por tanto (**) es cierto.

Ahora bién por definición de grado se sabe que para todo n existe m_n tal que si $m>m_n$ $d(P_mF,G_m,x_n)=D(F,G,V)$ al ser la aplicación F=I+C. Si m_n fuera independiente de n tendríamos el resultado que queríamos probar. Para verlo probemos que $m_n=m\ (\delta_n)$ donde:

$$\delta_n > d(x_n,F(Fr(G)))$$

pues ya hemos visto anteriormente que existe un δ independiente de n.

Veamos que m_n solo depende de δ_n.

Sea $x \in V$ y $d(x,F(Fr(G))) > \delta$. Si probamos que existe un n_0 tal que si $n>n_0$ $d(P_nF,G_n,x\ ) = d(P_nF,G_n,P_nx)$ estaría probado. Para ver esta igualdad bastará probar que:

$$tP_nx + (1-t)x \notin P_nF(Fr(G\ ))$$

si esto fuera falso existirían $\{t_n\}_{n\in N}$ de $[0,1]$ y $\{z_n\}_{n\in N}\subset Fr(G_n)$ tales que $t_nP_nx+(1-t_n)x =P_nFz_n$. Ahora bién como P_nx converge a x y $\{t_n\}_{n\in N}$ tiene una subsucesión convergente, supondremos que ella misma, a un cierto t_0:

$$\forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ n_0\ /\ n>n_0\quad \|t_0x+(1-t_0)x-P_nFz_n\|<\varepsilon\qquad (***)$$

Ahora bién si $y=t_0x+(1-t_0)x$, suponiendo que V es una bola abierta, entonces:

$$d(y_n,(I+C)Fr(V))>\delta$$

y si ésto es así existe un $\delta_1>0$ tal que:

$$d(\bar{y},P_n(I+C)(Fr(G_n)))>\delta_1\qquad (****)$$

lo que contradiría (***). Veamos que (****) es cierto, si no fuera así existiría una sucesión $\{z_{n_j}\}_{n_j\in N}$ tal que:

$$z_{n_j}\in Fr(G_{n_j})\ \|y_{n_j}-P_nF(z_{n_j})\|<1/n_j$$

Pero entonces:

$$\|y_{n_j}-F(z_{n_j})\|\leq\|y_{n_j}-P_{n_j}F(z_{n_j})\|+\|P_{n_j}F(z_{n_j})-Fz_{n_j}\|,\ y$$

$$\|P_{n_j}F(z_{n_j})-Fz_{n_j}\|=\|C(z_{n_j})-P_{n_j}C(z_{n_j})\|$$

que converge a cero por ser C compacta (pasando a subsucesión) y llegaríamos a un absurdo.

LEMA 3.3.2

Si estamos en la hipótesis del teorema 3.3.1 y

(1) $F \in AK(G)$ y $T=I+C$

(2) $F(Fr(G))$ es cerrado

(3) $V=U-F(Fr(G))$ es conexo

Entonces existe n_1 tal que si $n>n_1$:

$$d(P_nTP_nF,G_n,P_ny) = d(P_nF,G_n,x_n)\ D(T,V,y)$$

donde $\{x_n\}_{n\in N}$ cumple $x_n \in V_n$ y si $d(T,V,y)\neq 0$ existe x_{n_j} que converge a x y $T(x)=y$.

Demostración.

$$d(P_nTP_nF,G_n,P_ny) = \sum_{i_n=1}^{k} d(P_nF,G_n,V_n^{i_n})\ d(P_nT,V_n^{i_n},P_ny)$$

donde $V_n^{i_n}$ son las componentes conexas de $V_n-P_nF(Fr(G_n))$. bastaría que a partir de un cierto n_0 existiese a lo sumo una componente i_0 donde $d(P_nT,V_n^{i_0},P_{n_j})\neq 0$ para cada n y que en estas compomentes, en caso de existir, existiese una sucesión convergente hacia una solución x. De no ser así existirían sucesiones $\{x_{n_j}^{i_{n_j}}\}_{n_j\in N}$ y $\{x_{n_j}^{k_{n_j}}\}$ verificando $P_{n_j}Tx_{n_j}^{i_{n_j}}=P_{n_j}Tx_{n_j}^{k_{n_j}}=P_{n_j}y$ y por tanto pasando a subsucesión, no lo hacemos sin perder generalidad, y por ser T=I+C existen x y x' tales que $X_{n_j}^{i_{n_j}}$ converge a x con T(x)=y, y $x_{n_j}^{k_{n_j}}$ converge a x' con T(x')=y. A partir de ahora trabajaremos con $\{x_n^{i_n}\}_{n\in N}$ y $\{x_n^{k_n}\}_{n\in N}$

