UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

DPTO. TEORIA DE FUNCIONES

TEOREMA DE VITALI-HAHN-SAKS EN ALGEBRAS DE BOOLE

Visado en Sevilla,

Mayo de 1983.

El director,

Juan Arias de Reyna M.

Fdo. Juan Arias de Reyna Martínez

Catedrático de Análisis Matemático

IV y V de la Universidad de Sevilla.

Tesis que presenta

Francisco José Freniche Ibáñez

para optar al grado de doctor

en Ciencias Matemáticas.

Fdo. Francisco José Freniche Ibáñez.

Autorizo la consulta de esta memoria

A la memoria de mi madre

y a mi padre

Agradezco al profesor Juan Arias de Reyna
sus sugerencias e indicaciones en orden a
la realización de este trabajo.

I N T R O D U C C I O N

Esta memoria tiene su origen en el estudio de dos teoremas de convergencia y acotación de medidas finitamente aditivas, conocidos como teoremas de Vitali-Hahn-Saks y de Nikodým, cuyos enunciados son los siguientes:

Si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Boole y $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de medidas complejas definidas en $\mathfrak{A}$, finitamente aditivas y de variación acotada, entonces: (1) si $(\mu_n(A))_{n\in\omega}$ es convergente para todo $A\in\mathfrak{A}$, la sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva (Vitali-Hahn-Saks), y (2) si $(\mu_n(A))_{n\in\omega}$ está acotada para todo $A\in\mathfrak{A}$, la sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ está uniformemente acotada (Nikodým).

La historia de la evolución de ambos teoremas aparece expuesta en el libro de J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 34 y siguientes]. Mencionamos solamente aquí que se conoce la validez de los dos teoremas en algunas clases de álgebras de Boole no numerablemente completas, y que este hecho conduce a estos autores a plantear el problema de la caracterización intrínseca de las álgebras de Boole en las que se verifican.

En esta línea, el primer capítulo "Teorema de Vitali-Hahn-

Saks en álgebras de Boole de interpolación subsecuencial", está dedicado a la extensión del teorema de Vitali-Hahn-Saks a una clase de álgebras de Boole, en él introducida, que es más amplia que las consideradas anteriormente por otros autores.

Como ya hemos dicho, este teorema ha sido probado para algunas álgebras de Boole, como las de interpolación (G. L. Seever [1968]), las que tienen la propiedad (f) (A. Moltó [1981]), y las subsecuencialmente completas (R. Haydon [1981]); en nuestra proposición 2 se demuestra que todas ellas tienen una propiedad común de separación de sucesiones disjuntas, a saber: dada una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en el álgebra de Boole $\mathcal{A}$, y dado un subconjunto infinito M de ω, existen $A\in\mathcal{A}$ y $N\subset M$, también infinito, tales que $A_n \leq A$ si $n\in N$ y $A_n \wedge A = 0$ si $n\in\omega-N$.

Nosotros decimos que un álgebra de Boole es de interpolación subsecuencial cuando verifica esta propiedad (definición 1), de modo que las álgebras citadas antes son todas de interpolación subsecuencial. El resultado principal del capítulo es el teorema 5, en el que es demostrado el teorema de Vitali-Hahn-Saks para sucesiones de medidas finitamente aditivas y de variación acotada definidas en álgebras de Boole de interpolación subsecuencial; la técnica usada en la prueba es la de las jorobas deslizantes, y lo ajustado de la demostración nos hace pensar que quizás la propiedad de interpolación subsecuencial caracterice completamente a la clase de álgebras de Boole en las que se cumple el teorema de Vitali-Hahn-Saks. Existe sin embargo una clase de álgebras de Boole para las que se ha probado el teorema y de la que no sabemos si está contenida en la nuestra: es la considerada por F. K. Dashiell [1981]; debe notarse no obstante que la definición de estas álgebras de Boole no es intrínseca, en el sentido de que hace intervenir una condición sobre las medidas positivas.

El resto del capítulo está dedicado a la separación de nuestra clase de álgebras de Boole de las restantes (teorema 12 y ejemplo 13).

Se termina con la proposición 15, en la que se prueba que la interpolación subsecuencial es una hipótesis sobre una subálgebra $\mathfrak{a}$ del álgebra de Borel de un espacio topológico compacto Hausdorff que garantiza que la convergencia puntual sobre $\mathfrak{a}$ de una sucesión de medidas complejas de Borel regulares, implica la convergencia débil de la sucesión. Este resultado mejora el que aparece en N. Dunford y T. J. Schwartz [1964, pág. 308], y en espacios totalmente disconexos, otro de A. Grothendieck [1953, pág. 150].

El motivo original del segundo capítulo, "Algebras de Boole Σ-subsecuencialmente completas", es el de mostrar un álgebra de Boole de interpolación subsecuencial que no se pueda expresar como cociente de una subsecuencialmente completa, problema que surge al observar que el ejemplo dado en el primer capítulo para separar las dos clases de álgebras, está definido como cociente de un álgebra subsecuencialmente completa. Este problema no es resuelto completamente, si bien, modificando convenientemente una técnica de E. K. van Douwen y J. van Mill [1980], conseguimos construir un álgebra de Boole de interpolación que no es cociente de ningún álgebra que pertenezca a una determinada subclase de las subsecuencialmente completas (teorema 19); en particular, y como esta subclase contiene estrictamente a la clase de las numerablemente completas (ejemplo 30), nuestro resultado amplía el probado por esos autores.

Más importante que esta extensión es el desarrollo a que nos ha conducido el problema. En primer lugar hemos introducido una nueva clase de álgebras de Boole, subclase de la clase de las subsecuencialmente completas, que hemos llamado Σ-subsecuencialmente completas: por definición, si Σ es una familia de partes infinitas de ω, un álgebra de Boole es Σ-subsecuencialmente completa cuando, dada una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$, existe $M\in\Sigma$, tal que la subsucesión $(A_n)_{n\in M}$ tiene supremo. Esta definición se extiende a otros conjuntos infinitos de índices y es así como es presentada (definición 1).

Seguidamente hemos estudiado la dependencia de la definición de la familia Σ, obteniendo que, bajo ciertas condiciones, la clase de álgebras de Boole Σ-subsecuencialmente completas sólo depende del cardinal de Σ (proposición 8).

Así podemos hablar por ejemplo de álgebras de Boole finitamente subsecuencialmente completas (definición 10). Estas álgebras gozan de propiedades similares a las numerablemente completas; por ejemplo, demostramos en el teorema 34 que un teorema de Diestel-Faires (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 20]) se extiende a ellas: si $\mathcal{Q}$ es finitamente subsecuencialmente completa, y T es un operador lineal continuo no débilmente compacto de $B(\mathcal{Q})$ en el espacio de Banach E, T fija una copia de l_∞.

En segundo lugar, son separados entre sí los distintos tipos de álgebras Σ-subsecuencialmente completas (corolario 28); para ello hemos construido unas álgebras Σ-subsecuencialmente completas que podríamos llamar canónicas (definición 22), y que, por una parte caracterizan las finitamente subsecuencialmente completas (proposición 33), y por otra, nos han guiado para resolver unos problemas de S. Ulam sobre el número de subálgebras de Boole no isomorfas de un conjunto de partes.

Estos problemas aparecen planteados en el Scottish book, recientemente editados por R. D. Mauldin [1981, prob. 37], y datan del año 1935. Entre otros resultados, obtenemos que si S es un conjunto infinito de cardinal κ, existe una familia de cardinal $2^{2^{\kappa}}$ de subálgebras de $\mathcal{P}(S)$ (el máximo posible), no isomorfas entre sí (teorema 38), y que si S es el conjunto de los números reales, las subálgebras pueden escogerse numerablemente completas (corolario 42).

En el capítulo tercero, titulado "Teorema de Nikodým en coproductos de álgebras de Boole", en atención a los motivos iniciales de su estudio, estudiamos la propiedad de tonelación en los espacios de funciones medibles, simples o elementales, escalares o vectoriales, definidas en álgebras de Boole.

En primer lugar, demostramos en el teorema 3 que si K es un espacio topológico compacto y Hausdorff, y N-espacio (definición 1), entonces K no contiene sucesiones convergentes no triviales; este resultado está relacionado con uno muy conocido que afirma lo mismo si K es un G-espacio (A. Wilansky 1978, pág. 245); notemos que si bien se desconoce si hay G-espacios que no sean N-espacios, W. Schachermayer [1878] muestra un ejemplo de N-espacio que no es G-espacio.

Como consecuencia, obtenemos que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, el espacio de funciones escalares simples $S(\mathcal{A})$ no es tonelado, o equivalentemente, no se verifica en $\mathcal{A}$ el teorema de Nikodým, si en el espacio de Stone de $\mathfrak{a}$ existe una sucesión convergente no trivial. Esto, unido a un resultado reciente de J. Arias de Reyna [198?], prueba que $S(\mathfrak{a})$ nunca es totalmente tonelado (corolario 5).

Seguidamente estudiamos los espacios de funciones $\mathfrak{a}$-medibles elementales que representan funciones continuas en el espacio de Stone del álgebra. El teorema 14 afirma que cualquier espacio de funciones elementales que estrictamente contenga a las funciones simples es tonelado; el hecho de que en este teorema no se requieran hipótesis sobre el álgebra de Boole contrasta fuertemente con lo que ocurre en el caso de las funciones simples. El método usado en la prueba del teorema 14 es nuevamente el de las jorobas deslizantes.

La última parte del capítulo está dedicada a los espacios de funciones simples vectoriales. Mediante la identificación del espacio $S(\mathfrak{a}, E)$ con el producto tensorial $S(\mathfrak{a})\otimes_{\varepsilon}E$, se llega a estudiar el problema de la tonelación de productos tensoriales inyectivos de espacios localmente convexos. Hemos conseguido probar en el teorema 15 el siguiente resultado de carácter general: si E y F son espacios localmente convexos Hausdorff, y (a) F contiene un subespacio isomorfo al de c_0 formado por las sucesiones con un número finito de términos no nulos, y (b) existe una serie en E' que es $\sigma(E',E)$-incondicionalmente de Cauchy, pero no $\beta(E',E)$-absolutamente sumable, entonces $E\otimes_{\varepsilon}F$ no es tonelado. En la nota 16 se discute este teorema en relación a otros ya conocidos.

Como consecuencia del teorema 15 se obtienen el corolario 17, en el que se afirma que $S(\mathfrak{a},E)$ no es tonelado si $\mathfrak{a}$ es infinita y E es un espacio normado de dimensión infinita, y el corolario 22, en el que se caracteriza en términos de sus factores la tonelación del espacio de funciones simples sobre un álgebra de Boole coproducto (el coproducto de una familia de álgebras de Boole es el álgebra de Boole de abiertos y cerrados del producto de los espacios de Stone de las álgebras factores).

En el cuarto y último capítulo, titulado "Teorema de Vitali-Hahn-Saks en coproductos de álgebras de Boole" por razones análogas al capítulo tercero, se introduce una propiedad de los espacios de Banach, que hemos llamado propiedad de Dunford-Pettis fuerte (definición 1), por similitud con una caracterización de la conocida propiedad de Dunford-Pettis. Esta propiedad surge de manera natural al estudiar el teorema de Vitali-Hahn-Saks en álgebras de Boole.

Entre los espacios de Banach $L_1(\mu)$ y $\mathcal{C}(K)$, que como se sabe tienen la propiedad de Dunford-Pettis, hemos caracterizado aquéllos que tienen la de Dunford-Pettis fuerte: μ ha de ser puramente atómica y K ha de ser G-espacio, respectivamente (corolario 4 y proposición 6).

De igual manera que en el capítulo tercero, al estudiar esta propiedad y la de Grothendieck en coproductos de álgebras de Boole, se llega inmediatamente a estudiarlas en productos tensoriales inyectivos generales. Extendiendo las definiciones a espacios localmente convexos, hemos obtenido dos resultados principales: (1) el producto tensorial completado $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ no tiene la propiedad de Grothendieck ni la de Dunford-Pettis fuerte, cuando F contiene isomórficamente al subespacio de c_0 formado por las sucesiones con sólo un número finito de términos no nulos, y en E' existe un equicontinuo en el que no coinciden la $\sigma(E',E)$-convergencia secuencial y la

$\beta(E',E)$-convergencia secuencial (teorema 8), y (2), $E\hat{\otimes}_{\varepsilon}F$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0, si E es normable y de dimensión infinita y F es como en (1) (teorema 9).

Consecuencia de estos teoremas es que si E es un espacio de Banach de dimensión infinita y K es un compacto Hausdorff infinito,el espacio $\mathcal{C}(K,E)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0.

Por último, y también usando esos teoremas, se caracterizan aquellos coproductos de álgebras de Boole en los que se verifica el teorema de Vitali-Hahn-Saks en términos de sus factores (teorema 14).

C A P I T U L O I

TEOREMA DE VITALI-HAHN-SAKS EN ALGEBRAS DE BOOLE DE INTERPOLACION SUBSECUENCIAL

El objeto de este capítulo es estudiar la validez del teorema de Vitali-Hahn-Saks para medidas complejas finitamente aditivas y de variación acotada, definidas en álgebras de Boole no necesariamente numerablemente completas. Este problema aparece planteado explícitamente en J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 36].

En esta dirección varios resultados han sido demostrados. G. L. Seever [1968], extiende el citado teorema a las álgebras de Boole con la propiedad de interpolación; F. K. Dashiell [1981] lo demuestra para las álgebras que llama "up-down semicomplete" y que cumplen además una propiedad referente a las medidas positivas (numerablemente aditivas) en ellas definidas; A. Moltó [1981] prueba el teorema para las álgebras de Boole con la propiedad (f); por último, R. Haydon [1981] afirma conocer que el teorema de Vitali-Hahn-Saks es cierto para las álgebras de Boole subsecuencialmente completas.

Nosotros probamos este teorema para una clase de álgebras de Boole que hemos llamado de interpolación subsecuencial, más amplia que las clases de las de interpolación, de las subsecuencialmente completas y de las que poseen la propiedad (f); nuestra clase está definida por una propiedad de separación de las sucesiones disjuntas, y la demostración del teorema es directa, utilizando la técnica de las jorobas deslizantes.

1.- <u>Definición</u> Un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es de interpolación subsecuencial cuando, dados una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{A}$ y un subconjunto infinito M de ω, existen un elemento A del álgebra y un subconjunto infinito N de M tales que

$$A_n \leq A \text{ si } n\in N \quad \text{y} \quad A_n \wedge A = 0 \text{ si } n\in \omega - N.$$

Vemos ahora la relación existente entre las álgebras de interpolación subsecuencial y los otros tipos mencionados en la introducción del capítulo. Comenzamos recordando algunas definiciones:

(a) Un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es de interpolación cuando, dadas sucesiones $(A_n)_{n\in\omega}$ y $(B_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, verificando que $A_n \leq A_{n+1} \leq B_{n+1} \leq B_n$ para todo $n\in\omega$, existe $A\in\mathcal{A}$ tal que $A_n \leq A \leq B_n$ para todo $n\in\omega$.

(b) Un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ tiene la propiedad (f) cuando dadas dos sucesiones disjuntas $(A_n)_{n\in\omega}$ y $(B_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, tales que $A_n \wedge B_m = 0$ para todos $n, m\in\omega$, existe un subconjunto infinito N de ω, un elemento A de $\mathcal{A}$, verificando $B_n \leq A$ si $n\in N$ y $A_n \wedge A = 0$ si $n\in\omega$, y existe para cada subconjunto M de N un elemento A_M de $\mathcal{A}$, tal que $A_M \wedge B_n = 0$ si $n\in N-M$ y $A_M \geq B_n$ si $n\in M$.

(c) Un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es subsecuencialmente completa cuando para toda sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, existe un subconjunto in finito M de ω para el cual $(A_n)_{n\in M}$ tiene supremo en $\mathfrak{A}$.

2.- <u>Proposición</u> Si un álgebra de Boole es de interpolación, o tiene la propiedad (f), o es subsecuencialmente completa, entonces es de interpolación subsecuencial.

Demostración:

(a) Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de Boole de interpolación, y sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathfrak{A}$; dado $M\subset\omega$ infinito, considero las sucesiones

$$C_n = \bigvee\{ A_k : k\in M,\ k\leq n \} \qquad (n\in\omega)$$

y

$$B_n = \bigwedge\{ -A_k : k\in \omega-M,\ k\leq n \} \qquad (n\in\omega)$$

Existe por hipótesis $A\in\mathfrak{A}$ tal que $C_n \leq A \leq B_n$ para todo $n\in\omega$. Si $n\in M$, $A_n \leq C_n \leq A$, y si $n\in\omega-M$, $A\leq B_n\leq -A_n$. De donde $A_n\leq A$ si $n\in M$ y $A\wedge A_n = 0$ si $n\in\omega-M$. Luego $\mathfrak{A}$ es de interpolación subsecuencial.

(b) Supongamos ahora que $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad (f), y que $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión disjunta en $\mathfrak{A}$. Sea M un subconjunto infinito de ω.

Consideramos las sucesiones $(A_n)_{n\in M}$ y $(A_n)_{n\in\omega-M}$.

Por hipótesis, existen $N_1\subset M$ infinito y $B_1\in\mathfrak{A}$, tales que $A_n\leq B_1$ si $n\in N_1$, $A_n\wedge B_1 = 0$ si $n\in\omega-M$, y para cada $N\subset N_1$ existe $A_N\in\mathfrak{A}$ tal que $A_n\leq A_N$ si $n\in N$ y $A_n\wedge A_N = 0$ si $n\in N_1-N$.

Consideramos ahora las sucesiones $(A_n)_{n\in M-N_1}$ y $(A_n)_{n\in N_1}$.

Otra vez por hipótesis, existen un subconjunto N de N_1, infinito, y un elemento B_2 de $\mathfrak{A}$, tales que $A_n\leq B_2$ si $n\in N$ y $A_n\wedge B_2 = 0$ si $n\in M-N_1$.

Sea $A = B_1\wedge B_2\wedge A_N\in\mathfrak{A}$.

Obviamente $A_n\leq A$ para todo $n\in N$.

Dado $n\in\omega-N$, pueden ocurrir tres casos: si $n\in\omega-M$, se tiene que $A_n\wedge B_1 = 0$; si $n\in M-N_1$, se tiene que $A_n\wedge B_2 = 0$; por último, si $n\in N_1-N$, se tiene que $A_n\wedge A_N = 0$. Es claro que en todos ellos se sigue $A_n\wedge A = 0$.

Así pues $\mathcal{A}$ es de interpolación subsecuencial.

(c) Para finalizar, sea $\mathcal{A}$ un álgebra subsecuencialmente completa. Supongamos que $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{A}$ y que M es un subconjunto infinito de ω.

Consideremos la sucesión disjunta $(A_n)_{n\in M}$.

Existe por hipótesis un subconjunto N de M infinito tal que $A = \bigvee\{ A_n : n\in N \}$ existe en el álgebra.

Obviamente $A_n \leq A$ para todo $n\in N$.

Dado $n\in\omega-N$, se tiene que $A_n\wedge A = 0$, pues en caso contrario, $A-A_n$ sería una cota superior de la sucesión $(A_m)_{m\in N}$ con $A-A_n < A$, en contra de ser A el supremo.

Por consiguiente $\mathcal{A}$ es de interpolación subsecuencial.

3.- Nota Hemos estimado conveniente incluir la demostración de que las álgebras de Boole de interpolación son de interpolación subsecuencial, directamente y sin pasar por el tipo intermedio de las que tienen la propiedad (f).

La demostración del teorema de Vitali-Hahn-Saks para las sucesiones de medidas complejas definidas en álgebras de Boole de interpolación subsecuencial, usa repetidas veces el siguiente lema. Es interesante notar que la parte de la tesis del mismo que es realmente usada, es válida para álgebras con una propiedad algo más débil que la interpolación subsecuencial, como la mencionada en la nota 14.

4.- Lema Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole de interpolación subsecuencial. Dados $\varepsilon > 0$, una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$ y una medida compleja μ definida en $\mathcal{A}$, finitamente aditiva y de variación acotada, existen un subconjunto infinito M de ω y un elemento A de $\mathcal{A}$, tales que $|\mu|(A) < \varepsilon$ y $A_n \leq A$ si $n\in M$, $A_n \wedge A = 0$ si $n\in \omega-M$.

Demostración:

Sea $(M_k)_{k\in\omega}$ una familia de partes de ω, infinitas y disjuntas.

Como por hipótesis $\mathcal{A}$ es de interpolación subsecuencial, para cada $k\in\omega$, existen un elemento B_k de $\mathcal{A}$ y un subconjunto infinito N_k de M_k tales que $B_k \geq A_n$ si $n\in N_k$ y $B_k \wedge A_n = 0$ si $n\in\omega-N_k$.

Sea $C_k = B_k - \bigvee\{ B_i : i < k \}$ para $k\in\omega$. Es claro que la sucesión $(C_k)_{k\in\omega}$ es disjunta.

Como la medida μ es finitamente aditiva y de variación acotada, se deduce que $\lim\limits_{k\to\infty} |\mu|(C_k) = 0$.

Sea $k\in\omega$ tal que $|\mu|(C_k) < \varepsilon$ y sean $A = C_k$ y $N = N_k$.

Dado $n\in N$, para todo $i < k$, $n\in\omega-N_i$, luego $A_n \leq B_k$ y $A_n\wedge B_i = 0$ si $i < k$, de donde se deduce que $A_n \leq C_k = A$.

Dado $n\in\omega-N$, como $A \leq B_k$ y $A_n\wedge B_k = 0$, se tiene que $A_n\wedge A = 0$. El lema queda pues completamente demostrado.

Podemos ya enunciar y demostrar el teorema anunciado:

5.- Teorema Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole de interpolación subsecuencial. Dada una sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ de medidas complejas, definidas en $\mathcal{A}$, finitamente aditivas y de variación acotada, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0 \qquad \text{para todo } A\in\mathcal{A},$$

la sucesión de medidas es uniformemente fuertemente aditiva, es decir, $\lim_{m\to\infty} \mu_n(A_m) = 0$ uniformemente en $n\in\omega$, cualquiera que sea la sucesión disjunta $(A_m)_{m\in\omega}$ en $\mathcal{A}$.

Demostración:

Razonando por reducción al absurdo, si se supone que $(\mu_n)_{n\in\omega}$ no es uniformemente fuertemente aditiva, se puede encontrar una subsucesión, denotada por comodidad igual que la sucesión, un número $\varepsilon > 0$, y una sucesión disjunta en $\mathcal{A}$, tales que

$$|\mu_n(A_n)| \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } n\in\omega.$$

Sea $n_0 = 0$. Por el lema anterior, existen $B_0\in\mathcal{A}$ y un subconjunto infinito N_0 de ω, tales que: $|\mu_{n_0}|(B_0) < \varepsilon/3$, $\min(N_0) > n_0$, $B_0 \geq A_n$ para todo $n\in N_0$, y $B_0\wedge A_n = 0$ si $n\in\omega-N_0$.

Por inducción, sea $k\in\omega$, y supongamos ya definidos $n_j\in\omega$, $N_j\subset\omega$ infinito, y $B_j\in\mathcal{A}$, para $j \leq k$, verificando las condiciones siguientes: $n_j\in N_{j-1}$, $B_{j-1} \geq B_j$, $n_j < \min(N_j)$, $N_{j-1}\supset N_j$, $B_j \wedge A_n = 0$ para $n\in\omega-N_j$, $B_j \geq A_n$ para $n\in N_j$, y tales que

$$|\mu_{n_j}|(B_{n_j}) < \varepsilon/3 \qquad , \qquad \sum_{i\leq j-1} |\mu_{n_j}(A_{n_i})| < \varepsilon/3$$

para todo $j \leq k$, y donde $N_{-1} = \omega$ y $B_{-1} = 1$.

Como $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$ cualquiera que sea $A\in\mathcal{A}$, y N_k es infi nito, existe $n_{k+1} \in N_k$ tal que $\sum_{i \leq k} |\mu_{n_{k+1}}(A_{n_i})| < \varepsilon/3$

Por el lema 4, existen un elemento B_{k+1} de $\mathcal{Q}$ y un subconjun to infinito N_{k+1} de N_k tales que $|\mu_{n_{k+1}}|(B_{k+1}) < \varepsilon/3$, $B_{k+1} \leq B_k$ $n_{k+1} < \min(N_{k+1})$, $B_{k+1} \geq A_n$ para $n \in N_{k+1}$ y $B_{k+1} \wedge A_n = 0$ para $n \in \omega - N_{k+1}$.

Se considera la siguiente familia de elementos de $\mathcal{Q}$:

A_{n_0} , A_{n_1} , ..., A_{n_k} , ...

$-(A_{n_0} \vee B_0)$, $B_0 - (A_{n_1} \vee B_1)$, ..., $B_{k-1} - (A_{n_k} \vee B_k)$, ...

Esta familia es disjunta. En efecto, si $j > k$, $n_j \in N_{j-1} \subset N_k$ y $A_{n_j} \leq B_k$, luego $A_{n_j} \wedge (B_{k-1} - (A_{n_k} \vee B_k)) = 0$, y como $j-1 \geq k$, $B_{j-1} \leq B_k$, luego $(B_{j-1} - (A_{n_j} \vee B_j)) \wedge (B_{k-1} - (A_{n_k} \vee B_k)) = 0$. Si $j < k$, $n_j \in \omega - N_j$ y $N_j \supset N_{k-1}$, luego $B_{k-1} \wedge A_{n_j} = 0$.

