

PROPIEDADES DIFERENCIALES DE FAMILIAS DE  
POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES  
Y APLICACIONES

Memoria presentada por  
Manuel Domínguez de la Iglesia  
para optar al grado de  
Doctor en Matemáticas

Fdo.: Manuel Domínguez de la Iglesia

Vº. Bº. El Director de la Tesis Doctoral

Fdo.: Antonio J. Durán Guardado  
Catedrático de Análisis Matemático  
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, noviembre de 2007



*Caminante, son tus huellas  
el camino, y nada más;  
caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.  
Al andar se hace el camino  
y al volver la vista atrás  
se ve la senda que nunca  
se ha de volver a pisar.  
Caminante, no hay camino,  
sino estelas en la mar.*

ANTONIO MACHADO



*A Luiza*



## AGRADECIMIENTOS

Deseo comenzar estos agradecimientos por mi tutor y director de tesis Antonio Durán. Aún recuerdo aquella tarde de noviembre de 2003 en la que me contestó a un correo electrónico que le envié solicitando información sobre el puesto de becario para su proyecto de investigación. Mi línea iba encaminada por Geometría Diferencial y Topología, en manos de Luis M. Fernández, mi primer tutor. Sin embargo, Antonio mencionaba proyectos nuevos e interesantes y me animaba a seguir la idea de que “la rama cursada durante la carrera no condiciona para nada la investigación posterior”, de lo que tenía buena experiencia. A él debo el inicio, el recorrido y el final de esta aventura que comenzó hace cuatro años y que espero que no sea la última.

Mi agradecimiento en segundo lugar a Alberto Grünbaum, por acogerme como un hijo cada una de las veces que lo he visitado en Berkeley, California, y por mostrarme su peculiar manera de hacer Matemáticas. A él debo gran parte de este trabajo, así como innumerables charlas y consejos que perdurarán para siempre en mi memoria. Gracias también a toda su familia, en especial a su esposa Loli, por hacerme sentir como si estuviera en mi propia casa.

Gran responsable de todo este esfuerzo ha sido y es mi pareja Luiza, a la que dedico esta memoria, por su ánimo, confianza y paciencia durante estos tres últimos años. De ella he aprendido que con integridad, constancia y superación se pueden cosechar los mejores frutos. Sin su amor, sinceridad y cariño este trabajo no hubiera sido posible.

A mis padres y a mi hermano les agradezco que siempre hayan estado orgullosos de mí, aunque muchas veces no entendiesen muy bien lo que estaba haciendo. A ellos debo una educación basada en el esfuerzo y el sacrificio. Si soy algo en esta vida, es debido a ellos.

Finalmente, me gustaría agradecer a todos mis amigos. A Paco, a Rafa y a toda su familia, y a otros tantos que omitiré, por animarme en todo momento y por haber estado cuando les he necesitado. A mis compañeros de despacho y de promoción, en especial a Alejandro, Manuel y Bea, por haber recorrido todo este camino juntos.

Después de este largo camino, de tantos viajes, de tantos congresos y conferencias, de decepciones y alegrías y de inolvidables experiencias, sólo me queda añadir que aún queda mucho por recorrer y que este camino sólo acaba de empezar.



## Resumen

Una de las vías más fructíferas de aplicación de la teoría de polinomios ortogonales se produce a través de las ecuaciones diferenciales de segundo orden satisfechas por las familias clásicas de Hermite, Laguerre y Jacobi. Por citar un par de ejemplos significativos, se pueden encontrarlos en la modelización de los sistemas cuánticos básicos no relativistas —ecuación de Schrödinger— o en los problemas de equilibrio electrostático —con potencial logarítmico—.

En el caso de la ortogonalidad matricial, hasta muy recientemente no se han descubierto las primeras familias de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes independientes del grado del polinomio. Además de ser autofunciones del correspondiente operador diferencial, los polinomios ortogonales lo son también de un operador en diferencias, propiedad ésta muy conveniente para los cálculos de las correspondientes entropías cuánticas y de información, así como de sus potenciales aplicaciones físico-cuánticas que se derivan del tipo de ecuaciones a resolver en los modelos cuánticos relativistas como, por ejemplo, la ecuación de Dirac.

La presente memoria se inserta en la teoría de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales. Las dos diferencias fundamentales entre el producto de matrices y el de números (no conmutatividad y existencia de matrices singulares) determinan, aparte de una mayor riqueza estructural, la aparición de nuevos fenómenos ausentes en los ejemplos clásicos escalares. Buena parte de los resultados principales de esta memoria consisten en haber puesto de manifiesto por primera vez algunos de estos fenómenos. Para ello, hemos desarrollado nuevos métodos para encontrar familias de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales. Estos nuevos fenómenos son, por un lado, la existencia de varias familias distintas —en número infinito— de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un mismo operador diferencial de segundo orden, y, por otro lado, la existencia de familias de polinomios ortogonales matriciales —no reducible a escalares— verificando ecuaciones diferenciales de orden impar. Indagamos también en la naturaleza de otro fenómeno recientemente descubierto: la existencia de varios operadores diferenciales de segundo orden que tienen a una misma familia de polinomios ortogonales matriciales como autofunciones. Finalmente, aportamos una prometedora vía de aplicación de las nuevas familias a un tipo especial de procesos de vida y muerte, los llamados procesos *quasi-birth-and-death*.



# Índice general

Introducción	I
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Polinomios ortogonales matriciales de variable real . . . . .	1
1.2. Operadores diferenciales de segundo orden . . . . .	6
1.2.1. Operadores diferenciales simétricos . . . . .	7
1.2.2. Ecuaciones de simetría . . . . .	8
1.2.3. Un método de resolución de las ecuaciones de simetría . . . . .	9
1.3. El álgebra de operadores diferenciales . . . . .	11
1.4. Funciones esféricas matriciales . . . . .	14
1.5. La función hipergeométrica matricial . . . . .	23
1.6. Cadenas de Markov . . . . .	24
1.6.1. Definiciones básicas . . . . .	24
1.6.2. Relación con polinomios ortogonales . . . . .	27
1.6.3. Procesos <i>quasi-birth-and-death</i> . . . . .	31
<b>2. Operadores diferenciales simétricos con respecto a pesos matriciales</b>	<b>35</b>
2.1. Ecuaciones de simetría para operadores de orden genérico . . . . .	35
2.2. Operadores diferenciales simétricos con respecto a más de un peso matricial	41
<b>3. Algunos ejemplos instructivos de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden</b>	<b>47</b>
3.1. El peso $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$ . . . . .	48
3.1.1. Operadores diferenciales de segundo orden . . . . .	50
3.1.2. Fórmulas de estructura . . . . .	59
3.2. El peso $W_{\alpha, \alpha} + \delta_0 M$ . . . . .	61
3.3. Polinomios ortogonales matriciales asociados al espacio proyectivo complejo	63
3.3.1. El ejemplo de 1 salto . . . . .	64
3.3.2. El ejemplo de 2 saltos . . . . .	72
<b>4. Operadores diferenciales con varias familias de polinomios ortogonales matriciales como autofunciones</b>	<b>83</b>
4.1. Pesos con una delta de Dirac en cualquier punto . . . . .	84

4.1.1.	Pesos de la forma $e^{-t^2} e^{\Lambda t} e^{\Lambda^* t}$ , con $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . . . . .	84
4.1.2.	Pesos de la forma $t^\alpha e^{-t} t^B t^{B^*}$ , con $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . . . . .	86
4.1.3.	Pesos de la forma $t^\alpha e^{-t} e^{\Lambda t} t^J t^{J^*} e^{\Lambda^* t}$ , con $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . . . . .	88
4.1.4.	Pesos de la forma $t^\alpha (1-t)^\beta T(t) T(t)^*$ . . . . .	90
4.2.	Pesos con una delta de Dirac en puntos específicos . . . . .	92
4.2.1.	El peso $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$ . . . . .	92
4.2.2.	El ejemplo de 1 salto . . . . .	93
4.3.	Otros ejemplos . . . . .	95
4.3.1.	El ejemplo de 2 saltos . . . . .	95
4.3.2.	El peso $e^{-t^2} e^{\Lambda t^2} e^{\Lambda^* t^2}$ , $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , para operadores de orden 4 . . . . .	96
4.3.3.	El peso $t^\alpha e^{-t} e^{\Lambda t} e^{\Lambda^* t}$ , $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , para operadores de orden 4 . . . . .	97
<b>5.</b>	<b>El álgebra de operadores diferenciales</b> . . . . .	<b>99</b>
5.1.	El peso $W_{\alpha, a}$ . . . . .	100
5.2.	El ejemplo de 1 salto . . . . .	105
5.3.	El ejemplo de 2 saltos . . . . .	108
<b>6.</b>	<b>Aplicaciones: una familia de procesos <i>quasi-birth-and-death</i></b> . . . . .	<b>113</b>
6.1.	La familia de ejemplos . . . . .	114
6.2.	Aspectos probabilísticos . . . . .	119
6.3.	La forma de la medida invariante . . . . .	123
6.4.	Conclusiones . . . . .	127
	<b>Apéndices</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>A.</b>	<b>Datos relacionados con los ejemplos de 1 y 2 saltos</b> . . . . .	<b>129</b>
A.1.	Autofunciones para el ejemplo de 1 salto . . . . .	129
A.2.	Autofunciones para el ejemplo de 2 saltos . . . . .	130
A.3.	Expresiones explícitas de E y F . . . . .	132
A.4.	Expresión de FE . . . . .	137
<b>B.</b>	<b>Fórmulas para los polinomios ortogonales de algunos ejemplos del Capítulo 4</b> . . . . .	<b>139</b>
B.1.	Fórmulas para los polinomios ortogonales de la Sección 4.1.2 . . . . .	139
B.2.	Fórmulas para los polinomios ortogonales de la Sección 4.1.4 . . . . .	140
B.3.	Fórmulas para los polinomios ortogonales de la Sección 4.2.2 . . . . .	141
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>143</b>

# Introducción

Empezaremos con unas pinceladas de historia para ubicar adecuadamente esta memoria en su contexto temático.

Desde sus comienzos en el siglo XVIII, las funciones especiales y, particularmente, los polinomios ortogonales, han tenido orígenes muy ligados a importantes aplicaciones físicas.

La primera familia de polinomios ortogonales la introdujo A. M. Legendre en 1785 estudiando la atracción de un cuerpo por una esfera. Estos polinomios fueron considerados también por P. S. Laplace relacionándolos con funciones esféricas en el contexto del movimiento planetario. Posteriormente, en 1851, O. Rodrigues logró expresar estos polinomios en términos de lo que hoy conocemos como fórmula de Rodrigues.

La generalización de esta familia se debió a K. G. J. Jacobi, quien introdujo una familia de polinomios ortogonales en 1826 que incluía los introducidos por A. M. Legendre. Posteriormente, en 1859, los expresó a partir de la función hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$ .

La siguiente familia, en orden de aparición, fue la de los polinomios de Hermite en 1864, aunque su función peso  $e^{-t^2}$  fue estudiada anteriormente por P. S. Laplace en 1810 como aplicación a la teoría de probabilidades.

La última familia (de las llamadas clásicas), los polinomios de Laguerre  $L_n^\alpha$ , fueron introducidos por E. N. Laguerre en 1879 (para  $\alpha = 0$ ) buscando una solución para la integral  $\int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt$  desarrollada en fracciones continuas, aunque ya eran parcialmente conocidos por N. H. Abel y J. L. Lagrange. Poco después, la generalización para  $\alpha > -1$  la realizó N. Y. Sonin, un estudiante de P. L. Chebyshev.

Estos ejemplos esporádicos condujeron, en el tercer cuarto del siglo XIX, a la teoría general sobre polinomios ortogonales, cuyos primeros pioneros fueron T. S. Stieltjes y P. L. Chebyshev.

El estudio de las fracciones continuas llevó a Stieltjes a establecer una versión primitiva del teorema de Favard, demostrando que para una sucesión de polinomios  $(p_n)_n$  con  $\text{grad } p_n = n$ , son equivalentes ser ortonormales con respecto a una distribución no decreciente  $\psi$ , i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(t)p_m(t)d\psi(t) = \delta_{nm},$$

y verificar una relación de recurrencia a tres términos de la forma

$$tp_n(t) = a_{n+1}p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_n p_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots,$$

con  $a_{n+1} > 0$  y  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Esto último se puede también expresar afirmando

que los polinomios de la familia  $(p_n)_n$  son autovectores para un operador en diferencias de segundo orden asociado a una matriz de Jacobi tridiagonal semi-infinita (simétrica).

En este mismo trabajo, Stieltjes introdujo el llamado *problema de momentos*, que consiste en determinar condiciones sobre una sucesión de números  $(\mu_n)_n$  para que exista una distribución no decreciente  $\psi$  tal que  $\mu_n = \int_0^\infty t^n d\psi(t)$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Por su parte, P. L. Chebyshev estudió una variedad de problemas relacionados con polinomios ortogonales, como por ejemplo, el de la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua, introduciendo los hoy conocidos polinomios de Chebyshev de primera especie.

La teoría de polinomios ortogonales quedó plenamente constituida en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* de Gabor Szegő [Sz].

Las familias clásicas de Hermite, Laguerre y Jacobi <sup>1</sup> no sólo tienen la propiedad de generarse mediante una relación de recurrencia a tres términos, sino que están caracterizadas por ser autofunciones de un operador diferencial de segundo orden de la forma

$$d = \sigma(t)\partial^2 + \tau(t)\partial^1, \quad \partial = \frac{d}{dt},$$

donde  $\sigma$  y  $\tau$  son polinomios de grado a lo sumo 2 y 1. Esta caracterización de las familias clásicas lleva el nombre de S. Bochner [Boch], aunque una caracterización similar había sido estudiada más de 40 años antes por E. Routh [Rou].

Hay otras caracterizaciones para las familias clásicas:

1. Son los únicos polinomios ortogonales cuyas derivadas son de nuevo ortogonales (Sonin, 1887 y posteriormente, W. Hahn en 1935, [H]).
2. Son las únicas familias que se pueden expresar en términos de una fórmula de Rodrigues

$$p_n(t) = \frac{\kappa_n}{\rho(t)} [\rho(t)\sigma^n(t)]^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la correspondiente función peso (Tricomi, 1955, [Tri]).

3. Son ortogonales con respecto a un peso positivo  $\rho$  que verifica una ecuación diferencial de tipo Pearson

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho, \quad \sigma, \tau \text{ polinomios con } \text{grad } \sigma \leq 2, \quad \text{grad } \tau = 1, \quad (2)$$

(Hildebrandt, 1931, [Hil]).

Algunas de las aplicaciones físicas más importantes de los polinomios ortogonales tienen precisamente que ver con las ecuaciones diferenciales que satisfacen (véase [CH, MF]). Aquí se pueden citar la modelización de sistemas cuánticos básicos, como por ejemplo la ecuación estacionaria de Schrödinger (caso no relativista) o la ecuación de Klein-Gordon (caso relativista), y los problemas de equilibrio electrostático (con potencial logarítmico).

---

<sup>1</sup>No se considera aquí la familia de Bessel cuya medida de ortogonalidad no es positiva.

Otras aplicaciones importantes tienen que ver con entropías de Shannon, compresión de la información, combinatoria, teoría de grupos y teoría de colas.

Una extensión de los polinomios clásicos se debe a H. L. Krall quien, en 1938, se planteó clasificar las soluciones polinómicas de una ecuación diferencial (de tipo hipergeométrico, i.e., cuyos coeficientes son polinomios de grados no mayores que el orden de diferenciación correspondiente) de orden  $2n$ , [Kr1]. También probó que el orden de la ecuación diferencial no podía ser impar. En 1940 clasificó todas las familias de polinomios ortogonales verificando este tipo de ecuaciones de cuarto orden, [Kr2]. Aparte de las familias clásicas, encontró las siguientes: un peso de tipo Laguerre  $e^{-t} + M\delta_0$ , un peso de tipo Legendre  $1 + M(\delta_{-1} + \delta_1)$  y un peso de tipo Jacobi  $(1-t)^\alpha + M\delta_0$ , donde  $\delta_{t_0}$  denota la distribución delta de Dirac concentrada en el número real  $t_0$ .

La presente memoria se inserta en una de las extensiones de los polinomios ortogonales, la teoría de polinomios ortogonales con valores matriciales o *polinomios ortogonales matriciales* (POM). Las dos diferencias principales entre el producto de números y el de matrices, i.e., no conmutatividad y existencia de matrices singulares (no son cero, pero no tienen inversa), determinan diferencias fundamentales entre la ortogonalidad escalar y la matricial. Uno de los propósitos de esta memoria es, precisamente, poner de manifiesto algunas de estas diferencias en lo que respecta a los ejemplos de familias de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales.

Los polinomios ortogonales matriciales fueron considerados inicialmente por M. G. Kreĭn en 1949, [K1, K2]. Después fueron estudiados esporádicamente por Ju. Berezans'kiĭ, [Be] y J. S. Geronimo, [Ge], en relación con la teoría de dispersión (*scattering theory*). Su utilidad para resolver ciertos problemas de la teoría escalar (en [D3] se muestra como, para describir el comportamiento asintótico de las derivadas de una familia de polinomios ortogonales  $(p_n)_n$  con respecto a una medida positiva, se necesita también considerar la ortogonalidad matricial de  $(p_n)_n$ ), motivaron el estudio sistemático de la ortogonalidad matricial llevada a cabo por el grupo de investigación dirigido por el profesor A. J. Durán en la Universidad de Sevilla.

Durante los últimos 20 años se han estudiado propiedades que extienden los resultados conocidos en el caso escalar: fórmulas de recurrencia con extensión del teorema de Favard ([D2, D3, DvA]), propiedades asintóticas ([D6, DLS, DD1, DD2, YMP1, YMP2]), aspectos algebraicos, propiedades de ceros, fórmulas de cuadratura gaussiana ([D4, DL1, DD, DP, SvA, DS]) o problemas de densidad y problemas de momentos matriciales ([DL2, DL3, DL4, LR1, LR2]).

Al igual que en el caso escalar, la ortonormalidad de una sucesión  $(P_n)_n$  con respecto a un peso matricial  $W$  (definido positivo), i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{nm} I,$$

es equivalente a una relación de recurrencia a tres términos para  $(P_n)_n$  con coeficientes matriciales de la forma

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots,$$

con  $\det(A_{n+1}) \neq 0$  y  $B_n$  hermítica,  $n = 0, 1, \dots$ . Esta relación de recurrencia se puede escribir en términos de una matriz de Jacobi tridiagonal por bloques semi-infinita (hermítica)

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

afirmando que los polinomios de la familia  $(P_n)_n$  son autofunciones del correspondiente operador en diferencias definido por  $\mathcal{L}$ .

Teniendo en cuenta la importancia teórica y aplicada de las familias clásicas de Hermite, Laguerre y Jacobi en el caso escalar, es natural preguntarse qué familias de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  son autofunciones de cierto operador diferencial matricial de segundo orden de la forma

$$P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0(t) = \Lambda_n P_n(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

donde  $F_2, F_1$  y  $F_0$  son polinomios matriciales (independientes de  $n$ ) de grado a lo sumo 2, 1 y 0, respectivamente, y los autovalores  $\Lambda_n$  no dependen de  $t$ . Esta cuestión fue planteada por A. Durán en 1997, [D5], pero no ha sido hasta muy recientemente (2003, [GPT4, G1] y 2004, [DG1]) cuando se han encontrado las primeras familias de polinomios ortogonales matriciales (donde el peso matricial no es equivalente a una colección diagonal de pesos escalares) verificando ecuaciones diferenciales de la forma anterior. Obsérvese que los coeficientes  $F_2, F_1$  y  $F_0$  van multiplicados a derecha y los autovalores  $\Lambda_n$  a izquierda. Por razones que se comentarán más adelante (véase [D5] o también la Sección 1.2 del Capítulo 1 de la presente memoria), este es el orden apropiado en el que hay que multiplicar los coeficientes y los autovalores de la ecuación diferencial en el caso matricial. La ecuación diferencial (3) es equivalente a buscar operadores diferenciales de segundo orden de la forma

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0, \quad \partial = \frac{d}{dt}, \quad (4)$$

teniendo a los polinomios  $(P_n)_n$  como autofunciones, i.e.,  $P_n D = \Lambda_n P_n$ . Aquí, siempre que aparezca el operador diferencial  $D$  a derecha del argumento  $P_n$  querrá decir que sus coeficientes van multiplicados a derecha.

En los últimos años se han desarrollado principalmente dos métodos para encontrar ejemplos de familias de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales como (3):

1. Resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales matriciales, con ciertas condiciones de contorno, que constituyen la versión no conmutativa de la ecuación de Pearson (2). Estas ecuaciones son las siguientes:

$$F_2 W = W F_2^*,$$


---

$$\begin{aligned} 2(F_2W)' &= F_1W + WF_1^*, \\ (F_2W)'' - (F_1W)' + F_0W &= WF_0^*, \end{aligned}$$

donde  $W$  es el peso matricial y  $F_2, F_1, F_0$  los coeficientes del operador diferencial (4) ([GPT4, DG1, DG2, DG4, DG5, DdI1, D7]).

2. Recurriendo a técnicas de teoría de representación de grupos para la obtención de funciones esféricas matriciales asociadas al espacio proyectivo complejo  $P_n(\mathbb{C}) = SU(n+1)/U(n)$  ([GPT1, GPT3, GPT5, PT2]).

Otros métodos consisten en a) resolver, análogamente al punto 1, un conjunto de ecuaciones de momentos, como en [D5, DdI2], y b) considerar el aspecto *bi-espectral* del problema, esto es, buscar polinomios matriciales que sean autofunciones de un operador en diferencias de segundo orden (relación de recurrencia a tres términos) y un operador diferencial de segundo orden (3), lo que da lugar a las llamadas *ad-conditions* (como en [CG1, CG3, GT]. Véase también el artículo seminal [DG], donde se estudia el caso escalar continuo-continuo). En este último caso, la ortogonalidad matricial puede desaparecer, pues el tipo de fórmula de recurrencia considerada no equivale a la ortogonalidad de las soluciones polinomiales.

Es previsible que las familias de polinomios ortogonales matriciales que verifican ecuaciones diferenciales de segundo orden tengan en la ortogonalidad matricial el rol fundamental que los polinomios clásicos (Hermite, Laguerre y Jacobi) tienen en el caso escalar, tanto desde el punto de vista teórico como del aplicado. De ahí su importancia y el interés que su reciente descubrimiento y estudio ha suscitado en el campo de las funciones especiales. Las investigaciones realizadas han puesto de manifiesto la riqueza y complejidad del caso matricial, sin comparación posible con el escalar. Frente a las tres únicas familias del caso escalar, las novedosas técnicas recientemente desarrolladas para el caso matricial (véase [D7, DG1, GPT1, GPT4]) muestran una plétora casi inabarcable de familias; abundancia apenas entrevista todavía porque, apenas superada la dificultad intrínseca del problema, van a ser necesarias nuevas técnicas e ideas para ordenar la profusión de los ejemplos aparecidos. Se está muy lejos todavía de una clasificación análoga a la que Bochner obtuvo para el caso escalar.

También se quiere hacer aquí mención a los importantes aspectos aplicados de estas familias de polinomios ortogonales matriciales. Buena parte de las importantes aplicaciones físicas o tecnológicas de las funciones especiales deriva del tipo de ecuaciones diferenciales que verifican. Además de ser autofunciones del correspondiente operador diferencial, los polinomios ortogonales lo son también de un operador en diferencias que implica su ortogonalidad con respecto a una función peso, propiedad ésta muy conveniente para los cálculos de las correspondientes entropías cuánticas y de información. El problema bi-espectral del que son solución los polinomios ortogonales clásicos tiene una versión matricial cuyas potenciales aplicaciones físico-cuánticas derivan del tipo de ecuaciones a resolver en los modelos cuánticos relativistas, por ejemplo, la ecuación de Dirac. Existen indicios de las prometedoras aplicaciones que cabe esperar en esos ámbitos de las familias de polinomios ortogonales matriciales que verifican ecuaciones diferenciales de segundo orden:

- i) Se ha descubierto la aparición de una de estas familias como solución de la ecuación de Dirac con potencial coulombiano en los niveles de energía mínimos para el átomo de hidrógeno (véase [DG6]).
- ii) Se ha mostrado la existencia de solución para un problema de *time-and-band limiting* asociado al núcleo reproductor de una de estas familias, siguiendo el trabajo seminal en procesamiento de señales que C. Shannon, D. Slepian, H. Landau y H. Pollak hicieron en los Laboratorios Bell en la década de los sesenta (véase [DG2]).