Como V es conexo existe $\alpha:[0,1]\longrightarrow V$ con $\alpha(0)=x$ y $\alpha(1)=x'$ y $\{\alpha(t)/\ t\in[0,1]\}$ es compacto, para N suficientemente grande:

(a) $P_n(\alpha[0,1])\subset V\cap X_n = V_n$

(b) $x_n^{i_n}\in B(x,\delta)\subset V$ y $x_n^{k_n}\in B(x',\delta)\subset V$ para algún $\delta>0$

Construimos las siguientes curvas para $n\geq N$:

$$\beta_n(t) = \begin{cases} (1-3t)x_n^{i_n} + 3tP_n x & 0\leq t\leq 1/3 \\ P_n\alpha(3t-1) & 1/3\leq t\leq 2/3 \\ 3(1-t)P_n x' + (3t-2)x_n^{k_n} & 2/3\leq t\leq 1 \end{cases}$$

Por estar $x_n^{i_n}$ y $X_n^{k_n}$ en distintas componentes conexas de $V_n-P_nF(Fr(G_n))$ existirá una sucesión $\{t_n\}_{n\in N}\subset[0,1]$ tal que $\beta_n(t_n)=P_nF(z_n)$ con $z_n\in Fr(G_n)$. Al ser [0,1] compacto existe t_0 y $\{t_{n_j}\}_{n_j\in N}$ tal que t_{n_j} converge a t_0, si t_0 está en [0,1/3] $P_{n_j}F(z_{n_j})=\beta_{n_j}(t_{n_j})$ que converge a x. Pero $F\in AK(G)$ y $x\notin F(Fr(G))$ con lo que llegamos a contradicción; si t_0 está en [2/3,1] estamos en la misma situación; si t_0 está en $[1/3,2/3]$ entonces $P_n F(z_n)$ converge a $\alpha(t_0) \in V$ y llegamos a igual contradicción.

DEFINICION 3.3.1

Si $A \subset Z^{*}$ definimos:

$$a\, A = \{\, c \,/\, c = a\, b \;,\ \text{para } b \in A \,\} \quad \text{donde } 0 . \infty = 0$$

TEOREMA 3.3.2

En las hipótesis del Teorema 3.3.1 y del Lema 3.3.1 o bién del Lema 3.3.2 se tiene que:

$$D(\, TF,G,y \,) = D(\, F,G,V \,)\; D(\, G,V,y \,)$$

Demostración.

El resultado es inmediato a partir del Teorema y los Lemas aludidos en la hipótesis.

TEOREMA 3.3.3

En las hipótesis del Teorema 3.3.1 y si se verifica:

(a) $F=I+C$ y $T \in AK(G)$ es propia

(b) $F \in AK(G)$, $F(Fr(G))$ es cerrado y $T \in AK(G)$

Entonces se tiene:

$$D(\ TF,G,y\ ) \subseteq \sum_{i=1}^{K} D(\ F,G\ ,V_i\ ) \bullet \quad D(\ T,V_i\ ,y\ )$$

donde $V_1, \ldots, V_K$ son las componentes conexas de $U\text{-}F(Fr(G))$ que contienen solución de la ecuación $T(x)=y$, que sabemos son un número finito por ser T propia.

Demostración: Si $G_i = F^{-1}(V_i)$

$$D(\ TF,G,y\ ) \subseteq \sum_{i=1}^{K} D(\ TF,G^i,y\ ) = \sum_{i=1}^{K} D(\ F,G^i,y\ ).D(\ T,V_i,y\ ) =$$
$$= \sum_{i=1}^{K} D(\ F,G,V_i).D(\ T,V_i,y\ )$$

CAPITULO III

SECCION 4 Extensión del grado a un subconjunto de AK(G)

En esta sección se extiende el grado definido en AK(G) a un subconjunto de su cierre en el que estan incluidas las perturbaciones de la identidad por aplicaciones 1-bola-contractivas.

