UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Rango y propiedades de medidas vectoriales. Conjuntos p-Sidon p.s..

Memoria presentada por
D. Luis Rodríguez Piazza
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Luis Rodríguez Piazza

V° B° Catedrático Director

D. Juan Arias de Reyna Martínez.
Catedrático del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.
Sevilla, Julio 1991.

Doy mi autorización
la consulta de este
ejemplar de Tesis

Fdo.: Luis Rodríguez Piazza

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director Juan Arias de Reyna por todas las enseñanzas de él recibidas en el orden científico y humano. Su pasión por las Matemáticas es realmente estimulante. Su dedicación y paciencia han facilitado enormente la investigación matemática que se refleja en esta memoria.

También debo hacer constar mi más profunda gratitud y reconocimiento a mis maestros en Orsay, Myriam Dechamps, Françoise Piquard, y Hervé Queffelec. Ellos me han introducido en el estudio del Análisis Armónico, haciendo mi estancia en su Departamento muy provechosa y agradable, y enseñándome las ventajas del trabajo en equipo.

Otra dos personas han completado lo más importante de mi formación matemática. De Gilles Pisier he aprendido a moverme en el campo de la Teoría Local de los espacios de Banach; sin duda, sus trabajos son los que más han influido la realización de esta memoria. Francisco J. Freniche me enseñó el Análisis Funcional, y ha sido siempre un inestimable interlocutor. Gracias a los dos.

Por último agradecer todos los estímulos recibidos de mis compañeros de Departamento para la realización de esta memoria. Especialmente de G. Curbera y A. Durán con quienes podré emborracharme compartiendo un

¡¡por fin!!

A Lupe

Indice.

Introducción.

La presente memoria trata dos campos diferentes del Análisis Matemático. La primera parte se inscribe en el marco del estudio de las Medidas Vectoriales. La segunda trata algunos problemas de Análisis Armónico, en particular sobre conjuntos lagunares de caracteres.

El estudio de las medidas vectoriales ha tenido una influencia grande en el desarrollo de la geometría de los espacios de Banach y la representación de los operadores. En la presente memoria estudiamos que hay ciertas propiedades de las medidas vectoriales que vienen determinadas por su rango*, es decir por el conjunto de valores que toma la medida.

En un reciente artículo R. Anantharaman y J. Diestel [AD] preguntaban si era posible dar un ejemplo de dos medidas vectoriales que tuvieran el mismo rango pero que una tuviera variación acotada y la otra no. En el Capítulo I respondemos a esta cuestión, viendo que tal ejemplo es imposible, en concreto el principal resultado de este capítulo (Teorema I.2.2) lo podemos enunciar

Teorema. *Si la clausura convexa y cerrada de dos medidas vectoriales coinciden entonces tienen la misma variación total.*

Así que podemos decir que el rango de una medida vectorial determina su variación total. La prueba es realmente de carácter finito-dimensional, lo que en cierto modo contrasta con el problema original. Reposa sobre un teorema de determinación de medidas simétricas en la esfera. Dedicamos la primera sección a dar una prueba de este teorema (Teorema I.1.1).

---

* Usamos este término 'rango' por dos razones, la primera por estar ya extendido, en este contexto, entre la comunidad matemática española y la segunda por economía del lenguaje.

En la última sección estudiamos el problema de la monotonía de la variación total con respecto del rango; es decir, determinamos en qué espacios se verifica que si el rango de una medida μ contiene al rango de otra medida ν entonces la variación total de μ domina a la de ν. Estos espacios resultan ser los que son isomorfos a un subespacio de un L^1. Respondemos así otra cuestión de [AD]. Algunos de los resultados de este capítulo han sido publicados en [Ro2].

En el segundo capítulo tratamos otras dos propiedades que vienen determinadas por el rango, para medidas numerablemente aditivas. Los resultados más importantes del capítulo (Teorema II.3.1 y Teorema II.4.4) se pueden resumir de la siguiente manera

Teorema. *Si μ y ν son dos medidas vectoriales numerablemente aditivas cuyos rangos tienen la misma clausura convexa y cerrada, entonces:*

a) μ tiene variación σ-finita si y sólo si la tiene ν.

b) μ tiene derivada Bochner con respecto a su variación si y sólo si ν la tiene.

La principal herramienta que utilizamos para la demostración de estos dos resultados es un teorema de descomposición de zonoides* que usa la integral de Bartle. Dedicamos pues la primera sección a dar un repaso de las propiedades de esta integral; y la segunda a demostrar el teorema de descomposición (Teorema II.2.6). Hemos de hacer notar que el apartado a) no es cierto para medidas finitamente aditivas, como se ve en el Ejemplo II.3.2. En la última sección damos otra prueba del apartado b) que usa la relación entre operadores y medidas vectoriales.

En la segunda parte nos adentramos en el campo del Análisis Armónico, en concreto en el de los conjuntos 'lagunares'. Estos son conjuntos donde la transformada de Fourier se comporta de manera excepcional. Así por ejemplo, siendo $\mathbf{G}$ es un grupo abeliano compacto, y $\mathbf{\Gamma}$ su grupo dual, un subconjunto Λ de $\mathbf{\Gamma}$ es un conjunto de Sidon si toda función continua cuya transformada de Fourier se anula fuera de Λ tiene una serie de Fourier absolutamente convergente.

* Un zonoide es un convexo y cerrado que es el rango de una medida numerablemente aditiva.

Gracias a un teorema de D. Rider[Ri], el estudio de los conjuntos de Sidon se relaciona con el del espacio de las series de Fourier aleatorias casi seguramente continuas, $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ [P4]. Un conjunto Λ es de Sidon si toda $f \in \mathcal{C}^{p.s.}_{\Lambda}(\mathbf{G})$ tiene transformada de Fourier en $\ell_1(\mathbf{\Gamma})$. G. Pisier explotó esta relación para dar una caracterización aritmética de los conjuntos de Sidon y resolver un viejo problema de W. Rudin [R2].

Nosotros generalizamos esta caracterización a los que llamamos conjuntos p-Sidon p.s., aquellos Λ para los que la condición $f \in \mathcal{C}^{p.s.}_{\Lambda}(\mathbf{G})$ implica que la transformada de Fourier de f está en $\ell_p(\mathbf{\Gamma})$. Este es el principal resultado del Capitulo III (Teorema III.2.3). Una parte de los resultados de este capítulo está contenida en [Ro1].

Por otro lado los trabajos de Pisier y de Bourgain destacaron el papel de la geometría de los espacios de Banach en el Análisis Armónico. Sobre todo de la teoría local. En este contexto pueden enmarcarse los resultados del capítulo IV en donde se estudia la relación entre ciertas propiedades funcionales de los espacios de dimensión finita invariantes por traslaciones, que se corresponden con conjuntos finitos de caracteres, otras de tipo aritmético y otras propiedades métricas del grupo.

En los resultados de este capítulo no hemos podido establecer relaciones completamente satisfactorias entre las diversas propiedades tratadas. Quedan así algunas cuestiones abiertas cuya resolución, más que por los resultados en sí, por las técnicas que deberían desarrollarse para su solución, podrían ser interesantes para el tratamiento de otros problemas del Análisis Armónico.

PRIMERA PARTE

Rango y propiedades de medidas vectoriales.

CAPITULO I

Variación total y rango de medidas vectoriales.

I.1. Medidas simétricas en la esfera.

En esta primera sección presentaremos un resultado (Teorema 1.1) sobre determinación de medidas simétricas en la esfera que será fundamental en el desarrollo de los dos primeros capítulos. Veremos que una medida a valores reales, definida en la esfera unidad euclídea de $\mathbb{R}^n$, si es simétrica, es nula cuando son nulas las integrales de los módulos de todos los funcionales lineales.

Como queda detallado en [SW] el Teorema 1.1 es debido a A. D. Aleksandrov [AL], aunque con anterioridad, W. Blaschke [BL] lo probó en el caso de $\mathbb{R}^3$. Varios autores han redescubierto el resultado dando demostraciones diferentes; así, además de Aleksandrov, C. M. Petty [PE], N. W. Rickert [RK], y R. Schneider [SC] lo han demostrado usando esféricos armónicos; G. Matheron [MA] utiliza una representación integral relacionada con distribuciones de probabilidad infinitamente divisibles para deducirlo; y G. Choquet [CH] da una prueba elemental, con un argumento de derivación de matrices, del hecho de que el espacio lineal engendrado por los módulos de los funcionales lineales es denso en el espacio de las funciones continuas y simétricas en la esfera, lo que es equivalente al teorema, y será nuestro Corolario 1.3.

Nosotros daremos una demostración que no hemos encontrado en la literatura. No usaremos ninguno de los métodos anteriores, sino que determinaremos las medidas con la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$, donde trasladaremos el problema mediante una proyección estereográfica.

Antes de pasar a enunciar con concreción y demostrar el resultado, introduciremos las notaciones que necesitaremos por ahora. Como habitualmente ℓ_p^n denotará el espacio $\mathbb{R}^n$dotado con la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$; donde, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}, \qquad \text{cuando } 1 \leq p < \infty; \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\leq k\leq n} |x_k|. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathbb{S}^n$ la esfera unidad euclídea de $\mathbb{R}^{n+1}$; es decir, la esfera unidad de ℓ_2^{n+1}. Para x, y en $\mathbb{R}^n$, escribiremos $\langle x, y\rangle$ por su producto escalar.

$\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ será el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}$, dotado de la norma del supremo. El subespacio cerrado de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ formado por las funciones simétricas ($f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$) lo denotaremos por $\mathcal{C}_s(\mathbb{S}^n)$. Gracias al teorema de representación de Riesz el espacio dual de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ lo podemos identificar con $\mathcal{M}(\mathbb{S}^n)$, el espacio de las medidas reales (regulares) definidas en los borelianos de $\mathbb{S}^n$. En realidad, al tratarse de un polaco, todas las medidas reales son regulares. Si $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^n)$, escribiremos $|\sigma|$ por la medida variación de σ, la medida real positiva definida para cada boreliano A como

$$|\sigma|(A) = \sup\Big\{\sum_{B\in\mathcal{P}} |\sigma(B)| : \mathcal{P} \text{ partición finita de } A \text{ formada por borelianos }\Big\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{M}_s(\mathbb{S}^n)$ el subespacio de $\mathcal{M}(\mathbb{S}^n)$ formado por las medidas simétricas ($\sigma(A) = \sigma(-A)$, para todo medible A). Podemos ya enunciar el teorema.

Teorema 1.1. *Sea σ una medida real simétrica definida en la esfera $\mathbb{S}^n$, ($\sigma \in \mathcal{M}_s(\mathbb{S}^n)$). Si para todo $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ se tiene*

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\langle e, x\rangle| \, d\sigma(x) = 0\,;$$

entonces σ es la medida nula.

Para su demostración necesitaremos el siguiente lema que nos pemitirá usar una proyección estereográfica para trasladar el problema de $\mathbb{S}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.2. *Dada una medida positiva finita μ definida en los borelianos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tal que $\mu(\{0\}) = 0$; existe un hiperplano H, subespacio de dimensión $n-1$, tal que $\mu(H) = 0$.*

Demostración del Lema 1.2. Por inducción finita bastará probar que si V es un subespacio lineal de dimensión $\dim V \leq n-2$, existe un subespacio W con $\dim W = \dim V + 1$, y $\mu(W) = 0$.

Tomemos dos vectores x e y, tales que sus correspondientes clases son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n/V$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, pongamos W_t por el subespacio engendrado por V y $x + ty$. Es fácil comprobar que los conjuntos $W_t \setminus V$ son dos a dos disjuntos; como forman una familia no numerable, y la medida μ es finita, existe un t tal que $\mu(W_t \setminus V) = 0$; esto y el hecho de que $\mu(V) = 0$ nos dan $\mu(W) = 0$ con $W = W_t$.

□

Demostración del Teorema 1.1. Sea $|\sigma|$ la medida variación de σ; dado que $\mathbb{S}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que no contiene al 0, podemos aplicarle a $|\sigma|$ el Lema 1.1 y encontramos un hiperplano H tal que $|\sigma|(H \cap \mathbb{S}^n) = 0$. Usando una transformación ortogonal, podemos suponer que $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$.

Pongamos $G = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > 0\}$; puesto que $\mathbb{S}^n = G \sqcup -G \sqcup (H \cap \mathbb{S}^n)$, por la simetría de σ, nos basta probar que la medida σ es nula al restringirla a G. Sabemos que para todo $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathbb{S}^n} |\langle e, x\rangle| \, d\sigma(x) &= \int_G \quad + \quad \int_{-G} \\ &= \int_G |\langle e, x\rangle| \, d\sigma(x) + \int_G |\langle e, -x\rangle| \, d\sigma(-x) \\ &= 2\int_G |\langle e, x\rangle| \, d\sigma(x) \end{aligned} \tag{1}$$

la última igualdad gracias a la simetría de σ.

Sea $\psi \colon G \to \mathbb{R}^n$ la aplicación definida como

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right).$$

ψ es un homeomorfismo entre G y $\mathbb{R}^n$; cuyo inverso viene dado por

$$\psi^{-1}(y_1,\ldots,y_n)=\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+\|y\|_2^2}},\ldots,\frac{y_n}{\sqrt{1+\|y\|_2^2}},\frac{1}{\sqrt{1+\|y\|_2^2}}\right).$$

Si llamamos μ a la medida en $\mathbb{R}^n$ imagen por ψ de $\sigma|_G$; puesto que ψ es un homeomorfismo, σ será nula si lo es μ. La condición (1) sobre σ se transforma en

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle e,\psi^{-1}y\rangle|\,d\mu(y)=0,\qquad \forall e\in\mathbb{R}^{n+1};$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e_{n+1}+\sum_{k=1}^n e_k y_k|}{\sqrt{1+\|y\|_2^2}}\,d\mu(y)=0,\qquad \forall e\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{2}$$

Sea ν la medida definida en $\mathbb{R}^n$ como $d\nu(y)=\big(1/\sqrt{1+\|y\|_2^2}\big)\,d\mu(y)$; puesto que $\big(1/\sqrt{1+\|y\|_2^2}\big)\neq 0$, para todo y de $\mathbb{R}^n$, μ es nula si y sólo si lo es ν. De (2) se tiene que ν verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha\langle c,y\rangle+\beta|\,d\nu(y)=0,\qquad \forall c\in\mathbb{R}^n,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Para cada $c\in\mathbb{R}^n$, sea ν_c la medida imagen de ν en $\mathbb{R}$ por la proyección $y\mapsto\langle c,y\rangle$. Tenemos, por (3), que ν_c verifica

$$\int_{\mathbb{R}} |\alpha t+\beta|\,d\nu_c(t)=0,\qquad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Si a y b son dos números reales tales que $a<b$, llamamos $f_{a,b}$ a la función continua en $\mathbb{R}$ que vale 1 antes de a, 0 después de b, y es afín en el intervalo $[a,b]$. Es fácil comprobar que

$$f_{a,b}(t)=1/2+(|t-b|-|t-a|)/2(b-a)$$

y, de (4), deducir que $\int f_{a,b}\,d\nu_c=0$; lo que, haciendo tender b hacia a, por el teorema de la convergencia dominada, implica que

$$\int_{(-\infty,a]} d\nu_c=0,\qquad \forall a\in\mathbb{R}.$$

Es decir, para cada $c\in\mathbb{R}^n$, se tiene que ν_c es la medida nula; lo que, en particular, implica

$$\int_{\mathbb{R}^n}\exp\big(i\langle c,y\rangle\big)\,d\nu(y)=\int_{\mathbb{R}}\exp(it)\,d\nu_c(t)=0,\qquad \forall c\in\mathbb{R}^n;$$

o, lo que es lo mismo, la transformada de Fourier de ν es la función cero y, por tanto, ν, μ y σ son nulas, y terminamos la demostración.

□

Corolario 1.3. *El espacio lineal engendrado por las funciones* $\{x \mapsto |\langle e, x\rangle| : e \in \mathbb{R}^n\}$ *es denso en* $\mathcal{C}_s(\mathbb{S}^n)$.

Demostración. Es una consecuencia casi directa del Teorema 1.1; si el resultado no fuera cierto, habría, por el teorema de Hahn-Banach, una medida real $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^n)$, y una función simétrica $f \in \mathcal{C}_s(\mathbb{S}^n)$ tales que $\int f\, d\sigma = 1$, y $\int |\langle e, x\rangle|\, d\sigma(x) = 0$ para todo $e \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sea $\widetilde{\sigma}$ la medida simetrizada de σ; es decir, la medida definida como $\widetilde{\sigma}(A) = \frac{1}{2}\big(\sigma(A) + \sigma(-A)\big)$, para todo A medible. Puesto que estamos integrando funciones simétricas, la integral con respecto a $\widetilde{\sigma}$ y a σ son iguales; habríamos encontrado entonces una medida simétrica $\widetilde{\sigma}$ no nula con $\int |\langle e, x\rangle|\, d\widetilde{\sigma}(x) = 0$ para todo $e \in \mathbb{R}^{n+1}$, lo que contradiría el teorema.

□

Por supuesto, también se puede probar que el Corolario 1.3 implica el Teorema 1.1. El siguiente resultado, consecuencia del Corolario 1.3, será el último de esta sección; lo usaremos para probar el principal teorema de este capítulo en que mostraremos que el rango de una medida determina su variación total. Recordemos que las funciones $x \mapsto \langle e, x\rangle$, con $e \in \mathbb{R}^n$, son precisamente los funcionales lineales de $\mathbb{R}^n$en $\mathbb{R}$; el espacio de estos funcionales lo denotaremos por $(\mathbb{R}^n)^*$.

Corolario 1.4. *Sea* $\|\cdot\|$ *una seminorma en* $\mathbb{R}^n$, *y* $\varepsilon > 0$. *Existen funcionales lineales* $f_1, .., f_k, g_1, ..., g_l$ *en* $(\mathbb{R}^n)^*$ *tales que*

$$\left| \|x\| - \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)| - \sum_{j=1}^{l} |g_j(x)| \Big) \right| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Podemos suponer que $n \geq 2$. Consideremos primero el caso de una norma en $\mathbb{R}^n$; en este caso $\alpha = \min\{\|x\| : x \in \mathbb{S}^{n-1}\} > 0$. Sea

$\mathcal{H}$ el espacio lineal engendrado por las funciones $|f|$, con $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Por el Corolario 1.3, puesto que la norma es una función simétrica, existe $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\big|\phi(x) - \|x\|\big| \leq \varepsilon\alpha$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. En consecuencia, $\big|\phi(x) - \|x\|\big| \leq \varepsilon\|x\|$ para los x de $\mathbb{S}^{n-1}$. Claramente ϕ se puede escribir

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} |f_i| - \sum_{j=1}^{l} |g_j|, \qquad f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l \in (\mathbb{R}^n)^*.$$

El resultado seguiría por homogeneidad.

En el caso de una seminorma, consideramos la norma que induce en $\mathbb{R}^n/X$, siendo X el espacio formado por los vectores donde la seminorma se anula, y aplicamos a la norma en el cociente lo ya probado; los funcionales lineales que allá obtengamos compuestos con la proyección canónica, funcionarán en $\mathbb{R}^n$.

$\square$

I.2. El rango determina la variación total.

En un reciente artículo R. Anantharaman y J. Diestel [AD] preguntaban si era posible dar un ejemplo de dos medidas vectoriales que tuvieran el mismo rango, pero que una tuviera variación acotada y la otra no. En esta sección veremos que esto no es posible; es más, veremos que el rango de una medida determina su variación total: dos medidas con igual rango tienen la misma variación (Teorema 2.2). Este será el principal resultado de este capítulo. Comenzaremos recordando algunas definiciones.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω; y sea X un espacio (semi)normado. Una aplicación $F\colon \mathcal{A} \to X$ es una *medida vectorial* si es aditiva; es decir, $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$, siempre que A y B son dos conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$. Se dice que la medida F es *numerablemente aditiva* si para toda sucesión (A_n) de conjuntos dos a dos disjuntos en $\mathcal{A}$ cuya unión también está en $\mathcal{A}$ se tiene

$$F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n).$$

Cuando nosotros utilicemos la expresión medida numerablemente aditiva estaremos sobreentendiendo que está definida sobre un σ-álgebra de conjuntos, siempre que no se especifique otra cosa.

La *variación* de F la denotaremos por $|F|$; ésta viene definida para cada $A \in \mathcal{A}$ por

$$|F|(A) = \sup \Big\{ \sum_{B \in \mathcal{P}} \|F(B)\| : \mathcal{P} \text{ partición finita de } A \text{ en A } \Big\};$$

donde se permite que el supremo tome el valor infinito. La variación es también aditiva; $|F|$ será σ-aditiva si lo es F. La *variación total* de F, que denotaremos por $\|F\|$, es la variación del conjunto total, $\|F\| = |F|(\Omega)$.

Es conveniente observar que el supremo que define la variación, y la variación total, es también un límite. Así, si consideramos el conjunto de todas las particiones finitas $\mathcal{P}$ de Ω en $\mathcal{A}$ dirigido por refinamiento, tenemos

$$\|F\| = \lim_{\mathcal{P}} \sum_{A \in \mathcal{P}} \|F(A)\| \ .$$

Una medida F es de *variación acotada* o *finita* si $\|F\| < +\infty$.

Denotaremos por $\operatorname{rg} F$ al *rango* de la medida F; es decir, al conjunto imagen de la medida que es, si F está definida sobre $\mathcal{A}$, el conjunto $\operatorname{rg} F = \{F(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Por último, cuando K sea un subconjunto de un espacio normado X, usaremos las notaciones $\operatorname{co} K$, $\overline{\operatorname{co}}\, K$, $\operatorname{aco} K$, y $\overline{\operatorname{aco}}\, K$, para designar, respectivamente, a la clausura convexa, convexa y cerrada, absolutamente convexa, y absolutamente convexa y cerrada de K en X.

Seguimos con un resultado bastante fácil de probar y que pone de relieve la relación, que para ciertas normas, hay entre el rango y la variación total de medidas $\mathbb{R}^n$-valoradas. Este será el primer paso para probar el resultado principal antes anunciado.

Lema 2.1. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω, y $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ una medida. Si consideramos en $\mathbb{R}^n$ la seminorma $\|x\| = \sum_{i=1}^{k} |f_i(x)|$ donde $f_1, \ldots, f_k$ son funcionales lineales; entonces se tiene:*

$$\|F\| = \sum_{i=1}^{k} \|f_i \circ F\| = \sum_{i=1}^{k} \big(\sup\{f_i(x) : x \in \operatorname{rg} F\} - \inf\{f_i(x) : x \in \operatorname{rg} F\} \big).$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{A_j\}_{j=1}^r$ una partición de Ω en $\mathcal{A}$. Se tiene entonces

$$\sum_{j=1}^{r} \|F(A_j)\| = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{k} |f_i(F(A_j))| = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{r} |f_i \circ F(A_j)|\Big).$$

Basta tomar límite en el conjunto de las particiones para obtener la primera igualdad del enunciado.

La segunda igualdad no es más que el conocido hecho de que, para una medida real ν, su variación total viene dada por $\|\nu\| = \sup(\operatorname{rg}\nu) - \inf(\operatorname{rg}\nu)$. Demos una prueba de este hecho. Si ν está definida en el álgebra $\mathcal{A}$, y $\mathcal{P}$ es una partición finita en $\mathcal{A}$, pongamos $\mathcal{P}^+ = \{A \in \mathcal{P} : \nu(A) \geq 0\}$, y $\mathcal{P}^- = \{A \in \mathcal{P} : \nu(A) < 0\}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\mathcal{P}} |\nu(A)| &= \sum_{A\in\mathcal{P}^+} \nu(A) - \sum_{A\in\mathcal{P}^-} \nu(A) = \nu\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{P}^+} A\Big) - \nu\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{P}^-} A\Big)\\ &\leq \sup(\operatorname{rg}\nu) - \inf(\operatorname{rg}\nu),\end{aligned}$$

y tomando límite en las particiones obtenemos una desigualdad.

Para la recíproca, basta observar que si A y B son conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{Q} = \{A \cap B, A\setminus B, B\setminus A, \Omega\setminus(A \cup B)\}$ es una partición en $\mathcal{A}$, y se tiene

$$\nu(A) - \nu(B) = \nu(A\setminus B) - \nu(B\setminus A) \leq \sum_{C\in\mathcal{Q}} |\nu(C)| \leq \|\nu\|.$$

De donde se sigue la desigualdad deseada al tomar supremo e ínfimo.

□

Estamos ya en disposición de probar que el rango de una medida determina la variación total de la misma; más concretamente, veremos que dos medidas cuyos rangos tienen iguales clausuras convexas y cerradas, tienen la misma variación total. Como la demostración pone de manifiesto, nos encontramos ante un problema de naturaleza finito-dimensional, para cuya resolución nos serán de gran ayuda el lema anterior y el Corolario 1.4.

Teorema 2.2. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos álgebras de subconjuntos de Ω y Δ respectivamente. Si X es un espacio normado, y $F\colon\mathcal{A} \to X$, $G\colon\mathcal{B} \to X$ son dos medidas vectoriales tales que*

$$\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G)\,;$$

entonces F y G tienen la misma variación total ($\|F\| = \|G\|$).

Demostración. Vamos primero a reducir la demostración a un espacio de dimensión finita. Pongamos que el resultado no es cierto en un cierto espacio normado X. Podemos suponer $\|F\| > \|G\|$, habrá entonces una partición $\{A_j\}_{j=1}^n$ de Ω en $\mathcal{A}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| \; > \; \|G\|.$$

Gracias al teorema de Hahn-Banach, podemos escoger, para cada j, un x_j^* de norma uno en X^*, tal que $x_j^*(F(A_j)) = \|F(A_j)\|$. Definamos el operador $T: X \to \ell_\infty^n$ como $Tx = (x_1^*(x), \dots, x_n^*(x))$. Este operador T es entonces de norma uno, y se verifica la siguiente desigualdad para las variaciones totales de las medidas compuestas TF y TG:

$$\|TF\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{n} \|TF(A_j)\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| > \|G\| \geq \|TG\|_\infty$$

Como claramente se sigue verificando $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, TF) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, TG)$, tenemos que si el resultado es falso en un espacio normado X, entonces también lo es en uno de dimensión finita ℓ_∞^n. Supondremos, por tanto, que X es $\mathbb{R}^n$ con una cierta norma $\|\cdot\|$.

Si el rango de F no es acotado en $\mathbb{R}^n$, tampoco lo es el de G, y en ese caso ambas medidas tendrán variación total infinita, y no hay nada más que probar. En el caso de que ambos rangos sean acotados, y al estar en dimensión finita, las variaciones totales son entonces finitas. El teorema se seguirá si probamos que para cada ε positivo existe un número real a_ε, tal que

$$\big| \|F\| - a_\varepsilon \big| \leq \varepsilon \|F\| \qquad (1\,)$$

$$\big| \|G\| - a_\varepsilon \big| \leq \varepsilon \|G\| \qquad (1')$$

Para ese ε usamos el Corolario 1.4, y encontramos dos conjuntos finitos de funcionales lineales $\{f_1, \dots, f_k\}$, y $\{g_1, \dots, g_l\}$, tales que

$$\left| \|x\| - \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)| - \sum_{j=1}^{l} |g_j(x)| \Big) \right| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n; \qquad (2)$$

y que nos permiten definir las siguientes seminormas en $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1^\varepsilon = \sum_1^k |f_i(x)|,$$

$$\|x\|_2^\varepsilon = \sum_1^l |g_j(x)|.$$

La condición $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$ implica que cada funcional lineal tiene el mismo supremo en el rango de F y en el de G. Como esto mismo ocurre con los ínfimos, aplicando el Lema 2.1 a las seminormas antes definidas, vemos que, con respecto a ellas, F y G tienen la misma variación total; es decir,

$$\|F\|_1^\varepsilon = \|G\|_1^\varepsilon \qquad \|F\|_2^\varepsilon = \|G\|_2^\varepsilon.$$

Veamos que tomando $a_\varepsilon = \|F\|_1^\varepsilon - \|F\|_2^\varepsilon$ se verifican las ecuaciones (1) y (1′). Para cada partición $\{A_j\}_{j=1}^r$ of Ω in $\mathcal{A}$ tenemos, por (2),

$$\left| \sum_{j=1}^r \|F(A_j)\| - \sum_{j=1}^r \|F(A_j)\|_1^\varepsilon + \sum_{j=1}^r \|F(A_j)\|_2^\varepsilon \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^r \left(\|F(A_j)\| - \|F(A_j)\|_1^\varepsilon + \|F(A_j)\|_2^\varepsilon \right)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^r \|F(A_j)\| \leq \varepsilon \|F\|.$$

Tomando límite en el conjunto dirigido de las particiones finitas en $\mathcal{A}$, se prueba la ecuación (1); de manera análoga se prueba la (1′), y se concluye la demostración del teorema.

□

Para concluir esta sección veremos que la bola euclídea es el rango de una medida, y calcularemos su variación total. El que la bola euclídea es un rango de medida es algo clásico [BO]; lo incluimos aquí porque lo usaremos en la próxima sección; también usaremos más tarde los cálculos sobre la variación.

Hay varias maneras de definir medidas cuyo rango sea la bola euclídea en $\mathbb{R}^n$; se puede utilizar la medida invariante por rotaciones en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, nosotros usaremos variables gaussianas, lo que nos permitirá extender facilmente el estudio a dimensión infinita.

Denotemos por (g_n) a una *sucesión gaussiana estándar;* es decir, una sucesión de variables aleatorias independientes, identicamente distribuidas, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ tales que cada g_n tiene la distribución

$$\mathbb{P}(g_n < t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-x^2/2)\, dx\,, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,.$$

Para cada n, definimos la medida vectorial $\sigma_n \colon \Sigma \to \mathbb{R}^n$ como

$$\sigma_n(A) = \left(\sqrt{2\pi} \int_A g_j \, d\mathbb{P}\right)_{j=1,\dots,n} \quad , \quad A \in \Sigma\,.$$

Puesto que las variables gaussianas son continuas, la medida σ_n no tiene átomos; y, usando el teorema de Liapunoff [DU,pag264], se tiene que el rango de la medida σ_n es un convexo compacto de $\mathbb{R}^n$. Este rango es invariante por rotaciones, $S(\operatorname{rg}\sigma_n) = \operatorname{rg}\sigma_n$ para toda transformación ortogonal S, gracias a la invariancia por rotaciones de la distribución gaussiana en $\mathbb{R}^n$ [PV,Cap.2]. Por tanto, tenemos que $\operatorname{rg}\sigma_n$ es un múltiplo de la bola euclídea B_2^n; es decir, es una bola de radio

$$\begin{aligned}
\text{radio de } \operatorname{rg}\sigma_n &= \sup\{x_1 : (x_1, \dots, x_n) \in \operatorname{rg}\sigma_n\} \\
&= \sup\{\sqrt{2\pi} \int_A g_1 : A \in \Sigma\} \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\{g_1 > 0\}} g_1 \, d\mathbb{P} \\
&= \int_0^{+\infty} x \exp(-x^2/2)\, dx = 1.
\end{aligned}$$

En realidad, es muy fácil comprobar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n(\{g_1 > t\}) = (\exp(-t^2/2), 0, \dots, 0)\,;$$

lo que, al usar de nuevo la invariancia de las gaussianas, nos dice que si el vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tiene $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$, entonces

$$\sigma_n\Big(\{\sum_{k=1}^{n} a_k g_k > t\}\Big) = \exp(-t^2/2)\,\mathbf{a}. \tag{3}$$

Vamos a extender todo esto a dimensión infinita; consideremos ahora toda la sucesión (g_n) y definamos la aplicación $\sigma\colon \Sigma \to \ell_2$ como

$$\sigma(A) = \left(\sqrt{2\pi} \int_A g_n \, d\mathbb{P}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Por las consideraciones previas σ está bien definida y $\|\sigma(A)\|_2 \leq 1$ para todo medible A. Es claro que σ es una medida, que además es σ-aditiva ya que, gracias a la ortonormalidad de la sucesión (g_n) en $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$, se tiene $\|\sigma(A)\|_2 \leq \sqrt{2\pi\mathbb{P}(A)}$ para todo A.

Vamos a probar que el rango de σ es la bola unidad de ℓ_2. Para ello tomamos $\mathbf{a} = (a_n)$ en ℓ_2 con $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$; de nuevo por la ortonormalidad de (g_n), la serie $\sum a_n g_n$ es convergente en $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ a una función ϕ. Podemos encontrar una sucesión creciente de naturales (n_j) tal que $\phi_j = \sum_{k=1}^{n_j} a_k g_k$ converja en casi todo a ϕ. Como ϕ es una variable gaussiana [PV], para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene $\mathbb{P}(\{\phi = t\}) = 0$; y por tanto, la función característica de $\{\phi_j > t\}$ converge en casi todo hacia la de $\{\phi > t\}$. Usando en cada coordenada el teorema de la convergencia dominada, y aplicando la ecuación (3), obtenemos

$$\sigma\Big(\{\sum a_n g_n > t\}\Big) = \exp(-t^2/2)\,\mathbf{a}\,, \qquad \text{para cada } \; t \in \mathbb{R}\,.$$

Como $\mathbf{a}$ era un vector arbitrario de norma uno, vemos que el rango de σ es la bola unidad cerrada de ℓ_2.

Por supuesto, podemos considerar σ valorada en ℓ_p con $p \geq 2$, o incluso en c_0, pero ni siquiera en este último caso tiene variación acotada, ya que, llamando P_n a la proyección sobre las n primeras coordenadas, tenemos

$$\|\sigma\|_{c_0} \geq \|P_n\sigma\|_{c_0} = \|\sigma_n\|_\infty = \sqrt{2\pi} \int \max(|g_1|, \ldots, |g_n|)\, d\mathbb{P} \geq \beta\sqrt{\log n},$$

para una cierta constante positiva β [PV,pag.53]. Podemos entonces sumarizar todo lo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *La bola unidad de ℓ_2 es el rango de una medida numerablemente aditiva de variación total infinita en c_0 y en ℓ_p, con $p \geq 2$.*

I.3. Variación de un zonoide.

Una vez visto en la sección anterior que el rango de una medida determina su variación total surgen muchas preguntas naturales; algunas, como el estudio de la monotonía de la variación con respecto al rango, o el planteamiento de otras propiedades que determina el rango, serán objeto de nuestro interés más adelante; pero no se puede eludir que el problema principal es determinar por la geometría del rango, esto es, sin conocer la medida, la variación total de ésta. Esta cuestión puede abarcar en sí todos los problemas que se puedan plantear en la relación entre la variación total y el rango, como podría ser, por ejemplo, el caracterizar los rangos de las medidas de variación finita.

De la demostración del Teorema 2.2 parece deducirse que la determinación de la variación total es un problema finito-dimensional, en el sentido de que la variación total de una medida es el supremo de las de las medidas que se obtienen al componer con contracciones lineales sobre espacios de dimensión finita. Es por eso, que en esta sección vamos a concentrar nuestra atención sobre los rangos de medidas en dimensión finita.

Un *zonoide* es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es el rango de una medida numerablemente aditiva que no tiene átomos [BO]. Por el teorema de Liapounoff, un zonoide es convexo y compacto. En [BO] se prueba que la clausura convexa y cerrada del rango de una medida numerablemente aditiva en $\mathbb{R}^n$ es un zonoide. Es más, siguiendo un proceso detallado al final del primer capítulo de [DU], que hace uso del teorema de representación de Stone para álgebras de Boole y del teorema de Hahn de extensión de medidas, se puede probar que dada una medida acotada en $\mathbb{R}^n$, existe una medida numerablemente aditiva cuyo rango incluye al de la primera y está incluido en su clausura. Por tanto, lo que determina la variación total de una medida acotada en $\mathbb{R}^n$, que es la clausura convexa y cerrada de su rango, es un zonoide.

En espacios de Banach en general, consideraremos la siguiente definición de *zonoide:*

Definición 3.1. *Diremos que un subconjunto cerrado, acotado y convexo Z de un espacio de Banach X es un zonoide, si existe una medida X-valorada numerablemente aditiva F tal que $Z = \operatorname{rg} F$.*

La definición que acabamos de dar es la que más razonablemente extiende la de dimensión finita. En el siguiente capítulo, Corolario II.1.3, veremos una construcción de I. Kluvánek y G. Knowles que asegura que la clausura convexa y cerrada del rango de una medida numerablemente aditiva es también un rango de medida numerablemente aditiva, y por tanto, para nosotros será un zonoide.

Por ahora, sin embargo, sólo trataremos de los zonoides en dimensión finita. Remitimos a [BO] para las demostraciones de los hechos que siguen. Denotaremos por $\mathcal{Z}_n$, el conjunto de todos los zonoides de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{Z}_n$ es estable para la multiplicación por números reales, y para la suma usual de conjuntos en $\mathbb{R}^n$

$$K_1 + K_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}\,;$$

$\mathcal{Z}_n$ es un espacio métrico completo cuando lo dotamos de la distancia de Hausdorff entre compactos de $\mathbb{R}^n$, que viene definida, si llamamos B_2^n a la bola euclídea de $\mathbb{R}^n$, por

$$d(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon : K_1 \subseteq K_2 + \varepsilon B_2^n \quad \text{y} \quad K_2 \subseteq K_1 + \varepsilon B_2^n\}.$$

Los zonoides más simples que hay son los segmentos que contienen al origen, a continuación están las sumas finitas de estos segmentos, que se conocen por el nombre de *zonotopos*. El paso de los zonotopos a los zonoides, no es más que un paso al límite, ya que los zonotopos son densos en $\mathcal{Z}_n$ para la distancia de Hausdorff, y por tanto, todo zonoide es el límite de una sucesión de zonotopos.

El Teorema 2.2. nos permite definir la "variación de un zonoide" con respecto a una (semi)norma $\| \;\|$ de la manera obvia; si $K \in \mathcal{Z}_n$, tomamos una medida F tal que $K = \operatorname{rg} F$ y definimos la *variación de K con respecto a* $\| \;\|$, $\operatorname{var}(\| \;\|, K)$, como la variación total $\|F\|$. El siguiente teorema resume las propiedades de la función variación.

Teorema 3.2. *Sea $\| \;\|$ una seminorma en $\mathbb{R}^n$. Se tiene entonces:*

a) La variación es positivamente homogénea y aditiva; es decir, si α es un número real, y $K_1, K_2 \in \mathcal{Z}_n$, se tiene

$$\operatorname{var}(\| \;\|, \alpha K_1 + K_2) = |\alpha| \operatorname{var}(\| \;\|, K_1) + \operatorname{var}(\| \;\|, K_2)\,.$$

b) La aplicación $\operatorname{var}(\| \;\|, \cdot) \colon \mathcal{Z}_n \to \mathbb{R}$ es continua cuando en $\mathcal{Z}_n$ consideramos la distancia de Hausdorff.

Demostración. La del apartado *a)* es bien sencilla, basta observar que si K_1 y K_2 son, respectivamente, los rangos de las medidas F_1 y F_2, definidas en (Ω_1, Σ_1) y (Ω_2, Σ_2); entonces, la medida definida en la unión disjunta $\Omega_1 \sqcup \Omega_2$ como $F(A_1 \sqcup A_2) = \alpha F(A_1) + F(A_2)$ para $A_1 \in \Sigma_1$, y $A_2 \in \Sigma_2$, tiene como rango el conjunto $\alpha K_1 + K_2$; y puesto que se tiene

$$\|F\| = |F|(\Omega) = |F|(\Omega_1) + |F|(\Omega_2) = |\alpha F_1|(\Omega_1) + |F|_2(\Omega_2) = \alpha\|F_1\| + \|F_2\|,$$

se sigue el resultado de *a)* .

El apartado *b)* es consecuencia de la demostración del Teorema 2.2. En primer lugar, si suponemos que la seminorma es como en el Lema 2.1 , entonces se tiene que claramente la variación es monótona con respecto del rango; es decir, si K_1 y K_2 son zonoides, la condición $K_1 \subseteq K_2$ implica $\mathrm{var}(\| \;\|, K_1) \leq \mathrm{var}(\| \;\|, K_2)$. Si se tiene ahora que $d(K_1, K_2) < \delta$, usando el hecho de que la bola euclídea B_2^n es un zonoide y el apartado anterior, de la definición de la distancia de Hausdorff se deduce

$$\mathrm{var}(\| \;\|, K_1) \leq \mathrm{var}(\| \;\|, K_2) + \delta\, \mathrm{var}(\| \;\|, B_2^n),$$

$$\mathrm{var}(\| \;\|, K_2) \leq \mathrm{var}(\| \;\|, K_1) + \delta\, \mathrm{var}(\| \;\|, B_2^n).$$

y por lo tanto,

$$\left|\mathrm{var}(\| \;\|, K_1) - \mathrm{var}(\| \;\|, K_2)\right| \leq \delta\, \mathrm{var}(\| \;\|, B_2^n),$$

lo que nos proporciona la continuidad de la variación en ese caso.