Aparte de la mayor riqueza en familias de polinomios ortogonales verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo (3), que ha mostrado el caso matricial sobre el escalar, han aparecido también varios fenómenos muy interesantes ausentes en los ejemplos clásicos escalares. Buena parte de los resultados principales de esta memoria consisten, precisamente, en haber puesto de manifiesto por primera vez algunos de estos fenómenos:

- ) Mostramos ejemplos de que pueden existir varias familias distintas (en número infinito) de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un mismo operador diferencial de segundo orden.
- ) Mostramos ejemplos de familias de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).

Indagamos también en la naturaleza de otro fenómeno recientemente descubierto (véase [GPT1]): la existencia de varios operadores diferenciales de segundo orden que tienen a una misma familia de polinomios ortogonales matriciales como autofunciones.

Como otro resultado original aportamos una prometedora vía de aplicación de las nuevas familias a un tipo especial de procesos de vida y muerte.

Para poner de manifiesto estos fenómenos hemos encontrado nuevas familias (y desarrollado nuevos métodos) de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales.

La estructura de esta memoria es como sigue. Comienza con un primer capítulo de definiciones y resultados básicos que se utilizarán en toda la memoria. El resto de capítulos (2-6) contiene las aportaciones originales.

En el Capítulo 2, por un lado, describiremos las ecuaciones de simetría no conmutativas para operadores diferenciales de cualquier orden; el resultado cabe interpretarlo como una versión matricial de las condiciones de L. L. Littlejohn para la simetría de operadores diferenciales en el caso escalar (véase [Li]). Por otro lado, desarrollamos un método para encontrar operadores diferenciales simétricos comunes para pesos matriciales distintos. Consideramos que haber puesto de manifiesto por primera vez este fenómeno es el resultado más interesante de esta memoria. El tipo de pesos matriciales con esta propiedad que nosotros hemos encontrado difieren en una delta de Dirac, i.e., son de la forma  $W + \gamma \delta_{t_0} M$ , donde  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \geq 0$  y  $M$  es cierta matriz hermítica semidefinida positiva.

En el Capítulo 3 introducimos diversos ejemplos nuevos de polinomios ortogonales matriciales que nos servirán para ilustrar los fenómenos a los que hacíamos referencia antes. De entre estos ejemplos destacamos dos. El primero es

$$W(t) = t^\alpha e^{-t} e^{A t} t^{\frac{1}{2}} J t^{\frac{1}{2}} J^* e^{A^* t}, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1,$$

donde  $A$  es la matriz nilpotente con  $N - 1$  parámetros

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

y  $J$  la matriz singular diagonal

$$J = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este peso matricial tiene siempre un operador diferencial de segundo orden, y cuando se definen los parámetros  $\nu_i$ ,  $i = 1, \dots, N-2$ , en términos de  $\nu_{N-1}$  de la siguiente manera

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2,$$

obtenemos otro nuevo operador diferencial simétrico de segundo orden linealmente independiente.

Para ilustrar, mostraremos aquí el caso  $2 \times 2$ . El peso matricial tiene entonces la forma

$$W(t) = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t(1+|a|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (5)$$

y tiene dos operadores diferenciales simétricos de segundo orden linealmente independientes:

$$D_1 = \partial^2 t I + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha + 2 - t & at \\ 0 & \alpha + 1 - t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+|a|^2}{|a|^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

y

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -2at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha + 2 + t & -\frac{(2+|a|^2(2\alpha+5))t}{a} \\ \frac{2}{a} & -t - \alpha - 1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2}{|a|^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+|a|^2)}{a} \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}.$$

Los polinomios ortogonales se expresan en términos de una *fórmula de Rodrigues* (modificada con respecto a la clásica escalar (1)) de la forma

$$\mathcal{P}_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & -a(1+\alpha) \\ 0 & 1/\lambda_{n,a} \end{pmatrix} \left[ t^{\alpha+n} e^{-t} \left( \begin{pmatrix} t(1+|a|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]^{(n)} W^{-1},$$

donde  $\lambda_{n,\alpha} = 1 + n|\alpha|^2$ .

El segundo ejemplo destacable ilustra el fenómeno de existencia de varias familias distintas de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un mismo operador diferencial, comentado anteriormente. En concreto, modificando el peso matricial (5) en la forma

$$W_\gamma(t) = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t(1 + |\alpha|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} |\alpha|^2(\alpha + 1)^2 & \alpha(\alpha + 1) \\ \bar{a}(\alpha + 1) & 1 \end{pmatrix} \delta_0(t), \quad \gamma \geq 0, \quad (7)$$

encontramos el siguiente operador de segundo orden simétrico con respecto a todos los pesos  $W_\gamma$ ,  $\gamma \geq 0$ :

$$D = \partial^2 \begin{pmatrix} 0 & -at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} t & -\frac{(1+|\alpha|^2(\alpha+3))t}{\bar{a}} \\ \frac{1}{\alpha} & -(\alpha+1) \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{|\alpha|^2+1}{|\alpha|^2} & -\frac{(1+|\alpha|^2)(\alpha+1)}{\bar{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el Capítulo 4 aplicamos el método comentado en la segunda parte del Capítulo 2 para construir familias uniparamétricas de polinomios matriciales mónicos  $(P_{n,\gamma})_n$  con  $\gamma \geq 0$ , ortogonales con respecto a pesos matriciales de la forma  $W + \gamma\delta_{t_0}M$ ,  $\gamma \geq 0$ , tal que son autofunciones de un mismo operador diferencial  $D$ , i.e.,  $P_{n,\gamma}D = \Lambda_n P_{n,\gamma}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , donde ni el operador  $D$  ni los autovalores  $\Lambda_n$  dependen de  $\gamma$ .

El modo de proceder para encontrar estos ejemplos se basa en elegir un peso matricial  $W$  que tenga varios operadores diferenciales de segundo orden linealmente independientes. A continuación se le añade a  $W$  una distribución delta de Dirac  $\gamma\delta_{t_0}M$  y determinamos unas condiciones sobre los coeficientes del operador diferencial evaluados en  $t_0$  y sobre  $M$  para que exista un operador diferencial a la vez simétrico con respecto a todos los pesos matriciales  $W + \gamma\delta_{t_0}M$ ,  $\gamma \geq 0$ .

Este método nos permite introducir una extensa variedad de ejemplos, destacando casos donde el punto  $t_0$  puede estar localizado en cualquier punto de la recta real (sin importar si está fuera o dentro del soporte del peso matricial) o casos donde la dimensión matricial es arbitraria.

Para ilustrar, mostramos otro ejemplo, aparte del introducido en (7). Sea  $W_\alpha$  el siguiente peso matricial (introducido en [DG1])

$$W_\alpha(t) = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

y  $(P_n)_n$  una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a  $W_\alpha$ . El espacio lineal de operadores diferenciales que tienen a  $(P_n)_n$  por autofunciones de orden  $n$  a lo sumo dos tiene dimensión (compleja) cinco. Una base está formada por la identidad y cuatro operadores diferenciales de segundo orden linealmente independientes (véase Sección 6 de [CG2]). Mostramos que todos los pesos matriciales  $W_{\alpha,\gamma} = W_\alpha + \gamma\delta_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma \geq 0$ , comparten el siguiente operador diferencial simétrico de segundo orden:

$$D_\alpha = \partial^2 \begin{pmatrix} 1 - at & -1 + \alpha^2 t^2 \\ -1 & 1 + at \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} -2\alpha - 2t & 2\alpha + 2(2 + \alpha^2)t \\ 0 & -2t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1 & 2\frac{2+\alpha^2}{\alpha^2} \\ \frac{4}{\alpha^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo es uno de los que admite que  $t_0$  esté localizado en cualquier punto de la recta real (véase la Sección 4.1.1).

En el Capítulo 5, para los ejemplos introducidos en el Capítulo 3, se estudia el álgebra

$$\mathcal{D}(W) = \{D : P_n D = \Lambda_n(D) P_n, n = 0, 1, 2, \dots\},$$

de todos los operadores diferenciales de cualquier orden que tienen a una familia  $(P_n)_n$  (ortogonal con respecto a  $W$ ) como autofunciones. El primer estudio de esta álgebra para una colección de cinco ejemplos se llevó a cabo en [CG2]. Posteriormente, otros autores estudiaron diferentes ejemplos (véase [GdI1, DdI1]). Más recientemente se ha hecho un estudio más teórico de este conjunto en [GT]. En el caso escalar, se ha probado en [M2], que estas álgebras, para las familias clásicas de polinomios ortogonales, son isomorfas a un anillo de polinomios en una variable con coeficientes complejos. Sin embargo, en el caso matricial, la situación es más compleja, y sólo se han podido formular conjeturas en los artículos mencionados anteriormente. Sólomente una de estas conjeturas ha sido probada recientemente en [T3]. Para los ejemplos introducidos en el Capítulo 3, conjeturamos, basándonos en evidencias computacionales, que las álgebras  $\mathcal{D}(W)$  están finitamente generadas y proponemos un sistema de generadores.

Ilustramos aquí un ejemplo. En el álgebra asociada al peso matricial (5) aparece el fenómeno de existencia de operadores diferenciales de orden impar al que hacíamos referencia anteriormente. Mostramos que (5) tiene asociado el siguiente operador diferencial simétrico de orden tres:

$$\begin{aligned} D_3 = & \partial^3 \begin{pmatrix} -|a|^2 t^2 & at^2(1 + |a|^2 t) \\ -\bar{a}t & |a|^2 t^2 \end{pmatrix} \\ & + \partial^2 \begin{pmatrix} -t(2 + |a|^2(\alpha + 5)) & at(2\alpha + 4 + t(1 + |a|^2(\alpha + 5))) \\ -\bar{a}(\alpha + 2) & t(2 + |a|^2(\alpha + 2)) \end{pmatrix} \\ & + \partial^1 \begin{pmatrix} t - 2(\alpha + 2)(1 + |a|^2) & \frac{|a|^2(\alpha+1)(\alpha+2)+t(1+2|a|^2(1+|a|^2(\alpha+2)))}{\bar{a}} \\ -\frac{1}{\bar{a}} & 2\alpha + 2 - t \end{pmatrix} \\ & + \partial^0 \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\frac{1}{\bar{a}}(1 + \alpha)(|a|^2\alpha - 1) \\ \frac{1}{\bar{a}} & -(1 + \alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De hecho, hay dos operadores diferenciales simétricos linealmente independientes de tercer orden asociados. Esta es la primera familia de pesos matriciales dada (con peso no reducible a escalares) que se conoce que tiene operadores diferenciales de orden impar.

Evidencias computacionales nos permiten conjeturar que su correspondiente álgebra está generada por tres elementos: la identidad, el operador de segundo orden  $D_1$  dado en (6) y el operador de tercer orden  $D_3$  anterior (excepto para ciertos valores excepcionales de los parámetros  $\alpha$  y  $a$ ). El problema de demostrar estas conjeturas para cada uno de los ejemplos estudiados en el Capítulo 5 queda como problema abierto.

Por último, en el Capítulo 6, exploramos una aplicación de la teoría de polinomios ortogonales matriciales a un tipo especial de procesos de nacimiento y muerte, los llamados

procesos *quasi-birth-and-death*<sup>2</sup>. Este tipo de procesos son un tipo especial de procesos estocásticos de la teoría de colas.

Es conocido que existe una relación directa entre cadenas de Markov sobre el espacio de los enteros no negativos y matrices tridiagonales semi-infinitas *estocásticas*. Estocástica significa que las entradas son no negativas y la suma de cada fila es igual a 1. De esta manera se relacionan naturalmente procesos de vida y muerte en tiempo discreto (o caminatas al azar) con polinomios ortogonales escalares en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Los procesos *quasi-birth-and-death* en tiempo discreto son una extensión de las caminatas al azar considerando matrices tridiagonales semi-infinitas por bloques. Mientras que los procesos de nacimiento y muerte sólo consideran las transiciones entre los vecinos más cercanos, los procesos *quasi-birth-and-death* tienen en cuenta transiciones entre estados después de los vecinos más cercanos.

Por ejemplo, en  $2 \times 2$ , un caso particular del ejemplo que mostraremos en el Capítulo 6 nos lleva a la siguiente matriz de probabilidades de transición pentadiagonal (tridiagonal por bloques  $2 \times 2$ ):

$$P = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc|c|c|c} b_0 & a_0 & d_0 & 0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & d_1 & 0 & & \\ \hline e_2 & c_2 & b_2 & a_2 & d_2 & 0 & \\ 0 & e_3 & c_3 & b_3 & a_3 & d_3 & 0 \\ \hline & 0 & e_4 & c_4 & b_4 & a_4 & d_4 & 0 & \ddots \\ & & 0 & e_5 & c_5 & b_5 & a_5 & d_5 & \ddots \\ \hline & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots \end{array} \end{pmatrix},$$

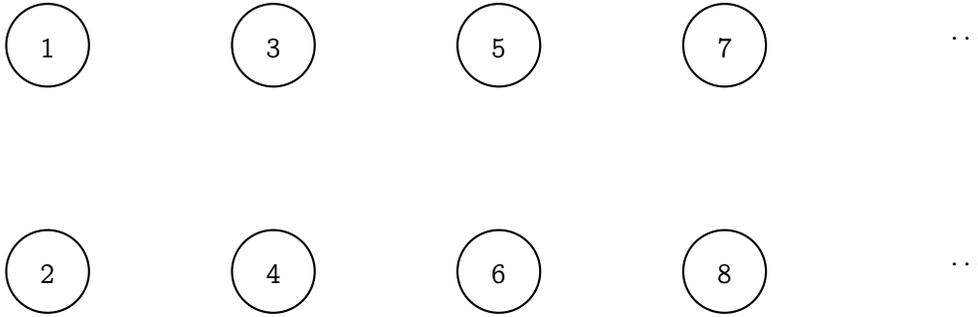
donde todas las entradas son no negativas y las filas suman 1.

Cada una de las transiciones de probabilidades corresponde con la probabilidad de pasar de un estado o los vecinos más próximos en una configuración de doble cadena

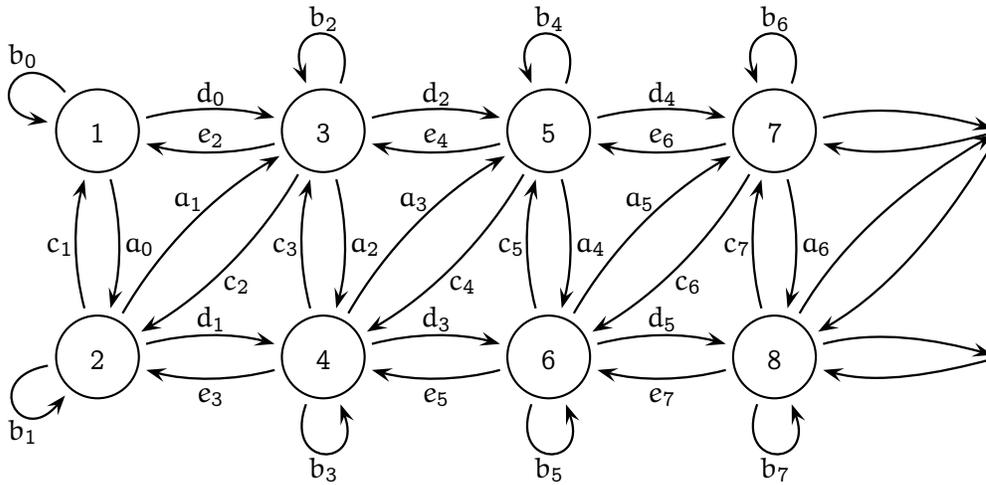
---

<sup>2</sup>Una posible traducción al español sería procesos de cuasi nacimiento y muerte, pero, para no confundir, se seguirá la nomenclatura anglosajona.

---



y puede visualizarse mejor mediante el siguiente diagrama:



Las matrices  $A_n = \begin{pmatrix} d_{2n} & 0 \\ a_{2n+1} & d_{2n+1} \end{pmatrix}$ ,  $B_n = \begin{pmatrix} b_{2n} & a_{2n} \\ c_{2n+1} & b_{2n+1} \end{pmatrix}$  y  $C_n = \begin{pmatrix} e_{2n} & c_{2n} \\ 0 & e_{2n+1} \end{pmatrix}$  permiten definir una familia de polinomios matriciales  $(P_n)_n$  a partir de la fórmula de recurrencia

$$tP_n(t) = A_n P_{n+1}(t) + B_n P_n(t) + C_n P_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots,$$

cuya medida de ortogonalidad (caso de que exista y se pueda calcular explícitamente) facilitará considerablemente el estudio probabilístico del modelo.

Motivados por [G2] y tomando la familia de ejemplos introducido en [PT2] (para cualquier tamaño matricial), consideramos una familia de polinomios ortogonales matriciales

cuya correspondiente matriz de Jacobi es estocástica, es decir, todas sus entradas son no negativas y todas sus filas suman 1, y con especiales propiedades probabilísticas. Por lo tanto la matriz de Jacobi se convierte en una matriz de probabilidades de transición. Esto constituye de manera natural una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Además, en este capítulo se estudian otras nociones probabilísticas, como la recurrencia del proceso, la matriz de transición en  $n$  pasos (que coincide con  $P^n$ ), dada en términos de la fórmula de Karlin-McGregor, o la medida invariante. La disponibilidad en este caso de la expresión explícita del peso matricial de ortogonalidad juega un papel muy importante para el estudio de estos objetos.

El número de ejemplos disponibles en la literatura para los que se dispone de una expresión explícita del peso matricial es bastante limitado, de ahí la importancia de estos ejemplos.

---

# Capítulo 1

## Preliminares

*De pequeños principios surgen grandes fines.*

ALEJANDRO MAGNO

En este capítulo se introducen definiciones y resultados básicos no originales de la memoria, pero que se usarán a lo largo de todos los capítulos, al objeto de hacer más fácil su lectura. Se definirá la noción de polinomios ortogonales matriciales de variable real; en especial los que satisfacen ecuaciones diferenciales de segundo orden. También se introduce el concepto de álgebra de operadores diferenciales asociada a un peso matricial y algunas de sus propiedades básicas como la existencia de adjuntos en la misma álgebra. Asimismo, se hará una pequeña introducción sobre funciones esféricas matriciales y conceptos sobre probabilidad que nos permitan introducir los procesos *quasi-birth-and-death*.

### 1.1. Polinomios ortogonales matriciales de variable real

Se denota por  $\mathbb{C}^N$  al conjunto de vectores con  $N$  componentes complejas y por  $\mathbb{C}^{N \times N}$  al conjunto de matrices cuadradas con entradas complejas de tamaño  $N \times N$ . Para designar al conjunto de polinomios matriciales de variable real se usará la notación  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ . Este es un  $\mathbb{C}^{N \times N}$ -módulo a izquierda (y también a derecha)

$$\mathbb{C}^{N \times N}[t] = \left\{ \sum_{k=0}^n A_k t^k : A_k \in \mathbb{C}^{N \times N}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si el coeficiente líder de un polinomio matricial  $P \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$  es la matriz identidad, i.e.,  $A_n = I$ , entonces se dice que  $P$  es mónico. De manera obvia, todo polinomio con coeficiente líder no singular se puede hacer mónico simplemente multiplicando por  $A_n^{-1}$  a izquierda (derecha).

El subespacio de polinomios matriciales en  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  de grado no mayor que  $n$  se denotará por  $\mathbb{C}_n^{N \times N}[t]$ . En el caso escalar ( $N = 1$ ), se escribirá  $\mathbb{C}^{1 \times 1}[t] = \mathbb{C}[t]$  y  $\mathbb{C}_n^{1 \times 1}[t] =$

$\mathbb{C}_n[t]$ . Para hacerse una mejor idea, los elementos de  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  son simplemente matrices con entradas polinomiales, o polinomios en la variable  $t$  con coeficientes matriciales.

Los elementos en  $\mathbb{C}^{N \times N}$  se escribirán mediante letras mayúsculas  $A, B, C, \dots$ , mientras que para polinomios matriciales en  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  se usará normalmente  $P, Q, R, \dots$ . Siempre se trabajará sobre el cuerpo de los números complejos, a no ser que se especifique lo contrario, en cuyo caso se respetarán las mismas notaciones hasta ahora introducidas. Si  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ , la *traspuesta* de  $A$  se denotará por  $A^T$ , mientras que la *traspuesta conjugada* de  $A$  está definida por  $A^* = \overline{A}^T$ , donde  $\overline{A}$  es la conjugada de  $A$  componente a componente. Consecuentemente, si  $P(t) = \sum A_k t^k \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ , entonces  $P^*(t) = \sum A_k^* t^k$ .

Se puede operar (sumar, multiplicar, dividir a izquierda o derecha) con polinomios matriciales como si fueran polinomios escalares, pero hay que tener en cuenta dos importantes diferencias. Por un lado, dos polinomios matriciales no tienen por qué conmutar, es decir,  $P(t)Q(t) \neq Q(t)P(t)$ , ya que el producto de matrices no es, en general, conmutativo. Por otro lado,  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  no es un *dominio de integridad*, i.e., que pueden existir divisores de cero debido a la existencia de matrices singulares. Más concretamente, se pueden encontrar elementos no nulos  $P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$  tal que  $P \cdot Q = 0$ . A partir de ahora el símbolo  $0$  se usará para denotar el cero como número, el vector nulo (todas sus componentes iguales a cero) o la matriz nula (todas sus entradas iguales a cero); el contexto suele ser suficiente para diferenciar cada caso.

Una referencia básica sobre polinomios matriciales, aunque no trata la noción de ortogonalidad, es [GLR].

Se define ahora la ortogonalidad matricial. Esta se entenderá con respecto a una matriz de medidas definida positiva y no degenerada o peso matricial  $W$ .

**Definición 1.1.1.** Se dice que una matriz  $W$  de tamaño  $N \times N$  de medidas sobre la recta real es un *peso matricial* si

- (1)  $W(A)$  es semidefinida positiva (en particular hermítica) para cualquier conjunto de Borel  $A \subset \mathbb{R}$ ,
- (2)  $W$  tiene momentos finitos de cualquier orden, i.e.,  $\int t^n dW(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y
- (3)  $\int P(t)dW(t)P^*(t)$  es una matriz no singular si el coeficiente líder de  $P \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$  es no singular.

Como consecuencia, si se denota por  $W_{ij}$  la entrada  $(i, j)$  de un peso matricial  $W$ , se tiene que las entradas diagonales son medidas escalares positivas y las no diagonales son medidas complejas con  $W_{ij} = \overline{W_{ji}}$ .

Si una matriz de medidas  $W$  verificando la condición (1) tiene una parte absolutamente continua  $\frac{dW}{dt}$  con respecto a la medida de Lebesgue que es definida positiva en un conjunto de medida positiva, entonces  $W$  también verifica (3). Este es el caso de todos los pesos matriciales considerados en esta memoria.

Dado un peso matricial  $W$ , se puede definir un producto interno en  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  con valores en  $\mathbb{C}^{N \times N}$  mediante una forma *sesquilineal* hermítica en  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_W : \mathbb{C}^{N \times N}[t] \times \mathbb{C}^{N \times N}[t] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$$

definida por

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t) Q^*(t), \quad P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]. \quad (1.1)$$

*Nota 1.1.2.* La definición de forma sesquilineal actúa sobre elementos de  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  con valores en  $\mathbb{C}^{N \times N}$ . Esto significa que (1.1) es lineal en un argumento y conjugado-lineal en el otro, como se comprueba directamente.