Sea $\{ X, P_n, X_n \}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo y G un abierto acotado de X, definimos los siguientes conjuntos de aplicaciones:

$$B(G) = \{ T \in C(G) / \quad T(\bar{G}) \text{ es acotado } \}$$

$$AKT(G) = \{ F \in C(G) / \exists b>0 \ ; \ F+aT \in AK(G) \ \forall a \in (0,b] \} \cup AK(G)$$

$$AKB(G) = \bigcup_{T \in B(G)} AKT(G)$$

obviamente se tiene: $AK(G) \subset AKB(G) \subset \overline{AK(G)}$

TEOREMA 3.4.1

Sea $\{ X, P_n, X_n \}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo y $T \in B(G)$, si $W = \{ G \subset X / G$ es abierto y acotado $\}$, $M(G) = AKT(G)$ y si $H(G)$ es un conjunto de homotopias verificando:

(a)$H(t,.) \subset AKT(G)-AK(G)$ $\forall t \in [0,1]$ ó $H(t,.) \subset AK(G)$ $\forall t \in [0,1]$.

(b)$\{ H[.,x] \}_{x \in \bar{G}}$ es una familia equicontinua de funciones.

Entonces: W, $M(W)$ y $H(W)$ son familias admisibles de abiertos funciones y homotopias, respectivamente, para el espacio X.

Demostración: Es igual que en el caso de $AK(G)$.

TEOREMA 3.4.2

Si consideramos las familias admisibles de la definición anterior y definimos el esquema de aproximación siguiente:

(1)$X_n = X$, $G_n = G$, $M_n(G) = AK(G)$ y $H_n(G) = H(G)$ correspondiente a $AK(G)$.

(2)Si $F \in AKT(G)-AK(G)$ entonces $F_n = F+\frac{1}{n}T$ y si $F \in AK(G)$ $F_n = F$.

(3)$p_n = p$.

Entonces el esquema de aproximación definido es admisible y por tanto define un grado multivaluado en $AKT(G)$.

Demostración:

(a) $\forall F \in AKT(G)\ \exists n_0 /\ n>n_0$ entonces $F_n \in AK(G)$, por definición de AKT(G).

(b)Si $p \notin \overline{F(Fr(G))}$ entonces $\exists n_0 /\ n>n_0$ se tiene $p_n \notin \overline{F_n(Fr(G_n))}$; ó sea tendría que ver que $\exists n_0 /\ n>n_0$ $p \in \overline{(F+\frac{1}{n}T)(Fr(G))}$. Si lo anterior fuerá falso $\exists \{x_{n_j}\}_{n_j \in N}$ con $x_{n_j} \in Fr(G)$ y $d(p,(F+\frac{1}{n_j}T)(x_{n_j}))< \frac{1}{2^j}$ pero

$d(p,F(x_{n_j}))<d(p,(F+\frac{1}{n_j}T)(x_{n_j}))+d(F(x_{n_j}),(F+\frac{1}{n_j}T)(x_{n_j}))< \frac{1}{2^j}+\frac{1}{n_j}\|T\|$ y por ser T acotada se tendría $p \in \overline{F(Fr(G))}$ contra hipotesis.

(c)Si G_1 yG_2 son disjuntos por definición G_{1n} y G_{2n} también lo son.

(d)Si $G \in W'$ y $G_1, G_2 \in W$ con $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ y $p \in \overline{F(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))}$ entonces $\exists n_1 /\ n>n_1$ $p \in \overline{(F+ \frac{1}{n}T)(\bar{G}-(G_1 \cup G_2))}$.
la demostración es la misma que en el caso (b).

(e)Por definición $I_n = I$.

(f)Por último habrá que probar que si $G \in W$, $\{h_t\}_{t\in[0,1]} \in H(G)$ e $\{y_t\}_{t\in[0,1]}$ es una curva continua en X con $y_t \in \overline{h_t(Fr(G))}$ $\forall t \in [0,1]$ entonces $\exists n_0 / n>n_0$ $y_t \notin \overline{h_{nt}(Fr(G_n))}$.

Para demostrarlo suponemos $h_{nt} = H + 1/_n T$, en el otro caso el resultado es trivial. Si suponemos falso lo anterior, existirían subsucesiones:

$$\{x_{u_j}\}_{u_j\in N},\ \{t_{u_j}\}_{u_j\in N} \text{ donde } x_{u_j} \in Fr(G) \text{ y } t_{u_j} \in [0,1]$$

de forma que:

$$d(y_{t_{u_j}}, h_{u_j}(t_{u_j}, x_{u_j})) \longrightarrow 0$$

Como $t_{u_j} \in [0,1]$ tiene subsucesión convergente a un cierto $t_0 \in [0,1]$ y por ser $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ una familia equicontinua de funciones se tendría que