Para una seminorma arbitraria $\| \;\|$, dado ε positivo, tomamos las seminormas $\| \;\|_1^\varepsilon$ y $\| \;\|_2^\varepsilon$ como en la demostración del Teorema 2.2, y definimos $\psi_\varepsilon \colon \mathcal{Z}_n \to \mathbb{R}$ como

$$\psi_\varepsilon(K) = \mathrm{var}(\| \;\|_1^\varepsilon, K) - \mathrm{var}(\| \;\|_2^\varepsilon, K), \qquad K \in \mathcal{Z}_n.$$

Esta función ψ_ε es continua por lo que hemos visto antes. Además, la ecuación (1) de la demostración del Teorema 2.2, se traduce en que, para cada K en $\mathcal{Z}_n$,

$$\left|\psi_\varepsilon(K) - \mathrm{var}(\| \;\|, K)\right| \leq \varepsilon\, \mathrm{var}(\| \;\|, K).$$

La última desigualdad implica que, cuando ε tiende a cero, (ψ_ε) converge uniformemente en los subconjuntos de $\mathcal{Z}_n$ donde la función $\mathrm{var}(\| \;\|, \cdot)$ está acotada. Si tomamos K_0 en $\mathcal{Z}_n$, nos bastará probar que $\mathrm{var}(\| \;\|, \cdot)$ está acotada en un entorno de K_0 para concluir que es continua en ese entorno por ser límite uniforme de funciones continuas.

Sea ahora $K \in \mathcal{Z}_n$ tal que $d(K, K_0) \leq 1$, y sea $C > 0$ tal que se tenga $\|x\| \leq C\|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; entonces $\operatorname{var}(\| \|, K) \leq C \operatorname{var}(\| \|_1, K)$, y por el Lema 2.2,

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\| \|_1, K) &= \sum_{j=1}^{n} \big(\sup\{x_j : x \in K\} - \inf\{x_j : x \in K\}\big) \\
&\leq 2n \sup\{\|x\|_2 : x \in K\} \\
&\leq 2n \sup\{\|x\|_2 : x \in K_0\} + 1 \,.
\end{aligned}$$

Esto nos demuestra la acotación en el entorno de K_0, y por la discusión previa, la continuidad de $\operatorname{var}(\| \|, \cdot)$, lo que concluye la demostración del teorema.

□

Dados dos elementos x, y en un espacio vectorial real, denotemos por $[x, y]$ el segmento que une esos dos puntos; es decir, $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\ \}$. Si $v \in \mathbb{R}^n$, entonces $[0, v]$ es el rango de una medida cuya variación total coincide con la norma de v. Por tanto, del teorema anterior, y del hecho de que el conjunto de los zonotopos, sumas de segmentos, es denso en $\mathcal{Z}_n$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Sea $\| \|$ una seminorma en $\mathbb{R}^n$. Si $\psi : \mathcal{Z}_n \to \mathbb{R}$ es una función continua, aditiva, y tal que $\psi([0, x]) = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\psi(K) = \operatorname{var}(\| \|, K)$ para todo zonoide K.*

Para finalizar esta sección, y como aplicación del corolario anterior, veremos, en la siguiente proposición, la fórmula que nos da la variación euclídea de un zonoide. Este resultado es debido a G. Schawrz [Sc].

Sea ω_n la probabilidad en $\mathbb{S}^{n-1}$ que es invariante por rotaciones. Si v es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces la integral $\int |\langle v, x\rangle| \, d\omega_n(x)$ sólo depende de la norma euclídea de v; por tanto existe $c_n > 0$, tal que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|v\|_2 = c_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle v, x\rangle| \, d\omega_n(x). \tag{1}$$

Se puede probar que $c_n = \big(\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})\big)/\Gamma(\frac{n}{2})$.

Proposición 3.4. *Si K es un zonoide en ℓ_2^n, su variación viene dada por la fórmula*

$$\operatorname{var}(\|\ \|_2, K) = c_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sup_{y\in K}\langle y, x\rangle - \inf_{y\in K}\langle y, x\rangle\right) d\omega_n(x)\,. \tag{2}$$

Demostración. Sea $\psi\colon \mathcal{Z}_n \to \mathbb{R}$ la aplicación que a cada $K \in \mathcal{Z}_n$ le hace corresponder la integral de la ecuación (2). Es claro que ψ es aditiva; y, puesto que

$$\sup_{y\in[0,v]}\langle y, x\rangle - \inf_{y\in[0,v]}\langle y, x\rangle = |\langle v, x\rangle|\,, \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n\,,$$

usando (1), vemos que para probar que ψ es la variación euclídea de los zonoides sólo falta ver que es una aplicaión continua.

Sea $\delta > 0$, y tomemos dos zonoides, K_1 y K_2, tales que $d(K_1, K_2) < \delta$. Por la definición de la distancia de Hausdorff, tenemos que

$$|\sup_{y\in K_1}\langle y, x\rangle - \sup_{y\in K_2}\langle y, x\rangle| < \delta\,, \qquad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{S}^{n-1};$$

y lo mismo con los ínfimos. Por lo tanto,

$$|\psi(K_1) - \psi(K_2)| < 2c_n \int \delta\, d\omega_n(x) = 2c_n\delta;$$

lo que da la continuidad de ψ y prueba la proposición.

□

I.4. Monotonía de la variación total. Subespacios de L¹.

Como se ha dicho antes, una cuestión que surge naturalmente, una vez sabido que el rango determina la variación total, es la de la monotonía de ésta con respecto al rango; es decir, si la condición $\operatorname{rg} F \subseteq \operatorname{rg} G$ implica $\|F\| \leq \|G\|$ para dos medidas vectoriales F y G. Esto no es cierto en general; R. Anantharaman y J. Diestel [AD] dan un ejemplo de dos medidas F, G con valores en c_0, tales que $\operatorname{rg} F \subset \operatorname{rg} G$, G tiene variación acotada y F no. Nuestro objetivo en esta sección es estudiar en que espacios normados se da la monotonía de la variación total.

Comenzaremos dando un ejemplo similar al de Anantharaman y Diestel. En realidad, el ejemplo es muy parecido; lo que haremos será aprovechar como una de las medidas, la de la Proposición 2.3; y detallar más la construcción de la otra, corrigiendo un pequeño error no fundamental en el ejemplo.

Ejemplo 4.1. *Existe una medida de variación no acotada cuyo rango está incluído en el de otra de variación acotada.*

Demostración. Sabemos, por la Proposición 2.3, que la bola de ℓ_2 es el rango de una medida σ de variación no acotada en c_0. Para completar el ejemplo anunciado, bastará dar una medida F, con valores en c_0, de variación acotada, y cuyo rango contenga a la bola de ℓ_2. Esto se hará, esencialmente, cambiando en la definición de σ la sucesión de gaussianas por la de Rademacher.

Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de las funciones de Rademacher en $[0,1]$. Estas son funciones que toman sólo los valores 1 y -1, que forman un sistema ortonormal en $\mathrm{L}^2[0,1]$, y que, gracias a la desigualdad de Khinchine, verifican que existe una constante $k_1 > 0$, tal que para todo $(\alpha_n) \in \ell_2$ se tiene

$$\left(\sum_n \alpha_n^2\right)^{1/2} \leq k_1 \left\|\sum_n \alpha_n r_n\right\|_{\mathrm{L}^1} .$$

Dada una sucesión (a_n) en la bola unidad de ℓ_2, podemos definir un funcional lineal ψ en el espacio engendrado por las funciones de Rademacher tal que $\psi(r_n) = a_n$. Por la última desigualdad, cuando en este espacio consideramos la norma de L^1, la norma de ψ es $\|\psi\| \leq k_1$. Gracias al teorema de Hahn-Banach, ψ se puede extender a todo L^1; por lo tanto, existirá $h \in \mathrm{L}^\infty[0,1]$, con $\|h\|_\infty \leq k_1$, tal que

$$\int_0^1 h(t) r_n(t)\, dt = a_n , \qquad \text{para todo } n \text{ en } \mathbb{N}.$$

Si definimos ahora $g(t) = h(t) + k_1$, puesto que $\int r_n = 0$, concluimos que para todo (a_n) en la bola unidad de ℓ_2, existe una función positiva g en $\mathrm{L}^\infty[0,1]$, con

$$\|g\|_\infty \leq 2k_1 \ ; \qquad \int_0^1 g(t) r_n(t)\, dt = a_n \ , \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Estamos ya en disposición de definir la medida F anunciada. Sea $\mathcal{M}_2$ la σ-álgebra de los subconjuntos medibles Lebesgue del cuadrado unidad $[0,1]\times[0,1]$. Definimos $F\colon \mathcal{M}_2 \to c_0$ como

$$F(A) = \left(2k_1 \int_0^1 \int_0^1 \chi_A(t,x) r_n(t)\, dx\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad A \in \mathcal{M}_2 .$$

Por la ortonormalidad de la sucesión (r_n), F toma valores en ℓ_2, y por tanto está bien definida. Para que ver que F es numerablemente aditiva y de variación acotada, baste observar que $\|F(A)\|_{c_0} \leq 2k_1 m_2(A)$, donde m_2 es la medida de Lebesgue en el cuadrado.

Por último, si (a_n) está en la bola unidad de ℓ_2, sea $g \in \mathrm{L}^\infty[0,1]$ la función positiva que verifica la ecuación (1), y sea $f = g/2k_1$. Tomemos A_f el subgrafo de f; es decir,

$$A_f = \{(t,x) : 0 \leq x \leq f(t)\}.$$

Es fácil deducir de la definición de F y de (1) que $F(A_f) = (a_n)$, lo que prueba que la bola unidad de ℓ_2 está contenida en el rango de F y concluye el ejemplo.

$\square$

Observación. En el ejemplo anterior, a la hora definir F, para hacer el rango convexo y cerrado, hemos enmascarado, en este contexto más simple, la construcción de I. Kluvánek y G. Knowles que veremos en el Corolario II.1.3. Sin embargo, esta construcción no es realmente necesaria, ya que si F_1 es la medida definida en $\mathcal{M}_1$, los medibles Lebesgue del intervalo $[0,1]$, como

$$F_1(A) = \left(2k_1 \int_A r_n(t)\, dt\right)_{n\geq 1}, \qquad A \in \mathcal{M}_2 ;$$

entonces el rango de F_1 es ya convexo y cerrado en ℓ_2. Este rango contendrá a la bola de ℓ_2 porque, por *b)* en el Corolario II.1.2 que veremos más tarde, contendrá a las sucesiones de la forma

$$\left(2k_1 \int g r_n(t)\, dt\right)_{n\geq 1}, \qquad g \in \mathrm{L}^\infty[0,1], \quad \|g\|_\infty \leq 1 .$$

La prueba de que el rango de F_1 es convexo y cerrado es más complicada que lo que se usa en el ejemplo; demos un pequeño esquema de como sería. Usando el Teorema IX.1.4 de [DU], bastaría probar que para cada medible B con $m_1(B) > 0$, no es inyectivo el operador $T\colon \mathrm{L}^\infty(B) \to \ell_2$, definido como

$$Tg = \left(\int_B g r_n(t)\, dt\right)_{n\geq 1}, \qquad g \in \mathrm{L}^\infty(B).$$

La no inyectividad de este opereador se ve probando que "su cola es sobreyectiva"; es decir, que existe un natural N, que depende de B, tal que el operador $T_N\colon L^\infty(B) \to \ell_2$, definido como

$$T_N g = \left(\int_B g r_{n+N}(t)\, dt\right)_{n\geq 1}, \qquad g \in L^\infty(B),$$

es sobreyectivo. Esto y la inyectividad de T implicarían que ℓ_2 es isomorfo a un cociente de L^∞ sobre un subespacio de dimensión finita, lo cual es falso.

Para cada ε positivo, podemos escoger un conjunto B_0, unión finita de intervalos diádicos, tal que $m_1(B \triangle B_0) < \varepsilon$. Para un N suficientemente grande, B_0 verifica

$$\int_{B_0}\left|\sum_{n\geq 1}\alpha_n r_{n+N}(t)\right| dt = m_1(B_0)\int_0^1\left|\sum_{n\geq 1}\alpha_n r_{n+N}(t)\right| dt, \quad \forall(\alpha_n) \in \ell_2.$$

Luego, por esta última igualdad, y las desigualdades de Khinchine y Cauchy-Schwartz, si $g = \sum_{n\geq 1}\alpha_n r_{n+N}$, con un adecuado ε, se tiene

$$\begin{aligned} k_1\int_B\left|\sum_{n\geq 1}\alpha_n r_{n+N}(t)\right| dt &\geq k_1\int_{B_0}|g| - k_1\int_{B_0\triangle B}|g| \\ &\geq m_1(B_0)\Big(\sum_{n\geq 1}\alpha_n^2\Big)^{1/2} - k_1\|g\|_2\sqrt{\varepsilon} \\ &\geq \left(m_1(B) - \varepsilon - k_1\sqrt{\varepsilon}\right)\Big(\sum_{n\geq 1}\alpha_n^2\Big)^{1/2} \\ &\geq \frac{m_1(B)}{2}\Big(\sum_{n\geq 1}\alpha_n^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad jugaría el papel que juega la desigualdad de Khinchine en el Ejemplo 4.1, y se probaría que T_N es sobreyectivo.

□

Anantharaman y Diestel observaron que, gracias a un resultado de Grothendieck [GR], no es posible dar un ejemplo como el Ejemplo 4.1 con medidas que toman valores en (un subespacio de) L^1. En el próximo teorema probaremos esto de nuevo, basándonos en el Lema 2.1 y en la estructura finito-dimensional de L^1. Pero es más, probaremos que la monotonía de la variación total con respecto al rango caracteriza a los subespacios de L^1, respondiendo a una cuestión en [AD];

para ello usaremos una caracterización de los espacios isomorfos (isométricos) a subespacios de un L^1, debida a J. Lindenstrauss y A. Pełczyński [LP].

En el Corolario 4.3 veremos que un ejemplo como el anterior puede ser dado en cualquier espacio de Banach que no sea isomorfo a un subespacio de un espacio L^1 (un espacio $L^1(\mu)$ para alguna medida positiva μ no necesariamente finita). Cambiando ligeramente el significado habitual diremos, si $C \geq 1$ que dos espacios normados, X e Y, son C-isomorfos cuando existe $T: X \to Y$ un operador continuo invertible y con inverso continuo, tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq C$.

Teorema 4.2. *Sea X un espacio normado, y $C \geq 1$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) X es C-isomorfo a un subespacio de un espacio L^1.

b) Para cada par F, G de medidas X-valoradas, la condición $\operatorname{rg} F \subseteq \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G)$ implica $\|F\| \leq C\|G\|$.

c) Para cada par F, G de medidas numerablemente aditivas X-valoradas, la condición $\operatorname{rg} F \subseteq \operatorname{rg} G$ implica $\|F\| \leq C\|G\|$.

d) Para cada par A, B de subconjuntos finitos de X, la condición

$$\sum_{x \in A} |f(x)| \leq \sum_{y \in B} |f(y)|, \qquad \text{para todo } f \in X^*,$$

implica $\displaystyle\sum_{x \in A} \|x\| \leq C \sum_{y \in B} \|y\|$.

Demostración. *d)* $\Longrightarrow$ *a)* es la caracterización de J. Lindenstrauss y A. Pełczyński: Teorema 7.3 en [LP]. *b)* $\Longrightarrow$ *c)* es obvio.

a) $\Longrightarrow$ *b).* Claramente la condición *a)* implica que existe un operador $T: X \to L^1$ tal que

$$\|x\| \leq \|Tx\|_1 \leq C\|x\|, \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{2}$$

Sean F, G dos medidas con valores en X tales que $\operatorname{rg} F \subseteq \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G)$. Si F está definida sobre el álgebra $\mathcal{A}$, tomemos una partición $\{A_j\}_{j=1}^{r}$ en $\mathcal{A}$. En L^1, usando una esperanza condicionada sobre una adecuada σ-álgebra finita, podemos encontrar para cada ε positivo, una proyección lineal de norma uno $P\colon \mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^1$ que verifique

$$Y = P(\mathrm{L}^1) \quad \text{es un subespacio de dimensión finita isométrico a } \ell_1^n; \tag{3}$$

$$\|PTF(A_j) - TF(A_j)\|_1 \leq \varepsilon/r \qquad j = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

La condición (3) nos dice que en Y la norma viene dada como en el Lema 2.1; por lo tanto, de este lema y de la condición sobre los rangos de F y G, que se traduce en $\operatorname{rg} PTF \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\operatorname{rg} PTG)$, tenemos que $\|PTF\|_1 \leq \|PTG\|_1$. Usando (2), (4) y esta última desigualdad se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r} \|F(A_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{r} \|TF(A_j)\|_1 \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} \|PTF(A_j)\|_1 + \varepsilon \leq \|PTF\|_1 + \varepsilon \\
&\leq \|PTG\|_1 + \varepsilon \leq \|TG\|_1 + \varepsilon \\
&\leq C\|G\| + \varepsilon\,, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Como la partición es arbitraria, de la última cadena de desigualdades se deduce $\|F\| \leq C\|G\|$ como queríamos.

c) $\Longrightarrow$ *d)*. Supongamos que X verifica *c)* y sean $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$ dos subconjuntos finitos de X que satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \leq \sum_{j=1}^{m} |f(y_j)|\,, \qquad \text{para todo } f \in X^*\,. \tag{5}$$

Se definen las funciones $\psi, \phi\colon \mathbb{R} \to X$ como

$$\begin{aligned}
\phi &= 2\sum_{i=1}^{n} x_i\big(\chi_{[i-1,i-1/2)} - \chi_{[i-1/2,i)}\big), \\
\psi &= 2\sum_{j=1}^{m} y_j\big(\chi_{[j-1,j-1/2)} - \chi_{[j-1/2,j)}\big).
\end{aligned}$$

Sean F la medidas con densidad ϕ con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, y G la medida con densidad ψ. Es fácil comprobar que

$$\operatorname{rg} F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : \quad t_i \in [-1,1], \quad i = 1, \ldots, n \right\},$$

$$\operatorname{rg} G = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j y_j : \quad t_j \in [-1,1], \quad j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Para cada elemento f del espacio dual X^* tenemos, por (5),

$$\sup\{f(x) : x \in \operatorname{rg} F\} = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \leq \sum_{j=1}^{m} |f(y_j)| = \sup\{f(x) : x \in \operatorname{rg} G\};$$

lo que implica, al ser ambos rangos subconjuntos convexos y compactos de X, que $\operatorname{rg} F \subseteq \operatorname{rg} G$ y, puesto que X verifica *c)*, tenemos $\|F\| \leq C\|G\|$. Ahora bien,

$$\|F\| = \int_{\mathbb{R}} \|\phi(t)\| \, dt = 2 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|,$$

$$\|G\| = \int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\| \, dt = 2 \sum_{j=1}^{m} \|y_j\|;$$

por lo que se sigue *d)* y se demuestra el teorema.

□

El siguiente corolario puede ser considerado como el caso $C = \infty$ en el teorema; su demostración usa las mismas ideas que la del teorema.

Corolario 4.3. *Si X es un espacio de Banach que no es isomorfo a un subespacio de un espacio L^1, existen dos medidas numerablemente aditivas X-valoradas F, G, definidas en la σ-álgebra de los medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$, tales que:*

a) *F tiene una derivada Bochner integrable con respecto a la medida de Lebesgue.*

b) *G tiene variación no acotada.*

c) $\operatorname{rg} G \subseteq \operatorname{rg} F$.

Demostración. Si X no es isomorfo a un subespacio de un L^1, no verifica *d)* en el teorema anterior para ningún C. Escogiendo una adecuada sucesión (C_n) que tienda a infinito, y reescalando si es necesario, podemos producir dos sucesiones (x_n) y (y_n) en X tales que

$$\sum \|y_n\| < \infty \,, \tag{6}$$

$$\sum \|x_n\| = \infty \,, \tag{7}$$

$$\sum |f(x_n)| \leq \sum |f(y_n)| \quad \text{para todo } f \in X^*. \tag{8}$$

Definimos dos funciones $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to X$, como en la demostración del teorema, de la forma

$$\phi = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, \chi_{[n-1,n-1/2)} - x_n\, \chi_{[n-1/2,n)}$$

$$\psi = 2\sum_{n=1}^{\infty} y_n\, \chi_{[n-1,n-1/2)} - y_n\, \chi_{[n-1/2,n)}$$

De (6) se deduce facilmente que ψ es integrable Bochner en $\mathbb{R}$. Sea G la medida X-valorada que tiene a ψ como derivada. El rango de G es el conjunto

$$K = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n : \quad t_n \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N} \Big\},$$

que es, por (6), un convexo compacto de X.

La función ϕ es localmente integrable, y se puede ver, como en la demostración del teorema, que para todo subconjunto A medible.y acotado de $\mathbb{R}$, y para todo $f \in X^*$,

$$f\left(\int_A \phi\right) \leq \sup\{f(x) : x \in K\}\,;$$

lo que implica, al ser K convexo y compacto, que $\int_A \phi \in K$.

Por (6) y (8), la función ϕ es debilmente integrable. Sea A un conjunto medible en $\mathbb{R}$, definimos la sucesión (z_n) como

$$z_n = \int_{[-n,n]\cap A} \phi\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esta sucesión es debilmente de Cauchy y está dentro de un compacto K, así que es convergente en norma a un elemento z_A de K que satisface

$$f(z_A) = \int_A f \circ \phi\,, \qquad \text{para todo } f \in X^*.$$

Acabamos de probar que ϕ es una función integrable Pettis. La medida vectorial F definida por

$$F(A) = (\mathrm{P})\text{-} \int_A \phi$$

es numerablemente aditiva [DU, p. 53] y tiene su rango incluido en K. De (7) se tiene que F tiene variación no acotada, lo que termina la prueba.

□

En el corolario anterior es fundamental la completitud del espacio para poder construir F y G como medidas numerablemente aditivas definidas en σ-álgebras. En un espacio normado no isomorfo a un subespacio de un espacio L^1, se podría haber hecho una construcción parecida pero con medidas definidas en álgebras. Como el siguiente ejemplo muestra, hay espacios en los que no se puede hacer la construcción en σ-álgebras, ya que no hay medidas numerablemente aditivas de variación infinita valoradas en ellos. En la demostración de este ejemplo usaremos el método de la "joroba deslizante"; también se pueden usar las categorías de Baire.

Ejemplo 4.4. *Existe un espacio normado que no es isomorfo a un subespacio de un* L^1 *espacio, y en el que toda medida numerablemente aditiva tiene variación finita.*

Demostración. Sea φ el subespacio de c_0 engendrado linealmente por la base canónica; es decir, el subespacio de las sucesiones que son nulas a partir de un término. Este espacio es denso en c_0; por lo tanto, no es isomorfo a ningún subespacio de L^1, ya que c_0 no lo es.

Denotemos por e_m^* al funcional $e_m^*\colon \varphi \to \mathbb{R}$ que a cada elemento le hace corresponder su coordenada m-ésima. Para probar que toda medida numerablemente aditiva que toma sus valores en φ es de variación acotada, veremos que su rango es de dimensión finita. Más concretamente, si Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω, y si $F\colon \Sigma \to \varphi$ es una medida numerablemente aditiva, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle e_m^*, F(A)\rangle = 0\,, \qquad \text{para todo } A \in \Sigma, \text{ para todo } m \geq M. \tag{9}$$

Para cada $x = (x_m) \in \varphi\setminus\{0\}$, pongamos $\operatorname{long} x = \max\{m : x_m \neq 0\}$, y $\operatorname{long} 0 = 0$. Si (9) no fuera cierto, vamos a probar que existe en Σ una sucesión (A_n) de conjuntos disjuntos dos a dos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\operatorname{long} F(A_n) < \operatorname{long} F(A_{n+1})\,.$$

Estamos suponiendo que $\{\operatorname{long} F(A) : A \in \Sigma\}$ no está acotado; luego podemos encontrar un $B \in \Sigma$ tal que $\operatorname{long} F(B) > \operatorname{long} F(\Omega)$. De esto, y de la aditividad de F, es fácil deducir que

$$\operatorname{long} F(B) = \operatorname{long} F(\Omega\setminus B)\,.$$

Además, pueto que se tiene siempre $\operatorname{long}(x+y) \leq \operatorname{long} x + \operatorname{long} y$, al menos uno de los conjuntos

$$\{\operatorname{long} F(A) : A \in \Sigma,\ \ A \subset B\} \quad ,\text{o} \quad \{\operatorname{long} F(A) : A \in \Sigma,\ \ A \subset \Omega\setminus B\},$$

es no acotado. Si es el primero el no acotado, pongamos $A_1 = \Omega\setminus B$, y repitamos el proceso realizado en Σ ahora en $\{A \in \Sigma : A \subset B\}$ encontrando aquí un C tal que

$$\operatorname{long} F(C) > \operatorname{long} F(A_1) = \operatorname{long} F(B)\,.$$

Analogamente, si es el segundo el no acotado, pongamos entoces $A_1 = B$, y repitamos el proceso en $\{A \in \Sigma : A \subset \Omega\setminus B\}$.

Siguiendo así, mediante un proceso inductivo, construimos una sucesión (A_n) en Σ que verifica

$$A_{n+1} \subset \Omega\setminus\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\,, \tag{10}$$

$$\operatorname{long} F(A_n) < \operatorname{long} F(A_{n+1})\,, \quad \text{y} \tag{11}$$

$$\Big\{\operatorname{long} F(B) : B \in \Sigma,\ \ B \subset \Omega\setminus\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\Big\} \quad \text{es no acotado.}$$

Esta es la sucesión que buscábamos de subconjuntos que, gracias a (10), son disjuntos dos a dos. Veremos ahora que su existencia es contradictoria con el hecho de que $F(\Sigma) \subset \varphi$.

Pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \operatorname{long} F(A_n)$; por (11) la sucesión (m_n) es estrictamente creciente, denotemos $x_n^* = e_{m_n}^*$. Tenemos, por (11),

$$\langle x_n^*, F(A_n)\rangle \neq 0\,; \qquad \langle x_n^*, F(A_j)\rangle = 0\,, \quad \text{si } j < n. \tag{12}$$

La serie $\sum F(A_n)$ es incondicionalmente convergente en φ, luego para cada $f^* \in \varphi^*$ tenemos que la serie $\sum\langle f^*, F(A_n)\rangle$ es absolutamente convergente. Es, por tanto, fácil construir inductivamente una sucesión $(n_k)_k$ de naturales estrictamente creciente verificando, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j \geq n_{k+1}}^{\infty} |\langle x_{n_k}^*, F(A_j)\rangle| < (1/2)|\langle x_{n_k}^*, F(A_{n_k})\rangle| \tag{13}$$

Si tomamos $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, se ve que $F(C)$ no puede estar en φ, ya que tienen infinitas coordenadas no nulas, puesto que, para cada $k \in \mathbb{N}$, usando (12) y (13), se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle x_{n_k}^*, F(C)\rangle| &\geq |\langle x_{n_k}^*, F(A_{n_k})\rangle| - \sum_{j\neq k} |\langle x_{n_k}^*, F(A_{n_j})\rangle| \\
&\geq |\langle x_{n_k}^*, F(A_{n_k})\rangle| - \sum_{j<n_k} |\langle x_{n_k}^*, F(A_j)\rangle| - \sum_{j\geq n_{k+1}} |\langle x_{n_k}^*, F(A_j)\rangle| \\
&= |\langle x_{n_k}^*, F(A_{n_k})\rangle| - \sum_{j\geq n_{k+1}} |\langle x_{n_k}^*, F(A_j)\rangle| > 0.
\end{aligned}$$

Esta contradición muestra que (9) es cierto y concluye el ejemplo.

$\square$

CAPITULO II

Rango, variación y derivabilidad de medidas numerablemente aditivas.

II.1. La integral de Bartle.

Uno de los principales instrumentos para el estudio de las medidas vectoriales, y para la aplicación de éstas al análisis funcional, es la "integral de Bartle". Muchas propiedades de los rangos de medidas numerablemente aditivas pueden ser deducidas con la ayuda de esta útil herramienta. Por eso hemos decidido comenzar este capítulo, dedicado a medidas numerablemente aditivas, con una sección en que estudiamos las propiedades de esta integral, así como algunas particularidades de las medidas numerablementre aditivas que nos serán de utilidad en el desarrollo del resto del capítulo.

La mayor parte de los resultados de esta sección están tomados del libro de J. Diestel y J. J. Uhl [DU]. No pretendemos dar aquí una relación exhaustiva de todos los tópicos relativos a la integral de Bartle, sólo intentamos acercarnos a aquellos más relacionadas con el rango, y a los resultados que luego usaremos. Aunque esta integral se puede definir para muchas medidas vectoriales (las de rango acotado) nosotros sólo la veremos en el marco de las medidas σ-aditivas, donde podemos hacer uso de medidas de control.

Sea X un espacio de Banach, sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y $G: \Sigma \to X$ una medida numerablemente aditiva. Un conocido resultado de R. G. Bartle, N. Dunford y J. T. Schwartz [BDS][DU,pag.14], afirma que existe una probabilidad μ sobre Σ que tiene los mismos conjunto de medida nula que $|G|$. Es decir, una probabilidad μ que, en particular, verifica, para cada medible A,

$$\mu(A) = 0 \implies G(B) = 0\,, \quad \text{para todo medible } B \subseteq A. \tag{1}$$

Una medida finita positiva μ que verifique esta condición es llamada una *medida de control de G.* Al tratarse de medidas numerablemente aditivas en una σ-álgebra, por un resultado de B. J. Pettis [DU,pag.10], la condición (1) implica que G es μ-continua; es decir,

$$\lim_{\mu(A)\to 0} G(A) = 0\,;$$

o más precisamente, para cada ε positivo, existe un $\delta > 0$ tal que, si $\mu(A) < \delta$, entonces $\|G(A)\| < \varepsilon$.

Sea $G: \Sigma \to X$ una medida numerablemente aditiva. Es fácil probar que el rango de G es acotado; sea K tal que $\|G(A)\| \leq K$, para todo $A \in \Sigma$. Denotemos $\mathrm{Simp}(\Sigma, \mathbb{R})$ al espacio de las funciones simples medibles para Σ a valores reales. Si $f \in \mathrm{Simp}(\Sigma, \mathbb{R})$, y $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, definimos

$$T_G(f) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j G(A_j)\,.$$

Es casi directo comprobar, por la aditividad de G, que T_G está bien definido, y resulta ser un operador lineal $T_G: \mathrm{Simp}(\Sigma, \mathbb{R}) \to X$, que, gracias a (1), es cero en las funciones que son nulas en casi todo para μ.

Si $f \in \mathrm{Simp}(\Sigma, \mathbb{R})$, toma todos sus valores en el intervalo $[0, 1]$, existe una familia finita de conjuntos medibles $\{A_1, \ldots, A_n\}$ disjuntos dos a dos, y unos números en dicho intervalo $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ tales que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}\,.$$

Si ponemos $B_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, y $\alpha_{n+1} = 0$, también podemos escribir f como

$$f = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \chi_{B_j} , \tag{2}$$

y por tanto,

$$\|T_G(f)\| \leq \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \|G(B_j)\| \leq K \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \leq K .$$

Si f es simple y $\|f\|_\infty \leq 1$, como se puede escribir como diferencia de dos funciones simples con valores en $[0,1]$, tendremos $\|T_G(f)\| \leq 2K$, y por linealidad,

$$\|T_G(f)\| \leq 2K \|f\|_\infty , \qquad \text{para todo } f \in \mathrm{Simp}(\Sigma, \mathbb{R}). \ .$$

Esto permite extender T_G por densidad (X es un Banach) a todas las funciones reales medibles acotadas. Para cada función medible acotada f denotaremos

$$T_G(f) = \int f \, dG ,$$

y lo llamaremos *la integral (de Bartle) de f con respecto a G.*

La integral de Bartle es lineal en f y en G. Es más, si tenemos un operador lineal continuo $S: X \to Y$, entonces

$$\int f \, dSG = S\Big(\int f \, dG\Big) .$$

Como esta integral vale cero para las funciones nulas en casi todo para μ, esta integral produce un operador lineal acotado de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ en X. Una propiedad importante de este operador viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio de Banach, G una medida numerablemente aditiva X-valorada, y μ una medida de control de G. Si consideramos $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ como el espacio dual de $\mathrm{L}^1(\mu)$, la aplicación*

$$f \mapsto \int f \, dG , \qquad f \in \mathrm{L}^\infty(\mu),$$

es un operador débil a débil continuo de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ en X.*

Demostración. De la definición de la integral se deduce que, para cada $x^* \in X^*$ tenemos

$$x^*\Big(\int f\,dG\Big) = \int f\,dx^*G\,,$$

donde x^*G es una medida real μ-continua. Por el teorema de Radon-Nikodým, existe $g_{x^*} \in \mathrm{L}^1(\mu)$, que es la derivada de x^*G con respecto a μ, verificando

$$x^*\Big(\int f\,dG\Big) = \int f g_{x^*}\,d\mu\,, \qquad \text{para todo } f \in \mathrm{L}^\infty(\mu).$$

Por lo tanto, cada x^* del dual compuesto a la integral produce un funcional débil* continuo en L^∞, lo que implica que el operador definido por la integral es débil* a débil continuo.

□

Como consecuencia tenemos, acerca del rango de G, el siguiente corolario

Corolario 1.2. *Si X es un espacio de Banach, y G es una medida numerablemente aditiva X-valorada, definida en una σ-álgebra sobre Ω, se tienen:*

a) $\mathrm{rg}\,G$ *es relativamente débil compacto en* X.

b) $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,G) = \big\{\int f\,dG \;\;\big|\;\; f\colon\Omega \to [0,1] \quad \textit{medible}\,\big\}$.

c) $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,G - \mathrm{rg}\,G) = \big\{\int f\,dG \;\;\big|\;\; f\colon\Omega \to [-1,1] \quad \textit{medible}\,\big\}$.

Demostración. El apartado a) es un resultado de Bartle, Dunford y Schwartz [BDS]. Sea μ una medida de control de G, puesto que la bola unidad cerrada de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ es débil* compacta, por la Proposición 1.1 tenemos que su imagen mediante la integral es débil compacta en X; y ya que

$$G(A) = \int \chi_A\,dG\,, \qquad \text{para cada } A \text{ medible},$$

el rango de G está incluido en la imagen de la bola y es relativamente débil compacto.

Es claro que el conjunto $D = \{f \in \mathrm{L}^\infty(\mu) : f(\Omega) \subseteq [0,1]\}$ es débil* compacto y convexo; de la Proposición 1.1 y lo visto en la demostración de a), se deduce entonces que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,G) \subseteq \Big\{\int f\,dG \;\;\Big|\;\; f\colon\Omega \to [0,1] \quad \text{medible}\,\Big\}\,.$$

Las funciones simples de D son densas en D para la topología de la norma de L^∞ y por tanto también para la débil*. Al escribir estas funciones simples como en la ecuacion (2), vemos que están en la clausura convexa de las funciones características. Usando de nuevo la Proposición se obtiene la otra inclusión y probamos *b)*.

La demostración de *c)* es ahora fácil. Teniendo en cuenta que toda función medible con valores en $[-1,1]$ es diferencia de dos con valores en $[0,1]$ y viceversa, tenemos

$$\Big\{\int f\,dG \mid f\colon\Omega\to[-1,1] \quad \text{medible}\Big\}$$

$$= \Big\{\int f\,dG \mid f\colon\Omega\to[0,1] \quad \text{medible}\Big\} - \Big\{\int f\,dG \mid f\colon\Omega\to[0,1] \quad \text{medible}\Big\}$$

$$= \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G) - \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G) = \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} G).$$

La última igualdad porque la diferencia de débiles compactos es débil compacto y cerrado. Con esto probamos *c)* y el corolario.

□

A continuación damos el resultado ya anunciado que nos permitirá reconocer como un zonoide a la clausura convexa y cerrada del rango de una medida numerablemente aditiva. El resultado es una construcción de I. Kluvánek y G. Knowles [KK,pag.128][DU,pag.274]. El objeto de incluirla aquí es ver un primer ejemplo de aplicación de la integral de Bartle al estudio de rangos de medidas, y completar nuestra definición de zonoide.

Corolario 1.3. *Sea X un espacio de Banach. Si G es una medida numerablemente aditiva X-valorada, existe otra medida numerablemente aditiva F tal que*

$$\operatorname{rg} F = \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G)\,.$$

En consecuencia, $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G)$ es un zonoide en X.

Demostración. Supongamos que G está definida sobre Σ, σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y sea μ una medida de control de G. Si $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de los medibles Lebesgue en $[0,1]$ y m es la medida de Lebesgue, denotemos por $\Sigma\otimes\mathcal{M}$ la σ-álgebra producto en $\Omega\times[0,1]$. Para cada $A\in\Sigma\otimes\mathcal{M}$, por el teorema de Fubini, la función $f_A\colon\Omega\to[0,1]$ definida como

$$f_A(\omega) = m\big(\{t\in[0,1] : (\omega,t)\in A\}\big)\,,$$

está en $L^\infty(\mu)$. Definimos F como

$$F(A) = \int f_A \, dG \qquad \text{para cada medible } A \in \Sigma \otimes \mathcal{M}.$$

Es claro que F es una función aditiva. Si (A_n) es una sucesión en $\Sigma \otimes \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, y $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}(\omega) = f_A(\omega)\,, \qquad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Por el teorema de la convergencia dominada, la serie $\sum f_{A_n}$ converge a f_A para la topología débil* en $L^\infty(\mu)$; una mirada a la Proposición 1.1 nos convence de que F es numerablemente aditiva para la topología débil en X y, por el teorema de Orlicz-Pettis [DU,pag.22], es numerablemente aditiva para la norma.

Como f_A toma valores en $[0,1]$, por el apartado *b)* del Corolario 1.2 se tiene que $F(A) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$ para cada medible $A \in \Sigma \otimes \mathcal{M}$. Reciprocamente si $f\colon \Omega \to [0,1]$ es una función medible, entonces su subgrafo

$$\Delta_f = \{(\omega, t) \in \Omega \times [0,1] : 0 \leq t \leq f(\omega)\}$$

pertenece a $\Sigma \otimes \mathcal{M}$ y verifica

$$F(\Delta_f) = \int f \, dG\,;$$

lo que, apelando de nuevo al Corolario 1.2 prueba la inclusión que nos faltaba y se tiene $\mathrm{rg}\, F = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$ como se quería.

□

La Proposición 1.1 nos permite definir otro tipo más de nuevas medidas a partir de una dada. Sea $G\colon \Sigma \to X$ numerablemente aditiva, μ una medida de control, y $f \in L^\infty(\mu)$; para cada $A \in \Sigma$ ponemos

$$fG(A) = \int_A f \, dG = \int \chi_A f \, dG\,.$$

Está claro que de esta manera definimos una medida finitamente aditiva fG en Σ con valores en el Banach X. Es más, si (A_n) es una sucesión de conjuntos medibles, decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo n), y con intersección vacía, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{A_n} = 0\,, \qquad \text{para la topología débil* en } \mathrm{L}^\infty(\mu).$$

El mismo argumento dado en la demostración del último Corolario, que usa la Proposición 1.1 y el teorema de Orlicz-Pettis, nos prueba que fG es una medida numerablemente aditiva. La siguiente Proposición, con la que terminamos esta sección, resume algunas propiedades de esta medida.

Proposición 1.4. *Sean X un espacio de Banach, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, $G\colon \Sigma \to X$ una medida numerablemente aditiva, y μ una medida de control de G. Si $f, g \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$, y A es un conjunto medible, entonces:*

a) $\int g\, d(fG) = \int fg\, dG$

b) $g(fG) = (gf)G$.

c) $\|fG(A)\| \leq \int_A |f|\, d|G|$

d) $|fG|(A) = \int_A |f|\, d|G|$.

Demostración. No es más que la definición de la medida fG el que a) sea cierto en el caso en que g es una función característica. La linealidad de la integral nos proporciona el resultado cuando g es una combinación lineal de características, es decir, una función simple, y por densidad de las funciones simples se prueba a).

El apartado b) es consecuencia immediata de a), ya que para todo medible A se tiene

$$g(fG)\,(A) = \int g\chi_A\, d(fG) = \int g\chi_A f\, dG = \int (fg)\chi_A\, dG = (gf)G\,(A)\,.$$

De nuevo por un argumento de densidad, la demostración de c) basta hacerla en el caso de una función simple f. Ahora bien, si $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$, donde los conjuntos A_j son dos a dos disjuntos, tenemos

$$\|fG(A)\| = \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j G(A_j \cap A)\right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j|\|G(A_j \cap A)\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j||G|(A_j \cap A) = \int_A |f| \, d|G|.$$

De *c)* se deduce la desigualdad

$$|fG|(A) \leq \int_A |f| \, d|G| \, .$$

Para probar la otra desigualdad en *d)*, distinguimos dos casos: si $|f|$ es integrable con respecto a $|G|$, o si no. En el primer caso podemos dar una sucesión de funciones simples que aproxime a f tanto en $L^\infty(\mu)$ como en $L^1(|G|)$; aplicando la desigualdad ya probada podríamos suponer que f es simple.