Este producto interno tiene las siguientes propiedades para todo  $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$  y  $P, Q, R \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ :

- $\langle AP + BQ, R \rangle_W = A \langle P, R \rangle_W + B \langle Q, R \rangle_W$ ;
- $\langle P, Q \rangle_W = \langle Q, P \rangle_W^*$ ;
- $\langle P, P \rangle_W \geq 0$ ; y  $\langle P, P \rangle_W = 0$  si y sólo si  $P = 0$ ,

donde  $A \geq B$  significa que  $A - B$  es una matriz semidefinida positiva.

Por razones que se explicarán más adelante, se puede considerar otro producto interno, denotado por  $(\cdot, \cdot)_W$ , cuya definición es

$$(P, Q)_W = \int_{\mathbb{R}} Q^*(t) dW(t) P(t). \quad (1.2)$$

Ambos productos internos están relacionados por la fórmula  $(P, Q)_W = \langle P^*, Q^* \rangle_W^*$ .

Dado un peso matricial  $W$ , se pueden ahora considerar los *polinomios ortogonales matriciales* (o abreviadamente POM) con respecto a la forma sesquilineal definida por  $W$  (1.1). Aplicando el proceso de Gram-Schmidt al conjunto  $\{I, tI, t^2I, \dots\}$  y usando la propiedad (3) de la Definición 1.1.1, se puede generar una familia  $(P_n)_n$  de polinomios ortogonales matriciales con  $\text{grad } P_n = n$  y coeficiente líder no singular tal que

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m} K_n, \quad n, m = 0, 1, \dots,$$

donde  $\delta_{n,m}$  es la delta de Kronecker, y  $K_n = \int_{\mathbb{R}} P_n(t) dW(t) P_n^*(t) = \|P_n\|_{L^2(W)}^2$ . De ahora en adelante siempre se usará esta notación para referirnos a la norma en  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$  con valores en  $\mathbb{C}^{N \times N}$ . Si el coeficiente líder de  $P_n(t)$  es la matriz identidad, se llamarán polinomios ortogonales matriciales *mónicos* (están determinados de manera única). Es directo ver que, usando las propiedades de producto interno,  $K_n$  es siempre una matriz

---

definida positiva. Por consiguiente, siempre se puede generar una familia de polinomios ortonormales  $\mathcal{P}_n(t) = K_n^{-1/2} P_n(t)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_n(t) dW(t) \mathcal{P}_m^*(t) = \delta_{n,m} I, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Es significativo que para cualquier sucesión de matrices unitarias  $(U_n)_n$ , i.e.,  $U_n U_n^* = I$ , entonces la nueva familia  $U_n \mathcal{P}_n(t)$  sigue siendo ortonormal con respecto al mismo peso matricial  $W$ .

Como ocurre en el caso escalar, la ortonormalidad de una sucesión de polinomios matriciales  $(\mathcal{P}_n)_n$ ,  $\text{grad } \mathcal{P}_n = n$ ,  $\mathcal{P}_n$  con coeficiente líder no singular, con respecto a un peso matricial, equivale a una relación de recurrencia a tres términos, pero ahora con coeficientes matriciales:

**Proposición 1.1.3** ([D2] ó [DL5]). *Sea  $(\mathcal{P}_n)_n$  una familia de polinomios matriciales con condiciones iniciales  $\mathcal{P}_{-1}(t) = 0$  y  $\mathcal{P}_0$  una matriz no singular que satisface la fórmula de recurrencia*

$$t\mathcal{P}_n(t) = A_{n+1}\mathcal{P}_{n+1}(t) + B_n\mathcal{P}_n(t) + A_n^*\mathcal{P}_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

donde  $A_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , son matrices no singulares, y  $B_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , son matrices hermiticas (i.e.,  $B_n = B_n^*$ ). Entonces existe un peso matricial  $W$  que hace a la familia  $(\mathcal{P}_n)_n$  ortonormal con respecto al producto interno definido por  $W$  y recíprocamente.

*Nota 1.1.4.* Dada una sucesión de matrices unitarias  $(U_n)_n$ , se mencionó antes que la sucesión  $U_n \mathcal{P}_n(t)$  sigue siendo ortonormal con respecto al mismo peso matricial  $W$ . Los nuevos coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos (1.3) son entonces  $U_{n-1} A_n U_n^*$  y  $U_n B_n U_n^*$ , respectivamente. De hecho, como puede verse en [DvA], siempre puede encontrarse recursivamente una sucesión de matrices unitarias  $(U_n)_n$  tal que  $U_{n-1} A_n U_n^*$  son matrices triangulares inferiores y los coeficiente líderes de  $U_n \mathcal{P}_n(t)$  son también triangulares inferiores.

La relación de recurrencia a tres términos (1.3) puede ser interpretada como un operador en diferencias de segundo orden con coeficientes matriciales  $\mathcal{L} = A_{n+1}E + B_n + A_n^*E^{-1}$ , donde  $Ef(n) = f(n+1)$  es el operador salto. Por lo tanto, los polinomios ortonormales  $(\mathcal{P}_n)_n$  son autofunciones del operador en diferencias de segundo orden  $\mathcal{L}$ , es decir,  $\mathcal{L}\mathcal{P}_n = t\mathcal{P}_n$ , para todo  $n = 0, 1, \dots$

Equivalentemente, usando la notación

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(t) \\ \mathcal{P}_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

el operador  $\mathcal{L}$  se interpreta como una *matriz de Jacobi* semi-infinita y tridiagonal por bloques (hermítica)

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

que satisface

$$\mathcal{L}\mathcal{P} = t\mathcal{P}.$$

*Nota 1.1.5.* Generalmente, no se trabajará con una familia ortonormal. En su lugar, para cualquier familia ortogonal  $(P_n)_n$  siempre se usará la siguiente notación:

$$tP_n(t) = A_n P_{n+1}(t) + B_n P_n(t) + C_n P_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.4)$$

y la correspondiente matriz de Jacobi

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

satisface

$$\mathcal{L}\mathcal{P} = t\mathcal{P}.$$

En el caso en el que se trabaje con la familia mónica, se tiene que  $A_n = I$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Una familia  $(P_n)_n$  que satisface (1.4) no tiene garantizada una medida de ortogonalidad. Son necesarias (y suficientes) ciertas condiciones técnicas sobre  $A_n, B_n$  y  $C_n$  que se omitirán por no ser de interés en esta memoria.

*Nota 1.1.6.* Hay otras maneras de introducir la ortogonalidad matricial. Como puede encontrarse en [M1], no sólo puede hacerse vía Gram-Schmidt, sino también vía los momentos de la medida o vía la relación de recurrencia. En [M1], o con más detalle en [M], se encuentran una serie de fórmulas muy útiles relacionando polinomios, normas o coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos.

Se introducen ahora los conceptos de pesos matriciales similares y pesos matriciales reducibles.

Se dice que dos pesos matriciales  $W_1(t)$  y  $W_2(t)$  son *similares* (por congruencia) si existe una matriz no singular  $T$  (independiente de  $t$ ) tal que  $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ . Por consiguiente, si la familia  $\mathcal{P}_{n,2}(t)$  es ortonormal con respecto a  $W_2(t)$ , la familia  $\mathcal{P}_{n,1}(t) = \mathcal{P}_{n,2}(t)T^{-1}$  es ortonormal con respecto a  $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ .

Dada la noción de pesos similares, es importante destacar dos casos importantes. Se dice que un peso matricial  $W$  se reduce a tamaños inferiores si existe una matriz no singular  $T$  tal que

$$W(t) = T \begin{pmatrix} Z_1(t) & 0 \\ 0 & Z_2(t) \end{pmatrix} T^*,$$

donde  $Z_1$  y  $Z_2$  son pesos matriciales de tamaño inferior. Análogamente, se dice que  $W$  se reduce a pesos escalares (o brevemente a escalares) si existe una matriz no singular  $T$  tal que

$$W(t) = TD(t)T^*,$$

con  $D$  diagonal. Este último es un caso extremo de la situación considerada anteriormente.

Un peso matricial  $W$  que reduce a escalares es, por tanto, una colección de pesos escalares y su estudio es más propio de la ortogonalidad escalar que de la matricial.

Se dispone de un criterio sencillo para saber si un peso se reduce a escalares:

**Proposición 1.1.7** ([DG1]). *Sea  $W = W(t)dt$  con  $W(t)$  continua. Supongamos que existe un número real  $a$ , con  $W(a) = I$ . Entonces  $W$  se reduce a pesos escalares si y sólo si  $W(t)W(s) = W(s)W(t)$  para todo  $t$  y  $s$ .*

## 1.2. Operadores diferenciales de segundo orden

Es natural buscar aquellas familias de polinomios ortogonales matriciales que tengan propiedades adicionales como, por ejemplo, que verifiquen ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes independientes del grado de cada polinomio.

Como se comentó en la Introducción, la situación en el caso escalar es sencilla y bien conocida. En [Boch], o incluso antes en [Rou], se probó que las únicas familias de polinomios ortogonales  $(p_n)_n$  (con respecto a una medida positiva) que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\sigma(t)p_n''(t) + \tau(t)p_n'(t) + \lambda_n p_n(t) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{C}_2[t], \quad \tau \in \mathbb{C}_1[t],$$

son las familias clásicas de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.<sup>1</sup>

En el caso matricial, el problema natural es buscar familias de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  verificando una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0(t) = \Lambda_n P_n(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.5)$$

donde  $F_i \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t]$ ,  $i = 0, 1, 2$ , (independientes de  $n$ ) y los autovalores  $\Lambda_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , no dependen de  $t$ . Es importante fijarse ahora en el orden de multiplicación. Los coeficientes diferenciales van multiplicados a derecha, mientras que los autovalores van multiplicados a izquierda.

---

<sup>1</sup>No se incluyen los polinomios de Bessel que no son ortogonales con respecto a una medida positiva sobre la recta real. Aunque sí tienen una medida, necesariamente signada, en la recta real con respecto a la que son ortogonales. Una expresión explícita de una medida en la recta real con esta propiedad fue encontrada por primera vez por A. J. Durán en [D1], donde se desarrolla un método general para encontrar explícitamente funciones muy regulares con momentos dados.

La ecuación diferencial (1.5) es equivalente a trabajar con el operador diferencial de segundo orden

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0, \quad \partial = \frac{d}{dt}, \quad F_i \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t], \quad (1.6)$$

de manera que los polinomios ortogonales matriciales  $P_n$  son autofunciones de (1.6), es decir

$$P_n D = \Lambda_n P_n.$$

Siempre y cuando aparezca un operador diferencial  $D$  actuando a izquierda o a derecha significará que los coeficientes diferenciales van multiplicados a izquierda o a derecha, respectivamente. La ventaja de esta notación es que respeta la asociatividad de composición de operadores diferenciales, algo que se considerará más detenidamente en la Sección 1.3. Nótese que los operadores diferenciales a derecha son lineales a izquierda, pero no lineales a derecha, es decir,  $(AP)D = A(PD)$  donde  $P$  es cualquier función matricial y  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ , pero, en general,  $(PA)D \neq (PD)A$ .

*Nota 1.2.1.* Se puede desarrollar una teoría similar considerando ecuaciones diferenciales de segundo orden a izquierda con autovalores multiplicados a derecha. En este caso es conveniente utilizar el producto interno (1.2) al igual que la familia  $(P_n^*)_n$ .

Sin embargo, tiene poco sentido considerar ecuaciones diferenciales a derecha con autovalores también a derecha. En primer lugar porque si  $P_n D = P_n \Lambda_n$ , entonces  $P_n D$  no serían ortogonales pues el producto interno (1.1) no es lineal a derecha. Y en segundo lugar, este tipo de ecuaciones genera soluciones donde el correspondiente peso matricial se reduce a escalares ([D5], Teorema 3.2). Estas son las razones principales para centrarse en ecuaciones del tipo (1.5), que sí generan ejemplos no triviales.

### 1.2.1. Operadores diferenciales simétricos

**Definición 1.2.2.** Sea  $D$  un operador diferencial de segundo orden como en (1.6). Se dice que  $D$  es *simétrico* con respecto a un peso matricial  $W$  si es simétrico con respecto al producto interno (1.1) definido por  $W$ , es decir,

$$\langle PD, Q \rangle_W = \langle P, QD \rangle_W$$

para todo  $P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ .

La simetría de un operador diferencial  $D$  con respecto a  $W$  está íntimamente ligada a que los polinomios ortonormales con respecto a  $W$  verifiquen una ecuación diferencial de segundo orden:

**Proposición 1.2.3** ([D5], Lema 2.1, [GT], Lema 4.6). *Sea  $(P_n)_n$  una familia de polinomios ortonormales matriciales con respecto a  $W$ . Entonces un operador diferencial de segundo orden  $D$  del tipo (1.6) es simétrico con respecto a  $W$  si y sólo si  $P_n D = \Lambda_n P_n$  para todo  $n = 0, 1, \dots$  con  $\Lambda_n$  matrices hermiticas. En cuyo caso, existe una familia de polinomios ortonormales matriciales  $(\mathcal{P}_n)_n$  con respecto a  $W$  tal que  $\mathcal{P}_n D = \Delta_n \mathcal{P}_n$  con  $\Delta_n$  matrices diagonales.*

---

Se introduce a continuación la definición de pares similares equivalentes, que completa la definición de pesos matriciales similares dada en la sección anterior teniendo en cuenta un operador diferencial.

**Definición 1.2.4** ([GPT4]). Sean  $\{W_1, D_1\}$  y  $\{W_2, D_2\}$  dos pesos matriciales y dos operadores diferenciales simétricos. Se dice que son *equivalentes* si existe una matriz no singular (independiente de  $t$ )  $T \in \mathbb{C}^{N \times N}$  tal que

$$W_2 = TW_1T^* \quad y \quad D_2 = TD_1T^{-1}.$$

Esta noción de equivalencia permite diferenciar situaciones en las cuales los pesos matriciales reducen a escalares mediante cierta matriz  $T$ , pero los correspondientes operadores diferenciales no factorizan por la misma matriz.

### 1.2.2. Ecuaciones de simetría

En el siguiente teorema se convertirán las condiciones de simetría sobre el operador diferencial en ecuaciones diferenciales matriciales donde intervengan exclusivamente el peso  $W$  y los coeficientes  $F_2$ ,  $F_1$  y  $F_0$ , con algunas condiciones de frontera.

Sea  $D$  un operador diferencial de segundo orden como en (1.6) simétrico con respecto a un peso matricial  $W$ . Se denotarán sus coeficientes diferenciales por  $F_i(t) \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t]$ ,  $i = 0, 1, 2$ , donde  $F_2(t) = F_2^2 t^2 + F_1^2 t + F_0^2$ ,  $F_1(t) = F_1^1 t + F_0^1$  y  $F_0(t) = F_0^0$ . Se denotará también por  $\mu_n = \int t^n dW(t)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , a los momentos del peso matricial  $W$ .

**Teorema 1.2.5** ([DG1], Teorema 3.1). *Son equivalentes:*

(1) *El operador  $D$  es simétrico con respecto a  $W$ .*

(2) *Para  $n = 2, 3, \dots$ ,*

$$F_2^2 \mu_n + F_1^2 \mu_{n-1} + F_0^2 \mu_{n-2} = \mu_n (F_2^2)^* + \mu_{n-1} (F_1^2)^* + \mu_{n-2} (F_0^2)^*, \quad (1.7)$$

*para  $n = 1, 2, \dots$ ,*

$$2(1-n)(F_2^2 \mu_n + F_1^2 \mu_{n-1} + F_0^2 \mu_{n-2}) = F_1^1 \mu_n + F_0^1 \mu_{n-1} + \mu_n (F_1^1)^* + \mu_{n-1} (F_0^1)^*, \quad (1.8)$$

*y para  $n = 0, 1, \dots$ ,*

$$n(n-1)(F_2^2 \mu_n + F_1^2 \mu_{n-1} + F_0^2 \mu_{n-2}) + n(F_1^1 \mu_n + F_0^1 \mu_{n-1}) + F_0^0 \mu_n = \mu_n (F_0^0)^*. \quad (1.9)$$

*Supóngase además que el peso matricial  $W = W(t)dt$  tiene una densidad diferenciable  $W(t)$ ,  $t \in (a, b)$ ,  $a$  y  $b$  números finitos, con respecto a la medida de Lebesgue verificando que las expresiones*

$$F_2(t)W(t), \quad (F_2(t)W(t))' - F_1(t)W(t) \quad (1.10)$$

tienen límite cero en los extremos del soporte de  $W(t)$ ,<sup>2</sup> y que las siguientes ecuaciones diferenciales se satisfacen:

$$F_2W = WF_2^*, \quad (1.11)$$

$$2(F_2W)' = F_1W + WF_1^*, \quad (1.12)$$

$$(F_2W)'' - (F_1W)' + F_0W = WF_0^*. \quad (1.13)$$

Entonces el operador diferencial  $D$  es simétrico con respecto al peso matricial  $W$ .

Las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9) se suelen llamar *ecuaciones de momentos*, mientras que las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) con las condiciones de frontera (1.10) se conocen como *ecuaciones de simetría* (estas ecuaciones también aparecieron en [GPT4]).

*Nota 1.2.6.* Obsérvese que cuando todas las funciones con las que se trabajan son escalares y reales, la primera ecuación (1.11) se satisface trivialmente, la segunda ecuación (1.12) es la conocida *ecuación de Pearson*:

$$(F_2W)' = F_1W,$$

y la tercera ecuación (1.13) es la derivada de la ecuación de Pearson. Como no se está haciendo ninguna hipótesis de conmutatividad, las ecuaciones de simetría matriciales pueden considerarse como las *ecuaciones de Pearson no conmutativas* y son más difíciles de resolver. A diferencia del caso escalar, se está bastante lejos de un posible teorema de clasificación de todas las familias de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.

### 1.2.3. Un método de resolución de las ecuaciones de simetría

Se muestra a continuación un método para resolver las ecuaciones de simetría (1.11), (1.12) y (1.13). Se presentará en el caso general en que  $F_2$  sea un polinomio matricial de grado a lo sumo 2 (según se desarrolla en [D7]) y luego se particularizará cuando  $F_2$  es escalar (tal y como aparece en [DG1]).

**Teorema 1.2.7** ([DG1], Teorema 4.1 y [D7], Teorema 2.2). *Sean  $\rho$ ,  $F_2$ ,  $F_1$  y  $F_0$  una función real escalar y polinomios matriciales de grado a lo sumo 2, 1 y 0, respectivamente. Sea  $C$  la función matricial*

$$C(t) = \frac{(\rho(t)F_2(t))'}{\rho(t)},$$

y la función matricial  $G(t)$  como solución de la ecuación matricial

$$F_1(t) = F_2(t)G(t) + G(t)F_2(t) + C(t), \quad (1.14)$$

---

<sup>2</sup>Si el extremo del intervalo es  $+\infty$  ó  $-\infty$  se asume implícitamente que los límites  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n W(t) = 0$  ó  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n W(t) = 0$  para todo  $n = 0, 1, \dots$

---

siempre que dicha solución exista. Sea  $T$  la solución de la ecuación diferencial matricial de primer orden

$$T'(t) = G(t)T(t), \quad (1.15)$$

y se define la función matricial  $W$  como

$$W(t) = \rho(t)T(t)T^*(t).$$

Entonces, si  $F_2W = WF_2^*$

1.  $W$  satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$2(F_2W)' = F_1W + WF_1^*.$$

2. Si se llama  $\chi(t)$  a la siguiente expresión:

$$\chi(t) = T^{-1}(t)(G(t)F_2(t)G(t) + G'(t)F_2(t) + G(t)C(t) - F_0)T(t), \quad (1.16)$$

$W$  satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$(F_2W)'' - (F_1W)' + F_0W = WF_0^*,$$

si y sólo si la función matricial  $\chi(t)$  es hermítica para todo  $t$ .

El modo de usar el teorema anterior es algo heurístico dada la dificultad de resolver (1.14) partiendo de  $F_2$  y  $F_1$ . Dificultad a la que se añade la resolución posterior de (1.15) y la computación de  $\chi(t)$  (ver (1.16)) para estudiar si es o no hermítica. Un ejemplo de aplicación se puede consultar en [D7] y, también, en el Capítulo 3 de esta memoria.

*Nota 1.2.8.* Cuando  $F_2 = f_2I$  con  $f_2$  un polinomio escalar real, el método explicado en el teorema anterior tiene una implementación directa. En efecto, en este caso la ecuación (1.11) se verifica automáticamente. La ecuación (1.14) permite entonces despejar explícitamente  $G$ :

$$G(t) = \frac{F_1(t) - C(t)}{2f_2(t)}.$$

Cuando se elige  $\rho$  como uno de los pesos clásicos escalares y  $f_2$  el coeficiente diferencial de la ecuación de Pearson para  $\rho$ , la expresión para  $G$  es la siguiente (teniendo en cuenta que  $F_1$  es un polinomio matricial de grado a lo sumo 1):

$$\text{si } \rho(t) = e^{-t^2} \text{ y } f_2(t) = 1 \text{ entonces } G(t) = 2Bt + A,$$

$$\text{si } \rho(t) = t^\alpha e^{-t} \text{ y } f_2(t) = t \text{ entonces } G(t) = A + \frac{B}{t},$$

$$\text{si } \rho(t) = (1+t)^\alpha(1-t)^\beta \text{ y } f_2(t) = 1-t^2 \text{ entonces } G(t) = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t},$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices cualesquiera.

Resolver la ecuación (1.15) en estos casos no es nada trivial. Es más, para valores genéricos de  $A$  y  $B$ , especialmente cuando no conmutan, la solución viene dada en términos

de una serie de potencias que hace inútil su uso para comprobar que  $\chi(t)$  (véase (1.16)) es hermítica. En [DG1] (véase también [DG5]), se encuentran todas las soluciones cuando  $F_2$  es escalar y en el caso en el que una de las matrices  $A$  ó  $B$  se anule. En cada uno de esos casos y para cada uno de los pesos escalares de Hermite, Laguerre o Jacobi, se obtiene dos pesos matriciales nuevos, que tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t} \\ e^{-t^2} e^{At^2} e^{A^*t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^\alpha e^{-t} e^{At} e^{A^*t} \\ t^\alpha e^{-t} t^A t^{A^*} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+t)^\alpha (1-t)^\beta (1+t)^A (1+t)^{A^*} \\ (1+t)^\alpha (1-t)^\beta (1-t)^A (1-t)^{A^*} \end{cases}$$

donde  $A$  es, en cada uno de los casos, una matriz con una forma especial que depende de  $N - 1$  parámetros. Los ejemplos que se usarán en esta memoria son los cuatro primeros para tamaño  $2 \times 2$ , que vienen dados a continuación:

$$\begin{cases} e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 t^2 & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}, & t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 t^4 & at^2 \\ \bar{a}t^2 & 1 \end{pmatrix}, & t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 t^2 & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}, & t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 + |a|^2 (t-1)^2 & a(t-1) \\ \bar{a}(t-1) & 1 \end{pmatrix}, & t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

en cuyos casos la matriz  $A$  viene dada por la matriz nilpotente  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  en los tres primeros pesos y  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  en el último.

### 1.3. El álgebra de operadores diferenciales

En esta sección se introduce el álgebra de operadores diferenciales asociado a un peso matricial  $W$  que considera todos los operadores diferenciales que tienen a una de sus familias de polinomios ortogonales matriciales como autofunciones. Los resultados que se exponen en esta sección están incluidos en [GT].

Sea

$$D = \sum_{i=0}^k \partial^i F_i(t), \quad \partial = \frac{d}{dt},$$

un operador diferencial de cualquier orden  $k$ , donde  $F_i \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ . Se denota por  $\text{ord}(D)$  al orden de  $D$ , que es, por definición, el máximo número natural  $i$  tal que  $F_i \neq 0$ .