$$\exists n_0 / \ n>n_0 \text{ entonces } \quad \| h(t_{u_j}, x) - h(t_0, x) \| < \varepsilon \quad \forall x \in \bar{G}$$

ahora bién

$$\| y_{t_0} - h_{t_0}(x_{u_j}) \| = \| y_0 - h(t_0, x_{u_j}) \| <$$

$$< \| y_{t_0} \pm \frac{1}{u_j} T(x_{u_j}) - h(t_0, x_{u_j}) + h(t_{u_j}, x_{u_j}) \pm t_{u_j} \| <$$

$$< \underbrace{\tfrac{1}{u_j} \| T(x_{u_j}) \|}_{(1)} + \underbrace{\| y_{t_0} - y_{t_{u_j}} \|}_{(2)} +$$

$$+ \underbrace{\| h_{u_j}(t_{u_j}, x_{u_j}) - y_{t_{u_j}} \|}_{(3)} + \underbrace{\| h(t_0, x_{u_j}) - h(t_{u_j}, x_{u_j}) \|}_{(4)}$$

Pero por construcción (1),(2),(3) y (4) tienden a cero y por tanto se tendria que $y_{t_0} \in \overline{h_{,}(Fr(G))}$ contra hipotesis.

EJEMPLO : Sea $\{ X, X_n, P_n \}$ un espacio de Banach proyeccionalmente completo, G un abierto acotado si $B: \overline{G} \subset X \longrightarrow X$ es 1-bola-contractiva sabemos que I-aB pertenece a AK(G) y que en general $I-B \notin AK(G)$;sin embargo $I-B \in AKB(G)$.

PROPIEDADES DEL GRADO DEFINIDO EN AKT(G)

TEOREMA 3.4.2

Sea $\{ X, P_n, X_n \}$ un espacio de Banach dotado de un esquema proyeccionalmente completo, G un abierto acotado, $T \in B(G)$ y $F \in AKT(G)$ si $y \notin \overline{F(Fr(G))}$ entonces:

$$\exists\, n_0 / \ n > n_0 \text{ se verifica } D(F,G,y) = D(F + 1/_n T, G, y)$$

Demostración: Por definición de D(F,G,y) me bastaría probar que $\exists\, n_0 / \ n > n_0$ entonces $D(F + 1/_n T, G, y)$ es constante; por la construcción del grado sabemos que a partir de un cierto n_0 $D(F + 1/_n T, G, y)$ esta bien definido. Considero la homotopia siguiente;

$$h = t.(F + 1/_n T) + (1-t).(F + 1/_{n_1} T)$$

Me bastaría probar que $\exists n_1$ / $n>n_1$ se tiene $y \notin \overline{h_t(Fr(G))}$

$$\| y-(F+(1/m+\frac{t.(m-n)}{m.n})T)(x)\| \geq$$

$$\geq \|y-F(x)\| -(t\frac{(m-n)}{m.n})\|T(x)\| \geq$$

$$\geq \|y-F(x)\| - \frac{1}{m.n}\|T(x)\|.$$

Me bastaría tomar si $\|y-F(x)\| > \rho$ un n_0/ si $m.n>n_0$ se tenga $\frac{1}{m.n}\|T(x)\| < \rho/2$.

CORORLARIO 3.4.1

Sean F,G,y enla situación del teorema anterior, entonces existe $r>0, r(F,G,y)$, tal que si $T\in AKT(G)$ y $\|F-T\| < r$ entonces:

$$D(F,G,y) = D(T,G,y)$$

La demostración es inmediata a partir del teorema anterior.

CAPITULO IV

APLICACION DE LA TEORIA DEL GRADO A LA BUSQUEDA DE SOLUCIONES PERIODICAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES.

En este capítulo utilizamos la teoría del grado para resolver uno de los problemas de los que habíamos hablado en la introducción; encontrar soluciones periódicas a un sistema de ecuaciones diferenciales.