Como $\mathcal{Q}$ es de interpolación subsecuencial, existen un elemento A de $\mathcal{Q}$, y un subconjunto infinito M de ω , tales que $A_{n_k} \leq A$ si $k \in M$ $A_{n_k} \wedge A = 0$ si $k \in \omega - M$ y $A \wedge (B_{k-1} - (A_{n_k} \vee B_k)) = 0$ para todo $k \in \omega$.

Sea $k \in M$. Se tiene:

$$\mu_{n_k}(A) = \mu_{n_k}(A_{n_k}) + \mu_{n_k}(\bigvee \{A_{n_i} : i \in M, i < k\}) +$$
$$\mu_{n_k}(A - \bigvee \{A_{n_i} : i \in M, i \leq k\})$$

Por la construcción de A, se tiene $A \leq -(B_{i-1} - (A_{n_i} \vee B_i)) =$ $= (-B_{i-1}) \vee A_{n_i} \vee B_i$ para todo $i \leq k$.

Luego $A \leq (A_{n_0} \vee B_0) \wedge ((-B_0) \vee A_{n_1} \vee B_1) \wedge \ldots \wedge ((-B_{k-1}) \vee A_{n_k} \vee B_k)$.

Puede probarse por inducción que este último conjunto coincide con $A_{n_0} \vee A_{n_1} \vee \ldots \vee A_{n_k} \vee B_k$.

Por lo tanto $A - \bigvee\{ A_{n_i} : i \in M , i \leq k \} =$

$= A - \bigvee\{ A_{n_i} : i \leq k \} \leq B_k$ de donde

$|\mu_{n_k}(A - \bigvee\{ A_{n_i} : i \in M, i \leq k \})| \leq |\mu_{n_k}|(B_k) < \varepsilon/3$.

Así pues, $|\mu_{n_k}(A)| \geq |\mu_{n_k}(A_{n_k})| - \sum \{ |\mu_{n_k}(A_{n_i})| : i \in M, i<k\}$

$-|\mu_{n_k}(A - \bigvee\{ A_{n_i} : i \in M, i \leq k \})| \geq \varepsilon - \varepsilon/3 - \varepsilon/3 = \varepsilon/3$.

Como la desigualdad es válida para todo $k \in M$ y M es infinito, se ha llegado a una contradicción con $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$.

6.- Nota Es importante observar que la parte final de la demostración del teorema 5 requiere exactamente la interpolación subsecuencial, tanto en su aspecto de localización (dado $M \subset \omega$ infinito existe $N \subset M$ infinito ...) como en el de separar infinitos elementos de la sucesión disjunta del resto (y no sólo de otra infinidad).

Nuestro siguiente objetivo es mostrar un ejemplo de álgebra de Boole que sea de interpolación subsecuencial pero que no sea ni de interpolación ni subsecuencialmente completa. En primer lugar probamos un lema entresacado del artículo de R. Haydon [1981], que proporciona un método general de construcción de álgebras subsecuencialmente completas con propiedades especiales.

7.- Lema Sea $Q\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, cerrada para la unión. Si se cumplen:

(a) Existe $\mathcal{A}_0\in Q$ álgebra de Boole tal que $|\mathcal{A}_0| < 2^\omega$.

(b) Dado $\mathcal{A}\in Q$ álgebra de Boole con $|\mathcal{A}|< 2^\omega$, para toda $(A_n)_{n\in\omega}$ sucesión disjunta en $\mathcal{A}$, existe $M\subset\omega$ infinito tal que si $\mathcal{B}$ es el álgebra generada por $\bigcup\{A_n : n\in M\}$ y $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}\in Q$.

entonces, existe $\mathcal{A}\in Q$ que es un álgebra de Boole subsecuencialmente completa y contiene a $\mathcal{A}_0$.

Demostración:

Sólo se indica.

Sea $\rho: 2^\omega \longrightarrow 2^\omega \times 2^\omega$ una aplicación sobreyectiva y tal que $\rho(\gamma) = (\alpha,\xi)$ implica $\alpha < \gamma$. Por (a) existe $\mathcal{A}_0\in Q$ con $|\mathcal{A}_0| < 2^\omega$.

Por inducción transfinita, se supone $\gamma < 2^\omega$ y que si $\alpha < \gamma$, se ha definido ya $\mathcal{A}_\alpha\in Q$ álgebra de Boole con $|\mathcal{A}_\alpha| = \max(|\mathcal{A}_0|,|\alpha|)$ y de forma que $\alpha < \beta < \gamma$ implica $\mathcal{A}_\alpha\subset\mathcal{A}_\beta$, y que si $(A_n(\alpha,\xi))_{n\in\omega}$ $(\xi<2^\omega)$ es la familia de todas las sucesiones disjuntas de elementos de $\mathcal{A}_\alpha$ $(\alpha<\gamma)$, entonces $\rho(\beta) = (\alpha,\xi)$ implica que existe $M\subset\omega$ infinito tal que $\bigcup\{A_n(\alpha,\xi) : n\in M\}\in\mathcal{A}_\beta$.

Sea $\rho(\gamma) = (\alpha,\xi)$ y consideremos en el álgebra $\bigcup\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \gamma\}$ la sucesión disjunta $(A_n(\alpha,\xi))_{n\in\omega}$; por (b), existe $M\subset\omega$ infinito tal que si $\mathcal{A}_\gamma$ es el álgebra de Boole generada por $\bigcup\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \gamma\}$ y $\bigcup\{A_n(\alpha,\xi) : n\in M\}$, $\mathcal{A}_\gamma\in Q$.

Sea $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$. Es fácil ver que $\mathcal{A}\in Q$ y que es subsecuencialmente completa.

8.- Nota Si en la hipótesis (b) del lema anterior se supone que M está en una familia fija $\Sigma \subset \mathcal{P}(\omega)$, la tesis del lema puede cambiarse por esta otra: existe $\mathcal{Q} \in Q$ álgebra de Boole Σ-subsecuencialmente completa que contiene a $\mathcal{Q}_0$. (ver la definición 1 del capítulo II)

9.- Lema Sea $(M_n)_{n\in\omega}$ una sucesión disjunta de partes infinitas de ω cuya reunión es ω. Si $\mathcal{Q}$ es el álgebra de Boole de partes de ω, generada por esta sucesión y por las partes finitas de ω, entonces no existe $A \in \mathcal{Q}$ tal que los conjuntos $\{ n\in\omega : A\cap M_n$ es finito $\}$ y $\{ n\in\omega : M_n - A$ es finito $\}$ sean simultáneamente infinitos.

Demostración:

Si $\mathcal{B}$ es el álgebra generada por la sucesión $(M_n)_{n\in\omega}$, los elementos de $\mathcal{B}$ son de la forma $\bigcup \{ M_n : n\in N \}$ donde N es un subconjunto de ω finito o de complemento finito.

Sea $\mathcal{Q} = \{ A\subset\omega :$ existe $B\in\mathcal{B}$ verificando $B\Delta A$ es finito $\}$; es claro que $\mathcal{Q}$ es un álgebra de Boole, precisamente la generada por $\mathcal{B}$ y por las partes finitas de ω .

Dado $A\in\mathcal{Q}$, si el conjunto $\{ n\in\omega : M_n - A$ es finito $\}$ es infinito, y si $B\in\mathcal{B}$ verifica $B\Delta A$ es finito, entonces también es infinito el conjunto $\{ n\in\omega : M_n - B$ es finito $\}$; ahora bien, como $B = \bigcup \{M_n : n\in N \}$ con N finito o de complemento finito, se deduce que $\{ n\in\omega : M_n - B$ es finito $\}$ es de complemento finito. Luego es finito el conjunto $\{ n\in\omega : A\cap M_n$ es finito $\}$ puesto que coincide con $\{ n\in\omega : B\cap M_n$ es finito $\}$.

10.- Lema Sea $(M_n)_{n\in\omega}$ una sucesión disjunta de partes infinitas de ω cuya reunión es ω. Si $\mathcal{Q}\subset\mathcal{P}(\omega)$ es un álgebra de Boole tal que

$|\mathcal{A}| < 2^{\omega}$ y no existe $A \in \mathcal{A}$ verificando que $A \cap M_n$ es finito si n es impar y $M_n - A$ es finito si n es par, entonces dada una sucesión disjunta $(A_m)_{m \in \omega}$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe un subconjunto infinito M de ω, tal que si B es cualquier elemento del álgebra generada por $\mathcal{A}$ y por $\bigcup\{A_m : m \in M\}$, no se cumplen simultáneamente

$M_n \cap B$ finito si n es impar y $M_n - B$ finito si n es par.

Demostración:

Sea $\Sigma \subset \mathcal{P}(\omega)$, $|\Sigma| = 2^{\omega}$, formada por elementos infinitos y casi-disjuntos (ver K. Kuratowski y A. Mostowski [1976, ejerc. 1.5.5]) Supongamos que para todo $M \in \Sigma$ existe B_M en el álgebra $\mathcal{B}_M$ generada por $\mathcal{A}$ y por $\bigcup\{A_m : m \in M\}$, cumpliendo que

$B_M \cap M_n$ es finito si n es impar y $M_n - B_M$ es finito si n es par.

Es fácil comprobar que los elementos de $\mathcal{B}_M$ pueden expresarse en la forma $A \cup (A' \cap A_M) \cup (A'' - A_M)$, donde A, A' y A'' son elementos disjuntos de $\mathcal{A}$, y hemos denotado por A_M a $\bigcup\{A_m : m \in M\}$(lo que continuaremos haciendo en el resto de la prueba para $M \subset \omega$ arbitrario).

Como el cardinal de Σ es 2^{ω} y el de $\mathcal{A}$ es menor estrictamente, deben de existir M, N en Σ, $M \neq N$, tales que

$B_M = A \cup (A' \cap A_M) \cup (A'' - A_M)$ y $B_N = A \cup (A' \cap A_N) \cup (A'' - A_N)$

para los mismos A, A' y A'' elementos disjuntos de $\mathcal{A}$.

Sea $B = A \cup (A' \cap A_{N \cap M}) \cup (A'' - A_{N \cap M})$. Como $M \cap N$ es finito, B es un elemento de $\mathcal{A}$. Por otra parte se tiene que

$$B_M \cap B_N \subset B \subset B_M \cup B_N$$

de donde se deduce que $B \cap M_n$ es finito si n es impar y que $M_n - B$ es finito si n es par, lo que está en contradicción con la hipótesis hecha sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

11.- Corolario Existe una subálgebra de Boole de $\mathcal{P}(\omega)$ que es subsecuencialmente completa, contiene a las partes finitas de ω, a los elementos de una sucesión $(M_n)_{n\in\omega}$ de partes infinitas y disjuntas de ω cuya reunión es ω, y tal que no existe $A\in\mathcal{A}$ verificando simultáneamente que $M_n - A$ es finito si n es par y que $M_n \cap A$ es finito si n es impar.

Demostración: Sea $(M_n)_{n\in\omega}$ una sucesión como en el enunciado.

Sea $Q\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ definida por "$\mathcal{A}\in Q$ si y sólo si $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\omega)$ y no existe $A\in\mathcal{A}$ verificando simultáneamente que $M_n - A$ es finito si n es par y que $M_n\cap A$ es finito si n es impar".

Por los lemas 9 y 10, Q está en las condiciones del lema 7.

Así pues, existe un elemento $\mathcal{A}$ de Q que es un álgebra de Boole subsecuencialmente completa y contiene las partes finitas de ω (porque el álgebra $\mathcal{A}_0$ que da el lema 9 las contiene).

12.- Teorema Existe un álgebra de Boole de interpolación subsecuencial que no es ni subsecuencialmente completa ni de interpolación.

Demostración:

Sea $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\omega)$ el álgebra de Boole descrita en el corolario 11, y sea $\mathcal{B}$ el álgebra de Boole cociente de $\mathcal{A}$ por el ideal de las partes finitas de ω.

En primer lugar $\mathcal{B}$ es de interpolación subsecuencial. (puede verse que en general, todo cociente de un álgebra de Boole de interpolación subsecuencial también lo es). En efecto, sea $(B_i)_{i\in\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{B}$; sea $C_i\in B_i$ y sea $A_i = C_i - \bigcup\{C_j : j < i\}$ para cada $i\in\omega$. Como $(B_i)_{i\in\omega}$ es disjunta en $\mathcal{B}$, $C_i\cap C_j$ es finito para $i \neq j$. Luego también $A_i \in B_i$ para todo $i \in \omega$. Como la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$ es disjunta y $\mathcal{A}$ es subsecuencialmente completa, dado $M \subset \omega$ infinito, existen un elemento A de $\mathcal{A}$ y un subconjunto infinito N de M tales que $A_i \subset A$ si $i \in N$ y $A_i \cap A = \emptyset$ si $i \in \omega - N$ (A es el supremo en $\mathcal{A}$ de la familia $(A_i)_{i\in N}$). Sea B la clase del elemento A. Es claro que $B_i \leq B$ si $i \in N$ y que $B_i \wedge B = 0$ si $i \in \omega - N$.

En segundo lugar observemos que la sucesión $(B_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{B}$ definida por ser B_n la clase de M_n para todo $n \in \omega$, es disjunta porque lo es la sucesión $(M_n)_{n\in\omega}$, pero no pueden ser separados sus términos pares de los impares. En efecto, si existiera un elemento B de $\mathcal{B}$, tal que $B_n \leq B$ si n es par y $B_n \wedge B = 0$ si n es impar, un representante A de la clase B verificaría $M_n - A$ es finito si n es par y $M_n \cap A$ es finito si n es impar, contradicción pues $A \in \mathcal{A}$. Luego $\mathcal{A}$ no es de interpolación.

Veamos por último que $\mathcal{B}$ no es subsecuencialmente completa. En efecto, ninguna subsucesión infinita de la sucesión disjunta $(B_n)_{n\in\omega}$ admite supremo en $\mathcal{B}$, donde como antes, B_n es la clase de M_n. Supongamos lo contrario, es decir, que para un $M \subset \omega$ infinito existe $B = \bigvee \{ B_n : n \in M \}$; sea A un representante de B, y para cada $n \in M$ sea m_n un elemento de $M_n \cap A$ (que existe puesto que $B_n \leq B$). Como la sucesión $(\{m_n\})_{n\in M}$ es de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es subsecuencialmente completa, existe $N \subset M$ infinito para el que $(\{m_n\})_{n\in N}$ tiene supremo en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ contiene los conjuntos unitarios es claro que ese supremo es $C = \{ m_n : n \in N \}$. $A - C \in \mathcal{A}$ y dado que $A - (A - C) = A \cap C = C$ es infinito, la clase de A-C es estrictamente menor que la de A, es decir, que B. Sin embargo la clase de A-C es también una cota superior de la sucesión $(B_n)_{n\in M}$ puesto que $M_n - (A - C) = (M_n - A) \cup (M_n \cap C)$, que cuando $n \in N$ coincide con $(M_n - A) \cup \{m_n\}$ y cuando $n \in M - N$ con $M_n - A$, siendo finito en ambos casos. Luego B no puede ser el supremo.

13.- Ejemplo Existe un álgebra subsecuencialmente completa que no posee la propiedad (f).

Consideremos el álgebra de Boole $\mathcal{A}$, subálgebra de $\mathcal{P}(\omega)$, que R, Haydon [1981] construye. Es subsecuencialmente completa y verifica que la traza de $\mathcal{A}$ sobre cualquier subconjunto infinito M de ω no coincide con $\mathcal{P}(M)$. Si $\mathcal{A}$ tuviera la propiedad (f), considerando las sucesiones $(\{n\})_{n\in\omega}$ y $(A_n)_{n\in\omega}$ con $A_n = \emptyset$ para todo $n\in\omega$, se obtendría un subconjunto infinito M de ω, tal que para todo $N \subset M$ existe $A_N \in \mathcal{A}$ tal que $N \subset A_N$ y $A_N \cap (M - N) = \emptyset$. Por tanto $A_N \cap M = N$ y $\mathcal{P}(M) = \{ A\cap M : A \in \mathcal{A}\}$.

14.- Nota Observemos que un debilitamiento de la hipótesis de interpolación subsecuencial puede hacer que no se cumpla el teorema de Vitali-Hahn-Saks.

Sea N un conjunto numerable y $h:\omega \longrightarrow N$ una aplicación biyectiva. J. R. Isbell y Z. Semadeni [1963, pág. 44, prop. 1] consideran el espacio topológico compacto y Hausdorff totalmente disconexo S, obtenido al identificar en la suma topológica disjunta $\beta\omega \sqcup \beta N$ cada $n\in\omega$ con su homólogo h(n). Puede verse que si

$\mathcal{A} = \{A \subset \omega \cup N$: existe $B \subset \omega$ tal que $A \Delta (B \cup h(B))$ es finito $\}$

entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole isomorfa al álgebra de abiertos y cerrados de S.

Este álgebra posee la siguiente propiedad de separación: dada una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, y dados M_1 y M_2 subconjuntos infinitos y disjuntos de ω , existen $M_1'\subset M_1$ y $N_1'\subset N_1$ infinitos y un elemento A de $\mathcal{A}$, verificando $A_n\subset A$ si $n\in M_1'$ y $A_n\cap A=\emptyset$ si $n\in N_1'$.

Sin embargo no se cumple en $\mathcal{A}$ el teorema de Nikodým, que es condición necesaria para que se cumpla el de Vitali-Hahn-Saks (ver W. Schachermayer [1978]).

Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff, $\mathcal{B}$ la colección de los conjuntos de Borel de K, y $\mathcal{M}(K)$ el espacio de las medidas complejas de Borel regulares en K. En N. Dunford y J. Schwartz [1964, pág. 308] se demuestra que si $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{M}(K)$, es débilmente convergente si y sólo si para todo $B\in\mathcal{B}$, la sucesión $(\mu_n(B))_{n\in\omega}$ es convergente. A. Grothendieck [1953, pág. 150], demuestra que una sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{M}(K)$ es débilmente convergente si y sólo si la sucesión $(\mu_n(U))_{n\in\omega}$ es convergente, para todo abierto U de K. Nosotros vemos ahora algunas condiciones suficientes sobre un álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos de Borel de K que garanticen que la convergencia de $(\mu_n(A))_{n\in\omega}$ para todo $A\in\mathcal{A}$ implica la convergencia débil de $(\mu_n)_{n\in\omega}$.

15.- <u>Proposición</u> Sean K, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{M}(K)$ como en el párrafo anterior. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de Boole de $\mathcal{B}$, que es de interpolación subsecuencial y tal que, dados dos subconjuntos F y U de K, F cerra do y U abierto, con $F\subset U$, existe $A\in\mathcal{A}$, con $F\subset A\subset U$, entonces, para cualquier sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{M}(K)$,

(1) Si $\sup_{n\in\omega} |\mu_n(A)| < +\infty$ para todo $A\in\mathcal{A}$, $\sup_{n\in\omega} |\mu_n|(K) < +\infty$

(2) Si la sucesión $(\mu_n(A))_{n\in\omega}$ es convergente para todo $A\in\mathcal{A}$, la sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es débilmente convergente.

Demostración:

Vemos en primer lugar que si $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$ para todo $A\in\mathcal{A}$, entonces $\{\mu_n : n\in\omega\}$ es débilmente relativamente compacto. En efecto, si denotamos por ν_n la restricción de μ_n al álgebra $\mathcal{A}$, obtenemos que $(\nu_n(A))_{n\in\omega}$ es convergente a cero para todo $A\in\mathcal{A}$, y como $\mathcal{A}$ es de interpolación subsecuencial, $(\nu_n)_{n\in\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva, según nuestro teorema 5. Si $\{\mu_n : n\in\omega\}$ no fuera débilmente relativamente compacto, por la caracterización de Grothendieck de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $\mathcal{M}(K)$ (A. Grothendieck [1953, pág. 146, th. 2]), y pasando a subsucesión si fuera necesario, existiría una sucesión disjunta $(U_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos abiertos de K y un número positivo ε, tales que $|\mu_n(U_n)| > \varepsilon$ para todo $n\in\omega$. Sea $F_n\subset U_n$ cerrado tal que $|\mu_n|(U_n - F_n) < \varepsilon/2$, y sea $A_n\in\mathcal{A}$ tal que $F_n\subset A_n\subset U_n$. Dado que

$|\mu_n(A_n)| + |\mu_n(U_n - A_n)| \geq |\mu_n(U_n)|$ y $|\mu_n(U_n - A_n)| \leq |\mu_n|(U_n - F_n) < \varepsilon/2$, ha de ser $|\mu_n(A_n)| = |\nu_n(A_n)| > \varepsilon/2$, y esto para todo $n\in\omega$ contradice que $(\nu_n)_{n\in\omega}$ sea uniformemente fuertemente aditiva.

Así pues, la sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ debe de tener algún punto adherente débilmente. Si μ es un tal punto adherente, obviamente $\mu(A) = 0$ para todo $A\in\mathcal{A}$, de donde por la regularidad de μ y la hi pótesis sobre $\mathcal{Q}$, $\mu = 0$. Por tanto el único punto débilmente adherente de la sucesión es el cero, y debe de converger débilmente a él.

Vemos ahora (1). Si bien se podría deducir del hecho de que en un álgebra de interpolación subsecuencial se cumple el teorema de Nikodým, puesto que se cumple el de Vitali-Hahn-Saks, hemos preferido probarlo directamente. Sea $\sup_{n\in\omega} |\mu_n(A)| < +\infty$ para todo $A \in \mathcal{Q}$ y supongamos que $\sup_{n\in\omega}|\mu_n|(K) = +\infty$; pasando a subsucesión si es necesario, se puede suponer que $\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(K) = +\infty$. Sea ahora $\nu_n = |\mu_n|(K)^{-1/2}\mu_n$; se tiene que $\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = 0$ para todo $A\in\mathcal{Q}$, pero $(\nu_n)_{n\in\omega}$ no puede converger débilmente porque no es acotada ya que $|\nu_n|(K) = |\mu_n|(K)^{1/2}$.

Por último vemos (2). Supongamos que $(\mu_n(A))_{n\in\omega}$ es convergente para todo $A\in\mathcal{Q}$; razonando como al principio de la demostración, es claro que es suficiente probar que $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva. Si no, pasando a subsucesión si es necesario, y por regularidad, obtendríamos que $|\mu_n(A_n)|>\varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$, y para una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{Q}$. Como $\sup_{n\in\omega}|\mu_n|(K) < +\infty$, por (1), según el lema de Rosenthal (J. Diestel y J. J. Uhl [1977]), existe una subsucesión, denotada igual que la sucesión por comodidad, verificando $|\mu_n|(\bigcup \{ A_m : m\in\omega, m \neq n \}) < \varepsilon/2$ para todo $n\in\omega$.

Si $\nu_n = \mu_n - \mu_{n+1}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = 0$ para todo $A\in\mathcal{Q}$, pero $|\nu_n(A_n)| \geq |\mu_n(A_n)| - |\mu_{n+1}(A_n)| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$, contradicción.

16.- <u>Nota</u> Este resultado está en la línea de uno de B. B. Wells [1969, th. 3]. Si el compacto K es totalmente disconexo, y dado que existen álgebras de interpolación subsecuencial que no son de interpolación, nuestra proposición 15 no es consecuencia del teorema de Wells.

Observemos por último que lo que se ha necesitado realmente en la demostración de la proposición 15, es que se verifique en el álgebra de Boole $\mathcal{A}$, el teorema de Nikodým para probar (1), y el de Vitali-Hahn-Saks para probar (2).

C A P I T U L O II

ALGEBRAS DE BOOLE Σ-SUBSECUENCIALMENTE COMPLETAS

Abordamos en este capítulo el problema de si todo álgebra de Boole de interpolación subsecuencial puede expresarse como cociente por un ideal de un álgebra de Boole subsecuencialmente completa. El motivo del problema es el siguiente: el ejemplo mostrado en el teorema 12 del primer capítulo, de un álgebra de interpolación subsecuencial que no es subsecuencialmente completa, aparece así definido. Esta cuestión es resuelta parcialmente, modificando la construcción de E. K. van Douwen y J. van Mill [1980]; se consigue en particular extender el teorema probado en ese artículo a una clase de álgebras de Boole más amplia que la de las numerablemente completas, y que es definida en este capítulo.

Estudiamos asímismo propiedades de esta clase de álgebras, situadas entre las numerablemente completas y las subsecuencialmente completas. Resaltamos un teorema extensión de un resultado de J. Diestel y B. T. Faires (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág 20]), para las álgebras de Boole que hemos llamado finitamente subsecuencialmen te completas.

Por último, y como muestra del interés que puede tener la clase de álgebras de Boole aquí introducidas, son resueltos algunos problemas de S. Ulam sobre el número de subálgebras de Boole no isomorfas de un conjunto de partes, problemas que aparecen planteados en D. R. Mauldin [1981, prob. 37].

1.- Definición Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito y sea Σ una familia no vacía de partes infinitas de $\mathfrak{m}$. Diremos que un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa cuando para toda familia $(A_m)_{m\in\mathfrak{m}}$ disjunta en $\mathcal{A}$, existe $M\in\Sigma$, tal que la subfamilia $(A_m)_{m\in M}$ admite supremo en $\mathcal{A}$.