Para cualquier función matricial  $P$ , siempre que se diga  $PD$  ó  $DP$  se entenderá que el operador  $D$  actúa a derecha o a izquierda, o sea

$$PD = \sum_{i=0}^k \partial^i(P)F_i(t) \quad \text{ó} \quad DP = \sum_{i=0}^k F_i(t)\partial^i(P),$$

respectivamente. La ventaja de trabajar con esta notación es que respeta la asociatividad de composición de operadores, es decir, para dos operadores diferenciales  $D_1, D_2$ , se tiene que  $P(D_1D_2) = (PD_1)D_2$ . A partir de ahora siempre se usará multiplicación a derecha, a no ser que se diga lo contrario.

En general, la composición de operadores no es conmutativa. Además, si  $\text{ord}(D_1) = r$  y  $\text{ord}(D_2) = s$ , entonces  $\text{ord}(D_1D_2) \leq r + s$ , pero no necesariamente  $r + s$ , ya que ambos coeficientes líderes pueden ser no nulos, pero el producto sí serlo, debido a la existencia de elementos singulares en  $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ .

El álgebra de los operadores diferenciales de orden finito sobre los números complejos con la suma y composición de operadores diferenciales se suele llamar *álgebra de Weyl* y se denota por

$$\mathfrak{D} = \left\{ D = \sum_i \partial^i F_i : F_i \in \mathbb{C}^{N \times N}[t] \right\}.$$

También es interesante considerar la subálgebra  $\mathcal{D}$  del álgebra de Weyl  $\mathfrak{D}$  definida por

$$\mathcal{D} = \left\{ D = \sum_i \partial^i F_i : F_i \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t] \right\}.$$

Cada operador  $D \in \mathcal{D}$  envía  $\mathbb{C}_n^{N \times N}[t]$  en  $\mathbb{C}_n^{N \times N}[t]$  (véase el principio de la Sección 1.1).

Esta sección se centrará en una subálgebra muy especial de  $\mathcal{D}$ . Sea  $W$  un peso matricial y  $(P_n)_n$  una familia fija de polinomios ortogonales matriciales. Considérese el siguiente conjunto:

$$\mathcal{D}(W) = \{ D \in \mathfrak{D} : P_n D = \Lambda_n(D) P_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \}, \quad (1.17)$$

donde  $D$  es un operador diferencial de cualquier orden y  $\Lambda_n(D) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ .

Una de las primeras consecuencias es que todos los coeficientes de  $D \in \mathcal{D}(W)$  deben satisfacer que  $F_i(t) \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t]$ , es decir, los coeficientes diferenciales son polinomios matriciales de grado no mayor que el orden de diferenciación. Por lo tanto,  $\mathcal{D}(W) \subset \mathcal{D}$  es una subálgebra para cualquier peso matricial  $W$ . Además,  $\mathcal{D}(W)$  es independiente de la familia de polinomios ortogonales matriciales que se considera. Si  $(\mathcal{P}_n)_n$  es otra familia, se tiene que existe una sucesión de matrices no singulares  $A_n$  tal que  $\mathcal{P}_n = A_n P_n$ . Por lo tanto

$$\mathcal{P}_n D = A_n P_n D = A_n \Lambda_n(D) P_n = A_n \Lambda_n(D) A_n^{-1} \mathcal{P}_n.$$

Cada operador del álgebra  $\mathcal{D}(W)$  está caracterizado por sus correspondientes autovalores, como muestra la siguiente

**Proposición 1.3.1** ([GT], Proposición 2.8). *Sea  $\mathcal{D}(W)$  el álgebra definida en (1.17). Entonces se tiene que*

- (1) La aplicación  $D \mapsto \Lambda_n(D)$  es una representación de  $\mathcal{D}(W)$  en  $\mathbb{C}^{N \times N}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- (2) La sucesión de representaciones  $(\Lambda_n)_n$  separa elementos de  $\mathcal{D}(W)$ , es decir, si  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(W)$  son distintos, entonces  $\Lambda_n(D_1) \neq \Lambda_n(D_2)$ .

Como consecuencia, cada operador diferencial  $D \in \mathcal{D}(W)$  está completamente determinado por la sucesión de autovalores  $(\Lambda_n)_n$ . El estudio del álgebra  $\mathcal{D}(W)$  se reduce pues al estudio de los correspondientes autovalores  $(\Lambda_n)_n$ .

*Nota 1.3.2.* Dada una familia de polinomios ortogonales matriciales cualquiera, en general no es sencillo calcular su sucesión de autovalores. Sin embargo, para la familia mónica, los autovalores tienen la siguiente expresión explícita:

$$\Gamma_n = \sum_{i=0}^k (n)_i F_i^1(D), \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde  $k$  es el orden del operador diferencial,  $F_i^1(D) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  es el coeficiente líder del polinomio  $F_i(t)$ , y  $(n)_i$  es el factorial acotado, definido por<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} (n)_i &= n(n-1) \cdots (n-i+1), \quad n \geq i > 0, \\ (n)_0 &= 1, \quad (n)_i = 0, \quad i > n \geq 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Esto implica que a la hora de estudiar el álgebra es muy conveniente empezar trabajando con la familia mónica, y luego, si es necesario, usar autovalores equivalentes.

Se tiene también que  $\mathcal{D}(W)$  es una  $*$ -álgebra ([GT], Corolario 4.5). Esto quiere decir que existe un anti-automorfismo anti-lineal  $*$  :  $\mathcal{D}(W) \rightarrow \mathcal{D}(W)$  que es a su vez una involución. Más concretamente, la aplicación  $*$  satisface las siguientes propiedades:

- $(D + E)^* = D^* + E^*$ ;
- $(DE)^* = E^*D^*$ ;
- $(D^*)^* = D$ ;

para todo  $D, E \in \mathcal{D}(W)$ . La existencia de  $*$  se debe a la propiedad de que para todo  $D \in \mathcal{D}(W)$ , existe un operador diferencial  $D^* \in \mathcal{D}(W)$  tal que  $\langle PD, Q \rangle_W = \langle P, QD^* \rangle_W$  para todo  $P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ . Se denotará por  $D^*$  al *adjunto* de  $D$ . Los operadores simétricos son entonces aquellos que verifican  $D = D^*$ .

Llamando  $\mathcal{S}(W)$  al subespacio real de  $\mathcal{D}(W)$  de todos los operadores diferenciales simétricos (véase Definición 1.2.2), se tiene que  $\mathcal{S}(W)$  es una forma real del espacio  $\mathcal{D}(W)$ , es decir,

$$\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W),$$

---

<sup>3</sup>Esta notación suele estar reservada en teoría de funciones especiales para el símbolo de Pochhammer, que se denotará en esta memoria por  $(x)^{(n)}$  (véase (3.38)) siguiendo la notación de [O].

como espacios vectoriales reales. Una consecuencia importante es que teniendo determinado la estructura de  $\mathcal{S}(W)$  todo el álgebra  $\mathcal{D}(W)$  quedará asimismo determinado. De ahí la importancia de disponer de un conjunto de ecuaciones de simetría que relacionen el peso matricial  $W$  con los coeficientes de los operadores diferenciales. Esto ya se hizo en la Sección 1.2.2 para operadores diferenciales de segundo orden. En el Capítulo 2 deduciremos las ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de cualquier orden.

## 1.4. Funciones esféricas matriciales

En esta sección se mostrarán algunas nociones y resultados básicos sobre funciones esféricas matriciales asociadas a espacios homogéneos que permitan encontrar ejemplos de pesos matriciales  $W$  que tengan operadores diferenciales simétricos de segundo orden de una manera diferente a la resolución de las ecuaciones de simetría. El objetivo principal es introducir los ejemplos dados en [GPT5] y en [PT2], que usaremos en los Capítulos 3, 4, 5 y 6, dando definiciones y resultados básicos.

Para seguir sin dificultad esta sección se requieren nociones sobre teoría de representación de grupos y álgebras de Lie. No se incluirán demostraciones; se recomienda al lector acudir al trabajo seminal de J. A. Tirao [T1] y posteriormente el de R. Gangolli y V. S. Varadarajan [GV] para una exposición más completa. Se pueden encontrar referencias más recientes en [GPT1]–[GPT5] y [PT2]. Si el único interés del lector son los ejemplos de pesos matriciales  $W$  y operadores simétricos  $D$  expresados en forma hipergeométrica (i.e., que los coeficientes del operador diferencial sean polinomios matriciales de grado no mayor que el orden de diferenciación), se sugiere que vaya directamente a los ejemplos que se muestran al final de esta sección.

La importancia de las funciones esféricas reside en que constituyen una base natural para el análisis armónico sobre espacios homogéneos de la forma  $G/K$ , donde  $G$  es un grupo unimodular localmente compacto y  $K$  un subgrupo compacto suyo. En el caso escalar, es bien conocida la relación entre estas funciones y los polinomios ortogonales clásicos (véase [He]). La extensión natural al caso matricial es, sin embargo, más compleja. Al igual que ocurre en el caso escalar, representa un enlace natural con la teoría de polinomios ortogonales matriciales.

Los ejemplos que se introducirán en esta sección corresponden al estudio de las funciones esféricas matriciales asociadas al espacio proyectivo  $P_n(\mathbb{C})$  de dimensión  $n$ . Este espacio se identifica con el espacio homogéneo  $G/K$ , donde  $G = \mathrm{SU}(n+1)$  es el grupo de todas las matrices unitarias con determinante 1, y  $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)) \simeq \mathrm{U}(n)$  es un subgrupo de  $G$  cuyos elementos son de la forma

$$\left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right), \quad A \in \mathrm{U}(n), \quad a = (\det(A))^{-1}.$$

**Definición 1.4.1** ([T1]). Sea  $(V_\pi, \pi)$  una representación irreducible de  $K$ . Una *función esférica irreducible* asociada a dicha representación es una función continua  $\Phi : G \rightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$  tal que

(1)  $\Phi(e) = I$  (transformación identidad).

(2)  $\Phi(x)\Phi(y) = \int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi(xky)dk$ , para todo  $x, y \in G$ .

donde  $\chi_\pi$  es la dimensión de la representación por el carácter de dicha representación y  $dk$  es la medida de Haar sobre  $K$ , que es  $K$ -invariante, normalizada por  $\int_K dk = 1$ .

*Nota 1.4.2.* Al ser  $G$  localmente compacto, existe una medida de Haar positiva.

Las funciones esféricas irreducibles de tipo  $\pi$  están caracterizadas por la siguiente

**Proposición 1.4.3** ([GPT1], Proposición 2.4). *Una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$  es una función esférica de tipo  $\pi$  si y sólo si*

(1)  $\Phi$  es analítica.

(2)  $\Phi(k_1 g k_2) = \pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_2)$ , para todo  $k_1, k_2 \in K$ ,  $g \in G$  y  $\Phi(e) = I$ .

(3)  $[\Delta\Phi](g) = \Phi(g)[\Delta\Phi](e)$  para todos los operadores  $\Delta \in D(G)^K$ ,  $g \in G$ .

Al ser  $G$  un grupo de Lie conexo, todas las funciones esféricas son analíticas. En la proposición anterior,  $D(G)$  es el álgebra de todos los operadores diferenciales invariantes a izquierda sobre  $G$ .  $D(G)^K$  es el subálgebra de todos los operadores en  $D(G)$  que son invariantes bajo traslaciones a derecha de elementos de  $K$ . En este caso,  $D(G)^K$  es abeliano e isomorfo a  $D(G)^G \otimes D(K)^K$ . Por un teorema debido a Harish-Chandra,  $D(G)^G$  es isomorfo a una álgebra polinomial en  $n$  generadores algebraicamente independientes. Por lo tanto, para encontrar todas las funciones esféricas, se deberán estudiar todas las soluciones de esas  $n$  ecuaciones diferenciales.

La búsqueda de todas las funciones esféricas asociadas al espacio proyectivo  $P_n(\mathbb{C})$  se está llevando a cabo en [PT4], mientras que en [GPT1] están ya estudiadas para el plano proyectivo  $P_2(\mathbb{C})$ .

Para encontrar ejemplos es conveniente buscar funciones en una clase más grande, el espacio vectorial de las funciones  $\Phi$  tales que se verifica (1) y (2) de la proposición anterior y además

(3)'  $[\Delta_2\Phi](g) = \Phi(g)[\Delta_2\Phi](e)$ ,  $g \in G$ ,

donde  $\Delta_2 \in D(G)^G$  es el *operador de Casimir* de  $G$ , que es un operador simétrico con respecto al producto interno sobre las funciones matriciales en  $G$

$$(\Phi, \Psi) = \int_G \Psi^*(g)\Phi(g)dg. \quad (1.19)$$

El operador de Casimir es la generalización del operador de Laplace-Beltrami para variedades semi-Riemmanianas, usando la forma de Killing para el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

Para cada  $g \in \text{SU}(n+1)$ , se denota por  $A(g)$  al bloque  $n \times n$  superior izquierda de la matriz  $g$ , y se considera el abierto  $\mathcal{A} = \{g \in G : \det(A(g)) \neq 0\}$ . Entonces  $\mathcal{A}$  es invariante a izquierda y derecha bajo la acción de  $K$ . Se define la siguiente función sobre  $\mathcal{A}$ :

$$\Phi_\pi(g) = \pi(A(g)),$$

donde  $\pi$  es la única representación holomorfa de  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  que extiende a la representación dada por la de  $\text{U}(n)$ . Para cada función en dicha clase se le asocia una función  $H : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ , definida por

$$H(g) = \Phi(g)\Phi_\pi(g)^{-1}.$$

Entonces  $H$  verifica que  $H(e) = I$  y que

- a)  $H(gk) = H(g)$ , para todo  $g \in \mathcal{A}$ ,  $k \in K$ .
- b)  $H(kg) = \pi(k)H(g)\pi(k^{-1})$ , para todo  $g \in \mathcal{A}$ ,  $k \in K$ .

La proyección canónica  $p : G \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ , dada por  $g \cdot O$  donde  $O$  es el punto  $(0, 0, \dots, 1)$ , manda el abierto  $\mathcal{A}$  al espacio afín  $\mathbb{C}^n$  de aquellos puntos en  $P_n(\mathbb{C})$  cuya última coordenada es distinta de cero. Luego la propiedad a), por isomorfía, dice que  $H$  puede ser considerada como una función sobre  $\mathbb{C}^n$ . El hecho de que  $\Phi$  sea autofunción de  $\Delta_2$  hace que  $H$  sea autofunción de cierto operador  $\tilde{D}$  sobre  $\mathbb{C}^n$ .

Las representaciones irreducibles de  $\text{U}(n)$  son restricciones de representaciones holomorfas irreducibles de  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ , que están parametrizadas por  $n$ -uplas de números enteros

$$\pi = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n.$$

Al ser un  $\text{GL}(n-1, \mathbb{C})$ -módulo, el espacio  $V_\pi$  se descompone como suma directa de representaciones irreducibles, cada una de multiplicidad 1, es decir

$$V_\pi = \bigoplus_{\mu \text{ entrelazan } \pi} V_\mu,$$

donde esta suma es sobre todas las  $(n-1)$ -uplas tal que satisfacen la siguiente propiedad de entrelazamiento:

$$\mu = (m_1^\mu, m_2^\mu, \dots, m_{n-1}^\mu) \in \mathbb{Z}^{n-1}, \quad m_i \geq m_i^\mu \geq m_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Se pueden encontrar estos resultados en [VK] mejor desarrollados.

Ahora bien, el subgrupo  $M$  de todas las matrices en  $K$  de la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , con  $A \in \text{U}(n-1)$  fija todos los puntos  $(r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ . Como  $H$  verifica la propiedad b), se tiene que  $H$  es escalar  $h_\mu(r)$  sobre cada uno de los  $V_\mu$ . Por lo tanto, para cualquier elección de los  $\mu$  que entrelazan a  $\pi$ , se tiene que  $H$  es un vector de dimensión  $L$ , donde  $L$  es el número de todas las  $(n-1)$ -uplas  $\mu$  que entrelazan a  $\pi$ , es decir

$$H(r) = (h_\mu(r))_\mu \in \mathbb{C}^L, \quad r \geq 0.$$

Esta  $L$  va a jugar el papel de la dimensión matricial en cada uno de los ejemplos que se desarrollen.

Después del cambio de variable  $t = (1 + r^2)^{-1}$  la función  $H(t) = (h_\mu(t))_\mu$  cumple el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$t(1-t)h''_\mu(t) + (s_\pi - s_\mu + 1 - t(s_\pi - s_\mu + n + 1))h'_\mu(t) + \frac{1}{1-t} \left( \sum_{j=1}^{n-1} t_{j,\mu} (h_{\mu+e_j}(t) - h_\mu(t)) \right) + \frac{t}{1-t} \left( \sum_{j=1}^{n-1} s_{j,\mu} (h_{\mu-e_j}(t) - h_\mu(t)) \right) = \lambda h_\mu(t), \quad (1.20)$$

donde  $e_j$  denota el  $j$ -ésimo elemento de la base canónica en  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $s_\pi = \sum_{i=1}^n m_i$ ,  $s_\mu = \sum_{i=1}^{n-1} m_i^\mu$ ,

$$t_{j,\mu} = \frac{\prod_{i=1}^n |m_i - m_j^\mu - i + j|}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ i \neq j}} |m_i^\mu - m_j^\mu - i + j|} \quad \text{y} \quad s_{j,\mu} = \frac{\prod_{i=1}^n |m_i - m_j^\mu - i + j + 1|}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ i \neq j}} |m_i^\mu - m_j^\mu - i + j|}.$$

Este operador  $\tilde{D}$  en la variable  $t$ , debido a que el operador de Casimir es simétrico con respecto a (1.19), es simétrico con respecto al siguiente producto interno (puesto ya en forma matricial) en  $t \in (0, 1)$  (véase la coincidencia con el producto interno (1.2)):

$$(H, K) = \int_0^1 K^*(t) \tilde{W}(t) H(t) dt,$$

donde

$$\tilde{W}(t) = \sum_{\mu \text{ entrelazan } \pi} 2n \dim(V_\mu) (1-t)^{n-1} t^{s_\pi - s_\mu} E_{\mu\mu}$$

y donde la dimensión de  $V_\mu$  puede hallarse usando la fórmula de Weyl

$$\dim(V_\mu) = \prod_{1 \leq i < k \leq n-1} \frac{m_i^\mu - m_k^\mu + k - i}{k - i}.$$

El operador (1.20) tiene sin embargo una expresión dependiente de  $t$  en su coeficiente constante. Para convertir el par  $\{\tilde{W}, \tilde{D}\}$  de manera que el operador sea *hipergeométrico* (i.e., que los coeficientes sean polinomios matriciales de grado no mayor que el orden de diferenciación, o sea, que pertenezca al álgebra  $\mathcal{D}$  de la Sección 1.3) es necesario buscar una conjugación conveniente a través de una función matricial  $\Psi(t)$  (dependiente de  $t$ ) tal que en el par

$$\{\Psi(t) \tilde{W}(t) \Psi^*(t), (\Psi(t)^*)^{-1} \tilde{D} \Psi^*(t)\}$$

el operador diferencial sea hipergeométrico. En los ejemplos que se muestran a continuación se darán estas expresiones de  $\Psi(t)$  y cómo se transforma el peso matricial  $\tilde{W}$  y el operador  $\tilde{D}$ . La obtención de este par equivaldrá a un ejemplo de peso matricial cuyos polinomios ortogonales matriciales sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden. La primera observación de este procedimiento indirecto se encuentra en [GPT3].

A continuación se ilustrarán algunos ejemplos, introducidos en [GPT5] y [PT2].

**Ejemplo 1.4.4** ([GPT5]). Se considera la representación  $\pi$  de  $GL(n, \mathbb{C})$  que corresponde a 1 salto de la forma

$$\pi = (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_k, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k}), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

La fórmula de Weyl implica que

$$\dim V_\pi = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(n-j)(n-j+1)}{(k-j)(k-j+1)}.$$

El hecho de que el salto sea de  $m$  a  $m+2$  significa que van a existir 3 posibles entrelazamientos  $\mu$  y que  $V_\pi$  se descompone en

$$V_\pi = V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus V_{\mu_3},$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k-1}, \underbrace{m, m, \dots, m}_{n-k-1}), \\ \mu_2 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k-1}, m+1, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k-1}), \\ \mu_3 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k-1}, m+2, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k-1}). \end{aligned}$$

Por la misma fórmula de Weyl se tiene que

$$\begin{aligned} \dim V_{\mu_1} &= \prod_{j=0}^{k-2} \frac{(n-j-1)(n-j)}{(k-j-1)(k-j)}, \\ \dim V_{\mu_2} &= k(n-k) \prod_{j=0}^{k-2} \frac{(n-j-1)(n-j)}{(k-j)(k-j+1)}, \\ \dim V_{\mu_3} &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(n-j-1)(n-j)}{(k-j)(k-j+1)}. \end{aligned}$$

Los detalles de cómo se calcula el operador (1.20) y su cambio de variable se pueden encontrar en [GPT5]. Al final, se obtiene el operador

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= t(1-t)\partial^2 + \left[ \begin{pmatrix} 3+m & 0 & 0 \\ 0 & 2+m & 0 \\ 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3+m+n & 0 & 0 \\ 0 & 2+m+n & 0 \\ 0 & 0 & 1+m+n \end{pmatrix} \right] \partial^1 \\ &+ \left[ \frac{1}{1-t} \begin{pmatrix} -2(n-k) & 2(n-k) & 0 \\ 0 & -n+k-1 & n-k+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{1-t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k+1 & -k-1 & 0 \\ 0 & 2k & -2k \end{pmatrix} \right] \partial^0, \end{aligned}$$

cuya función peso es

$$\widetilde{W}(t) = t^m(1-t)^{n-1} \begin{pmatrix} w_1 t^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 t & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix},$$

donde  $w_1 = \dim V_{\mu_1}$ ,  $w_2 = \dim V_{\mu_2}$  y  $w_3 = \dim V_{\mu_3}$ .

Se procede a conjugar apropiadamente, como aparece por primera vez en [GPT5, PT2, RT]. Para ello se escoge

$$\Psi^*(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & (1-t)^2 \end{pmatrix}.$$

Con esta conjugación se obtiene un nuevo peso matricial

$$W(t) = \Psi(t)\widetilde{W}(t)\Psi^*(t), \quad (1.21)$$

que ya no es diagonal, y un nuevo operador diferencial  $D = (\Psi^*)^{-1}\widetilde{D}\Psi^*$  que va a ser de tipo hipergeométrico

$$D = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0,$$

con  $F_2, F_1, F_0$  dados por

$$\begin{aligned} F_2(t) &= t(1-t)I, \\ F_1(t) &= \begin{pmatrix} m+3 & 0 & 0 \\ -1 & m+2 & 0 \\ 0 & -2 & m+1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} n+m+3 & 0 & 0 \\ 0 & n+m+4 & 0 \\ 0 & 0 & m+n+5 \end{pmatrix}, \\ F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 2(n-k) & 0 \\ 0 & -(n+m+1-k) & n+1-k \\ 0 & 0 & -2(n+m+2-k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El peso matricial  $W(t)$  admite una expresión factorizada que permite formularlo en términos de lo hecho en [DG1] (véase también la Sección 1.2.3):

$$W(t) = \frac{\rho(t)}{\rho(1/2)} T(t)W(1/2)T^*(t),$$

con  $T(1/2) = I$  y  $\rho(t) = t^m(1-t)^{n-1}$ . La matriz  $T(t)$  es solución de la ecuación

$$T'(t) = \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \right) T(t),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo será el punto de partida de la Sección 3.3.1.