Escribamos pues $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, con los A_j disjuntos dos a dos, y los α_j no nulos. Para cada ε positivo, y cada j, escogemos una partición π_j de $A \cap A_j$ tal que

$$|G|(A \cap A_j) \leq \sum_{B \in \pi_j} \|G(B)\| + \frac{\varepsilon}{n|\alpha_j|} \, .$$

Se tiene entonces,

$$\begin{aligned}
\int_A |f| \, d|G| &= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j||G|(A_j \cap A) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{B \in \pi_j} |\alpha_j| \|G(B)\| + \varepsilon \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{B \in \pi_j} \|fG(B)\| + \varepsilon \\
&\leq |fG|(A) + \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Esto prueba la otra desigualdad en el primer caso, ya que ε es arbitrario.

En el caso de que $\int_A |f| \, d|G| = \infty$, veamos que también $|fG|(A)$ es infinito. Si $|fG|(A) < +\infty$, para cada ε positivo el conjunto

$$A_\varepsilon = \{\omega \in A : |f(\omega)| \geq \varepsilon \}$$

tendría varición finita con respecto a G, ya que

$$|G|(A_\varepsilon) = |\chi_{A_\varepsilon} G|(A_\varepsilon) = \left|\frac{\chi_{A_\varepsilon}}{f}(fG)\right|(A_\varepsilon) \leq \int_{A_\varepsilon} 1/\varepsilon \, d|fG| \leq \frac{|fG|(A)}{\varepsilon} \, .$$

Puesto que f es acotada y $|G|(A_\varepsilon)$ finito, por el primer caso tendríamos

$$|fG|(A_\varepsilon) = \int_{A_\varepsilon} |f| \, d|G| \,;$$

lo que nos llevaría a una contradicción, pues al tomar límite cuando ε tiende a cero, el segundo miembro de la igualdad tiende a infinito y el primero a $|fG|(A)$. Esta contradicción acaba la prueba de *d)* y de la proposición.

□

II.2. Descomposición de un zonoide.

Sea X es un espacio de Banach, y supongamos que tenemos dos medidas numerablemente aditivas G y F que determinan el mismo zonoide; es decir, tales que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) = Z\,.$$

Si restringimos la medida F a los subconjuntos medibles de un medible dado M, y a los de su complementario M^c, producimos una descomposición del zonoide Z en suma de otros dos, ya que cada restricción es una medida, y

$$Z = \overline{\mathrm{co}}\{F(A) : A \subseteq M,\ A \text{ medible }\} + \overline{\mathrm{co}}\{F(A) : A \subseteq M^c,\ A \text{ medible }\}. \quad (1)$$

Nos planteamos el siguiente problema: ¿ cómo refleja la otra medida G la existencia de tal descomposición?

La primera intención de dar una respuesta es ver si en G esta descomposición se refleja de la misma forma; es decir, si existirá un medible N tal que,

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathrm{co}}\{G(B) \,:\, B \subseteq N,\ B \text{ medible }\} &= \overline{\mathrm{co}}\{F(A) \,:\, A \subseteq M,\ A \text{ medible }\}\,, \\ \overline{\mathrm{co}}\{G(B) \,:\, B \subseteq N^c,\ B \text{ medible }\} &= \overline{\mathrm{co}}\{F(A) \,:\, A \subseteq M^c,\ A \text{ medible }\}\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sin embargo, el próximo ejemplo nos convence de que esto no siempre es así, ni aún en el caso de medidas no atómicas con valores en $\mathbb{R}^2$.

Antes de pasar a él, hagamos la observación de que la descomposición anterior (1) se enmarca dentro del caso general

$$Z = Z_1 + Z_2\,; \qquad \text{donde } Z_1 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_1), \text{ y } Z_2 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_2),$$

siendo F_1 y F_2 dos medidas numerablemente aditivas; es decir, poner el zonoide Z como suma de otros dos. Sin embargo, merece la pena decir que que este segundo tipo de descomposición es también del tipo (1); basta considerar una medida F definida en la unión disjunta de los conjuntos donde están definidas F_1 y F_2, y cuya restricción a cada uno e ellos coincida con la correspondiente F_j.

Ejemplo 2.1. *Descomposición del disco en suma de otros dos.*

Sabemos, por el capítulo anterior, que el círculo $\mathbb{D}$, la bola unidad cerrada del plano euclídeo ℓ_2^2, es un zonoide. Consideremos en la esfera $\mathbb{S}^1$ la probabilidad ω invariante por transformaciones ortogonales; entonces la medida G, definida para cada boreliano A de $\mathbb{S}^1$ como

$$G(A) = \pi \int_A y \, d\omega(y) \, ,$$

tiene al disco $\mathbb{D}$ como rango. Para ver esto, sabiendo, por el teorema de Liapounoff, que el rango es convexo y compacto, basta usar que para cada $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\begin{aligned}\sup\{\langle x, G(A)\rangle : A \ \text{ medible }\} &= \sup\{\pi \int_A \langle x, y\rangle \, d\omega(y) : A \ \text{ medible }\} \\ &= \pi \int_{\{y:\langle x,y\rangle \geq 0\}} \langle x, y\rangle \, d\omega(y) \\ &= \|x\|_2 = \sup\{\langle x, y\rangle : y \in \mathbb{D}\}\end{aligned} \tag{3}$$

Para cada número $\lambda \in [0,1]$ podemos escribir $\mathbb{D}$ como suma de los discos de radio λ y $1-\lambda$. Supongamos que estos otros zonoides se pueden obtener como en (2); es decir, que existe un medible M tal que

$$\begin{aligned}\lambda\mathbb{D} &= \overline{\text{co}}\{G(A) : A \subseteq M, \quad A \text{ medible}\}\, , \\ (1-\lambda)\mathbb{D} &= \overline{\text{co}}\{G(A) : A \subseteq M^c, \quad A \text{ medible}\}\, .\end{aligned} \tag{4}$$

Entonces por las mismas razones que en (3) tendríamos que, para todo x de $\mathbb{R}^2$,

$$\lambda \|x\|_2 = \pi \int_{\{y:\langle x,y\rangle \geq 0\}} \langle x, y\rangle \chi_M(y) \, d\omega(y) \, .$$

Sumando la anterior igualdad a la que se tiene para $-x$, obtendríamos

$$2\lambda \|x\|_2 = \pi \int_{\mathbb{S}^1} |\langle x, y\rangle| \chi_M(y) \, d\omega(y) \, .$$

Lo que implicaría, al ser la medida ω simétrica, que para todo $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\pi \int_{\mathbb{S}^1} |\langle x, y\rangle| \left(\chi_M(y) + \chi_M(-y)\right) d\omega(y) = 4\lambda \|x\|_2$$

$$= \pi \int_{\mathbb{S}^1} |\langle x, y\rangle| \, 2\lambda \, d\omega(y)\,.$$

Esta última igualdad nos dice, usando el Teorema I.1.1, que serían iguales las medidas simétricas que se obtienen en la esfera al tomar 2λ y $\chi_M + \chi_{-M}$ como densidades con respecto a ω; por tanto, estas dos funciones son iguales en casi toda la esfera, lo que exigiría que λ fuera 0, 1, ó $\frac{1}{2}$. Para cualquier otro valor de λ, no existe un M que verifique (4). Se puede comprobar que para $\lambda = \frac{1}{2}$ tomando

$$M = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [0, \pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]\,\},$$

este conjunto verifica (4).

□

En el ejemplo anterior, aunque el disco $\lambda\mathbb{D}$ no se pueda obtener como rango de la restricción de la medida G a un subconjunto, lo que si es posible es obtenerlo con una densidad con respecto a la medida G; es decir, existe una función real acotada ψ (en este caso la constante λ) tal que, siguiendo la notación de la sección anterior, se tiene $\overline{\text{co}}(\text{rg}\,\psi G) = \lambda\mathbb{D}$. El otro sumando aparece tomando como densidad $1 - \psi$.

Sea G una medida numerablemente aditiva definida en una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. No siempre es cierto que si ψ es una función real medible y acotada en Ω, el zonoide que determina G se pueda poner como suma del que determina ψG y de otro zonoide. Sin embargo, si ψ toma valores en $[0, 1]$, esto sí es así, y el otro zonoide es el determinado por $(1 - \psi)G$; ya que, por el Corolario 1.2 y la Proposición 1.4, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\text{co}}(\text{rg}\,G) &= \left\{ \textstyle\int f\,dG \quad | \quad f\colon \Omega \to [0,1] \quad \text{medible} \right\} \\
&= \left\{ \textstyle\int f\psi\,dG + \int g(1-\psi)\,dG \quad | \quad f, g\colon \Omega \to [0,1] \quad \text{medibles} \right\} \\
&= \overline{\text{co}}(\text{rg}\,\psi G) + \overline{\text{co}}\big(\text{rg}\,(1-\psi)G\big) \qquad (5)
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es aún más devastador que el anterior. En él damos una descomposición de un zonoide que ni siquiera se puede representar de esta forma.

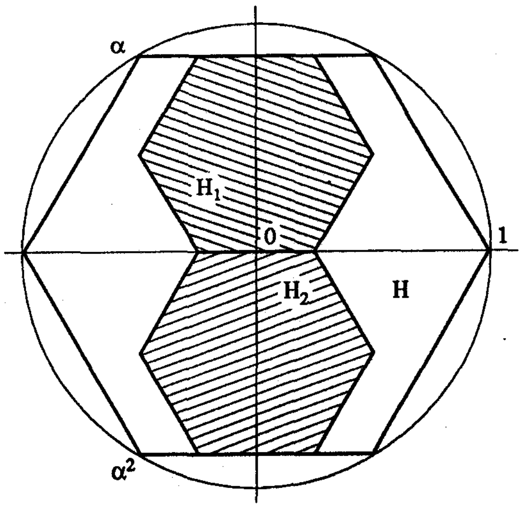
Ejemplo 2.2. *Descomposición del hexágono.*

En este ejemplo es cómodo identificar $\mathbb{R}^2$ con el plano complejo $\mathbb{C}$ para simplificar las notaciones. Sea α la primera raíz primitiva cúbica de la unidad, es decir, $\alpha = \exp(2\pi i/3)$. En el intervalo [0,3] consideramos las siguientes funciones:

$$g = \chi_{[0,1]} + \alpha\chi_{(1,2]} + \alpha^2\chi_{(2,3]} \,,$$
$$f_1 = \frac{1}{2}\left(\chi_{[0,1/2]} - \chi_{(1/2,1]} + \alpha\chi_{(1,2]} - \alpha^2\chi_{(2,3]}\right) ,$$
$$f_2 = \frac{1}{2}\left(\chi_{[0,1/2]} - \chi_{(1/2,1]} - \alpha\chi_{(1,2]} + \alpha^2\chi_{(2,3]}\right) .$$

Llamemos G, F_1, y F_2, a las medidas complejas, definidas en los medibles de $[0,3]$, que tienen de densidad con respecto a la medida de Lebesgue, respectivamente a g, f_1, y f_2; así, por ejemplo, tendremos $G(A) = \int_A g(t)\,dt$, para un medible A en $[0,3]$.

El rango de G es la suma de los tres segmentos del plano complejo que unen 0 con cada una de las raíces cúbicas de la unidad; esta suma es el hexágono regular H cuyos vértices son las raíces sextas de la unidad. $H_1 = \operatorname{rg} F_1$ y $H_2 = \operatorname{rg} F_2$ también son hexágonos regulares, pero su radio es la mitad que el de H, y sus centros están desplazados en el eje imaginario de manera que H_1 está en el semiplano superior cerrado y H_2 en el inferior. Se puede ver que



$$H_1 = [-1/4, 1/4] + [0, \alpha/2] + [0, -\alpha^2/2] = \frac{\sqrt{3}i}{4} + \frac{1}{2}H\,, \quad \text{y}$$
$$H_2 = [-1/4, 1/4] + [0, -\alpha/2] + [0, \alpha^2/2] = \frac{-\sqrt{3}i}{4} + \frac{1}{2}H\,. \tag{6}$$

Se tiene por lo tanto, $H = H_1 + H_2$.

Si $\psi\colon [0,3] \to [0,1]$ es medible, existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ tales que el rango de la medida ψG es la siguiente suma de segmentos en $\mathbb{C}$:

$$\operatorname{rg} \psi G = [0, \lambda_1] + [0, \lambda_2\alpha] + [0, \lambda_3\alpha^2]\,.$$

Luego el rango de ψG es convexo y compacto, y por tanto, un zonoide. Si este zonoide estuviera incluido en el semiplano superior, entonces, como α^2 tiene parte imaginaria negativa, tendría que ser $\lambda_3 = 0$; lo que implicaría que $\operatorname{rg} \psi G$ sería una suma de dos segmentos; es decir, un segmento o un cuadrilátero, nunca podría ser el hexágono H_1. Por tanto la descomposición $H = H_1 + H_2$ no se puede representar como en (5).

Más adelante, en el Corolario 2.5, veremos que, para una medida G no atómica con valores en $\mathbb{R}^n$, cualquier zonoide que sea sumando del rango de G se puede escribir de la forma $\operatorname{rg} \psi G$, para una cierta función ψ real y acotada (no necesariamente positiva). En nuestro ejemplo podemos tomar para H_1 la función $\psi = f_1/g$, que es real.

Sin embargo, si G tiene átomos, un zonoide que sea sumando de $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G)$ no necesariamente es de la forma $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} \psi G)$ para alguna función real ψ. Esto lo podemos ver con la misma descomposición del hexágono H, pero con otra medida que lo determine. Para ello basta tomar la medida G, definida en las partes del conjunto $\{0, 1, 2\}$, como $G(\{j\}) = \alpha^j$ para $j = 0$, 1 y 2; medida que verifica $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G) = H$.

Es fácil comprobar que los zonoides determinados por las medidas ψG, con ψ una función real, son la suma de tres segmentos de forma que,

$$\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} \psi G) = [0, \lambda_1] + [0, \lambda_2 \alpha] + [0, \lambda_3 \alpha^2], \qquad \text{con } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Si un zonoide de estos está en el semiplano superior, tendrían que ser $\lambda_2 \geq 0$, y $\lambda_3 \leq 0$ en (7). Así, si $\lambda_1 \geq 0$, se tiene que $-1/4$ no está en $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} \psi G)$; y si $\lambda_1 \leq 0$, se tiene que no está $1/4$. Como $1/4$ y $-1/4$ están en H_1, ver (6), se tiene que H_1 no es de la forma $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} \psi G)$ para ninguna función real ψ.

□

Los ejemplos anteriores prueban que si un zonoide $Z = \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G)$ es suma de otros dos, Z_1 y Z_2, no siempre Z_1 es el zonoide determinado por la medida ψG, y Z_2 el determinado por $(1 - \psi)G$, para alguna función ψ a valores en $[0, 1]$. Sin embargo, lo que sí es cierto es que existe una tal función ψ para la que Z_1 es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} \psi G)$, y Z_2 un trasladado de $\overline{\text{co}}\big(\operatorname{rg}(1 - \psi)G\big)$. Esto lo veremos en la Proposición 2.4, en el caso finito-dimensional, y en el Teorema 2.6, en el caso general; en las hipótesis de estos resultados bastará que $Z_1 + Z_2$ sea un trasladado de Z. En la siguiente Observación explicamos lo relacionado con la traslación de zonoides, aclarando el enunciado de la Proposición que sigue.

Observación 2.3. *Traslación de zonoides. Un zonoide Z_0 es trasladado de otro Z_1 si y sólo si $Z_0 - Z_0 = Z_1 - Z_1$. Dos zonoides que son uno trasladado del otro están determinados por medidas de la misma variación total.*

El rango de cualquier medida vectorial G tiene centro de simetría; esto es porque si Ω es el conjunto total, para todo medible A se tiene $G(A) + G(A^c) = G(\Omega)$, y por tanto el punto $x_0 = G(\Omega)/2$ es el centro de simetría; se tiene

$$x \in \operatorname{rg} G \Longrightarrow x_0 - (x - x_0) \in \operatorname{rg} G .$$

Por lo tanto todo zonoide tiene centro de simetría.

Sean Z_0 y Z_1 dos zonoides de un Banach X; entonces

$$Z_0 \quad \text{es un trasladado de} \quad Z_1 \iff Z_0 - Z_0 = Z_1 - Z_1 . \tag{8}$$

La implicación $\Rightarrow$ es obvia, la otra implicación es así: si z_0 es el centro de Z_0, y z_1 el de Z_1, podemos escribir $Z_0 = z_0 + Z_0'$, $Z_1 = z_1 + Z_1'$, donde Z_0' y Z_1' son conjuntos absolutamente convexos. Entonces, $Z_0 - Z_0 = Z_0' - Z_0' = Z_0' + Z_0' = 2Z_0'$, y por tanto, si $Z_0 - Z_0 = Z_1 - Z_1$, se tiene $2Z_0' = 2Z_1'$, y $Z_0' = Z_1'$. Se concluye pues $Z_1 = (z_1 - z_0) + Z_0$.

No todo trasladado $x + Z$ de un zonoide Z es zonoide, ya que es necesario que el cero pertenezca al trasladado $x + Z$. Veamos que esta condición también es suficiente. Si $Z = \operatorname{rg} G$, con G numerablemente aditiva definida en una σ-álgebra de un conjunto Ω; y x es un elemento del Banach tal que $0 \in x + Z$, entonces existe un medible D tal que $G(D) = -x$. Definimos la medida F en la misma σ-álgebra como $F(A) = G(A \setminus D) - G(A \cap D)$ para cada medible A. Se tiene

$$\begin{aligned} F(A) &= G(A \setminus D) - G(A \cap D) \\ &= G(A \setminus D) + G(D \setminus A) - G(D \setminus A) - G(A \cap D) \\ &= G(A \triangle D) - G(D) = G(A \triangle D) + x ; \end{aligned} \tag{9}$$

y como la aplicación $A \mapsto A \triangle D$ es una biyección de la σ-álgebra, concluimos que $x + Z$ es el rango de F, y por tanto un zonoide.

Por último veamos que si F y G son dos medidas numerablemente aditivas, y el zonoide $\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{rg} F)$ es trasladado del zonoide $\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{rg} G)$, entonces F y G tienen la misma variación total. Esto es porque al ser $\operatorname{rg} G$ relativamente débil compacto (Corolario 1.2), entonces

$$\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G) - \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} G).$$

Si G está definida sobre un conjunto Ω, la medida $\widetilde{G}$ definida en la unión disjunta de Ω consigo mismo como $\widetilde{G}(A \sqcup A') = G(A) - G(A')$ tiene variación total $\|\widetilde{G}\| = 2\|G\|$, y su rango es $\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} G$. Construyendo la análoga $\widetilde{F}$, se tendría por la condición (8) sobre zonoides trasladados, que

$$\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} \widetilde{G}) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} \widetilde{F}),$$

y por el Teorema I.2.2,

$$\|G\| = \tfrac{1}{2}\|\widetilde{G}\| = \tfrac{1}{2}\|\widetilde{F}\| = \|F\|.$$

□

Proposición 2.4. *Sean (Ω, Σ), $(M_1, \mathcal{A}_1)$, y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ tres espacios medibles; y $G: \Sigma \to \mathbb{R}^n$, $F_1: \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R}^n$, y $F_2: \mathcal{A}_2 \to \mathbb{R}^n$ tres medidas numerablemente aditivas tales que*

$$\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} G) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F_1 - \operatorname{rg} F_1) + \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F_2 - \operatorname{rg} F_2).$$

Existe una función medible $\psi: \Omega \to [0,1]$, tal que:

$$\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} \psi G - \operatorname{rg} \psi G) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F_1 - \operatorname{rg} F_1),$$
$$\overline{\operatorname{co}}\big(\operatorname{rg}(1-\psi)G - \operatorname{rg}(1-\psi)G\big) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F_2 - \operatorname{rg} F_2).$$

Demostración. Como estamos considerando medidas numerablemente aditivas en $\mathbb{R}^n$, todas ellas tienen variación acotada, y derivada de Radon-Nikodým. Tomaremos las variaciones de estas medidas con respecto a la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Sea entonces g la derivada de G con respecto a su variación $|G|$. En principio $\|g(\omega)\|_2 = 1$, para casi todo $\omega \in \Omega$; así que, tomando, una función equivalente, si es necesario, podemos suponer que g es una función medible que toma valores en la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1}$; es decir,

$$g: \Omega \to \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{medible}, \qquad g = \frac{dG}{d|G|}.$$

Actuando de manera análoga con F_1 y F_2, tendremos unas funciones medibles

$$f_1: M_1 \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad f_1 = \frac{dF_1}{d|F_1|}, \qquad \text{y} \qquad f_2: M_2 \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad f_2 = \frac{dF_2}{d|F_2|}.$$

Sea σ la medida imagen de $|G|$ mediante g, definida en los borelianos de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Definimos analogamente τ_1 y τ_2 para F_1 y F_2. Así, para cada boreliano A de la esfera, tenemos

$$\sigma(A) = |G|\big(g^{-1}(A)\big), \qquad \tau_1(A) = |F_1|\big(f_1^{-1}(A)\big), \qquad \tau_2(A) = |F_2|\big(f_2^{-1}(A)\big).$$

Sea $\widetilde{\sigma}$ la medida simetrizada de σ, definida para cada boreliano A como

$$\widetilde{\sigma}(A) = \frac{1}{2}\big(\sigma(A) + \sigma(-A)\big).$$

Esta medida tiene la propiedad de que si $h: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ es simétrica y medible, entonces

$$\int h\, d\sigma = \int h\, d\widetilde{\sigma} \qquad (h \text{ simétrica}) \tag{10}$$

Analogamente se definen las simetrizadas $\widetilde{\tau}_1$ y $\widetilde{\tau}_2$.

Usando el apartado c) del Corolario 1.2, tenemos para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\{\langle x, a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, G)\} = \Big\{\langle x, \int k\, dG\rangle \mid k: \Omega \to [-1,1] \quad \text{medible}\Big\}.$$

Es fácil de comprobar que, cuando una medida G tiene derivada de Radon-Nikodým g respecto de una medida positiva μ, la integral de Bartle $\int k\, dG$ se transforma en la integral de Bochner $\int kg\, d\mu$. Esto y la anterior igualdad implican

$$\begin{aligned}
&\sup\{\langle x, a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, G)\} \\
&\qquad = \sup\Big\{\langle x, \int_\Omega kg\, d|G|\rangle \mid k: \Omega \to [-1,1] \quad \text{medible}\Big\} \\
&\qquad = \sup\Big\{\int_\Omega k\langle x, g\rangle\, d|G| \ : \ k \in \mathrm{L}^\infty(|G|), \quad \|k\|_\infty \le 1\Big\},
\end{aligned}$$

por la dualidad entre L^1 y L^∞,

$$= \int_\Omega |\langle x, g\rangle|\, d|G|,$$

por las propiedades de las medidas imágenes, y por (10)

$$= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, y\rangle|\, d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, y\rangle|\, d\widetilde{\sigma}(y). \tag{11}$$

Una igualdad análoga a (11) es cierta para F_1 y F_2. Luego por la hipótesis de la Proposición, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x,y\rangle|\, d\widetilde{\sigma}(y) &= \sup\{\langle x,a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_1 - \mathrm{rg}\, F_1)\} \\ &\qquad + \sup\{\langle x,a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_2 - \mathrm{rg}\, F_2)\} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x,y\rangle|\, d(\widetilde{\tau}_1 + \widetilde{\tau}_2)(y)\,.\end{aligned}$$

Como las medidas consideradas son todas simétricas, usando el Teorema 1.1 del primer capítulo, llegamos a la conclusión de que $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}_1 + \widetilde{\tau}_2$.

Tenemos que $\widetilde{\tau}_1$ es una medida positiva que verifica $\widetilde{\tau}_1(A) \le \widetilde{\sigma}(A)$ para todo medible A. Por el teorema de Radon-Nikodým tendrá una derivada con respecto a $\widetilde{\sigma}$, que toma valores en $[0,1]$ en casi todo, luego podemos suponer en todo $\mathbb{S}^{n-1}$. Es decir, existe una función

$$\phi\colon \mathbb{S}^{n-1} \to [0,1] \quad \text{tal que} \quad \int_A \phi\, d\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}_1(A)\,, \quad \text{para todo medible } A.$$

Tendremos además que $1-\phi$ es la derivada de $\widetilde{\tau}_2$ con respecto a $\widetilde{\sigma}$. Como $\widetilde{\tau}_1$ y $\widetilde{\sigma}$ son medidas simétricas, ϕ será simétrica en casi todo, luego podemos suponer que ϕ es una función simétrica en todo $\mathbb{S}^{n-1}$.

Definimos $\psi\colon \Omega \to [0,1]$ como $\psi(\omega) = \phi\big(g(\omega)\big)$, para todo ω en Ω. Veamos que esta función cumple lo que queremos. Para ver

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\psi G - \mathrm{rg}\,\psi G) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_1 - \mathrm{rg}\, F_1)\,, \tag{12}$$

puesto que son conjuntos convexos y cerrados, basta por el teorema de Hahn-Banach, probar que todas las funciones lineales tienen los mismos supremos en uno y en otro.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos, usando de nuevo el Corolario 1.2 , el apartado a) de la Proposición 1.4, y argumentos similares a los de la igualdad (11),

$$\begin{aligned}&\sup\{\langle x,a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\psi G - \mathrm{rg}\,\psi G)\} \\ &\qquad = \sup\{\langle x, \int_\Omega k\psi\, dG\rangle \mid k\colon \Omega \to [-1,1] \quad \text{medible}\ \} \\ &\qquad = \sup\{\int_\Omega k\psi\langle x,g\rangle\, d|G| \ :\ k \in \mathrm{L}^\infty(|G|)\,, \quad \|k\|_\infty \le 1\ \} \\ &\qquad = \int_\Omega \phi\big(g(\omega)\big)|\langle x, g(\omega)\rangle|\, d|G|(\omega) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(y)|\langle x,y\rangle|\, d\sigma(y)\,,\end{aligned}$$

por la simetría de ϕ, usando de nuevo (10),

$$= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, y\rangle| \; \phi(y)\, d\widetilde{\sigma}(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, y\rangle| \; d\widetilde{\tau}_1(y)\,,$$

y por el análogo de (11) para F_1 y τ_1,

$$= \sup\{\langle x, a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_1 - \mathrm{rg}\, F_1)\}\,.$$

Tenemos así probada la identidad (12). De la misma forma se prueba la correspondiente identidad con $1-\psi$ y F_2, ya que $1-\phi$ es la derivada de $\widetilde{\tau}_2$ con respecto a $\widetilde{\sigma}$.

□

Corolario 2.5. *Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y $G\colon \Sigma \to \mathbb{R}^n$ una medida numerablemente aditiva no atómica. Si Z_1 y Z_2 son dos zonoides en $\mathbb{R}^n$ tales que $Z_1 + Z_2 = \mathrm{rg}\, G$, entonces existen dos funciones medibles $\psi_1, \psi_2\colon \Omega \to [-1, 1]$ que verifican*

$$Z_1 = \mathrm{rg}\, \psi_1 G\,, \quad Z_2 = \mathrm{rg}\, \psi_2 G\,, \qquad y \quad |\psi_1| + |\psi_2| = 1.$$

Demostración. Del hecho de que G sea una medida sin átomos, es fácil deducir que también lo es la medida fG, para una función f acotada y medible. Por el teorema de Liapounoff, el rango de fG es convexo y compacto; de este hecho y de la Proposición 2.4 deducimos que existe una función medible $\psi\colon \Omega \to [0, 1]$ tal que

$$\mathrm{rg}\, \psi G - \mathrm{rg}\, \psi G = Z_1 - Z_1\,, \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(1-\psi)G - \mathrm{rg}(1-\psi)G = Z_2 - Z_2\,.$$

Por la ecuación (8) de la Observación 2.3, esto implica que Z_1 es un trasladado de $\mathrm{rg}\, \psi G$, y Z_2 es un trasladado de $\mathrm{rg}(1-\psi)G$. En particular, existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Z_1 = x_1 + \mathrm{rg}\, \psi G$. Tomemos, como en la Observación 2.3, un D_1 en Σ tal que $\psi G(Z_1) = -x_1$; usando la ecuación (9), se tiene que si ponemos $\psi_1 = (\chi_{\Omega \setminus D_1} - \chi_{D_1})\psi$, entonces $\mathrm{rg}\, \psi_1 G = Z_1$. Analogamente, escogiendo ψ_2 de la forma $(\chi_{\Omega \setminus D_2} - \chi_{D_2})(1-\psi)$, para un apropiado $D_2 \in \Sigma$ se tendrá el resultado, ya que obviamente, $|\psi_1| + |\psi_2| = 1$.

□

Estamos ya en disposición de enunciar y demostrar el principal resultado de esta sección. A pesar de que las representaciones de descomposiciones de zonoides que estamos probando no sean, porque no pueden ser, todo lo simples y bellas, que en un principio cabría desearse; estas representaciones darán sus dividendos en las aplicaciones que de ellas haremos en las próximas secciones.

A continuación damos el resultado análogo a la Proposición 2.4 para espacios de Banach de dimensión infinita. El enunciado que damos es totalmente similar al de dimensión finita, recuerdese el párrafo justo anterior al Ejemplo 2.1 ; de la forma en que lo damos nos será más cómodo para las aplicaciones. Los ingredientes de su demostración son la Proposición 2.4 y un argumento de compacidad.

Teorema 2.6. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos σ-álgebras de subconjuntos de M y N respectivamente; y sea X un espacio de Banach. Si $F\colon\mathcal{A}\to X$ y $G\colon\mathcal{B}\to X$ son dos medidas numerablemente aditivas tales que*

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F - \mathrm{rg}\, F) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, G),$$

y $\phi\colon M\to[0,1]$ es una función medible; entoces existe una función medible $\psi\colon N\to[0,1]$ tal que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\phi F - \mathrm{rg}\,\phi F) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\psi G - \mathrm{rg}\,\psi G)\,, \quad y$$
$$\overline{\mathrm{co}}\big(\mathrm{rg}(1-\phi)F - \mathrm{rg}(1-\phi)F\big) = \overline{\mathrm{co}}\big(\mathrm{rg}(1-\psi)G - \mathrm{rg}(1-\psi)G\big)\,.$$

Demostración. Como queremos probar que ciertos conjuntos convexos y cerrados son iguales, bastará probar que los funcionales lineales continuos tienen los mismos supremos en ellos. Para cada $x^*\in X^*$ pongamos

$$\begin{aligned}\alpha(x^*) &= \sup\{x^*(a) : a\in\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F - \mathrm{rg}\, F)\}\\ &= \sup\{x^*(a) : a\in\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, G)\}\,,\\ \beta(x^*) &= \sup\{x^*(a) : a\in\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\phi F - \mathrm{rg}\,\phi F)\}\,.\end{aligned}$$

Puesto que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F - \mathrm{rg}\, F) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\phi F - \mathrm{rg}\,\phi F) + \overline{\mathrm{co}}\big(\mathrm{rg}(1-\phi)F - \mathrm{rg}(1-\phi)F\big)\,,$$

tenemos, para cada $x^*\in X^*$,

$$\alpha(x^*) = \sup\{x^*(a) : a\in\overline{\mathrm{co}}\big(\mathrm{rg}(1-\phi)F - \mathrm{rg}(1-\phi)F\big)\,\} + \beta(x^*)\,. \qquad (13)$$

De la misma manera, para una función medible $\psi: N \to [0,1]$, también se tendrá

$$\alpha(x^*) = \sup\{x^*(a) : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}(1-\psi)G - \mathrm{rg}(1-\psi)G)\}$$
$$+\sup\{x^*(a) : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\psi G - \mathrm{rg}\,\psi G)\}.$$

Comparando esta última igualdad con la (13), y teniendo en cuenta el comentario sobre los supremos de funcionales lineales, para demostrar el Teorema, nos basta encontrar una $\psi: N \to [0,1]$ medible, tal que se tenga

$$\beta(x^*) = \sup\{x^*(a) : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\psi G - \mathrm{rg}\,\psi G)\}, \quad \text{para todo } x^* \in X^*. \tag{14}$$

La función ψ la buscaremos usando un argumento de compacidad. Sea μ una medida de control para G, en lugar de buscar una función, buscaremos una clase de funciones, un elemento de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$. Esto lo podemos hacer porque la búsqueda de ψ depende de su clase en $\mathrm{L}^\infty(\mu)$; ya que si $\psi: N \to [0,1]$ es una función medible, para que se cumpliera (14), por Corolario 1.2, tendríamos que probar, para cada $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}\beta(x^*) &= \sup\{x^*(a) : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\psi G - \mathrm{rg}\,\psi G)\}\\ &= \sup\left\{ \int k\psi \, dx^*G \mid k: N \to [-1,1] \quad \text{medible} \right\};\end{aligned}$$

como la medida real x^*G es μ-continua, tomando $g_{x^*} = \dfrac{dx^*G}{d\mu} \in \mathrm{L}^1(\mu)$,

$$\begin{aligned}&= \sup\left\{\int k\psi g_{x^*}\, d\mu : k \in \mathrm{L}^\infty(\mu), \quad \|k\|_\infty \le 1\right\}\\ &= \int \psi |g_{x^*}|\, d\mu,\end{aligned} \tag{15}$$

que depende de la clase de ψ en $\mathrm{L}^\infty(\mu)$.

Definimos, para cada $x^* \in X^*$, el subconjunto H_{x^*} de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ como

$$H_{x^*} = \left\{\psi \in \mathrm{L}^\infty(\mu) : \beta(x^*) = \int \psi |g_{x^*}|\, d\mu, \quad 0 \le \psi \le 1 \quad \text{en casi todo}\right\}.$$

Este conjunto es débil* compacto, al ser la intersección de un débil* cerrado, las ψ que verifican $\langle \psi, g_{x^*}\rangle = \beta(x^*)$, y de un débil* compacto, las que toman valores entre 0 y 1 en casi todo.

Una ψ que esté en todos los H_{x^*} verificará el teorema por (15). Luego hay que probar que es no vacía la intersección de todos los conjuntos H_{x^*}. Como se trata de una familia de compactos basta probar que la intersección de cada subfamilia finita es no vacía, lo que haremos usando la Proposición 2.4.

Sean pues $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ en X^*, y consideremos el operador $T\colon X \to \mathbb{R}^n$ definido, para cada $x \in X$, como $Tx = \big(x_1^*(x), x_2^*(x), \dots, x_n^*(x)\big)$. Evidentemente se tiene

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, TG - \mathrm{rg}\, TG) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, T\phi F - \mathrm{rg}\, T\phi F) + \overline{\mathrm{co}}\big(\mathrm{rg}\, T(1-\phi)F - \mathrm{rg}\, T(1-\phi)F\big)\,.$$

Podemos aplicar la Proposición 2.4 a las medidas, con valores en $\mathbb{R}^n$, TG, $T\phi F$, y $T(1-\phi)F$; obteniendo una función medible $\psi_T\colon N \to [0,1]$, tal que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \psi_T TG - \mathrm{rg}\, \psi_T TG) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, T\phi F - \mathrm{rg}\, T\phi F)\,. \tag{16}$$

Si e_j es el j-ésimo vector básico de $\mathbb{R}^n$, que tiene todas sus coordenadas nulas salvo la j-ésima que es 1; entonces para todo $x \in X$ se tiene $\langle e_j, Tx\rangle = x_j^*(x)$. Teniendo en cuenta esto, y que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, T\phi F - \mathrm{rg}\, T\phi F) = T\big(\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \phi F - \mathrm{rg}\, \phi F)\big) \tag{17}$$

deducimos,

$$\beta(x_j^*) = \sup\{\langle e_j, a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, T\phi F - \mathrm{rg}\, T\phi F)\,\}\,,$$

y por (16),

$$= \sup\{\langle e_j, a\rangle : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \psi_T TG - \mathrm{rg}\, \psi_T TG)\,\}\,,$$

como $\psi_T TG = T\psi_T G$, por el análogo a (17),

$$= \sup\big\{x_j^*(a) : a \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \psi_T G - \mathrm{rg}\, \psi_T G)\,\big\}\,.$$

Lo que implica, usando (15), que ψ_T está en todos los $H_{x_j^*}$, para $j = 1, \dots, n$. Por lo tanto,

$$\bigcap_{j=1}^{n} H_{x_j^*} \neq \emptyset\,.$$

Como la familia $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ es arbitraria, concluimos que existe una

$$\psi \in \bigcap_{x^* \in X^*} H_{x^*}\,,$$

lo que, por la discusión previa, demuestra el teorema.

□

Un resultado análogo al Corolario 2.5 se puede dar en dimensión infinita, no para las medidas no atómicas, sino para las que verifican el llamado "Teorema de Liapounoff para la topología débil" [DU,pag.263]. No entraremos en más detalles sobre el tema porque la similitud con el Corolario 2.5 es total y no lo necesitaremos más adelante.

II.3. El rango determina la σ-finitud de la variación.

El principal resultado de esta sección, y que justificará su título, será el Teorema 3.1, con el que la iniciaremos. Probaremos que si dos medidas numerablemente aditivas tienen el mismo rango, o rangos con igual clausura convexa cerrada, o aún más, rangos cuyas clausuras convexas son una trasladada de la otra; entonces una tiene variación σ-finita si y sólo si la tiene la otra. Por supuesto, por variación σ-finita entendemos que el conjunto total es unión numerable de conjuntos de variación finita.

Este teorema completará, en cierto sentido, al Teorema 2.2 del capítulo anterior. Según éste, si dos medidas tienen rangos con igual clausura convexa y cerrada, una tiene variación finita si y sólo si la tiene la otra. La σ-finitud, establece una gradación entre las medidas no finitas, se puede decir que después de las medidas acotadas las σ-finitas son las medidas más pequeñas. El que el rango determina esta gradación no está contemplado en el resultado del capítulo anterior.

A pesar de la similitud de enunciados, el Teorema 3.1 no es una consecuencia trivial del resultado sobre la variación total (Teorema I.2.2). Aunque en la demostración usaremos que el rango determina la variación total, sólo lo podremos hacer a una vez que hayamos aplicado lo visto en la sección anterior sobre descomposición de zonoides. Esto hará que necesitemos que las medidas sean numerablemente aditivas definidas en σ-álgebras. El que esta necesidad no es superflua lo comprobaremos con el Ejemplo 3.2, el Teorema 3.1 no es válido para álgebras.

Teorema 3.1. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos σ-álgebras de subconjuntos de M y N respectivamente; y sea X un espacio de Banach. Si $F: \mathcal{A} \to X$ y*

$G\colon \mathcal{B} \to X$ son dos medidas numerablemente aditivas tales que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F - \mathrm{rg}\, F) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, G)\,;$$

entonces $|F|$ es σ-finita si y sólo si $|G|$ es σ-finita.

Demostración. Vista la simetría del enunciado, está claro que tenemos que probar una sola implicación. Supongamos pues que $|F|$ es σ-finita; por tanto existe una sucesión creciente (D_n) de conjuntos en $\mathcal{A}$, cuya unión es el conjunto total M, y tal que $|F|(D_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada n aplicamos el Teorema 2.6 a la función χ_{D_n}, y obtenemos una función medible $\psi_n\colon N \to [0,1]$ tal que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \psi_n G - \mathrm{rg}\, \psi_n G) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \chi_{D_n} F - \mathrm{rg}\, \chi_{D_n} F) \tag{1}$$

Esto, por la Observación 2.3, implica que

$$\|\psi_n G\| = \|\chi_{D_n} F\| = |F|(D_n) < +\infty\,.$$

Sea ahora N_0 el conjunto donde todas las funciones ψ_n se anulan; es decir,

$$N_0 = \{t \in N : \psi_n(t) = 0\,, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}\ \}\,.$$

Veamos que $|G|(N_0) = 0$. Si esto no fuera cierto, habría un subconjunto medible A_0 de N_0 con $G(A_0) \neq 0$. Tomemos z^* en X^* tal que $\langle z^*, G(A_0)\rangle = \alpha > 0$.

Sea

$$\beta = \sup\{\langle z^*, y\rangle : y \in \mathrm{rg}\, F - \mathrm{rg}\, F\}\,. \tag{2}$$

Existen $C, C' \in \mathcal{B}$ tales que

$$\langle z^*, F(C)\rangle - \langle z^*, F(C')\rangle > \beta - \alpha/3\,.$$

Puesto que la sucesión (D_n) es creciente, y su unión es el total se tiene

$$\lim_{n\to\infty} F(C \cap D_n) = F(C)\,; \qquad \lim_{n\to\infty} F(C' \cap D_n) = F(C')\,.$$

Lo que implica que existe un k tal que

$$\big\langle z^*, F(C \cap D_k) - F(C' \cap D_k)\big\rangle > \beta - \alpha/2\,.$$

Por (1) y el Corolario 1.2, existe $h\colon N \to [-1,1]$ medible tal que

$$\Big\langle z^*, \int_N h\psi_k\, dG\Big\rangle = \big\langle z^*, F(C \cup D_k) - F(C' \cup D_k)\big\rangle > \beta - \alpha/2\,.$$

Al anularse ψ_k en A_0, tenemos $\|h\psi_k + \chi_{A_0}\|_\infty \leq 1$; y por tanto, usando de nuevo el Corolario 1.2,

$$\begin{aligned}\beta + \alpha/2 &\leq \Big\langle z^*, \int_N (\chi_{A_0} + h\psi_k)\, dG \Big\rangle \\ &\leq \sup\{\langle z^*, y\rangle : y \in \operatorname{rg} G - \operatorname{rg} G\} \\ &= \sup\{\langle z^*, y\rangle : y \in \operatorname{rg} F - \operatorname{rg} F\};\end{aligned}$$

lo que es contradictorio con (2). Por lo tanto, $|G|(N_0) = 0$.