2.- Notas

(1) La hipótesis sobre la familia Σ de que todos sus elementos sean infinitos está motivada por el hecho inmediato de que si alguno de ellos fuera finito, todo álgebra de Boole sería Σ-subsecuencialmente completa.

(2) Si $\mathfrak{m} = \omega$, y la familia Σ es la colección de todas las partes infinitas de ω, la definición de Σ-subsecuencialmente completa coincide con la de subsecuencialmente completa.

Precisamente el caso más importante para nuestro estudio será cuando $\mathfrak{m} = \omega$; no obstante, como ello no aumenta la dificultad en las demostraciones, algunos resultados los mostramos en su forma general.

(3) Conviene observar que en la definición 1 es suficiente considerar familias $(A_m)_{m\in\mathfrak{n}}$ siendo $\mathfrak{n} = \bigcup\Sigma$; en efecto, basta completar con ce

ros hasta tener una familia indicada en m .

(4) Nos restringiremos la mayoría de las veces a familias Σ que sean κ-casi-disjuntas, donde κ es un cardinal infinito, en el sentido de la definición que aparece en W. W. Comfort y S. Negrepontis [1974, pág. 286].

En realidad no sabemos si esto supone restricción; en efecto, todas las álgebras de Boole Σ-subsecuencialmente completas que conocemos son Δ-subsecuencialmente completas, para alguna familia Δ casi-disjunta adecuada (para $m = \omega$).

3.- <u>Lema</u> Sea m un cardinal infinito y sean Σ y Δ familias de partes infinitas de m, con $|\Sigma| = |\Delta| = \kappa$, donde κ es un cardinal regular (respectivamente, finito), y supongamos además que Σ y Δ son κ-casi-disjuntas (respectivamente, casi-disjuntas).

Dadas dos sucesiones transfinitas $(M_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ y $(N_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de los elementos de Σ y Δ respectivamente, de manera que $|M_\alpha| = |N_\alpha|$ para todo $\alpha<\kappa$, existe una aplicación biyectiva τ de $\bigcup \Sigma$ en $\bigcup \Delta$, tal que $|\tau(M_\alpha) \Delta N_\alpha| < \kappa$ para todo $\alpha<\kappa$ (respectivamente, $\tau(M_\alpha) \Delta N_\alpha$ es finito para todo $\alpha<\kappa$).

Demostración:

Supongo que κ es regular.

Se tiene $\bigcup \Sigma = \bigcup \{ M_\alpha - \bigcup\{M_\beta : \beta<\alpha\} : \alpha<\kappa \}$

y $\bigcup \Delta = \bigcup \{ N_\alpha - \bigcup\{N_\beta : \beta<\alpha\} : \alpha<\kappa \}$.

Dado $\alpha<\kappa$, $|\bigcup\{ M_\beta \cap M_\alpha : \beta<\alpha \}| \leq \sum \{ |M_\beta \cap M_\alpha| : \beta<\alpha \} < \kappa$ porque κ es regular y $|M_\alpha \cap M_\beta| < \kappa$. Luego $|\bigcup \{ M_\beta \cap M_\alpha : \beta<\alpha \}| < |M_\alpha|$. Como M_α es infinito,

$|M_\alpha - \bigcup\{ M_\beta : \beta<\alpha \}| = |M_\alpha - \bigcup\{ M_\beta \cap M_\alpha : \beta<\alpha \}| = |M_\alpha|.$

Por simetría, $|N_\alpha - \bigcup\{ N_\beta : \beta<\alpha \}| = |N_\alpha|.$

Existe por tanto una aplicación biyectiva τ_α de $M_\alpha - \bigcup\{ M_\beta : \beta<\alpha \}$ en $N_\alpha - \bigcup\{ N_\beta : \beta<\alpha \}$.

Sea τ la aplicación de $\bigcup \Sigma$ en $\bigcup \Delta$ definida de forma que para cada $\alpha<\kappa$, su restricción a $M_\alpha - \bigcup\{ M_\beta : \beta<\alpha \}$ coincida con la aplicación τ_α. Por construcción τ es biyectiva.

Además, si $\alpha<\kappa$, $\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha = (\tau(M_\alpha) - N_\alpha) \cup (N_\alpha - \tau(M_\alpha)) \subset$ $\subset \tau(\bigcup\{ M_\beta \cap M_\alpha : \beta<\alpha \}) \cup \{ N_\beta \cap N_\alpha : \beta<\alpha \}$, lo que implica que $|\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha| < \kappa$.

Si el cardinal κ es finito un razonamiento totalmente análogo completa la prueba del lema.

Si en el lema anterior $\kappa = \mathfrak{m}$, la aplicación τ puede ser construida de modo que sea una permutación de $\mathfrak{m}$, como se prueba en el siguiente lema:

4.- <u>Lema</u> Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal regular y sean Σ y Δ familias de partes de $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$-casi-disjuntas, con $|\Sigma| = |\Delta| = \mathfrak{m}$.

Dadas dos sucesiones transfinitas $(M_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{m}}$ y $(N_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{m}}$ de los elementos de Σ y Δ respectivamente, existe una aplicación biyectiva τ de $\mathfrak{m}$ en sí mismo tal que $|\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha| < \mathfrak{m}$, para todo $\alpha<\mathfrak{m}$.

Demostración:

Como Σ y Δ son $\mathfrak{m}$-casi-disjuntas, $|M_\alpha| = |M_\alpha| = \mathfrak{m}$ para todo $\alpha<\mathfrak{m}$.

Sea $\kappa_1 = |m - \bigcup\Sigma|$ y $\kappa_2 = |m - \bigcup\Delta|$; $\kappa_i \leq m$ para $i = 1, 2$.

Sean $(m_\alpha)_{\alpha<\kappa_1}$ y $(n_\alpha)_{\alpha<\kappa_2}$ sucesiones transfinitas de los elementos de $m - \bigcup\Sigma$ y $m - \bigcup\Delta$ respectivamente.

Sea $\alpha<m$; si $\alpha<\kappa_1$ definimos $M'_\alpha = M_\alpha \cup \{m_\alpha\}$ y si $\alpha\geq\kappa_1$, $M'_\alpha = M_\alpha$. De igual forma definimos $N'_\alpha = N_\alpha \cup \{n_\alpha\}$ o $N'_\alpha = N_\alpha$ según que $\alpha<\kappa_2$ o que $\alpha\geq\kappa_2$.

Sean $\Sigma' = \{ M'_\alpha : \alpha<m \}$ y $\Delta' = \{ N'_\alpha : \alpha<m \}$. Es claro que Σ' y Δ' son familias m-casi-disjuntas en las condiciones del lema 3, por lo que existe una aplicación biyectiva τ de $\bigcup\Sigma'$ en $\bigcup\Delta'$ tal que $|\tau(M'_\alpha)\Delta N'_\alpha| < m$ para todo $\alpha<m$.

Ahora bien, $\bigcup\Sigma' = \bigcup\Delta' = m$ por construcción, y
$\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha = (\tau(M_\alpha) - N_\alpha)\cup(N_\alpha - \tau(M_\alpha)) \subset (\tau(M'_\alpha) - N_\alpha)\Delta(N'_\alpha - \tau(M_\alpha))$
luego $|\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha| \leq |\tau(M'_\alpha)\Delta N'_\alpha| + 2 < m + 2 = m$.

5.- <u>Corolario</u> Dadas dos familias Σ y Δ de partes infinitas de ω , casi-disjuntas y con $|\Sigma| = |\Delta| = \omega$, fijadas dos sucesiones $(M_n)_{n\in\omega}$ y $(N_n)_{n\in\omega}$ de los elementos de Σ y Δ respectivamente, existe una aplicación biyectiva τ de ω en sí mismo, tal que $\tau(M_n)\Delta N_n$ es finito para todo $n\in\omega$.

Demostración: ω es regular.

6.- <u>Nota</u> Cabe preguntarse qué ocurrirá en el corolario 5 si se sustituye la hipótesis $|\Sigma| = |\Delta| = \omega$ por otra distinta. Si se suponen Σ y Δ finitas y de igual cardinal, el resultado es falso, como lo prueban las familias casi-disjuntas $\Sigma = \{M_0, M_1\}$ y $\Delta = \{N_0, N_1\}$, donde $M_0 = \{ n\in\omega : n \text{ es par} \}$, $M_1 = \omega - M_0$, $N_0 = M_0$ y

$N_1 = \{ n \in \omega : n$ es múltiplo impar de tres $\}$, y sólo puede conseguirse la biyección τ de $\bigcup\Sigma$ en $\bigcup\Delta$. En el caso infinito, la respuesta para $|\Sigma| = |\Delta| > \omega$ es también negativa, como vemos en el siguiente ejemplo, bajo ciertas hipótesis:

7.- <u>Ejemplo</u> Supongamos que κ es un cardinal, $\kappa \leq 2^{\omega}$ y $2^{\kappa} > 2^{\omega}$.

Sea Σ una familia de partes infinitas de ω, casi-disjunta, y con $|\Sigma| = 2^{\omega}$, y sea $\mathcal{B} = \{ \Delta \subset \Sigma : |\Delta| = \kappa \}$.

Si Δ_1 y Δ_2 son dos elementos de $\mathcal{B}$ y τ es una permutación de ω, escribiremos $\Delta_1 \overset{\tau}{\sim} \Delta_2$ cuando para todo $M \in \Delta_1$ exista $N \in \Delta_2$ tal que $\tau(M) \Delta N$ es finito, y la aplicación de Δ_1 en Δ_2 que corresponde M con N sea biyectiva.

Escribiremos $\Delta_1 \sim \Delta_2$ cuando exista una permutación τ de ω tal que $\Delta_1 \overset{\tau}{\sim} \Delta_2$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{B}$.

Cada clase de equivalencia tiene cardinal menor o igual que el del continuo; en efecto, si no fuera así, existiría un elemento Δ en $\mathcal{B}$, tal que en su clase podríamos encontrar dos elementos distintos Δ_1 y Δ_2, tales que $\Delta \overset{\tau}{\sim} \Delta_1$ y $\Delta \overset{\tau}{\sim} \Delta_2$ para la misma permutación τ de ω (el conjunto de las permutaciones de ω tiene cardinal 2^{ω}).

Sean ϕ y ψ las aplicaciones biyectivas de Δ en Δ_1 y de Δ en Δ_2, inducidas por la permutación τ, respectivamente.

Dado $N_1 \in \Delta_1$, si $N = \phi^{-1}(N_1)$, entonces, por definición de ϕ, $\tau(N) \Delta N_1$ es finito. Por análoga razón, también es finito el conjunto $\tau(N) \Delta \psi(N)$; de aquí que sea finito $N_1 \Delta \psi(\phi^{-1}(N_1))$.

Como Σ es casi-disjunta y tanto Δ_1 como Δ_2 son subconjuntos de Σ, se obtiene que $N_1 = \psi(\phi^{-1}(N_1))$.

Por consiguiente, $\psi\phi^{-1}$ es la identidad sobre Δ_1, y $\Delta_1 = \Delta_2$.

Dado que $|\mathcal{C}| = (2^{\omega})^{\kappa} = 2^{\kappa}$, y que $2^{\kappa} > 2^{\omega}$ por hipótesis, existirán dos clases distintas en el conjunto cociente $\mathcal{C}/\sim$, o lo que es lo mismo, dos elementos de $\mathcal{C}$ no equivalentes. Es obvio que para estos dos elementos no se verifica el resultado análogo del corolario 5.

En el ejemplo anterior, si $\kappa = 2^{\omega}$, la hipótesis $2^{\kappa} > 2^{\omega}$ se cumple automáticamente. Se sabe que $2^{\kappa} > 2^{\omega}$ es consistente con los axiomas habituales de la teoría de conjuntos, cuando $\kappa = \omega_1$, y también con $\omega_1 < 2^{\omega}$.

Si $\omega < \kappa < 2^{\omega}$, y se supone el axioma de Martin (A. Levy [1979]), $2^{\omega} = 2^{\kappa}$, por lo que la construcción del ejemplo 7 no es válida en estas hipótesis; bajo dicho axioma no conocemos la validez del corolario 5 para los cardinales intermedios.

8.- <u>Proposición</u> Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito y sean Σ y Δ familias casi-disjuntas de partes infinitas de $\mathfrak{m}$, con $|\Sigma| = |\Delta| = \kappa$; entonces, si $\kappa \leq \omega$, y existen dos sucesiones $(M_{\alpha})_{\alpha<\kappa}$ y $(N_{\alpha})_{\alpha<\kappa}$ de los elementos de Σ y Δ respectivamente, tales que $|M_{\alpha}| = |N_{\alpha}|$ para todo $\alpha < \kappa$, entonces un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa si y sólo si es Δ-subsecuencialmente completa.

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa.

Si κ es finito, por el lema 3, existe una aplicación biyectiva τ de $\bigcup\Sigma$ en $\bigcup\Delta$, tal que $\tau(M_{\alpha})\Delta N_{\alpha}$ es finito para todo $\alpha<\kappa$. Dada una familia disjunta $(A_m)_{m<\mathfrak{m}}$ de elementos de $\mathcal{A}$, definimos $B_n = 0$ si $n\in\mathfrak{m} - \bigcup\Sigma$, y $B_n = A_{\tau(n)}$ si $n\in\bigcup\Sigma$.

Como $(B_n)_{n<\mathfrak{m}}$ es disjunta y $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa, existe $\alpha<\kappa$ tal que la subfamilia $(B_n)_{n\in M_{\alpha}}$ admite supremo en $\mathcal{A}$. Luego también tiene supremo en $\mathcal{A}$, la familia $(A_{\tau(n)})_{n\in M_{\alpha}}$

y como $\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha$ es finito, existe en $\mathcal{A}$ el supremo de $(A_n)_{n\in N_\alpha}$ de donde $\mathcal{A}$ es Δ-subsecuencialmente completa.

Si estamos en el segundo caso, $\kappa = \omega$, existe una permutación τ de m tal que $\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha$ es finito para todo $\alpha<\kappa$. Dada una familia disjunta $(A_n)_{n<m}$ en $\mathcal{A}$, consideramos $B_n = A_{\tau(n)}$ para $n<m$. Como $(B_n)_{n<m}$ es disjunta y $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa, existe $\alpha<\kappa$ tal que la subfamilia $(B_n)_{n\in M_\alpha}$ tiene supremo en $\mathcal{A}$. Es decir $(A_{\tau(n)})_{n\in M_\alpha}$ tiene supremo en $\mathcal{A}$, y dado que $\tau(M_\alpha)\Delta N_\alpha$ es finito, también tiene supremo $(A_n)_{n\in N_\alpha}$. Luego $\mathcal{A}$ es Δ-subsecuencialmente completa.

9.- Nota Si se supone que para cada $(A_n)_{n<\kappa}$ en $\mathcal{A}$ disjunta, existe el supremo de $(A_n)_{n<\kappa}$ (o sea, que $\mathcal{A}$ es κ^+-completa según la definición de W. W. Comfort y S. Negrepontis [1974]), la misma demostración de la proposición 8 sirve para probar que en (1) se puede evitar la restricción $\kappa \leq \omega$, imponiendo que Σ y Δ sean κ-casi-disjuntas y κ regular.

10.- Definición Sea $1 \leq \kappa \leq 2^\omega$, κ un cardinal. Un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ se dice κ-subsecuencialmente completa cuando para toda familia Σ de partes infinitas de ω, casi disjunta, y con $|\Sigma| = \kappa$, $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa.

Diremos que $\mathcal{A}$ es finitamente subsecuencialmente completa cuando sea κ-subsecuencialmente completa para un $\kappa < \omega$.

11.- Nota Si $\kappa \leq \omega$, la definición 10 equivale a esta otra: diremos que un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es κ-subsecuencialmente completa cuando existe una familia Σ de partes infinitas de ω, casi-disjunta, con $|\Sigma| = \kappa$, tal que $\mathcal{A}$ es Σ-subsecuencialmente completa. En efecto, basta aplicar la proposición 8.

12.- Ejemplos

(1) Las álgebras de Boole 1-subsecuencialmente completas son precisamente las numerablemente completas.

(2) Las álgebras de Boole κ-subsecuencialmente completas con κ finito, son aquéllas en las que al agrupar cualquier sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en κ partes infinitas y disjuntas de ω, existe el supremo de la subsucesión correspondiente a una al menos de las partes.

(3) Las álgebras de Boole 2-subsecuencialmente completas son de interpolación; en efecto, dadas $(A_n)_{n\in\omega}$ y $(B_n)_{n\in\omega}$ disjuntas y tales que $A_n \wedge B_m = 0$ para todos $n, m \in \omega$, existe el supremo de una de las dos sucesiones; es claro que ese supremo A verifica que $A_n \wedge A = 0$ y $B_n \leq A$ para todo $n \in \omega$ (si es el de la sucesión $(B_n)_{n\in\omega}$).

Nuestro propósito ahora es construir un álgebra de Boole de interpolación, que no se pueda expresar como cociente de un álgebra κ-subsecuencialmente completa, para todo $\kappa \leq \omega$.

13.- Lema Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff, totalmente disconexo, F-espacio, y supongamos que el álgebra de Boole de cerrados y abiertos de K es Σ-subsecuencialmente completa, para una familia Σ de partes infinitas de ω.

Dado un subconjunto numerable $\{ x_n : n\in\omega \}$ de K en el que K in duce la topología discreta, existe $M \in \Sigma$ y existe una aplicación continua f de K en el cierre de $\{ x_n : n \in M \}$ tales que $f(x_n) = x_n$ para todo $n \in M$.

Demostración:

Sea $(A_n)_{n \in \omega}$ una sucesión disjunta de abiertos y cerrados de K tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \omega$. Como el álgebra de abiertos y cerrados de K es Σ-subsecuencialmente completa, existe $M \in \Sigma$ tal que si A es la unión de $\{ A_n : n \in M \}$, entonces $\bar{A}$ es abierto y cerrado de K.

Como la función $\sum_{n \in M} 2^{-n} \chi_{A_n}$ es continua y se anula exactamente en $K - A$, A es un cocero de K; luego A está C^*-sumergido en K (ver L. Gillman y M. Jerison [1960, pág. 208, 14.25.]).

Dado que $\bar{A}$ es una compactificación de A, la aplicación continua f de A en $\bar{B}$ definida porque su restricción a cada A_n es constante e igual a x_n, para todo $n \in M$, puede prolongarse de manera única a una aplicación continua, también denotada f, de $\bar{A}$ en $\bar{B}$ (ver R. C. Walker [1974, pág. 25, 1.46.]), donde $B = \{ x_n : n \in M \}$.

Por último, como $\bar{A}$ es abierto y cerrado en K, la aplicación f puede ser prolongada a todo K de manera continua, definiéndola en $K - \bar{A}$ constante e igual a un x_n, $n \in M$.

14.- <u>Nota</u> La hipótesis de ser K un F-espacio es esencial en el lema anterior. En efecto, sea K el espacio de Stone del álgebra de Boole Σ-subsecuencialmente completa que R. Haydon [1981] construye a partir de una familia Σ de partes infinitas de ω, casi-disjunta, con $|\Sigma| < 2^{\omega}$. El álgebra de Boole de abiertos y cerrados de K es Σ-subsecuencialmente completa por lo tanto, y si $A_n = \{n\}$ para $n \in \omega$, ha de existir $M \in \Sigma$ tal que el cierre en K de $A = \bigcup \{ A_n : n \in M \}$ es abierto. Sin embargo A no está C^*-sumergido en K, pues si lo estuviera, $\bar{A}$ sería homeomorfo a βM, luego a $\beta\omega$, y por otra parte, según la demostración del lema 13, existiría una aplicación continua f de K en $\bar{A}$, con imagen densa. Se tendría que $\mathcal{C}(\bar{A})$ sería isomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}(K)$, en contra de que éste no contiene subespacios isomorfos a l_∞.

15.- Lema Supongo válido el axioma de Martin.

Dada una familia Σ de partes infinitas de ω, casi-disjunta, con $|\Sigma| = 2^\omega$, existe $P \subset \beta\omega - \omega$ tal que

(a) Para todo $p \in P$ existe un único $M_p \in \Sigma$ tal que $p \in \bar{M}_p$, y la aplicación que lleva p en M_p es una biyección de P en Σ.

(b) Para todo $p \in P$ existe una familia $\{ U_\xi(p) : \xi < 2^\omega \}$ que es base de entornos de p, formada por abiertos y cerrados de $\beta\omega$ tales que si $\xi < \eta < 2^\omega$, $U_\xi(p) - \omega \supsetneq U_\eta(p) - \omega$.

Demostración:

- Para cada $M \in \Sigma$, $\bar{M}$ es homeomorfo a $\beta\omega$. Usando el axioma de Martin y modificando convenientemente el ejercicio 4,24 de A. Levy [1979, pág. 285], existe $p \in \bar{M} - M$ y una familia $\{ U_\xi(p) : \xi < 2^\omega \}$ que es base de entornos de p en $\bar{M}$, formada por abiertos y cerrados de $\bar{M}$, y tal que si $\xi < \eta < 2^\omega$, $U_\xi(p) - M \supsetneq U_\eta(p) - M$.

Como $\bar{M} - M = \bar{M} - \omega$, y la familia Σ es casi-disjunta, se concluye que el conjunto P, formado por los puntos p así elegidos al variar M en Σ, verifica el enunciado.

El siguiente lema está probado en el artículo de E. K. van

Douwen y J. van Mill [1980]:

16.- <u>Lema</u> Dado un conjunto C de cardinal ω_2, existe un conjunto I, disjunto con C, de cardinal ω_1, de modo que existe $(F_x)_{x\in C}$ familia de partes no numerables de I, tales que si $T = C \cup I$ se topologiza de la siguiente forma: los puntos de I son aislados y una base de entornos de un punto $x \in C$ es $\{ \{x\} \cup (F_x - N) : N \subset I$ numerable $\}$, entonces T es un P-espacio regular y para todo $A \subset C$ con $|A| \leq \omega_1$, existe un abierto y cerrado S en T tal que $S \cap C = A$.

17.- <u>Lema</u> Se supone válido el axioma de Martin y que $2^\omega = \omega_2$.

En la situación del lema 15, se define $C_p = \{ c_\xi(p) : \xi < 2^\omega \}$ escogiendo $c_\xi(p) \in U_\xi(p) - U_{\xi+1}(p) - \omega$, para cada $p \in P$.

Sea $T_p = C_p \cup I_p$ definido para cada $p \in P$ según el lema 16, y de forma que los conjuntos I_p son disjuntos entre sí y con $\beta\omega$.

Sea $I = \bigcup \{ I_p : p \in P \}$ y $V = \beta\omega \cup I$. Si se define una topología en V mediante "$G \subset V$ es abierto si y sólo si $G \cap \beta\omega$ es abierto de $\beta\omega$ y $G \cap T_p$ es abierto en T_p para todo $p \in P$", entonces V es Hausdorff, totalmente disconexo fuertemente, y la topología inducida sobre $\beta\omega$ es la usual.

Demostración:

Que así se define una topología en V es fácil de comprobar.

(1) Si $H \subset \beta\omega$ es abierto y cerrado en $\beta\omega$, existe $F \subset V$ abierto y cerrado de V tal que $F \cap \beta\omega = H$.

En efecto, para cada $p \in P$, si $p \notin H$ entonces $|H \cap C_p| \leq \omega_1$ puesto que existe $\xi_0 < 2^\omega$ tal que si $\xi > \xi_0$, $c_\xi(p) \in U_\xi(p) - \omega \subset \beta\omega - H$, y por ello, $|H \cap C_p| \leq |\xi_0| \leq \xi_0 < \omega_2$, pues $\omega_2 = 2^\omega$ por hipótesis.

Similarmente, si $p \in H$, $|(\beta\omega - H) \cap C_p| \leq \omega_1$. Luego en cualquier caso, y según el lema 16, existe $S_p \subset T_p$ abierto y cerrado en T_p tal que $S_p \cap C_p = H \cap C_p$, y esto para todo $p \in P$.

El conjunto $F = H \cup (\cup\{ S_p : p \in P \})$ es el abierto y cerrado de V que buscamos.

(2) V es fuertemente totalmente disconexo.

En efecto, si A y B son subconjuntos cerrados y disjuntos de V, existe por (1) un abierto y cerrado F de V, tal que $A \cap \beta\omega \subset F \cap \beta\omega$ y $B \cap \beta\omega \subset \beta\omega - F$. El subconjunto de V, $(F \cup A) - B$, es abierto y cerrado de V, disjunto con B y que contiene a A.

(3) Todo punto de V es cerrado.

En efecto, sea $z \in V$.

Si $z \in V - \beta\omega$, existe un único $p \in P$ tal que $z \in I_p$, y $\{z\}$ es cerrado en V por definición.

Si $z \in \beta\omega$, para todo $x \in \beta\omega - \{z\}$, existe $H \subset \beta\omega$ abierto y cerrado tal que $x \in H$ y $z \notin H$, luego por (1) existe $F \subset V$ abierto y cerrado tal que $x \in F$ y $z \notin F$. Por último, si $x \neq z$, $x \in \beta\omega$, entonces $\{x\}$ es abierto en V.