---

**Ejemplo 1.4.5** ([PT2]). El ejemplo anterior se extendió a tamaño general  $N \times N$  en [PT2]. En este caso, la representación  $\pi$  de  $GL(n, \mathbb{C})$  tiene la forma

$$\pi = (\underbrace{m + N - 1, \dots, m + N - 1}_k, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k}), \quad 1 \leq k \leq n - 1.$$

Los detalles de cómo se calcula el operador (1.20), su cambio de variable y la conjugación apropiada para obtener un operador diferencial hipergeométrico se pueden encontrar en [RT, PR, PT2]. Al final, el peso matricial para  $t \in (0, 1)$ ,  $\alpha, \beta > -1$  y  $0 < k < \beta + 1$  tiene la siguiente estructura (haciendo el cambio  $\beta = n - 1$  y  $\alpha = m$ ):

$$W(t) = t^\alpha (1 - t)^\beta Z(t), \quad (1.22)$$

donde

$$Z(t) = \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{r=1}^N \binom{r-1}{i-1} \binom{r-1}{j-1} \binom{\beta - k + r - 1}{r-1} \binom{N + k - r - 1}{N - r} (1-t)^{i+j-2} t^{N-r} \right) E_{ij}.$$

Aquí  $E_{ij}$  denota la matriz con entrada 1 en  $(i, j)$  y 0 en cualquier otro sitio. El nuevo operador diferencial está dado por

$$D_1 = t(1-t)\partial^2 + (C - tU)\partial^1 + V\partial^0, \quad (1.23)$$

donde

$$C = \sum_{i=1}^N (\alpha + N - i + 1)E_{ii} - \sum_{i=2}^N (i-1)E_{i,i-1}, \quad U = \sum_{i=1}^N (\alpha + \beta + N + i)E_{ii},$$

$$V = - \sum_{i=1}^N (i-1)(\alpha + \beta - k + i)E_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} (N-i)(\beta - k + i)E_{i,i+1}.$$

Al igual que antes, el peso matricial  $W(t)$  admite una expresión factorizada que permite formularlo en términos de lo hecho en [DG1] (véase también la Sección 1.2.3):

$$W(t) = \frac{t^\alpha (1-t)^\beta}{(1/2)^{\alpha+\beta}} T(t) W(1/2) T^*(t),$$

con  $T(1/2) = I$ . La matriz  $T(t)$  es solución de la ecuación

$$T'(t) = \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \right) T(t),$$

con

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{N-i}{2} E_{ii} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i}{2} E_{i,i+1} \quad \text{y} \quad B = - \sum_{i=1}^N (i-1) E_{ii} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i}{2} E_{i,i+1}.$$

**Ejemplo 1.4.6** ([GPT5]). Se considera ahora la representación  $\pi$  de  $GL(n, \mathbb{C})$  que corresponde a 2 saltos de la forma

$$\pi = (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k_1}, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{k_2-k_1}, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k_2}), \quad 1 \leq k_1 < k_2 \leq n-1.$$

La fórmula de Weyl implica que

$$\dim V_\pi = \frac{k_2 - k_1 + 1}{k_2 + 1} \binom{n}{k_2} \binom{n+1}{k_1}.$$

Existen 4 posibles  $\mu$  que entrelazan a  $\pi$ , los cuales son

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k_1-1}, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{k_2-k_1-1}, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k_2-1}), \\ \mu_2 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k_1-1}, m+1, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{k_2-k_1-1}, m+1, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k_2-1}), \\ \mu_3 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k_1-1}, m+2, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{k_2-k_1-1}, m, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k_2-1}), \\ \mu_4 &= (\underbrace{m+2, \dots, m+2}_{k_1-1}, m+2, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{k_2-k_1-1}, m+1, \underbrace{m, \dots, m}_{n-k_2-1}), \end{aligned}$$

que hacen que  $V_\pi$  se descomponga en

$$V_\pi = V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus V_{\mu_3} \oplus V_{\mu_4},$$

donde por la fórmula de Weyl se tiene que

$$\begin{aligned} \dim V_{\mu_1} &= \frac{k_2 - k_1 + 1}{k_2} \binom{n-1}{k_2-1} \binom{n}{k_1}, \\ \dim V_{\mu_2} &= \frac{k_2 - k_1 + 2}{k_2 + 1} \binom{n-1}{k_2} \binom{n}{k_1-1}, \\ \dim V_{\mu_3} &= \frac{k_2 - k_1}{k_2} \binom{n-1}{k_2-1} \binom{n}{k_1}, \\ \dim V_{\mu_4} &= \frac{k_2 - k_1 + 1}{k_2 + 1} \binom{n-1}{k_2} \binom{n}{k_1}. \end{aligned}$$

En este caso, el primer ejemplo que aparece va a tener dimensión  $4 \times 4$  y no va a aparecer otro análogo de dimensión menor.

---

Calculando el operador (1.20), se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{D} = & t(1-t)\partial^2 + \left[ \begin{pmatrix} 3+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - t \begin{pmatrix} 3+m+n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+m+n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+m+n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+n+m \end{pmatrix} \right] \partial^1 \\ & + \frac{1}{1-t} \begin{pmatrix} k_2 + k_1 - 2n & \frac{(k_2-k_1+2)(n-k_2)}{k_2-k_1+1} & \frac{(k_2-k_1)(n-k_1+1)}{k_2-k_1+1} & 0 \\ 0 & -n+k_1-1 & 0 & n-k_1+1 \\ 0 & 0 & -n+k_2 & n-k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{t}{1-t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2+1 & -k_2-1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & \frac{k_1(k_2-k_1+2)}{k_2-k_1+1} & \frac{(k_2-k_1)(k_2+1)}{k_2-k_1+1} & -k_1-k_2 \end{pmatrix} \partial^0, \end{aligned}$$

cuya función peso es

$$\tilde{W}(t) = t^m(1-t)^{n-1} \begin{pmatrix} w_1 t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 \end{pmatrix},$$

donde  $w_1 = \dim V_{\mu_1}$ ,  $w_2 = \dim V_{\mu_2}$ ,  $w_3 = \dim V_{\mu_3}$  y  $w_4 = \dim V_{\mu_4}$ .

Se procede a conjugar apropiadamente. Para ello se escoge

$$\Psi^*(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k_2-k_1+2}{k_2-k_1+1} & \frac{k_2-k_1}{k_2-k_1+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-t)^2 \end{pmatrix}.$$

Con esta conjugación se obtiene un nuevo peso matricial

$$W(t) = \Psi(t)\tilde{W}(t)\Psi^*(t), \quad (1.24)$$

que ya no es diagonal, y un nuevo operador diferencial  $D = (\Psi^*)^{-1}\tilde{D}\Psi^*$  que va a ser de tipo hipergeométrico

$$D = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0,$$

con  $F_2, F_1, F_0$  dados por

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= t(1-t)I \\
F_1(t) &= \begin{pmatrix} m+3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & m+2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & m+2 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2-k_1+2}{k_2-k_1+1} & -\frac{k_2-k_1}{k_2-k_1+1} & m+1 \end{pmatrix} \\
&\quad -t \begin{pmatrix} n+m+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n+m+4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+m+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n+m+5 \end{pmatrix}, \\
F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(k_2-k_1+2)(n-k_2)}{k_2-k_1+1} & \frac{(k_2-k_1)(n-k_1+1)}{k_2-k_1+1} & 0 \\ 0 & -(n+m+1)+k_2 & 0 & n+1-k_1 \\ 0 & 0 & -(n+m+2)+k_1 & n-k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2(n+m+2)+k_1+k_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Al igual que antes  $W(t)$  admite la siguiente factorización

$$W(t) = \frac{\rho(t)}{\rho(1/2)} T(t) W(1/2) T^*(t),$$

con  $T(1/2) = I$  y  $\rho(t) = t^m(1-t)^{n-1}$ . La matriz  $T(t)$  es solución de la ecuación

$$T'(t) = \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \right) T(t),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{k_1-k_2-2}{2(k_2-k_1+1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{k_1-k_2}{2(k_2-k_1+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{k_1-k_2-2}{2(k_2-k_1+1)} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{k_1-k_2}{2(k_2-k_1+1)} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo será el punto de partida de la Sección 3.3.2.

El hecho de que no existan ejemplos de dimensión inferior a  $4 \times 4$  hace más difícil su manejo. Se tiene además que el comportamiento de los operadores diferenciales es totalmente diferente a lo que ocurre en el ejemplo anterior.

## 1.5. La función hipergeométrica matricial

En esta sección se da una breve descripción de cómo se construye la función hipergeométrica matricial. En [T2] se estudia la ecuación hipergeométrica matricial

$$t(1-t)F'' + [C - t(1+A+B)]F' - ABF = 0, \quad (1.25)$$

donde  $A, B, C \in \mathbb{C}^{N \times N}$  y  $F$  es una función matricial.

Si se define (suponiendo  $\text{spec}(C) \cap (-\mathbb{N}_0) = \emptyset$ )

$$(C, A, B)_{i+1} = (C+iI)^{-1}(A+iI)(B+iI)(C+(i-1)I)^{-1}(A+(i-1)I)(B+(i-1)I) \cdots C^{-1}AB,$$

para todo  $i \geq 0$  y  $(C, A, B)_0 = I$ , entonces la función matricial

$${}_2F_1(C, A, B; t) = \sum_{i \geq 0} (C, A, B)_i \frac{t^i}{i!},$$

es la única solución analítica (en  $|t| < 1$ ) de (1.25) con condición inicial  $F(0) = I$  (Teorema 2 de [T2]). La solución de (1.25) para  $F(0) = F_0$  viene dada por  $F(t) = {}_2F_1(C, A, B; t)F_0$ .

## 1.6. Cadenas de Markov

En esta sección se tratará de dar una introducción muy breve a la noción de cadenas de Markov, un concepto probabilístico de enorme utilidad desde comienzos del siglo XX. Se introducirán las definiciones y resultados básicos necesarios para entender el contenido del Capítulo 6.

Tanto en esta sección como en el Capítulo 6 se denotarán a los polinomios ortogonales por  $(Q_n)_n$  en vez de  $(P_n)_n$ ; se quiere así evitar confusión pues llamaremos  $P$  a la matriz de Jacobi, que se convertirá en una matriz de probabilidades de transición, denotada por  $P$  en la literatura.

### 1.6.1. Definiciones básicas

El concepto de cadenas de Markov comienza por la definición de probabilidad condicionada. Sea un conjunto (finito o numerable) de resultados posibles (estados o ensayos)  $E_1, E_2, \dots$  y se denota por  $\alpha_k$  a la distribución inicial, o probabilidad de obtener el resultado  $E_k$  en el estado inicial. Si los estados son independientes entre sí, las probabilidades que corresponden a sucesiones muestrales se definen por medio de la propiedad multiplicativa  $\Pr\{(E_{i_0}, E_{i_1}, \dots, E_{i_n})\} = \alpha_{i_0} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n}$ , que da la probabilidad de que suceda exactamente de una tirada los ensayos  $E_{i_0}, E_{i_1}, \dots, E_{i_n}$ .

Ahora se permite que el resultado de cualquier estado dependa del resultado del estado inmediatamente anterior (y sólomente de él). A cada pareja  $(E_i, E_j)$  le corresponderá una probabilidad condicionada  $p_{ij}$ . Entonces  $\Pr\{(E_i, E_j)\} = \alpha_i p_{ij}$ ,  $\Pr\{(E_i, E_j, E_k)\} = \alpha_i p_{ij} p_{jk}$ , y en general

$$\Pr\{(E_{i_0}, E_{i_1}, \dots, E_{i_n})\} = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \quad (1.26)$$

Se define entonces una *cadena de Markov* como una sucesión de estados  $E_1, E_2, \dots$  donde las probabilidades de la sucesiones muestrales se definen por (1.26). Las probabilidades de transición  $p_{ij}$  se suelen representar por medio de una *matriz de probabilidades de*

*transición* o matriz de transición a secas:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

que verifica  $Pe = e$ , donde  $e$  denota el vector columna con todas las entradas igual a 1. Se observa que  $P$  es una matriz cuadrada (finita o semi-infinita) con elementos no negativos y sumas unitarias en cada fila. A una matriz con estas propiedades se le llama *matriz estocástica*. Cualquier matriz estocástica junto con la distribución inicial  $\{a_k\}$  define completamente una cadena de Markov con estados  $E_1, E_2, \dots$ . El ejemplo más ilustrativo es el de las caminatas al azar o *random walks*, el cual se estudiará en la siguiente sección. Más ejemplos pueden encontrarse en el Capítulo XV de [Fe].

*Nota 1.6.1.* Cuando las cadenas de Markov se describen en términos de variables aleatorias se denominan *procesos de Markov*. En este caso, se reemplaza el símbolo  $E_k$  por el número entero  $k$  y el estado del sistema en el tiempo  $n$  es una variable aleatoria  $X^{(n)}$  que toma el valor  $k$  con probabilidad  $a_k^{(n)}$ . La distribución conjunta de  $X^{(n)}$  y  $X^{(n+1)}$  está dada por  $\Pr\{X^{(n)} = i, X^{(n+1)} = j\} = a_i^{(n)} p_{ij}$  y la distribución conjunta de  $(X^{(0)}, \dots, X^{(n)})$  está dada por (1.26). De esta manera, un proceso de Markov no es más que un caso especial de un *proceso estocástico* o proceso aleatorio, donde los cambios ocurren en épocas o tiempos discretos  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Los procesos estocásticos son fenómenos donde los cambios pueden ocurrir en cualquier tiempo, como las llamadas telefónicas o las desintegraciones radiactivas.

Una cadena de Markov es *irreducible* si para cada par  $(E_i, E_j)$  existe algún  $n \geq 0$  tal que  $p_{ij}^{(n)} > 0$ . En otras palabras, siempre hay probabilidad positiva de llegar de un estado a otro en tiempo finito, incluso al mismo estado.

Un estado  $E_j$  es *periódico* con periodo  $k > 1$  si todos los caminos que llevan desde  $E_j$  a  $E_j$  tienen longitud  $mk$ ,  $m > 0$ . En este caso  $k = \text{mcd}\{n > 0 : p_{jj}^{(n)} > 0\}$ . Si  $k = 1$ , entonces el estado se llama *aperiódico*. En esta memoria se supondrá que las cadenas de Markov son siempre *aperiódicas*.

Se tratará ahora de hacer una clasificación de estados basada en la seguridad de retorno para cualquier estado. Si la hay, tendrá sentido plantearse si el tiempo medio de vuelta es finito o infinito. Para ello, se denota por  $p_{ij}^{(n)}$  la probabilidad de una transición de  $E_i$  a  $E_j$  realizada exactamente en  $n$  pasos. Esto equivale a la suma de todas las trayectorias posibles que empiezan en  $E_i$  y terminan en  $E_j$  de longitud  $n$ . En particular  $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$  y

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad (1.27)$$

que no es más que la identidad de Chapman-Kolmogorov en tiempo discreto. En forma matricial, usando la matriz de transición, la ecuación (1.27) expresa la conocida ley

$P^{m+n} = P^m P^n$ , donde  $P^n$  es la  $n$ -ésima potencia de  $P$ , o también llamada *matriz de probabilidades de transición en  $n$  pasos*.

Se denota también por  $f_{ij}^{(n)}$  a la probabilidad de que en un proceso que parte de  $E_i$ , la primera entrada a  $E_j$  ocurre en el  $n$ -ésimo paso. Se fija  $f_{ij}^{(0)} = 0$  y

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}. \quad (1.28)$$

Por lo tanto,  $f_{ij}$  es la probabilidad de que el sistema pase alguna vez por  $E_j$  partiendo de  $E_i$ . En particular,  $f_{ii}^{(n)}$  representa la distribución de los tiempos de recurrencia por  $E_i$ . La definición (1.28) es el tiempo medio de recurrencia para  $E_i$ . La relación de  $f_{ij}^{(n)}$  con  $p_{ij}^{(n)}$  es la siguiente (llamada en la literatura *renewal equation*):

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}.$$

**Definición 1.6.2.** El estado  $E_i$  es *persistente* o recurrente si  $f_{ii} = 1$ , y *transitorio* si  $f_{ii} < 1$ . Un estado persistente se llamará *nulo* si  $\mu_i = \infty$ . Un estado persistente se llamará *ergódico* o positivo si  $\mu_i < \infty$ .

Se tiene un criterio sencillo para saber cómo es un estado en función de las probabilidades de transición  $p_{ii}^{(n)}$ .

**Teorema 1.6.3** ([Fe]). (1) *Un estado  $E_i$  es transitorio si y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

*En ese caso  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ki}^{(n)} < \infty$  para todo  $k$ .*

(2) *Un estado  $E_i$  es persistente nulo si y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty, \quad \text{pero} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0.$$

*En ese caso  $p_{ki}^{(n)} \rightarrow 0$  para todo  $k$ .*

Cuando se trabaja con cadenas irreducibles todos los estados serán del mismo tipo.

Se introducirá ahora la definición de *medida o distribución invariante* y algunas de sus propiedades. Se seguirá la definición dada en el Capítulo 5 de [S].

---

**Definición 1.6.4.** Sea  $P$  una matriz estocástica. Se dice que un vector fila  $\pi$  no nulo con entradas no negativas es una *medida invariante* si

$$\pi P = \pi.$$

Nótese que un múltiplo positivo de tal medida invariante sigue siendo una medida invariante. Se tiene un resultado muy importante relativo a la existencia y unicidad de una medida invariante para cadenas persistentes como consecuencia del Teorema de Perron-Frobenius para matrices positivas semi-infinitas.

**Teorema 1.6.5 ([S]).** *Sea  $P$  un proceso persistente (ergódico o nulo). Existe una única (salvo múltiplo constante) medida invariante.*

*Nota 1.6.6.* Para procesos transitorios se puede asegurar la existencia de una *medida subinvariante*, que es un vector fila  $\pi$  no nulo con entradas no negativas tal que  $\pi P \leq \pi$ .

También se tiene que si  $P$  es una matriz estocástica irreducible transitoria o persistente nula entonces no existe ninguna medida invariante  $\pi$  tal que  $\pi e < \infty$ , que será el caso del ejemplo que se estudiará en el Capítulo 6.

## 1.6.2. Relación con polinomios ortogonales

El clásico problema de momentos de Hausdorff, el de determinar una medida  $d\psi(t)$  en el intervalo  $[-1, 1]$  a partir de sus momentos

$$\mu_n = \int_{-1}^1 t^n d\psi(t),$$

fue origen de diversos problemas iniciados a finales del siglo XIX y discutido por matemáticos como Chebyshev, Markov y Stieltjes. La principal herramienta usada relaciona el problema con la teoría espectral de cierto operador en diferencias de segundo orden (construido a partir de los momentos  $\mu_n$ ) actuando sobre funciones definidas en los enteros no negativos. En otras palabras, estos momentos determinan unívocamente (salvo múltiplos escalares) una familia de polinomios  $(q_n)_n$  que son autofunciones de cierto operador en diferencias de segundo orden (la conocida fórmula de recurrencia a tres términos). El problema de encontrar la medida  $d\psi(t)$ , una vez que se normaliza (o simetriza) el operador en diferencias, es el problema de encontrar la única extensión autoadjunta (hay sólo una pues estamos en  $[-1, 1]$ ) que resuelve el problema de momentos y da una medida  $d\psi(t)$  que hace que los polinomios sean ortogonales (el conocido Teorema de Favard).

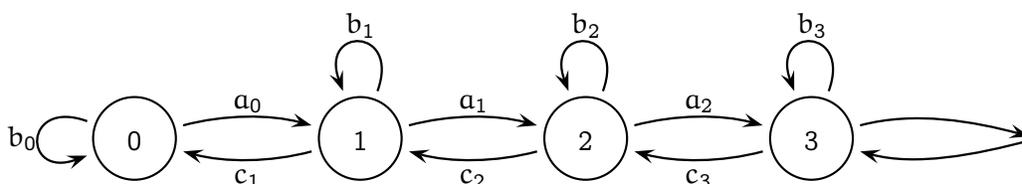
La presencia de un operador en diferencias de segundo orden actuando sobre el espacio de funciones definido sobre los enteros no negativos no es más que una matriz tridiagonal semi-infinita e implica de manera natural un tipo especial de cadena de Markov sobre el espacio de los enteros no negativos. Estos son los conocidos *procesos de nacimiento y muerte* (o procesos *birth-and-death*) donde para cada unidad de tiempo discreta la

probabilidad de ir del estado  $i$  al  $j$  está dada por  $p_{ij}$  con  $p_{ij} = 0$  si  $|i - j| > 1$ . La matriz de probabilidades de transición (en 1 paso) está dada por

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Se supone que  $a_j > 0$ ,  $c_{j+1} > 0$  y  $b_j \geq 0$  para  $j \geq 0$ , y también que  $a_j + b_j + c_j = 1$  para  $j \geq 1$ , por definición de matriz estocástica. Poniendo  $a_0 + b_0 \leq 1$  se permite al estado  $j = 0$  ser un estado absorbente (con probabilidad  $1 - a_0 - b_0$ ), pero algunas de estas condiciones pueden ser modificadas, sobre todo al inicio del proceso.

Se puede visualizar más claramente el proceso mediante el siguiente diagrama:



donde cada nodo representa un estado  $j$  en los enteros no negativos. La probabilidad de quedar en el mismo estado viene dada por los coeficientes  $b_j$ , la probabilidad de pasar del estado  $i$  al  $i + 1$  (ir a la derecha) está dada por los coeficientes  $a_j$  y la probabilidad de pasar del estado  $i$  al  $i - 1$  (ir a la izquierda) está dada por los coeficientes  $c_j$ .

El problema aquí es obtener una expresión de la *matriz de probabilidades de transición en  $n$  pasos*  $P^n$ , así como obtener una expresión de la medida invariante de  $P$ , usando la medida  $d\psi(t)$  y los coeficientes de la fórmula de recurrencia a tres términos. Para ello son necesarias las herramientas del teorema espectral mencionado antes.

Se prueba, introduciendo la familia de polinomios  $(q_n)_n$  por las condiciones  $q_{-1}(t) = 0$ ,  $q_0(t) = 1$  y la fórmula de recursión

$$P\phi = t\phi,$$

donde

$$\phi = \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

la existencia de una única medida  $d\psi(t)$  con soporte dentro del intervalo  $[-1, 1]$  tal que

$$\int_{-1}^1 q_i(t)q_j(t)d\psi(t) / \int_{-1}^1 q_j(t)^2 d\psi(t) = \delta_{ij},$$

y tal que se obtiene la fórmula de Karlin-McGregor (véase [KMcG]):

$$P_{ij}^n = \int_{-1}^1 t^n q_i(t) q_j(t) d\psi(t) / \int_{-1}^1 q_j(t)^2 d\psi(t), \quad (1.30)$$

donde  $P_{ij}^n$  denota la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $P^n$ .

Si el tiempo se toma continuo, como puede verse en otros artículos de S. Karlin y J. McGregor, la matriz  $P$  y la fórmula sufren ligeros cambios que no se abordarán aquí (véase por ejemplo [ILMV]).

La fórmula (1.30) es de gran utilidad. El cálculo de  $P_{ij}^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $i, j$  fijos, sobre todo cuando se trata de una matriz semi-infinita, requiere bastante energía y necesita de todas las entradas de  $P$ . Sin embargo, si  $d\psi(t)$  es conocida, la parte derecha de la fórmula (1.30) da una manera directa de calcular esa cantidad usando sólo un número fijo de entradas de (1.29).