Finalmente si denotamos $N_{n,m} = \{t \in N : \psi_n(t) > 1/m\}$; vemos que podemos escibir N como la unión numerable

$$N = N_0 \cup \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} N_{n,m}\,. \tag{3}$$

Además, si definimos $h_{n,m}(t) = 1/\psi_n(t)$, cuando $t \in N_{n,m}$, y $h_{n,m}(t) = 0$ en otro caso; tenemos por la Proposición 1.4,

$$|G|(N_{n,m}) = \big\|h_{n,m}\psi_n G\big\| = \int_N |h_{n,m}|\, d|\psi_n G| \leq m|\psi_n G|(N) < +\infty\,;$$

lo que, junto a (3), implica que $|G|$ es σ-finita y demuestra el teorema.

□

El Teorema I.2.2 es válido para medidas finitamente aditivas definidas en álgebras de conjuntos. Es decir, el rango de una medida definida en un álgebra determina si la variación es finita o no. Sin embargo, con la σ-finitud ya no es igual; a continuación damos un ejemplo que prueba que el Teorema 3.1 no es cierto para medidas definidas en álgebras de conjuntos.

La diferencia entre el problema de la finitud y el de la σ-finitud radica en que, el primero estudia una cantidad que se asigna al conjunto total, mientras que el segundo exige descomponer este conjunto en una unión numerable de conjuntos; y en las álgebras tales descomposiciones pueden no existir o ser insuficientes. Una medida σ-finita en una σ-álgebra puede valer infinito en todos los conjuntos no vacíos de una subálgebra que la engendre; aprovecharemos este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Dos medidas numerablemente aditivas definidas en álgebras, que tienen rangos iguales; una con variación σ-finita, y la otra con variación no σ-finita.*

Demostración. La construcción será un poco larga. Daremos una medida F definida en una σ-álgebra Σ, con valores en c_0, y dos subálgebras, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, tales que $F(\mathcal{A}_1) = F(\mathcal{A}_2)$, y al restringir F, en una tiene variación σ-finita, y en la otra no. Definiremos antes otras medidas necesarias para la construcción de F. (e_n) será la base canónica de c_0.

En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, la σ-álgebra de todas las partes de $\mathbb{N}$, definimos F_1 a valores en c_0, como

$$F_1(A) = \sum_{n \in A} \frac{e_n}{n}, \qquad \text{para cada } A \text{ en } \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Como la serie $\sum e_n/n$ es incondicionalmente convergente en c_0, F_1 es una medida numerablemente aditiva, que además tiene variación σ-finita en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, puesto que $|F_1|(\{n\}) = 1/n$.

Vamos a dar una subálgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tal que al restringir F_1 a ella, no tiene variación σ-finita. Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es periódico si existe un número natural m tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \in A$ si y sólo si $n + m \in A$; es decir, se verifica

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(km + (A \cap \{1, \ldots, m\})\right).$$

Si A_1 es periódico para m_1, y A_2 es periódico para m_2, es fácil comprobar que $A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cup A_2$ son periódicos para $m_1 m_2$. Esto y el hecho evidente de que el complementario de un periódico es también periódico, prueban que $\mathcal{C}$, la familia de todos los subconjuntos periódicos, es un álgebra de conjuntos.

Para probar que $F_1|_{\mathcal{C}}$ no tiene variación σ-finita, veamos que la variación de todo conjunto no vacío de $\mathcal{C}$ es infinita. Si A es periódico y no vacío, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n + km \in A$ para todo $k = 0, 1, \ldots$. Como la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{n + km}$$

es divergente, se tiene

$$\sum_{j \geq 1} \frac{\chi_A(j)}{j} = +\infty. \tag{4}$$

Para cada número natural m, y cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, definimos el subconjunto A_j en $\mathcal{C}$, como

$$A_j = \{j + km : k \geq 0\}.$$

Es claro que $(A_j)_{j=1}^m$ es una partición de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$, luego

$$\big|F_1|_{\mathcal{C}}\big|(A) \geq \sum_{j=1}^{m} \|F_1(A \cap A_j)\| \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{\chi_A(j)}{j}\,.$$

Como m es arbitrario, por (4) deducimos que $\big|F_1|_{\mathcal{C}}\big|(A)$, la variación de A, es infinita, y por tanto $F_1|_{\mathcal{C}}$ no tiene variación σ-finita.

Denotemos ahora por $\mathcal{M}$, la σ-álgebra de los subconjuntos medibles Lebesgue de la semirecta $[0, +\infty)$ y λ la medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$h_n: [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad h_n = \chi_{[2n-2, 2n-1)} - \chi_{[2n-1, 2n)}\,;$$

y definamos la medida $F_2: \mathcal{M} \to c_0$ como

$$F_2(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_M h_n(t)\, dt\right)_{n \geq 1}\,, \qquad M \in \mathcal{M}\,.$$

Es fácil ver que F_2 es numerablemente aditiva, y es σ-finita pues $|F_2|(M) \leq \lambda(M)$.

Para cada $r \in (0,1)$, sea $E_r = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - r, n)$, y definamos la σ-álgebra incluida en $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}_r = \{M \in \mathcal{M} : M \cap E_r = \emptyset\,, \quad \text{o} \quad M \cap E_r = E_r\}\,.$$

Como se tiene que si $s > r$, entonces $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_r$, es claro que $\mathcal{B} = \bigcup_{r \in (0,1)} \mathcal{M}_r$ es una subálgebra de $\mathcal{M}$. F_2 restringida a $\mathcal{B}$ sigue teniendo variación σ-finita, ya que

$$\big|F_2|_{\mathcal{B}}\big|(M) \leq |F_2|(M) \leq \lambda(M)\,, \qquad \text{para todo } M \in \mathcal{B}\,;$$

$$[n-1, n-1/m] \in \mathcal{B}\,, \qquad \text{para todos los } n, m \in \mathbb{N}\,;$$

$$\text{y} \qquad [0, +\infty) = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} [n-1, n-1/m]\,.$$

Sea ahora Ω la unión disjunta $\Omega = \mathbb{N} \sqcup [0, +\infty)$, y sea Σ la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{M}$; es decir,

$$\Sigma = \{A \sqcup M : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,, \quad M \in \mathcal{M}\}\,.$$

Pongamos $F: \Sigma \to c_0$ definida como $F(A \sqcup M) = F_1(A) + F_2(M)$. Entonces F es una medida numerablemente aditiva. Definamos las subálgebras

$$\mathcal{A}_1 = \{A \sqcup M : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,, \quad M \in \mathcal{B}\}\,,$$

$$\mathcal{A}_2 = \{A \sqcup M : A \in \mathcal{C}\,, \quad M \in \mathcal{B}\}\,.$$

De las discusiones previas es obvio que cuando restringimos F a $\mathcal{A}_1$ su variación es σ-finita; y cuando la restringimos a $\mathcal{A}_2$ no lo es.

Para ver que estas restricciones tienen los mismos rangos, hay que probar

$$F_1(\mathcal{P}(\mathbb{N})) + F_2(\mathcal{B}) = F_1(\mathcal{C}) + F_2(\mathcal{B}). \qquad (5)$$

Para esto, observemos que si $T: \ell_\infty \to c_0$ está definido como

$$T((\alpha_n)_{n\geq 1}) = \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1};$$

entonces $F_1 = TG_1$, y $F_2 = TG_2$, donde

$$G_1(A) = \sum_{n\in A} \frac{e_n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

$$G_2(M) = \left(\int_A h_n(t)\,dt\right)_{n\geq 1}, \qquad \text{para todo } M \in \mathcal{M}.$$

Para probar (5) veremos que $G_1(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ está en la clausura, en la norma de ℓ_∞, de $G_1(\mathcal{C})$; y que $G_2(\mathcal{B})$ es precisamente la bola unidad abierta de ℓ_∞. Esto probaría

$$G_1(\mathcal{P}(\mathbb{N})) + G_2(\mathcal{B}) \subseteq G_1(\mathcal{C}) + G_2(\mathcal{B}).$$

Como la otra inclusión es obvia, al componer con T se obtendría (5).

Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y $\varepsilon > 0$. Escogemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{m} < \varepsilon$, y definimos B como

$$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (km + (A \cap \{1, \ldots, m\})).$$

Es claro que $B \in \mathcal{C}$; además la coordenada j-ésima de $G_1(A) - G_1(B)$ es nula si $j \leq m$, y tiene módulo menor que $1/\sqrt{m}$ si $j > m$. Por tanto,

$$\|G_1(A) - G_1(B)\|_\infty \leq 1/\sqrt{m} \leq \varepsilon;$$

lo que prueba que $G_1(\mathcal{C})$ es denso en $G_1(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Sea $r \in (0,1)$, y M en $\mathcal{M}_r$. Para cada n natural se tiene $\int_{E_r} h_n = 0$, luego por la definición de $\mathcal{M}_r$,

$$\begin{aligned}\int_M h_n(t)\,dt &= \int_{M\setminus E_r} h_n(t)dt \\ &= \int_{M\cap[2n-2,2n-1-r]} dt - \int_{M\cap[2n-1,2n-r]} dt \in [-1+r, 1-r],\end{aligned}$$

y entonces, $\|G_2(M)\|_\infty \leq 1-r$. Por tanto, $G_2(\mathcal{B})$ está incluido en la bola unidad abierta de ℓ_∞.

Sea ahora $(\alpha_n) \in \ell_\infty$ tal que $\|(\alpha_n)\|_\infty = 1-r$, con $r \in (0,1)$. Pongamos, para cada n, $M_n = \big[2n-2, 2n-2+|\alpha_n|\,\big]$ si $\alpha_n \geq 0$, y $M_n = \big[2n-1, 2n-1+|\alpha_n|\,\big]$ si $\alpha_n < 0$. Se comprueba directamente que $M = \bigcup M_n$ verifica $M \in \mathcal{M}_r$, y $G_2(M) = (\alpha_n)$. Con esto hemos comprobado todas las propiedades anunciadas, y acabamos el ejemplo.

$\square$

En la última sección del capítulo anterior estudiamos la monotonía de la variación total con respecto al rango, probando que en ciertos espacios de Banach, los (isomorfos a) subespacios de un L^1, si el rango de una medida de variación acotada contiene al rango de otra medida, ésta necesariamente también tiene variación acotada. Con respecto a la σ-finitud de la variación de medidas numerablemente aditivas no hay nada parecido. Es más, en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una medida de variación no σ-finita, cuyo rango está incluido en el de otra con variación σ-finita.

En la Proposición 3.4 daremos una construcción que prueba lo dicho antes; para su demostración necesitaremos el siguiente lema que se basa en resultados sobre operadores 1-sumantes. Remitimos al capítulo primero del libro de G. Pisier [PF] para encontrar lo que usaremos de operadores p-sumantes.

Lema 3.3. *Sea n un número natural, y X un espacio de Banach de dimensión $\dim X > n^6$. Entonces existe una función medible $f\colon [0,1] \to X$ tal que:*

a) $\|f(t)\| = n$ *para todo* $t \in [0,1]$.

b) $\left\| \int_M f(t)\, dt \right\| \leq \dfrac{1}{n^2}$ *para cada medible* $M \subseteq [0,1]$.

Demostración. Puesto que la norma 2-sumante de la identidad en un espacio E de dimensión finita es exactamente $\sqrt{\dim E}$, y la norma 1-sumante es mayor que la 2-sumante, la identidad en nuestro espacio de Banach X tendrá una norma 1-sumante estrictamente mayor que n^3. De la definición de esta norma se deduce que existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ en X tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \geq n^3 \sup\Big\{\sum_{j=1}^{m} |x^*(x_j)| : x^* \in X^*, \quad \|x^*\| \leq 1\Big\}.$$

Podemos suponer los x_j no nulos y normalizados de tal manera que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \|x_j\| = n, \\ &\sum_{j=1}^{m} |x^*(x_j)| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{para todo } x^* \text{ de la bola unidad de } X^*. \end{aligned} \tag{6}$$

Sea $t_0 = 0$, y para $k = 1, 2, \ldots, n$ pongamos

$$t_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|.$$

Se tendrá entonces que los t_k forman una sucesión finita estrictamente creciente en el intervalo $[0,1]$, y con $t_m = 1$. Podemos entonces definir la función

$$f = \sum_{j=1}^{m} \frac{n x_j}{\|x_j\|} \chi_{[t_{j-1}, t_j)}.$$

Es claro que f es medible y verifica *a)* del enunciado. Para ver que verifica *b)*, tomemos M subconjunto medible de $[0,1]$, y sea x^* en la bola unidad de X^* tal que $x^*\big(\int_M f\big) = \big\|\int_M f\big\|$. Como para $j = 1, 2, \ldots, n$ se tiene $n(t_j - t_{j-1}) = \|x_j\|$, entonces, si λ es la medida de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \left\| \int_M f(t)\, dt \right\| &= \sum_{j=1}^{m} \frac{n}{\|x_j\|} x^*(x_j) \lambda\big(M \cap [t_{j-1}, t_j)\big) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{n |x^*(x_j)|}{\|x_j\|} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} |x^*(x_j)| \leq \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

La última desigualdad por (6).

□

Teorema 3.4. *Dado un espacio de Banach X de dimensión infinita, existen dos medidas numerablemente aditvas X-valoradas, F y G, tales que:*

a) $\operatorname{rg} G \subseteq \operatorname{rg} F$.

b) $|G|$ *no es σ-finita.*

c) $|F|$ *es σ-finita.*

Demostración. Sabemos que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una sucesión básica [SS,pag.39]. Sea pues Y un subespacio de X con una base $(e_n)_{n\geq 1}$. Tomemos una sucesión creciente de naturales (m_n) tal que $m_{n+1} - m_n > n^6$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea Y_n el subespacio lineal de Y engendraado por los vectores básicos $\{e_j : m_n + 1 \leq j \leq m_{n+1}\}$. Por las propiedades de una base, existe una constante $C > 0$ tal que las proyecciones naturales $P_n: Y \to Y_n$ tienen una norma $\|P_n\| \leq C$.

Tenemos además que $\dim Y_n > n^6$, por lo tanto podemos aplicar el Lema 3.3 y obtenemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una función medible $f_n: [0,1] \to Y_n$ con

$$\|f_n(t)\| = n\,, \qquad \text{para todo } t \in [0,1], \tag{7}$$

$$\left\| \int_M f_n(t)\, dt \right\| \leq \frac{1}{n^2}\,, \qquad \text{para cada medible } M \subseteq [0,1]. \tag{8}$$

Pongamos $H_n(M) = \int_M f_n$, entonces H_n es una medida no atómica, definida en los medibles Lebesgue de $[0,1]$, con valores en un espacio de dimensión finita; su rango es, por lo tanto, convexo y cerrado. Luego por el Corolario 1.2, para toda función medible $\psi: [0,1] \to [0,1]$, se tiene que $\int \psi(t) f_n(t)\, dt$ pertenece al rango de H_n.

Consideremos el espacio producto $\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$ con la probabilidad $\mathbb{P}$ producto de tomar en cada factor la medida de Lebesgue. Sea $\mathcal{A}$ la σ-álgebra donde $\mathbb{P}$ está definida, la engendrada por los productos de conjuntos medibles. Definimos $G: \mathcal{A} \to Y$ como

$$G(A) = \sum_{n\leq 1} \int_A f_n(t_n)\, d\mathbb{P}(t_1, t_2, \dots)\,, \qquad A \in \mathcal{A} \tag{9}$$

Tomando la esperanza condicionada existe, para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada n, una función $h: [0,1] \to [0,1]$ medible tal que

$$\begin{aligned} \int_A f_n(t_n)\, d\mathbb{P}(t_1, t_2, \dots) &= \int h(t_n) f_n(t_n)\, d\mathbb{P}(t_1, t_2, \dots) \\ &= \int h(t) f_n(t)\, dt \ \in \operatorname{rg} H_n\,. \end{aligned}$$

Lo que implica, por (8), que la serie en (9) es absolutamente convergente en Y, que G está bien definida, y que es una medida numerablemente aditiva usando que las sumas parciales lo son.

La variación de G no es σ-finita. Para ver esto vamos a probar que si $A \in \mathcal{A}$, y $\mathbb{P}(A) > 0$, entonces $|G|(A) = \infty$. Esto no es complicado, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos por (7)

$$|G|(A) \geq \frac{|P_n G|(A)}{C} = \frac{1}{C} \int_A \|f_n(t)\| \, dt = \frac{n\mathbb{P}(A)}{C}.$$

La medida F será la suma disjunta de las H_n, que podemos definir en los medibles Lebesgue de $[1, +\infty)$ como

$$F(B) = \sum_{n \geq 1} \int_{B \cap [n, n+1)} f_n(t-n) \, dt, \qquad \text{para cada medible } B \subseteq [1, +\infty).$$

Como antes, se comprueba que esta serie es absolutamente convergente, y define una medida numerablemente aditiva cuya variación es σ-finita, ya que

$$|F|([n, n+1]) = \int_n^{n+1} \|f_n(t-n)\| \, dt = n.$$

Por último, antes vimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\int_A f_n(t_n) \, d\mathbb{P}$ está en el rango de H_n. Existe pues un medible B_n en $[0, 1]$ tal que

$$\int_A f_n(t_n) \, d\mathbb{P}(t_1, t_2, \ldots) = \int_{B_n} f_n(t) \, dt.$$

Tomando $B = \bigcup_{n \geq 1} n + B_n$, es fácil ver que $F(B) = G(A)$, lo que prueba que $\operatorname{rg} G \subseteq \operatorname{rg} F$, terminando esta demostración.

□

II.4. Rango y derivabilidad. Rango medio.

Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach, y μ una medida positiva en Σ; cada función $f \in L^1(\mu, X)$ define una medida μ_f en Σ con valores en X de la forma

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \Sigma. \tag{1}$$

Esta medida resulta ser numerablemente aditiva, de variación acotada, y μ-continua. Su variación viene dada por

$$|\mu_f|(A) = \int_A \|f(t)\|\, d\mu(t)\,, \qquad A \in \Sigma\,.$$

Sin embargo, no siempre una medida G numerablemente aditiva, de variación acotada, y μ-continua, es una μ_f como en (1), para alguna $f \in \mathrm{L}^1(\mu, X)$; cuando esto ocurre, se dice que G es *derivable con respecto a μ,* y a la función f se la llama *derivada de Radon-Nikodým,* o simplemente *derivada, de G con respecto a μ,* y se la denotar por

$$\frac{dG}{d\mu}\,.$$

Si una medida vectorial G es derivable con respecto a una medida positiva μ, entonces también lo es con respecto a su variación $|G|$; se tiene que, si f es la derivada de G con respecto a μ, en casi todo punto t es

$$\frac{dG}{d|G|}(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|} \qquad \text{(con el convenio } \frac{0}{0} = 0\text{)}.$$

Reciprocamente, si G es derivable con respecto a su variación, es fácil ver que su derivada es acotada. Si ahora μ es una medida σ-finita tal que G sea μ-continua, entonces G es derivable con respecto a μ; ya que $|G|$ es acotada y también μ-continua, luego por el Teorema de Radon-Nikodým, como se trata de una medida real, $|G|$ tiene derivada con respecto a μ, y se tendrá

$$\frac{dG}{d\mu} = \frac{dG}{d|G|} \cdot \frac{d|G|}{d\mu}\,.$$

Por tanto, el problema de ver si una medida de variación acotada y μ-continua, es derivable con respecto a μ se reduce a estudiar si es derivable con respecto a su variación.

Probaremos que el rango de una medida numerablemente aditiva determina si es derivable con respcto a su variación; es decir, veremos que si dos medidas numerablemente aditivas tienen rangos con igual clausura convexa cerrada, entonces una es derivable con respecto a su variación si y sólo si lo es la otra. Esto lo demostraremos en esta sección usando un resultado sobre el "rango medio" que caracteriza la derivabilidad de una medida (Teorema 4.1), y los resultados de la Sección 2 sobre descomposición de zonoides. En la sección siguiente volveremos a probar lo mismo, pero usando argumentos de factorización de operadores lineales.

Sea $G: \Sigma \to X$ una medida numerablemente aditiva de variación acotada, llamaremos *rango medio de G con respecto a su variación,* o simplemente *rango medio de G,* al subconjunto de X que denotaremos por $\mathcal{RM}(G)$, y que, tomando como convenio que $0/0 = 0$, está definido como

$$\mathcal{RM}(G) = \left\{ \frac{G(A)}{|G|(A)} : A \in \Sigma \right\}.$$

Si B es un medible, denotaremos por $\mathcal{RM}_B(G)$ al rango medio de la medida G restringida a B, es decir, de la medida $\chi_B G$; así

$$\mathcal{RM}_B(G) = \mathcal{RM}(\chi_B G) = \left\{ \frac{G(A)}{|G|(A)} : A \in \Sigma, \quad A \subseteq B \right\}.$$

El siguiente teorema, del que no daremos la demostración, es debido a M. A. Rieffel [RI]; en [DU] son los teoremas 2.6 y 2.7 del capítulo III. El enunciado que damos hace referencia a la derivabilidad de una medida vectorial con respecto a su variación, pero un análogo es válido para derivabilidad con respecto a una medida finita positiva μ.

Teorema 4.1. *Sean (Ω, Σ) un espacio medible, X un espacio de Banach, y $G: \Sigma \to X$ una medida numerablemente aditiva de variación finita. G es derivable con respecto a su variación $|G|$ si y sólo si para todo medible A con $|G|(A) > 0$, existe un medible $B \subseteq A$ tal que $|G|(B) > 0$, y $\mathcal{RM}_B(G)$ es relativamente compacto en X.*

En la proposición siguiente y su corolario damos algunas propiedades relacionadas con el rango medio que nos permitirán demostrar el Teorema 4.4 donde probaremos que el rango determina la derivabilidad de una medida numerablemente aditiva. Como antes, consideraremos $0/0 = 0$.

Proposición 4.2. *Sean (Ω, Σ) un espacio medible, X un espacio de Banach, $h: \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada, y $G: \Sigma \to X$ una* *medida numerablemente aditiva de variación finita. Se tienen:*

a) $\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(G)) = \overline{\text{co}}\left\{\frac{\int f\,dG}{\int |f|\,d|G|} \mid f\colon \Omega \to [-1,1] \quad \textit{medible}\right\}$.

b) $\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(hG)) \subseteq \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(G))$.

Demostración. El conjunto del segundo miembro en *a)* es la clausura convexa y cerrada de un conjunto simétrico, por lo tanto es absolutamente convexo y cerrado. Además, tomando como $f = \chi_A$, tendremos que $G(A)/|G|(A)$ está en este conjunto para todo $A \in \Sigma$. Esto prueba la inclusión de $\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(G))$ en

$$\overline{\text{co}}\left\{\frac{\int f\,dG}{\int |f|\,d|G|} \mid f\colon \Omega \to [-1,1] \quad \text{medible}\right\}.$$

Si $f\colon\Omega \to [-1,1]$ es una función simple medible, existen unos conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n$ dos a dos disjuntos, y unos números $\alpha_j \in [-1,1]$, $j = 1, \ldots, n$; tales que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}\,.$$

Tendremos entonces que

$$\frac{\int f\,dG}{\int |f|\,d|G|} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j G(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j||G|(A_j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{G(A_j)}{|G|(A_j)} \tag{2}$$

si ponemos, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\beta_j = \frac{\alpha_j |G|(A_j)}{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||G|(A_k)}.$$

Como $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$, de (2) se tiene que

$$\frac{\int f\,dG}{\int |f|\,d|G|} \in \text{aco}(\mathcal{RM}(G))\,.$$

Por densidad de las funciones simples se prueba la inclusión que nos faltaba, acabando la demostración de *a)*.

El apartado *b)* es consecuencia del *a)* y de la Proposición 1.4, ya que si $|h(\omega)| \leq K$, para todo $\omega \in \Omega$, $K > 0$, y f toma valores en $[-1,1]$; entonces, poniendo $g = h/K$, se tiene

$$\frac{\int f\,dhG}{\int |f|\,d|hG|} = \frac{\int fh\,dG}{\int |fh|\,d|G|} = \frac{\int fg\,dG}{\int |fg|\,d|G|}\,,$$

que está en $\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(G))$, puesto que fg toma valores en $[-1,1]$.

$\square$

Corolario 4.3. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos σ-álgebras de subconjuntos de M y N respectivamente; y sea X un espacio de Banach. Si $F\colon \mathcal{A} \to X$ y $G\colon \mathcal{B} \to X$ son dos medidas numerablemente aditivas de variación acotada tales que*

$$\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} F - \operatorname{rg} F) = \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} G - \operatorname{rg} G)\,;$$

entonces se tiene

$$\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(G)) = \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(F))\,.$$

Demostración. Sea $f\colon N \to [-1,1]$ medible, por el Teorema 2.6 existe $\phi\colon M \to [0,1]$ medible tal que

$$\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} \phi F - \operatorname{rg} \phi F) = \overline{\text{co}}(\operatorname{rg} |f|G - \operatorname{rg} |f|G)\,. \tag{3}$$

Esto último implica, por el razonamiento hecho en la Observación 2.3, que $\|\phi F\| = \||f|G\|$, y por el último apartado de la Proposición 1.4,

$$\int \phi\, d|F| = \|\phi F\| = \||f|G\| = \int |f|\, d|G|\,. \tag{4}$$

Aplicando el Corolario 1.2, la igualdad (3) se traduce en

$$\begin{aligned}\{\textstyle\int h|f|\, dG \mid h\colon N \to [-1,1] \quad \text{medible}\,\} \\ = \{\textstyle\int g\phi\, dF \mid g\colon M \to [-1,1] \quad \text{medible}\,\}\,.\end{aligned}$$

Como f es de la forma $h|f|$, para una función medible h a valores 1 y -1, existe una cierta $g\colon M \to [-1,1]$ medible tal que

$$\int f\, dG = \int g\phi\, dF\,;$$

lo que implica, junto con (4), que

$$\frac{\int f\, dG}{\int |f|\, d|G|} = \frac{\int g\phi\, dF}{\int \phi\, d|F|} = \frac{\int |g\phi|\, d|F|}{\int \phi\, d|F|} \cdot \frac{\int g\phi\, dF}{\int |g\phi|\, d|F|}\,,$$

que está en $\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(F))$, por la Proposición 4.2, y porque

$$\frac{\int |g\phi|\, d|F|}{\int \phi\, d|F|} \in [0,1]\,.$$

De nuevo por la Proposición 4.2 hemos probado $\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(G)) \subseteq \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(F))$. La otra inclusión se prueba igual.

□

Estamos ya en disposición de probar el teorema anunciado. Probaremos que si dos medidas numerablemente aditivas tienen rangos con igual clausura convexa cerrada, o más aún, con una clausura convexa cerrada siendo trasladada de la otra; entonces una es derivable si y sólo si lo es la otra.

Teorema 4.4. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos σ-álgebras de subconjuntos de M y N respectivamente; y sea X un espacio de Banach. Si $F\colon \mathcal{A} \to X$ y $G\colon \mathcal{B} \to X$ son dos medidas numerablemente aditivas tales que*

$$\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F - \text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, G - \text{rg}\, G)\,;$$

entonces F es derivable con respecto a su variación si y sólo si lo es G.

Demostración. Evidentemente basta demostrar una implicación. Supongamos que F es derivable con respecto a su variación; entonces tendrá variación acotada, y por la Observación 2.3 también tendrá G variación acotada, puesto que el zonoide que determina F es trasladado del que determina G. Podemos, por lo tanto, aplicar a G el Teorema 4.1 para probar que es derivable con respecto a su variación.

Sea pues $A \in \mathcal{B}$ tal que $|G|(A) > 0$, entonces la medida $\chi_A G$ es no nula. Existe, por el Teorema 2.6, una función medible $\phi_A\colon M \to [0,1]$ tal que

$$\overline{\text{co}}(\text{rg}\, \phi_A F - \text{rg}\, \phi_A F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, \chi_A G - \text{rg}\, \chi_A G)\,. \tag{5}$$

Puesto que evidentemente, la medida $\phi_A F$ es derivable con respecto a la variación de F, también lo será con respecto a su variación $|\phi_A F|$; aplicamos el Teorema 4.1 a esta medida y al conjunto total M, encontrando un subconjunto medible $C \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{RM}_C(\phi_A F)$ es relativamente compacto y $|\phi_A F|(C) >$

0. Puesto que la clausura absolutamente convexa y cerrada de un conjunto relativamente compacto es un compacto, esto último es equivalente a

$$\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(\chi_C\phi_A F)) \quad \text{es compacto,} \quad \text{y} \quad \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(\chi_C\phi_A F)) \neq \{0\}\,. \quad (6)$$

Usamos de nuevo el Teorema 2.6, aplicandoselo a las medidas $\phi_A F$ y $\chi_A G$, lo que podemos hacer por (5); y a la función χ_C. Encontramos entonces una función medible $\psi_C: N \to [0,1]$ tal que

$$\overline{\text{co}}(\text{rg}\,\chi_C\phi_A F - \text{rg}\,\chi_C\phi_A F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\,\psi_C\chi_A G - \text{rg}\,\psi_C\chi_A G)\,.$$

Esto implica por el Corolario 4.3, y por (6) que

$$\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(\psi_C\chi_A G)) \quad \text{es compacto,} \quad \text{y} \quad \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(\psi_C\chi_A G)) \neq \{0\}\,. \quad (7)$$

La medida $\psi_C\chi_A G$ es por tanto no nula; luego para algún r positivo, el conjunto $B_r = \{t \in N : \psi_C(t)\chi_A(t) \geq r\}$ tiene una G-variación no nula. Consideremos pues un tal B_r con $|G|(B_r) > 0$, y sea $h: N \to \mathbb{R}$ definida como $h(t) = 0$, si $t \in N \setminus B_r$, y $h(t) = 1/\psi_C(t)$, si $t \in B_r$. La función h es acotada, luego por el apartado *b)* de la Proposición 4.2,

$$\overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}_{B_r}(G)) = \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(h\psi_C\chi_A G)) \subseteq \overline{\text{aco}}(\mathcal{RM}(\psi_C\chi_A G))\,;$$

es decir, por (7), tenemos que $\mathcal{RM}_{B_r}(G)$ está incluido en un conjunto compacto, y por tanto será relativamente compacto. Como evidentemente $B_r \subseteq A$, tenemos que la medida G verifica las hipótesis del Teorema 4.1, y es derivable con respecto a su variación.

□

II.5. Rango y derivabilidad. Método de factorización.

Hay una relación importante entre las propiedades de una medida vectorial acotada, y las del operador integración que define. Esto ha sido ampliamente explotado en los dos sentidos. En esta sección haremos uso de esta relación para dar una nueva demostración del Teorema 4.4, que será consecuencia del

Teorema I.2.2; es decir, del hecho de que el rango de una medida vectorial determina su variación total.

La demostración que daremos del Teorema 4.4 descansará sobre una caracterización de medidas derivables, Teorema 5.3, que ya pondrá en evidencia la relación entre la derivabilidad y las propiedades del rango de una medida vectorial.

Antes recordaremos algunos de los resultados comentados sobre la relación de las propiedades de la medida y el operador integración, para medidas numerablemente aditivas. El teorema que sigue combina resultados de A. Grothendieck [GR] y de A. Pietsch [PI]. En [DU] se pueden encontrar las definiciones de operadores nucleares, operadores Piestch integrales, y operadores integrales. En los teoremas VI.3.3, VI.3.12, y VI.4.4 de [DU] están basicamente los resultados que a continuación presentamos; ya que la medida representante del operador integración con respecto a una medida vectorial es evidentemente ella misma, y la clase de los operadores integrales está incluida en la de los 1-sumantes, y contiene a la de los Pietsch integrales (ver, por ejemplo, el capítulo VIII de [DU]).

Teorema 5.1. *Sea G una medida numerablemente aditiva a valores en un espacio de Banach X, sea μ una medida de control para G. Denotemos por I_G el operador integración $I_G\colon \mathrm{L}^\infty(\mu) \to X$ definido como*

$$I_G f = \int f\,dG, \qquad f \in \mathrm{L}^\infty(\mu).$$

Se tienen entonces:

a) G tiene variación acotada si y sólo si I_G es 1-sumante, si y sólo si I_G es integral.

b) G es derivable con respecto a su variación (o con respecto a μ) si y sólo si I_G es nuclear.

Otro ingrediente que necesitaremos será el siguiente resultado de A. Grothendieck [GR], del cual se puede ver una prueba en [DU,pag 252]. La utilización de este resultado en la demostración del Teorema 5.3 nos fue señalada por G. Pisier; nuestro argumento original utilizaba el teorema de factorización de operadores debilmente continuo de W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson y A. Pełczyński [DFJP]. Hemos de hacer notar que aunque en [DU] se hace uso de esta factorización para probar el teorema de A. Grothendieck, la demostración original, por supuesto, no la utiliza; el viaje al futuro es imposible hasta para Grothendieck.

Teorema 5.2 *Sean X, Y, y Z tres espacios de Banach. Si $S\colon X \to Y$ es un operador integral, y $T\colon Y \to Z$ es un operador debilmente compacto; entonces $T \circ S\colon X \to Z$ es un operador nuclear.*

Sea C un subconjunto cerrado acotado y absolutamente convexo de un espacio de Banach X, denotaremos por X_C el subespacio lineal de X engendrado por C; es decir

$$X_C = \{ \lambda x \,:\, x \in C, \quad \lambda > 0 \}.$$

Sea $\|\cdot\|_C$ el funcional de Minkowski de C. Dotado de esta norma, X_C es un espacio de Banach cuya bola unidad cerrada es C (la completitud es consecuencia de que C es cerrado en X). Si G es una medida numerablemente aditiva con valores en X, cuyo rango está incluido en X_C, G se puede considerar como medida en X_C aunque no siga siendo, en general, numerablemente aditiva.

Cuando una medida es derivable entonces se puede factorizar, como un operador nuclear, a través de un operador diagonal de ℓ_∞ en ℓ_1. Sin embargo, si tenemos otra medida con el mismo rango, esa factorización de la primera no se puede reproducir directamente en la segunda. Es por eso que vamos a factorizar la medida a través de la inyección $X_C \to X$ para un adecuado C que contenga al rango, esta factorización se podrá hacer con toda medida que tenga el mismo rango, lo que dará sus frutos.

Estamos ya en disposición de enunciar y probar la anunciada caracterización de medidas derivables. En realidad, en la nueva demostración del Teorema 4.4 sólo usaremos la equivalencia *a)* $\iff$ *b)* del próximo teorema; incluimos la otra como debilitación de *b)* que pudiera ser útil.

Teorema 5.3 *Sea X un espacio de Banach, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y $G\colon \Sigma \to X$ una medida numerablemente aditiva. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) G es derivable con respecto a su variación.

b) Existe un compacto absolutamente convexo K en X, tal que el conjunto $\overline{\mathrm{co}}^X(\mathrm{rg}\, G)$ es un compacto de X_K, y la medida G es de variación acotada en X_K.

c) Existe un débil compacto absolutamente convexo D en X, tal que $\mathrm{rg}\, G \subset X_D$, y la medida G es de variación acotada en X_D.

Demostración. La implicación $b) \Longrightarrow c)$ es obvia; $d) \Longrightarrow a)$, no es muy complicada con el material acumulado hasta ahora. Si G verifica $d)$, denotemos por G_D a la medida considerada tomando los valores en X_D. Como G_D es de variación acotada, dada una sucesión (A_n) de conjuntos en Σ dos a dos disjuntos, tendremos

$$\sum_{n\geq 1} \|G_D(A_n)\|_D \leq \sum_{n\geq 1} |G_D|(A_n) \leq |G_D|(\Omega) < +\infty\,.$$

La serie $\sum G_D(A_n)$ es pues absolutamente convergente en X_D, luego convergente, y su suma valdrá lo mismo que en X; como G es numerablemente aditiva, tendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_D(A_n) = G_D\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\,,$$

que prueba que G_D también es numerablemente aditiva.

Si μ es una medida de control para G, también lo será para G_D, porque tienen los mismos conjuntos de medida nula. Denotando por J_D la inyección de X_D en X, con las notaciones del Teorema 5.1, es evidente que

$$I_G = J_D \circ I_{G_D}\,. \tag{1}$$

Como G_D tiene variación acotada, por el Teorema 5.1, I_{G_D} es integral. Ahora bien, el operador J_D es debilmente compacto puesto que envía la bola unidad de X_D en D que es débil compacto en X. Por el Teorema 5.2 y (1), I_G es nuclear, lo que, de nuevo por el Teorema 5.1, implica que G es derivable respecto de su variación.

$a) \Longrightarrow b)$. Sea μ una medida de control de G. Entonces, siguiendo la notación del Teorema 5.1, el operador I_G es nuclear, luego admite una factorización de la siguiente manera [DU,pag170]

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\mu) & \xrightarrow{I_G} & X \\ {\scriptstyle S}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle T_0} \\ \ell_\infty & \xrightarrow{D_0} & \ell_1 \end{array}$$

donde $\|S\| = 1$, T_0 es un operador acotado, y D_0 es un operador diagonal; es decir, existe una sucesión (d_n) de números reales tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n| < +\infty\,; \qquad \text{y} \qquad D_0\big((\alpha_n)_{n\geq 1}\big) = (d_n\alpha_n)_{n\geq 1}\,, \quad (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty\,.$$

Podemos encontrar una sucesión de números positivos (λ_n) que tiende a infinito, pero que todavía

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |d_n| < +\infty\,.$$

Llamemos D al operador diagonal definido por $(\lambda_n d_n)$, y sea $T\colon \ell_1 \to X$ el operador definido en cada vector básico e_n como $Te_n = T_0 e_n/\lambda_n$, se sigue teniendo la factorización

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\mu) & \xrightarrow{I_G} & X \\ {\scriptstyle S}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle T} \\ \ell_\infty & \xrightarrow{D} & \ell_1 \end{array}$$

pero ahora T es un operador compacto, y D es todavía un operador nuclear, por tanto 1-sumante y compacto.

Para cada espacio de Banach Y, denotemos por $B(Y)$ su bola unidad cerrada. El operador T es compacto, luego $K = \overline{T(B(\ell_1))}$ es un compacto absolutamente convexo de X. Llamemos T_K al operador T considerado como valorado en X_K; es decir, $T_K\colon \ell_1 \to X_K$, que es continuo y tiene una norma $\|T_K\| \leq 1$. Por el Corolario 1.2, se tiene

$$\begin{aligned} \overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, G) &\subseteq I_G\Big(B\big(L^\infty(\mu)\big)\Big) = T \circ D \circ S\big(B(L^\infty)\big) \\ &\subseteq T \circ D\big(B(\ell_\infty)\big)\,, \end{aligned}$$

y si $H = \overline{D(B(\ell_\infty))}$, que es un compacto de ℓ_1,

$$\subseteq T(H) = T_K(H)\,,$$

que es un compacto de X_K. Como $\overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, G)$ es un cerrado de X, es un cerrado de X_K, que está incluido en un compacto, luego es un compacto de X_K.

Para probar que G es de variación acotada en X_K, recordemos que D es 1-sumante, y por tanto tambén lo es $T_K DS$ con norma 1-sumante $\pi_1(T_K DS) \leq \pi_1(D)$. Si $\{A_j\}_{j=1}^n$ es una partición finita de Ω en Σ, se tiene, para cada v^* en el dual de $L^\infty(\mu)$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle v^*, \chi_{A_j}\rangle| \leq \|v^*\|\,;$$

luego, por la definición de operador 1-sumante,

$$\pi_1(D) \geq \sum_{j=1}^{n} \|T_K DS(\chi_{A_j})\|_K = \sum_{j=1}^{n} \|G(A_j)\|_K\,.$$

Siendo la partición arbitraria, se tiene entonces $\|G\|_K \leq \pi_1(D)$, y por tanto G tiene variación acotada en X_K.

□

Nueva demostración del Teorema 4.4. La medida simetrizada $\widetilde{G}$, definida como al final de la Observación 3.4, es evidentemente derivable si y sólo lo es G, y tiene por rango a $\text{rg}\, G - \text{rg}\, G$. Haciendo la misma construcción con F, para demostrar el Teorema 4.4, bastará probar que si F y G son numerablemente aditivas, $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$, y F es derivable con respecto a su variación, entonces también lo es G.