(2) y (3) implican que V es Hausdorff y fuertemente totalmente disconexo. La definición de la topología en V y (1) implican que V induce sobre $\beta\omega$ la topología usual.

18.- <u>Lema</u> Se supone válido el axioma de Martin y que $2^\omega = \omega_2$.

El espacio V definido en el lema 17 es un F-espacio.

Demostración:

Es muy similar a la del citado artículo de E. K. van Douwen y J. van Mill, y no la incluimos.

El siguiente teorema es la conclusión final de la serie de lemas que va del lema 13 al 18.

19.- Teorema Se suponen válidos el axioma de Martin y que $2^{\omega} = \omega_2$.

Dada una familia Σ de partes infinitas de ω, casi-disjunta, con $|\Sigma| = 2^{\omega}$, existe un álgebra de interpolación que no es cociente de ningún álgebra de Boole Σ-subsecuencialmente completa y de interpolación.

Demostración:

Sea V el espacio topológico definido en los anteriores lemas, y sea $L = \beta V$. L es un F-espacio ya que V es un F-espacio, y por tanto, el álgebra de Boole $\mathcal{A}$ de abiertos y cerrados de L es de interpolación.

Si $\mathcal{B}$ es un álgebra de Boole Σ-subsecuencialmente completa y h es un homeomorfismo sobreyectivo de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$, existe un homeomorfismo del espacio de Stone de $\mathcal{A}$, que es L, en un subespacio del de $\mathcal{B}$, que es K.

Mediante este homeomorfismo podemos considerar $\beta\omega \subset V \subset L \subset K$.

Si $\mathcal{B}$ es de interpolación, K es F-espacio, luego por el lema 13, existe $M \in \Sigma$, y una aplicación continua f de K en $\bar{M}$ cuya restricción a M es la identidad en M. Sea $p \in P$ tal que $M = M_p$.

Sea g la restricción de f a V y sea $G = g^{-1}(\bar{M} - \omega)$.

Siguiendo los mismos pasos que E. K. van Douwen y J. van Mill, se tiene sucesivamente que, $C_p \subset G$, $C_p \subset \overline{(G \cap I_p)}$, luego que $C_p \subset \overline{g(G \cap I_p)}$ y $|g(G \cap I_p)| \geq |C_p| = \omega_2$. Por otra parte, $|g(G \cap I_p)| \leq |I_p| = \omega_1$, lo que es absurdo.

20.- Corolario Supuesto el axioma de Martin y que $2^{\omega} = \omega_2$, existe un álgebra de Boole de interpolación que no es cociente de ningún álgebra de Boole κ-subsecuencialmente completa y de interpolación, para todo $\kappa \leq \omega$.

Demostración:

Sea Σ familia casi-disjunta de partes infinitas de ω, con $|\Sigma| = 2^{\omega}$. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Boole construida a partir de Σ en el teorema 19. Si $\mathcal{B}$ es un álgebra de Boole κ-subsecuencialmente completa, para $\kappa \leq \omega'$, $\mathcal{B}$ es también Σ-subsecuencialmente completa. Luego por el teorema 18, $\mathcal{B}$ no es de interpolación o $\mathcal{A}$ no es cociente de $\mathcal{B}$.

21.- Nota Existen álgebras κ-subsecuencialmente completas y de interpolación que no son numerablemente completas, como se muestra en el ejemplo 30, por lo que nuestro resultado mejora efectivamente el de E. K. van Douwen y J. van Mill [1980].

Nuestro siguiente objetivo es el de separar las distintas clases de álgebras de Boole aquí introducidas. Comenzamos con la siguiente definición:

22.- Definición: Sea m un cardinal infinito, y sea Σ una familia de partes infinitas de m. Para cada $M \in \Sigma$ sea $\mathcal{U}_M$ un filtro en M.

Se define $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma}) \subset \mathcal{P}(m)$ porque sus elementos A verifican una de las dos siguientes condiciones:

(a) $A \cap M \in \mathcal{U}_M$, para todo $M \in \Sigma$.

(b) $A' \cap M \in \mathcal{U}_M$, para todo $M \in \Sigma$, donde $A' = m - A$.

Dados A y B de $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$, si $A' \cap M \in \mathcal{U}_M$ y $B' \cap M \in \mathcal{U}_M$

para todo $M \in \Sigma$, entonces también $(A \cup B)' \cap M = (A' \cap M) \cap (B' \cap M) \in \mathcal{U}_M$ y la unión de A y B está en el álgebra; si por el contrario, $A \cap M \in \mathcal{U}_M$, entonces también $(A \cup B) \cap M \in \mathcal{U}_M$, y de nuevo $A \cup B$ es del álgebra. Como evidentemente $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$ es cerrada por complementos, es un álgebra de Boole, subálgebra de $\mathcal{P}(m)$.

23.- Proposición En las condiciones de la definición 22, si $|\Sigma| \geq 2$, si los filtros $\mathcal{U}_M$ contienen las partes cofinitas de M, y si, dados M y N en Σ, $M \neq N$, se tiene que $M \cap N \notin \mathcal{U}_M \cup \mathcal{U}_N$, entonces el álgebra de Boole $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$ no es Σ-subsecuencialmente completa.

Demostración:

Escribimos por comodidad $\mathcal{A}$ en lugar de $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$.

Consideramos la sucesión disjunta $(\{n\})_{n \in m}$.

Si $M \in \Sigma$, $\{n\} \cap M = \{n\}$ o $\{n\} \cap M = \emptyset$; en ambos casos $\{n\}' \cap M \in \mathcal{U}_M$ por hipótesis. Luego $\{n\} \in \mathcal{A}$ para todo $n \in m$.

Si $\mathcal{A}$ fuera Σ-subsecuencialmente completa, existiría $M \in \Sigma$ tal que la sucesión $(\{n\})_{n \in M}$ tiene supremo en $\mathcal{A}$. Ahora bien, si $A \in \mathcal{A}$ y $A \geq \{n\}$ para todo $n \in M$, A debe contener a M, y por tanto $A \cap M \in \mathcal{U}_M$. Como $|\Sigma| \geq 2$, existe $N \in \Sigma$ tal que $M \neq N$.

Dado que $A \cap N \in \mathcal{U}_N$ y $M \cap N \notin \mathcal{U}_N$, existe $m \in (A \cap N) - M$. Sea $B = A - \{m\}$; es claro que $B \supset M$ y que $B \subset A$, $B \neq A$. Además, $B \in \mathcal{A}$ pues si $M_1 \in \Sigma$, $B \cap M_1 = (A - \{m\}) \cap M_1 = (A \cap M_1) \cap (M_1 - \{m\}) \in \mathcal{U}_{M_1}$. Es decir, $(\{n\})_{n \in M}$ no tiene supremo en el álgebra $\mathcal{A}$.

24.- Notas

(1) La condición $M \neq N$, M y N de Σ, implica $M \cap N \notin \mathcal{U}_M \cup \mathcal{U}_N$ se cumple, supuesto que las partes cofinitas de M están en $\mathcal{U}_M$, inmediata-

mente si $|M \cap N| < \omega$, es decir, si la familia Σ es casi-disjunta.

Esta condición no puede eliminarse del enunciado; en efecto, si $m = \omega$, $\Sigma = \{M, N\}$ con $M = \omega$ y N el conjunto de los naturales pares, sea $\mathcal{U}_M$ un ultrafiltro en ω conteniendo las partes cofinitas de ω, y sea $\mathcal{U}_N$ su traza sobre N. Es claro que $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M, \mathcal{U}_N)) = \mathcal{P}(\omega)$, por lo cual es Σ-subsecuencialmente completa.

(2) Si $|\Sigma| = 1$, el resultado de la proposición 23 no es cierto; por ejemplo, para $m = \omega$, $\Sigma = \{\omega\}$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en ω, el álgebra $\mathcal{A}(\Sigma, \mathcal{U}) = \mathcal{P}(\omega)$.

25.- Proposición En las condiciones de la definición 22, si para todo $M \in \Sigma$, $\mathcal{U}_M$ es un ultrafiltro en M, el álgebra $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$ es Δ-subsecuencialmente completa, para toda familia Δ de partes infinitas de m, casi-disjunta, tal que $|\Delta| > |\Sigma|$.

Demostración:

Sea $n = \bigcup \Delta$, y sea $(A_n)_{n \in n}$ una familia disjunta en el álgebra de Boole $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$, que denotamos por comodidad $\mathcal{A}$.

- Si existe $n \in n$ tal que $A_n \cap M \in \mathcal{U}_M$ para todo $M \in \Sigma$, entonces tomando $N \in \Delta$ tal que $n \in N$, el conjunto $A = \bigcup \{ A_m : m \in N \}$ está en el álgebra $\mathcal{A}$, ya que $A \cap M \supset A_n \cap M$ para todo $M \in \Sigma$.

En otro caso, como $A_n \in \mathcal{A}$, se tendrá que $A_n \cap M \notin \mathcal{U}_M$ para todos $n \in n$ y $M \in \Sigma$. Dados $N \in \Delta$ y $M \in \Sigma$, consideramos el conjunto

$$B_{NM} = M \cap (\bigcup \{ A_n : n \in N \}).$$

Para cada $M \in \Sigma$ a lo más existe un $N \in \Delta$ para el que $B_{NM} \in \mathcal{U}_M$. En efecto, si $N \neq N_1$, N y N_1 de Δ, si B_{NM} y B_{N_1M} pertenecieran a $\mathcal{U}_M$, también $B_{NM} \cap B_{N_1M} = M \cap (\bigcup \{ A_n : n \in N \cap N_1 \}) \in \mathcal{U}_M$; como

$\mathcal{U}_M$ es ultrafiltro y $N \cap N_1$ es finito, existiría $n \in N \cap N_1$ tal que $A_n \cap M \in \mathcal{U}_M$, una contradicción.

Como $|\Delta| > |\Sigma|$, existe $N \in \Delta$ tal que $B_{NM} \notin \mathcal{U}_M$ para todo $M \in \Sigma$; es decir, si $A = \bigcup \{ A_n : n \in N \}$, que $A \cap M \notin \mathcal{U}_M$ para todo $M \in \Sigma$, y por tanto $A \in \mathcal{Q}$.

Es obvio que en ambos casos el conjunto A es el supremo de la familia $(A_n)_{n \in N}$.

26.- <u>Nota</u> Si, en la proposición 25, no se supone a la familia Δ casi-disjunta, el resultado no es cierto. En efecto, basta tomar $\mathfrak{m} = \omega$ y Σ familia casi-disjunta de partes infinitas de ω, $|\Sigma| = 2$, $\mathcal{U}_M$ ultrafiltro en M conteniendo las partes cofinitas de M, para $M \in \Sigma$, y $\Delta \subset \mathcal{P}(\omega)$, $|\Delta| = 3$, $\Delta = \{N_0, N_1, N_2\}$ verificando $N_0 \subset N_1 \subset N_2$. Si el álgebra $\mathcal{Q}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$ fuera Δ-subsecuencialmente completa, sería también numerablemente completa, como fácilmente puede probarse, pero esto va en contra de no ser Σ-subsecuencialmente completa, como se desprende de la proposición 23.

27.- <u>Corolario</u> Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito, y sea Σ una familia de partes infinitas de $\mathfrak{m}$, casi-disjunta, con $|\Sigma| \geq 2$.

Existe un álgebra de Boole, subálgebra de $\mathcal{P}(\mathfrak{m})$, que no es Σ-subsecuencialmente completa, pero que es Δ-subsecuencialmente completa, para toda familia Δ de partes infinitas de $\mathfrak{m}$, casi-disjunta, con $|\Delta| > |\Sigma|$.

Demostración:

Dado $M \in \Sigma$, se escoge un ultrafiltro $\mathcal{U}_M$ en M que contenga las partes cofinitas de M. El álgebra de Boole $\mathcal{Q}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M \in \Sigma})$ es subálgebra de $\mathcal{P}(m)$, no es Σ-subsecuencialmente completa por la proposición 23, y es Δ-subsecuencialmente completa por la proposición 25.

28.- Corolario Sea $2 \leq \kappa < 2^{\omega}$. Existe un álgebra de Boole, subálgebra de $\mathcal{P}(\omega)$, que es λ-subsecuencialmente completa si $\lambda > \kappa$, pero que no es κ-subsecuencialmente completa.

En particular, si $\kappa \geq 2$ es finito, existe un álgebra $(\kappa+1)$-subsecuencialmente completa que no es κ-subsecuencialmente completa.

Demostración:

Basta tomar en $\mathcal{P}(\omega)$ una familia Σ casi-disjunta, de partes infinitas, y tal que $|\Sigma| = \kappa$, y razonar como en el corolario 27.

29.- Nota No hemos conseguido en lo que antecede mostrar un álgebra de Boole 2-subsecuencialmente completa que no sea numerablemente completa, o lo que es lo mismo, que no sea 1-subsecuencialmente completa. En contra de lo que indica el corolario 28, este ejemplo, si contiene las partes finitas de ω, no puede conseguirse como subálgebra de $\mathcal{P}(\omega)$, pues como vimos en el ejemplo 12 (3), las álgebras 2-subsecuencialmente completas son de interpolación, por lo que coincidiría con $\mathcal{P}(\omega)$. Una modificación de los anteriores ejemplos nos permite seguidamente mostrar uno de un álgebra 2-subsecuencialmente completa que no es numerablemente completa.

30.- Ejemplo Sea $\Omega = \omega \cup [0,1]$, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en ω que contiene las partes cofinitas de ω. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Boole de partes de Ω, tales que bien $A \cap \omega \in \mathcal{U}$ y $A \cap [0,1]$ es medible-Lebesgue y tiene medida 1, o bien $A \cap \omega \notin \mathcal{U}$ y $A \cap [0,1]$ es de medida cero.

(1) $\mathcal{A}$ no es numerablemente completa.

En efecto, para todo $n\in\omega$, $\omega - \{n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n\}\cap[0,1]$ es de medida cero, luego $\{n\}\in\mathcal{A}$. La sucesión disjunta $(\{n\})_{n\in\omega}$ no tiene supremo en $\mathcal{A}$, puesto que si $A\in\mathcal{A}$ es cota superior de ella, $A\supset\omega$ y por ello, $A\cap[0,1]$ es medible-Lebesgue y de medida 1; sea $x\in A\cap(0,1)$, y sea $B = A - \{x\}$. Es claro que $B\in\mathcal{A}$, B es cota superior de la sucesión, y B es menor estrictamente que A.

(2) $\mathcal{A}$ es 2-subsecuencialmente completa.

Sea M el conjunto de los naturales pares, y sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{A}$. Si en un primer caso, existe $n\in\omega$ tal que $A_n\cap\omega\in\mathcal{U}$ y $A_n\cap[0,1]$ es medible-Lebesgue y de medida 1, según que n sea par o impar, existirá el supremo de los pares o de los impares, y es la unión de $\{ A_n : n\in M \}$ o de $\{ A_n : n\in\omega - M \}$.

Si, por el contrario, para todo $n\in\omega$, $A_n\cap\omega\notin\mathcal{U}$ y la medida de $A_n\cap[0,1]$ es 0, entonces consideramos $A = \bigcup\{ A_n : n\in M \}$ y $B = \bigcup\{ A_n : n\in\omega - M \}$; como A y B son disjuntos puedo suponer que uno de ellos, por ejemplo A, corta a ω en un elemento que no está en el ultrafiltro $\mathcal{U}$. Por otra parte, y como es unión numerable de conjuntos de medida nula, $A\cap[0,1]$ es de medida nula. Luego $A\in\mathcal{A}$ y es obviamente el supremo de los términos pares.

31.- Nota No conozco si las álgebras de Boole ω-subsecuencialmente completas han de ser finitamente subsecuencialmente completas o no.

Veremos ahora que las álgebras $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M\in\Sigma})$ con Σ finita son arquetipos de las álgebras $(\kappa+1)$-subsecuencialmente completas que no son κ-subsecuencialmente completas, en el sentido que todas ellas contienen una subálgebra isomorfa a aquélla.

Comenzamos con un lema preparatorio que será también usado en el teorema 34, en el que se prueba que las álgebras finitamente subsecuencialmente completas tienen la propiedad de Rosenthal (ver W. Schachermayer [1978]), resultado que extiende el de J. Diestel y B. Faires (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 20]).

32.- Lema Sea $1 \leq \kappa < \omega$, y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. Sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{A}$.

Supongamos que existe $\Sigma \subset \mathcal{P}(\omega)$, con $|\Sigma| = \kappa$, de partes infinitas y disjuntas de ω, de forma que no existe el supremo de $(A_n)_{n\in M}$ en $\mathcal{A}$, para todo $M \in \Sigma$, pero que si $\Delta \subset \mathcal{P}(\omega)$ es una familia de partes infinitas y disjuntas de ω, con $|\Delta| = \kappa+1$, entonces existe $N \in \Delta$ tal que la sucesión $(A_n)_{n\in N}$ tiene supremo en $\mathcal{A}$.

Entonces, para cada $M \in \Sigma$, $\mathcal{U}_M = \{ N \subset M$: no existe el supremo en $\mathcal{A}$ de la sucesión $(A_n)_{n\in N} \}$ es un ultrafiltro en M que contiene las partes cofinitas de M.

Demostración:

(1) $M \in \mathcal{U}_M$, luego $\mathcal{U}_M \neq \emptyset$.

(2) Si $N \in \mathcal{U}_M$ entonces $N \neq \emptyset$, pues siempre existe el supremo de la familia vacía.

(3) Son equivalentes que $N \in \mathcal{U}_M$ y que $M - N \notin \mathcal{U}_M$.

En efecto, sea $N \in \mathcal{U}_M$; si $M - N$ es finito, existe supremo de $(A_n)_{n\in M-N}$ y por tanto $M - N \notin \mathcal{U}_M$. Si $M - N$ es infinito, se considera la familia $\Delta = (\Sigma - \{M\}) \cup \{N, M - N\}$ y es claro que por hipótesis y al no existir el supremo de ninguno de los otros conjuntos de Δ, ha de existir el supremo de $(A_n)_{n\in M-N}$, por lo que también $M - N \notin \mathcal{U}_M$.

Recíprocamente, si $N \notin \mathcal{U}_M$ entonces no puede darse que $M - N \notin$ $\notin \mathcal{U}_M$, pues existirían los supremos de $(A_n)_{n\in N}$ y de $(A_n)_{n\in M-N}$, de donde existiría el de $(A_n)_{n\in M}$, en contra de la hipótesis.

(4) Si N_1 y N_2 son de $\mathcal{U}_M$, la intersección $N_1 \cap N_2$ también.

En efecto, si $N_1 \cap N_2 \notin \mathcal{U}_M$, existe el supremo de $(A_n)_{n\in N_1\cap N_2}$ y dado que no existe el de $(A_n)_{n\in N_1}$, no existe tampoco el de la sucesión $(A_n)_{n\in N_1-N_2}$; luego $N_1-N_2 \in \mathcal{U}_M$. Considerando la familia $\Delta = \{N_2, N_1-N_2\} \cup (\Sigma - \{M\})$ se llega inmediatamente a contradicción con la hipótesis.

33.- <u>Proposición</u> Sea $1 \leq \kappa < \omega$, y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole $(\kappa+1)$-subsecuencialmente completa que no es κ-subsecuencialmente completa. Entonces, para toda familia Σ de κ partes infinitas y disjuntas de ω, y para cada $M\in\Sigma$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_M$ en M que contiene las partes cofinitas de M, de forma que el álgebra $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M\in\Sigma})$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{A}$.

Demostración:

Sea Σ una partición de ω en κ conjuntos infinitos y disjuntos. Como $\mathcal{A}$ no es κ-subsecuencialmente completa, no es Σ-subsecuencialmente completa, y por tanto existe una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ disjunta en $\mathcal{A}$ de modo que no existe el supremo de $(A_n)_{n\in M}$ para todo $M\in\Sigma$. Dado que $\mathcal{A}$ es $(\kappa+1)$-subsecuencialmente completa, estamos en las condiciones del lema 32, y por tanto, para cada $M\in\Sigma$,

$$\mathcal{U}_M = \{ N\subset M : \text{no existe en } \mathcal{A} \text{ el supremo de } (A_n)_{n\in N} \}$$

es un ultrafiltro en M que contiene las partes cofinitas de M.

Sea h la aplicación definida en $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M\in\Sigma})$ y con valores en $\mathcal{A}$ mediante:

$h(B) = \bigvee\{\bigvee\{ A_n : n\in M\cap B \} : M\in\Sigma \}$ si $B\cap M \notin \mathcal{U}_M$ para todo $M\in\Sigma$, y $h(B) = - h(B')$ en el otro caso ($B' = \omega - B$).

Afirmamos que h es un isomorfismo de álgebras de Boole entre $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M\in\Sigma})$ y una subálgebra de $\mathcal{A}$.

En efecto, sean B_1 y B_2 disjuntos en $\mathcal{A}(\Sigma, (\mathcal{U}_M)_{M\in\Sigma})$; si en un primer caso, $(B_1\cup B_2)\cap M \notin \mathcal{U}_M$ para todo $M\in\Sigma$, entonces

$$h(B_1\cup B_2) = \bigvee\{ \bigvee\{ A_n : n\in (B_1\cup B_2)\cap M \} : M\in\Sigma \} =$$

$$= \bigvee\{ (\bigvee\{ A_n : n\in B_1\cap M \})\vee(\bigvee\{ A_n : n\in B_2\cap M \}) : M\in\Sigma \}=$$

$$= h(B_1) \vee h(B_2) .$$

En otro caso, podemos suponer sin restricción alguna que $B_1\cap M\in\mathcal{U}_M$ y $B_2\cap M\notin\mathcal{U}_M$, para todo $M\in\Sigma$. Se tiene que por definición, $h(B_1)\vee h(B_2) = (-h(B_1'))\vee h(B_2)$, y coincide con $h(B_1\cup B_2)$ si y sólo si sus complementos son iguales. Así pues,

$$-(h(B_1)\vee h(B_2)) = h(B_1')\wedge(-h(B_2)) = (\bigvee\{ \bigvee\{ A_n : n\in M-B_1 \} : M\in\Sigma\})\wedge$$

$$\wedge(-(\bigvee\{ \bigvee\{ A_n : n\in M\cap B_2 \} : M\in\Sigma\})) =$$

$$= \bigvee_{M\in\Sigma} ((\bigvee\{ A_n : n\in M-B_1 \})\wedge(- \bigvee_{M_1\in\Sigma} (\bigvee\{ A_n : n\in M_1\cap B_2 \}))) =$$

$$= \bigvee_{M\in\Sigma} ((\bigvee\{ A_n : n\in M-B_1 \})\wedge(-\bigvee\{ A_n : n\in M\cap B_2 \})) =$$

$$= \bigvee_{M\in\Sigma} (\bigvee\{ A_n\wedge(-\bigvee\{ A_n : n\in M\cap B_2 \}) : n\in M - B_1 \}) =$$

$$= \bigvee_{M\in\Sigma} (\bigvee\{ A_n : n\in(M-B_1)-B_2 \}) = - h(B_1\cup B_2) .$$

34.- <u>Teorema</u> Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de Boole finitamente subsecuencialmente completa, y sea T un operador lineal continuo que no es débilmente compacto de $B(\mathfrak{A})$ en un espacio de Banach E.

Existe entonces un subespacio de $B(\mathfrak{A})$, isométrico a l_∞, y en el que T actúa como un isomorfismo.

Demostración:

Consideramos $G:\mathfrak{A} \longrightarrow E$ la medida vectorial definida por $G(A) = T(\chi_A)$ para $A \in \mathfrak{A}$; G es finitamente aditiva y acotada; además, por ser T no débilmente compacto, G no es fuertemente aditiva (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 148]).

Existe pues una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathfrak{A}$, y un número positivo ε, tales que $\|G(A_n)\| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \omega$. Como el álgebra $\mathfrak{A}$ se supone finitamente subsecuencialmente completa, pasando a subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe en $\mathfrak{A}$ el supremo de la sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$.

Sea C el conjunto de los números naturales $k \geq 2$, tales que existe una familia Σ de partes infinitas y disjuntas de ω, con $|\Sigma| = k$, y tal que no existe en $\mathfrak{A}$ el supremo de $(A_n)_{n\in M}$, para todo $M \in \Sigma$.

Si $C = \emptyset$, entonces para cada $M \subset \omega$, se considera $\Sigma = \{M, \omega - M\}$ y necesariamente ha de existir uno de los supremos siguientes $\bigvee\{A_n : n\in M\}$ o $\bigvee\{A_n : n \in \omega - M\}$. En cualquier caso, y como $(A_n)_{n\in\omega}$ sí que tiene supremo, existe el supremo de $(A_n)_{n\in M}$. El mismo razonamiento de J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 20], concluye la prueba del teorema.

Si $C \neq \emptyset$, sea $k = \max(C)$, que existe porque C es acotado, ya que

$\mathcal{A}$ es finitamente subsecuencialmente completa. Sea Σ una familia disjunta de partes infinitas de ω, con $|\Sigma| = k$, y tal que no existen los supremos de las sucesiones $(A_n)_{n\in M}$ cuando $M\in\Sigma$.