La dificultad radica en que (1.30) depende de la expresión de los polinomios ortogonales y la medida asociada a  $P$ . El número de ejemplos explícitos donde se pueda encontrar la medida es bastante limitado, ya que implica calcular la inversa de la *transformada de Stieltjes*

$$B(x; \psi) = \int_{-1}^1 \frac{d\psi(t)}{t - x}.$$

No sólo se tiene la fórmula (1.30), sino que cuando la matriz  $P$  es estocástica, se puede construir su única (salvo múltiplo escalar) medida invariante (véase la Definición 1.6.4)

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$$

tal que

$$\pi P = \pi,$$

como viene recogido en [GdI2]. A partir de la primera relación  $b_0 + a_0 = 1$ , se obtiene que  $\pi_1 = \pi_0 a_0 / c_1$ . Entonces se prueba por inducción que para  $i \geq 1$  se tiene que

$$\pi_i = \pi_0 (a_0 a_1 \cdots a_{i-1}) / (c_1 c_2 \cdots c_i).$$

Como consecuencia, se obtiene que

$$\pi_{i+1} / \pi_i = a_i / c_{i+1}.$$

Se recuerda que, para  $i \geq 0$ , se tiene la fórmula de recurrencia

$$t q_i(t) = a_i q_{i+1}(t) + b_i q_i(t) + c_i q_{i-1}(t),$$

con  $c_0 = 0$ . Integrando la anterior expresión después de multiplicar por  $q_{i+1}$  ó  $q_{i-1}$  se obtiene

$$\int_{-1}^1 t q_i(t) q_{i+1}(t) d\psi(t) = a_i \int_{-1}^1 q_{i+1}^2(t) d\psi(t) = c_{i+1} \int_{-1}^1 q_i^2(t) d\psi(t).$$


---

Combinando estos dos resultados se obtiene que la proporción de las dos integrales anteriores está dada por el valor

$$c_{i+1}/a_i = \pi_i/\pi_{i+1}.$$

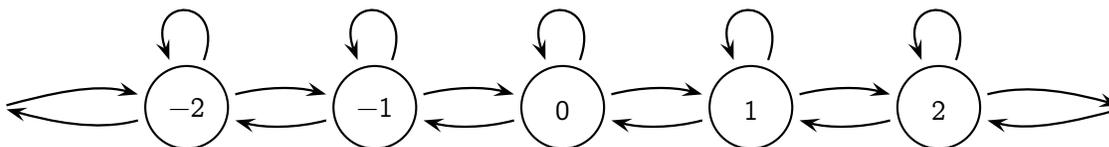
La consecuencia es que la solución de  $\pi P = \pi$  se puede calcular directamente de las entradas de la matriz  $P$  o conociendo las integrales

$$\int_{-1}^1 q_i^2(t) d\psi(t),$$

que no son más que las normas de los polinomios ortogonales (normalizados con  $q_0 = 1$ ).

En particular, para un proceso de nacimiento y muerte homogéneo donde  $a_i = a$  y  $c_i = c$  independientes del índice  $i$ , se tiene que las componentes de  $\pi$  están dadas por  $\pi_i = \pi_0(a/c)^i$ ,  $i \geq 0$ .

La última sección de [KMcG] trata los casos de un espacio con estados finitos y un espacio con estados doble-infinitos, donde los enteros no positivos se reemplazan por el conjunto de todos los enteros. El diagrama en este caso tendría dos puntos singulares, uno en cada extremo de la recta:



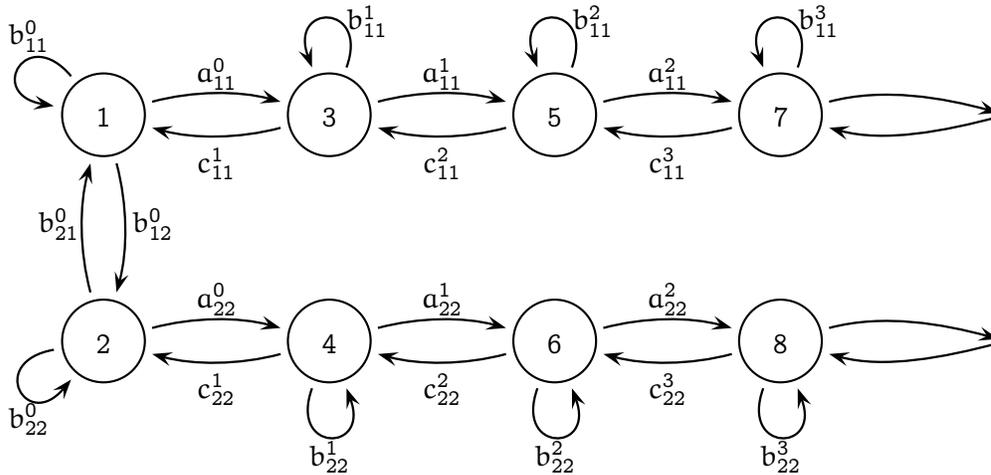
y su matriz de transición sería

$$P = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc|c|c|c} b_{11}^0 & b_{12}^0 & a_{11}^0 & 0 & & & \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & 0 & a_{22}^0 & 0 & & \\ \hline c_{11}^1 & 0 & b_{11}^1 & 0 & a_{11}^1 & 0 & \\ 0 & c_{22}^1 & 0 & b_{22}^1 & 0 & a_{22}^1 & 0 \\ \hline & 0 & c_{11}^2 & 0 & b_{11}^2 & 0 & a_{11}^2 & 0 & \ddots \\ & & 0 & c_{22}^2 & 0 & b_{22}^2 & 0 & a_{22}^2 & \ddots \\ \hline & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots \end{array} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que intencionadamente se ha subdividido por bloques de tamaño  $2 \times 2$  para que se pueda intuir de manera natural que en este caso la fórmula de recurrencia a tres términos tiene coeficientes matriciales de tamaño  $2 \times 2$  y por lo tanto se debería reemplazar

la medida  $d\psi(t)$  por un peso matricial  $W$  de tamaño  $2 \times 2$  en el sentido de la Definición 1.1.1.

El diagrama anterior admite una representación más *matricial* (que es la que se usará en el Capítulo 6), sustituyendo los nodos no negativos por número impares y los nodos negativos por números pares comenzando desde 2, como muestra el siguiente diagrama:



Es natural pensar que en el anterior diagrama no sólo haya probabilidades condicionadas entre los vecinos más cercanos, sino que la cadena de Markov se convierta en una más complicada considerando probabilidades condicionadas del estado que está después del siguiente o del estado que está antes del anterior. Este es el motivo principal de extender al caso matricial los procesos de nacimiento y muerte, tratando de partir de una matriz de probabilidades de transición tridiagonal por bloques. Son los llamados *procesos quasi-birth-and-death* de los que se hablará a continuación.

### 1.6.3. Procesos *quasi-birth-and-death*

Para el tratamiento correcto de procesos *quasi-birth-and-death* se considera una cadena de Markov de dimensión 2 en tiempo discreto, donde el espacio de estados es el producto de todos los enteros no negativos con el conjunto finito de enteros  $1, 2, \dots, N$ , es decir

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq N\}.$$

La primera componente suele denominarse *nivel (level)*, mientras que la segunda se denomina *fase (phase)*. La matriz de probabilidades de transición es ahora una matriz

tridiagonal por bloques

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Esto indica que en una unidad de tiempo una transición puede cambiar de fase sin cambiar de nivel, o que puede cambiar el nivel (y posiblemente la fase) a uno de sus niveles adyacentes. Etiquetando los estados por los pares de enteros  $(i, j)$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , la matriz (1.31) tiene bloques  $P_{i,i'}$  de tamaño  $N \times N$ . La probabilidad de ir en un paso del estado  $(i, j)$  al estado  $(i', j')$  está dada por el valor de la entrada  $(j, j')$  del bloque  $P_{i,i'}$ . Obviamente, cuando el número de fases  $N$  es 1, se vuelve al clásico proceso de nacimiento y muerte comentado en la sección anterior. Normalmente estos procesos se denominan procesos *quasi-birth-and-death* en tiempo discreto. En la equivalencia con el caso clásico corresponderían a caminatas al azar con matriz de probabilidades de transición tridiagonal por bloques. La matriz  $P$ , aunque esté por bloques, es estocástica pensada como matriz numérica, es decir, todas sus entradas son no negativas y suman 1 en cada fila, en otras palabras,  $Pe = e$ , con  $e$  el vector columna con todas las componentes igual a 1.

Para una presentación más detallada, así como como su conexión con problemas de teoría de colas (*queueing theory*), modelos de redes (*network theory*) o sistemas de comunicación (*communication systems*), puede consultarse [LaR, N], así como las referencias en [DRSZ].

Como se hizo anteriormente para el caso escalar, es muy natural conectar estas cadenas de Markov con la teoría de polinomios ortogonales matriciales, usando propiedades espectrales. Bajo ciertas condiciones, se puede encontrar un peso matricial  $W$  tal que la familia de polinomios matriciales  $(Q_n)_n$ , con  $Q_{-1}(t) = 0$ ,  $Q_0(t) = I$ , que se construye a partir de la relación de recurrencia a tres términos

$$P\Phi = t\Phi, \quad (1.32)$$

donde  $\Phi$  denota el vector columna por bloques

$$\Phi = \begin{pmatrix} Q_0(t) \\ Q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

es ortogonal con respecto a  $W$  considerando el producto interno (1.1) (véase, por ejemplo, [D4]).

De la misma manera, es muy natural extender la fórmula de Karlin-McGregor (1.30), como puede encontrarse en [DRSZ] ó [G2]. En este caso hay que tener en cuenta el producto interno (1.1):

$$P_{ij}^n = \left( \int_{-1}^1 t^n Q_i(t) W(t) Q_j^*(t) dt \right) \left( \int_{-1}^1 Q_j(t) W(t) Q_j^*(t) dt \right)^{-1}.$$

La entrada  $(i, j)$  representa ahora el bloque  $(i, j)$  de la matriz por bloques  $P^n$ .

Si en el caso escalar el número de ejemplos explícitos de medidas disponibles para los que se puede hacer esto estaba muy limitado, en el caso matricial se encuentra la misma dificultad o incluso mayor. En [DRSZ] aparecen una serie de ejemplos interesantes donde la fórmula de Karlin-McGregor puede computarse explícitamente, al igual que en [G2], donde a partir del ejemplo dado en [G1], se construye una matriz estocástica donde el peso matricial está dado explícitamente. El ejemplo que estudiaremos en el Capítulo 6 es la extensión de este ejemplo.

Dada la matriz de probabilidades de transición  $P$ , el problema ahora de calcular una medida invariante  $\pi$  es el problema de encontrar un vector fila con entradas no negativas

$$\pi = (\pi^0; \pi^1; \dots) \equiv (\pi_1^0, \pi_2^0, \dots, \pi_N^0; \pi_1^1, \pi_2^1, \dots, \pi_N^1; \dots)$$

tal que

$$\pi P = \pi.$$

A diferencia del caso escalar, esto conlleva a un sistema complicado de ecuaciones, que no tienen por qué tener, en principio, ninguna relación con las normas de los polinomios ortogonales matriciales. La primera ecuación está dada por

$$\pi^0 B_0 + \pi^1 C_1 = \pi^0,$$

y luego, para  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$\pi^{n-1} A_{n-1} + \pi^n B_n + \pi^{n+1} C_{n+1} = \pi^n.$$

Esto da las siguientes ecuaciones:

$$\pi^1 = \pi^0 (I - B_0) C_1^{-1},$$

$$\pi^2 = \pi^0 [(I - B_0) C_1^{-1} (I - B_1) - A_0] C_2^{-1},$$

$$\pi^3 = \pi^0 [(I - B_0) C_1^{-1} (I - B_1) C_2^{-1} (I - B_2) - A_0 C_2^{-1} (I - B_2) - (I - B_0) C_1^{-1} A_1] C_3^{-1}.$$

Estas fórmulas exigen que las matrices  $C_n$  de (1.31) sean invertibles. Existen otras expresiones más compactas de la medida invariante, como puede encontrarse en [LPT].

**Ejemplo 1.6.7.** Se incluye por último el que posiblemente sea el primer ejemplo de la teoría de polinomios ortogonales matriciales iniciada por Kreĭn, recogido en el libro de Ju. Berezans'kiĭ, [Be]. Éste no es más que un caso especial del ejemplo introducido al final de [KMcG] para valores generales de  $p$  y  $q$  ( $p + q = 1$ ).

Se considera la siguiente matriz tridiagonal por bloques:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} B_0 & I & & & \\ C_1 & B_1 & I & & \\ & C_2 & B_2 & I & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde los bloques de tamaño  $2 \times 2$  están dados por

$$B_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = 0, \quad \text{si } n = 1, 2, \dots,$$

$$C_n = \frac{1}{4} I, \quad \text{si } n = 1, 2, \dots$$

En este caso se tiene que la familia (mónica) de polinomios matriciales  $(Q_n)_n$  dada por

$$tQ_n(t) = Q_{n+1}(t) + B_n Q_n(t) + C_n Q_{n-1}(t), \quad Q_{-1}(t) = 0, \quad Q_0(t) = I,$$

se puede expresar de la siguiente manera

$$Q_n(t) = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} U_n(t) & -U_{n-1}(t) \\ -U_{n-1}(t) & U_n(t) \end{pmatrix},$$

donde  $U_n(t)$  son los polinomios escalares de Chebyshev de segundo tipo.

La medida que hace a la familia  $(Q_n)_n$  ortogonal se deduce de la siguiente fórmula:

$$\frac{4^i}{\pi} \int_{-1}^1 Q_i(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} Q_j^T(t) dt = \delta_{ij} I.$$

De esta manera, como ya se hizo en [DRSZ, G2, KMcG], se obtiene una fórmula de Karlin-McGregor

$$\mathcal{L}_{ij}^n = \frac{4^i}{\pi} \int_{-1}^1 t^n Q_i(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} Q_j^T(t) dt.$$

Por lo tanto, como aparece en [G2], se pueden calcular las entradas de la matriz  $\mathcal{L}^n$  con  $\mathcal{L}$  tomada como la matriz pentadiagonal

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{L}$  no es estocástica, ya que sus filas no suman la unidad. Sin embargo, definiendo  $\Delta$  como la matriz diagonal por bloques con cada bloque  $2 \times 2$  como  $\Delta_{ii} = 2^i I$ , se obtiene de (1.32) que  $\Delta \mathcal{L} \Delta^{-1} \Delta \Phi = t \Delta \Phi$  y por lo tanto si  $P = \Delta \mathcal{L} \Delta^{-1}$  y  $\tilde{\Phi} = \Delta \Phi$ , se tiene que  $P \tilde{\Phi} = t \tilde{\Phi}$ . La versión escalar de  $P$  es ahora (doblemente) estocástica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \ddots \\ & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

También en este caso se obtiene que  $\|\tilde{Q}_n\|^2 = \pi$ . Este ejemplo no es más que el introducido en [KMcG] para el caso especial de  $p = q = 1/2$ .

## Capítulo 2

# Operadores diferenciales simétricos con respecto a pesos matriciales

*Los que se enamoran de la práctica sin la teoría  
son como los pilotos sin timón ni brújula,  
que nunca podrán saber a dónde van.*

LEONARDO DA VINCI

En este capítulo (y los siguientes) se muestran los resultados originales de la memoria. Comenzamos generalizando las ecuaciones de momentos y las ecuaciones de simetría, ya introducidas en la Sección 1.2.2 para operadores simétricos de segundo orden. Como ya se mencionó en la Sección 1.3, el álgebra de operadores diferenciales (dado un peso matricial  $W$ ) puede determinarse una vez conocido todos los operadores simétricos asociados. De ahí la conveniencia de disponer de métodos para encontrar los operadores diferenciales simétricos de cualquier orden con respecto a un peso dado.

En la segunda parte de este capítulo desarrollamos un método para encontrar operadores diferenciales simétricos comunes para pesos matriciales distintos. El tipo de pesos matriciales con esta propiedad difieren en una delta de Dirac, i.e., son de la forma  $W + \gamma\delta_{t_0}M$ , donde  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \geq 0$  y  $M$  es cierta matriz hermitica semidefinida positiva. Este método será la base de los ejemplos estudiados en el Capítulo 4.

### 2.1. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico

Sea  $W$  un peso matricial y  $D_k$  un operador diferencial de orden  $k \in \mathbb{N}$  (a derecha)

$$D_k = \sum_{i=0}^k \partial^i F_i(t), \quad \partial = \frac{d}{dt}, \quad (2.1)$$

donde, como ya se mencionó en la Sección 1.3, los coeficientes diferenciales son polinomios matriciales de grado no mayor que el orden de diferenciación, es decir,  $F_i \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t]$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Cada uno de los coeficientes  $F_i$  se escribe como

$$F_i(t) = \sum_{j=0}^i t^j F_j^i, \quad F_j^i \in \mathbb{C}^{N \times N}.$$

Primeramente, al igual que en la Sección 1.2.2, buscaremos las ecuaciones de momentos que relacionan los coeficientes diferenciales del operador  $D_k$  (simétrico en el sentido de la Definición 1.2.2) con los momentos  $\mu_n = \int_{\Omega} t^n dW(t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , de un peso matricial  $W$ , cuyo soporte será denotado por  $\Omega$ . Una vez calculadas estas ecuaciones de momentos, derivaremos a partir de ellas las ecuaciones de simetría, donde hay que tener especial cuidado con las condiciones de frontera.

En esta sección se usará la definición de factorial acotado  $(n)_i$ , introducido en (1.18). Se necesitará el siguiente lema:

**Lema 2.1.1.** *Para todo  $p = 0, \dots, m-1$ , se tiene que*

$$\sum_{h=0}^m (-1)^h \binom{m}{h} h^p = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

DEMOSTRACIÓN: La fórmula anterior es también conocida como fórmula de Euler, y una prueba puede encontrarse por ejemplo en [Fe].  $\square$

A continuación enunciamos la proposición que nos dará las ecuaciones de momentos.

**Proposición 2.1.2.** *El operador diferencial  $D_k$  (dado en (2.1)) es simétrico con respecto al peso matricial  $W$  si y sólo si los momentos  $(\mu_n)_n$  de  $W$  satisfacen los siguientes  $k+1$  conjuntos de ecuaciones:*

$$\sum_{i=0}^{k-l} \binom{k-i}{l} (n-l)_{k-l-i} B_n^{k-i} = (-1)^l (B_n^l)^*, \quad l = 0, \dots, k, \quad n \geq l, \quad (2.2)$$

donde

$$B_n^l = \sum_{i=0}^l F_{l-i}^l \mu_{n-i}, \quad l = 0, \dots, k, \quad n \geq l. \quad (2.3)$$

DEMOSTRACIÓN: Por un lado, debido a la simetría de  $D_k$ , se tiene que

$$\langle (t^n I) D_k, t^m I \rangle_W = \langle t^n I, (t^m I) D_k \rangle_W, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Desarrollando la igualdad anterior y usando la notación (2.3), se tiene la siguiente ecuación de momentos:

$$\sum_{i=0}^k (n)_{k-i} B_{n+m}^{k-i} = \sum_{i=0}^k (m)_{k-i} (B_{n+m}^{k-i})^*. \quad (2.4)$$

Para obtener (2.2) usamos inducción completa acotada sobre  $l$ . Si  $l = 0$  ponemos  $m = 0$  en (2.4) y se obtiene el primer conjunto de ecuaciones de (2.2).

Supongamos que los primeros  $j - 1$  conjuntos de ecuaciones son verdaderos. Hay que probar que los  $j$ -ésimos también lo son, siempre que  $j \leq k$ . Sustituyendo  $n - j + 1$  y  $m = j - 1$  en (2.4), se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^k (n - j + 1)_{k-i} B_n^{k-i} = \sum_{i=0}^{j-1} (j - 1)_i (B_n^i)^*. \quad (2.5)$$

Ahora, por hipótesis de inducción, se sustituyen las expresiones de  $(B_n^i)^*$ ,  $i = 0, \dots, j - 2$ , definidas en (2.2), en la igualdad derecha de (2.5) y se agrupa en términos de  $B_n^i$ ,  $i = 0, \dots, k$ . El conjunto de ecuaciones para  $j$  se consigue siempre y cuando se cumpla la siguiente igualdad para todo  $m = 0, \dots, k$ :

$$(n - j + 1)_m = \sum_{h=0}^m (-1)^h \binom{m}{h} (j - 1)_h (n - h)_{m-h}. \quad (2.6)$$

Para probar la fórmula anterior observamos que, usando la definición de factorial acotado dado en (1.18), el miembro izquierdo de la igualdad es un polinomio mónico en  $n$  de grado  $m$  con ceros en  $n = j + p - 1$ , para  $p = 0, \dots, m - 1$ . Si comprobamos que el miembro derecho de la igualdad, que también es un polinomio mónico en  $n$  de grado  $m$ , se anula para los mismos ceros, entonces la fórmula quedará probada.

Para verlo más claro, escribamos la parte derecha de (2.6) de la siguiente manera más conveniente:

$$n \cdots (n - m + 1) \sum_{h=0}^m (-1)^h \binom{m}{h} \frac{(j - 1) \cdots (j - h)}{n \cdots (n - h + 1)}.$$

Sustituyendo  $n$  por  $j + p - 1$ , para  $p = 0, \dots, m - 1$  en la expresión anterior, tenemos que verificar que

$$(j + p - 1) \cdots (j + p - m) \sum_{h=0}^m (-1)^h \binom{m}{h} \frac{(j - 1) \cdots (j - h)}{(j + p - 1) \cdots (j + p - h)} = 0.$$

Pero eso es siempre cierto, ya que se tiene que

$$\frac{(j - 1) \cdots (j - h)}{(j + p - 1) \cdots (j + p - h)} = \frac{(j + p - h - 1)_p}{(j + p - 1)_p}$$

es un polinomio en  $h$  de grado no mayor que  $m - 1$ , con lo que se puede aplicar el Lema 2.1.1.

Al contrario, sustituyendo  $n + m$  por  $n$  en (2.2) y combinando apropiadamente todas las ecuaciones se llega directamente a la ecuación (2.4). Luego, extendiendo por linealidad, se tiene que el operador  $D_k$  es simétrico.  $\square$

Obviamente, para  $k = 2$  se recuperan los 3 conjuntos de ecuaciones de momentos (1.7), (1.8) y (1.9) introducidos en la Sección 1.2.2.

La Proposición 2.1.2 es conveniente para la demostración de nuestro siguiente resultado, la obtención de las ecuaciones de simetría para cualquier operador diferencial de orden

k. También será útil para la siguiente sección, donde la presencia de una distribución delta de Dirac hace más conveniente un estudio mediante las ecuaciones de momentos.

Para obtener el siguiente resultado se necesitan imponer ciertas condiciones sobre el peso matricial  $W$ , no muy restrictivas, ya que en la práctica son este tipo de pesos matriciales los que se usarán siempre. Se supone pues que todas las entradas del peso matricial  $W$  tienen una densidad diferenciable con respecto a la medida de Lebesgue y en ese caso se denotará por  $W(t)$ ,  $t \in (a, b)$ ,  $a$  y  $b$  números finitos, a la matriz cuyas entradas son esas densidades, i.e.,  $dW(t) = W(t)dt$ .

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $W$  un peso matricial y  $D_k$  el operador diferencial de orden  $k$  definido en (2.1). Supongamos que las siguientes expresiones*

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{k-i+p-1} \binom{k-i}{l} (F_{k-i} \cdot W)^{(p-1-i)}, \quad p = 1, \dots, k, \quad l = 0, \dots, k-p, \quad (2.7)$$

*tienen límite cero en los extremos del soporte de  $W$ .<sup>1</sup> Si se satisfacen las siguientes  $k+1$  ecuaciones diferenciales:*

$$\sum_{i=0}^{k-l} (-1)^{k-i} \binom{k-i}{l} (F_{k-i} \cdot W)^{(k-i-l)} = W \cdot F_l^*, \quad l = 0, \dots, k, \quad (2.8)$$

*entonces el operador diferencial  $D$  es simétrico con respecto a  $W$ .*

DEMOSTRACIÓN: Usando las expresiones (2.3) y desarrollando en integrales se obtiene

$$\begin{aligned} (n-l)_{k-l-i} B_n^{k-i} &= (n-l)_{k-l-i} \left( \sum_{j=0}^{k-i} F_{k-i-j}^{k-i} \mu_{n-j} \right) = \\ &= \int_{\Omega} (n-l)_{k-l-i} t^{n-k+i} F_{k-i}(t) \cdot W(t) dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes  $k-i-l$  veces ( $i \leq k-l-1$ ) la integral anterior es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-i-l} (-1)^{j-1} (n-l)_{k-l-i-j} t^{n-k+i+j} (F_{k-i} \cdot W)^{(j-1)} \Big|_{\partial\Omega} + \\ (-1)^{k-i-l} \int_{\Omega} t^{n-l} (F_{k-i} \cdot W)^{(k-i-l)} dt. \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de  $(n-l)_{k-l-i} B_n^{k-i}$  en la ecuación de momentos (2.2), hay que probar que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-l-1} \binom{k-i}{l} \left( \sum_{j=1}^{k-i-l} (-1)^{j-1} (n-l)_{k-l-i-j} t^{n-k+i+j} (F_{k-i} \cdot W)^{(j-1)} \Big|_{\partial\Omega} \right) \\ + \int_{\Omega} t^{n-l} \left( \sum_{i=0}^{k-l} (-1)^{k-i} \binom{k-i}{l} (F_{k-i} \cdot W)^{(k-i-l)} - W \cdot F_l^* \right) dt = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Si el extremo del intervalo es  $+\infty$  ó  $-\infty$  se asume implícitamente que los límites  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n W(t) = 0$  ó  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n W(t) = 0$  para todo  $n = 0, 1, \dots$

---

Pero, por un lado, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k-l-1} \binom{k-i}{l} \left( \sum_{j=1}^{k-i-l} (-1)^{j-1} (n-l)_{k-l-i-j} t^{n-k+i+j} (F_{k-i} \cdot W)^{(j-1)} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

para todo  $n \geq l$ , que sigue desarrollando la anterior suma, agrupando los sumandos en términos de las potencias de  $t$ , y usando las condiciones de frontera (2.7).