Usamos el apartado *b)* del Teorema 5.3 y encontramos un compacto K en X tal que $\overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, F)$ es compacto en X_K, y F es de variación acotada en X_K. Si $\overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, F)$ es compacto en X_C, en él coincidirán la topología de X_K, y la de X que es en principio más débil pero separada; luego $\text{co}(\text{rg}\, F)$ es ahí denso también para la topología de X_K; es decir,

$$\overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, F)\,.$$

El mismo razonamiento es aplicable ahora al rango de G, ya que

$$\overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, G)\,;$$

por lo tanto

$$\overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, G)\,,$$

lo que por el Teorema 2.2 del capítulo anterior implica $\|F\|_{X_K} = \|G\|_{X_K}$. G será entonces de variación acotada en X_K; como $\overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, G)$ es compacto en X_K, G verifica *b)* en el Teorema 5.3, y será derivable con respecto a su variación.

$\square$

A lo largo de estos dos capítulos hemos probado que el rango de una medida vectorial determina ciertas propiedades de la misma: la variación total, la σ-finitud de la variación, y la derivabilidad. Sin embargo, queda abierta la cuestión de cómo las determina; es decir, cómo es un zonoide, para que la medida que lo determina sea derivable, o tenga variación acotada o σ-finita. Quedan así abiertos unos problemas más complejos, pues su resolución total sería una nueva prueba de que el rango determina estas propiedades.

SEGUNDA PARTE

Conjuntos p-Sidon p.s.
Ciertas propiedades de conjuntos finitos de caracteres.

CAPITULO III

Conjuntos p-Sidon p.s.

III.1. El espacio $\mathcal{C}^{p.s.}(G)$. Resultados preliminares.

El objetivo de esta sección es introducir las nociones de Análisis Armónico y las notaciones más importantes que usaremos. Nos detendremos sobre todo en la presentación de las propiedades del espacio $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ que será nuestro principal instrumento de trabajo, y que, en general, no es tan bien conocido como otros espacios funcionales.

En lo que sigue, $\mathbf{G}$ será un grupo abeliano compacto, para cuya operación usaremos una notación aditiva; $\mathbf{m}$ será su medida de Haar normalizada para que $\mathbf{m}(\mathbf{G}) = 1$; y $\mathbf{\Gamma} = \widehat{\mathbf{G}}$ será el grupo dual de $\mathbf{G}$; es decir, el grupo de los homomorfismo continuos de $\mathbf{G}$ en el toro $\mathbb{T}$ (grupo multiplicativo de los complejos de módulo uno). Los elementos de $\mathbf{\Gamma}$ son llamados *caracteres* de $\mathbf{G}$. En general, en $\mathbf{\Gamma}$ usaremos la notación multiplicativa, pues su operación es el producto de funciones. Hay algunos casos que no seguirán estas reglas de notación; uno de ellos es el del toro $\mathbb{T}$, que es un grupo compacto para la multiplicación de números complejos, y cuyo dual se identifica al grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, haciendo a cada $m \in \mathbb{Z}$ corresponder el caracter $u \mapsto u^m$, $u \in \mathbb{T}$.

Como habitualmente $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ denotará al espacio de las funciones continuas en $\mathbf{G}$ a valores complejos. El dual de $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ es el espacio $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ de las medidas complejas regulares en $\mathbf{G}$. Si $1 \leq p \leq +\infty$, escribiremos simplemente $\mathrm{L}^p(\mathbf{G})$ por el espacio $\mathrm{L}^p(\mathbf{G}, \mathbf{m}; \mathbb{C})$. Los elementos de $\mathbf{\Gamma}$ forman una base ortonormal de $\mathrm{L}^2(\mathbf{G})$. Por último denotaremos por $\mathrm{Pol}(\mathbf{G})$ al espacio de los *polinomios trigonométricos sobre* $\mathbf{G}$; es decir, el espacio lineal de funciones engendrado por $\mathbf{\Gamma}$, las funciones que se pueden expresar como combinación lineal (finita) de caracteres. $\mathrm{Pol}(\mathbf{G})$ es denso en $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ y $\mathrm{L}^p(\mathbf{G})$ para $1 \leq p < +\infty$.

Dadas $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{G})$, o más generalmente, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$; denotaremos por $\widehat{f}$, $\widehat{\mu}$, las transformadas de Fourier de f y μ respectivamente, (en el caso de μ más conocida como transformada de Fourier-Stieltjes). Son las funciones definidas en $\mathbf{\Gamma}$ como

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_{\mathbf{G}} f\overline{\gamma}\, d\mathbf{m}, \qquad \widehat{\mu}(\gamma) = \int_{\mathbf{G}} \overline{\gamma}\, d\mu, \qquad \gamma \in \mathbf{\Gamma}.$$

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{G})$, entonces $\widehat{f} \in c_0(\mathbf{\Gamma})$; mientras que para toda medida μ se tiene obviamente $\widehat{\mu} \in \ell_\infty(\mathbf{\Gamma})$. Si ahora x es un elemento de $\mathbf{G}$, denotaremos por f_x, μ_x las trasladadas de f y μ en x, definidas como

$$f_x(y) = f(y - x) \quad \forall y \in \mathbf{G}; \qquad \mu_x(A) = \mu(A - x) \quad \text{para todo medible } A.$$

Como de costumbre denotaremos por $\mu * \nu$ el producto de convolución de las medidas μ y ν; de la misma manera se hará para funciones.

Si $X(\mathbf{G})$ es uno de los espacios vistos anteriormente, y Λ es un subconjunto de $\mathbf{\Gamma}$, denotaremos por $X_\Lambda(\mathbf{G})$ al subespacio de los elementos de $X(\mathbf{G})$ cuya transformada de Fourier está soportada por Λ; es decir, aquellos $f \in X(\mathbf{G})$ tales que $\widehat{f}(\gamma) = 0$ para todo γ en $\mathbf{\Gamma} \setminus \Lambda$. $\mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$ es denso en $\mathcal{C}_\Lambda(\mathbf{G})$ y en $\mathrm{L}^p_\Lambda(\mathbf{G})$, $1 \leq p < +\infty$; en estos casos los espacios $X_\Lambda(\mathbf{G})$ son los únicos subespacios cerrados de $X(\mathbf{G})$ invariantes por traslaciones.

El cardinal de un conjunto B lo denotaremos por $|B|$. Si B es un subconjunto finito de $\mathbf{\Gamma}$, denotaremos por $\mathrm{gr}(B)$ al subgrupo de $\mathbf{\Gamma}$ engendrado por B; y por $[B]$ y $[B]^+$ a los siguientes subconjuntos de $\mathrm{gr}(B)$:

$$[B] = \left\{ \prod_{\gamma \in B} \gamma^{n_\gamma} : (n_\gamma) \in \{-1, 0, 1\}^B \right\},$$

$$[B]^+ = \left\{ \prod_{\gamma \in B} \gamma^{n_\gamma} : (n_\gamma) \in \{0, 1\}^B \right\}.$$

Un subconjunto finito B de $\mathbf{\Gamma}$ se dice *casi-independiente* si, salvo la trivial, ninguna de las combinaciones $\prod_{\gamma \in B} \gamma^{n_\gamma}$, con $n_\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, es el elemento neutro 1; es decir, si se tiene

$$\prod_{\gamma\in B}\gamma^{n_\gamma}=1\,,\quad n_\gamma\in\{-1,0,1\}\quad\Longrightarrow\quad n_\gamma=0\,,\quad\forall\gamma\in B\,.$$

Se tiene obviamente que B es casi-independiente si y sólo si $\left|[B]^+\right| = 2^{|B|}$. Un subconjunto Λ de $\mathbf{\Gamma}$ es casi-independiente, si lo son todas sus partes finitas.

Nosotros nos interesamos por el estudio de ciertos subconjuntos "pequeños" de $\mathbf{\Gamma}$, definidos por propiedades de la transformada de Fourier en ellos. En $\mathbb{Z}$, estos conjuntos son lagunares, en el sentido de que no pueden contener progresiones aritméticas arbitrariamente largas; seguiremos llamándolos lagunares aunque no estemos en $\mathbb{Z}$, y en general no podrán contener conjuntos de la forma $[B]$, para B de cardinal arbitrariamente grande.

El ejemplo más significativo de estos conjuntos lagunares es el de los conjuntos de Sidon. Se dice que $\Lambda\subset\mathbf{\Gamma}$ es un *conjunto de Sidon* si para todo $f\in\mathcal{C}_\Lambda(\mathbf{G})$ se tiene que $\widehat{f}\in\ell_1(\mathbf{\Gamma})$. Por la densidad de $\mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$, y el teorema del grafo cerrado, un conjunto Λ es de Sidon si y sólo si existe una constante $C>0$ tal que

$$\|\widehat{P}\|_{\ell_1}\le C\|P\|_\infty\,,\qquad\text{para todo } P\in\mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G}).\tag{1}$$

A la menor constante C que verifica (1) se le llama la constante de Sidon de Λ. Usando productos de Riesz, se puede probar que todo conjunto casi-independiente es un conjunto de Sidon de constante menor o igual que 8.

El espacio $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$. En lo que sigue supondremos que $\{r_\gamma\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ es una *familia de variables Rademacher;* es decir, una familia de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución que una variable de Bernoulli que toma el valor 1 con probabilidad 1/2, y el -1 con la misma probabilidad, y que supondremos definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathbb{P})$. Analogamente, $\{g_\gamma\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$ será una familia de variables gaussianas independientes equidistribuidas como en la demostración de la Proposición I.2.3.

Si P es un polinomio trigonométrico sobre $\mathbf{G}$, definimos

$$[\![P]\!]=\int_\Omega\Big\|\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}\widehat{P}(\gamma)r_\gamma(\omega)\gamma\Big\|_\infty\,d\mathbb{P}(\omega)\,.\tag{2}$$

$[\![\cdot]\!]$ es una norma en $\mathrm{Pol}(\mathbf{G})$, que verifica

$$\Big(\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}|\widehat{P}(\gamma)|^2\Big)^{1/2}\le[\![P]\!]\le\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}|\widehat{P}(\gamma)|\,,\qquad\text{para todo } P\in\mathrm{Pol}(\mathbf{G});$$

puesto que también lo verifica la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por el principio de contracción [K2,pag.20], se tiene que si (a_γ) son números complejos con $|a_\gamma| \leq 1$, entonces

$$\Big[\!\!\Big[\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} a_\gamma \widehat{P}(\gamma)\gamma\Big]\!\!\Big] \leq 2[\![P]\!], \qquad \text{para todo } P \in \mathrm{Pol}(\mathbf{G}). \tag{3}$$

$\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ es el completado de $\mathrm{Pol}(\mathbf{G})$ para la norma $[\![\cdot]\!]$; éste resulta ser el espacio de las funciones de $\mathrm{L}^2(\mathbf{G})$ para los que la integral en (2) es finita, normado con esa misma integral. Estas son las funciones de $\mathrm{L}^2(\mathbf{G})$, para las que $\big(r_\gamma(\omega)\widehat{f}(\gamma)\big)$ es la transformada de Fourier de una función continua para casi todo ω [K2][P4]; así $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ es el ***espacio de las series de Fourier aleatorias casi seguramente continuas.***

De la ecuación (3) es fácil deducir que si $f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$, poniendo $x_\gamma = \widehat{f}(\gamma)\gamma$, la familia (x_γ) es sumable en $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$, y su suma es f. Esto implica que $\mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$ es denso en $\mathcal{C}^{p.s.}_\Lambda(\mathbf{G})$ para cada $\Lambda \subset \mathbf{\Gamma}$; que si $\mathbf{\Gamma}$ es numerable ($\iff$ $\mathbf{G}$ es metrizable), entonces los caracteres forman una base incondicional de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$; y que, en general, $\{\widehat{f} : f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})\}$ es un retículo de Banach sobre $\mathbf{\Gamma}$.

El estudio de este espacio fue iniciado por G. Pisier [P4], demostrando las principales propiedades que veremos a continuación. La norma $[\![\cdot]\!]$ es equivalente a la que se obtiene si remplazamos en (2) las variables de Rademacher por gaussianas [P4]; es decir, si ponemos

$$[\![P]\!]_g = \int_\Omega \Big\|\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \widehat{P}(\gamma) g_\gamma(\omega)\gamma\Big\|_\infty \, d\mathbf{P}(\omega),$$

existe $K \geq 1$ tal que, para todo $P \in \mathrm{Pol}(\mathbf{G})$, se tiene

$$\frac{1}{K}[\![P]\!] \leq [\![P]\!]_g \leq K[\![P]\!].$$

Por tanto $[\![\cdot]\!]_g$ es una norma equivalente en $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$.

A partir de ahora reservaremos la notación ψ, para la función real $\psi(t) = \exp(t^2) - 1$. Como habitualmente, denotaremos por $\mathrm{L}^\psi(\mathbf{G})$ al espacio de Orlicz correspondiente, el de las funciones medibles f sobre $\mathbf{G}$ para las que existe $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathbf{G}} \psi\Big(\frac{|f|}{c}\Big)\, d\mathbf{m} \leq 1, \tag{4}$$

dotado con la norma $\|f\|_\psi = \inf\{c > 0 : c \text{ verifica (4) }\}$. Por un desarrollo en series de potencias, es fácil ver que esta norma es equivalente a $\sup_{p>2}(\|\cdot\|_p/\sqrt{p})$; es decir, existe $K \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{K}\|f\|_\psi \leq \sup_{p>2} \frac{\|f\|_{L^p}}{\sqrt{p}} \leq K\|f\|_\psi\,. \tag{5}$$

El espacio dual de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ se puede identificar al espacio $M_{2,\psi}(\mathbf{G})$ de los multiplicadores de L^2 en L^ψ; es decir, de los operadores acotados de $\mathrm{L}^2(\mathbf{G})$ en $\mathrm{L}^\psi(\mathbf{G})$ que conmutan con las traslaciones [P4]. Dado $T \in M_{2,\psi}(\mathbf{G})$, existe, para cada $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, un número complejo $\widehat{T}(\gamma)$ tal que $T\gamma = \widehat{T}(\gamma)\gamma$. La dualidad se expresa

$$\langle T, f\rangle = \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \widehat{T}(\gamma)\widehat{f}(\gamma)\,, \qquad T \in M_{2,\psi}(\mathbf{G})\,, \quad f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})\,; \tag{6}$$

y la serie en (6) es absolutamente convergente.

El espacio $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ tiene cotipo 2, lo que está intimamente relacionado al resultado que vemos a continuación, que será fundamental en la próxima sección, y cuya demostración se puede encontrar en [P4, Corolario 7.1]. El enunciado que damos encierra ya la reticularidad en $\mathbf{\Gamma}$ de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$.

Proposición 1.1. *Existe una constante $K_1 \geq 1$ tal que si $f, f_1, \ldots, f_n$ son funciones en $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ verificando*

$$|\widehat{f}(\gamma)|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |\widehat{f}_j(\gamma)|^2 \qquad \textit{para todo } \gamma \in \mathbf{\Gamma};$$

entonces se tiene

$$K_1[\![f]\!] \geq \left(\sum_{j=1}^{n}[\![f_j]\!]^2\right)^{1/2}.$$

Todos los resultados anteriores se demuestran en general para la norma $[\![\cdot]\!]_g$; en este caso, se aplican las desigualdades de Dudley [Du] y Fernique [F] para procesos gaussianos. No podíamos acabar este repaso a las propiedades de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ sin referirnos a ellas en este contexto; las sumarizaremos en el próximo teorema, cuyo enunciado comenzamos a explicar.

Si f es una función en $L^2(\mathbf{G})$, consideramos en $\mathbf{G}$ la siguiente (semi)distancia invariante por traslaciones:

$$d(x,y) = \Big(\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} |\widehat{f}(\gamma)|^2 |\gamma(x) - \gamma(y)|^2\Big)^{1/2}, \qquad x, y \in \mathbf{G}.$$

Para cada s positivo, pongamos $\mathrm{m}(s)$ por la medida de Haar de la bola abierta de radio s, que no depende del centro que elijamos; así al tomar el 0 como centro, se tiene

$$\begin{aligned} d(x,0) &= \Big(\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} |\widehat{f}(\gamma)|^2 |1 - \gamma(x)|^2\Big)^{1/2} \\ &= \Big(\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} |\widehat{f}(\gamma)|^2 (2 - 2\Re\gamma(x))\Big)^{1/2} = \sqrt{2(\Re\varphi(0) - \Re\varphi(x))}, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\varphi = f * \widetilde{f}$, siendo $\widetilde{f}$ la función $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbf{G}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{m}(s) = \mathbf{m}\big(\{x \in \mathbf{G} : \sqrt{2(\Re\varphi(0) - \Re\varphi(x))} < s\}\big).$$

El resultado anunciado es el siguiente [P4]:

Teorema 1.2. *Sea $f \in L^2(\mathbf{G})$, y $\mathrm{m}(s)$ como antes, f está en $C^{p.s.}(\mathbf{G})$ si y sólo si es finita la integral*

$$\int_0^\infty \sqrt{\log(1/\mathrm{m}(s))}\, ds. \tag{8}$$

Es más, existe una constante $K_2 \geq 1$ tal que para toda $f \in C^{p.s.}(\mathbf{G})$ se tiene

$$\frac{1}{K_2}[\![f]\!] \leq |\widehat{f}(1)| + \int_0^\infty \sqrt{\log(1/\mathrm{m}(s))}\, ds \leq K_2[\![f]\!]. \tag{9}$$

La integral en (8), está restringida a un intervalo acotado, ya que $\mathrm{m}(s) = 1$ para todo s mayor que un cierto s_0. Como curiosidad podemos usar el teorema para ver que si $\alpha > 0$, y f es una función α-holderiana en el toro (existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ para $x, y \in \mathbb{T}$), entonces f está en $C^{p.s.}(\mathbb{T})$; ya que φ es también α-holderiana, $\mathrm{m}(s)$ sería mayor que $cs^{2/\alpha}$ para cierto $c > 0$, y (8) sería finita. De la misma forma se podría ver que las funciones características de los intervalos del toro están en $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbb{T})$, lo que nos proporciona un ejemplo de funciones no continuas que están en $\mathcal{C}^{p.s.}$.

III.2. Caracterización de conjuntos p-Sidon p.s..

El estudio de los conjuntos "lagunares" tiene por objeto relacionar las diversas propiedades funcionales de los espacios invariantes que soportan o de la restricción de la transformada de Fourier a ellos, con otras propiedades funcionales y con las puramente aritméticas del conjunto en sí. Uno de los mejores ejemplo de esto es el siguiente teorema de caracterización de conjuntos de Sidon, consecuencia de diferentes investigaciones.

Teorema 2.1. *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo abeliano compacto, y* Λ *un subconjunto de su grupo dual* $\mathbf{\Gamma}$. *Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) Λ *es un conjunto de Sidon.*

b) Existe una constante $C > 0$, *tal que para todo* $f \in \mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$, *y para todo* $q > 2$, *se tiene*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\sqrt{q}\|f\|_{L^2}\,.$$

c) Para toda $f \in \mathcal{C}_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$, *se tiene que* $\widehat{f}$ *está en* $\ell_1(\mathbf{\Gamma})$.

d) Existe un $\delta > 0$ *tal que todo subconjunto finito* A *de* $\Lambda\setminus\{1\}$ *contiene un subconjunto casi-independiente* B *con cardinal*

$$|B| \geq \delta|A|\,.$$

La implicación *a)* $\Longrightarrow$ *b)* es debida a W. Rudin [R2]. *c)* $\Longrightarrow$ *a)* es de D. Rider [Ri], ver también [P3]. Las otras implicaciones son de G. Pisier, así *b)* $\Longrightarrow$ *c)* se puede encontrar en [P4] y [P5], y *c)* $\Longleftrightarrow$ *d)* en [P6]. Una demostración distinta de la equivalencia entre *a), b)* y *d)* fue dada por J. Bourgain en [B1].

El objetivo de esta sección es dar una generalizacón de la equivalencia de las tres últimas propiedades al cambiar ℓ_1 por ℓ_p. Comencemos con una definición.

Definición 2.2. *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo abeliano compacto, y* Λ *un subconjunto de su dual* $\mathbf{\Gamma}$. *Si* $p \in [1,2)$, *se dice que* Λ *es un conjunto p-Sidon, si para toda* $f \in \mathcal{C}_\Lambda(\mathbf{G})$ *se tiene que* $\widehat{f} \in \ell_p(\mathbf{\Gamma})$; *y diremos que* Λ *es un conjunto p-Sidon p.s., si para toda* $f \in \mathcal{C}_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$ *se tiene que* $\widehat{f} \in \ell_p(\mathbf{\Gamma})$.

La noción de conjunto p-Sidon fue introducida por M. Bożejko y T. Pytlik [BP], y por R. E. Edwards y K. A. Ross [ER]. Para $p \geq 2$ no tiene sentido al no ser restrictiva, todo conjunto es 2-Sidon. Evidentemente todo conjunto p-Sidon es p-Sidon p.s., el recíproco se desconoce, salvo para el caso $p = 1$, en que es cierto por el antes citado resultado de D. Rider.

Al igual que ocurre con los conjuntos de Sidon, por el teorema del grafo cerrado, y por la densidad de los polinomios trigonométricos, Λ es un conjunto p-Sidon (respectivamente p-Sidon p.s.) si y sólo si existe un $C > 0$ tal que para todo $P \in \mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$, se tiene

$$\|\widehat{P}\|_p \leq C\|P\|_\infty \qquad (\text{ resp. } \leq C[\![P]\!] \text{ }).$$

Nuestra generalización del Teorema 2.1 será una caracterización de los conjuntos p-Sidon p.s..

Hagamos, por último, un pequeño recordatorio de los espacios de Lorentz sobre $\mathbf{\Gamma}$ (análogos a los de sucesiones). Si (a_γ) está en $c_0(\mathbf{\Gamma})$ escribamos (a_n^*) por la sucesión reordenada decreciente de $(|a_\gamma|)$. Si $1 \leq p, r < +\infty$, se dice que (a_γ) está en $\ell_{p,r}(\mathbf{\Gamma})$ si se verifica

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/p}a_n^*)^r\frac{1}{n}\right)^{1/r} < +\infty\,; \tag{1}$$

y se dice que (a_γ) está en $\ell_{p,\infty}(\mathbf{\Gamma})$ si se verifica

$$\sup_{n\geq 1} n^{1/p}a_n^* < +\infty\,. \tag{2}$$

Si $1 \leq r \leq p < +\infty$, la expresión en (1) es una norma ($\|\cdot\|_{p,r}$) que convierte a $\ell_{p,r}(\mathbf{\Gamma})$ en un espacio de Banach. En los demás casos de (1) y en el caso de (2), la expresión que aparece arriba es sólo una casi-norma; sin embargo, si $p > 1$, hay una norma equivalente en $\ell_{p,r}(\mathbf{\Gamma})$, que viene dada por

$$\|(a_\gamma)\|_{p,r} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/p}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^*\right)^r\frac{1}{n}\right)^{1/r}$$

en el caso $r < \infty$, y en el caso $r = \infty$ por

$$\|(a_\gamma)\|_{p,\infty} = \sup_{n\geq 1} n^{1/p}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^*\Big)\,. \qquad (3)$$

El espacio $\ell_{p,p}$ coincide con ℓ_p para todo $p \in [1,+\infty)$. Cuando tenemos $1 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, entonces se tiene la inclusión continua $\ell_{p,r_1} \subset \ell_{p,r_2}$. Las funciones en $\mathbf{\Gamma}$ que son nulas salvo para un número finito de elementos son densas en $\ell_{p,r}(\mathbf{\Gamma})$ cuando $1 \leq r,p < \infty$; esto no ocurre en $\ell_{p,\infty}(\mathbf{\Gamma})$, más que cuando $\mathbf{\Gamma}$ es finito. Por último, si para cada p, denotamos por p' su exponente conjugado ($\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$), el espacio dual de $\ell_{p,r}$ se identifica con $\ell_{p',r'}$ cuando $1 < r,p < \infty$.

Podemos ya enunciar la caracterización de los conjuntos p-Sidon p.s.. A partir de ahora, para cada $p \in [1,2)$ pondremos

$$\alpha = \alpha(p) = \frac{2p}{3p-2}\,; \qquad \varepsilon = \varepsilon(p) = \frac{2}{p} - 1\,. \qquad (4)$$

Se tiene entonces $\alpha \in (1,2]$, y $\varepsilon \in (0,1]$. Hecha esta premisa, tenemos:

Teorema 2.3. *Sea $\mathbf{G}$ un grupo abeliano compacto, y Λ un subconjunto de su grupo dual $\mathbf{\Gamma}$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) *Λ es un conjunto p-Sidon p.s..*

b) *Para toda $f \in C_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$, se tiene que $\widehat{f}$ está en $\ell_{p,1}(\mathbf{\Gamma})$.*

c) *Para toda $f \in C_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$, se tiene que $\widehat{f}$ está en $\ell_{p,\infty}(\mathbf{\Gamma})$.*

d) *Existe una constante $C > 0$, tal que para todo $f \in \mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$, y para todo $q > 2$, se tiene*

$$\|f\|_q \leq C\sqrt{q}\|\widehat{f}\|_\alpha\,.$$

e) *Existe una constante $C > 0$, tal que para todo subconjunto finito A de Λ, y para todo $q > 2$, se tiene*

$$\Big\|\sum_{\gamma\in A}\gamma\Big\|_q \leq C\sqrt{q}|A|^{1/\alpha}\,.$$

f) Existe un $\delta > 0$ tal que todo subconjunto finito A de $\Lambda\setminus\{1\}$ contiene un subconjunto casi-independiente B con cardinal

$$|B| \geq \delta |A|^{\varepsilon}.$$

Demostración. Por lo explicado antes sobre las relaciones de inclusión entre los espacios de Lorentz, son evidentes las implicaciones *b)* $\Longrightarrow$ a) $\Longrightarrow$ *c)*. También es claro que *d)* $\Longrightarrow$ *e)*. Las implicaciones a) $\Longrightarrow$ *d)* y *c)* $\Longrightarrow$ *e)* son análogas, la demostración que haremos, salvo en el caso de la última implicación para $p = 1$, es una adaptación del argumento de W. Rudin en [R2].

Pongamos X por $\ell_p(\mathbf{\Gamma})$, o $\ell_{p,\infty}(\mathbf{\Gamma})$ $(p > 1)$, según estemos probando a) $\Longrightarrow$ *d)* o *c)* $\Longrightarrow$ *e)* para $p > 1$, respectivamente. En cualquiera de los casos, por el teorema del grafo cerrado, existe una constante $M > 0$ tal que para todo polinomio $P \in \mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$, se tiene

$$\|\widehat{P}\|_X \leq M[\![P]\!]. \tag{5}$$

Sea ahora A un subconjunto finito de Λ, evidentemente (5) se sigue verificando en $\mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$. Tomemos $a = (a_\gamma) \in \ell_{p'}(A)$ para la primera implicación, o $a_\gamma = 1$ para todo $\gamma \in A$, para la otra. En cualquiera de los dos casos se tiene que la forma lineal $\phi_a : \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G}) \to \mathbf{C}$ definida como

$$\phi_a(g) = \sum_{\gamma \in A} a_\gamma \widehat{g}(\gamma), \qquad g \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G}), \tag{6}$$

verifica, por (5),

$$|\phi_a(g)| \leq M \|(a_\gamma)\|_{\ell_{p'}} [\![g]\!].$$

En el caso de $\ell_{p,\infty}$ porque por (3),

$$\left|\sum_{\gamma \in A} b_\gamma\right| \leq \sum_{k=1}^{|A|} b_k^* \leq |A|^{1/p'} \|(b_\gamma)\|_{p,\infty}.$$

Como la definición de la norma $[\![\cdot]\!]$ en A, es la correspondiente a un subespacio de $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{C}_A(\mathbf{G}))$, el funcional ϕ_a vendrá dado por un elemento Φ_a

de $L^\infty(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{C}_A(\mathbf{G})^*)$, ya que al ser dimensión finita no hay problemas. Incluso podemos considerar el espacio de probabilidad finito, y por tanto, podemos extender cada valor puntual de Φ_a a un elemento del dual de $\mathcal{C}(\mathbf{G})$, las medidas en $\mathbf{G}$. Existirá pues, para cada $\omega \in \Omega$ una medida μ_ω verificando

$$\|\mu_\omega\| \le M\|(a_\gamma)\|_{\ell_{p'}}, \quad \text{para todo } \omega; \text{ y} \tag{7}$$

$$\phi_a(g) = \int \Big\langle \mu_\omega, \sum_{\gamma\in A} r_\gamma(\omega)\widehat{g}(\gamma)\gamma \Big\rangle \, d\mathbb{P}(\omega), \quad \text{para todo } g \in \mathcal{C}_A^{p.s.}(\mathbf{G}).$$

Lo que implica, tomando ν_ω la simétrica de μ_ω, que para todo $\gamma \in A$,

$$a_\gamma \gamma = \int \nu_\omega * r_\gamma(\omega)\gamma \, d\mathbb{P}(\omega),$$

y por lo tanto, para cada (b_γ),

$$\sum_{\gamma\in A} a_\gamma b_\gamma \gamma = \int \nu_\omega * \Big(\sum_{\gamma\in A} b_\gamma r_\gamma(\omega)\gamma\Big) \, d\mathbb{P}(\omega).$$

Podemos entonces para cada (b_γ), y cada $q > 2$, acotar la norma en L^q del polinomio $f = \sum_{\gamma\in A} a_\gamma b_\gamma \gamma$, usando (7),

$$\begin{aligned} \|f\|_q &\le \int_\Omega \|\nu_\omega\| \Big\|\sum b_\gamma r_\gamma(\omega)\gamma\Big\|_q \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\le M\|(a_\gamma)\|_{p'} \Big(\int_\Omega \int_{\mathbf{G}} \Big|\sum b_\gamma r_\gamma(\omega)\gamma(x)\Big|^q \, d\mathbf{m}(x)\, d\mathbb{P}(\omega)\Big)^{1/q}, \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración y usando la desigualdad de Khintchine,

$$\le M\|(a_\gamma)\|_{p'}\sqrt{q}\Big(\sum |b_\gamma|^2\Big)^{1/2}. \tag{8}$$

Si queremos deducir *e)* de *c)*, tomamos $a_\gamma = 1 = b_\gamma$ para todo γ de A en (8), y obtenemos, por (4),

$$\Big\|\sum_{\gamma\in A} \gamma\Big\|_q \le M\sqrt{q}|A|^{1/p'}|A|^{1/2} = M\sqrt{q}|A|^{1/\alpha}.$$

Para deducir *d)*, sea $f \in \mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$, tomamos A finito en Λ con $f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$, $\widehat{f}(\gamma) \ne 0$, para todo $\gamma \in A$. Basta entonces poner en (8),

$$a_\gamma = \frac{\widehat{f}(\gamma)}{|\widehat{f}(\gamma)|}|\widehat{f}(\gamma)|^\theta, \qquad b_\gamma = |\widehat{f}(\gamma)|^{1-\theta};$$

con $\theta = 2/(2+p')$, para tener

$$\begin{aligned}\|f\|_q &\leq M\sqrt{q}\Big(\sum|\widehat{f}(\gamma)|^{\theta p'}\Big)^{1/p'}\Big(\sum|\widehat{f}(\gamma)|^{2(1-\theta)}\Big)^{1/2}\\ &= M\sqrt{q}\|\widehat{f}\|_\alpha .\end{aligned}$$

c) $\Longrightarrow$ *e) para* $p=1$. Es simplemente la implicación (vi) $\Longrightarrow$(ii) de la página 698 de [P5]. Reproducimos aquí el argumento. Sea f una función cualquiera en $\mathrm{L}^{q'}(\mathbf{G})$. Existe un $M>0$ que verifica (5) para la casi-norma dada en (2), entonces para cada subconjunto finito D de Λ, tenemos

$$\begin{aligned}|D|\inf_{\gamma\in D}|\widehat{f}(\gamma)| &\leq M\left[\!\left[\sum_{\gamma\in D}\widehat{f}(\gamma)\gamma\right]\!\right]\\ &= M\int\Big\|\sum_{\gamma\in D} r_\gamma(\omega)\widehat{f}(\gamma)\gamma\Big\|_\infty d\mathbb{P}(\omega)\\ &\leq M\|f\|_{q'}\int\Big\|\sum_{\gamma\in D} r_\gamma(\omega)\gamma\Big\|_q d\mathbb{P}(\omega)\end{aligned}$$

y por argumentos similares a la demostración de (8)

$$\leq M\sqrt{q}\|f\|_{q'}|D|^{1/2}.$$

Por tanto para todo D subconjunto finito de Λ,

$$\inf_{\gamma\in D}|\widehat{f}(\gamma)| \leq \frac{M\sqrt{q}\|f\|_{q'}}{|D|^{1/2}}. \tag{9}$$

Sea ahora A un subconjunto finito de Λ, y sea $(b_j)_{j=1}^{|A|}$ la reordenada decreciente del módulo de $\widehat{f}$ restringida a A. Entonces, usando (9)

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\gamma\in A}\widehat{f}(\gamma)\Big| &\leq \sum_{j=1}^{|A|} b_j \leq M\sqrt{q}\|f\|_{q'}\sum_{j=1}^{|A|}\frac{1}{\sqrt{j}}\\ &\leq M\sqrt{q}\|f\|_{q'}\int_0^{|A|}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq M\sqrt{q}\|f\|_{q'}2\sqrt{|A|},\end{aligned}$$

para todo $f\in\mathrm{L}^{p'}(\mathbf{G})$. Luego por la dualidad entre L^p y $\mathrm{L}^{p'}$, se deduce como se quería que

$$\Big\|\sum_{\gamma\in A}\gamma\Big\|_q \leq 2M\sqrt{q}\sqrt{|A|}.$$

e) $\Longrightarrow$ *f).* Esta implicación es consecuencia inmediata del siguiente lema que establece un método de extracción de casi-independientes dentro de un subconjunto finito de $\mathbf{\Gamma}$. Este lema puede ser deducido usando el Teorema 7.1 y el Lema 7.2 de [P5], más los resultados de [P6] sobre casi-independientes en conjuntos de Sidon. Nosotros lo demostraremos directamente usando una generalización del método de J. Bourgain en [B1].

Recordamos que $\sup_{q>2}\left(\|\cdot\|_q/\sqrt{q}\right)$ es equivalente (ecuación (5) de la sección anterior) a la norma $\|\cdot\|_\psi$ del espacio de Orlicz. Así para cada subcojunto finito A del grupo dual $\mathbf{\Gamma}$, pondremos

$$\psi_A = \sup_{q\geq 2} \frac{\left\|\sum_{\gamma\in A}\gamma\right\|_{\mathrm{L}^q(\mathbf{G})}}{\sqrt{q}}\,, \tag{10}$$

que es equivalente a la norma en $\mathrm{L}^\psi(\mathbf{G})$ de la función $\sum_{\gamma\in A}\gamma$.

Lema 2.4. *Existe una constante $K_3 > 0$ tal que, si A es un subconjunto finito de $\mathbf{\Gamma}\setminus\{1\}$, hay un casi-independiente B incluido en A, con cardinal*

$$|B| \geq K_3\big(|A|/\psi_A\big)^2.$$

Evidentemente, aplicando este lema, si suponemos que Λ verifica *e),* y A es una parte finita de $\Lambda\setminus\{1\}$, tendríamos que $\psi_A \leq C|A|^{1/\alpha}$, y por el lema, habría en A un casi-independiente B de cardinal

$$|B| \geq K_3\left(\frac{|A|}{\psi_A}\right)^2 \geq \frac{K_3}{C^2}|A|^{2-2/\alpha} = \frac{K_3}{C^2}|A|^\varepsilon.$$

La última igualdad por la definición de α y ε en (4). Basta tomar $\delta = K_3/C^2$ para concluir que Λ verifica *f).*

Demostración del Lema 2.4. En la demostración usaremos un método aleatorio para extraer un primer conjunto, donde luego probaremos que hay un casi-independiente del cardinal requerido.

Pongamos entonces $h_A = |A|/\psi_A$, podemos suponer que $h_A \geq 48$ (basta tomar K_3 suficientemente pequeño). Sean además

$$l = \text{ parte entera de } \left(\frac{h_A}{24}\right)^2, \qquad \text{y} \qquad \tau = \frac{h_A\sqrt{l}}{12|A|}. \tag{11}$$

Así l será un entero mayor o igual que 4, y $\tau \in (0,1)$, ya que al tomar $q = 2$ en (10) se tiene que $\psi_A \geq \sqrt{|A|}/\sqrt{2}$. Por último hagamos notar que se tiene la igualdad $6\tau\psi_A/\sqrt{l} = 1/2$.

Para aplicar el método aleatorio, consideramos una familia $\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in A}$ de variables aleatorias independientes, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$, todas con la misma distribución

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_\gamma = 1) &= \tau \\ \mathbb{P}(\xi_\gamma = 0) &= 1 - \tau\,. \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in \Omega$ sea F_ω el polinomio trigonométrico

$$F_\omega(x) = \sum_{m=l}^{|A|} \sum_{\substack{S\subseteq A \\ |S|=m}} \prod_{\gamma\in S} \xi_\gamma(\omega)\big(\gamma(x) + \overline{\gamma}(x)\big)\,, \qquad x \in \mathbf{G}\,.$$

Poniendo dx por $d\mathbf{m}(x)$, y $d\omega$ por $d\mathbb{P}(\omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\mathbf{G}} F_\omega(x)\,dx\,d\omega &= \int_{\mathbf{G}} \int_\Omega F_\omega(x)\,d\omega\,dx \\ &= \sum_{m=l}^{|A|} \tau^m \sum_{\substack{S\subseteq A \\ |S|=m}} \int_{\mathbf{G}} \prod_{\gamma\in S} (\gamma(x) + \overline{\gamma}(x))\ dx\,; \end{aligned}$$

para $|S| = m$, $\prod_{\gamma\in S}(\gamma+\overline{\gamma})$ aparece $m!$ veces en el desarrollo de $\left(\sum_{\gamma\in A} \gamma+\overline{\gamma}\right)^m$, y como cada sumando de ese desarrollo tiene integral no negativa,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=l}^{|A|} \frac{\tau^m}{m!} \int_{\mathbf{G}} \Big(\sum_{\gamma\in A} \gamma(x) + \overline{\gamma}(x)\Big)^m\ dx\,, \\ &\leq \sum_{m=l}^{|A|} \frac{2^m\tau^m}{m!} \Big\|\sum_{\gamma\in A} \gamma\Big\|^m_{\mathrm{L}^m(\mathbf{G})} \leq \sum_{m=l}^{|A|} \frac{\left(2\tau\psi_A\sqrt{m}\right)^m}{m!}\,, \end{aligned}$$

y como $m! \geq (m/3)^m$,

$$\leq \sum_{m=l}^{|A|} \left(\frac{6\tau\psi_A}{\sqrt{m}}\right)^m \leq \sum_{m=l}^{\infty} \left(\frac{6\tau\psi_A}{\sqrt{l}}\right)^m = \sum_{m=l}^{\infty} 2^{-m}\ <\ 1\,.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\int_\Omega \Big(\sum_{\gamma\in A} \xi_\gamma(\omega) - \int_{\mathbf{G}} F_\omega(x)\,dx\Big)\ d\omega \geq \tau|A| - 1\,,$$

y existe al menos un ω_0 tal que llamando $D = \{\gamma \in A : \xi_\gamma(\omega_0) = 1\}$, se tiene

$$|D| - \int F_D(x)\, dx \geq \tau|A| - 1\,, \tag{12}$$

donde F_D es el polinomio

$$F_D(x) = \sum_{m \geq l} \sum_{\substack{S \subseteq D \\ |S|=m}} \prod_{\gamma \in S} (\gamma(x) + \overline{\gamma}(x))\,.$$

Llamaremos una relación en D a todo elemento (n_γ) de $\{-1,0,1\}^D$ para el que se verifique $\prod_{\gamma \in D} \gamma^{n_\gamma} = 1$. La longitud de una relación (n_γ) será $\sum |n_\gamma|$; y diremos que una relación (n_γ) es mayor que otra (n'_γ) si se tienen

$$H = \{\gamma : |n'_\gamma| = 1\} \subseteq \{\gamma : |n_\gamma| = 1\}\,, \qquad \text{y} \qquad n'_\gamma = n_\gamma \quad \text{para todo } \gamma \in H.$$

Es fácil ver que $N = \int F_D(x)\, dx$ es el número de relaciones en D de longitud mayor o igual a l. Sea $\rho = (n_\gamma)$ una relación en D maximal entre las de longitud menor que l; y llamemos D_1 a su soporte, es decir, $D_1 = \{\gamma \in D : |n_\gamma| = 1\}$ que verifica $|D_1| \leq l - 1$.