El problema que planteamos es el siguiente:

(1)

$\dot{x} = f(t,x)$

$t \in R$

$x \in R^n$

$f:(t,x) \in R^{n+1} \longrightarrow f(t,x) \in R^n$ verificando:

(a) $f \in C^0$ y $f(t,x) = f_0(t,x)+f_1(t)$ y $f_0 \in C^0$

(b) $\|f_0(t,x)\| < A\|x\| + B \qquad A,B \in R^+$

(c) $f_{0i} > 0 \qquad i=1,2,\ldots\ldots,n$

(d) $\exists\ \delta > 0$ y $\exists\ M > 0$ /

si $x_i \geq M$ entonces $f_i(t,x) > \delta$

$\forall\ (t,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)$

si $x_i \leq M$ entonces $f_i(t,x) \leq -\delta$

$\forall\ (t,x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots x_n)$

y buscamos soluciones $x(t) = x(t+T)\ T \in R\ \forall\ t \in R$

Vamos a plantear un problema equivalente en $L^2([0,T],R^n)$ para ello vamos a definir los siguientes conjuntos:

$$\mathrm{Dom}(L) = \{ u \in L^2 / \dot{u} \in L^2 \text{ y } u(0)=u(T) \}$$

La condición u(0)=u(T) se entiende en el sentido de tener la clase un representante continuo verificando esa condición.

$$\mathrm{Rang}(L) = \{ g / g \in L^2 \text{ y } \int_0^T g\, dt = 0 \}$$

$$\mathrm{Ker}(L) = R^n$$

Se tiene además que $L^2 = \mathrm{Rang}(L) \oplus \mathrm{Ker}(L)$, pués:

(1) $\mathrm{Rang}(L) \cap \mathrm{Ker}(L) = 0$

(2) Si $u \in \mathrm{Dom}(L)$ y $v \in \mathrm{Ker}(L)$ se tiene $(u,v)=0$

(3) Si $u \in L^2$ $u = (u - 1/T \int_0^T u(s)\, ds) + 1/T \int_0^T u(s) ds$

con $(u - 1/T \int_0^T u(s)\, ds \in \mathrm{Rang}(L)$, $\frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \in \mathrm{Ker}(L)$

Se define el operador $L:\mathrm{Dom}(L) \longrightarrow \mathrm{Rang}(L)$ donde $L(u)=\dot{u}$ y el operador inverso de L, $K:\mathrm{Rang}(L) \longrightarrow \mathrm{Dom}(L) \cap \mathrm{Rang}(L)$ de la forma siguiente:

$$K(u) = \int_0^T u(s)\, ds - 1/T \int_0^T \left(\int_0^t u(s)\, ds \right) dt$$

el operador K es un operador compacto (ver 12)

Por último definimos $N: L^2 \longrightarrow L^2$ y $N(u)=f(t,u(t))$

LEMA 4.1.2

El operador N es continuo y acotado.

Demostración:

(a)N es acotado

$$\|f(t,u(t))\|_E^2 < 2\, \|f_0(t,u(t))\|_E^2 + 2\, \|f_1(t)\|_E^2 <$$

$$< 2(A\, \|u(t)\|_E^2 + B) + 2 \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|^2 \quad \text{y de aqui}$$

$$\|f(.,u(.))\|_E^2 < 4A\, \|u\|_E^2 + 4B\, T + 2T\, \|f_1\|^2_{(C([0,T],R^n))}$$

(b)N es continuo

Vamos a probar que si $\{u_n\}_{n\in N}$ es una sucesión convergente a u en L^2 de cualquier subsucesión de $\{N(u_n)\}_{n\in N}$ se puede extraer una subsucesión convergente a N(u) con lo que quedaría probado el resultado.

Si $\{u_n\}_{n\in N}$ es convergente a u cualquier subsucesión suya $\{u_{n_j}\}_{n_j\in N}$ verifica que tiene una subsucesión tal que:

$$u_{n_j} \longrightarrow u \text{ c.p.d. y } \exists\, v\in L^2 / \ \|u_{n_j}\|_E \leq \|v\|_E \text{ c.p.d.}$$

luego $f(t,u_j(t)) \longrightarrow f(t,u(t))$ c.p.d.

y,por otra parte $f(t,u(t)) \leq A' \|v\|_E + B$

por convergencia dominada $f(.,u_j(.)) \longrightarrow f(.,u(.))$ en L^2

El lema que a continuación enunciamos nos va a servir para pasar del problema (1) a la búsqueda de una solución en una ecuación de operadores.

LEMA 4.1.2

Sean f y g dos funciones continuas en R^n y T_f y T_g las correspondientes distribuciones. Si $\partial_j T_f = T_g$ en el sentido de las distribuciones,entonces la derivada parcial $\partial_j f$ existe y $\partial_j f = g$.

Demostración: Vease (11) pag 336.