Por otro lado, también se tiene que

$$\int_{\Omega} t^{n-l} \left( \sum_{i=0}^{k-l} (-1)^{k-i} \binom{k-i}{l} (F_{k-i} \cdot W)^{(k-i-l)} - W \cdot F_l^* \right) dt = 0,$$

para todo  $n \geq l$ , debido a las ecuaciones de simetría (2.8). Por consiguiente el operador diferencial  $D$  es simétrico con respecto a  $W$ .  $\square$

*Nota 2.1.4.* Las ecuaciones de simetría matriciales constituyen una extensión natural de las ecuaciones de simetría en el caso escalar (véase [LK] y sus referencias o más concretamente [Li]). La no conmutatividad de matrices hace que estas ecuaciones sean mucho más complicadas de resolver. Posibilitan además la aparición de los nuevos fenómenos que se comentaron en la Introducción y que son imposibles en el caso escalar.

Las ecuaciones de simetría (2.8) admiten una expresión más compacta en forma de matrices por bloques. Llamemos  $\mathcal{E}_{ij}$  a la matriz por bloques que tiene la matriz identidad  $I$  de tamaño  $N \times N$  en el bloque  $(i, j)$  y el bloque 0 en cualquier otro sitio. Sea  $L(\partial)$  el operador triangular inferior por bloques de tamaño  $kN \times kN$

$$L(\partial) = \sum_{i,j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k-j}{k-i} \partial^{j-i} \mathcal{E}_{ij}.$$

Más explícitamente, el operador diferencial  $L(\partial)$  se puede expresar como

$$L(\partial) = \begin{bmatrix} (-I)^k \binom{k}{k} \partial^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-I)^k \binom{k}{k-1} \partial^1 & (-I)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} \partial^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-I)^k \binom{k}{1} \partial^{k-1} & (-I)^{k-1} \binom{k-1}{1} \partial^{k-2} & \dots & -I \binom{1}{1} \partial^0 & 0 \\ (-I)^k \binom{k}{0} \partial^k & (-I)^{k-1} \binom{k-1}{0} \partial^{k-1} & \dots & -I \binom{1}{0} \partial^1 & I \binom{0}{0} \partial^0 \end{bmatrix}.$$

Entonces las ecuaciones de simetría se pueden escribir simplifcadamente como

$$L(\partial) \begin{bmatrix} F_k W \\ F_{k-1} W \\ \vdots \\ F_1 W \\ F_0 W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W F_k^* \\ W F_{k-1}^* \\ \vdots \\ W F_1^* \\ W F_0^* \end{bmatrix}.$$

Se puede igualmente dar una expresión más extensa de las ecuaciones de simetría usando la conocida fórmula de Leibniz para funciones matriciales en (2.8):

$$(FG)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} F^{(n-j)} G^{(j)}.$$

Se obtiene entonces una expresión homogénea donde las derivadas de  $W$  aparecen separadas de los coeficientes diferenciales del operador (por conveniencia, el índice  $i$  se cambia por  $r - l$ ):

$$\sum_{r=l}^k \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^{k-r+l} \binom{k-r+l}{l} \binom{k-r}{j} F_{k-r+l}^{(k-r-j)} W^{(j)} = WF_l^*, \quad l = 0, \dots, k,$$

donde se mantienen las mismas condiciones de contorno (2.7).

Para  $k = 2$ , el Teorema 2.1.3 da las ecuaciones de simetría (1.11), (1.12) y (1.13) con sus correspondientes condiciones de frontera (1.10) dadas en la Sección 1.2.2. Las ecuaciones para  $k = 1$  y  $k = 0$  se obtienen simplemente poniendo  $F_2 = 0$  y  $F_2 = F_1 = 0$  en las ecuaciones de simetría de segundo orden, respectivamente.

Las ecuaciones de simetría son bastante complicadas de manejar. Aún así, son útiles para estudiar órdenes bajos del operador diferencial, o computacionalmente para el estudio del álgebra de operadores diferenciales (véase Sección 1.3).

Por completitud, y porque se usarán en el Capítulo 5, mostramos explícitamente las ecuaciones de simetría para órdenes 3 y 4. Para  $k = 3$ ,

$$\begin{aligned} F_3 W + WF_3^* &= 0, \\ -3(F_3 W)' + F_2 W &= WF_2^*, \\ -3(F_3 W)'' + 2(F_2 W)' &= WF_1^* + F_1 W, \\ -(F_3 W)''' + (F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W &= WF_0^*, \end{aligned}$$

y las expresiones

$$F_3 W, \quad 3(F_3 W)' - 2(F_2 W), \quad -(F_3 W)' + (F_2 W), \quad (F_3 W)'' - (F_2 W)' + F_1 W,$$

deben anularse en la frontera del soporte de  $W$ .

Finalmente, para  $k = 4$ ,

$$\begin{aligned} F_4 W &= WF_4^*, \\ 4(F_4 W)' &= F_3 W + WF_3^*, \\ -6(F_4 W)'' + 3(F_3 W)' &= F_2 W - WF_2^*, \end{aligned}$$

$$4(F_4W)''' - 3(F_3W)'' + 2(F_2W)' = F_1W + WF_1^*,$$

$$(F_4W)'''' - (F_3W)''' + (F_2W)'' - (F_1W)' + F_0W = WF_0^*,$$

y las expresiones

$$F_4W, \quad -6(F_4W)' + 3(F_3W), \quad 4(F_4W)' - 3(F_3W), \quad -(F_4W)' + (F_3W),$$

$$-4(F_4W)'' + 3(F_3W)' - 2(F_2W), \quad (F_4W)'' - (F_3W)' + (F_2W),$$

$$-(F_4W)''' + (F_3W)'' - (F_2W)' + (F_1W),$$

deben anularse en la frontera del soporte de  $W$ .<sup>2</sup>

## 2.2. Operadores diferenciales simétricos con respecto a más de un peso matricial

El objetivo de esta sección será desarrollar un método para encontrar operadores diferenciales simétricos comunes para pesos matriciales distintos. El tipo de pesos matriciales que hemos encontrado con esta propiedad difiere en una delta de Dirac.

Sea  $W$  un peso matricial y los obtenidos de la siguiente forma:

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \delta_{t_0}(t)M(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R},$$

donde  $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$  es la conocida distribución delta de Dirac o *función de impulso*, introducida por primera vez por el físico inglés P. A. M. Dirac (véase por ejemplo [D]). Aquí se considera como una medida. Cuando  $t_0 = 0$  se escribirá como  $\delta(t)$ . La delta de Dirac viene definida por la siguiente fórmula integral:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_{t_0}(t)f(t)dt = f(t_0).$$

Intuitivamente, la distribución  $\delta_{t_0}(t)$  es una función que tiene un valor infinito en un punto  $t_0$  y un valor nulo en cualquier otro punto de la recta real. También se puede definir como la derivada de la función escalón o función de Heaviside en  $t_0$ .

La matriz  $M(t_0)$  se considerará semidefinida positiva (hermítica en particular) y dependerá del punto  $t_0$  donde esté localizada la delta de Dirac. En principio (y será crucial para el futuro) se permite que  $M(t_0)$  pueda ser singular. Con todas estas definiciones,  $\widetilde{W}$  vuelve a ser un peso matricial.

Para este tipo de perturbación de un peso matricial, se estudiaron en [YMP1, YMP2] diversos problemas asintóticos cuando  $W$  es un peso matricial de Nevai (con coeficientes de recurrencia convergentes).

El propósito de esta sección será buscar operadores diferenciales simétricos con respecto a  $\widetilde{W}$ , sin importar, en principio, dónde esté localizado el punto  $t_0$ . Principalmente trabajaremos con familias de polinomios ortogonales matriciales mónicos donde  $M(t_0)$  es

---

<sup>2</sup>El contenido de esta sección forma parte de la referencia [DdI1].

semidefinida positiva. Para ello, daremos una serie de restricciones sobre los coeficientes de un operador diferencial (introducido en (2.1))

$$D_k = \sum_{i=0}^k \partial^i F_i(t), \quad \partial = \frac{d}{dt},$$

de tal manera que se pueda asegurar que  $D_k$  es a su vez simétrico con respecto a  $W$  y  $\widetilde{W}$ .

Al no ser la delta de Dirac una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, será más conveniente usar las ecuaciones de momentos (2.2) para comprobar si un operador diferencial  $D_k$  es simétrico con respecto a  $\widetilde{W}$ . Los momentos de  $W$  y  $\widetilde{W}$  están relacionados por la fórmula

$$\widetilde{\mu}_n = \int t^n d\widetilde{W}(t) = \mu_n + \int t^n \delta_{t_0}(t) M(t_0) dt = \mu_n + t_0^n M(t_0), \quad n = 0, 1, \dots$$

Se observa que para el caso especial de  $t_0 = 0$  se tiene que  $\widetilde{\mu}_0 = \mu_0 + M$  y  $\widetilde{\mu}_n = \mu_n$  para  $n = 1, 2, \dots$

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $W$  un peso matricial y  $D_k$  un operador diferencial de orden  $k$ . Supongamos que, asociado al punto  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe una matriz semidefinida positiva (hermítica)  $M(t_0)$  tal que*

$$\begin{aligned} F_j(t_0)M(t_0) &= 0, \quad j = 1, \dots, k, \\ F_0M(t_0) &= M(t_0)F_0^*. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Entonces el operador  $D_k$  es simétrico con respecto a  $W$  si y sólo si es simétrico con respecto a  $\widetilde{W} = W + \delta_{t_0}M(t_0)$ .

DEMOSTRACIÓN: Como se mencionó anteriormente, usaremos la Proposición 2.1.2. Aplicando la fórmula (2.2) para el peso  $\widetilde{W} = W + \delta_{t_0}M(t_0)$  se obtiene que

$$\widetilde{B}_n^l = \sum_{i=0}^l F_{l-i}^l \widetilde{\mu}_{n-i} = B_n^l + t_0^{n-l} F_l(t_0) M(t_0), \quad l = 0, \dots, k.$$

Usando las condiciones (2.9) para  $j = 1, \dots, k$ , se tiene que

$$\widetilde{B}_n^0 = B_n^0 + t_0^n F_0 M(t_0), \quad \widetilde{B}_n^l = B_n^l, \quad l = 1, \dots, k.$$

Como consecuencia, las ecuaciones (2.2) para  $W$  y  $\widetilde{W}$  son siempre las mismas para todo  $l = 1, \dots, k$ . Por último, queda comprobarlas para  $l = 0$ . En ese caso, las ecuaciones (2.2) para  $W$  y  $\widetilde{W}$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} (n)_{k-i} B_n^{k-i} + B_n^0 &= (B_n^0)^*, \\ \sum_{i=0}^{k-1} (n)_{k-i} B_n^{k-i} + B_n^0 + t_0^n F_0 M(t_0) &= (B_n^0)^* + t_0^n M(t_0) F_0^*. \end{aligned}$$

Pero usando la última de las condiciones en (2.9) para  $F_0$  muestra de nuevo que estas ecuaciones son las mismas para  $W$  y  $\widetilde{W}$ .<sup>3</sup>  $\square$

*Nota 2.2.2.* Esta situación no es posible en el caso escalar. Las medidas que se obtienen cuando se añade una masa discreta en un punto a cualquiera de los pesos clásicos de Hermite, Laguerre o Jacobi, no tienen operadores diferenciales simétricos de segundo orden. Sólo cuando  $t_0$  está en la frontera del soporte es posible generar un operador diferencial de orden 4 o incluso mayor, que además no es simétrico con respecto al antiguo peso. Los casos para los que esto ocurre son los pesos de Laguerre  $e^{-t}$  en  $(0, +\infty)$ , Legendre 1 en  $(-1, 1)$  y un caso especial de Jacobi,  $(1 - t)^\alpha$  en  $(0, 1)$ , dando lugar a los conocidos pesos de tipo Laguerre  $e^{-t} + M\delta_0$ , de tipo Legendre  $1 + M\delta_{-1} + N\delta_1$  y de tipo Jacobi  $(1 - t)^\alpha + M\delta_0$ , respectivamente (véase [LK]).

También es digno de mención que el Teorema 2.2.1 aplicado a la teoría clásica implicaría que  $M = 0$  ó que existe un cero en común para todos los coeficientes del operador diferencial, lo que, para  $k = 2$ , esto es, los ejemplos clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi, no ocurre.

El teorema anterior indica que siempre que podamos encontrar  $W$ ,  $D_k$ ,  $t_0$  y  $M(t_0)$  de tal manera que se satisfagan las condiciones (2.9), se podrá afirmar que existen infinitos pesos matriciales distintos para los cuales  $D_k$  es simétrico, ya que, en particular, el teorema se sigue verificando para  $W_\gamma = W + \gamma\delta_{t_0}M(t_0)$  con  $\gamma > 0$ .

El Teorema 2.2.1 permite presenciar un nuevo fenómeno en la teoría de polinomios ortogonales matriciales. Es conocido (véase [CG2, D7, DdI1, DL6, GdI1]) que existen familias de polinomios ortogonales matriciales que pueden satisfacer varias ecuaciones diferenciales linealmente independientes de segundo orden. El Teorema 2.2.1 recoge una situación dual de la anterior: existen familias distintas de polinomios ortogonales matriciales mónicos que son autofunciones de un mismo operador diferencial.

La construcción explícita de ejemplos se llevará a cabo en el Capítulo 4.

A continuación se tratará de dar representaciones de la familia  $(P_{n,\gamma})_n$ , mónica con respecto a  $\widetilde{W}$ , en términos de  $(P_n)_n$ , mónica con respecto a  $W$  (véase [YMP1], Lema 3.1, para las familias ortonormales). Se considera la expansión en series de Fourier

$$P_{n,\gamma} = P_n + \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{n,\gamma} P_j.$$

De la ortogonalidad de  $P_{n,\gamma}$  con respecto a  $P_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , se tiene que dichos coeficientes son

$$C_j^{n,\gamma} = \langle P_{n,\gamma}, P_j \rangle_W (\|P_j\|_W^2)^{-1} = -\gamma P_{n,\gamma}(t_0) M(t_0) P_j^*(t_0) (\|P_j\|_W^2)^{-1}.$$

---

<sup>3</sup>El teorema anterior es parte de la referencia [DdI2].

Entonces

$$\begin{aligned} P_{n,\gamma}(t) &= P_n(t) - \gamma P_{n,\gamma}(t_0)M(t_0) \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(t_0)(\|P_j\|_W^2)^{-1}P_j(t) \\ &= P_n(t) - \gamma P_{n,\gamma}(t_0)M(t_0)K_{n-1}(t, t_0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $(K_n(x, y))_n$  son los núcleos asociados a  $(P_n)_n$  definidos por

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^n (\|P_j\|_W^{-1}P_j(y))^* \|P_j\|_W^{-1}P_j(x). \quad (2.11)$$

Llamando  $\mathcal{P}_n = \|P_n\|_W^{-1}P_n$  a una sucesión de polinomios ortonormales matriciales, se tiene de (2.11) que  $K_n(x, y) = \sum_j \mathcal{P}_j^*(y)\mathcal{P}_j(x)$ .

Este núcleo tiene algunas propiedades interesantes. Por ejemplo, una fórmula de Christoffel-Darboux:

$$K_n(x, y) = \frac{P_n^*(y)\|P_n\|_W^{-2}P_{n+1}(x) - P_{n+1}^*(y)\|P_n\|_W^{-2}P_n(x)}{x - y}.$$

También se tiene la siguiente *fórmula confluyente*:

$$K_n(x, x) = P_{n+1}^*(x)' \|P_n\|_W^{-2}P_n(x) - P_n^*(x)' \|P_n\|_W^{-2}P_{n+1}(x).$$

Por último, los núcleos satisfacen, para cualquier polinomio matricial  $\Pi_m(t)$  de grado  $m \leq n$ , la siguiente fórmula:

$$\langle \Pi_m(t), K_n(t, x) \rangle_W = \int \Pi_m(t)W(t)K_n^*(t, x)dt = \Pi_m(x).$$

Volviendo a la expresión (2.10), evaluándola en  $t = t_0$ , se obtiene

$$P_n(t_0) = P_{n,\gamma}(t_0)(I + \gamma M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0)). \quad (2.12)$$

De esta manera se llega al siguiente

**Lema 2.2.3.** *Sea  $(P_{n,\gamma})_n$  la familia mónica con respecto a  $W_\gamma$  y  $(P_n)_n$  la familia mónica con respecto a  $W$ . Entonces*

$$P_{n,\gamma}(t) = P_n(t) - \gamma P_n(t_0)(I + \gamma M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0))^{-1}M(t_0)K_{n-1}(t, t_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

DEMOSTRACIÓN: De la fórmula (2.12) se tiene que la expresión  $I + \gamma M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0)$  siempre es invertible, ya que por definición  $M(t_0)$  es semidefinida positiva y  $K_{n-1}(t_0, t_0)$  es definida positiva. Luego  $I + \gamma M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0) = (K_{n-1}(t_0, t_0)^{-1} + \gamma M(t_0))K_{n-1}(t_0, t_0)$  es el producto de dos matrices definidas positivas, y por lo tanto invertible (la suma de una matriz definida positiva y una matriz semidefinida positiva es siempre definida positiva).

Sustituyendo el valor de  $P_{n,\gamma}(t_0)$  de la fórmula (2.12) en (2.10) se llega a la expresión (2.13).  $\square$

También se puede dar una fórmula de recurrencia a tres términos para la familia  $(P_{n,\gamma})_n$  en términos de la fórmula de recurrencia a tres términos para la familia  $(P_n)_n$ . Estas ya aparecen en [YMP2], Proposición 4.1, para los polinomios ortonormales matriciales y suponiendo que  $M(t_0)$  es invertible. Sin embargo en esta sección trabajamos con la familia mónica y en general  $M(t_0)$  no tiene por qué ser invertible.

Para ello se considera la expansión en series de Fourier de  $(P_n)_n$  con respecto a  $(P_{n,\gamma})_n$

$$P_n = P_{n,\gamma} + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{C}_j^{n,\gamma} P_{j,\gamma},$$

donde, igual que antes, los coeficientes vienen dados por

$$\tilde{C}_j^{n,\gamma} = \langle P_n, P_{j,\gamma} \rangle_{W_\gamma} (\|P_{j,\gamma}\|_{W_\gamma}^2)^{-1} = \gamma P_n(t_0) M(t_0) P_{j,\gamma}^*(t_0) (\|P_{j,\gamma}\|_{W_\gamma}^2)^{-1}. \quad (2.14)$$

Entonces se tiene la siguiente

**Proposición 2.2.4.** *Sea*

$$tP_n = P_{n+1} + B_n P_n + A_n P_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = I,$$

la fórmula de recurrencia para la familia mónica  $(P_n)_n$  con respecto a  $W$ . Entonces la fórmula de recurrencia para las familias mónicas  $(P_{n,\gamma})_n$  con respecto a  $W_\gamma$  es

$$tP_{n,\gamma} = P_{n+1,\gamma} + B_{n,\gamma} P_{n,\gamma} + A_{n,\gamma} P_{n-1,\gamma}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad P_{-1,\gamma} = 0, \quad P_{0,\gamma} = I, \quad (2.15)$$

donde

$$B_{n,\gamma} = B_n + \tilde{C}_n^{n+1,\gamma} - \tilde{C}_{n-1}^{n,\gamma}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

y

$$A_{n,\gamma} = A_n + B_n \tilde{C}_{n-1}^{n,\gamma} - \tilde{C}_{n-1}^{n,\gamma} B_{n-1} + \tilde{C}_{n-1}^{n+1,\gamma} - (\tilde{C}_{n-1}^{n,\gamma})^2 - \tilde{C}_{n-2}^{n,\gamma} + \tilde{C}_{n-1}^{n,\gamma} \tilde{C}_{n-2}^{n-1,\gamma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para los ejemplos concretos, el cálculo explícito de  $\tilde{C}_{n-1}^{n,\gamma}$  y  $\tilde{C}_{n-2}^{n,\gamma}$  es por lo general bastante complicado y las expresiones encontradas (cuando esto es posible) son extensas.

La familia  $(P_{n,\gamma})_n$ ,  $\gamma \geq 0$ , se puede expresar también como combinación lineal (coeficientes matriciales) de  $(P_n)_n$  y  $(P_{n,1})_n$ :

**Proposición 2.2.5.** *Supongamos que  $t_0$  no es un cero de  $P_n$  (i.e.,  $P_n(t_0)$  no es singular). Entonces se tiene que*

$$P_{n,\gamma}(t) = \Delta_{n,\gamma} P_n(t) + (I - \Delta_{n,\gamma}) P_{n,1}(t), \quad (2.16)$$

donde

$$\Delta_{n,\gamma} = (1 - \gamma) P_n(t_0) (I + \gamma M(t_0) K_{n-1}(t_0, t_0))^{-1} P_n(t_0)^{-1}. \quad (2.17)$$

DEMOSTRACIÓN: Sustituyendo  $\gamma = 1$  en (2.13) se llega a que

$$P_{n,1}(t) = P_n(t) - P_n(t_0)(I + M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0))^{-1}M(t_0)K_{n-1}(t, t_0).$$

Si de nuevo evaluamos en  $t_0$ , y usando que  $P_n(t_0)$  es invertible, se llega a la expresión

$$M(t_0)K_{n-1}(t, t_0) = (I + M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0))P_n(t_0)^{-1}(P_n(t) - P_{n,1}(t)).$$

Sustituyendo la anterior fórmula en (2.13) se tiene (2.16) donde

$$\Delta_{n,\gamma} = I - \gamma P_n(t_0)(I + \gamma M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0))^{-1}(I + M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0))P_n(t_0)^{-1}. \quad (2.18)$$

Para llegar a (2.17) es necesario tener en cuenta la *identidad matricial de Woodbury*, dada por

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Usando los valores  $A^{-1} = I$ ,  $C^{-1} = (1-\gamma)I$ ,  $U = \gamma P_n(t_0)$  y  $V = (I + M(t_0)K_{n-1}(t_0, t_0))P_n(t_0)^{-1}$  se tiene que (2.18) es igual a (2.17).  $\square$

*Nota 2.2.6.* No es difícil dar una serie de condiciones suficientes de tal manera que se pueda asegurar la existencia de operadores diferenciales simétricos para pesos matriciales con masas localizadas en diferentes puntos en la forma

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \sum_{i=0}^h \delta_{t_i}(t)M(t_i),$$

donde  $M(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, h$ , son matrices semidefinidas positivas. Dichas condiciones son

$$\begin{aligned} F_j(t_i)M(t_i) &= 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 0, \dots, h, \\ F_0M(t_i) &= M(t_i)F_0^*, \quad i = 0, \dots, h. \end{aligned}$$

Por ejemplo, en el caso más significativo de  $k = 2$  y 2 nodos,  $t_0$  y  $t_1$ , las anteriores condiciones quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_2(t_0)M(t_0) &= 0, \quad F_2(t_1)M(t_1) = 0, \\ F_1(t_0)M(t_0) &= 0, \quad F_1(t_1)M(t_1) = 0, \\ F_0M(t_0) &= M(t_0)F_0^*, \quad F_0M(t_1) = M(t_1)F_0^*. \end{aligned}$$

Todos los ejemplos que se consideran en esta memoria tienen un nodo, pero no descartamos que se puedan encontrar ejemplos donde haya más de un nodo para órdenes superiores del operador diferencial, debido a que se dispone de un mayor número de operadores simétricos para el peso matricial  $W$ .