Cada relación no trivial en $D \setminus D_1$, nos produce, al añadirle ρ, una relación en D estrictamente mayor que ρ, luego de longitud mayor que l, por la maximalidad de ρ. Por tanto en $D \setminus D_1$ hay menos de N relaciones no triviales; si por cada una de éstas quitamos un elemento de $D \setminus D_1$ que esté en su soporte, nos quedaremos al final con un subconjunto B en $D \setminus D_1$ que no tiene relaciones no triviales, un casi-independiente, y cuyo cardinal es

$$|B| \geq |D \setminus D_1| - N \geq |D| - (l-1) - N\,.$$

Luego recordando que $N = \int F_D(x), dx$, y usando (11) y (12) concluimos que

$$|B| \geq \tau|A| - l \geq \frac{h_A\sqrt{l}}{24}\,.$$

Finalmente, puesto que l es la parte entera de $(h_A/24)^2$ y es mayor que 4, se tiene que $l \geq (4/5)(h_A/24)^2$, y el lema se prueba porque

$$|B| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{h_A}{24}\right)^2 = K_3\left(\frac{|A|}{\psi_A}\right)^2.$$

□

Para demostrar la implicación que nos falta, y que constituye nuestra principal aportación a la caracterización de los conjuntos p-Sidon p.s., vamos a usar dos lemas; el primero es de J. Bourgain, y su demostración se puede encontrar en [B1,Lema 2].

Lema 2.5. *Existe una constante $R > 10$, tal que si $B_1, B_2, \ldots, B_L$ es una familia de conjuntos casi-independientes, finitos, y dos a dos disjuntos, que verifican*

$$\frac{|B_{l+1}|}{|B_l|} \geq R \qquad \text{para todo } l = 1, \ldots, L-1;$$

entonces cada B_l contiene un subconjunto C_l de manera que se tienen:

a) $|C_l| > \frac{1}{10}|B_l|$ para todo $l = 1, \ldots, L$.

b) $\bigcup_{l=1}^{L} C_l$ es un conjunto casi-independiente.

Lema 2.6. *Si Λ verifica el apartado f) del Teorema 2.3, y A es un subconjunto finito de $\Lambda \setminus \{1\}$, con $\delta|A|^\varepsilon \geq 2$; entonces existen M conjuntos casi-independientes $B_1, B_2, \ldots, B_M$ dos a dos disjuntos, incluidos en A, y verificándose:*

a) $2|A|^{1-\varepsilon}/\delta \geq M \geq |A|^{1-\varepsilon}/2\delta$.

b) $\delta|A|^\varepsilon \geq |B_m| \geq \delta|A|^\varepsilon/2$ para todo $m = 1, \ldots, M$.

Demostración del Lema 2.6. Por el apartado *f)* del Teorema 2.3, podemos encontrar en A un primer casi-independiente B de cardinal $|B| \geq \delta|A|^\varepsilon$; como $\delta|A|^\varepsilon/2 \geq 1$, podemos extraer de B un subconjunto B_1 que verifique $\delta|A|^\varepsilon/2 \leq |B_1| \leq \delta|A|^\varepsilon$.

Supongamos ya elegidos $B_1, \ldots, B_m$ casi-independientes, disjuntos, cuyos cardinales verifican el apartado *b)*. Se tienen dos posibilidades:

* Si $|A|/2 > \left|\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right|$, escogemos en $A \setminus \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$ un conjunto casi-independiente B_{m+1} con cardinal

$$|B_{m+1}| \geq \delta \left| A \setminus \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j \right|^\varepsilon > \delta \left(\frac{|A|}{2} \right)^\varepsilon \geq \frac{\delta}{2} |A|^\varepsilon,$$

y que podemos suponer también que $|B_{m+1}| \leq \delta|A|^{\varepsilon}$.

** Si $|A|/2 \leq \left|\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right|$, podemos poner $M = m$, ya que

$$\frac{|A|}{2} \leq \left|\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right| \leq M\delta|A|^{\varepsilon}, \qquad \text{y} \qquad \frac{M\delta}{2}|A|^{\varepsilon} \leq |A|;$$

por lo que M verifica el apartado a), y se concluye la prueba.

□

Demostración de f) $\Longrightarrow$ a) del Teorema 2.3. Evidentemente bastará que probemos que existe una constante $C > 0$, tal que para todo $f \in \mathrm{Pol}_{\Lambda\setminus\{1\}}(\mathbf{G})$ se tiene

$$\|f\|_{p,1} \leq C[\![f]\!]. \tag{13}$$

Probaremos que podemos elegir C proporcional a $1/\sqrt{\delta}$.

Por homogeneidad podemos suponer que $\|\widehat{f}\|_{\infty} = 1$. Sean A_j los conjuntos

$$A_j = \{\gamma \in \Lambda : 2^{1-j} \geq |\widehat{f}(\gamma)| > 2^{-j}\}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Pongamos $R_1 = (2R)^{1/\varepsilon}$, donde R es la constante en el Lema 2.5. Definimos la sucesión finita de enteros $(j_l)_{l=1}^{L}$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} j_1 &= 1, \\ j_{l+1} &= \min\{j : j > j_l, \quad |A_j| > R_1|A_{j_l}|\} \end{aligned} \tag{14}$$

si el conjunto donde tomamos el mínimo es no vacío; si este conjunto es vacío, simplemente ponemos $L = l$. Denotemos $N_l = |A_{j_l}|$.

Podemos entonces mayorar la norma de $\widehat{f}$ en $\ell_{p,1}(\mathbf{\Gamma})$ por

$$\|\widehat{f}\|_{p,1} \leq \sum_{j\geq 1} 2^{1-j}\|\chi_{A_j}\|_{p,1} \leq \sum_{l=1}^{L} \sum_{j_l \leq j < j_{l+1}} 2^{1-j}p|A_j|^{1/p},$$

ya que para todo subconjunto finito A de $\mathbf{\Gamma}$ se tiene, por (1),

$$\|\chi_A\|_{p,1} = \sum_{n=1}^{|A|} n^{-1/p'} \leq \int_0^{|A|} \frac{1}{x^{1/p'}}\,dx = p|A|^{1/p}.$$

Teniendo en cuenta que $|A_j| \leq R_1|A_{j_l}|$, para $j_l \leq j < j_{l+1}$ podemos acotar

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{p,1} &\leq \sum_{l=1}^{L} R_1^{1/p} 2^{-j_l} |A_{j_l}|^{1/p} \sum_{j_l \leq j} 2^{1-j+j_l} \\ &\leq 4R_1^{1/p} \sum_{l=1}^{L} 2^{-j_l} N_l^{1/p} . \end{aligned} \tag{15}$$

Para poder aplicar el Lema 2.6, llamemos T al primer índice l tal que $\delta N_l^{\varepsilon} \geq 2$. Eventualmente puede que no exista este T, ponemos entonces $T = L + 1$. Descomponemos la cota de (15) en dos y acotamos cada una. Primero tenemos, sabiendo que $1/p = 1/2 + \varepsilon/2$, y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (14), que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{T-1} 2^{-j_l} N_l^{1/p} &\leq \left(\sum_{l=1}^{T-1} 2^{-2j_l} N_l\right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{T-1} N_l^{\varepsilon}\right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_2 \left(\sum_{l=1}^{T-1} \left(\frac{N_{T-1}}{R_1^{T-l-1}}\right)^{\varepsilon}\right)^{1/2} \\ &\leq [\![f]\!] N_{T-1}^{\varepsilon/2} \left(\sum_{l \geq 0} R_1^{-l\varepsilon}\right)^{1/2} , \end{aligned}$$

y como $R_1^{\varepsilon} = 2R > 20$, y $N_{T-1}^{\varepsilon} < 2/\delta$,

$$\leq 2\frac{1}{\sqrt{\delta}}[\![f]\!] . \tag{16}$$

Por otro lado para $l \geq T$, podemos aplicar el Lema 2.6 al conjunto A_{j_l}, obteniendo M_l subconjuntos casi-independientes de A_{j_l} dos a dos disjuntos

$$B_{l,1}, B_{l,2}, \ldots , B_{l,M_l}$$

verificándose

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{2} N_l^{\varepsilon} \leq |B_{l,m}| \leq \delta N_l^{\varepsilon} && m = 1, \ldots , M_l; \\ &\frac{N_l^{1-\varepsilon}}{2\delta} \leq M_l \leq \frac{2N_l^{1-\varepsilon}}{\delta} && l = T, \ldots , L . \end{aligned} \tag{17}$$

Teniendo en cuenta que $N_{l+1} \geq R_1 N_l$, se tienen, por las últimas desigualdades, que para $l < L$,

$$\frac{M_L}{M_l} \geq \frac{R_1^{1-\varepsilon}}{4} \geq \frac{1}{4}, \qquad \frac{|B_{l+1,m}|}{|B_{l,m'}|} \geq \frac{R_1^{\varepsilon}}{2} = R . \tag{18}$$

Por la primera desigualdad de (18), para cada $l = T, \ldots, L-1$ podemos construir una aplicación $\phi_l \colon \{1, \ldots, M_L\} \to \{1, \ldots, M_l\}$ que verifique

$$|\phi_l^{-1}(m)| \leq 4\frac{M_L}{M_l} \qquad \text{para todo } m \in \{1, \ldots, M_l\}.$$

Por la segunda desigualdad en (18), para cada $m \in \{1, \ldots, M_L\}$, podemos aplicarle el Lema 2.5 a la sucesión finita

$$B_{T,\phi_T(m)}, \ldots, B_{L-1,\phi_{L-1}(m)}, B_{L,m}\,;$$

obteniendo para cada $l \in \{T, \ldots, L\}$, y cada $m \in \{1, \ldots, M_L\}$ un casi-independiente $C_{l,m}$ tal que

$$|C_{l,m}| > \frac{1}{10}|B_{l,\phi_l(m)}| \geq \frac{\delta N_l^{\varepsilon}}{20}, \qquad l = T, \ldots, L \tag{19}$$

$$\bigsqcup_{l=T}^{L} C_{l,m} \quad \text{es un casi-independiente para cada } m = 1, \ldots; M_L. \tag{20}$$

Para cada $m \in \{1, \ldots, M_L\}$, sea g_m el polinomio trigonométrico

$$g_m = \sum_{l=T}^{L} \left(\frac{M_l}{4M_L}\right)^{1/2} 2^{-j_l} \sum_{\gamma \in C_{l,m}} \gamma\,.$$

Por (20), el polinomio g_m tiene su espectro en un casi-independiente, y por lo que se prueba en [P5,pag.703], se tendrá $\|\widehat{g_m}\|_1 \leq 4[\![g_m]\!]$, por lo tanto, usando (17) y (19)

$$\begin{aligned}
4[\![g_m]\!] &\geq \sum_{l=T}^{L} |C_{l,m}| \left(\frac{M_l}{4M_L}\right)^{1/2} 2^{-j_l} \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{M_L}} \sum_{l=T}^{L} \frac{\delta}{20} N_l^{\varepsilon} \left(\frac{N_l^{1-\varepsilon}}{2\delta}\right)^{1/2} 2^{-j_l} \\
&= \frac{\sqrt{\delta}}{40\sqrt{2}\sqrt{M_L}} \sum_{l=T}^{L} N_l^{1/p} 2^{-j_l}\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

Para cada $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ se tiene que

$$|\widehat{f}(\gamma)|^2 \geq \sum_{m=1}^{M_L} |\widehat{g_m}(\gamma)|^2\,. \tag{22}$$

En efecto, si γ está en algún B_{l,m_o}, no puede estar en otro, porque son disjuntos dos a dos, y se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M_L} |\widehat{g_m}(\gamma)|^2 &= 2^{-2j_l}\frac{M_l}{4M_L}|\{m : \gamma \in C_{l,m}\}| \\ &\leq 2^{-2j_l}\frac{M_l}{4M_L}|\phi_l^{-1}(m_o)| \leq 2^{-2j_l} \leq |\widehat{f}(\gamma)|^2 ;\end{aligned}$$

y si γ no está en ningún $B_{l,m}$, es obvio (22).

Estamos en disposición de aplicar la Proposición 1.1 a f y a las g_m gracias a (22). Se deduce

$$K_1[\![f]\!] \geq \left(\sum_{m=1}^{M_L}[\![g_m]\!]^2\right)^{1/2},$$

y por (21),

$$\geq \frac{\sqrt{\delta}}{160\sqrt{2}}\sum_{l=T}^{L} N_l^{1/p}2^{-j_l} .$$

Uniendo esto último a (16) se tiene,

$$\sum_{l=1}^{L} N_l^{1/p}2^{-j_l} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\delta}} + \frac{160K_1\sqrt{2}}{\sqrt{\delta}}\right)[\![f]\!],$$

lo que junto a (15) prueba (13) y acaba la demostración del teorema al tenerse

$$\|\widehat{f}\|_{p,1} \leq \frac{4R_1^{1/p}(2+160K_1\sqrt{2})}{\sqrt{\delta}}[\![f]\!] .$$

□

Observaciones.

1. Como se dijo antes, el que Λ sea p-Sidon p,s, entraña la existencia de una constante S, que es la norma de la transformada de Fourier como operaador de $C_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$ en $\ell_p(\mathbf{G})$. En las demostraciones que hemos dado probamos que la constante C de *d)* es menor que S; luego hemos probado que el δ del apartado *f)* es proporcional a $1/C^2$; y por último al recuperar *a)* de *f)* hemos encontrado un S proporcional a $1/\sqrt{\delta}$; es decir, al volver a *a)*, llegamos al mismo orden de magnitud para S, por lo tanto las relaciones que hemos dado entre S, C, y δ son , en cuanto a sus órdenes de magnitud, inmejorables.

2. Se podría haber demostrado la equivalencia *a)* $\Longleftrightarrow$ *d)* usando la caracterización del dual de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$. Así, por ejemplo, tenemos que *d)* implica que $\ell_\alpha(\Lambda)$ se inyecta en $\mathrm{L}^{\psi}_{\Lambda}(\mathbf{G})$, por lo que teniendo en cuenta que $\ell_{p'}$ son exactamente los multiplicadores de ℓ_2 en ℓ_α, tendríamos que $\ell_{p'}(\Lambda)$ está en $M_{2,\psi}(\mathbf{G})$, el dual de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$, trasponiendo deduciríamos *a)*. Analogamente se podría hacer la recíproca.

3. También se podría haber deducido *f)* directamente de cualquiera de los tres primeros apartados usando el Teorema 7.1 de [P5], y los resultados de [P6]. Veremos una generalización de ese teorema, con una demostración diferente, en el próximo capítulo (Corolario IV.1.4).

III.3. Consecuencias de la caracterización. Complementos.

Comenzamos esta sección con dos resultados en grupos productos. Si G_1, $G_2,\ldots, G_N$ son grupos abelianos compactos, de duales $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$; el producto cartesiano

$$\mathbf{G} = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_N$$

es también un grupo abeliano compacto cuando se le dota de la suma coordenada a coordenada; su dual se identifica al producto cartesiano de sus duales, los Γ_j. Así, si $\Lambda_j \subset \Gamma_j$, para $j = 1,\ldots,N$, sabiendo algunas propiedades de lagunaridad de cada Λ_j cabe preguntarse cuál verifica su producto $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_N$. En este contexto está nuestro primer resultado corolario del Teorema 2.3.

Corolario 3.1. *Si cada conjunto Λ_j es un conjunto p_j-Sidon p.s. en Γ_j, con $p_j \in [1,2)$, para todo $j = 1,\ldots,N$; entonces su producto*

$\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_N$ *es un conjunto p-Sidon p.s. en el grupo producto, para* p *verificando*

$$\frac{p}{2-p} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j}{2-p_j}\,.$$

Demostración. Por supuesto utilizaremos la caracterización *f)* del Teorema 2.3. Podemos suponer que ningún Λ_j contiene al 1. Si esto no es así, consideramos para cada j un $\gamma_j \in \Gamma_j \setminus \Lambda_j$, y aplicamos la demostración al producto de los conjuntos $\overline{\gamma_j} \cdot \Lambda_j$. Puesto que multiplicar por $\overline{\gamma_j}$ establece una isometría en $C^{p.s.}(G_j)$, las hipótesis no cambian; y de la misma manera para recuperar la tesis, bastará, en el grupo producto, multiplicar por $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$.

Pongamos $\varepsilon_j = \varepsilon(p_j)$ como en (4) de la sección anterior. Tenemos que existen $\delta_j > 0$ tal que cada Λ_j verifica el apartado *f)* del Teorema 2.3; tomando $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$, este δ valdrá para todos.

Sea A un subconjunto finito de $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_N$. Lamemos A_j a la proyección de A en Λ_j. Cada A_j contiene un casi-independiente B_j de cardinal

$$|B_j| \geq \delta |A_j|^{\varepsilon_j}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

En A podemos tomar un conjunto $\widetilde{B_j}$ del mismo cardinal que B_j, y tal que la j-ésima proyección sea una biyección entre $\widetilde{B_j}$ y B_j. Este $\widetilde{B_j}$ es un conjunto casi-independiente, ya que no tiene relaciones no triviales, al fallar siempre la coordenada j-ésima. Tomando el $\widetilde{B_j}$ de mayor cardinal encontramos en A un casi-independiente B de cardinal

$$|B| \geq \max_{1 \leq j \leq N} \delta |A_j|^{\varepsilon_j}\,. \tag{1}$$

Para cada j, existe $x_j \in [0,1]$ tal que se tiene $|A_j| = |A|^{x_j}$. Como por otro lado $|A| \leq |A_1||A_2| \cdots |A_N|$, entonces se tiene $\sum_{j=1}^{N} x_j \geq 1$. De (1) se deduce

$$|B| \geq \delta |A|^{\max\{x_j \varepsilon_j\}} \geq \delta |A|^{\varepsilon}\,,$$

donde

$$\varepsilon = \min_{\substack{0 \leq t_j \leq 1 \\ \sum t_j = 1}} \max_{1 \leq j \leq N} t_j \varepsilon_j\,.$$

Es fácil ver que este mínimo se alcanza en aquel (t_j) que hace que todos los productos $t_j\varepsilon_j$ sean iguales, lo que nos da la relación

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_j};$$

lo que acaba la demostración usando de nuevo el apartado *f)* del Teorema 2.3.

$\square$

El corolario precedente en particular nos da que el producto cartesiano de N conjuntos de Sidon es $\frac{2N}{N+1}$-Sidon p.s.; pero en este caso se puede decir más. Se dice que un subconjunto Λ de $\mathbf{\Gamma} = \widehat{\mathbf{G}}$ es *estacionario* [P4] si se da la inclusión $\mathcal{C}_\Lambda(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{C}_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$. En subconjuntos de un conjunto estacionario son evidentemente equivalentes las nociones de p-Sidon y p-Sidon p.s..

Un resultado de G. Pisier [P4] asegura que si S es el producto cartesiano de N conjuntos de Sidon S_1, S_2, ..., S_N; entonces S es un conjunto estacionario, y por lo visto ante será $\frac{2N}{N+1}$-Sidon, que es un resultado de [ER] para $N = 2$, y de [JW] en el caso general.

En la siguiente proposición profundizamos en el tema dando una nueva demostración de un resultado de R. Blei [Ble]. Este resultado, combinado a los de [BK], permite dar, para cada $p \in (1,2)$, ejemplos de conjuntos p-Sidon que no son r-Sidon para ningún $r < p$. Para cada $p \in [1,2)$ pongamos

$$d = d(p) = \frac{1}{\varepsilon(p)} = \frac{p}{2-p} \in [1, +\infty).$$

Se tiene entonces

Proposición 3.2. *Sea S el producto cartesiano $S = \prod_{j+1}^{N} S_j$ de N conjuntos de Sidon infinitos S_1, S_2, ..., S_N. Un subconjunto Λ de S es un conjunto p-Sidon si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre que tomemos subconjuntos A_j de S_j, con $|A_j| = n$, para cada $j = 1, \ldots, N$; se tiene*

$$\left|\Lambda \cap A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N\right| \leq Cn^d. \tag{2}$$

Demostración. Al igual que en la demostración del corolario anterior, podemos suponer que $1 \notin S_j$, para cada j. Puesto que estamos dentro de un conjunto estacionario, basta ver que la condición es necesaria y suficientre para que Λ sea un conjunto p-Sidon p.s.. Vamos a probar primero que (2) es suficiente, esto será análogo al corolario anterior. Podemos encontrar un $\delta > 0$, tal que para todo $j = 1, \ldots, N$ y todo conjunto finito A_j de S_j, existe un casi-independiente B_j incluido en A_j de cardinal $|B_j| \geq \delta |A_j|$.

Si A es ahora una parte finita de Λ, por argumentos similares a los de la prueba del Corolario 3.1, llamando A_j a cada proyección j-ésima de A, hay un casi-independiente B dentro de A con cardinal

$$|B| \geq \delta \max_{1 \leq j \leq N} |A_j| \,.$$

Ahora bien, prolongando si es necesario cada A_j, podemos suponer que tienen todos el mismo cardinal n, y entonces por (2),

$$|A| \leq Cn^d \leq \frac{C}{\delta^d} |B|^d \,;$$

es decir, $|B| \geq \delta' |A|^\epsilon$, y por el apartado *f)* del Teorema 2.3, Λ será un conjunto p-Sidon p.s..

La otra implicación se basa en el siguiente hecho que probamos luego, que es consecuencia de la llamada "condición de malla":

(3) *Existe para cada N una constante C_N tal que si para cada $j = 1, \ldots, N$, A_j es un subconjunto de Γ_j de cardinal n; entonces todo casi-independiente B incluido en $A_1 \times \cdots \times A_N$ tiene cardinal $|B| \leq C_N n$.*

Con (3) la prueba de la otra implicación es fácil. Sea Λ un conjunto p-Sidon p.s. de S, y que verifica el apartado *f)* del Teorema 2.3 para $\delta > 0$. Tomemos, para cada j, un subconjunto A_j de S_j, de cardinal $|A_j| = n$, y denotemos $A = \Lambda \cap A_1 \times \cdots \times A_N$. Hay un casi-independiente B en A de cardinal $|B| \geq \delta |A|^\epsilon$; luego por (3), se concluye

$$|A| \leq \left(\frac{|B|}{\delta} \right)^d \leq \left(\frac{C_N}{\delta} \right)^d n^d \,.$$

La prueba de (3) es usar que todo conjunto casi-independiente B es un conjunto de Sidon de constante de Sidon menor o igual que 8, y aplicar el Corolario 6.5 de [LR], que es la condición de malla para un conjunto de Sidon. Por esta condición se tendrá, si B es casi-independiente,

$$|M_s(H) \cap B| \leq \kappa |H| \log s \,, \qquad \text{para todo entero } s \geq 2, \text{ y todo } H \subset \mathbf{\Gamma}; \tag{4}$$

donde κ es una constante absoluta, y $M_s(H)$ es el subconjunto de $\mathbf{\Gamma}$,

$$M_s(H) = \left\{ \prod_{\gamma \in H} \gamma^{n_\gamma} : (n_\gamma) \in \mathbf{Z}^H , \quad \sum_{\gamma \in H} |n_\gamma| \leq s \right\}.$$

Sea $I_j : \Gamma_j \to \mathbf{\Gamma} = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_N$ la inyección canónica que envía cada $x \in \Gamma_j$ en el elemento de $\mathbf{\Gamma}$ que tiene todas sus coordenadas 1, salvo la j-ésima que es x. Es fácil entonces comprobar que si B es un subconjunto casi-independiente de $A_1 \times \cdots \times A_N$; entonces

$$B \subseteq M_N(H), \qquad \text{con} \quad H = \bigcup_{j=1}^{N} I_j(A_j).$$

Siendo cada A_j de cardinal n, de (4) se deduce (3) con $C_N = \kappa N \log N$.

□

Vamos ahora a tratar un par de cuestiones que surgieron al contemplar la equivalencia de los tres primeros apartados del Teorema 2.3. La primera es probar que la equivalencia entre *a)* y *b)* es cierta en el caso $p = 2$; es decir, es obvio que todo subconjunto de $\mathbf{\Gamma}$ es 2-Sidon p.s.; lo que no es tan claro es que siga siendo cierto que $\widehat{f} \in \ell_{2,1}(\mathbf{\Gamma})$, para toda $f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$. Vamos a probar esto usando el siguiente resultado que se puede encontrar en [MP,p.130]:

Lema 3.3. *Si $f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$, y (a_n) es la sucesión reordenada decreciente de $(|\widehat{f}(\gamma)|)$; entonces se verifica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\sum_{m \geq n} a_m^2\right)^{1/2}}{n(\log n)^{1/2}} < +\infty .$$

Corolario 3.4 *Si $f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$, entonces $\widehat{f} \in \ell_{2,1}(\mathbf{\Gamma})$.*

Demostración. Tenemos que probar que si (a_n) es la sucesión reordenada decreciente de $\big(|\widehat{f}(\gamma)|\big)$, entonces la serie $\sum a_n/\sqrt{n}$ es convergente. Mayoramos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{n}\log n} 2 \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} ,$$

intercambiando el orden de sumación,

$$\leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{n\geq m}a_n\frac{1}{\sqrt{n}\log n},$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}\Big(\sum_{n\geq m}a_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n\geq m}\frac{1}{n(\log n)^2}\Big)^{1/2}$$

$$\leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}\Big(\sum_{n\geq m}a_n^2\Big)^{1/2}\Big(2\int_m^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx\Big)^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Big(\sum_{n\geq m}a_n^2\Big)^{1/2}}{m(\log m)^{1/2}}$$

que es finito por el Lema 3.3.

□

El anterior corolario no es cierto para $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ si $\mathbf{G}$ no es finito; ya que sobre un conjunto de Sidon Λ, la transformada de Fourier de las funciones continuas interpola a todo $\ell_2(\Lambda)$[R2]; es decir, si $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ está en $\ell_2(\Lambda)$, existe una función continua $f\in\mathcal{C}(\mathbf{G})$ tal que $\widehat{f}(\gamma)=a_\gamma$ para todo $\gamma\in\Lambda$.

El apartado *c)* del Teorema 2.3 es equivalente a decir que existe una constante $C>0$ tal que para todo subconjunto finito A de Λ, se tiene

$$\Big[\!\!\Big[\sum_{\gamma\in A}\gamma\Big]\!\!\Big]\leq C|A|^{1/p}. \tag{5}$$

Para ver esto basta recordar que las transformadas de Fourier de las funciones de $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbf{G})$ forman un retículo de Banach sobre $\mathbf{\Gamma}$, y usar la definición de la norma $\|\cdot\|_{p,\infty}$.

Por tanto (5) nos dice que para toda una gama de normas $\|\cdot\|$ en $\mathrm{Pol}(\mathbf{G})$ (las normas $\|\cdot\|_{\ell_{p,q}(\mathbf{\Gamma})}$), la condición "existe una constante $C>0$ tal que $\|\cdot\|\leq C[\![\cdot]\!]$ en las funciones del tipo $\sum_{\gamma\in A}\gamma$ par todo subconjunto finito A de Λ", implica que "existe una constante $C'>0$ tal que $\|\cdot\|\leq C'[\![\cdot]\!]$ en todo $\mathrm{Pol}_\Lambda(\mathbf{G})$".

Nos preguntamos si éste es un fenómeno general; o dicho de otra manera, si tiene interior no vacío en $\mathcal{C}_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$ la clausura absolutamente convexa y cerrada de las normalizadas de las funciones del tipo $\sum_{\gamma\in A}\gamma$. Esto es trivialmente cierto cuando Λ es un conjunto de Sidon, ya que entonces $\mathcal{C}_\Lambda^{p.s.}(\mathbf{G})$ es isomorfo a $\ell_1(\Lambda)$. El siguiente ejemplo, con el que se concluye el capítulo, muestra que para

$\Lambda = \mathbb{Z}$, el dual del toro $\mathbb{T}$, esto no es así. El ejemplo pondrá de manifiesto que el fenómeno de arriba no es cierto para una cierta norma en Pol($\mathbb{T}$) que convierte a los caracteres en una sucesión básica incondicional.

Ejemplo 3.5. *Existe una norma $\|\cdot\|$ en* Pol($\mathbb{T}$), *y una constante* $C > 0$, *tales que*

$$\Big\|\sum_{n\in A} u^n\Big\| \leq C\Big[\!\!\Big[\sum_{n\in A} u^n\Big]\!\!\Big], \tag{6}$$

para todo subconjunto finito A de $\mathbb{Z}$; pero, sin embargo, la norma $[\![\cdot]\!]$ no domina a la norma $\|\cdot\|$ en Pol($\mathbb{T}$).

Demostración. Existe una constante absoluta $C > 0$, tal que para todo grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$, y todo subconjunto finito A de su dual $\mathbf{\Gamma}$, se tiene

$$C\Big[\!\!\Big[\sum_{\gamma\in A}\gamma\Big]\!\!\Big] \geq \sqrt{(|A|+1)\log(|A|+1)}. \tag{7}$$

Esto es fácil de probar usando el Teorema 1.2; ya que usando las definiciones previas a dicho teorema para $f = \sum_{\gamma\in A}\gamma$, se tiene

$$\mathrm{m}(s) = \mathbf{m}\big(\{x \in \mathbf{G} : 2|A| - 2\sum_{\gamma\in A}\Re\gamma(x) < s^2\}\big),$$

y si $s \in (0, \sqrt{|A|})$,

$$\mathrm{m}(s) \leq \mathbf{m}\big(\{x \in \mathbf{G} : \frac{|A|}{2} < \sum_{\gamma\in A}\Re\gamma(x)\}\big) \leq \frac{4}{|A|^2}\int_{\mathbf{G}}\Big(\sum_{\gamma\in A}\Re\gamma(x)\Big)^2 d\mathbf{m} \leq \frac{4}{|A|}.$$

Por el Teorema 1.2, si $|A| > 4$,

$$K_2\Big[\!\!\Big[\sum_{\gamma\in A}\gamma\Big]\!\!\Big] \geq \int_0^{\sqrt{|A|}} \sqrt{\log(1/\mathrm{m}(s))}\,ds \geq \sqrt{|A|}\sqrt{\log(|A|/4)};$$

lo que prueba (7).

Sea (c_n) la sucesión decreciente definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$c_n = \sqrt{(n+1)\log(n+1)} - \sqrt{n\log n} \geq \frac{\sqrt{\log n}}{2\sqrt{n}}.$$

Para $f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{T})$, si (a_n) es la reordenada decreciente de $(|\widehat{f}(m)|)_{m\in\mathbb{Z}}$, definimos

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \sup_{\substack{\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z} \\ \phi \text{ inyectiva}}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\widehat{f}(\phi(n))| .$$

Por su definición y por (7), esta norma sobre $\mathrm{Pol}(\mathbb{T})$ verifica (6).

Para ver que $[\![\cdot]\!]$ no domina a la norma $\|\cdot\|$ en $\mathrm{Pol}(\mathbb{T})$, vamos a usar un resultado clásico de Paley y Zygmund (ver [MP,pag. 3]), que podemos traducir diciendo:

(8) *Si (a_m) es una sucesión de números reales verificando para algún $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_m^2 (\log m)^{1+\varepsilon} < +\infty ; \qquad y \quad f(u) = \sum_{m\geq 2} a_m u^m , \quad u \in \mathbb{T} ;$$

entonces $f \in \mathcal{C}^{p.s.}(\mathbb{T})$.

Si en (8) tomamos $a_m = 1/\sqrt{m}(\log m)^{3/2}$, tenemos una función f en $\mathcal{C}^{p.s.}(\mathbb{T})$ para la que $\|f\| = \infty$, con lo que se concluye la prueba de este ejemplo.

$\square$

CAPITULO IV

Relaciones entre algunas propiedades de conjuntos finitos de caracteres.

IV.1. Casi-independientes de cardinal máximo.

En el presente capítulo estudiaremos ciertas cantidades de tipo aritmético o funcional, asociadas a un conjunto finito de caracteres; pretendemos investigar las relaciones entre ellas. Estas cantidades han sido utilizadas con éxito, por autores como G. Pisier o J. Bourgain, para el estudio de las propiedades de los conjuntos de Sidon. Aquí pretendemos examinarlas en el caso de un conjunto finito cualquiera de caracteres.

En el capítulo anterior ya se puso de manifiesto que algunas propiedades funcionales de un conjunto Λ de caracteres, vienen determinadas por propiedades aritméticas o funcionales de sus partes finitas. En concreto, al establecer la caracterización de los conjuntos p-Sidon p.s., vimos que era interesante saber que cada parte finita contenía un casi-independiente de cardinal suficientemente grande.

Como a lo largo del capítulo precedente, $\mathbf{G}$ será un grupo abeliano compacto, y $\mathbf{\Gamma}$ su grupo dual. Si A es una parte finita de $\mathbf{\Gamma}$, denotaremos por $q(A)$ al *máximo cardinal de los subconjuntos casi-independientes de A;* es decir,

$$q(A) = \max\{|B| : B \subseteq A\,, \quad B \text{ casi-independiente}\}\,.$$

En la presente sección estudiaremos esta cantidad $q(A)$, relacionándola con la norma de la identidad de $\mathrm{L}^2_A(\mathbf{G})$ a $\mathcal{C}^{p.s.}_A(\mathbf{G})$, y con la construcción de ciertos polinomios trigonométricos.

Comenzaremos dando un lema para la extracción de casi-independientes cuya demostración será análoga a la del Lema III.2.4. En su lugar también podríamos utilizar más adelante los resultados de G. Pisier en [P6] que son menos restrictivos; pero para los primeros propósitos este lema nos servirá.

Lema 1.1. *Sea $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ un conjunto de n caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$. Si se tiene*

$$\int_{\mathbf{G}} \prod_{j=1}^{n} (1 + \Re\gamma_j)\, d\mathrm{m} \le \left(1 + \frac{1}{4e}\right)^n ;$$

entonces existe un casi-independiente B incluido en $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ cuyo cardinal es

$$|B| \ge \frac{1}{5e} n\,.$$

Demostración. Al igual que en la prueba del Lema III.2.4, poniendo $\kappa = 1/2e$, y $l = \kappa n/2$, consideremos una sucesión de variables aleatorias independientes $(\xi_j)_{j=1}^n$, equidistribuidas según la ley

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\xi_j = 1\big) &= \kappa\,, \\ \mathbb{P}\big(\xi_j = 0\big) &= 1 - \kappa\,, \qquad \text{para todo } j = 1, 2, \ldots, n; \end{aligned}$$

y el polinomio aleatorio

$$F_\omega(x) = \sum_{m \ge l} \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |S| = m}} \prod_{j \in S} \xi_j(\omega)\big(\gamma_j(x) + \overline{\gamma_j}(x)\big)\,, \quad x \in \mathbf{G}\,.$$

Podemos acotar entonces, escribiendo dx por $d\mathrm{m}(x)$ y $d\omega$ por $d\mathbb{P}(\omega)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\mathbf{G}} F_\omega(x)\,dx\,d\omega &= \sum_{m\geq l}\left(\frac{1}{e}\right)^m \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |S|=m}} \int_{\mathbf{G}} \prod_{j\in S} \Re\gamma_j(x)\,dx \\ &\leq \left(\frac{1}{e}\right)^l \int_{\mathbf{G}} \prod_{j=1}^n (1+\Re\gamma_j)\,dx \\ &\leq \left(\frac{1}{e}\right)^l \left(1+\frac{1}{4e}\right)^n < 1,\end{aligned}$$

la última desigualdad porque

$$n\log\left(1+\frac{1}{4e}\right) < \frac{n}{4e} = l.$$

Siguiendo el mismo razonamiento de la demostracioón del Lema III.2.4, se concluye entonces que existe un casi-independiente B en $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\}$ de cardinal

$$|B| \geq \kappa n - l - 1 = \frac{n}{4e} - 1 \geq \frac{n}{5e},$$

si $n \geq 20e$. Para $n \leq 20e$ el resultado es obvio.

□

Vamos a aplicar enseguida este último resultado a la construcción de un polinomio trigonométrico cuyas propiedades nos permitirá relacionar $q(A)$ con la norma de un operador. En el Teorema 1.6 extenderemos el resultado que damos a continuación.

Lema 1.2. *Sea A un conjunto finito de caracteres de $\mathbf{G}$. Existe un polinomio $P \in \mathrm{Pol}(\mathbf{G})$, verificando:*

a) $\|P\|_1 = 1$.

b) $1 \geq \widehat{P}(\gamma) \geq 1/4e$ *para todo* $\gamma \in A$.

c) $\log_2 \|P\|_\infty \leq 5e\,q(A)$.

Demostración. Vamos a construir el polinomio $P_k = \prod_{j=1}^k (1+\Re\gamma_j)$, escogiendo uno a uno los caracteres γ_j. Partimos de $P_0 = 1$. Supuesto ya formado el P_k. Si existe algún caracter $\gamma \in A$ tal que

$$\widehat{P_k}(\gamma) < \frac{1}{4e}\widehat{P_k}(1),$$

escogemos uno de ellos como γ_{k+1} y formamos con él el polinomio P_{k+1}.

Este proceso termina en un número de pasos inferior a $|A|$. En efecto, en P_k cada uno de los caracteres γ_j, $j = 1, 2, \dots, k$ tiene coeficiente mayor o igual a $\widehat{P_k}(1)/2$. Para probarlo sea $R = (1 + \Re\gamma_0)Q$ donde Q es un polinomio de la forma $Q = \prod_{j=1}^{k}(1 + \Re\gamma_j)$. Se tiene

$$\widehat{R}(\gamma_0) = \widehat{Q}(\gamma_0) + \frac{1}{2}\widehat{Q}(1) + \frac{1}{2}\widehat{Q}(\gamma_0^2);$$

y por lo tanto, como $\widehat{Q} \geq 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{R}(1) &= \widehat{Q}(1) + \frac{1}{2}\widehat{Q}(\overline{\gamma_0}) + \frac{1}{2}\widehat{Q}(\gamma_0) = \widehat{Q}(1) + \widehat{Q}(\gamma_0)\\ &\leq 2\Big(\widehat{Q}(\gamma_0) + \frac{1}{2}\widehat{Q}(1) + \frac{1}{2}\widehat{Q}(\gamma_0^2)\Big) = 2\widehat{R}(\gamma_0).\end{aligned}$$

De esto se deduce que cada elemento de A se usa a lo más una vez en la construcción de P_k.

Así llegamos a construir un polinomio $P_n = \prod_{j=1}^{n}(1+\Re\gamma_j)$ con $\gamma_j \in A$ para todo j, y tal que

$$\widehat{P_n}(\gamma) \geq \frac{1}{4e}\widehat{P_n}(1), \quad \text{para todo } \gamma \in A; \qquad \|P_n\|_\infty = 2^n. \tag{1}$$

Se tiene además

$$\|P_n\|_1 \leq \left(1 + \frac{1}{4e}\right)^n; \tag{2}$$

puesto que para cada $j < n$ se tiene, por la elección de γ_{j+1},

$$\|P_{j+1}\|_1 = \widehat{P_{j+1}}(1) = \widehat{P_j}(1) + \widehat{P_j}(\gamma_{j+1}) < \Big(1 + \frac{1}{4e}\Big)\widehat{P_j}(1) = \Big(1 + \frac{1}{4e}\Big)\|P_j\|_1 .$$

El polinomio $P = P_n/\|P_n\|_1$ verifica obviamente la condición *a)*, y gracias a (1) también verifica *b)*. Usando el lema anterior, de (2) se deduce que en A hay un casi-independiente B con cardinal $|B| \geq n/5e$; es decir,

$$q(A) \geq \frac{n}{5e};$$

lo que, unido al hecho de que $\|P\|_1 \geq 1$, implica por la segunda parte de (1), que P verifica *c)*, y concluye la prueba.

□

En el anterior lema, la acotación de $\|P\|_\infty$ en *c)* es esencialmente la mejor posible; ya que si P es un polinomio con $\|P\|_1 = 1$, y verificando $|\widehat{P}(\gamma)| \geq \alpha > 0$ para todo γ en un casi-independiente B; escogiendo unos adecuados a_γ de módulo unidad, y poniendo $h = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma \gamma$, se tiene

$$\alpha|B| \leq \sum_{\gamma \in B} \widehat{P}(\gamma)\widehat{h}(\gamma) = P * h(0) \leq \|P\|_{p'} \|h\|_p \leq 4\sqrt{p}\sqrt{|B|}\|P\|_\infty^{1/p},$$

y tomando $p = \log \|P\|_\infty$,

$$\alpha\sqrt{|B|} \leq 4e\sqrt{\log \|P\|_\infty}.$$

Una consecuencia de la anterior construcción es el siguiente teorema que relaciona $q(A)$ con la norma de la identidad considerada como un operador de $\mathrm{L}^2_A(\mathbf{G})$ a $\mathcal{C}^{p.s.}_A(\mathbf{G})$. Este teorema es el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.3. *Existe una constante $K_4 \geq 1$ tal que si A es un conjunto finito de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$, que no contiene al 1 ($A \subset \Gamma \setminus \{1\}$); y si $i: \mathrm{L}^2_A(\mathbf{G}) \to \mathcal{C}^{p.s.}_A(\mathbf{G})$ es el operador identidad, se tiene*

$$\frac{1}{K_4} q(A) \leq \|i\|^2 \leq K_4 q(A).$$

Demostración. Si B es un casi-independiente incluido en A con $|B| = q(A)$, entonces para $f = \sum_{\gamma \in B} \gamma$ se tienen

$$4[\![f]\!] \geq |B|, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{|B|}, \qquad f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G}).$$

Se tiene pués que $\|i\|^2 \geq q(A)/16$.