Consideremos $M\in\Sigma$ fijo, y sea $\mathcal{U}_M$ el ultrafiltro sobre M definido según el lema 32.

Sea $G_1:\mathcal{P}(M) \longrightarrow E$ la medida vectorial definida por

$G_1(N) = G(\bigvee\{ A_n : n\in N \})$ si $N\subset M$ y $N\notin \mathcal{U}_M$ y,

$G_1(N) = G(\bigvee\{ A_n : n\in \omega \}) - G(\bigvee\{ A_n : n\in M-N \})$ si $N\in\mathcal{U}_M$.

G_1 es una medida vectorial, finitamente aditiva y acotada, no fuertemente aditiva. En efecto, como $G_1(\{n\}) = G(A_n)$ para todo $n\in M$, G_1 no es fuertemente aditiva, y como $\|G_1(N)\| \leq 2 \sup \{\|G(A)\| : A\in\mathcal{A}\}$, G_1 es acotada. Para ver que es finitamente aditiva, el caso más complicado aparece cuando $N_1\in\mathcal{U}_M$ y $N_2\subset M$, $N_2\notin\mathcal{U}_M$, disjuntos; se tiene entonces:

$$G_1(N_1\cup N_2) = G(\bigvee\{ A_n : n\in\omega \}) - G(\bigvee\{ A_n : n\in M - (N_1\cup N_2) \})$$

$$= G(\bigvee\{ A_n : n\in \omega - (M - (N_1\cup N_2)) \}) =$$

$$= G(\bigvee\{ A_n : n\in \omega - (M - N_1) \}\vee(\bigvee\{ A_n : n\in N_2\})) =$$

$$= G(\bigvee\{ A_n : n\in\omega \}) - G(\bigvee\{ A_n : n\in M - N_1 \}) + G(\bigvee\{ A_n : n\in N_2\})$$

$$= G_1(N_1) + G_1(N_2).$$

Según el teorema de Diestel-Faires ya mencionado, y como $\mathcal{P}(M)$ es numerablemente completa, existe $M_0\subset M$ infinito y de modo que la aplicación $R:S(\mathcal{P}(M_0)) \longrightarrow E$ definida por $R(\chi_N) = G_1(N)$ para $N\subset M_0$ es un isomorfismo sobre la imagen.

Sea $U:S(\mathcal{P}(M_0)) \longrightarrow S(\mathcal{A})$ el operador integral asociado a la medida vectorial finitamente aditiva y acotada siguiente:

$G_2(N) = \chi_{\bigvee\{A_n:\ n\in N\}}$ si $N\subset M_0$ y $N\notin \mathcal{U}_M$

y $G_2(N) = \chi_{\bigvee\{A_n:\ n\in\omega\} - \bigvee\{A_n:\ n\in M-N\}}$ si $N\in\mathcal{U}_M$. La demostración de que G_2 es finitamente aditiva es similar a la hecha para G_1.

U es una isometría de $S(\mathcal{P}(M_0))$ sobre un subespacio de $S(\mathcal{A})$; en efecto, los elementos de $S(\mathcal{P}(M_0))$ pueden escribirse en la forma

$\sum_{i\leq l}\alpha_i\chi_{N_i}$ donde $(N_i)_{i\leq l}$ es disjunta en $\mathcal{P}(M_0)$; podemos suponer además, que sólo $N_0\in\mathcal{U}_M$. La norma de este elemento de $S(\mathcal{P}(M_0))$ es $\sup_{i\leq l}|\alpha_i|$ que coincide con la de su imagen mediante U, porque ésta es $\alpha_0\,\chi_{\bigvee\{A_n:\ n\in(\omega-M)\cup N_0\}} + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i\,\chi_{\bigvee\{A_n\ :\ n\in N_i\}}$ y los elementos de $\mathcal{A}$ que aparecen en su expresión son disjuntos entre sí.

Sea F el cierre en $B(\mathcal{A})$ del subespacio $U(S(\mathcal{P}(M_0)))$. Es evidente a partir de lo que antecede que F es isométrico a l_∞. Para ver que la restricción de T a F es un isomorfismo, basta probar que coincide con la composición de R y U^{-1}.

Esto es así porque si $N\subset M_0$, $N\notin\mathcal{U}_M$, $TU(\chi_N) =$

$= T(\chi_{\bigvee\{A_n:\ n\in N\}}) = G(\bigvee\{A_n\ :\ n\in N\})$, y si $N\in\mathcal{U}_M$, $TU(\chi_N) =$

$= T(\chi_{\bigvee\{A_n:\ n\in(\omega-M)\cup N\}}) = G(\bigvee\{A_n\ :\ n\in\omega\}) - G(\bigvee\{A_n\ :\ n\in M-N\})$

que, en ambos casos coincide con $R(\chi_N)$.

Terminamos este capítulo presentando la resolución de un problema de S. Ulam sobre el número de subálgebras de Boole no isomorfas de un conjuntos de partes. Este problema data de los años 30, y aparece planteado en el libro de D. R. Mauldin [1981, prob. 37].

35.- <u>Lema</u> Sea S un conjunto y F un subconjunto cerrado de βS, compactificación de Stone-Čech de S dotado de la topología discreta. Se verifican:

(1) El conjunto $\{ A \subset S : \bar{A} \supset F \}$ es un filtro en S.

(2) Si $\mathcal{F}$ es un filtro en S, entonces F es el conjunto de puntos adherentes a $\mathcal{F}$, es decir, $F = \bigcap \{ \bar{A} : A \in \mathcal{F} \}$, si y sólo si $\mathcal{F} =$ $= \{ A \subset S : \bar{A} \supset F \}$.

Demostración:

(1) Es consecuencia inmediata de que si A y B son subconjuntos de S, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$ por ser A y B abiertos del extremadamente disconexo βS.

(2) Supongamos primero que $F = \bigcap \{ \bar{A} : A \in \mathcal{F} \}$; sea $A \subset S$ tal que $\bar{A} \supset F$. Si A no perteneciera a $\mathcal{F}$, entonces no contiene ningún elemento de $\mathcal{F}$, luego para todo $B \in \mathcal{F}$, $(S - A) \cap B \neq \emptyset$. De aquí se deduce que $\mathcal{F}$ tiene un punto adherente que está en $\overline{S - A}$; como $\bar{A} \supset F$, $\overline{S - A}$ es disjunto con F, y hemos llegado a contradicción.

Inversamente, si $\mathcal{F} = \{ A \subset S : \bar{A} \supset F \}$ y si $x \in \beta S$ es un punto adherente a $\mathcal{F}$ que no está en F, dado que F es cerrado, existe $B \subseteq S$ tal que $F \subset \bar{B}$ y $x \notin \bar{B}$, es decir, $B \in \mathcal{F}$ pero $x \notin \bar{B}$, absurdo.

Recordamos las definiciones de filtro y álgebra de Boole λ^+-completos (ver W. W. Comfort y S. Negrepontis [1974]):

Sea λ un cardinal; un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto S se dice λ^+-completo, cuando para toda familia $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ en $\mathcal{F}$, la intersección es también un elemento de $\mathcal{F}$; un álgebra de Boole es λ^+-completa si para toda familia $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de elementos del álgebra, existe el supremo en el álgebra. (Nótese que numerablemente completo equivale según esta terminología a ω_1-completo y no a ω-completo).

36.- Lema Sean S y F como en el lema anterior.

Se define $\mathcal{A}(F) = \{ A\subset S : \bar{A}\supset F$ o $\bar{A}\cap F = \emptyset \}$. Se tiene:

(1) $\mathcal{A}(F)$ es un álgebra de Boole, subálgebra de $\mathcal{P}(S)$.

(2) Si $\mathcal{F}' = \{ A\subset S : \bar{A}\supset F \}$ es un filtro λ^+-completo, entonces $\mathcal{A}(F)$ es λ^+-completa.

Demostración:

(1) Si $\mathcal{F}'$ es como en (2) se dice, a partir del lema 35, $\mathcal{A}(F) = \{ A\subset S : A\in \mathcal{F}'$ o $S - A \in \mathcal{F}' \}$, y por la definición 22, $\mathcal{A}(F)$ es un álgebra de Boole, subálgebra de $\mathcal{P}(S)$.

(2) Sea $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una familia en $\mathcal{A}(F)$. Pueden distinguirse dos casos: en el primero de ellos existe $\alpha_0<\lambda$ para el que $\bar{A}_{\alpha_0}\supset F$; es claro entonces que $\bigcup\{ A_\alpha : \alpha<\lambda \} \in \mathcal{F}'$ y por tanto es del álgebra $\mathcal{A}(F)$.

Si, en el otro caso, para todo $\alpha<\lambda$, $\bar{A}_\alpha\cap F = \emptyset$, entonces $S - A_\alpha \in \mathcal{F}'$; como $\mathcal{F}'$ es λ^+-completo, $\bigcap\{ S - A_\alpha : \alpha<\lambda \} \in \mathcal{F}'$, luego $S - \bigcup\{ A_\alpha : \alpha<\lambda \}\in\mathcal{F}'$ y de aquí que $\bigcup\{ A_\alpha : \alpha<\lambda \}\in\mathcal{A}(F)$.

37.- Lema Sea S un conjunto y sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de βS tales que $F_i\cap S = \emptyset$ y $|F_i| \geq 2$, para $i = 1, 2$.

(1) Si $\mathcal{A}(F_1) = \mathcal{A}(F_2)$ entonces $F_1 = F_2$.

(2) Si $\mathcal{A}(F_1)$ y $\mathcal{A}(F_2)$ son álgebras de Boole isomorfas, entonces existe una permutación ψ de S, tal que $\bar{\psi}(F_1) = F_2$, donde $\bar{\psi}$ denota la extensión de Stone de ψ a βS.

Demostración:

(1) Si $F_1 \neq F_2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $x\in F_1 - F_2$; sea $y\in F_1 - \{x\}$; como $F_2\cup\{y\}$ es cerrado en βS y $x\notin F_2\cup\{y\}$, existe $A\subset S$ tal que $x\notin\bar{A}$ y que $\bar{A}\supset F_2\cup\{y\}$. Es claro que $A\in\mathcal{A}(F_2)$ pero $A\notin\mathcal{A}(F_1)$.

(2) Sea θ: $\mathcal{A}(F_1) \longrightarrow \mathcal{A}(F_2)$ un isomorfismo de álgebras de Boole.

Como $F_1 \cap S = \emptyset$, $\{s\}$ es un átomo de $\mathcal{A}(F_1)$, cualquiera que sea $s \in S$. Luego $\theta(\{s\})$ es un átomo de $\mathcal{A}(F_2)$, y ha de existir un $t \in S$ tal que $\theta(\{s\}) = \{t\}$; esto nos permite definir una aplicación ψ de S en sí mismo por la condición $\theta(\{s\}) = \{\psi(s)\}$ para todo $s \in S$.

Claramente ψ es una permutación de S (biyectiva de S en S). Sea $\bar{\psi}$ la extensión de Stone de ψ, y definamos $F_1^* = \bar{\psi}(F_1)$. Si se prueba que $\mathcal{A}(F_1^*) = \mathcal{A}(F_2)$, se obtiene del apartado (1) que $F_1^* = F_2$, y esto concluye la demostración de (2).

Sea $B \in \mathcal{A}(F_2)$. Se tiene que B es el supremo de la familia $(\{t\})_{t \in B}$ y por tanto que existe en $\mathcal{A}(F_1)$ el supremo de la familia $(\theta^{-1}(\{t\}))_{t \in B}$. Si denotamos $A = \psi^{-1}(B)$, se tiene que A es el supremo de la última familia, y por ello que $A \in \mathcal{A}(F_1)$. Luego $\bar{A} \cap F_1 = \emptyset$ o bien $\bar{A} \supset F_1$. Como $\bar{\psi}$ es un homeomorfismo, se deduce que $\bar{B} = \overline{\psi(A)} = \bar{\psi}(\bar{A})$ y por lo tanto $\bar{B} \cap F_1^* = \emptyset$ o $\bar{B} \supset F_1^*$, es decir, $B \in \mathcal{A}(F_1^*)$.

Similarmente se prueba la inclusión contraria, luego efectivamente $\mathcal{A}(F_1^*) = \mathcal{A}(F_2)$.

El siguiente teorema resuelve el problema de S. Ulam para un conjunto arbitrario S; originalmente el problema estaba planteado para el conjunto de los números enteros. En este caso particular M. Weese [1980] ha demostrado el mismo resultado pero bajo la hipótesis adicional $P(2^{\omega})$ (ver M. Weese [1980] para la definición de $P(2^{\omega})$); esta hipótesis es algo más débil que el axioma de Martin, pero hace que su técnica sólo se aplique en el caso en que S es numerable, y que su resultado sea de consistencia con el sistema de axiomas habitual (axiomas de Zermelo-Fraenkel + axioma de elección), mientras que nuestro teorema no requiere ninguna suposición.

38.- <u>Teorema</u> Sea S un conjunto infinito de cardinal κ.

Existe una familia de cardinal 2^{2^κ} de subálgebras de $\mathcal{P}(S)$, no isomorfas entre sí.

Demostración:

Por comodidad de notación, pongamos $\kappa^* = 2^{2^\kappa}$.

Por el teorema de Pospisil (W. W. Comfort y S. Negrepontis [1974, pág. 146, cor. 74]), el cardinal de $\beta S - S$ es κ^*.

Sea $(F_\alpha)_{\alpha<\kappa^*}$ la familia de todos los subconjuntos de $\beta S - S$ que tienen exactamente dos elementos, y sea $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}(F_\alpha)$ para cada $\alpha<\kappa^*$. Según el lema 36, $\mathcal{A}_\alpha$ es una subálgebra de $\mathcal{P}(S)$. Como sólo hay $2^\kappa = \kappa^\kappa$ permutaciones de S, el lema 37 implica que existe un subconjunto L de κ^*, de cardinal κ^*, tal que $\mathcal{A}_\alpha$ no es isomorfa a $\mathcal{A}_\beta$ para todos $\alpha, \beta \in L$, $\alpha \neq \beta$.

39.- <u>Nota</u> Consecuencia del teorema 38 es que existen 2^c subálgebras de $\mathcal{P}(\omega)$ no isomorfas entre sí. También se deduce que existen 2^{2^c} subálgebras de partes del conjunto de los números reales; este último resultado es mejorado en el corolario 4 , en el que se prueba que las subálgebras pueden suponerse numerablemente completas.

Conviene notar que en el teorema 38, el número 2^{2^κ} es el máximo posible: ese número es el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ y toda subálgebra es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$.

Si κ es un cardinal, $cf(\kappa)$ es la cofinalidad de κ (ver W.

W. Comfort y S. Negrepontis [1974]).

40.- Teorema Sea S un conjunto infinito de cardinal κ, y sea λ un cardinal menor estricto que $cf(\kappa)$.

Si se supone $\kappa^+ = 2^\kappa$, entonces existe una familia de cardinal 2^{2^κ} de subálgebras de $\mathcal{P}(S)$, λ^+-completas y no isomorfas entre sí.

Demostración:

Por un teorema de Sierpiński (W. Sierpiński [1958, pág. 448]), existe una familia Σ de partes de S, κ-casi-disjunta, y con cardinal mayor estricto que κ.

Para cada $H \subset \Sigma$, sea $\mathcal{F}(H) = \{ A \subset S : |(S - A) \cap M| < \kappa$ para todo $M \in H \}$.

$\mathcal{F}(H)$ es un filtro λ^+-completo en S. En efecto, si $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ es una familia en $\mathcal{F}(H)$, entonces

$$|(S - \bigcap\{ A_\alpha : \alpha<\lambda \}) \cap M| = |\bigcup\{ (S - A_\alpha) \cap M : \alpha<\lambda \}| < \kappa$$

para todo $M \in H$, puesto que $\lambda < cf(\kappa)$.

Sea $F(H)$ el conjunto de puntos adherentes de $\mathcal{F}(H)$, y sea $\mathcal{C}$ la colección de todos los $F(H)$, obtenida al variar $H \subset \Sigma$, $H \neq \Sigma$, y $|H| \geq 2$.

Se tiene sucesivamente:

(1) $F(H) \cap S = \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{C}$.

En efecto, dado $s \in S \cap F(H)$, s es adherente a $\mathcal{F}(H)$, y como $S - \{s\} \in \mathcal{F}(H)$ porque $|\{s\} \cap M| \leq 1 < \kappa$ para todo $M \in H$, $s \in \overline{S - \{s\}} = \beta S - \{s\}$, lo que es absurdo.

(2) $|F(H)| \geq 2$ para todo $H \in \mathcal{C}$.

En efecto, como $H \neq \Sigma$ y $|H| \geq 2$, podemos escoger $M \in H$, $N \in \Sigma - H$

y $M_1 \in H - M$.

Sea $B = M \cup N$; es suficiente comprobar que $B \cap A \neq \emptyset$ y $(S - B) \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}'(H)$, puesto que de ese modo $\mathcal{F}'(H)$ tendría un punto adherente en $\bar{B}$ y otro en $\overline{S - B}$, que son disjuntos, y por ello $|F(H)| \geq 2$.

Como $|B \cap M| = |M| = \kappa$, $S - B \notin \mathcal{F}'(H)$ y por eso $S - B$ no contiene a ningún $A \in \mathcal{F}'(H)$, de donde $B \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}'(H)$.

Si para algún $A \in \mathcal{F}'(H)$, $(S - B) \cap A = \emptyset$, entonces $B \cup (S - A) = S$ y por lo tanto $|(M \cup N \cup (S - A)) \cap M_1| = |M_1| = \kappa$, que contradice que $|M \cap M_1| < \kappa$, $|N \cap M_1| < \kappa$ y que $|(S - A) \cap M_1| < \kappa$.

(3) Si H_1 y H_2 son elementos distintos de $\mathcal{C}$, $F(H_1) \neq F(H_2)$.

En efecto, sin perder generalidad, podemos suponer que existe $M \in H_1 - H_2$. Entonces $S - M \in \mathcal{F}'(H_2)$ y $M \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}'(H_1)$, porque de otra forma, $(S - M) \cup (S - A) = S$ para algún $A \in \mathcal{F}'(H_1)$, y esto implica que $|(S - A) \cap M| = |((S-M) \cup (S-A)) \cap M| = |M| = \kappa$, contradicción.

Por último, como $\kappa^+ = 2^\kappa$ y $|\Sigma| \geq \kappa^+$, $\mathcal{C}$ tiene cardinal 2^{2^κ}. El lema 36 implica que si $H \in \mathcal{C}$, $\mathcal{A}(F(H))$ es una subálgebra de $\mathcal{P}(S)$ λ^+-completa, y el lema 37 implica que existe una subcolección de $\mathcal{C}$, del mismo cardinal que $\mathcal{C}$, tal que las álgebras correspondientes a los elementos de esa subcolección son no isomorfas entre sí.

Dados κ y λ cardinales, diremos que κ es λ^+-medible si existe un ultrafiltro en κ, no principal y λ^+-completo. Además de este concepto utilizaremos en el siguiente teorema el de familia de gran oscilación: (ver W. W. Comfort y S. Negrepontis [1974, pág.75 y

76) una familia $\mathcal{S}$ de partes de un conjunto T es de λ^+-gran oscilación, si para toda subfamilia $(M_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ y todo $D\subset\lambda$, existe $t\in T$ tal que $t\in T - M_\gamma$ si $\gamma\in D$, y $t\in M_\gamma$ si $\gamma\notin D$.

41.- <u>Teorema</u> Sea S un conjunto infinito de cardinal κ y sea λ un cardinal tal que $\kappa^\lambda = \kappa$.

Si κ no es λ^+-medible, existe una familia de cardinal 2^{2^κ}, de subálgebras de $\mathcal{P}(S)$, λ^+-completas y dos a dos no isomorfas.

Demostración:

Por comodidad de notación ponemos $\kappa^* = 2^{2^\kappa}$.

La prueba del teorema 40 muestra que es suficiente encontrar una familia $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha<\kappa^*}$ de filtros en S, λ^+-completos, tales que, si F_α es el conjunto de puntos adherentes a $\mathcal{F}_\alpha$, se tenga:

(1) $F_\alpha \cap S = \emptyset$.

(2) $|F_\alpha| \geq 2$.

(3) $F_\alpha \neq F_\beta$ para todos $\alpha, \beta \in \kappa^*$, $\alpha \neq \beta$.

Como $\omega \leq \lambda$ porque κ no es λ^+-medible, $\lambda < \kappa$ porque $\kappa^\lambda = \kappa$, y $\kappa \leq \kappa^{\lambda^+} = \kappa^\lambda = \kappa$, podemos escoger una familia $(M_\gamma)_{\gamma<2^\kappa}$ en $\mathcal{P}(S)$, que es de λ^+-gran oscilación (ver W. W. Comfort y S. Negrepontis [1974, pág. 77, cor. 3.17]).

Sea $(D_\alpha)_{\alpha<\kappa^*}$ la familia de todos los subconjuntos de 2^κ. Para cada $\alpha<\kappa^*$, sea $\mathcal{B}_\alpha = \{ S - M_\gamma : \gamma\in D_\alpha \} \cup \{ M_\gamma : \gamma\notin D_\alpha \}$.

Puesto que $(M_\gamma)_{\gamma<2^\kappa}$ es de λ^+-gran oscilación, existe un filtro $\mathcal{F}_\alpha$, que es λ^+-completo y que contiene a $\mathcal{B}_\alpha$.

Supongamos que $F_\alpha \cap S = \emptyset$ para todo $\alpha<\kappa^*$. Entonces también $|F_\alpha| \geq 2$ para todo $\alpha<\kappa^*$, porque si $|F_\alpha| = 1$, $\mathcal{F}_\alpha$ sería un ultrafiltro no principal en S y λ^+-completo, en contra de la hipótesis de que κ no es λ^+-medible. Luego se tiene (2). Para ver (3), sea $\alpha<\beta<\kappa^*$ y supongamos que existe $\gamma\in D_\alpha - D_\beta$; entonces $S - M_\gamma \in \mathcal{F}_\alpha$ y $M_\gamma \in \mathcal{F}_\beta$, luego $F_\alpha \neq F_\beta$.

Finalmente probaremos que existe un subconjunto L de κ^*, tal que $|L| = \kappa^*$ y que $F_\alpha \cap S = \emptyset$ para todo $\alpha\in L$, lo que terminará la demostración del teorema.

Consideramos $\{ F_\alpha \cap S : \alpha<\kappa^* \}\subset \mathcal{P}(S)$. Como $|\mathcal{P}(S)| = 2^\kappa < cf(\kappa^*)$ existe L subconjunto de κ^* con $|L| = \kappa^*$ y T subconjunto de S tales que $F_\alpha \cap S = T$ para todo $\alpha\in L$. Afirmamos que $T = \emptyset$. En efecto, sean α y β elementos de L, $\alpha \neq \beta$, y supongamos que existe $\gamma\in D_\alpha - D_\beta$; entonces $S - M_\gamma \supset F_\alpha \cap S$ y $M_\gamma \supset F_\beta \cap S$. Luego $T \subset M_\gamma \cap (S - M_\gamma)$ y ha de ser vacío.

42.- Corolario Existe una familia de cardinal 2^{2^c} de subálgebras de partes del conjunto de números reales, numerablemente completas y no isomorfas entre sí.

Demostración:

El cardinal del continuo no es ω_1-medible (ver F. R. Drake [1974, pág. 173]), y $c^\omega = c$. Luego se puede aplicar el teorema 41.

Este corolario resuelve la otra parte de la cuestión original de S. Ulam (D. R. Mauldin [1981, prob. 37]).

43.- Nota Vamos a justificar la inclusión de los teoremas 40 y 41.

Sin la suposición $c^+ = 2^c$, el teorema 40 no implica el corolario 42. No obstante, bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo, $\kappa^+ = 2^\kappa$, el teorema 40 implica el teorema 41: si $\kappa^\lambda = \kappa$, entonces

$\lambda < cf(\kappa)$.

Inversamente, si existen cardinales medibles, el teorema 41 no implica el teorema 40. Finalmente, si suponemos que no existen cardinales medibles ambos teoremas son equivalentes, bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo.

CAPITULO III

TEOREMA DE NIKODYM EN COPRODUCTOS DE ALGEBRAS DE BOOLE

En este capítulo estudiamos propiedades de tonelación de los espacios de funciones medibles simples o elementales, escalares o vectoriales, definidas sobre un álgebra de Boole. Se demuestra en primer lugar que si el espacio de Stone del álgebra contiene una sucesión convergente no trivial, el espacio de las funciones simples escalares no es tonelado. La existencia de tales sucesiones convergentes implica la de sucesiones disjuntas en el álgebra de Boole, con pocas propiedades de separación (ver definición 6). Mostramos en el ejemplo 9, un álgebra de Boole en la que el recíproco no es cierto.

A continuación probamos un teorema en cierto modo sorprendente, en el que se establece la tonelación de todos los espacios de funciones elementales, que estrictamente contienen a las funciones simples, y que representan funciones continuas en el espacio de Stone del álgebra, cualquiera que sea ésta.