TEOREMA 4.1.1

El problema (1) es equivalente al siguiente:

$$\boxed{u \in Dom(L) \text{ y } Lu=Nu \quad (2)}$$

Demostración: Se deduce del lema directamente

Vamos a pasar del problema planteado en el Dom(L) a un problema de búsqueda de solución en todo el espacio L^2 ; para ello definimos el operador proyección:

$$P: L^2 \longrightarrow Ker(L) \quad u=u_\perp+u_0 \text{ donde } u_\perp=(I-P)u \text{ y } u_0=Pu.$$

Consideremos los siguientes problemas:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u \in L^2 & 0=PNu \ (3) \\ & (I-P)u=K(I-P)Nu \end{array}}$$

$$\boxed{(I-P)u-K(I-P)Nu+PNu=0 \ (4)}$$

LEMA 4.1.2

Los problemas (2) , (3) y (4) son equivalentes.

Demostración:

(a) $(2) \Longrightarrow (3)$.

Si $u \in Dom(L)$ y $Lu=Nu \Longrightarrow Nu \in Rang(L) \Longrightarrow PNu=0$ (*)

$Lu=L((I-P)u+Pu)=L(I-P)u$ como $Lu=Nu$ entonces:

$Nu=(I-P)Nu+PNu=(I-P)Nu$ y por tanto componiendo con el operador K se tiene $(I-P)u=K(I-P)Nu$ (**). Yde (*) y(**) el resultado.

(b) $(3) \Longrightarrow (4)$. ES directo.

(c) $(4) \Longrightarrow (3)$.

Se deduce del hecho de que $(I-P)u-K(I-P)Nu \in Rang(L)$ y $PNu \in Ker(L)$

(d) $(3) \Longrightarrow (2)$.

Si $u \in L^1$ con $PNu=o$ y $(I-P)u-K(I-P)Nu=0$ entonces: $K(I-P)Nu \in Rang(L) \cap Dom(L) \Longrightarrow (I-P)u \in Dom(L) \Longrightarrow u=(I-P)u+Pu \in Dom(L)$ y por tanto $L(I-P)u=LKNu$ de donde se deduce $Lu=Nu$.

A continuación vamos a definir el operador proyección sobre la bola unidad del núcleo con el objeto de poder construir una homotopía que nos permita aplicar la teoría del grado

$$\emptyset : L^2 \longrightarrow L^2 \text{ donde } \emptyset(u)=Pu \text{ si } \|Pu\| \leq 1 \text{ y } \emptyset(u)=\frac{Pu}{\|Pu\|} \text{ si } \|Pu\| \geq 1$$

<u>TEOREMA</u> <u>4.1.1</u>

Existe solución del problema (1).

Demostración:

Teniendo en cuenta los lemas 4.1.1 y 4.1.2 me bastaría probar que el problema (4) posee solución. Vamos a considerar el problema homotópico siguiente:

$$\boxed{(I-P)u-\lambda K(I-P)Nu+\lambda PNu+(1-\lambda)\emptyset u=0 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (5)}$$

Si probará:

(1) $(I-P)-\lambda K(I-P)N+\lambda PN+(1-\lambda)\emptyset$ AK(G) $\forall \lambda \in [0,1]$ y G abierto y acotado

(2) Las soluciones de (5) estan acotadas.

Buscando una bola abierta suficientemente grande para que en la frontera no existieran soluciones, se tendria:

$$D(I-P+\emptyset,G,0) = D((I-P)-K(I-P)N+PN,G,0) \quad (*)$$

Por la propiedad de homotopia para el grado multivaluado definido en AK(G).

Pero $(I-P)u+\emptyset u=0$ tiene como única solución $u=0$ por lo que

$D((I-P)+\emptyset,G,0)$ es distinto de cero y de (*) tendríamos que la ecuación $(I-P)u-K(I-P)Nu+PNu=0$ también tiene solución con lo que quedaría probado el teorema. Pasemos a probar (1) y (2).

(1) $K(I-P)N \in K(G)$.

$((I-P)+\lambda PN+(1-\lambda)\emptyset)(Xn)\subset Xn$.

Por los apartados (4) y (6) del teorema 3.2.1 quedaría visto el resultado.

(2) Vamos a probar que las soluciones de (5) estan acotadas independientemente de λ . Si $u\in L^2$ es solución de (5) entonces se tiene:

$PNu=(\lambda-1)\emptyset u$ por tanto:

$u \in Dom(L)$ y $Lu=\lambda Nu+(1-\lambda)\emptyset u$ de donde:

u T-periódica y $\dot{u}= f(t,u)+(1-\lambda)\emptyset u$.