Por otro lado, sea P el polinimio construido en el Lema 1.2, y sea $f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$. Por *b)* en este lema, y por el principio de contracción (ecuación (3) de la sección III.1), se tiene

$$[\![f]\!] \leq 8e \left[\!\!\left[\sum_{\gamma \in A} \widehat{P}(\gamma)\widehat{f}(\gamma)\gamma\right]\!\!\right] = 8e\, [\![f * P]\!]. \tag{3}$$

Recordando la definición de la norma $[\![\cdot]\!]$, pongamos para cada ω del espacio de probabilidad

$$f_\omega = \sum_{\gamma \in A} r_\gamma(\omega)\widehat{f}(\gamma)\gamma\,,$$

donde (r_γ) es la sucesión de las variables de Rademacher; y escribamos $\mathbb{E}$ por la esperanza de una variable aleatoria. Tenemos

$$[\![f * P]\!] = \mathbb{E}_\omega \|f_\omega * P\|_\infty \leq \|P\|_{p'} \mathbb{E}_\omega \|f_\omega\|_p\,, \tag{4}$$

donde $p \geq 2$, y p' es su exponente conjugado.

Al igual que en el capítulo anterior, usamos la desigualdad de Khintchine para acotar

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\omega \|f_\omega\|_p &\leq \left(\int_\Omega \int_{\mathbf{G}} \Big|\sum_{\gamma \in A} r_\gamma(\omega)\widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\Big|^p dm(x)\, d\omega\right)^{1/p} \\ &\leq \sqrt{p}\Big(\sum_{\gamma\in A} |\widehat{f}(\gamma)|^2\Big)^{1/2} = \sqrt{p}\|f\|_2\,.\end{aligned}$$

Por otro lado, por las propiedades de P, se tiene

$$\|P\|_{p'} \leq \|P\|_1^{1/p'} \|P\|_\infty^{1/p} \leq 2^{5eq(A)/p}\,.$$

Uniendo estas dos últimas acotaciones a (3) y (4), escogiendo $p = 5e\,q(A)$, concluimos que

$$[\![f]\!] \leq 8e\sqrt{p}\|P\|_{p'}\|f\|_2 \leq 16e^{3/2}\sqrt{5q(A)}\|f\|_2\,.$$

De aquí se deduce

$$\|i\|^2 \leq 1280e^3 q(A)\,,$$

lo que concluye la demostración.

□

Lo que sigue es un corolario evidente del Teorema 1.3 que generaliza un resultado de G. Pisier en [P5].

Corolario 1.4. *Sea $P \in \mathrm{Pol}(\mathbf{G})$ con $\widehat{P}(1) = 0$. Existe un casi-independiente B incluido en el espectro de P (el conjunto $\{\gamma : \widehat{P}(\gamma) \neq 0\}$) tal que*

$$|B| \geq \frac{1}{K_4}\left(\frac{[\![P]\!]}{\|P\|_2}\right)^2\,.$$

En particular si A es un subconjunto finito de $\Gamma\setminus\{1\}$, existe un casi-independiente B incluido en A con

$$|B| \geq \frac{1}{K_4} \frac{\left[\!\left[\sum_{\gamma\in A} \gamma \right]\!\right]^2}{|A|}.$$

Nuestro propósito,antes de acabar esta sección, es extender la construcción del polinomio del Lema 1.2 de forma que se pueda cambiar $1/4e$ por otro número cualquiera menor que 1, manteniéndose el mismo tipo de acotación para la norma $\|\cdot\|_\infty$ del polinomio. Esta generalización nos será útil más adelante.

En los resultados expuestos en esta sección, hasta ahora, de la norma $[\![\cdot]\!]$ hemos usado exclusivamente su definición; es decir, no hemos utilizado los profundos resultados de Dudley, Fernique y Pisier que vimos en la primera sección del capítulo anterior. No hemos podido encontrar una demostración del Teorema 1.6, que no use estos resultados en algún grado; nosotros lo haremos a través del próximo lema.

En la demostración del Teorema 1.6 iremos construyendo unos polinomios P_k, de manera análoga a como se ha hecho en la prueba del Lema 1.2, hasta pararnos en $k = n$. La dificultad principal está en probar que $\log \|P_n\|_\infty$ está mayorado por $q(A)$. Para ello hay que utilizar un procedimiento de extracción de casi-independientes distinto al Lema 1.1 que ahora no nos sirve.

La demostración de este procedimieto se podría haber hecho usando la idea de G. Pisier de relacionar números de recubrimiento para la distancia del máximo ($\|\cdot\|_\infty$), y para la distancia euclídea; método que proporciona mejores estimaciones para $\varphi(\varepsilon)$ en el Teorema 1.6. Veremos ideas muy similares en la próxima sección (Proposición 2.8); por eso preferimos no usar ahora los números de recubrimiento. Recordamos que la constante K_2 hace referencia a la del Teorema III.1.2, y K_4 al Teorema 1.4.

Lema 1.5. *Sea A un conjunto finito de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$ no conteniendo al 1; y supongamos que existen $\mu > 0$, y $\delta > 0$ tales que*

$$\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\mu \sum_{\gamma\in A} \Re\gamma(x)\Big)\, d\mathbf{m}(x) \leq \exp\big(\mu(1-\delta)|A|\big)\,;$$

entonces se tiene

$$q(A) \geq \frac{\mu\delta^2}{2K_4K_2^2}|A|\,.$$

Demostración. De las hipótesis es fácil deducir que

$$\mathbf{m}\Big(\Big\{x \in \mathbf{G} : \sum_{\gamma\in A} \Re\gamma(x) \geq \Big(1-\frac{\delta}{2}\Big)|A|\Big\}\Big) \leq \exp\Big(\frac{-\mu\delta|A|}{2}\Big)\,. \tag{5}$$

Ahora bien,

$$\sum_{\gamma\in A} \Re\gamma(x) \geq \Big(1-\frac{\delta}{2}\Big)|A| \iff \sum_{\gamma\in A} |1-\gamma(x)|^2 \leq \delta|A|\,;$$

y por lo tanto, usando las notaciones anteriores al Teorema III.1.2, si llamamos f a la función $\sum_{\gamma\in A}\gamma$, de (5) se deduce que

$$\mathrm{m}(s) \leq \exp\Big(\frac{-\mu\delta|A|}{2}\Big)$$

para todo $s < \sqrt{\delta|A|}$. Usando el Teorema III.1.2, se tiene

$$K_2[\![f]\!] \geq \int_0^\infty \sqrt{\log(1/\mathrm{m}(s))}\,ds \geq \int_0^{\sqrt{\delta|A|}} \sqrt{\frac{\mu\delta|A|}{2}}\,ds = \delta|A|\sqrt{\frac{\mu}{2}}\,,$$

y como $\|f\|_2 = \sqrt{|A|}$, por el Teorema 1.3 se concluye

$$K_4 q(A) \geq \left(\frac{[\![f]\!]}{\|f\|_2}\right)^2 \geq \frac{\mu\delta^2}{2K_2^2}|A|\,.$$

□

Teorema 1.6. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\varphi(\varepsilon) > 0$ tal que para todo conjunto finito A de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$, hay un polinomio $P \in \mathrm{Pol}(\mathbf{G})$, con $P \geq 0$, $\widehat{P} \geq 0$, y verificando:*

a) $\|P\|_1 = 1$.

b) $1 \geq \widehat{P}(\gamma) \geq 1-\varepsilon$ *para todo* $\gamma \in A$.

c) $\log\|P\|_\infty \leq \varphi(\varepsilon)q(A)$.

Demostración. Podemos suponer $\varepsilon \leq 1$. Sea $\lambda = \varepsilon/4$. Siguiendo un procedimiento análogo al de la demostración del Lema 1.2, construimos unos polinomios

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}(1 + \lambda \Re\gamma_j),$$

donde cada γ_j está escogido en A de forma que se tenga

$$\widehat{P}_k(\gamma_{k+1}) < (1-\varepsilon)\widehat{P}_k(1); \tag{6}$$

y parándonos cuando lleguemos a un n en que no podamos escoger γ_{n+1} en A que verifique (6).

El hecho de que tiene que existir un n en que nos paremos, lo veremos al probar que si hemos podido construir P_n se tiene la acotación

$$n \leq \psi(\varepsilon)q(A), \qquad \text{para cierto } \psi(\varepsilon) > 0. \tag{7}$$

Si probamos (7), habremos concluido eligiendo $P = P_n/\|P_n\|_1$; ya que entonces $\widehat{P}(\gamma) \geq 1-\varepsilon$, para todo $\gamma \in A$, y $\|P\|_\infty \leq (1+\lambda)^n$.

Para la prueba de (7), hemos de tener en cuenta que, por la manera en que se han elegido los γ_j,

$$\int_{\mathbf{G}} \prod_{j=1}^{n}\big(1 + \lambda\Re\gamma_j(x)\big)\, d\mathbf{m}(x) < \big(1 + (1-\varepsilon)\lambda\big)^n. \tag{8}$$

Usando la acotación elemental $e^{\lambda x} \leq (1+\lambda x)e^{-\lambda}(1-\lambda)^{-1}$, válida para todo $x \in [-1,1]$; se tiene, por (8),

$$\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda \sum_{j=1}^{n}\Re\gamma_j(x)\Big)\, d\mathbf{m}(x) \leq \left(\frac{1+(1-\varepsilon)\lambda}{e^{\lambda}(1-\lambda)}\right)^n;$$

y como, por la elección de λ, se tiene

$$\big(1+(1-\varepsilon)\lambda\big) \leq (1+\lambda)(1-\lambda)\big(1+(1-\varepsilon/2)\lambda\big) \leq e^{\lambda}(1-\lambda)\exp\big((1-\varepsilon/2)\lambda\big),$$

llegamos a que

$$\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda \sum_{j=1}^{n}\Re\gamma_j(x)\Big)\, d\mathbf{m}(x) \leq \exp\big((1-\varepsilon/2)\lambda n\big). \tag{9}$$

No podemos todavía aplicar el Lema 1.5 porque al elegir los γ_j no estamos seguros de no haber repetido caracteres. Vamos a ver que, no obstante, hemos escogidos muchos distintos; y luego veremos que esto nos permitirá aplicar el mencionado lema con éxito. Tenemos que observar primero que existe un natural N, que depende exclusivamente de ε, tal que para todo caracter γ se tiene $(\lambda = \varepsilon/4)$,

$$\int_{\mathbf{G}} \exp m\lambda\Re\gamma(x)\, d\mathbf{m}(x) \geq \exp\big((1-\varepsilon/4)\lambda m\big), \qquad \text{para todo } m \geq N. \tag{10}$$

Esto es así porque la función $u \mapsto \exp m\lambda\Re u$ es definida positiva en el toro $\mathbb{T}$, tiene sus coeficientes de Fourier no negativos, y entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{G}} \exp m\lambda\Re\gamma(x)\, d\mathbf{m}(x) &\geq \int_{\mathbf{T}} \exp m\lambda\Re u\, du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(m\lambda\cos x)\, dx \\ &\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}/4} \exp\big(m\lambda(1-x^2)\big)\, dx\,,\end{aligned}$$

de donde es fácil deducir (10) para m suficientemente grande (bastará que sea mayor que $K\varepsilon^{-2}\log(1/\varepsilon)$, para una cierta constante absoluta K).

Sea C el conjunto que forman los caracteres $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$. Tendremos que, para cada $\gamma \in C$, existe un $k_\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} \Re\gamma_j = \sum_{\gamma\in C} k_\gamma \Re\gamma\,.$$

Sea D el subconjunto de C formado por aquellos γ para los que $k_\gamma \geq N+1$. Pongamos $m_\gamma = 1$, si $\gamma \in D$, y $m_\gamma = k_\gamma$, en caso contrario. Cuando dos funciones f y g sobre $\mathbf{G}$ tienen todos sus coeficientes de Fourier positivos, entonces es obvio que

$$\widehat{f}(1)\,\widehat{g}(1) \leq \widehat{fg}(1)\,.$$

Como éste es nuetro caso, deducimos de (9), usando (10), que

$$\begin{aligned}\exp\big((1-\varepsilon/2)\lambda n\big) &\geq \int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda\sum_{\gamma\in C} m_\gamma\Re\gamma\Big)\exp\Big(\lambda\sum_{\gamma\in D}(k_\gamma-1)\Re\gamma\Big)\, d\mathbf{m} \\ &\geq \exp\Big(\lambda(1-\varepsilon/4)\sum_{\gamma\in D}(k_\gamma-1)\Big)\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda\sum_{\gamma\in C} m_\gamma\Re\gamma\Big)\, d\mathbf{m} \\ &= \exp\Big(\lambda(1-\varepsilon/4)\big(n-\sum_{\gamma\in C} m_\gamma\big)\Big)\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda\sum_{\gamma\in C} m_\gamma\Re\gamma\Big)\, d\mathbf{m}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Puesto que esta última integral es claramente mayor que 1, lo primero que se deduce de (11) es que

$$\frac{\varepsilon/4}{1-\varepsilon/4}n \leq \sum_{\gamma\in C} m_\gamma \leq N(\varepsilon)|C|. \tag{12}$$

Por otro lado, también deducimos de (11) que

$$\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda \sum_{\gamma\in C} m_\gamma \Re\gamma\Big)\, d\mathbf{m} \leq \exp\Big(\lambda(1-\varepsilon/2)\sum_{\gamma\in C} m_\gamma\Big);$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda N \sum_{\gamma\in C} \Re\gamma\Big)\, d\mathbf{m} &\leq \exp\Big(\lambda(N|C| - \sum_{\gamma\in C} m_\gamma)\Big)\int_{\mathbf{G}} \exp\Big(\lambda \sum_{\gamma\in C} m_\gamma \Re\gamma\Big)\, d\mathbf{m} \\ &\leq \exp\Big(\lambda(N|C| - \varepsilon/2\sum_{\gamma\in C} m_\gamma)\Big) \\ &\leq \exp\big(\lambda N(1-\varepsilon/2N)|C|\big).\end{aligned}$$

Aplicamos entonces el Lema 1.5, con $\mu = \lambda N$ y $\delta = \varepsilon/2N$, y obtenemos

$$q(A) \geq q(C) \geq \frac{\lambda\varepsilon^2}{8N(\varepsilon)K_4K_2^2}|C|,$$

lo que unido a (12) nos proporciona una acotación como queríamos para (7). Terminamos así la demostración; hemos obtenido $\varphi(\varepsilon)$ del orden de $\varepsilon^{-7}\log^2(1/\varepsilon)$.

□

IV.2. Número de recubrimiento. Una conjetura.

Sea d una semidistancia en un conjunto X, si $\varepsilon > 0$, denotaremos por $N(X, d; \varepsilon)$ al menor número de bolas abiertas de radio ε necesarias para cubrir S. Este número se suele llamar *número de recubrimiento de X para ε.* En el estudio de ciertas propiedades en Análisis Armónico, este número de recubrimiento ha sido utilizado para semidistancias en el grupo **G** invariantes por traslaciones; así por ejemplo, el Teorema III.1.2 es en realidad un teorema que expresa la norma $[\![f]\!]$ en función de una integral sobre los números de recubrimiento de la semidistancia

$$d(x,y) = \Big(\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} |\widehat{f}(\gamma)|^2 |\gamma(x)-\gamma(y)|^2\Big)^{1/2}, \qquad x,y\in\mathbf{G}.$$

La relación entre aquel teorema y los números de recubrimiento nos la el siguiente conocido lema. Denotemos por $\Delta_d(x,\varepsilon)$ la bola abierta de centro x y radio ε para una semidistancia d.

Lema 2.1. *Sea d una semidistancia continua e invariante por traslaciones en un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$. Se tiene entoces para todo $\varepsilon > 0$,*

$$N(\mathbf{G},d;\varepsilon) \geq \frac{1}{\mathbf{m}\big(\Delta_d(0,\varepsilon)\big)} \geq N(\mathbf{G},d;2\varepsilon).$$

Demostración. Si $\mathbf{G}$ es recubierto por n bolas de radio ε, puesto que la distancia es invariante por traslaciones, todas tienen la misma medida de Haar, que coincidirá con la de la bola de centro 0. Por tanto $n\mathbf{m}\big(\Delta_d(0,\varepsilon)\big) \geq \mathbf{m}(\mathbf{G}) = 1$ que es la primera desigualdad.

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una 2ε-red maximal en $\mathbf{G}$; es decir, tal que

$$d(x_j,x_k) \geq 2\varepsilon \qquad \text{si } j\neq k,$$

y maximal para esta condición. La maximalidad implica que las bolas abiertas de radio 2ε recubren $\mathbf{G}$; y por lo tanto $n \geq N(\mathbf{G},d;2\varepsilon)$. Por otro lado las n bolas $\Delta_d(x_j,\varepsilon)$, $j = 1,2\dots,n$ son dos a dos disjuntas, y se tiene entonces $n\mathbf{m}\big(\Delta_d(0,\varepsilon)\big) \leq 1$, que implica la segunda desigualdad.

□

Si A es un conjunto finito de caracteres de $\mathbf{G}$, consideraremos las siguientes semidistancias invariantes en $\mathbf{G}$:

$$d_{A,2}(x,y) = \Big(\sum_{\gamma\in A} |\gamma(x)-\gamma(y)|^2\Big)^{1/2},$$

$$d_{A,\infty}(x,y) = \max_{\gamma\in A} |\gamma(x)-\gamma(y)|,$$

$$d_{A,*}(x,y) = \sup\{|f(x)-f(y)| : f\in\mathcal{C}_A(\mathbf{G}),\ \|f\|_\infty \leq 1\}, \qquad x,y\in\mathbf{G}.$$

norma $[\![f]\!]$ en función de una integral sobre los números de recubrimiento de la semidistancia

$$d(x,y) = \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{f}(\gamma)|^2 |\gamma(x)-\gamma(y)|^2\Big)^{1/2}, \qquad x,y\in \mathbf{G}.$$

La relación entre aquel teorema y los números de recubrimiento nos la el siguiente conocido lema. Denotemos por $\Delta_d(x,\varepsilon)$ la bola abierta de centro x y radio ε para una semidistancia d.

Lema 2.1. *Sea d una semidistancia continua e invariante por traslaciones en un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$. Se tiene entoces para todo $\varepsilon>0$,*

$$N(\mathbf{G},d;\varepsilon) \geq \frac{1}{\mathbf{m}(\Delta_d(0,\varepsilon))} \geq N(\mathbf{G},d;2\varepsilon).$$

Demostración. Si $\mathbf{G}$ es recubierto por n bolas de radio ε, puesto que la distancia es invariante por traslaciones, todas tienen la misma medida de Haar, que coincidirá con la de la bola de centro 0. Por tanto $n\mathbf{m}(\Delta_d(0,\varepsilon)) \geq \mathbf{m}(\mathbf{G}) = 1$ que es la primera desigualdad.

Sea $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ una 2ε-red maximal en $\mathbf{G}$; es decir, tal que

$$d(x_j,x_k) \geq 2\varepsilon \qquad \text{si } j\neq k,$$

y maximal para esta condición. La maximalidad implica que las bolas abiertas de radio 2ε recubren $\mathbf{G}$; y por lo tanto $n \geq N(\mathbf{G},d;2\varepsilon)$. Por otro lado las n bolas $\Delta_d(x_j,\varepsilon)$, $j=1,2\ldots,n$ son dos a dos disjuntas, y se tiene entonces $n\mathbf{m}(\Delta_d(0,\varepsilon)) \leq 1$, que implica la segunda desigualdad.

□

Si A es un conjunto finito de caracteres de $\mathbf{G}$, consideraremos las siguientes semidistancias invariantes en $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} d_{A,2}(x,y) &= \Big(\sum_{\gamma\in A} |\gamma(x)-\gamma(y)|^2\Big)^{1/2}, \\ d_{A,\infty}(x,y) &= \max_{\gamma\in A} |\gamma(x)-\gamma(y)|, \\ d_{A,*}(x,y) &= \sup\{|f(x)-f(y)| : f\in \mathcal{C}_A(\mathbf{G}),\ \|f\|_\infty \leq 1\}, \qquad x,y\in\mathbf{G}. \end{aligned}$$

La tercera es la distancia en el espacio dual de $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$ entre las medidas δ_x y δ_y, la deltas de Dirac en esos puntos. Claramente se tienen

$$d_{A,\infty} \leq d_{A,*} \leq d_{A,2} \leq \sqrt{|A|} d_{A,\infty} .$$

La relación antes explicada entre la norma $[\![\cdot]\!]$ y los números de recubrimiento para la distancia $d_{A,2}$ permiten extraer casi-independientes de cardinal grande cuando estos números de recubrimiento son grandes; así, el Teorema 1.3 implica

$$\frac{\eta^2}{4K_4K_2^2} \log N(\mathbf{G}, d_{A,2}; \eta\sqrt{|A|}) \leq q(A) ; \tag{1}$$

ya que, por un razonamiento análogo a la demostración del Lema 1.5, usando el Teorema III.1.2, se tendría

$$K_2 \Big[\!\!\Big[\sum_{\gamma \in A} \gamma \Big]\!\!\Big] \geq \frac{\eta\sqrt{|A|}}{2} \sqrt{\log N(\mathbf{G}, d_{A,2}; \eta\sqrt{|A|})} .$$

Sin embargo, (1) no siempre da el buen orden de $q(A)$, ya que para deducir (1) se usa

$$\|i \colon \mathrm{L}^2_A(\mathbf{G}) \to \mathcal{C}^{p.s.}_A(\mathbf{G})\| \geq \frac{[\![\sum_{\gamma\in A} \gamma]\!]}{\sqrt{|A|}} ,$$

y no se tiene la acotación inversa como muestra el siguiente ejemplo en $\mathbf{Z}$. Tomamos la progresión geométrica $B = \{1, 2, 4, \ldots, 2^k\}$, y consideremos el conjunto A unión de los primeros k^2 números naturales y de B. Es fácil ver que en $\{1, 2, \ldots, k^2\}$ no hay un casi-independiente de cardinal mayor que $c \log k$; luego si $f(u) = \sum_{j\in A} u^j$, por el Teorem 1.3, se tiene

$$[\![f]\!] \leq k + \Big[\!\!\Big[\sum_{j=1}^{k^2} u^j \Big]\!\!\Big] \leq Ck \log k ,$$

para una constante absoluta $C > 0$. Por tanto $[\![f]\!]/\|f\|_2 \leq C \log k$, y sin embargo en A hay un casi-independiente, la progresión B, de cardinal k, lo que implica

$$\|i \colon \mathrm{L}^2_A(\mathbf{T}) \to \mathcal{C}^{p.s.}_A(\mathbf{T})\| \geq \frac{\sqrt{k}}{4} .$$

Ya hemos visto que el número de recubrimiento para la distancia $d_{A,2}$ no siempre es adecuado para la obtención del cardinal máximo de los casi-independientes en A. Más tarde presentaremos una conjetura que se explica diciendo que si cambiamos $d_{A,2}$ por $d_{A,\infty}$, entonces el logaritmo del número de recubrimiento para un radio $\varepsilon < \sqrt{3}$ es equivalente a $q(A)$.

Antes probaremos que las distancias $d_{A,\infty}$ y $d_{A,*}$ son equivalentes. Este resultado es debido a J. Bourgain en [B3]; nosotros lo obtuvimos independientemente antes de aparecer publicado. Un resultado similar, pero para subconjuntos del grupo compacto; es decir, en la otra dirección de la transformada de Fourier, fue probado por N. T. Varopoulos (ver [V, Lema 2]).

Presentamos ahora nuestra versión, que como la de Bourgain, reposa en las ideas que prueban que un punto es un conjunto de síntesis armónica (ver [K1] o [GM]). Recordamos que para un conjunto finito A de caracteres, y un entero positivo s, $M_s(A)$ denota al conjunto de caracteres

$$M_s(A) = \left\{ \prod_{\gamma\in A} \gamma^{n_\gamma} : (n_\gamma) \in \mathbb{Z}^A, \quad \sum_{\gamma\in H} |n_\gamma| \leq s \right\}.$$

A continuación del enunciado del teorema, damos un lema que necesitaremos para su demostración.

Teorema 2.2. *Sea A un conjunto finito de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$; y sea C un subconjunto de $M_s(A)$. Para todo par de puntos x, y en $\mathbf{G}$ se tiene*

$$d_{C,*}(x,y) \leq \frac{s}{\operatorname{sen}(1/2)} d_{A,\infty}(x,y).$$

En particular, $d_{A,\infty} \leq d_{A,*} \leq 2.1\, d_{A,\infty}$.

Lema 2.3. *Sean $c_1, \ldots, c_n$ números complejos; y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reales verificando $|\alpha_k| \leq \delta < 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Si consideramos la función compleja h definida en $\mathbb{R}$ como*

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(i\alpha_k t), \qquad t \in \mathbb{R};$$

entonces se tiene

$$|h(0) - h(1)| \leq \frac{\delta}{1 - \delta/2} \sup_{m\in\mathbb{Z}} |h(m)|.$$

Demostración del Lema 2.3. Se sabe, por una generalización de la desigualdad de Bernstein (ver [K1,pag.30]), que una función h como ésta verifica

$$\|h'\|_\infty \leq \delta \|h\|_\infty . \tag{2}$$

Sea $\varepsilon > 0$, y $t \in \mathbb{R}$ tal que $|h(t)| \geq (1-\varepsilon)\|h\|_\infty$. Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|t-m| \leq 1/2$, luego por el teorema del valor medio,

$$|h(m)| \geq |h(t)| - \frac{1}{2}\|h'\|_\infty \geq \big(1 - \varepsilon - \frac{\delta}{2}\big)\|h\|_\infty .$$

Se obtiene, por lo tanto, que

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} |h(m)| \geq \big(1 - \frac{\delta}{2}\big)\|h\|_\infty ;$$

de donde finalmente se deduce, usando de nuevo (2),

$$|h(0) - h(1)| \leq \|h'\|_\infty \leq \frac{\delta}{1-\delta/2} \sup_{m\in\mathbb{Z}} |h(m)| .$$

□

Demostración del Teorema 2.2. Como ambas distancias son invariantes por traslaciones, es suficiente probar que si $x \in \mathbf{G}$, entonces

$$d_{C,*}(x,0) \leq \frac{s}{\operatorname{sen}(1/2)} d_{A,\infty}(x,0) . \tag{3}$$

Si $s\, d_{A,\infty}(x,0) \geq 2\operatorname{sen}(1/2)$, no hay nada que probar puesto que siempre se da $d_{C,*}(x,0) \leq 2$. Supongamos entonces que

$$d_{A,\infty}(x,0) = 2\operatorname{sen}(\delta/2) < \frac{2\operatorname{sen}(1/2)}{s} , \qquad \delta \in [0,\pi) . \tag{4}$$

La últma desigualdad implica que $s\delta < 1$, ya que $\operatorname{sen} st \leq s \operatorname{sen} t$ para todo $t \in [0,\pi)$, y todo $s \in \mathbb{N}$.

Si escribimos $A = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$, por (4) se deduce que existen unos $\alpha_j \in [-\delta, \delta]$ tales que

$$\gamma_j(x) = \exp(i\alpha_j) , \qquad j = 1, 2, \ldots, N ;$$

ya que $|\exp(it) - 1| = |2\operatorname{sen}(t/2)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea ahora $P \in \mathrm{Pol}_C(\mathbf{G})$, con $\|P\|_\infty \leq 1$. Como habitualmente, para cada $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$, pongamos $\|\mathbf{k}\|_1 = \sum_{j=1}^N |k_j|$. El polinomio P se puede entonces escribir, para ciertos $c_\mathbf{k}$ complejos, como

$$P(y) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n \\ \|\mathbf{k}\|_1 \leq 1}} c_\mathbf{k} \gamma_1^{k_1}(y)\gamma_2^{k_2}(y)\cdots\gamma_N^{k_N}(y), \qquad y \in \mathbf{G}.$$

En particular, para cada $m \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$P(mx) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n \\ \|\mathbf{k}\|_1 \leq 1}} c_\mathbf{k} \exp\Big(im \sum_{j=1}^N k_j\alpha_j\Big).$$

Como se tiene que $\left|\sum_{j=1}^N k_j\alpha_j\right| \leq s\delta < 1$ si $\|\mathbf{k}\|_1 \leq s$; entonces usando el Lema 2.3 tendremos

$$\begin{aligned}|P(0) - P(x)| &\leq \frac{s\delta}{1 - s\delta/2} \sup_{m\in\mathbb{Z}} |P(mx)| \\ &\leq \frac{s\delta}{1 - s\delta/2} \leq \frac{2\,\mathrm{sen}(s\delta/2)}{\mathrm{sen}(1/2)},\end{aligned}$$

ya que $\mathrm{sen}(1/2) \leq (1-x)x^{-1}\,\mathrm{sen}\, x$, para todo $x \in (0, 1/2)$. Luego por (4),

$$\leq \frac{s}{\mathrm{sen}(1/2)} 2\,\mathrm{sen}(\delta/2) = \frac{s}{\mathrm{sen}(1/2)} d_{A,\infty}(x, 0);$$

de donde se deduce inmediatamente (3) y se concluye la prueba al tomar supremo en todos los posibles P.

□

A partir de ahora, usaremos una notación abreviada para los números de recubrimiento de $\mathbf{G}$ para las distancias invariantes antes presentadas; así pondremos

$$N_A^\infty(\varepsilon) = N(\mathbf{G}, d_{A,\infty}; \varepsilon), \qquad N_A^*(\varepsilon) = N(\mathbf{G}, d_{A,*}; \varepsilon),$$
$$\text{y} \qquad N_A^2(\varepsilon) = N(\mathbf{G}, d_{A,2}; \varepsilon).$$

Hemos visto que si el número de recubrimiento para la distancia $d_{A,2}$ es grande entonces se puede extraer un casi-independiente de gran cardinal, pero por otro lado, también hemos visto que no se da el recíproco; es decir, $q(A)$ grande no implica $\log N_A^2(\eta\sqrt{|A|})$ grande.

En cambio, veremos que para η adecuado, se verifica que $\log N_A^\infty(\eta)$ domina a $q(A)$. El problema está en que desconocemos si el recíproco se da; sin embargo, se puede probar que la acotación está próxima a darse; en concreto se tiene

Proposición 2.4. *Para todo* $\varepsilon \in (0, \sqrt{2})$, *y para todo conjunto finito* A *de caracteres de un grupo abeliano compacto* $\mathbf{G}$, *que contiene algún caracter que no es el 1, se tiene*

$$\log(2-\varepsilon^2/2)\, q(A) \le \log N_A^\infty(\varepsilon) \le q(A)\, \log\Big(\frac{2\pi}{\varepsilon} q(A)\Big)\,.$$

Demostración. Sea $\Delta(\varepsilon)$ la bola abierta de centro 0 y radio ε para la semidistancia $d_{A,\infty}$. Cuando $x \in \Delta(\varepsilon)$, entonces para todo $\gamma \in A$, se tiene $1 + \Re\gamma(x) \ge 2 - \varepsilon^2/2$. Si B es un casi-independiente en A con $|B| = q(A)$, se tiene

$$\int_{\mathbf{G}} \prod_{\gamma \in B} (1 + \Re\gamma)\, d\mathbf{m} = 1\,;$$

y por lo tanto, como se integra una función positiva,

$$\mathbf{m}(\Delta(\varepsilon)) \left(2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{|B|} \le 1\,,$$

lo que implica la primera desigualdad por el Lema 2.1.

Para probar la otra desigualdad, tomemos en A un casi-independiente maximal B; entonces se tienen

$$q(A) \ge |B|\,, \qquad \text{y} \qquad A \subseteq [B]\,.$$

Esto último implica que $d_{A,\infty} \le |B| d_{B,\infty}$. En efecto, si $\gamma \in A$, y $B = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, entonces existen $m_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ tales que

$$\gamma = \prod_{j=1}^{n} \gamma_j^{m_j}\,;$$

y para $x \in \mathbf{G}$, se tiene como habíamos indicado

$$\begin{aligned} |\gamma(x) - 1| &\le \sum_{k=1}^{n} \left| \prod_{j=1}^{k} \gamma_j^{m_j}(x) - \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j^{m_j}(x) \right| \le \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k(x) - 1| \\ &\le n \max_{1 \le k \le n} |\gamma_k(x) - 1| = |B| d_{B,\infty}(x, 0)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Luego evidentemente se tiene que

$$N_A^\infty(\varepsilon) \le N_B^\infty\Big(\frac{\varepsilon}{|B|}\Big)\,.$$

Si ahora $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ es un conjunto $\varepsilon/|B|$-separado maximal en $\mathbf{G}$ para la distancia $d_{B,\infty}$, entonces el conjunto

$$\{(\gamma(x_j))_{\gamma\in B} : j = 1, 2, \ldots, N\}$$

en $\mathbb{T}^B$, es $\varepsilon/|B|$-separado para la distancia inducida por la norma infinito de $\mathbb{C}^B$. Por un razonamiento análogo al del Lema 2.1, se tendrá

$$N \leq \frac{1}{\mathbf{m}_{\mathbb{T}^B}(\Delta(\varepsilon/2|B|))},$$

donde por $\Delta(\eta)$ indicamos la bola en $\mathbb{T}^B$ de radio η para la distancia inducida por la norma infinito. Esta bola es el producto de $|B|$ arcos de ángulo mayor que 2η, y por tanto se concluye

$$N_A^\infty(\varepsilon) \leq N \leq \left(\frac{2\pi|B|}{\varepsilon}\right)^{|B|},$$

lo que demuestra la otra desigualdad, puesto que $|B| \leq q(A)$.

$\square$

La primera desigualdad no es válida para $\varepsilon > \sqrt{2}$, veamoslo con un ejemplo. Denotemos por $\mathbf{D}$ el subgrupo de $\mathbb{T}$ formado por 1 y -1, y en $\mathbb{T}^n$ por $\mathbf{i}$ al elemento con todas las coordenadas iguales a la unidad imaginaria i. Sea $\mathbf{G}$ el subgrupo de $\mathbb{T}^n$,

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}^n \cup \mathbf{i}\mathbf{D}^n .$$

Es fácil ver que las proyecciones sobre cada coordenada son un conjunto casi-independiente B de caracteres sobre $\mathbf{G}$; pero que para todo $\varepsilon > \sqrt{2}$, $\mathbf{G}$ está recubierto por las dos bolas abiertas de radio ε y centros $\mathbf{i}$ y $(1, 1, \ldots, 1)$.

Nosotros creemos que la segunda desigualdad es mejorable en el sentido de que se puede hacer desaparecer el factor $\log q(A)$; es decir, que el logaritmo del número de recubrimiento para la distancia $d_{A,\infty}$ es una cantidad equivalente a $q(A)$. En concreto, planteamos la siguiente conjetura

Conjetura 2.5. *Para cada $\varepsilon \in (0, \sqrt{3}]$, existe una constante $\varphi(\varepsilon) > 0$ tal que para todo conjunto finito A de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$ se tiene*

$$\varphi(\varepsilon)\, q(A) \geq \log N_A^\infty(\varepsilon) . \tag{6}$$

La conjetura no depende de ε; es decir, para que la conjetura sea cierta basta que para un $\varepsilon_0 \in (0,\sqrt{3}]$, exista $\varphi(\varepsilon_0) > 0$ verificando (6) para todo conjunto finito de caracteres A. En efecto, si $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, bastará tomar $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_0)$; si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ podríamos invocar el resultado de J. Bourgain ([B2] o [B3]) que dice

Lema 2.6. *Si A es un conjunto finito de caracteres, y $\varepsilon \in (0,2]$ se tiene*

$$\log N_A^\infty(\varepsilon) \leq \log_2(4/\varepsilon)\, \log N_A^\infty(1/20)\,.$$

Pero este lema no nos serviría cuando ε_0 fuera mayor que $1/20$. Por eso haremos otro razonamiento.

Podemos suponer $\varepsilon_0 = \sqrt{3}$. Escogemos un número natural $r = r(\varepsilon)$ tal que $2^{r-1}\varepsilon \geq \pi$, y dado un conjunto finito de caracteres A, llamamos A_j, para cada $j = 0, 1, \ldots, r$, al conjunto

$$A_j = \{\gamma^{2^j} : \gamma \in A\}\,.$$

Sea A' la unión de todos los A_j.

Si z es un número complejo de módulo unidad con $|z-1| \geq \varepsilon/2$, entonces al menos una de las potencias z, z^2, z^4,..., z^{2^r} verifica $|z^p - 1| \geq \sqrt{3}$(aquí es crucial usar que $\sqrt{3}$ es la distancia entre 1 y la primera raíz cúbica de la unidad, para números mayores que $\sqrt{3}$ no se verifica lo que acabamos de decir). En nuestra situación esto implica que la bola abierta de radio $\varepsilon/2$ para $d_{A,\infty}$ contiene a la bola abierta de radio $\sqrt{3}$ para la distancia $d_{A',\infty}$; y por el Lema 2.1, que $N_A^\infty(\varepsilon) \leq N_{A'}^\infty(\sqrt{3})$.

Encontramos por tanto en A' un casi-independiente B' cuyo cardinal verifica

$$\varphi(\sqrt{3})|B'| \geq \log N_{A'}^\infty(\sqrt{3}) \geq \log N_A^\infty(\varepsilon)\,.$$

Tomando el j para el que $|A_j \cap B'|$ sea máximo, encontramos en A un conjunto B de cardinal $|B| = |B' \cap A_j|$, tal que

$$B' \cap A_j = \{\gamma^{2^j} : \gamma \in B\}\,.$$

Este B es obviamente casi-independiente, y verifica

$$\big(r(\varepsilon)+1\big)\varphi(\sqrt{3})|B| \geq \log N_A^\infty(\varepsilon)\,,$$

que es la conjetura para ε.

En el caso de caracteres de orden acotado, la conjetura es cierta con constante $\varphi(\varepsilon)$ que depende de la cota del orden. El orden de un caracter γ es el menor natural m, si existe, tal que $\gamma^m = 1$; si no existe ningún m el orden es infinito.

Si tenemos un conjunto finito de caracteres A cuyos órdenes son todos menores que N, entonces al tomar un casi-independiente B maximal en A, se tiene

$$A \subset \mathrm{gr}B, \qquad \text{y} \qquad |\mathrm{gr}B| \leq N^{|B|}.$$

Esto implica que ni la distancia $d_{B,\infty}$, ni la distancia $d_{A,\infty}$ pueden distinguir en G más de $N^{|B|}$ puntos; es decir, sea cual sea el número $\varepsilon > 0$, se tiene

$$N_A^{\infty}(\varepsilon) \leq N^{|B|}.$$

lo que sería la conjetura con $\varphi(\varepsilon) = \log N$.

Al probar la segunda desigualdad de la Proopsición 2.4, y en el razonamiento que acabamos de ver, se acota inferiormente $q(A)$ por el cardinal de un casi-independiente maximal. No siempre es cierto que un casi-independiente maximal en A tenga un cardinal similar a $q(A)$ como se ve al combinar el ejemplo dado por G. Pisier en [P5,pag.723] con sus resultados de [P6]. Veremos este ejemplo después de la Proposición 2.8.

Es más, al usar un casi-independiente maximal de A, lo que hacemos es, puesto que $A \subset [B]$, mayorar el número de recubrimiento de A por el de $[B]$ y extraer consecuencias de ello. No obstante, vamos a ver que la conjetura es cierta para los conjuntos de la forma $[B]$ con B un casi-independiente. En realidad, lo haremos para $[B]^+$; pero esto es igual puesto que $[B] \subset M_2([B]^+)$, y entonces $N_{[B]}^{\infty}(\varepsilon) \leq N_{[B]^+}^{\infty}(\varepsilon/2)$

Para probar el resultado en $[B]^+$, lo que haremos será seguir la idea de Pisier [P6] transfiriendo el problema de los números de recubrimiento para la distancia infinito a los de la distancia euclídea. Combinaremos esto con las ideas de Bourgain para probar el anteriormente enunciado Lema 2.6 (ver [B3] o [B2]), y con el siguiente lema.