Al estudiar la tonelación de espacios de funciones simples definidas en álgebras de Boole coproductos (Z. Semadeni [1971, pág. 280 y 361]), se llega inmediatamente al problema de estudiar la tonelación de un producto tensorial inyectivo de espacios localmente convexos; hemos obtenido un resultado de carácter general, que nos permite posteriormente caracterizar los coproductos de álgebras de Boole en los que se verifica el teorema de Nikodým. Esta caracterización es usada en el capítulo IV para obtener la de los coproductos de álgebras de Boole en los que se cumple el teorema de Vitali-Hahn-Saks.

Comenzamos recordando algunas definiciones (G. L. Seever [1968]).

1.- Definiciones Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff.

Una familia C de funciones escalares continuas definidas en K, se llama normal cuando, dados dos subconjuntos cerrados disjuntos A y B de K, existe $f \in C$ tal que f es constante e igual a 1 sobre A y constante e igual a 0 sobre B.

Diremos que K es un N-espacio cuando toda familia de medidas de Borel regulares en K, que esté acotada puntualmente sobre un $C \subset \mathcal{C}(K)$ que es normal, esté acotada en la norma de $\mathcal{M}(K)$.

2.- Nota Es inmediato comprobar que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole y K es su espacio de Stone, K es un N-espacio si y sólo si se verifica en $\mathcal{A}$ el teorema de Nikodým, o lo que es equivalente, el espacio de las funciones simples escalares en $\mathcal{A}$ es tonelado (ver W. Schachermayer [1978]).

3.- Teorema Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff.

Si K es un N-espacio, K no contiene sucesiones convergentes no triviales.

Demostración:

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en K, de puntos distintos, que converge hacia x, con $x_n \neq x$ para todo $n\in\omega$.

Para cada $n\in\omega$, sea ν_n la medida cuya masa total es 1 y que está concentrada en x_n.

Sea $\mu_n = n(\nu_n - \nu_{n+1})$. Es claro que $|\mu_n|(K) = 2n$ para todo $n\in\omega$, por lo que la sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\in\omega}$ no está acotada en la norma de $\mathcal{M}(K)$.

Sin embargo, dicha sucesión está puntualmente acotada sobre una familia normal C. En efecto, sea C el conjunto de todas las funciones escalares continuas definidas en K para las que

$$\sup_{n\in\omega} \left|\int f d\mu_n\right| < +\infty .$$

Comprobemos que C es normal. Sean A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de K. Uno de los dos conjuntos $\{ n\in\omega : x_n\in A \}$, $\{ n\in\omega : x_n\in B \}$ es finito, ya que la sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ es convergente.

Supongamos que es finito el segundo de ellos y que $x\in K - B$. El conjunto $A_1 = A\cup\{x\}\cup\{ x_n : x_n\in K - B \}$, es compacto, al ser una unión de dos compactos, A y una sucesión convergente con su límite. Como $A_1\cap B = \emptyset$, existe $f\in\mathcal{C}(K)$ tal que $f = 1$ sobre A_1 y $f = 0$ sobre B. Salvo para un número finito de índices n, se tiene que $f(x_n) = 1$, luego $\int f d\mu_n = n(f(x_n) - f(x_{n+1})) = 0$. Así pues

$$\sup_{n\in\omega} |n(f(x_n) - f(x_{n+1}))| = \sup_{n\in\omega} |\int f d\mu_n| < +\infty$$ y por ello $f\in C$.

En el caso en que $x\in B$, se tiene que $x\in K - A$ y por tanto el conjunto $\{ n\in\omega : x_n\in A \}$ es finito. Por simetría se obtiene de nuevo una función $f\in C$ tal que $f = 1$ en A y $f = 0$ en B.

4.- Nota Un resultado muy conocido (ver por ejemplo A. Wilansky [1978, pág. 245]), establece que si el compacto Hausdorff K es un G-espacio, es decir, $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Banach con la propiedad de Grothendieck, entonces K no contiene sucesiones convergentes no triviales. La prueba consiste en mostrar que si K contiene una sucesión convergente no trivial, $\mathcal{C}(K)$ tiene un cociente isomorfo al espacio de Banach c_0 , mientras que los cocientes separables de los espacios de Banach con la propiedad de Grothendieck deben de ser reflexivos.

Esta prueba no sirve si K es un N-espacio que no es G-espacio, puesto que en ese caso $\mathcal{C}(K)$ contiene un subespacio isométrico a c_0 y complementado en $\mathcal{C}(K)$ (ver la proposición 6 del capítulo IV). Que existen N-espacios que no son G-espacios ha sido demostrado por W. Schachermayer [1978] : el espacio de Stone del álgebra de Boole de los subconjuntos del intervalo $[0,1]$ que son medibles-Jordan proporciona un ejemplo.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, denotamos por $S(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las funciones simples escalares sobre $\mathcal{A}$, dotado de la norma del supremo. Este espacio puede ser definido formalmente como puede verse en Z. Semadeni [1971, pág. 274] , o bien entenderse como el espacio de las funciones continuas en K, espacio de Stone de

$\mathcal{A}$, que sólo toman un número finito de valores.

Como ya hemos mencionado, S($\mathcal{A}$) es tonelado cuando se verifica en $\mathcal{A}$ el teorema de Nikodým, y recíprocamente. Algunas propiedades más fuertes que la tonelación han sido probadas para S($\mathcal{A}$) cuando $\mathcal{A}$ es un álgebra numerablemente completa: M. Valdivia [1979] demuestra que en ese caso S($\mathcal{A}$) es supratonelado. Una modificación de su prueba permite demostrar que si $\mathcal{A}$ es de interpolación, o más generalmente, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad (f), S($\mathcal{A}$) es supratonelado. J. Arias de Reyna [198?] ha demostrado que si $\mathcal{A}$ es numerablemente completa S($\mathcal{A}$) no es totalmente tonelado. Nosotros obtenemos ahora que, como consecuencia del teorema 3, S($\mathcal{A}$) nunca es totalmente tonelado.

5.- <u>Corolario</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole infinita.

Si $\mathcal{A}$ no contiene una sucesión infinita e independiente, S($\mathcal{A}$) no es tonelado.

Si $\mathcal{A}$ contiene una sucesión infinita e independiente, S($\mathcal{A}$) no es totalmente tonelado.

Demostración:

Si $\mathcal{A}$ no contiene una sucesión infinita e independiente, el espacio de Stone de $\mathcal{A}$ es disperso (R. Sikorski [1964, pág. 35]); como $\mathcal{A}$ es infinita, contiene una sucesión convergente no trivial; por el teorema 3, S($\mathcal{A}$) no es tonelado.

Si por el contrario $\mathcal{A}$ contiene una sucesión infinita e independiente, la prueba de J. Arias de Reyna [198?] sirve para concluir que S($\mathcal{A}$) no es totalmente tonelado.

6.- <u>Definición</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. Diremos que una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, es muy inseparable cuando no exista un elemento A de $\mathcal{A}$, tal que sean simultáneamente infinitos los conjuntos: $\{ n\in\omega : A_n \leq A \}$ y $\{ n\in\omega : A_n\wedge A = 0 \}$.

7.- <u>Proposición</u> Si un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ no contiene sucesiones disjuntas muy inseparables, en su espacio de Stone no hay sucesiones convergentes no triviales. Por tanto, si además $\mathcal{A}$ es infinita, contiene una sucesión independiente infinita.

Demostración:

Sea K el espacio de Stone de $\mathcal{A}$ y supongamos que $(x_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión en K convergente hacia x, no trivial. Pasando a subsucesión si es necesario, se puede suponer que existe una sucesión $(B_n)_{n\in\omega}$ de abiertos y cerrados de K, disjunta, y tales que $x_n\in B_n$ para todo $n\in\omega$.

Si existiera un subconjunto abierto y cerrado B de K tal que los dos conjuntos $\{ n\in\omega : B_n\subset B \}$ y $\{ n\in\omega : B_n\cap B = \emptyset \}$ son infinitos, se tendría $x\in\bar{B} = B$ y $x\in\overline{(K - B)} = K - B$, lo que es absurdo. Esto, junto con el isomorfismo existente entre $\mathcal{A}$ y el álgebra de abiertos y cerrados de K completa la prueba.

8.- <u>Nota</u> En la nota 14 del primer capítulo se muestra un álgebra de Boole en la que no hay sucesiones disjuntas muy inseparables pero para la que el espacio de funciones simples ~~no~~ es tonelado. No conocemos un ejemplo de álgebra de Boole $\mathcal{A}$ que contenga una sucesión infinita muy inseparable, pero que $S(\mathcal{A})$ sea tonelado. El siguiente ejemplo va en esa dirección, y muestra que el recíproco de la proposición 7 es falso.

9.- Ejemplo Denotemos por Ω al conjunto de las parejas de números enteros (n,m) tales que $n \geq m \geq 1$. Sea A_n el subconjunto de Ω formado por las parejas cuya primera componente es n .

Dado $A \subset \Omega$, se define $d(A) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}|A \cap A_n|$, cuando éste exista. Al número $d(A)$ le llamaremos densidad de A. Sea $\mathcal{A}$ la colección de las partes de Ω cuya densidad es cero o uno. Es fácil de probar que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, subálgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Para cada $n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{A}$. Efectivamente, $d(A_n) = 0$. La sucesión disjunta $(A_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{A}$ es muy inseparable; en efecto, si A es un elemento de $\mathcal{A}$, y el conjunto $\{ n \geq 1 : A_n \subset A \}$ es infinito, la sucesión $(n^{-1}|A \cap A_n|)_{n\geq 1}$ tiene a 1 como valor adherente, y al ser $A \in \mathcal{A}$, necesariamente $d(A) = 1$, luego no puede ser infinito el conjunto $\{ n \geq 1 : A \cap A_n = \emptyset \}$.

El espacio de Stone de $\mathcal{A}$ no contiene sucesiones convergentes no triviales. Utilizamos la identificación del espacio de Stone del álgebra $\mathcal{A}$ con el conjunto de ultrafiltros en $\mathcal{A}$.

Sea $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ una sucesión en el espacio de Stone, convergente hacia $\mathcal{U}$.

Si existe un $A \in \mathcal{U}$, con densidad nula, entonces a partir de un cierto índice $A \in \mathcal{U}_n$. Como la traza de $\mathcal{A}$ sobre A es $\mathcal{P}(A)$ (todo subconjunto de uno con densidad nula también es de densidad nula) y A es numerable, el espacio de Stone de la traza es homeomorfo a $\beta\omega$ por lo cual, la traza de $\mathcal{U}_n$ sobre A es igual a la de $\mathcal{U}$, y esto a partir de un cierto índice. Pero si dos ultrafiltros tienen igual traza sobre un elemento común, son iguales; luego la sucesión de partida es trivial.

Si la sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ no es trivial, pasando a subsucesión si es necesario, se puede suponer que todos los términos son distintos entre sí. Si el conjunto

$\{ n\in\omega : \text{existe } A\subset\Omega \text{ finito tal que } A\in\mathcal{U}_n \}$

fuera infinito, infinitos $\mathcal{U}_n$ estarían generados por puntos de Ω. De estos puntos, infinitos de ellos estarían contenidos en un conjunto de densidad nula, y por el razonamiento del párrafo anterior, a partir de un índice todos coinciden. Esto contradice que todos los términos de la sucesión de partida son distintos.

Podemos por tanto suponer que el límite $\mathcal{U}$ no contiene conjuntos de densidad nula y que para todo $n\in\omega$, no existe A finito con $A\in\mathcal{U}_n$. Se tiene entonces que $\mathcal{U} = \{ A\subset\Omega : d(A) = 1 \}$. Pasando de nuevo a subsucesión si es necesario, y recordando que la sucesión no es trivial, podemos obtener una sucesión $(B_m)_{m\in\omega}$ de conjuntos de densidad nula, $B_m\in\mathcal{U}_m$, y disjunta.

Dado $m \geq 1$, existe $n_m \geq 1$ tal que

$$n^{-1}|B_1\cap A_n| + n^{-1}|B_2\cap A_n| + \dots + n^{-1}|B_m\cap A_n| \leq 1/m$$

siempre que $n \geq n_m$.

Sea $D_m = B_m - \bigcup\{ A_n : n < n_m \}$. $D_m\in\mathcal{U}_m$ pues $\mathcal{U}_m$ no está localizado en el conjunto finito $\bigcup\{ A_n : n < n_m \}$.

Sea $A = \bigcup\{ D_m : m \geq 1\}$; veamos que A es de densidad nula:

$$|A\cap A_n| = |\bigcup\{ D_m\cap A_n : m \geq 1 \}| = |\bigcup\{ D_m\cap A_n : m \geq 1 \,,\, n \geq n_m \}|$$

$$= \sum\{ |D_m\cap A_n| : m \geq 1 \,,\, n \geq n_m \} \leq \sum\{ |B_m\cap A_n| : m \geq 1 \,,\, n \geq n_m \}$$

$\leq n/m(n)$ donde $m(n) = \text{máx}\{ m \geq 1 : n \geq n_m \}$.

Luego $n^{-1}|A\cap A_n| \leq 1/m(n)$, de donde $d(A) = 0$.

De nuevo hemos encontrado que infinitos términos de la sucesión están localizados en un conjunto de densidad nula, en contra de que todos los términos son distintos.

10.- Nota El álgebra de Boole definida en el ejemplo anterior no tiene la propiedad de Grothendieck (W. Schachermayer [1978]), o lo que es lo mismo, su espacio de Stone no es un G-espacio. En efecto, si $\mu_n = n^{-1}|A \cap A_n|$ para $A \in \mathcal{A}$, y para $n \geq 1$, la sucesión de medidas así definida es acotada ($|\mu_n|(\Omega) = 1$), existe $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = d(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, pero al ser $\mu_n(A_n) = 1$, no es uniformemente fuertemente aditiva.

No conozco si se verifica en $\mathcal{A}$ el teorema de Nikodým.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, $B(\mathcal{A})$ denota el espacio de Banach completado del espacio normado $S(\mathcal{A})$. $B(\mathcal{A})$ se identifica canónicamente con el espacio de las funciones escalares continuas definidas en el espacio de Stone de $\mathcal{A}$.

Vamos a estudiar la tonelación de algunos subespacios intermedios entre $S(\mathcal{A})$ y $B(\mathcal{A})$; por comodidad en las definiciones supondremos que $\mathcal{A}$ es el álgebra de Boole de abiertos y cerrados de un espacio compacto Hausdorff totalmente disconexo.

11.- Definición Sea E un espacio vectorial de sucesiones escalares convergentes a cero, que contiene a las que sólo tienen un número finito de coordenadas no nulas. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Boole de los abiertos y cerrados del espacio topológico compacto Hausdorff y totalmente disconexo K.

Se define $E(\mathcal{a})$ (o bien $E(K)$ que lo mismo da) como el espacio vectorial generado por las funciones escalares definidas en K, que se pueden expresar como suma puntual de una serie $\sum_{n\in\omega}\alpha_n\chi_{A_n}$, donde $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{a}$ y $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ es un elemento de E.

Observemos que el conjunto generador de $E(\mathcal{a})$ no es en general un espacio vectorial. En efecto, si $\mathcal{a}$ es infinita y E contiene un elemento $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ con infinitos términos no nulos, se considera la función $f = \chi_K + \sum_{n\in\omega}\alpha_n\chi_{A_n}$, donde $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{a}$ con $A_n \neq \emptyset$ para todo $n\in\omega$(ver la demostración del corolario 17); si $f = \sum_{n\in\omega}\beta_n\chi_{B_n}$ con $(B_n)_{n\in\omega}$ disjunta en $\mathcal{a}$, entonces para cualquier $n\in\omega$ se tiene que $1 + \alpha_n \in f(K) \subset \{\beta_m : m\in\omega\} \cup \{0\}$ lo que imposibilita que $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$.

12.- Proposición Sean $\mathcal{a}$, K y E como en la definición 11.

Se verifican: (1) $S(\mathcal{a}) \subset E(\mathcal{a}) \subset c_0(\mathcal{a}) \subset \mathcal{C}(K)$.

y (2) Si K contiene un subespacio homeomorfo al ordinal $\omega^\omega+1$ o si K contiene un subespacio perfecto no vacío, entonces $c_0(\mathcal{a}) \neq \mathcal{C}(K)$.

Demostración:

De (1), salvo la última inclusión, las otras son obvias a partir de la definición 11. Sólo vemos por tanto que $c_0(\mathcal{a}) \subset \mathcal{C}(K)$.

Basta probar que si $(\alpha_n)_{n\in\omega} \in c_0$ y $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{a}$, la función $f = \sum_{n\in\omega}\alpha_n\chi_{A_n}$ es continua. Para ello se considera la sucesión de funciones $f_m = \sum_{n\leq m}\alpha_n\chi_{A_n}$, $m\in\omega$.

Cada f_m es una función simple $\mathcal{A}$-medible, luego continua. Como $\|f_m - f\| = \sup_{n>m}|\alpha_n|$, f es límite uniforme en K de la sucesión $(f_m)_{m\in\omega}$ y por tanto es continua.

Para probar (2) observemos en primer lugar que si $f\in c_0(\mathcal{A})$ entonces $f(K)^{(\omega)} = \emptyset$ (derivado ω-ésimo: ver Z. Semadeni [1971, pág. 147]). En efecto, si $f = \sum_{n\in\omega}\alpha_n\chi_{A_n}$ con $(A_n)_{n\in\omega}$ sucesión disjunta en $\mathcal{A}$ y $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $f(K)' = \{0\}$ y por lo tanto $f(K)'' = \emptyset$; es suficiente pues comprobar que si f y g son continuas y $f(K)^{(\omega)} = g(K)^{(\omega)} = \emptyset$, y $h = f + g$, también $h(K)^{(\omega)} = \emptyset$. Esto es consecuencia de los siguientes hechos de carácter general:

(a) Si L_1 y L_2 son dos espacios topológicos compactos Hausdorff y $n\in\omega$ entonces $(L_1\times L_2)^{(n)}\subset \bigcup_{k\le n} L_1^{(k)}\times L_2^{(n-k)}$.

(b) Si $\phi:L_1\longrightarrow L_2$ es una aplicación continua y sobreyectiva, entonces $L_2^{(n)}\subset \phi(L_1^{(n)})$, (Z. Semadeni [1971, pág. 149 (C)]).

Por compacidad existe $n\in\omega$ tal que $f(K)^{(n)} = g(K)^{(n)} = \emptyset$. Se tiene sucesivamente $h(K)^{(2n)}\subset (f(K) + g(K))^{(2n)}\subset$

$$\subseteq (\phi(F(K)\times g(K)))^{(2n)}\subset \phi((f(K)\times g(K))^{(2n)}) \subset$$

$$\subset \phi(\bigcup_{k\le 2n} f(K)^{(k)}\times g(K)^{(2n-k)}) = \emptyset.$$

Luego $h(K)^{(\omega)} = \emptyset$.

Si K contiene un subespacio L homeomorfo al ordinal $\omega^\omega+1$, existe una función $g\in\mathcal{C}(L)$ tal que $g(L)$ es homeomorfo a $\omega^\omega+1$. Luego en particular $g(L)^{(\omega)} \neq \emptyset$. Si f es una extensión de g a todo K, que existe por el teorema de Tietze-Urysohn, $f(K)^{(\omega)} \neq \emptyset$ y por ello f no está en $c_0(\mathcal{A})$.

Si K contiene un subconjunto perfecto no vacío, existe $f\in\mathcal{C}(K)$

tal que $f(K) = [0,1]$ (Z. Semadeni [1971, pág. 148, 8.5.4.]), luego $f \notin c_0(\mathcal{A})$.

13.- Notas

(1) La condición impuesta al espacio vectorial E de que sus elementos sean sucesiones convergentes a cero es necesaria para que $E(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(K)$, cualquiera que sea K. Por ejemplo, si, análogamente a la definición 11, se definiera $c(\mathcal{A})$, tendríamos que $c(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(K)$ si y sólo si K es básicamente disconexo, es decir, si y sólo si $\mathcal{A}$ es numerablemente completa.

En efecto, si $\mathcal{A}$ es numerablemente completa y $f = \sum_{n\in\omega} \alpha_n \chi_{A_n}$ con $(A_n)_{n\in\omega}$ sucesión disjunta en $\mathcal{A}$ y $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ sucesión de escalares convergente hacia α, f es límite uniforme en K de la sucesión de funciones continuas $(f_m)_{m\in\omega}$ si se define

$$f_m = \sum_{n<m} \alpha_n \chi_{A_n} + \alpha \chi_{\bigvee\{ A_n \; : \; n \geq m \}} .$$

Si por el contrario $\mathcal{A}$ no es numerablemente completa, existe una sucesión disjunta $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, con $A_n \neq \emptyset$ para todo $n\in\omega$, y tal que no existe supremo en $\mathcal{A}$ de $(A_n)_{n\in\omega}$. Consideramos el elemento de $c(\mathcal{A})$ definido por $f = \sum_{n\in\omega} \alpha_n \chi_{A_n}$ donde $\alpha_n = (n+1)^{-1}(n+2)$; f no es una función continua en K pues si lo fuera,

$$A = f^{-1}(\{ z\in\mathbb{C} \; : \; |z|>1/2 \}) = f^{-1}(\{ z\in\mathbb{C} \; : \; |z| \geq 1 \})$$

sería el supremo en $\mathcal{A}$ de la sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$. Luego $c(\mathcal{A})$ no está contenido en $\mathcal{C}(K)$.

(2) Si K es homeomorfo a un ordinal ω^n+1 con $n\in\omega$, entonces $c_0(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(K)$.

Damos sólo la demostración para el caso $n = 2$, pudiendo ser extendida de manera inmediata, pero engorrosa, al caso general.

Sea pues $f \in \mathcal{C}(\omega^2+1)$, y sea g la función

$$f - f(\omega^2)\chi_{\omega^2+1} - \sum_{m\in\omega}(f(\omega(m+1)) - f(\omega^2))\chi_{(\omega m,\omega(m+1)]}$$

Como f es continua, $\lim_{m\to\infty} f(\omega(m+1)) = f(\omega^2)$, y al ser $(\omega m,\omega(m+1)]$ de $\mathcal{A}$, es suficiente probar que $g \in c_0(\mathcal{A})$.

Sea ϕ una biyección de ω en el conjunto de puntos aislados de ω^2+1, es decir en $\omega^2+1 - (\omega^2+1)'$. Se tiene que

$$g = \sum_{j\in\omega}(f(\phi(j)) - f(\omega(\psi(j)+1)))\chi_{\{\phi(j)\}} \quad \text{si } \psi(j) = \min\{m:\phi(j)<\omega(m+1)\}$$

luego basta ver que $\lim_{j\to\infty}(f(\phi(j)) - f(\omega(\psi(j)+1))) = 0$.

Dado $\varepsilon>0$, existe $m_0\in\omega$ tal que si $m\geq m_0$ y $k\geq 1$, entonces $|g(\omega m+k)| < \varepsilon$, pues g es continua y $g(\omega^2) = 0$.

Para cada $m\leq m_0$ existe $k_m\geq 1$ tal que si $k\geq k_m$ entonces $|g(\omega m+k)|<\varepsilon$ porque $g(\omega(m+1)) = 0$.

Sea $j_0\in\omega$ tal que $\phi(j)\notin\{\omega m+k : m\leq m_0 \text{ y } k\leq k_m\}$ si $j\geq j_0$. Es claro que si $j\geq j_0$ entonces $g(\phi(j)) = f(\phi(j)) - f(\omega(\psi(j)+1))$ es de módulo menor que ε.

(3) Si $\mathcal{A}$ es numerablemente completa e infinita, para todo $n\in\omega$ existe $f\in c_0(\mathcal{A})$ tal que $f(K)^{(n)} \neq \emptyset$.

Sea $(A_{k_0,\dots,k_{n-1}})_{k_i\in\omega,\ i<n}$ una familia disjunta en $\mathcal{A}$, y sea $B_{k_i} = \bigvee\{A_{k_0,\dots,k_{n-1}} : k_j\in\omega,\ j\neq i,\ j = 0,\dots,n-1\}$ para cada $i<n$, $k_i\in\omega$.

Sea $f = \sum_{i<n}\left(\sum_{k_i\in\omega}(k_i+1)^{-1}\chi_{B_{k_i}}\right)$; obviamente $f\in c_0(\mathcal{A})$, y

como $f = \sum \{ \sum_{i<n} (k_i+1)^{-1}\chi_{A_{k_0,\dots,k_{n-1}}} : i<n,\ k_i \in \omega \}$ se tiene que $f(K)^{(n)} = \{0\}$.

La proposición 12 plantea el problema de si $E(\mathcal{A})$ es tonelado; conocemos que $S(\mathcal{A})$ será tonelado cuando el álgebra de Boole $\mathcal{A}$ tenga algunas propiedades de separación en sus sucesiones disjuntas, tales como la interpolación subsecuencial. Vemos en el siguiente teorema que si E contiene, además de las sucesiones con un número finito de términos no nulos, una sucesión con infinitos términos no nulos el espacio $E(\mathcal{A})$ es tonelado, cualquiera que sea $\mathcal{A}$.

14.- Teorema Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff y totalmente disconexo. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Boole de abiertos y cerrados de K. Si E es un espacio vectorial de sucesiones escalares convergentes a cero, que contiene a las sucesiones con un número finito de términos no nulos, y contiene un elemento con infinitos términos no nulos, $E(\mathcal{A})$ es tonelado.