<u>Paso</u> <u>(1):</u> Si u(0) esta acotado u también lo esta.

$$u(t)= \int_0^t f(s,u(s))\, ds + (1-\lambda)t\emptyset u + u(0) \quad \forall t \in [0,T] \text{ y } \|\emptyset u\| \leq 1 (**)$$

aplicando el lema de Gronwall:

$$|u(t)| \leq (u(0) + ((1-\lambda)B\lambda)T)e^{At} \quad \forall t \in [0,T].$$

Por tanto si u(0) esta acotado se tiene el resultado.

<u>Paso</u> <u>(2):</u> u(0) está acotado si y solo si $Pu=u_0$ lo esta.

De (**):

$$1/T \int_0^T u(s)\, ds= \lambda/T \int_0^T (\int_0^t f(s,u(s))ds)dt+ 1-\lambda/T)\emptyset u+u(0)$$

las igualdades que escribimos a continuación son componente a componente

$$\lambda/T \int_0^T (\int_0^t f(s,u(s))\, ds)\, dt = \lambda/T \int_0^T \int_s^T f(s,u(s))\, dt\, ds=$$

$$= \lambda/T \int_0^T (T-s) f(s,u(s))\, ds = \lambda/T\, (T-s_{x_i}) \int_0^T f(s,u(s))\, ds$$

Ahora bién $u(T)=u(0) \Rightarrow \lambda \int_0^T f(s,u(s))\, ds + (1-\lambda)T\emptyset u=0$ y como

$\emptyset u= {}^1/_T \int_0^T u(s)\, ds/_\alpha$ y $\alpha>0$ entonces $\int_0^T f(s,u(s))\, ds = \frac{-(1-\lambda)}{\alpha}\int_0^T u(s)\, ds$

en (*) :

$$(1+{}^{1-\lambda}/_\alpha (T-s_{x_i}) \int_0^T u(s)\, ds = (1-\lambda)/_2\, T\ \emptyset u+u(0) \quad s_{x_i}\in[0,T] \quad \alpha\geq 1$$

Por tanto u_0 esta acotado si y solo si lo esta $u(0)$.

Paso (3): Si $(I-P)u=u_1$ entonces u_1 esta acotada.

Para ello utilizamos que $K:L^1 \longrightarrow L^\infty$ y K es lineal y continua.

Como $u = K(I-P)Nu$ se tiene

$$\| u \|_{L^\infty} \leq \lambda C \| (I-P)Nu \|_{L^1} < C \| Nu \|_{L^1} + \lambda C \|PNu\|_{L^1} \quad \text{con } C\in R^+$$

Pero $PNu=(1-\lambda)\emptyset u$ está acotado en L^2 y como son constantes también lo estará en L^1 por tanto existirá $C_2\in R^+$ y $\lambda C \|PNu\|_{L^1} < C_2$.

$$\| Nu \|_{L^1} = \int_0^T | \lambda f_0(t,u(t)) + \lambda f_1(t)|\, dt=$$

$$=C_1 + \int_0^T \sum_{i=1}^N |f_{0i}(t,u(t))|\, dt = C_1+C_2 \int_0^T \lambda\sum_{i=1}^N f_{0i}(t,u(t)) \text{ por hipótesis (c)}$$

$$=C_1+C_2 \int_0^T \sum_{i=1}^N (f_{0i}(t,u(t))+f_{1i}(t))\, dt = C_1'+C_2\,\lambda\,(Nu,\vec{1}) \quad \text{como } \mathrm{Rang}(L)^\perp = R^n$$

$$=C_1'+ C_2\,\lambda\,(PNu,\vec{1}) = C_1'+ C_2(\lambda-1)(\emptyset u,\vec{1})$$

Y como $\emptyset u$ esta acotado queda probado el resultado.

<u>Paso (4):</u> u_0 esta acotado.

Como $(0,u\ )=0$ y $PNu+(1-\lambda)\emptyset u=o$ se tiene $(\lambda PNu+(1-\lambda)\emptyset u,u_0)=0$ y al ser $u_0 \perp (I-P)Nu$ entonces $(\lambda Nu,u_0) + (1-\lambda)(\emptyset u,u_0) = 0$. Como $\emptyset u = {}^{u_0}/_{\alpha}$ se deduce $(Nu,u_0)\leq 0$(****) cuando $\lambda \neq 0$(en el caso de ser $\lambda=0$ u_0 también es nulo).

Como $u_\perp$ esta acotado en $L^\perp$ $\exists (c_1,\ldots,c_n)/\ -c_i+u_{0i}<u_i<c_i+u_{0i}$ $i=1,\ldots n$.