Lema 2.7. *Sea B un conjunto casi-independiente de caracteres, entonces para todo $x, y \in \mathbf{G}$ se tiene*

$$d_{[B]^+,2}(x,y)^2 \geq 2 \cdot 2^{|B|} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{8} d_{B,2}(x,y)^2\right)\right).$$

Demostración. La demostración se reduce a un cálculo. Como las distancias son invariantes, podemos suponer que $y = 0$. Al ser B casi-independiente todos los productos de elementos de B son diferentes y podemos escribir

$$\begin{aligned}
d_{[B]^+,2}(x,0)^2 &= \sum_{S \subset B} \left|1 - \prod_{\gamma \in S} \gamma(x)\right|^2 = \sum_{S \subset B} \left[2 - 2\Re \prod_{\gamma \in S} \gamma(x)\right] \\
&= 2^{|B|+1} - 2\Re\left(\sum_{S \subset B} \prod_{\gamma \in S} \gamma(x)\right) = 2^{|B|+1} - 2\Re \prod_{\gamma \in B} (1 + \gamma(x)) \\
&\geq 2^{|B|+1} - 2 \prod_{\gamma \in B} |1 + \gamma(x)| = 2^{|B|+1} - 2\left(\prod_{\gamma \in B} |1 + \gamma(x)|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

usando que la media aritmética es mayor que la geométrica,

$$\geq 2^{|B|+1} - 2\left(\frac{1}{|B|} \sum_{\gamma \in B} |1 + \gamma(x)|^2\right)^{|B|/2}.$$

Por la identidad del paralelogramo, si $|z| = 1$ se tiene $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$, así que

$$\begin{aligned}
d_{[B]^+,2}(x,0)^2 &\geq 2^{|B|+1} - 2\left(4 - \frac{1}{|B|} \sum_{\gamma \in B} |1 - \gamma(x)|^2\right)^{|B|/2} \\
&= 2^{|B|+1}\left(1 - \left(1 - \frac{d_{B,2}(x,0)^2}{4|B|}\right)^{|B|/2}\right).
\end{aligned}$$

Si denotamos por d a $d_{B,2}(x,0)$, se tiene $0 \leq d^2 \leq 4|B|$, y por lo tanto, si $|B| = n$, se puede acotar $(1 - d^2/4n)^{n/2} \leq \exp(-d^2/8)$, y se concluye el lema.

□

Proposición 2.8. *Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existe $\varphi(\varepsilon) > 0$ tal que si B es un conjunto casi-independiente y finito de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$, entonces*

$$q([B]^+) \geq \varphi(\varepsilon) \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon).$$

Análogamente a como hemos hecho antes introducimos la semidistancia $d_{B,1}$ en $\mathbf{G}$ como

$$d_{B,1}(x,y) = \sum_{\gamma\in B} |\gamma(x) - \gamma(y)|, \qquad x,y \in \mathbf{G}.$$

Se tiene entonces que, para $x \in \mathbf{G}$, razonando como en (5) en la demostración de la Proposición 2.4,

$$d_{[B]^+,\infty}(x,0) = \sup_{S\subset B}\left|\prod_{\gamma\in S}\gamma(x) - 1\right| \leq \sup_{S\subset B}\sum_{\gamma\in S}|\gamma(x) - 1| = d_{B,1}(x,0);$$

y por lo tanto

$$N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon) \leq N^1_B(\varepsilon). \tag{7}$$

El siguiente paso será la construcción de un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbf{G}$, que es $\sqrt{2}\varepsilon/\pi$-separado para la distancia $d_{B,2}$; es decir, tal que

$$\left.\begin{array}{r} x,y \in \mathcal{A} \\ x \neq y \end{array}\right\} \Longrightarrow d_{B,2}(x,y) \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\varepsilon, \tag{8}$$

y cuyo cardinal verfica además,

$$\log|\mathcal{A}| \geq \frac{1}{2}\log N^1_B(\varepsilon) - 10(\log 2)|B|. \tag{9}$$

Sea $\mathcal{A}_1 \subset \mathbf{G}$ un conjunto ε-separado maximal, respecto de la distancia $d_{B,1}$. Tendremos $|\mathcal{A}_1| \geq N^1_B(\varepsilon)$. Sea también $\mathcal{A}_2 \subset \mathbf{G}$ un conjunto 1-separado maximal, respecto de la distancia $d_{B,2}$. Puesto que claramente $\mathbf{G}$ está recubierto por las bolas abiertas $\Delta_{B,2}(y,1)$ de centro en los puntos $y \in \mathcal{A}_2$ y radio 1,se tiene

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{y\in\mathcal{A}_2} \Delta_{B,2}(y,1) \cap \mathcal{A}_1.$$

Luego si L es el máximo de los cardinales de las intersecciones $\Delta_{B,2}(y,1) \cap \mathcal{A}_1$, se tiene obviamente $|\mathcal{A}_1| \leq L \cdot |\mathcal{A}_2|$.

Haciendo una traslación de un adecuado $\Delta_{B,2}(y,1) \cap \mathcal{A}_1$, obtendremos un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbf{G}$ tal que $|\mathcal{C}| = L$, y

$$\left.\begin{array}{r} x,y \in \mathcal{C} \\ x \neq y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} d_{B,1}(x,y) \geq \varepsilon \\ d_{B,2}(x,0) < 1 \end{array}\right..$$

Podemos precisar un resultado de [Ca] diciendo que si $B(\ell_2^n)$ designa la bola unidad euclídea de $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$N(B(\ell_2^n), \|\cdot\|_\infty; 1/\sqrt{2n}) \leq 2^{10n}.$$

Teniendo esto en cuenta, se ve que la bola unidad euclídea de $\mathbb{C}^n$ puede ser dividida en 2^{20n} partes de diámetro menor que $\sqrt{2}(2/\sqrt{4n})$ respecto de $\|\cdot\|_\infty$. Luego si $n = |B|$, existe un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ tal que

$$|\mathcal{D}| \geq L\, 2^{-20n} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{r} x, y \in \mathcal{D} \\ x \neq y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} d_{B,1}(x,y) \geq \varepsilon \\ d_{B,2}(x,0) < 1 \\ d_{B,\infty}(x,y) \leq \sqrt{2/n} \end{array}\right. .$$

Vamos ahora a obtener otro conjunto $\mathcal{E}$ dilatando $\mathcal{D}$. Sea p un número natural tal que $2 \geq p\sqrt{2/n} \geq 1$ (es fácil demostrar su existencia). Pongamos $\mathcal{E} = p\mathcal{D}$. Podemos acotar inferiormente la distancia $d_{B,2}(px, py)$ para dos puntos distintos de $\mathcal{D}$. En efecto si $\gamma \in B$ tenemos que $|\gamma(x) - \gamma(y)| \leq \sqrt{2/n}$, luego si $z_\gamma = \gamma(x-y)$ se tiene $|z_\gamma - 1| \leq \sqrt{2/n}$. Por tanto $z_\gamma = e^{\beta_\gamma i}$ con $\beta_\gamma \in (-\pi/\sqrt{2n}, \pi/\sqrt{2n})$. Se tiene entonces

$$|z_\gamma^p - 1| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{p\beta_\gamma}{2}\right| \geq \frac{2}{\pi}|p\beta_\gamma|,$$

pues $p|\beta_\gamma|/2 \leq p(\pi/2\sqrt{2n}) \leq \pi/2$. Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} d_{B,2}(px,py) &\geq \frac{1}{\sqrt{n}} d_{B,1}(px,py) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\gamma\in B} |\gamma(x-y)^p - 1| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\gamma\in B} \frac{2}{\pi} p\beta_\gamma \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\gamma\in B} \frac{2}{\pi} p|z_\gamma - 1| \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} p\sqrt{\frac{2}{n}} d_{B,1}(x,y) \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\varepsilon . \end{aligned}$$

Como los puntos de $\mathcal{A}_2$ están también separados $d_{B,2}(x,y) \geq 1 > \varepsilon\sqrt{2}/\pi$, tenemos un conjunto de puntos (o bien $\mathcal{A}_2$ o bien $\mathcal{E}$) de forma que sus puntos están $(\varepsilon\sqrt{2}/\pi)$-separados y tiene cardinal $\geq \sqrt{|\mathcal{A}_2||\mathcal{E}|} \geq \sqrt{2^{-20n}L|\mathcal{A}_2|}$. Si llamamos $\mathcal{A}$ a este conjunto, tendremos

$$\log|\mathcal{A}| \geq \frac{1}{2}\log|\mathcal{A}_1| - 10(\log 2)|B| .$$

Con lo que se prueba que $\mathcal{A}$ verifica (8) y (9).

Usando ahora el Lema 2.7, podemos acotar, por (8), la separación de los puntos de $\mathcal{A}$ respecto de la distancia $d_{[Q]^+,2}$, obteniendo para $x \neq y$, $x, y \in \mathcal{A}$,

$$d_{[Q]^+,2}(x,y)^2 \geq 2 \cdot 2^n \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^2\right)\right) = 2^n \phi(\varepsilon). \tag{10}$$

Si se da $(1/4) \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon) \leq 10(\log 2)|B|$, entonces el resultado de la proposición es inmediato; ya que

$$q([B]^+) \geq |B| \geq \frac{1}{40(\log 2)} \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon).$$

Si por el contrario se tiene $(1/4) \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon) \geq 10(\log 2)|B|$, de (9) y (7) se deduce que

$$\log |\mathcal{A}| \geq \frac{1}{4} \log N^{1}_{B}(\varepsilon) \geq \frac{1}{4} \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon).$$

Esto unido a (10) nos permite dar, por razones similares a las de la prueba del Lema 2.1, la siguiente acotación

$$\log\left(\frac{1}{\mathrm{m}(\Delta_{[Q]^+,2}(\sqrt{\phi(\varepsilon)|[Q]^+|}))}\right) \geq \frac{1}{4} \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon).$$

Esto implica por argumentos que involucran el Teorema III.1.2, y que hemos usado ya alguna vez (ver Lema 1.5, por ejemplo), que si ponemos $f = \sum_{\gamma \in [B]^+} \gamma$, se tiene

$$[\![f]\!] \geq \frac{1}{2K_2} \sqrt{\log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon)} \sqrt{\phi(\varepsilon)|[Q]^+|},$$

y por el Teorema 1.3 se concluye

$$q([B]^+) \geq \frac{1}{K_4} \left(\frac{[\![f]\!]}{\|f\|_2}\right)^2 \geq \frac{\phi(\varepsilon) \log N^{\infty}_{[B]^+}(\varepsilon)}{4K_4 K_2^2}.$$

□

El anunciado ejemplo de Pisier es tomar como casi-independiente B la base canónica de $\mathbb{Z}^n$; es decir, las proyecciones en $\mathbb{T}^n$. En el conjunto $A = [B]^+$, el casi-independiente B es maximal y su cardinal es n; sin embargo, una aplicación de la anterior proposición nos permite comprobar que en $[B]^+$ hay un casi-independiente de cardinal mayor que $cn \log n$ para una cierta constante $c > 0$. Esto también se puede hacer usando el Lema III.2.4 y los cálculos en [P5,pag.722].

Para calcular $N_A^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, vemos que si $z = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{T}^n$, y para cada j se tiene $u_j = \exp(ix_j)$ con $x_j \in [-\pi, \pi)$; entonces, usando un razonamiento similar al de la prueba de la proposición anterior, se tiene

$$d_{A,\infty}(x, 0) \geq 1 \qquad \text{si} \qquad \sum_{j=1}^{n} |x_j| \geq 2\pi/3 .$$

Esto implica que poniendo λ_n por la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{m}_{\mathbf{T}^n}(\{z \in \mathbf{T}^n : d_{A,\infty}(z, 0) \leq 1\}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \lambda_n(\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq 2\pi/3\} = \frac{2^n}{3^n n!} ,$$

de donde se tiene, usando la Proposición 2.8, que $q([B]^+) \geq cn \log n$ como anunciamos.

IV.3. Diámetro aritmético.

En esta sección vamos a presentar una nueva cantidad relativa a un conjunto finito de caracteres que está dominada por el número de recubrimiento, y cuyo logaritmo todavía domina a $q(A)$. Esta cantidad es el diámetro aritmético; que relacionaremos con otras propiedades de $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$.

Sean A un conjunto finito de caracteres de un grupo abeliano $\mathbf{G}$, y $r > 1$; diremos que un subconjunto F de $\mathbf{G}$ es un *conjunto de r-mayoración para $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$*, si se verifica que

$$\|f\|_\infty \leq r \sup_{x \in F} |f(x)| , \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{C}_A(\mathbf{G}).$$

Puesto que $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$ es un espacio de dimensión finita, es fácil ver que para todo $r > 1$, existen conjuntos de r-mayoración de cardinal finito. Llamaremos *diámetro aritmético de A (relativo a r),* y lo denotaremos por $d(A, r)$, al mínimo cardinal de los conjuntos de r-mayoración para $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$:

$$d(A, r) = \min\{|F| : \ F \subset \mathbf{G} \text{ conjunto de } r\text{-mayoración para } \mathcal{C}_A(\mathbf{G}) \} .$$

Cuando r sea 2 pondremos simplemente $d(A)$; es decir, $d(A) = d(A, 2)$.

J. Bourgain [B2] utiliza para el estudio de los conjuntos de Sidon una noción casi equivalente de diámetro aritmético, que denotaremos $d_B(A, r)$; éste es el mínimo número natural d tal que $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$ es r-isomorfo a un subespacio de ℓ_∞^d; es decir, tal que existe un operador $T : \mathcal{C}_A(\mathbf{G}) \to \ell_\infty^d$ que satisface:

$$\frac{1}{r}\|f\|_\infty \leq \|Tf\|_{\ell_\infty^d} \leq \|f\|_\infty, \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{C}_A(\mathbf{G}). \tag{1}$$

Se tiene que (1) es equivalente a la existencia de d elementos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ de la bola unidad del dual de $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$ tales que

$$\|f\|_\infty \leq r \sup_{1\leq j\leq d} |\mu_j(f)|, \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{C}_A(\mathbf{G}). \tag{2}$$

Luego es claro que $d(A, r) \geq d_B(A, r)$. Por otro lado, los puntos extremales de la bola unidad de $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})^*$ son todos el producto de un complejo de módulo 1 y una evaluación en algún punto de $\mathbf{G}$, ya que estos son los puntos extremales de la bola de $\mathcal{M}(\mathbf{G})$. Cada μ_j es combinación convexa de a lo más $2|A| + 1$ de estos puntos extremales; lo que nos proporciona

$$d_B(A, r) \leq d(A, r) \leq d_B(A, r)(2|A| + 1) \leq d_B(A, r)\big(2d_B(A, r) + 1\big);$$

lo que implica que los logaritmos de estas dos cantidades son equivalentes.

Está claro que en (2) los μ_j podemos considerarlos medidas. La noción de diámetro aritmético dada en [GM,pag.403] se obtiene cuando sustituimos en (2) medidas por pseudomedidas de norma menor o igual a 1. Esta noción no sabemos que sea equivalente a la nuestra; de hecho la Conjetura 2.5 implica esta equivalencia. No entramos en más detalles sobre ello. Establezcamos la relación entre diámetro aritmético y los números de recubrimiento.

Proposición 3.1. *Sean A un conjunto finito de caracteres, y $r > 1$. Se tiene*

$$d(A, r) \leq N_A^*\Big(\frac{r-1}{r}\Big) \leq N_A^\infty\Big(\operatorname{sen}(1/2)\frac{r-1}{r}\Big).$$

Demostración. La segunda desigualdad es consecuencia del Teorema 2.2. Para probar la primera, pongamos $\eta = (r-1)/r$, y probemos que si F es un subconjunto de $\mathbf{G}$ tal que las bolas abiertas para la distancia $d_{A,*}$, centradas en los puntos de F, y de radio η recubren $\mathbf{G}$; entonces F es un conjunto de r-mayoración para $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$.

Esto no es complicado. Si $f \in \mathcal{C}_A(\mathbf{G})$, tomamos $x \in \mathbf{G}$ tal que $\|f\|_\infty = |f(x)|$. Existe un punto $y \in F$ tal que $d_{A,*}(x,y) < \eta$, lo que implica que

$$|f(x) - f(y)| \leq \eta \|f\|_\infty ,$$

y por tanto $|f(y)| \geq (1-\eta)\|f\|_\infty$, lo que concluye la prueba.

□

Antes dijimos que el logaritmo de $d(A)$ domina a $q(A)$; esto se puede ver usando un resultado de teoría local de espacios de Banach, que dice que si ℓ_1^n es C-isomorfo a un subespacio de ℓ_∞^d; entonces $\log d \geq \phi(C)n$. También se pueden usar métodos probabilísticos similares a los usados en el Capítulo 6 de [K2]. Nosotros lo veremos como consecuencia fácil de la relación entre $d(A)$ y otra cantidad que presentamos ahora.

Si A es un conjunto finito de caracteres, y $r > 1$ entonces un simple argumento de compacidad nos demostraría que existe un $p \geq 1$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq r\|f\|_p , \qquad \text{para todo } f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G}). \tag{3}$$

Denotaremos $p(A,r)$ al ínfimo de los p verificando (3). No hemos podido dar una relación entre $d(A,r)$ y $p(A,r)$ para el mismo r; sin embargo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Para todo par s y r de números reales verificando $s > r > 1$, existen dos constantes positivas $\phi_1(r,s)$ y $\phi_2(r,s)$ tales que para todo conjunto finito A de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$, que contiene algún elemento que no es el 1, se tienen:*

a) $p(A,s) \leq \phi_1(r,s) \log d(A,r)$.

b) $\log d(A,s) \leq \phi_2(r,s)\, p(A,r)$.

Demostración de a). Sea $f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$ con $\|f\|_\infty = 1$. Denotamos, para $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\Delta(f,\varepsilon) = \{x \in \mathbf{G} : |f(x)| \geq \varepsilon\} . \tag{4}$$

Vamos a probar que si $d = d(A, r)$; entonces tenemos

$$\mathbf{m}(\Delta(f, 1/r)) \geq \frac{1}{d} . \tag{5}$$

Si suponemos (5) probado es fácil concluir. Se tendría para todo $p \geq 1$,

$$\|f\|_p^p \geq \frac{1}{dr^p} .$$

Luego si $s > r$, tomando

$$p = \frac{\log d}{\log(s/r)}$$

se tendría $\|f\|_p \geq 1/s$, lo que probaría a).

Para probar (5), tomamos $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ un conjunto de r-mayoración para $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$. Hemos de hacer notar que, para todo x en $\mathbf{G}$, la trasladada f_x también pertenece a $\mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$; por lo tanto, para todo $x \in \mathbf{G}$ existe j tal que $|f_x(x_j)| \geq 1/r$; es decir

$$x_j - x \in \Delta(f, 1/r) .$$

Se tiene entonces que

$$\mathbf{G} = \bigcup_{j=1}^{d} \left(-x_j + \Delta(f, 1/r)\right) ;$$

lo que evidentemente implica (5).

Demostración de b). Para cada $f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$, con $\|f\|_\infty = 1$, y $\varepsilon \in (0, 1)$, sigamos denotando por $\Delta(f, \varepsilon)$ al conjunto de (4). Sean

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right), \qquad \text{y} \quad t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) .$$

Si $p = p(A, r)$, se tiene, para $f \in \mathrm{Pol}_A(\mathbf{G})$ y $\|f\|_\infty = 1$,

$$\frac{1}{r^p} \leq \int_{\mathbf{G}} |f|^p \, d\mathbf{m} \leq t^p \Big(1 - \mathbf{m}(\Delta(f, t))\Big) + \|f\|_\infty^p \mathbf{m}(\Delta(f, t)) ;$$

de donde se sigue la acotación

$$1 - \mathbf{m}(\Delta(f, t)) \leq \frac{1 - (1/r)^p}{1 - t^p} . \tag{6}$$

Se sabe (ver [P2,pag.49]) que podemos encontrar en la esfera unidad de $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$ una δ-red $\mathcal{E}$ cuyo cardinal verifica la acotación

$$|\mathcal{E}| \le \left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{2|A|}.$$

Si encontramos un conjunto finito F en $\mathbf{G}$ tal que se tenga

$$\max_{x\in F}|f(x)| \ge t\,, \qquad \text{para toda } f\in\mathcal{E}; \tag{7}$$

entonces ese conjunto es de s-mayoración para $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$. En efecto, si $g\in\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$, y $\|g\|_\infty = 1$, existen una función $f\in\mathcal{E}$, y un $x\in F$ tales que

$$\|f-g\|_\infty \le \delta \qquad \text{y} \quad |f(x)|\ge t\,.$$

Esto implica $|g(x)| \ge t-\delta = 1/s$, y por tanto F es de s-mayoración.

Supongamos que d es un entero positivo que verifica

$$\left(\frac{1-(1/r)^p}{1-t^p}\right)^d \left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{2|A|} < 1\,. \tag{8}$$

Veamos que entonces $d(A,s)\le d$. Por (6), se tendrá, para cada $f\in\mathcal{E}$, en el grupo $\mathbf{G}^d$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{G}^d}\left[\left(\mathbf{G}\setminus\Delta(f,t)\right)^d\right] \le \left(\frac{1-(1/r)^p}{1-t^p}\right)^d;$$

y usando (8) que

$$\mathbf{m}_{\mathbf{G}^d}\left[\bigcup_{f\in\mathcal{E}}\left(\mathbf{G}\setminus\Delta(f,t)\right)^d\right] < 1\,,$$

lo que implica que existe $(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\mathbf{G}^d$ tal que

$$(x_1,x_2,\ldots,x_d)\notin\bigcup_{f\in\mathcal{E}}\left(\mathbf{G}\setminus\Delta(f,t)\right)^d.$$

Es decir, para cada $f\in\mathcal{E}$ existe un j tal que $x_j\in\Delta(f,t)$, o lo que es lo mismo, el conjunto $F=\{x_1,x_2,\ldots,x_d\}$ verifica (7), y por lo tanto es de s-mayoración.

Para concluir la demostración tenemos que probar que hay un d verificando (8) y que satisface una acotación como la dada en el apartado *b)*. Para que d verifique (8) basta que se tenga

$$\frac{4|A|}{\delta} \le d\log\left(\frac{1-t^p}{1-(1/r)^p}\right). \tag{9}$$

Ahora bien, si ponemos $a = \min\{1/r - t, t\}$, se tiene

$$\begin{aligned}\log(1 - t^p) - \log(1 - (1/r)^p) &= \int_t^{1/r} \frac{px^{p-1}}{1 - x^p}\, dx \\ &\geq t^{p-1}(1/r - t) \geq a^p\,,\end{aligned}$$

y se tendrá (9) si $d = 4|A|/\delta a^p$. Luego tomando logaritmos se llega a

$$\log d(A, s) \leq \log(4/\delta) + \log|A| + p(A, r)\log(1/a)\,.$$

Esto implica b) ya que $p(A, r)$ domina a $\log|A|$ (ver la Proposición 3.3 más abajo, o usar que si $f = \sum_{\gamma\in A}\gamma$, entonces $\|f\|_p \leq |A|^{1-1/p}$, para $p \geq 2$).

□

El hecho de que $\log d(A)$ domina a $q(A)$ es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2 y de la siguiente fácil proposición.

Proposición 3.3 *Para todo $s > 1$ se tiene*

$$q(A) \leq 16s^2 p(A, s)\,.$$

Demostración. Es simplemente usar que para un conjunto casi-independiente B su constante de 1-Sidon p.s. es menor que 4, y por lo tanto si $p \geq 1$, y $f \in \mathrm{Pol}_B(\mathbf{G})$, entonces

$$\|f\|_p \leq 4\sqrt{p}\|f\|_2\,.$$

Si ahora B es un casi-indepediente en A con $|B| = q(A)$, tomando en la anterior desigualdad $f = \sum_{\gamma\in B}\gamma$, se deduce para $p = p(A, s)$,

$$|B| = \|f\|_\infty \leq s\|f\|_p \leq 4s\sqrt{p}\|f\|_2 = 4s\sqrt{p|B|}\,,$$

lo que concluye la prueba.

□

Para poder mejorar el Teorema 3.2, en el sentido de relacionar diámetro aritmético relativo a s, y $p(A, s)$ nos bastaría saber que se puede acotar $p(A, r)$ por $p(A, s)$ cuando $s > r$, o que $\log d(A, s)$ acota a $\log d(A, r)$. Desgraciadamente no hemos podido establecer ninguna de estas acotaciones que serían análogas al resultado de Bourgain para el número de recubrimiento, el Lema 2.6. De hecho este lema permitiría probar las acotaciones anteriores si la Conjetura 2.5 fuera cierta.

Hemos visto hasta ahora que $q(A)$ está acotado por $\log d(A)$, y $\log d(A)$ por $\log N_A^\infty$; la Conjetura 2.5 se resumiría diciendo que esta dos acotaciones se pueden invertir; es decir, que son equivalencias. Para acabar esta sección vamos a presentar una construcción que permite probar que si se puede invertir la segunda, entonces se puede invertir también la primera, y la conjetura es cierta. En concreto probaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Si existen $\eta \in (0,1)$, $s > 1$, y $C > 0$ tales que para todo conjunto finito de caracteres A, con más de dos elementos se tiene*

$$\log N_A^\infty(\eta) \leq C \log d(A,s)\,;$$

entonces la Conjetura 2.5 es cierta.

Necesitaremos para la prueba de esta proposición el siguiente lema. En su enunciado $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})^*$ denota el espacio dual de $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$, que es un cociente de $\mathcal{M}(\mathbf{G})$.

Lema 3.5. *Sea A un conjunto finito de caracteres, y supongamos que existe un polinomio P, con $\|P\|_1 = 1$, verificando para cierto $\alpha < 1$,*

$$\|P - \delta_0\|_{\mathcal{C}_A(\mathbf{G})^*} < \alpha, .$$

Entonces, para cada $s > (1-\alpha)^{-1}$, se tiene

$$p(A,s) \leq \frac{\log \|P\|_\infty}{\log\big(s(1-\alpha)\big)}\,.$$

Demostración del Lema 3.5. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ que extiende la acción de P en $\mathcal{C}_A(\mathbf{G})$ y tal que

$$\|\mu - \delta_0\|_{\mathcal{M}(\mathbf{G})} < \alpha < 1\,.$$

Existe pues, en el álgebra de convolución $\mathcal{M}(\mathbf{G})$, un inverso ν de μ, de forma que $\nu * \mu = \delta_0$ y $\|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbf{G})} \leq (1-\alpha)^{-1}$.

Para todo $\gamma \in A^{-1}$ se tendría

$$\widehat{\nu}(\gamma) = \widehat{\mu}(\gamma)^{-1} = \widehat{P}(\gamma)^{-1}. \tag{10}$$

Tomando las correspondientes simetrizadas de P, μ y ν, en lugar de estas medidas, podemos suponer que (10) se verifica para todo $\gamma \in A$. Definimos la función $g = P * \nu$ que satisface lo siguiente

$$\|g\|_1 \leq \|P\|_1 \|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbf{G})} \leq \frac{1}{1-\alpha},$$
$$\|g\|_\infty \leq \|P\|_\infty \|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbf{G})} \leq \frac{\|P\|_\infty}{1-\alpha}.$$

Podemos por tanto acotar, cualesquiera que sean p y p' exponentes conjugados

$$\|g\|_{p'} \leq \|g\|_1^{1/p'} \|g\|_\infty^{1/p} \leq \frac{\|P\|_\infty^{1/p}}{1-\alpha} = s,$$

si hemos escogido

$$(1/p)\log \|P\|_\infty = \log\bigl(s(1-\alpha)\bigr).$$

Si ahora $f \in \mathcal{C}_A(\mathbf{G})$, se tiene $f = f * g$, pues por la construcción para cada $\gamma \in A$ es $\widehat{g}(\gamma) = 1$. De aquí que

$$\|f\|_\infty = \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \leq s\|f\|_p.$$

Luego por la definición de $p(A,s)$, se tiene

$$p(A,s) \leq \frac{\log \|P\|_\infty}{\log\bigl(s(1-\alpha)\bigr)}.$$

□

Demostración de la Proposición 3.4. Vamos a ver que se verifica la conjetura para $\varepsilon = \sqrt{3}$. Sean pues A un conjunto finito de caracteres de un grupo abeliano compacto $\mathbf{G}$, y $T_A \colon \mathbf{G} \to \mathbb{T}^A$ el homomorfismo continuo

$$T_A(x) = \bigl(\gamma(x)\bigr)_{\gamma\in A}, \qquad x \in \mathbf{G}.$$

Para el problema que nos concierne, podemos identificar $\mathbf{G}$ con su imagen $T_A(\mathbf{G})$ en $\mathbb{T}^A$, y los caracteres de A con las correspondientes proyecciones de $\mathbb{T}^A$ sobre $\mathbb{T}$.

Supondremos entonces que $\mathbf{G}$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^n$, y que los caracteres que consideramos son las proyecciones ρ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Así utilizaremos las notaciones $d(\mathbf{G})$, $q(\mathbf{G})$, $p(\mathbf{G})$ para los caracteres $\{\rho_j : j = 1, \ldots, n\}$ considerados en $\mathbf{G}$. La distancia será entonces la inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{C}^n$. Dado $r > 1$, vamos a construir otro subgrupo $\mathbf{H}$ de $\mathbb{T}^n$, que contiene a $\mathbf{G}$ y tal que se tiene

$$\kappa(r)\, q(\mathbf{G}) \geq p(\mathbf{H}, r)\,, \tag{11}$$

para cierto $\kappa(r) > 0$.

Una vez probado (11) será fácil concluir; ya que,

$$N(\mathbf{G}, \|\cdot\|_\infty; \sqrt{3}) \leq N(\mathbf{H}, \|\cdot\|_\infty; 1)\,,$$

porque dos puntos en $\mathbf{G}$ que disten más de $\sqrt{3}$, no pueden estar en una misma bola abierta de radio 1 (al sumar los ángulos se ve que si z, w y u son tres números complejos de módulo uno, tales que $|z-w| < 1$, y $|w-u| < 1$, entonces $|z-u| < \sqrt{3}$); y por tanto el cardinal de un conjunto $\sqrt{3}$-separado maximal en $\mathbf{G}$ es menor que $N(\mathbf{H}, \|\cdot\|_\infty; 1)$, y mayor que $N(\mathbf{G}, \|\cdot\|_\infty; \sqrt{3})$.

De la hipótesis de la proposición se sigue

$$\begin{aligned}\log N(\mathbf{G}, \|\cdot\|_\infty; \sqrt{3}) &\leq \log N(\mathbf{H}, \|\cdot\|_\infty; 1) \leq \log N(\mathbf{H}, \|\cdot\|_\infty; \eta) \\ &\leq C \log d(\mathbf{H}, s)\,,\end{aligned}$$

usando el Teorema 3.2 para algún $r < s$,

$$\leq C\phi_2(r,s) p(\mathbf{H}, r) \leq C\phi_2(r,s)\kappa(r) q(\mathbf{G})$$

al utilizar (11).

Para construir $\mathbf{H}$ verificando (11), utilizamos primero el Teorema 1.6, encontrando para cierto $\varepsilon \in (0,1)$ que luego determinaremos, un polinomio $P \in \mathrm{Pol}(\mathbf{G})$ tal que

$$\begin{aligned} &\|P\|_1 = 1\,, \\ &\log \|P\|_\infty \leq \varphi(\varepsilon) q(A)\,, \\ &1 \geq \widehat{P}(\rho_j) \geq 1 - \varepsilon\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Sea $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ que verifique $m \geq 2\pi/\varepsilon$. Podemos tomar un elemento a en $\mathbb{T}^n$ tal que todas sus coordenadas sean raices $m|A|$-ésimas de la unidad y tal que

$$|\Re\rho_j(a) - \widehat{P}(\rho_j)| < \frac{2\pi}{m|A|} \leq \frac{\varepsilon}{|A|}\,, \tag{13}$$

$$\Re\rho_j(a) \geq 1 - \varepsilon\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{14}$$

El elemento a tiene orden menor o igual que $m|A|$; por lo tanto, si tomamos como $\mathbf{H}$ el subgrupo engendrado por $\mathbf{G}$ y a, tenemos que

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} \cup a\mathbf{G} \cup a^2\mathbf{G} \cup \ldots \cup a^{m|A|-1}\mathbf{G},$$

y $\mathbf{H}$ es un subgrupo compacto que contiene a $\mathbf{G}$ y verifica $|\mathbf{H}/\mathbf{G}| \leq m|A|$.

Definimos ahora la función $R: \mathbf{H} \to \mathbb{C}$ como

$$R(x) = \begin{cases} |\mathbf{H}/\mathbf{G}| \cdot P(x) & \text{si } x \in G, \\ 0 & \text{si } x \notin G. \end{cases}$$

Con esta elección, R resulta ser un polinomio en $\mathbf{H}$ que verifica para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, si $\mathbf{m_G}$ y $\mathbf{m_H}$ denotan las medidas de Haar en $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ respectivamente,

$$\begin{aligned} \widehat{R}(\rho_j) &= \int_H \overline{\rho_j}(x) R(x)\, d\mathbf{m_H}(x) = \int_{\mathbf{G}} |\mathbf{H}/\mathbf{G}| \overline{\rho_j}(x) P(x)\, d\mathbf{m_H}(x) \\ &= \int_{\mathbf{G}} \overline{\rho_j}(x) P(x)\, d\mathbf{m_G}(x) = \widehat{P}(\rho_j). \end{aligned}$$

Por tanto, si $A = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$, teniendo en cuenta (13),

$$\left\| \frac{\delta_a + \delta_{\overline{a}}}{2} - R \right\|_{\mathcal{C}_A(\mathbf{H})^*} \leq \sum_{j=1}^{n} |\Re(\rho_j(a)) - \widehat{R}(\rho_j)| \leq \frac{\varepsilon}{|A|}|A| = \varepsilon.$$

De (14) es fácil deducir que $|\rho_j(a) - 1| \leq \sqrt{2\varepsilon}$; luego por el Teorema 2.2

$$\|\delta_a - \delta_0\|_{\mathcal{C}_A(\mathbf{H})^*} = d^*_{\mathbf{H}}(a, 0) \leq \frac{d_\infty(0, a)}{\operatorname{sen}(1/2)} \leq \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\operatorname{sen}(1/2)}.$$

Las dos últimas acotaciones implican

$$\|R - \delta_0\|_{\mathcal{C}_A(\mathbf{H})^*} \leq \varepsilon + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\operatorname{sen}(1/2)} \leq 5\sqrt{\varepsilon}.$$

Como $\|R\|_1 = 1$, podemos aplicar el Lema 3.5 si se elige ε para que se tenga, por ejemplo, $r(1 - 5\sqrt{\varepsilon}) = (1 + r)/2$. Se deduciría entonces, usando además (12),

$$\begin{aligned} p(\mathbf{H}, r) &\leq \frac{\log \|R\|_\infty}{\log((1 + r)/2)} \leq \frac{\log(m|A|) + \log \|P\|_\infty}{\log((1 + r)/2)} \\ &\leq \frac{\log m(\varepsilon) + \log |A| + \varphi(\varepsilon) q(\mathbf{G})}{\log((1 + r)/2)} = \kappa(r) q(\mathbf{G}), \end{aligned}$$

para cierto $\kappa(r) > 0$, usando que $\log_3 |A| \leq q(\mathbf{G})$. Con esto se prueba (11) y se concluye.

□

Con la construcción que hemos usado en la demostración de la última proposición se puede probar que, si se usa la noción de diámetro aritmético expuesta en [GM], entonces el logaritmo del diámetro aritmético de A es equivalente a $q(A)$.

También conviene resaltar que en el caso $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbb{T}^n$, y usando las notaciones de la demostración precedente, sería lógico que se tuviera $d(\mathbf{G}) \leq d(\mathbf{H})$. Esto no parece tan evidente; de hecho si esto fuera así, la construcción hecha en la demostración probaría que $\log d(A)$ y $q(A)$ son cantidades equivalentes.

Bibliografía.

[A] A. D. ALEKSANDROV, *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen.* Math. Sbornik N. S. **2** (1937), 1205–1238.

[AD] R. ANANTHARAMAN, J. DIESTEL, *Sequences in the range of a vector measure,* Department of Mathematical Sciences, Kent State University.

[BDS] R. G. BARTLE, N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, *Weak compactness and vector measures,* Canad. J. Math. **7** (1955), 289–305.

[Bl] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel,* Veit, Leipzig (1916).

[Ble] R. BLEI, *Combinatorial dimension and certain norms in Harmonic Analysis,* Am. J. Math. **106** (1984), 847–887.

[BK] R. C. BLEI, T. W. KORNER *Combinatorial dimension and random sets.* Israel J. Math. **47** (1984), 65–74.

[Bo] E. D. BOLKER, *A class of convex bodies,* Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 323–346.

[B1] J. BOURGAIN, *Sidon sets and Riesz products,* Ann. Inst. Fourier, **35** (1985), 137–148.

[B2] J. BOURGAIN, *Subspaces of L^∞_N arithmetical diameter and Sidon sets,* Probability in Banach spaces V, Proceeding Medford 1984, Springer Lecture Notes in Mathematics, No 1153, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1985), 96–127.

[B3] J. BOURGAIN, *A remark on entropy of abelian groups and the invariant uniform approximation property,* Studia Math. **86** (1987), 79–84.

[BP] M. BOŻEJKO, T. PYTLIK, *Some types of lacunary Fourier Series,* Colloq. Math. **25** (1972), 117–124.

[Ca] B. Carl, *Entropy numbers of diagonal operators with an application to eigenvalue problems,* J. Approx. Theory, **32** (1981), 135–150.

[C] G. Choquet, *Lectures on analysis, Vol III,* W. A. Benjamin, Reading, Mass. (1969).

[DFJP] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators,* J. Funct. Anal. **17** (1974), 311–327

[D] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces,* Springer-Verlag, New York, Berlin, (1984).

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl Jr., *Vector measures,* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1977).

[Du] R. M. Dudley, *The size of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes,* J. Funct. Anal. **1** (1967), 290–330.

[ER] R. E. Edwards, K. A. Ross, *p-Sidon sets,* J. Funct. Anal. **15** (1974), 404–427.

[F] X. M. Fernique, *Régularité des trajectoires des processus gaussiens,* Ecole d'Eté de St. Flour, Springer Lecture Notes in Mathematics, No 480, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1979).

[GM] C. Graham, C. MacGehee, *Essays in commutative Harmonic Analysis,* Springer-Verlag, New York, Berlin, (1979).

[G] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires,* Mem. Amer. Math. Soc. No **16**, Providence, Rhode Island, (1955).

[K1] J.-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes,* Springer-Verlag, New York, Berlin, (1970).

[K2] J.-P. Kahane, *Some random series of functions,* Second ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1985).

[KK] I. Kluvánek, G. Knowles, *Vector measures and control systems,* North-Holland, Amsterdam, (1975).

[LP] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, *Absolutely summing operator in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications,* Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[LR] J. M. López, K. A. Ross, *Sidon sets,* Marcel Dekker, New York, (1975).

[MP] M. B. Marcus, G. Pisier, *Random Fourier series with applications to Harmonic Analysis,* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1981).

[M] G. Matheron, *Un théoréme d'unicité pour les hyperplans poissoniens,* J. Appl. Prob. **11** (1974), 184–189.

[PP] A. Persson, A. Pietsch, *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen,* Studia Math. **33** (1969), 19–62.

[Pe] C. M. Petty, *Centroid surfaces,* Pacific J. Math. **11** (1961), 1535–1547.

[P1] G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces,* Amer. Math. Soc. (Regional conference series No **60**), Providence, Rhode Island, (1986).

[P2] G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1989).

[P3] G. Pisier, *Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2,* exposé 14, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977–1978, Ecole Polytechnique, Paris, (1978).

[P4] G. Pisier, *Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues,* exposé 17–17, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977–1978, Ecole Polytechnique, Paris, (1978).

[P5] G. Pisier, *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon,* Math. Anal. and Appl., Part B, Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol. **7B** (L. Nachbin editor), (1981), 685–726.

[P6] G. Pisier, *Conditions d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon.* Topics in Modern Harmonic Analysis, Proceedings of a seminar held in Torino and Milano, 1982, Instituto Nazionale di alta Matematica Francesco Severi, Roma, (1983), 911–944.

[Ric] N. W. Rickert, *Measures whose range is a ball,* Pacific J. Math. **23** (1967), 361–371.

[Ri] D. Rider, *Randomly continuous functions and Sidon sets,* Duke Math. J. **42** (1975), 759–764.

[Rie] M. A. RIEFFEL, *The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral,* Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 466–487.

[Ro1] L. RODRÍGUEZ PIAZZA, *Caractérisation des ensembles p-Sidon p.s.,* C. R. Acad. Sci. Paris, **305** (1987), 237–240.

[Ro2] L. RODRÍGUEZ PIAZZA, *The range of a vector measure determines its total variation,* Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 205–214.

[R1] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups,* John Wiley & Sons, New York, (1967).

[R2] W. RUDIN, *Trigonometric series with gaps,* J. Math. Mech. **9** (1960), 203–227.

[S] R. SCHNEIDER, *Functional equations connected with rotations and their geometric applications,* L'Enseignement Math. **16** (1970), 297–305.

[SW] R. SCHNEIDER, W. WEIL, *Zonoids and related topics,* en: P. M. Gruber, J. M. Wills, editors, Convexity and its applications, Birkhäuser-Verlag, Basel, (1983), 296–317.

[Sc] G. Schwarz, *Variations on vector measures,* Pacific J. Math. **23** (1967), 373–375.

[V] N. TH. VAROPOULOS, *Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques,* C. R. Acad. Sci. Paris, **260** (1965), 3831–3834.

LUIS RODRIGUEZ-PIAZZA

RANGO Y PROPIEDADES DE MEDIDAS VECTORIALES. CONJUNTOS p-SIDON p.S.

APTO "CUM LAUDE")

26 SEPTIEMBRE 91