Demostración:

Observemos en primer lugar que si $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ es un elemento de E, y $(A_k)_{k\in\omega}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{A}$, para cualquier subsucesión $(\alpha_{n_k})_{k\in\omega}$ se tiene que la función $f = \sum_{k\in\omega} \alpha_{n_k}\chi_{A_k}$ es de $E(\mathcal{A})$; en efecto, basta definir $B_n = \emptyset$ si $n \neq n_k$ para todo $k\in\omega$, y $B_{n_k} = A_k$, y comprobar que entonces $f = \sum_{n\in\omega} \alpha_n\chi_{B_n}$.

En particular, a partir de una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ de E, con infinitos términos no nulos, se puede construir una subsucesión $(\alpha_{n_k})_{k\in\omega}$

con $0 < |\alpha_{n_k}| < 1$ para todo $k \in \omega$, y de forma que si E_1 es el espacio vectorial generado por E y por la subsucesión, $E_1(\mathcal{A}) = E(\mathcal{A})$. Podemos suponer, sin restricción, por lo tanto, que $(\alpha_n)_{n\in\omega} \in E$, y que $0 < |\alpha_n| < 1$ para todo $n \in \omega$.

Razonamos por reducción al absurdo. Supuesto que $E(\mathcal{A})$ no es tonelado, existe, debido a la identificación del dual de $E(\mathcal{A})$ que se desprende de la proposición 12, una sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega}$ de medidas complejas de Borel regulares en K, tales que

$$\sup_{n\in\omega} |\mu_n|(K) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \sup_{n\in\omega} \left|\int f d\mu_n\right| < +\infty$$

para toda $f \in E(\mathcal{A})$.

Por consiguiente, $\sup\{ |\mu_n(A)| : n\in\omega,\ A\in\mathcal{A}\} = +\infty$.

Existen $B_0 \in \mathcal{A}$ y $n_0 \in \omega$ tales que

$$|\alpha_0\mu_{n_0}(B_0)| > \sup_{n\in\omega} |\mu_n(K)| + |\alpha_0|^{-1} + 1$$

Si $C_0 = K - B_0$, $|\mu_{n_0}(C_0)| = |\mu_{n_0}(K) - \mu_{n_0}(B_0)| \geq |\mu_{n_0}(B_0)| - |\mu_{n_0}(K)|$

$$= (1 - |\alpha_0|)|\mu_{n_0}(B_0)| + |\alpha_0\mu_{n_0}(B_0)| - |\mu_{n_0}(K)| > |\alpha_0|^{-1} + 1 \quad ;$$

luego $|\alpha_0\mu_{n_0}(C_0)| > 1$.

Es claro que al menos uno de los supremos de estos dos conjuntos es infinito: $\{ |\mu_n(A)| : n\in\omega,\ A\in\mathcal{A},\ A\subset B_0 \}$,

$$\{ |\mu_n(A)| : n\in\omega,\ A\in\mathcal{A},\ A\subset C_0 \}.$$

Si lo es el primero defino $A_0 = C_0$; si no, defino $A_0 = B_0$. Es evidente que en cualquier caso se tiene que $|\alpha_0\mu_{n_0}(A_0)| > 1$ y

$$\sup\{ |\mu_n(A)| : n\in\omega,\ A\in\mathcal{A},\ A\subset K - A_0 \} = +\infty .$$

Por inducción, supongamos ya definidos $A_k \in \mathcal{A}$, $n_k \in \omega$, para $k < m$

de forma que $(A_k)_{k<m}$ es disjunta, $(n_k)_{k<m}$ es estrictamente creciente, y tales que

$$|\alpha_k \mu_{n_k}(A_k)| > \sum_{i<k} |\mu_{n_k}(A_i)| + k + 1 \quad \text{para todo } k < m,$$

y $\sup\{ |\mu_n(A)| : n \in \omega,\ A \in \mathcal{A},\ A \subset K - \bigcup\{A_k : k<m\} \} = +\infty$;

Como $\sup\{ |\mu_n|(K - \bigcup\{A_k : k<m\}) : n \leq n_{m-1} \} < +\infty$, existirán $n_m > n_{m-1}$ y $B_m \in \mathcal{A}$, $B_m \subset K - \bigcup\{A_k : k<m\}$, tales que

$$|\alpha_m \mu_{n_m}(B_m)| > \sup\{ |\mu_n(K - \bigcup\{A_k : k<m\})| : n \in \omega \} +$$

$$+ (1 + |\alpha_m|^{-1})(m + 1 + \sup\{ \sum_{k<m} |\mu_n(A_k)| : n \in \omega \})$$

Sea $C_m = K - (B_m \cup (\bigcup\{A_k : k<m\}))$, $C_m \in \mathcal{A}$. Se tiene

$$|\mu_{n_m}(C_m)| = |\mu_{n_m}(K - \bigcup\{A_k : k<m\}) - \mu_{n_m}(B_m)| \geq |\mu_{n_m}(B_m)| -$$

$$|\mu_{n_m}(K - \bigcup\{A_k : k<m\})| = (1 - |\alpha_m|)|\mu_{n_m}(B_m)| + |\alpha_m \mu_{n_m}(B_m)| -$$

$$- |\mu_{n_m}(K - \bigcup\{A_k : k<m\})| > (1 + |\alpha_m|^{-1})(m + 1 + \sum_{k<m} |\mu_{n_m}(A_k)|).$$

De donde $|\alpha_m \mu_{n_m}(C_m)| > m + 1 + \sum_{k<m} |\mu_{n_m}(A_k)|$.

Definimos $A_m = B_m$ o $A_m = C_m$ de forma que se tenga

$\sup\{ |\mu_n(A)| : n \in \omega,\ A \in \mathcal{A},\ A \subset K - \bigcup\{A_k : k \leq m\} \} = +\infty$, y se puede continuar la inducción.

Sea $\nu_m = \mu_{n_m}$ para todo $m \in \omega$. Se tiene que

$$|\alpha_m \nu_m(A_m)| > \sum_{k<m} |\nu_m(A_k)| + m + 1 \quad \text{para todo } m \in \omega.$$

Sea $m_0 = 0$; dado $k \in \omega$ y $m_i > m_{i-1}$ para $i < k$, tales que se cumple $\sum_{m \geq m_i} |\alpha_m \nu_{m_{i-1}}(A_m)| < 1$, entonces existe $m_k > m_{k-1}$

tal que $\sum_{m\geq m_k} |\alpha_m \nu_{m_{k-1}}(A_m)| < 1$.

Por la observación del comienzo de la demostración, la función $f = \sum_{k\in\omega} \alpha_{m_k} \chi_{A_{m_k}}$ pertenece a $E(\mathcal{Q})$.

Sin embargo, para todo $j \in \omega$, $\int f d\nu_{m_j} = \sum_{k\in\omega} \alpha_{m_k} \nu_{m_j}(A_{m_k}) =$

$= \alpha_{m_j} \nu_{m_j}(A_{m_j}) + \sum_{k<j} \alpha_{m_k} \nu_{m_j}(A_{m_k}) + \sum_{k>j} \alpha_{m_k} \nu_{m_j}(A_{m_k})$; tomando valores absolutos y teniendo en cuenta que el del segundo sumando está mayorado por $\sum_{k<j} |\nu_{m_j}(A_{m_k})| \leq \sum_{m<m_j} |\nu_{m_j}(A_m)|$

y que el tercero lo está por $\sum_{m\geq m_{j+1}} |\alpha_m \nu_{m_j}(A_m)|$

se obtiene que $|\int f d\nu_{m_j}| \geq m_j$, que contradice que $\sup_{n\in\omega} |\int f d\mu_n| < +\infty$.

Como ya mencionamos en la introducción de este capítulo, el estudio de la tonelación de los espacios de funciones simples con valores vectoriales, o el de la tonelación de los espacios de funciones escalares simples sobre álgebras de Boole coproducto, nos ha conducido al estudio de la tonelación de productos tensoriales inyectivos de espacios localmente convexos, obteniendo el siguiente teorema general:

15.- <u>Teorema</u> Sean E y F dos espacios localmente convexos y Hausdorff. Supongamos que:

(a) El dual E' de E contiene una serie $\sigma(E',E)$-incondicionalmente de Cauchy pero que no es $\beta(E',E)$-absolutamente sumable.

(b) F contiene un subespacio isomorfo al subespacio de c_0 formado por las sucesiones con un número finito de términos no nulos.

Entonces, el producto tensorial inyectivo $E \otimes_\varepsilon F$ no es tonelado.

Demostración:

Denotemos por H al subespacio de F que es isomorfo al espacio H_0 formado por las sucesiones escalares con un número finito de coordenadas no nulas, y dotado de la topología inducida por c_0.

Sea T un isomorfismo de H en H_0; sea $f_n = T^{-1}(u_n)$ y $h'_n = T'(u'_n)$

donde, para cada $n \in \omega$, u_n es la sucesión que tiene todas las coordenadas nulas salvo la n-ésima que vale 1, y u'_n es la misma sucesión pero considerada esta vez como elemento de l_1, identificado con el dual de H_0.

Sea V_0 un entorno absolutamente convexo del origen en F, tal que $V_0 \cap H = T^{-1}(B)$, siendo B la bola unidad cerrada de H_0. Sea p el funcional de Minkowski asociado a V_0. Se tiene:

$$|h'_n(h)| = |u'_n(T(h))| \leq |T(h)| \leq p(h)$$

para todo $n \in \omega$.

Según el teorema de Hahn-Banach, existe f'_n aplicación lineal de F en el cuerpo de escalares, que extiende a h'_n y que cumple

$|f'_n(f)| \leq Mp(f)$ para todo $f \in F$.

Es claro que $f'_n \in F'$ y que por construcción $f'_n(f_m) = \delta_{nm}$, para todos $n, m \in \omega$, y donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

Por otra parte, y según la hipótesis (b), existe una sucesión $(e'_n)_{n\in\omega}$ en E' que verifica $\sum_{n\in\omega} |e'_n(e)| < +\infty$ para todo $e \in E$, y que $\sum_{n\in\omega} e'_n$ no es $\beta(E',E)$-absolutamente sumable.

Existe entonces un subconjunto acotado A de E tal que

$\sum_{n\in\omega} p_{A^\circ}(e'_n) = +\infty$. Sea $(e_n)_{n\in\omega}$ una sucesión en A tal que, para todo $n\in\omega$, se tenga $p_{A^\circ}(e'_n) - 2^{-n} < |e'_n(e_n)|$.

Para cada $m\in\omega$, definimos $g'_m = \sum_{n\leq m} e'_n \otimes f'_n \in E'\otimes F'$; consideremos la sucesión $(g'_m)_{m\in\omega}$ en el dual de $E\otimes_\varepsilon F$: probaremos que está $E\otimes F$-acotada pero que no es equicontinua, de donde se concluirá que $E\otimes_\varepsilon F$ no es tonelado.

(1) $(g'_m)_{m\in\omega}$ está $E\otimes F$-acotada.

En efecto, dados $e\in E$ y $f\in F$, se tiene

$$|g'_m(e\otimes f)| = |\sum_{n\leq m} e'_n(e)f'_n(f)| \leq \sum_{n\leq m} |e'_n(e)||f'_n(f)| \leq$$

$$\leq Mp(f) \sum_{n\leq m} |e'_n(e)| \leq Mp(f) \sum_{n\in\omega} |e'_n(e)| \quad \text{, para todo } m\in\omega.$$

(2) $(g'_m)_{m\in\omega}$ no es equicontinuo.

Si lo fuera, existirían entornos del origen U y V, en E y F respectivamente, tales que para cualquier $g\in E\otimes F$ que cumpla $\varepsilon_{(U,V)}(g) \leq 1$ (ver A. Pietsch [1972]) se tiene $|g'_m(g)| \leq 1$, para todo $m\in\omega$.

Sea $g_m = \sum_{n\leq m} e_n\otimes f_n \in E\otimes F$, para $m\in\omega$. Se verifica que

$$\varepsilon_{(U,V)}(g_m) = \sup \{ |\sum_{n\leq m} e'(e_n)f'(f_n)| : e'\in U^\circ,\ f'\in V^\circ \}.$$

Tomamos primero supremo cuando $f'\in V^\circ$; como $V_0\cap H$ es un acotado de H, existe $C_1 > 0$ tal que $V_0\cap H\subset C_1(V\cap H)$, y por consiguiente

$$|f'(\sum_{n\leq m} e'(e_n)f_n)| \leq C_1 p(\sum_{n\leq m} e'(e_n)f_n) .$$

Como A está acotado, existe $C_2 > 0$ tal que $A\subset C_2U$.

Por otra parte, y por la construcción de p, para todo $e'\in U^\circ$ y para todo $m\in\omega$,

$$p\Big(\sum_{n\leq m} e'(e_n)f_n\Big) \leq N\sup_{n\leq m}|e'(e_n)| \quad .$$

Luego $\varepsilon_{(U,V)}(g_m) \leq C_1C_2N$ para todo $m\in\omega$.

Sin embargo, $g'_m(g_m) = \sum_{k\leq m}\sum_{n\leq m} e'_k(e_n)f'_k(f_n) = \sum_{n\leq m} e'_n(e_n) >$

$> \sum_{n\leq m}(p_{A^\circ}(e'_n) - 2^{-n})$, de donde $\lim_{m\to\infty} g'_m(g_m) = +\infty$.

Así pues, la sucesión $(g'_m)_{m\in\omega}$ no es equicontinua.

16.- Notas Algunos resultados sobre la tonelación del producto tensorial inyectivo son conocidos. El siguiente puede verse probado en H. Jarchow [1981, th. 21.3.3.]: "si F es un espacio de Banach con la propiedad de aproximación, y es un S_p-espacio para algún $p\in[1,+\infty]$, entonces para cualquier E espacio de Fréchet no nuclear, $E\otimes_\varepsilon F$ no es tonelado".

La condición sobre F de ser un S_p-espacio no es demasiado fuerte: hasta hace poco tiempo no se conocía ningún ejemplo de espacio de Banach que no fuera S_p-espacio para algún $p\in[1,+\infty]$(G. Pisier [1981]). La propiedad de aproximación no es verificada sin embargo por todos los espacios de Banach, incluso existen algunos que contienen un subespacio isomorfo a c_0 y complementado (y por tanto son S_∞-espacios) y no poseen dicha propiedad (ver J. Lindenstrauss y L. Tzafriri [1977, 2.a.2. y el párrafo que sigue a 1.e.8.]).

En cuanto a la condición sobre E de no nuclearidad, observemos que es equivalente, puesto que E es un espacio metrizable, a que su dual fuerte E'_β no sea nuclear (H. Jarchow [1981, th. 21.5.3.]). Esto puede ser debido a dos razones: una a que exista una serie que es $\sigma(E'_\beta,E'')$-incondicionalmente de Cauchy no $\beta(E',E)$-absolutamente sumable, condición que implica la (a) de nuestro teorema 15, y otra, a que las topologías usuales sobre los espacios de series en E'_β $\sigma(E'_\beta,E'')$-incondicionalmente de Cauchy y $\beta(E',E)$-absolutamente sumable no coinciden (ver H. Jarchow [1981, th. 21.2.1.]).

17.- Corolario Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole infinita y E es un espacio localmente convexo Hausdorff, cuyo dual fuerte contiene una serie no absolutamente sumable, pero $\sigma(E',E)$-incondicionalmente de Cauchy, el espacio $S(\mathcal{A},E)$ de las funciones simples y $\mathcal{A}$-medibles con valores en E, no es tonelado.

Demostración:

Vemos en primer lugar que $S(\mathcal{A})$ contiene un subespacio isomorfo al subespacio de c_0 formado por las sucesiones con un número finito de términos no nulos. En efecto, por ser $\mathcal{A}$ infinita, existe una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{A}$, disjunta y tal que $A_n \neq 0$ para todo $n\in\omega$(si K es el espacio de Stone de $\mathcal{A}$, K es infinito y por tanto contiene una sucesión infinita y discreta (L. Gillman y M. Jerison [1960, pág. 5]); hay por tanto una sucesión de abiertos y cerrados, disjunta, y tal que cada término contiene un punto de la sucesión discreta).

El subespacio H de $S(\mathcal{A})$ generado por las funciones características de los elementos A_n es evidentemente isométrico al subespacio de c_0 que queríamos.

Como $S(\mathcal{A})$ y E están en las condiciones del teorema 11, es sufi ciente comprobar que $S(\mathcal{A},E)$ es isomorfo a $S(\mathcal{A})\otimes_{\varepsilon}E$. En efecto, la aplicación natural que a cada elemento $\sum_{i\leq n}\chi_{A_i}e_i$ de $S(\mathcal{A},E)$ asocia el elemento $\sum_{i\leq n}\chi_{A_i}\otimes e_i$ de $S(\mathcal{A})\otimes_{\varepsilon}E$ es un isomorfismo algebraico.

Además, como un sistema fundamental de seminormas para la topología de $S(\mathcal{A},E)$ está constituido por $p^*(\sum_{i\leq n}\chi_{A_i}e_i) = \sup_{i\leq n} p(e_i)$, cuando p recorre un sistema fundamental de seminormas en E, y dado que la topología sobre $S(\mathcal{A})\otimes_{\varepsilon}E$ está generada por la familia de seminormas $\varepsilon_{(U,V)}(\sum_{i\leq n}\chi_{A_i}\otimes e_i) = \sup\{\,|\sum_{i\leq n}\mu(A_i)e'(e_i)| : \mu\in U^\circ,$ $e'\in V^\circ\}$, cuando U y V recorren bases de entornos del origen en $S(\mathcal{A})$ y E respectivamente, es fácil ver que el isomorfismo es también topológico.

18.- <u>Corolario</u> Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole infinita, y E es un espacio normado de dimensión infinita, $S(\mathcal{A},E)$ no es tonelado.

Demostración:

El dual de E es un espacio de Banach de dimensión infinita, por lo que según el teorema de A. Dvoretzky y C. A. Rogers (ver J. Lindenstrauss y L. Tzafriri [1977, 1.c.2.]) existe una serie en E' que es incondicionalmente convergente pero que no es absolutamente convergente; esta serie es $\sigma(E',E)$-incondicionalmente convergente y no absolutamente sumable. Por el corolario 17, $S(\mathcal{A},E)$ no es tonelado.

19.- <u>Nota</u> El corolario 18 puede obtenerse también de la siguiente manera: como $S(\mathcal{A})\otimes_{\varepsilon}E \subset B(\mathcal{A})\otimes_{\varepsilon}\hat{E} \subset B(\mathcal{A})\hat{\otimes}_{\varepsilon}\hat{E}$, si $S(\mathcal{A},E)$ fuera tonelado, también lo sería $B(\mathcal{A})\otimes_{\varepsilon}\hat{E}$, pero $B(\mathcal{A})$ es isométrico al espacio de las funciones escalares continuas definidas en el espacio de Stone de $\mathcal{A}$, de donde en particular tiene la propiedad de aproximación y es un S_∞-espacio, y como $\hat{E}$ no es nuclear, en contradicción con el resultado citado al comienzo de la nota 16. Este razonamiento permite obtener el siguiente resultado, más general que el corolario 18:

20.- Proposición Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole infinita y E es un espacio localmente convexo metrizable, no nuclear, el espacio $S(\mathcal{A},E)$ no es tonelado.

El siguiente teorema, consecuencia del teorema 15, caracteriza la tonelación del espacio de funciones simples sobre un álgebra de Boole coproducto, en términos de la tonelación de los espacios de funciones simples de los factores.

21.- Teorema Sea $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras de Boole, y sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Boole coproducto de la familia. Entonces si

(1) I es infinito.

o (2) Existen i_0 e i_1 en I con $i_0 \neq i_1$ y tales que $\mathcal{A}_{i_0}$ y $\mathcal{A}_{i_1}$ son infinitas.

o (3) Existe $i \in I$ tal que en $\mathcal{A}_i$ no se verifica el teorema de Nikodým.

se verifica que en $\mathcal{A}$ no se cumple el teorema de Nikodým.

Demostración:

La idea de la prueba consiste en la reducción de la tonelación de $S(\mathcal{A})$ a la tonelación de un espacio de funciones simples con valores vectoriales, al que se pueda aplicar el corolario 18.

Supongamos en primer lugar que nos encontramos en el caso (2); sea $\mathcal{B}$ el álgebra de Boole coproducto de la familia $(\mathcal{A}_i)_{i\in I-\{i_0\}}$; es claro que $S(\mathcal{A})$ se identifica con $S(\mathcal{A}_{i_0}\otimes\mathcal{B})$, y que éste a su vez se identifica con $S(\mathcal{A}_{i_0}, S(\mathcal{B}))$. Como $\mathcal{A}_{i_0}$ y $\mathcal{B}$ son infinitas, el corolario 18 implica que $S(\mathcal{A})$ no es tonelado.

Si ahora en cambio estamos en el caso (1), pongamos $I = I_0 \cup I_1$ con I_0, I_1 disjuntos e infinitos. Sea $\mathcal{B}_j$ el álgebra coproducto de la familia $(\mathcal{A}_i)_{i\in I_j}$, para $j = 0, 1$. Se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_0\otimes\mathcal{B}_1$ y que tanto $\mathcal{B}_0$ como $\mathcal{B}_1$ son infinitas, luego se puede concluir como en el caso (2) que $S(\mathcal{A})$ no es tonelado.

Si, por último, estamos en el caso (3) y no en el (1) ni en el (2), I es finito, y existe i_0 tal que $S(\mathcal{A}_{i_0})$ no es tonelado, siendo además $\mathcal{A}_i$ finita si $i\in I - \{i_0\}$.

Sea $\mathcal{B}$ el álgebra de Boole coproducto de la familia $(\mathcal{A}_i)_{i\in I-\{i_0\}}$ y sea n el cardinal de $\mathcal{B}$. Se tiene sucesivamente, $S(\mathcal{A})$ es isomorfo a $S(\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}_{i_0})$, éste a su vez es isomorfo a $S(\mathcal{B}, S(\mathcal{A}_{i_0}))$, y éste finalmente a $S(\mathcal{A}_{i_0})^n$. Al no ser tonelado $S(\mathcal{A}_{i_0})$, tampoco lo es $S(\mathcal{A})$.

El resultado siguiente es una reformulación del teorema 21, y su demostración es evidente a partir de él:

22.- <u>Corolario</u> El álgebra de Boole coproducto de una familia $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ de álgebras de Boole, verifica el teorema de Nikodým, si y sólo si

I es finito, a lo más una de las álgebras factores es infinita, y és ta verifica dicho teorema.

C A P I T U L O IV

TEOREMA DE VITALI-HAHN-SAKS EN COPRODUCTOS DE ALGEBRAS DE BOOLE

En este último capítulo, se estudia una propiedad de los espacios de Banach, a la que hemos llamado propiedad de Dunford-Pettis fuerte, por razones que aparecerán obvias, y que tiene gran relación con la propiedad de Grothendieck (A. Wilansky [1978, pág. 244]). Esta propiedad de Dunford-Pettis fuerte nos ha surgido de modo natural al estudiar la propiedad de Grothendieck en álgebras de Boole, más concretamente en el coproducto de álgebras de Boole.

El resultado principal del capítulo es el teorema 8, junto con su particularización, el teorema 9. De ellos se deduce el resultado de que un espacio no trivial de funciones continuas, con valores en un espacio de Banach de dimensión infinita, contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0. Finalizamos señalando la caracterización en términos de sus factores, de las álgebras de Boole coproducto en las que se verifica el teorema de Vitali-Hahn-Saks.

Comenzamos recordando una condición equivalente a la propie dad de Dunford-Pettis, que nosotros tomamos como definición:

Se dice que un espacio de Banach E tiene la propiedad de Dunford-Pettis cuando, dadas dos sucesiones $(e_n)_{n\in\omega}$ y $(e'_n)_{n\in\omega}$ en E y E' respectivamente, tales que $(e_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E,E')$-converge a cero y $(e'_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E',E'')$-converge a cero, entonces $\lim_{n\to\infty} e'_n(e_n) = 0$.

1.- <u>Definición</u> Diremos que un espacio de Banach E tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte cuando, dadas dos sucesiones $(e_n)_{n\in\omega}$ en E y $(e'_n)_{n\in\omega}$ en E', tales que $(e_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E,E')$-converge a cero y $(e'_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E',E)$-converge a cero, entonces $\lim_{n\to\infty} e'_n(e_n) = 0$.

Comparando estas definiciones es claro el por qué del nombre asignado a la segunda propiedad.

2.- <u>Ejemplo</u> Si un espacio de Banach E tiene la propiedad de Schur, es decir, si toda sucesión débilmente convergente es convergente en norma, E también tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte.

• En efecto, si $(e'_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión en E' $\sigma(E',E)$-convergente a cero, el teorema de Banach-Steinhauss implica que $(e'_n)_{n\in\omega}$ está acotada en norma; si $(e_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión en E $\sigma(E,E')$-convergente a cero, la propiedad de Schur implica que también es convergente a cero en norma. Se tiene por tanto:

$$|e'_n(e_n)| \leq (\sup_{n\in\omega} \|e'_n\|)\, \|e_n\| \quad \text{, de donde } \lim_{n\to\infty} e'_n(e_n) = 0 \text{ .}$$

La proposición siguiente prueba que el recíproco del ejemplo anterior es válido en la clase de los espacios de Banach de generación débilmente compacta:

3.- Proposición Si E es un espacio de Banach de generación débilmente compacta, E tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte si y sólo si tiene la propiedad de Schur.