Supongamos que (en caso contrario sería trivial) que existe un i tal que:

$|u_{0i}| > M+C$ donde $C=\max\{c\ /i=1,\ldots n\}$ ó sea $u_{0i} > M+C$ ó $u_{0i} > -M+C$

en cualqier caso $f_i(t,u_\perp(t)+u_0)u_{0i} > \delta|u_{0i}|$ por hipótesis (d).

De (****) $0 > \sum_{i=1}^{N}\int_0^T f_i(t,u_\perp(t)+u_0)u_{0i}\,dt \geq \delta T \sum_{\substack{i \\ |u_{0i}|\geq M}} |u_{0i}| - C > \delta T \sum_{i=1}^{N}|u_{0i}| - C^*$

Por tanto u esta acotado en L y como son constantes también lo estaran en L con lo que el teorema queda demostrado.

BIBLIOGRAFIA

(1) Browder,F.E. (1983), "The Degree of mapping,and its generalizations"

Contemporary Mathematics 21 pag 15-40. AMS

(2) Browder,F.E.;Nussbaum,R.D. (1968), "The topológical degree for noncompact Nonlinear Mappings in Banach Spaces"

Bull.AMS 74,671-676

(3) Browder,F.E.;Petryshyn,W.V. (1969), "Approximation methods and the generalized topológical degree for nonlinear mappings in Banach spaces"

J.Funct.Anal.3,217-24

(4) (1968), "The topológical degree and Galerkin approximations for noncompacts operators in Banach spaces"

Bull.AMS 74,641-646

(5) Cesari,L.;Kannan,R. (1980), "Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonance"

Nonlinear Anal.6,751-805

(6) Deimling,K. (1984), "Nonlinear functional analysis"

Springer-Verlag

(7) (1974), "Nichtlineare gleinchungen und abbildunsgrade"

Springer

(8) Fitzpatrick,P.M. (1970), "A generalized degree for uniform limits of A-proper mappings"

J.Math. Anal. Appl.35,536-532

(9) (1972), "A-proper mappings and their uniform limits"

Bull.AMS 78,536-552

(10) Gaines,R;Mawhin,J.L. (1977), "Coincidence degree, and nonlinear differential equations" Lecture Notes in Mathematics,568.

(11) Horváth,J. (1966), "Topológical vector spaces and distributions"

Addison-Publishing Company

(12) Hochstadt,H. (1973), "Integral equations"

John WileySons

(13) Lloyd,N.G. (1978), "Degree theory"

Cambridge University Press

(14) Nagumo,M. (1951), "A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis"

Amer.J.MAth. 73,485-496

(15) Nussbaum,R.D. (1972), "Degree theory for local condensings mappings"

J.Math.Anal.Appl.37,741-746

(16) Ortega,R.;Martinez-Amores,P.;Arias,M. (1986), "Doubly periodic solutions of a forced semilinear wave equations"

Comun. personal

(17) Petryshin,W.V. (1966), "On nonlinear P-compact operators in Banach space whit applications to constructive fixed point theorems.

J.Math.Anal.Appl.15,228-242

(18) (1971), "Antipodes theorm for A-proper mappings and its applications to mappings of the modified type (S) or (S) and to mappings whith pm property"

J.Functional Analysis 7,165-211

(19) (1975), "on the approximation solvability of equations involving A-proper and pseudo-A-proper mappings"

Bull AMS 81,223-312

(20) Petrysyn,W.V.;Fitzpatrick,P.M. (1974), "A degree theory,fixed point theorems and mappings theorems for multivalued noncompact mappings"

Trans AMS 194,1-25

(21) Petrysyn,W.V.;Tucker,T.S. (1969), "On the functional involving nonlinear generalized P-compact operators"

Trans AMS 135,343-373

(22) Webb,J.R.L. (1971), "Remarks on K-et contractions"

Boll.Un.Mat.Ital.9,137-158

(23) Ship-fah Wong,H. (1971), "The topológical degree of A-proper maps"

Canad.J.Math.23,403-412

(24) (1972), "A product formula for the degree of A-proper maps

J.Functional Analysis 10,361-371

(25) Werenski,S. (1984), "On the fixed point of non-compact mappings"

Studia math.LXXVIII,155-160

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Gerardo López Acedo titulada "Teoría del Grado Multivaluado"

acordó otorgarle la calificación de Apto Cum Laude

Sevilla, 25 de Septiembre 1.987

El Vocál, | El Vocal, | El Vocal,

El Presidente | El Secretario, | El Doctorado,