Demostración:

Sólo resta probar la condición necesaria.

Supongamos que $(e_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión en E, $\sigma(E,E')$-convergente pero que no converge en norma. Mediante una traslación se puede suponer que $(e_n)_{n\in\omega}$ es convergente a cero, y pasando a subsucesión, se puede además suponer que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|e_n\| \geq \varepsilon$ para todo $n\in\omega$.

Por el teorema de Hahn-Banach, existe $e'_n \in E'$ con $\|e_n\| = 1$, y tal que $e'_n(e_n) = \|e_n\|$.

Al ser E de generación débilmente compacta, la bola unidad cerrada de E' es $\sigma(E',E)$-secuencialmente compacta (J. Diestel [1975, pág. 148]), y por tanto existe una subsucesión de $(e'_n)_{n\in\omega}$ que es $\sigma(E',E)$-convergente. Denotamos por comodidad la subsucesión igual que la sucesión, y suponemos entonces que $(e'_n)_{n\in\omega}$ es $\sigma(E',E)$-convergente hacia $e'\in E'$.

Como por hipótesis E tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte, $\lim_{n\to\infty} (e'_n - e')(e_n) = 0$. Por otra parte $\lim_{n\to\infty} e'(e_n) = 0$. Luego llegamos al absurdo de que $\lim_{n\to\infty} e'_n(e_n) = 0$.

4.- Corolario Si μ es una medida positiva finita, numerablemente aditiva sobre un σ-álgebra, el espacio $L_1(\mu)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte si y sólo si μ es puramente atómica.

Demostración:

El espacio de Banach $L_1(\mu)$ es de generación débilmente compacta (J. Diestel [1975]) y tiene la propiedad de Schur exactamente cuando la medida μ es puramente atómica (Z. Semadeni [1971, pág. 468]).

5.- Nota Es conocido que todos los espacios del tipo $L_1(\mu)$, así como los del tipo $\mathcal{C}(K)$, K compacto y Hausdorff, gozan de la propiedad de Dunford-Pettis (A. Grothendieck [1953, pág. 139]). Caracterizamos seguidamente aquellos espacios $\mathcal{C}(K)$ que tienen la propiedad de Dunford-Pettis fuerte como los que tienen la de Grothendieck.

6.- Proposición Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Grothendieck.

(2) $\mathcal{C}(K)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte.

(3) $\mathcal{C}(K)$ no contiene un subespacio isométrico a c_0 y complementado.

Demostración:

(1) implica (2): En general, todo espacio de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis (como es el caso de $\mathcal{C}(K)$) que tenga además la de Grothendieck, tiene también la de Dunford-Pettis fuerte. En efecto, si $(e'_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E',E)$-converge a cero, también $\sigma(E',E'')$-converge a cero, luego si $(e_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E,E')$-converge a cero, $\lim\limits_{n\to\infty} e'_n(e_n) = 0$.

(2) implica (3): El espacio c_0 no tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte, como se deduce inmediatamente del hecho de que $e'_n(e_n) = 1$, donde $(e_n)_{n\in\omega}$ y $(e'_n)_{n\in\omega}$ denotan las sucesiones básicas duales en c_0 y

l_1. Si un espacio de Banach contiene un subespacio complementado y que no tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte, el espacio tampoco la tiene; en efecto, sea E el espacio y F el subespacio, y sea P una proyección lineal continua de E en F; dados $(f_n)_{n\in\omega}$ en F y $(f'_n)_{n\in\omega}$ en F' tales que a pesar de ser la primera $\sigma(F,F')$-convergente a cero y la segunda $\sigma(F',F)$-convergente a cero, $\lim_{n\to\infty} f'_n(f_n) \neq 0$, se considera $e'_n = P'(f'_n)$ para cada $n\in\omega$; la sucesión $(e'_n)_{n\in\omega}$ es $\sigma(E',E)$-convergente a cero, la sucesión $(f_n)_{n\in\omega}$ es $\sigma(E,E')$-convergente a cero, pero $e'_n(f_n) = f'_n(P(f_n)) = f'_n(f_n)$, para todo $n\in\omega$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} e'_n(f_n) \neq 0$.

Así pues, no (3) implica no (2).

(3) implica (1): Si el espacio $\mathscr{C}(K)$ no es un espacio de Grothendieck, existe T operador lineal continuo de $\mathscr{C}(K)$ en c_0 que no es débilmente compacto (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág.179]); existe entonces un subespacio F de $\mathscr{C}(K)$, subespacio isométrico a c_0, y tal que la restricción R de T a F es un isomorfismo sobre la imagen T(F) (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 159]).

Según el teorema de Sobczyk (ver J. Lindenstrauss y L. Tzafriri [1977, pág. 106]), existe P proyección lineal continua de c_0 sobre su subespacio T(F). La aplicación $T^{-1}PT$ de $\mathscr{C}(K)$ en F es una proyección lineal continua.

La implicación (3) implica (1) de la proposición anterior generaliza un resultado de W. Schachermayer [1978] en el que se supone que el compacto K es totalmente disconexo.

7.- <u>Ejemplos</u> Vemos ahora unos ejemplos que relacionan la propiedad de Dunford-Pettis fuerte con otras propiedades.

(1) Como ya vimos en la demostración de la proposición 7, c_0 no tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte; sin embargo sí tiene la de Dunford-Pettis pues es isomorfo a un espacio de funciones continuas.

(2) La propiedad de Dunford-Pettis fuerte se hereda por subespacios complementados, pero no por cocientes: l_2 no tiene siquiera la de Dunford-Pettis (los únicos reflexivos que la tienen son los de dimensión finita), y l_2 es isomorfo a un cociente de l_1, que tiene la de Dunford-Pettis fuerte.

(3) Mientras que es cierto que si el dual de un espacio de Banach tiene la propiedad de Dunford-Pettis, el espacio también la tiene, el análogo para la propiedad de Dunford-Pettis fuerte no es cierto; en efecto, $L_1(0,1)$ no la tiene, pero su dual, $L_\infty(0,1)$, que se identifica isomórficamente con l_∞, sí la posee.

(4) El espacio l_∞ tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte pero no la de Schur.

Estudiamos ahora las propiedades de Dunford-Pettis fuerte y de Grothendieck para espacios de funciones continuas con valores vectoriales. Extendemos primero las definiciones de dichas propiedades a espacios localmente convexos Hausdorff:

(a) Diremos que un espacio localmente convexo Hausdorff E tiene la propiedad de Grothendieck, cuando coinciden en E' las convergencias $\sigma(E',E)$ y $\sigma(E',E'')$ para las sucesiones.

(b) Diremos que un espacio localmente convexo y Hausdorff E tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte cuando dadas sucesiones $(e_n)_{n\in\omega}$ y $(e'_n)_{n\in\omega}$ $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E',E)$ convergentes a cero, $\lim_{n\to\infty} e'_n(e_n) = 0$

8.- Teorema Sean E y F dos espacios localmente convexos y Hausdorff que verifican las siguientes condiciones:

(1) Existe un equicontinuo en E' en el que no coinciden la $\sigma(E',E)$-convergencia secuencial y la $\beta(E',E)$-convergencia secuencial.

(2) F contiene un subespacio isomorfo al subespacio de c_0 formado por las sucesiones con sólo un número finito de términos no nulos.

Entonces el producto tensorial inyectivo completado $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ no posee ni la propiedad de Grothendieck ni la de Dunford-Pettis fuerte.

Demostración:

Usando la hipótesis (2) y razonando exactamente igual que en la demostración del teorema 15 del capítulo III, se puede construir una sucesión $(f_n)_{n\in\omega}$ en F, otra $(f'_n)_{n\in\omega}$ en F' y un entorno del origen absolutamente convexo V_0 en F, tales que $f'_n(f_m) = \delta_{nm}$ (delta de Kronecker), f_n se corresponde mediante un isomorfismo con la sucesión escalar que es nula salvo en el término n-ésimo, en el que vale 1, y que si p es el funcional de Minkowski de V_0, entonces $|f'_n(f)| \leq p(f)$ para todo $f\in F$.

Por la hipótesis (1), existe un entorno del origen U_0 en E, tal que hay una sucesión $(e'_n)_{n\in\omega}$ en U_0° que es $\sigma(E',E)$-convergente a cero pero que no es $\beta(E',E)$-convergente a cero. Pasando a subsucesión si es necesario se puede suponer además que existe una sucesión acotada $(e_n)_{n\in\omega}$ en E y un número $\varepsilon > 0$, tales que

$$|e'_n(e_n)| \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } n\in\omega.$$

Denotemos por G al espacio $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$. Sea, para cada $n\in\omega$, $g'_n = e'_n\otimes f'_n\in E'\otimes F'\subset G'$.

(a) La sucesión $(g'_n)_{n\in\omega}$ es $\sigma(G',G)$-convergente a cero.

En efecto, por una parte, al ser $|g'_n(e\otimes f)| = |e'_n(e)f'_n(f)| \leq$

$\leq p(f)|e'_n(e)|$, y converger $\sigma(E',E)$ a cero la sucesión $(e'_n)_{n\in\omega}$, se obtiene que $(g'_n)_{n\in\omega}$ converge a cero $\sigma(G',E\otimes F)$.

Como $E\otimes F$ es denso en G, es suficiente ya comprobar que la sucesión $(g'_n)_{n\in\omega}$ es equicontinua. En efecto, si $W = \{ g\in G : \varepsilon_{(U_0,V_0)}(g) \leq 1 \}$, entonces $g'_n \in W°$ para todo $n\in\omega$.

(b) La sucesión $(g''_n)_{n\in\omega}$ no es $\sigma(G',G'')$-convergente a cero.

Si se prueba que la serie $\sum_{n\in\omega} e_n\otimes f_n$ es $\sigma(G'',G')$-convergente, entonces, si g'' es su suma, para todo $m\in\omega$,

$$g''(g'_m) = \sum_{n\in\omega} g'_m(e_n\otimes f_n) = e'_m(e_m)f'_m(f_m) = e'_m(e_m)$$

que no converge a cero cuando $m\to\infty$.

Vemos por tanto que la serie es $\sigma(G'',G')$-convergente.

Dado $g'\in G'$, A. Grothendieck [1955, pág. 124] prueba que existe una medida $\tau\in\mathcal{M}(K_1\times K_2)$, donde K_1 y K_2 son subconjuntos equicontinuos de E' y F' respectivamente, K_1 $\sigma(E',E)$-compacto y K_2 $\sigma(F',F)$-compacto, tal que

$$g'(e\otimes f) = \iint_{K_1\times K_2} e'(e)f'(f)d\tau(e',f')$$

para todos $e\in E$ y $f\in F$.

Sea U un entorno del origen en E tal que $K_1\subset U°$; como $(e_n)_{n\in\omega}$ es acotada, existe $C_1 > 0$ tal que $e_n\in C_1U$ para todo $n\in\omega$. Luego $|e'(e_n)| \leq C_1$ para todo $n\in\omega$.

Así pues, la serie $\sum_{n\in\omega}|e'(e_n)f'(f_n)|$ está mayorada por $\sum_{n\in\omega} C_1|f'(f_n)|$, que es convergente porque por construcción la sucesión $(f_n)_{n\in\omega}$ se corresponde mediante un isomorfismo con la base unidad de c_0.

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la serie $\sum_{n\in\omega} g'(e_n \otimes f_n)$ es convergente. Sea g'' la forma lineal en G' definida por $g''(g') = \sum_{n\in\omega} g'(e_n \otimes f_n)$ para $g' \in G'$. El conjunto $A = \{\sum_{n\leq m} e_n \otimes f_n : m \in \omega\}$ es un acotado de G, puesto que la serie es $\sigma(G,G')$-Cauchy, y como $|g''(g')| \leq 1$ para todo $g' \in A°$, g'' está acotada en el $\beta(G',G)$-entorno del origen $A°$, y por ello $g'' \in G''$.

De (a) y (b) se deduce que $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ no verifica la propiedad de Grothendieck.

(3) $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ no tiene la propiedad de Dunford-Pettis fuerte.

En efecto, por (a) la sucesión $(g'_n)_{n\in\omega}$ es $\sigma(G',G)$-convergente a cero, y en (b) se prueba que la sucesión $(e_n \otimes f_n)_{n\in\omega}$ es $\sigma(G,G')$-convergente a cero, pero $|g'_n(e_n \otimes f_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \omega$.

Es conveniente observar que la condición (1) del teorema 8 se convierte, cuando E es tonelado, en la más simple de que no coinciden en E' la $\sigma(E',E)$-convergencia secuencial y la $\beta(E',E)$-convergencia secuencial. En el caso en que E sea un espacio normable la condición (1) del teorema es verificada automáticamente si E es de dimensión infinita; en este caso se tiene el siguiente resultado más fuerte que el teorema 8:

9.- <u>Teorema</u> Sean E y F dos espacios localmente convexos y Hausdorff, que verifican las siguientes condiciones:

(1) E es normable y de dimensión infinita.

(2) F contiene un subespacio isomorfo al subespacio de c_0 formado por las sucesiones con sólo un número finito de términos no nulos.

Entonces el espacio $E\hat{\otimes}_{\varepsilon}F$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0.

Demostración:

Se razona exactamente como en la prueba del teorema 8, suponiendo además que el entorno U_0 es acotado (que se cumple la condición (1) del teorema 8 es consecuencia del teorema de B. Josefson-A. Nissenzweig (ver A. Nissenzweig [1975]), en el que se prueba la existencia en el dual de cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, de una sucesión $\sigma(E',E)$-convergente a cero que no es convergente en norma).

Sea G_0 el subespacio vectorial de $E\otimes F$ generado por la sucesión $(g_n)_{n\in\omega}$.

(a) G_0 es normable.

Basta ver que la restricción a G_0 de la seminorma $\varepsilon_{(U_0,V_0)}$ genera la topología inducida por G. Dados U y V entornos del origen en E y F respectivamente, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $V^\circ \subset C_1(V_0\cap H)^\circ$ y $U^\circ \subset C_2 U_0^\circ$. Se tiene que

$$\varepsilon_{(U,V)}(g) \leq C_1 C_2 \varepsilon_{(U_0,V_0)}(g) \qquad \text{para todo } g\in G_0 .$$

(b) G_0 es isomorfo al subespacio de c_0 formado por las sucesiones que sólo tienen un número finito de términos no nulos.

En efecto, si $g = \sum_{n\leq m}\alpha_n g_n$ es cualquier elemento de G_0, se tiene que $\varepsilon_{(U_0,V_0)}(g) = \sup \{ |\sum_{n\leq m}\alpha_n e'(e_n)f'(f_n)| : e'\in U_0^\circ , f'\in V_0^\circ \}$

$\leq \sup \{ \sum_{n\leq m}|\alpha_n||e'(e_n)||f'(f_n)| : e'\in U_0^\circ , f'\in V_0^\circ \} \leq$

$\leq (\sup \{|\alpha_n| : n\leq m \}) \sup \{ \sum_{n\leq m}|e'(e_n)||f'(f_n)| : e'\in U_0^\circ , f'\in V_0^\circ \}$

Como $(e_n)_{n\in\omega}$ es acotada, existe una constante positiva C_3 tal que $e_n \in C_3 U_0$ para todo $n\in\omega$. Por otra parte, sea β_n un escalar de módulo 1 y tal que $|f'(f_n)| = \beta_n f'(f_n)$, para cada $n\in\omega$. Como $\sum_{n\leq m} \beta_n f_n = T^{-1}(\sum_{n\leq m} \beta_n u_n) \in T^{-1}(B) \subset V_0$, se tiene que

$$\sum_{n\leq m} |f'(f_n)| = f'(\sum_{n\leq m} \beta_n f_n) \leq 1 .$$

Luego $\varepsilon_{(U_0,V_0)}(g) \leq C_3 \sup_{n\leq m} |\alpha_n|$

Inversamente, $\varepsilon_{(U_0,V_0)}(g) \geq |\sum_{n\leq m} \alpha_n e_k'(e_n) f_k'(f_n)|$ para todo $k\leq m$, puesto que $e_k' \in U_0^\circ$ y $f_k' \in V_0^\circ$. Luego $\varepsilon_{(U_0,V_0)}(g) \geq$ $\geq |\alpha_k| |e_k'(e_k)| \geq \varepsilon |\alpha_k| = \varepsilon \sup_{n\leq m} |\alpha_n|$ si k es elegido convenientemente.

(c) La aplicación P definida por $P(g) = \sum_{n\in\omega} (e_n'(e_n))^{-1} g_n'(g) g_n$ es una proyección lineal continua de G sobre su subespacio $\bar{G}_0$.

En efecto, en primer lugar está bien definida, porque $(g_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión básica en $\bar{G}_0$ equivalente a la base unidad de c_0 según (b), y para cada $g\in G$, como $(g_n')_{n\in\omega}$ es $\sigma(G',G)$-convergente a cero, $\lim_{n\to\infty} g_n'(g) = 0$.

Dado que $\sup_{n\in\omega} |(e_n'(e_n))^{-1} g_n'(g)| \leq \varepsilon^{-1} \sup_{n\in\omega} |g_n'(g)| \leq \varepsilon^{-1} q(g)$ donde q es el funcional de Minkowski de W (recordar que $g_n' \in W^\circ$ para todo $n\in\omega$), se deduce que P es continuo.

Por último, P es proyección; basta comprobar que para todo $m\in\omega$ $P(g_m) = g_m$. En efecto, $P(g_m) = \sum_{n\in\omega} (e_n'(e_n))^{-1} g_n'(g_m) g_n$, y $g_n'(g_m) = e_n'(e_m) f_n'(f_m) = \delta_{nm}\, e_n'(e_m)$ lo prueban.

Los apartados (b) y (c) anteriormente probados concluyen la demostración del teorema.

10.- Corolario Si K es un espacio topológico compacto Hausdorff infinito, y E es un espacio de Banach de dimensión infinita, el espacio $\mathcal{C}(K,E)$ tiene un subespacio complementado que es isomorfo a c_0.

Demostración:

Se sigue del teorema 9, teniendo en cuenta los hechos siguientes bien conocidos: $\mathcal{C}(K,E)$ es isométrico a $\mathcal{C}(K)\hat{\otimes}_{\varepsilon}E$ (ver H. Jarchow [1981]) y $\mathcal{C}(K)$ contiene un subespacio isomorfo a c_0 (ver J. Diestel y J. J. Uhl [1977, pág. 160]).

11.- Nota J. Batt y E. J. Berg [1969, th. 9], demuestran que si E y F son dos espacios de Banach, y K es un espacio métrico compacto infinito, tales que todo operador lineal continuo de $\mathcal{C}(K,E)$ en F es débilmente compacto, entonces ningún subespacio de F es isomorfo a c_0, y todo operador lineal continuo de E en F es débilmente compacto.

Consecuencia del corolario 10 es la siguiente extensión de ese resultado:

12.- Corolario Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff infinito y E un espacio de Banach de dimensión infinita. Si F es un espacio de Banach tal que todo operador lineal continuo de $\mathcal{C}(K,E)$ en F es débilmente compacto, entonces F no contiene subespacios isomorfos a c_0, y todo operador lineal continuo de E en F es débilmente compacto.

Demostración:

Si R es un operador lineal continuo no débilmente compacto de E en F, y P es una proyección lineal continua de $\mathcal{C}(K,E)$ en E (considerado como subespacio suyo), la composición T = RP es un operador lineal continuo y no débilmente compacto.

Si suponemos ahora que F contiene un subespacio H isomorfo a c_0 y dado que E es de dimensión infinita, por el corolario 10, existe G subespacio complementado de $\mathcal{C}(K,E)$, isomorfo a H. Si R es un isomorfismo de G en H, y P es una proyección lineal continua de $\mathcal{C}(K,E)$ en G, la composición $T = RP$ es un operador lineal continuo y no débilmente compacto.

13.- Nota Si en el corolario 12 se supone que E es de dimensión finita, el resultado es cierto exactamente cuando K no sea un espacio de Grothendieck, en virtud de la proposición 6.

Vamos ahora a aplicar el teorema 8 a la caracterización de las álgebras de Boole coproducto que poseen la propiedad de Vitali-Hahn-Saks, en términos de sus factores. Usando el hecho de que, para un álgebra de Boole, es equivalente que se verifique el teorema de Vitali-Hahn-Saks a que se verifique el de Nikodým y que tenga la propiedad de Grothendieck (ver W. Schachermayer [1978]), obtenemos el siguiente teorema:

14.- Teorema Sea $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras de Boole, y sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Boole coproducto. Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de Grothendieck o si se verifica en $\mathcal{A}$ el teorema de Vitali-Hahn-Saks, entonces I es finito, a lo más una de las álgebras factores es infinita, y ésta tiene la correspondiente propiedad; y recíprocamente.

Demostración:

Por lo anteriormente expuesto es suficiente probarlo para la propiedad de Grothendieck.

Razonando como en el teorema 21 del capítulo III, basta probar que si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos álgebras de Boole infinitas, el coproducto $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ no tiene la propiedad de Grothendieck; en efecto, el teorema 8 se aplica en esta situación al espacio $B(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ identificado con $B(\mathcal{A}_1) \hat{\otimes}_{\varepsilon} B(\mathcal{A}_2)$.

B I B L I O G R A F I A

J. Arias de Reyna (198?): $l_{\rho}^{\infty}(\Sigma)$ no es totalmente tonelado.
Aparecerá en Rev. Real Acad. Cienc.

J. Batt y E. J. Berg (1969): Linear bounded transformations on the space of continuous functions.
J. Functional Anal. 4, 215-239.

W. W. Comfort y S. Negrepontis (1974): The theory of ultrafilters.
Springer, Berlín.

F. K. Dashiell (1981): Non weakly compact operators from order-Cauchy complete $\mathcal{C}(S)$ lattices, with applications to Baire classes.
Trans. Amer. Math. Soc. 266, 397-413.

J. Diestel (1975): Geometry of Banach spaces.
Springer, Berlín.

J. Diestel y J. J. Uhl (1977): Vector measures.
Amer. Math. Soc., Providence.

E. K. van Douwen y J. van Mill (1980): Subspaces of basically disconnected spaces or quotiens of countably complete Boolean algebras.
Trans. Amer. Math. Soc. 259, 121-127.

F. R. Drake (1974): Set Theory.
North-Holland/American Elsevier, Amsterdam y Nueva York.

N. Dunford y T. J. Schwartz (1964): Linear operators, part. I.
Intersacience, Nueva York.

L. Gillman y M. Jerison (1960): Rings of continuous functions.
Princeton, Van Nostrand.

A. Grothendieck (1953): Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $\mathcal{C}(K)$.
Canad. J. Math. 5, 129-173.

A. Grothendieck (1955): Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.
Mem. Amer. Math. Soc. 16.

R. Haydon (1981): A non reflexive Grothendieck space that does not contains l_∞.
Israel J. Math. 40, 65-73.

J. R. Isbell y Z. Semadeni (1963): Projections constants and spaces of continuous functions.
Trans. Amer. Math. Soc. 107, 38-48.

H. Jarchow (1981): Locally convex spaces.
B. G. Teubner, Stuttgart.

K. Kuratowski y A. Mostowski (1976): Set theory.
North-Holland, Amsterdam.

A. Levy (1979): Basic set theory.
Springer, Berlín.

J. Lindenstrauss y L. Tzafriri (1977): Classical Banach spaces, vol I.
Springer, Berlín.

D. R. Mauldin (1981): The scottish book.

Birkhäuser, Boston.

A. Moltó (1981): On the Vitali-Hahn-Saks theorem.

Proc. Royal Soc. Edimburgh 90A, 163-173.

A. Nissenweig (1975): w^*-sequential convergence.

Israel J. Math. 22, 266-272.

A. Pietsch (1972): Nuclear locally convex spaces.

Springer, Berlín.

G. Pisier (1981): Contre-example à une conjecture de Grothendieck.

C. R. Acad. Sci. París, Sér. I, Math. 293, no. 15, 681-683.

W. Schachermayer (1978): On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras.

Linz Univ.

G. L. Seever (1968): Measures on F-spaces.

Trans. Amer. Math. Soc. 133, 267-280.

Z. Semadeni (1971): Spaces of continuous functions.

P. W. N., Varsovia.

W. Sierpiński (1958): Cardinal and ordinal numbers.

P. W. N., Varsovia.

R. Sikorski (1964): Boolean algebras.

Springer, Berlín.

M. Valdivia (1979): On certains barrelled normed spaces.

Ann. Inst. Fourier, 29, 39-56.

R. C. Walker (1974): The Stone-Čech compactification.

Springer, Berlín.

M. Weese (1980): MAD families and ultrafilters.

Proc. Amer. Math. Soc. 80, 475-477.

B. B. Wells (1969): Weak compactness of measures.

Proc. Amer. Math. Soc. 20, 124-130.

A. Wilansky (1978): Modern methods in topological vector spaces.

Mc. Graw Hill, Nueva York.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Francisco José Freniche Ibañez titulada Teorema de Vitali-Hahn-Saks en algebras de Boole —

acordó otorgarle la calificación de

Sevilla, 5 de julio 1.983

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,

A. Castro