---

## Capítulo 3

# Algunos ejemplos instructivos de polinomios ortogonales matriciales verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden

*La biblioteca es una esfera cuyo centro cabal es cualquier hexágono, cuya circunferencia es inaccesible.*

JORGE LUIS BORGES

*Recorre a menudo la senda que lleva al huerto de tu amigo, no sea que la maleza te impida ver el camino.*

PROVERBIO INDIO

El objetivo de este capítulo será introducir diversas familias de ejemplos de polinomios ortogonales matriciales que servirán para ilustrar los fenómenos nuevos a los que se hacía referencia en la Introducción.

La primera de ellas es original de esta memoria y tiene la característica principal de tener asociados operadores diferenciales de orden impar (orden 3 ó mayor), no reducible a escalares, simétricos con respecto al peso matricial (lo que se mostrará en el Capítulo 5). Aquí nos centraremos en calcular sus operadores diferenciales de segundo orden y mostrar (para tamaño  $2 \times 2$ ) algunas fórmulas de estructura (Rodrigues, recurrencia a tres términos, etc.).

La segunda sección muestra un ejemplo de pesos matriciales de la forma  $W(t) + \gamma \delta_{t_0}(t)M(t_0)$ ,  $\gamma \geq 0$ , con un operador simétrico de segundo orden común. Aquí,  $W$  es el peso matricial introducido en el capítulo anterior para tamaño  $N = 2$ . Calcularemos

un operador diferencial de segundo orden asociado, así como expresiones de los polinomios ortogonales matriciales en términos de su fórmula de recurrencia a tres términos. En el Capítulo 4 este ejemplo se extenderá a cualquier tamaño  $N \times N$ , y se mostrarán una extensa variedad de ejemplos que ilustran el mismo fenómeno.

Los últimos ejemplos que se estudian en este capítulo provienen de la teoría de representación de grupos, particularmente del estudio de las funciones esféricas matriciales asociadas al espacio proyectivo complejo. Se calcularán los operadores diferenciales de segundo orden de los ejemplos introducidos en [GPT5] (y en la Sección 1.4), y los polinomios ortogonales asociados en términos de la función hipergeométrica matricial introducida en [T2] (y en la Sección 1.5).

### 3.1. El peso $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$

Como ya se comentó en el método expuesto en la Sección 1.2.3, para encontrar soluciones de las ecuaciones de simetría

$$\begin{aligned} F_2 W &= W F_2^*, \\ 2(F_2 W)' &= F_1 W + W F_1^*, \\ (F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W &= W F_0^*, \end{aligned}$$

para operadores diferenciales de segundo orden de la forma

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial F_1(t) + \partial^0 F_0, \quad \partial = \frac{d}{dt}, \quad F_i \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t],$$

es conveniente considerar pesos matriciales factorizados en la forma  $W(t) = \rho(t)T(t)T^*(t)$ , donde  $\rho$  es una función escalar y  $T$  una función matricial que verifica cierta ecuación de primer orden.

En toda esta sección se trabajará en  $(0, +\infty)$ , o sea tomamos siempre  $t > 0$ . Tomando  $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$ ,  $\alpha > -1$ , es decir, el peso clásico escalar de Laguerre, y como coeficiente líder del operador diferencial  $F_2(t) = tI$ , la ecuación diferencial de primer orden que debe satisfacer la función matricial  $T$  tiene la siguiente forma:

$$T'(t) = \left( A + \frac{B}{t} \right) T(t). \quad (3.1)$$

Para construir nuestro ejemplo, consideremos un peso matricial de la forma  $W(t) = t^\alpha e^{-t} T(t) T^*(t)$ , donde

$$T(t) = e^{A t} t^B = e^{A t} e^{B \log t}. \quad (3.2)$$

$A$  y  $B$  son, en principio, matrices cualesquiera. A partir de la fórmula

$$e^{A t} B = \left( \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \text{ad}_A^n B \right) e^{A t}, \quad (3.3)$$

se puede escribir la derivada de (3.2) como

$$T'(t) = AT + \frac{1}{t}TB = \left( \frac{B}{t} + A + \text{ad}_A B + \sum_{n \geq 2} \frac{t^{n-1}}{n!} \text{ad}_A^n B \right) T,$$

donde aquí se usa la notación estándar para la representación adjunta, dada por

$$\text{ad}_X^0 Y = Y, \quad \text{ad}_X^1 Y = [X, Y], \quad \text{ad}_X^2 Y = [X, [X, Y]],$$

y, en general,

$$\text{ad}_X^{n+1} Y = [X, \text{ad}_X^n Y],$$

donde  $[X, Y] = XY - YX$ .

Para que  $T$  satisfaga una ecuación diferencial como en (3.1), escogemos las matrices  $A$  y  $B$  tales que  $\text{ad}_A^2 B = 0$ . Tomando como  $A$  la matriz nilpotente de orden  $N$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.4)$$

y eligiendo  $B$  diagonal y poniendo 0 al final, se obtiene de la condición  $\text{ad}_A^2 B = 0$  que necesariamente  $B = uJ$ ,  $u \in \mathbb{C}$ , donde

$$J = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Sin embargo, al buscar operadores diferenciales simétricos con  $F_2(t) = tI$ , encontramos que para  $N \geq 3$  el parámetro  $u$  tiene que ser  $1/2$ ; para  $N = 2$ ,  $u$  puede ser tomado como cualquier número complejo.

Esta es la razón por la cual consideremos el peso matricial de la forma

$$W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}(t) = t^\alpha e^{-t} e^{At} t^{\frac{1}{2}J} t^{\frac{1}{2}J*} e^{A*t}, \quad \alpha > -1, \quad t \in (0, +\infty), \quad (3.6)$$

donde  $A$  y  $J$  están definidas en (3.4) y (3.5), respectivamente, como una candidata a tener operadores diferenciales de segundo orden asociados con coeficiente líder  $F_2(t) = tI$ . El caso de tamaño  $2 \times 2$  fue considerado en [CMV] donde se prueba que las derivadas de los polinomios ortogonales matriciales asociados a este peso vuelven a ser ortogonales. Nuestra elección nos permite escribir  $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}(t) = t^\alpha e^{-t} T(t) T(t)^*$ , donde  $T(t) = e^{At} t^{\frac{1}{2}J}$  es la solución de

$$\begin{cases} T'(t) = \frac{1}{2} \left( A + \frac{J}{t} \right) T(t), \\ T(1) = e^A. \end{cases} \quad (3.7)$$

Obsérvese que, a diferencia de los ejemplos considerados en [DG1],  $A$  y  $J$  no conmutan, ya que

$$[A, J] = -A. \quad (3.8)$$

### 3.1.1. Operadores diferenciales de segundo orden

Una vez introducido el peso matricial (3.6) no es difícil encontrar un operador diferencial de segundo orden con  $F_2(t) = tI$ , como muestra el siguiente

**Teorema 3.1.1.** *El operador diferencial de segundo orden*

$$D_1 = \partial^2 tI + \partial^1[(\alpha + 1)I + J + t(A - I)] + \partial^0[(J + \alpha I)A - J], \quad (3.9)$$

es simétrico con respecto a  $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$ .

DEMOSTRACIÓN: La primera de las ecuaciones de simetría  $F_2W = WF_2^*$  es trivial (para simplificar, no se incluye la dependencia de  $\alpha$  y  $\nu_1, \dots, \nu_{N-1}$  en la notación). La segunda ecuación  $2(F_2W)' = F_1W + WF_1^*$  es consecuencia de la factorización del peso  $W = t^\alpha e^{-t} T T^*$  y la ecuación diferencial (3.7) para  $T$  (según lo explicado en la Nota 1.2.8). La tercera ecuación de simetría es equivalente a  $(F_1W - WF_1^*)' = 2(F_0W - WF_0^*)$ . Usando las fórmulas

$$e^{At}J = Je^{At} - Ate^{At}, \quad y \quad e^{A^*t}J = Je^{A^*t} + A^*te^{A^*t},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} JW - WJ &= t(AW - WA^*), \\ JAW - WA^*J &= (AW - WA^*) + (AJW - WJA^*). \end{aligned}$$

Como consecuencia de la primera ecuación anterior también se tiene

$$\begin{aligned} JW' - W'J &= AW - WA^* + t(AW' - W'A^*), \\ t(A^2W - W(A^*)^2) &= (JWA^* - AWJ) + (AJW - WJA^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto, desarrollando la ecuación  $(F_1W - WF_1^*)' = 2(F_0W - WF_0^*)$  y usando todas las fórmulas anteriores, junto con la ecuación diferencial para  $T$  en (3.7), no es difícil ver que la tercera de las ecuaciones de simetría se verifica.

Por último, falta comprobar las condiciones de frontera en  $t = 0$  y  $t = \infty$ . La primera condición de frontera  $F_2W$  es inmediata de comprobar. La segunda,  $(F_2W)' - F_1W$ , se sigue directamente teniendo en cuenta que  $(F_2W)' - F_1W = -\frac{1}{2}(F_1W - WF_1^*) = -t(AW - WA^*)$ .

□

Para  $N = 2$ , el peso matricial  $W(t) = t^\alpha e^{-t} e^{At} t^B t^{B^*} e^{A^*t}$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lleva asociado el siguiente operador diferencial:

$$D = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} 2u + \alpha + 1 - t & 2tv(1 - u) \\ 0 & \alpha + 1 - t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1 & v(1 + \alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Para  $N = 3$ , si obligamos a que  $B$  sea cualquier matriz singular y diagonal, se puede comprobar, usando el método de la Sección 1.2.3, que para que exista un operador diferencial de segundo orden con  $F_2(t) = tI$  es necesario que  $B = \frac{1}{2}J$ .

Buscamos ahora otro operador diferencial

$$D_2 = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0, \quad F_i \in \mathbb{C}_i^{N \times N}[t],$$

simétrico con respecto a  $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$ . Para ello se siguen las líneas del método desarrollado en [D7], que consiste en buscar *buenas factorizaciones* de un peso matricial. “Buenas” en el sentido explicado en el Teorema 1.2.7, esto es, que  $W = \rho T T^*$  y que si  $T' = G T$ , se pueda establecer entre  $F_2, F_1$  y  $F_0$  y  $G$  las relaciones establecidas en dicho teorema.

En nuestro ejemplo, bajo la hipótesis de que  $F_2 W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$  sea hermítica (ahora  $F_2$  no tiene por qué ser escalar), buscamos una factorización  $W(t) = t^\alpha e^{-t} R(t) R^*(t)$ , con  $R$  verificando la ecuación diferencial de primer orden  $R' = G R$ . Tendremos que demostrar que

1. La función matricial  $G$  está relacionada con  $F_2$  y  $F_1$  por la ecuación

$$F_1 = F_2 G + G F_2 + C, \quad (3.11)$$

con  $C(t) = (t^\alpha e^{-t} F_2(t))' / t^\alpha e^{-t}$ , y

2. La función matricial

$$R^{-1}(G F_2 G + G' F_2 + G C - F_0) R \quad (3.12)$$

es hermítica para todo  $t > 0$ .

Partiendo de la factorización  $W = t^\alpha e^{-t} T T^*$ ,  $T = e^{A t} t^{\frac{1}{2} J}$ , se busca  $R$  de la forma  $R(t) = T(t) U(t)$ , donde  $U(t)$  es unitaria para todo  $t > 0$ .

Lo primero será encontrar un buen candidato para el coeficiente líder  $F_2$  del operador diferencial  $D_2$ . Este coeficiente debe verificar  $F_2 W = W F_2^*$  (de nuevo se quita la dependencia de  $\alpha$  y  $\nu_1, \dots, \nu_N$ ). La relación (3.8) da un candidato natural para  $F_2$ . En efecto,  $F_2 W = W F_2^*$  es equivalente a que la expresión

$$t^{-\frac{1}{2} J} e^{-A t} F_2 e^{A t} t^{\frac{1}{2} J}$$

sea hermítica para todo  $t > 0$ . Si definimos

$$F_2(t) = t(J - A t), \quad (3.13)$$

usando que  $\text{ad}_A J = -A$  es directo comprobar que

$$\begin{aligned} t^{-\frac{1}{2}J} e^{-At} (t(J - At)) e^{At} t^{\frac{1}{2}J} &= t^{-\frac{1}{2}J} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n!} \text{ad}_A^n J - At^2 \right) t^{\frac{1}{2}J} \\ &= t \cdot t^{-\frac{1}{2}J} J t^{\frac{1}{2}J} = tJ. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la primera de las ecuaciones de simetría se satisface, ya que la matriz  $tJ$  es siempre hermítica para todo  $t > 0$ .

Una vez que tenemos un buen candidato para  $F_2$  (que no es un polinomio escalar), buscamos una factorización del peso matricial  $W(t) = t^\alpha e^{-t} R(t) R^*(t)$  en la forma

$$R(t) = e^{At} t^{\frac{1}{2}J} U(t),$$

con  $U$  unitaria. Es directo comprobar que  $R'(t) = G(t)R(t)$  donde

$$G(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} J + A \right) + e^{At} t^{\frac{1}{2}J} X(t) t^{-\frac{1}{2}J} e^{-At}, \quad (3.14)$$

con  $X(t) = U'(t)U(t)^*$ . Debido a que  $U(t)$  es unitaria, se tiene que  $U'(t)U^*(t) + U(t)U'(t)^* = 0$  y por lo tanto  $X(t)$  es anti-hermítica. Teniendo en cuenta esto, elegimos la matriz  $X(t)$  con la siguiente estructura:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\bar{x}_{1,2}(t) & 0 & x_{2,3}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{x}_{2,3}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{N-1,N}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{x}_{N-1,N}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde  $x_{i,i+1}(t)$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , son funciones complejas que se elegirán de tal manera que la función  $F_1$  definida por la ecuación (3.11) sea un polinomio de grado 1. Sustituyendo  $G$  y  $F_2$  (véase (3.14) y (3.13)) en (3.11), se tiene que

$$\begin{aligned} F_1 &= ((1 + \alpha)I + J)J - t(J + (\alpha + 2)A) + t^2(A - A^2) \\ &\quad + t e^{At} t^{\frac{1}{2}J} (JX(t) + X(t)J) t^{-\frac{1}{2}J} e^{-At}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esta expresión debe ser un polinomio matricial de grado 1. Para ello, intentamos dar una expresión explícita de la parte derecha de la fórmula anterior. Teniendo en cuenta las expresiones para  $X(t)$  y  $J$ , (véase (3.15) y (3.5)), se obtiene que

$$X(t)J + JX(t) = \begin{pmatrix} 0 & y_{1,2}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\bar{y}_{1,2}(t) & 0 & y_{2,3}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{y}_{2,3}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{N-1,N}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{y}_{N-1,N}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$y_{i,i+1}(t) = (2(N-i) - 1)x_{i,i+1}(t), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Llamemos  $M$  a la siguiente función matricial, que se obtiene por cálculos directos:

$$M(t) = t^{\frac{1}{2}J}(X(t)J + JX(t))t^{-\frac{1}{2}J} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & t^{\frac{1}{2}}y_{1,2}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ -t^{-\frac{1}{2}}\bar{y}_{1,2}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t^{-\frac{1}{2}}\bar{y}_{2,3}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{\frac{1}{2}}y_{N-1,N}(t) \\ 0 & 0 & \cdots & -t^{-\frac{1}{2}}\bar{y}_{N-1,N}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la estructura de la matriz  $A$  (véase (3.4)), se llega a que

$$\text{ad}_A M = \begin{pmatrix} z_{1,1}(t) & 0 & z_{1,3}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z_{2,2}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{3,3}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{N-2,N}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_{N-1,N-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{N,N}(t) \end{pmatrix},$$

donde (implícitamente suponemos que  $\nu_0 = 0$  y  $\nu_N = 0$ )

$$z_{i,i}(t) = (\nu_{i-1}\bar{y}_{i-1,i}(t) - \nu_i\bar{y}_{i,i+1}(t))t^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

y

$$z_{i,i+2}(t) = (\nu_i y_{i+1,i+2}(t) - \nu_{i+1} y_{i,i+1}(t))t^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, N-2.$$

Para eliminar las potencias de  $t^{\frac{1}{2}}$  en la expresión de  $M$ , se toma

$$y_{i,i+1}(t) = y_{i,i+1}t^{-\frac{1}{2}},$$

donde ahora, abusando de la notación,  $y_{i,i+1} \in \mathbb{C}$ . En este caso, la función matricial  $M(t)$  se transforma en

$$M(t) = \frac{1}{t}Y - Y^*,$$

donde

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\bar{y}_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{y}_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{y}_{N-1,N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, sustituyendo todas estas expresiones en (3.16) y teniendo en cuenta la fórmula (3.3), se tiene que

$$\begin{aligned} F_1 = & ((1 + \alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha + 2)A + Y^* - \text{ad}_A Y) \\ & + t^2(A - A^2 + \frac{1}{2}\text{ad}_A^2 Y - \text{ad}_A Y^*) + \sum_{n \geq 3} \frac{t^n}{n!} (\text{ad}_A^n Y - \text{ad}_A^{n-1} Y^*). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Recordamos de nuevo que el objetivo es conseguir que  $F_1$  sea un polinomio de grado 1. De esta manera es suficiente centrarse en la expresión de segundo grado en  $t$  de la fórmula anterior. A raíz de la estructura que tienen las matrices  $A$  e  $Y$  se tiene que  $\text{ad}_A^2 Y$  es una matriz nula salvo en la diagonal  $(i, i+1)$  y que  $\text{ad}_A Y^*$  es también nula salvo en la diagonal  $(i, i+2)$ . Luego para que el coeficiente de segundo grado en  $t$  se anule hay que imponer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{ad}_A^2 Y + A &= 0, \\ \text{ad}_A Y^* + A^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si se tuviesen las condiciones anteriores, se tendría que  $\text{ad}_A^2 Y = -2A$  y por lo tanto  $\text{ad}_A^n Y = 0$  para todo  $n = 3, 4, \dots$ , y  $\text{ad}_A Y^* = -A^2$  y por lo tanto  $\text{ad}_A^n Y^* = 0$  para todo  $n = 2, 3, \dots$ . Esto dice que el resto de potencias en  $t$  de la expresión (3.17) se anularían inmediatamente, implicando que  $F_1$  es un polinomio de grado 1. Con lo que basta resolver las ecuaciones (3.18).

Como las entradas no nulas de la matriz  $Y$  son genéricas, se puede resolver (3.18) en términos de esos parámetros. De la primera de las ecuaciones (3.18) se obtiene que  $y_{i,i+1} = -\frac{i(N-i)}{\tilde{\nu}_i}$ , que implica que

$$x_{i,i+1} = -\frac{i(N-i)}{(2N-2i-1)\tilde{\nu}_i}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (3.19)$$

Se abusa de nuevo de la notación tomando  $x_{i,i+1}(t) = x_{i,i+1}t^{-\frac{1}{2}}$ ,  $x_{i,i+1} \in \mathbb{C}$ . De la segunda de las ecuaciones en (3.18) se obtiene asimismo  $y_{i,i+1} = \frac{\nu_i c}{\nu_1} + (i-1)\nu_i$ , que implica que

$$x_{i,i+1} = \frac{\nu_i c}{(2N-2i-1)\nu_1} + \frac{(i-1)\nu_i}{2N-2i-1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.20)$$

donde  $c$  es cualquier número complejo. Igualando (3.19) y (3.20) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$c|\nu_i|^2 + (i-1)\nu_1|\nu_i|^2 + i(N-i)\nu_1 = 0, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Eliminando el parámetro  $c$  se pueden obtener  $N-2$  ecuaciones que ligan los (módulos) de los parámetros  $\nu_1, \dots, \nu_{N-1}$  en función de uno de ellos. Escribimos a continuación tres conjuntos equivalentes de ligaduras que usaremos según convenga en las simplificaciones posteriores:

$$i(N-i)|\nu_1|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 - (i-1)|\nu_1|^2|\nu_i|^2, \quad i = 2, \dots, N-1,$$

$$i(N-i)|\nu_{i+1}|^2 = (i+1)(N-i-1)|\nu_i|^2 + |\nu_i|^2|\nu_{i+1}|^2, \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (3.21)$$

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2, \quad i = 1, \dots, N-2. \quad (3.22)$$

Con estas relaciones entre los parámetros  $\nu_1, \dots, \nu_{N-1}$ , que hacen que sólo (el módulo de) uno quede libre, la función  $F_1$  definida en (3.11) es el siguiente polinomio matricial de grado 1:

$$F_1(t) = ((1 + \alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha + 2)A + Y^* - \text{ad}_A Y). \quad (3.23)$$

Vamos, por último, a determinar el coeficiente diferencial  $F_0$  para que se verifique que la función definida en (3.12) sea hermítica. Esta función es:

$$R^{-1}(t)(G(t)F_2(t)G(t) + G'(t)F_2(t) + G(t)(t^\alpha e^{-t}F_2)'t^{-\alpha}e^t - F_0)R(t).$$

Como  $R(t) = e^{At}t^{\frac{1}{2}}U(t)$  y  $U(t)$  es unitaria, la hermiticidad de esta función equivale a probar que

$$\chi(t) = t^{-\frac{1}{2}}J e^{-At}(G(t)F_2(t)G(t) + G'(t)F_2(t) + G(t)(t^\alpha e^{-t}F_2)'t^{-\alpha}e^t - F_0)e^{At}t^{\frac{1}{2}}J \quad (3.24)$$

es hermítica para todo  $t > 0$ . Para ello, analizamos sumando a sumando y buscamos una expresión más conveniente de (3.24). Las siguientes fórmulas serán muy útiles para los cálculos:

$$\begin{aligned} t^{-\frac{1}{2}}J e^{-At}(F_2)e^{At}t^{\frac{1}{2}}J &= t \cdot t^{-\frac{1}{2}}J t^{\frac{1}{2}}J = tJ, \\ t^{-\frac{1}{2}}J e^{-At}(F_2')e^{At}t^{\frac{1}{2}}J &= J - t^{\frac{1}{2}}A, \\ t^{-\frac{1}{2}}J A t^{\frac{1}{2}}J &= t^{-\frac{1}{2}}A, \\ X'(t) &= -\frac{1}{2t}X(t). \end{aligned}$$

De la expresión para  $G$  y  $F_2$  (véase (3.14) y (3.13)) se obtiene, después de minuciosos cálculos, que

$$\begin{aligned} t^{-\frac{1}{2}}J e^{-At}(GF_2G)e^{At}t^{\frac{1}{2}}J &= \frac{1}{4t}J^3 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(J^2A + AJ^2) + AJA + tX(t)JX(t) \\ &\quad + t^{\frac{1}{2}}(AJX(t) + X(t)JA) + \frac{1}{2}(J^2X(t) + X(t)J^2), \\ t^{-\frac{1}{2}}J e^{-At}(G'F_2)e^{At}t^{\frac{1}{2}}J &= -\frac{1}{2t}J^2 + t^{\frac{1}{2}}(AX(t)J - X(t)AJ) \\ &\quad - \frac{1}{2}X(t)J - \frac{1}{2}X(t)J^2 + \frac{1}{2}JX(t)J, \\ t^{-\frac{1}{2}}J e^{-At}(G(t^\alpha e^{-t}F_2)'t^{-\alpha}e^t)e^{At}t^{\frac{1}{2}}J &= \frac{\alpha + 1}{2t}J^2 + t^{-\frac{1}{2}}((\alpha + 1)AJ - \frac{1}{2}JA) - A^2 - \frac{1}{2}J^2 \\ &\quad - t^{\frac{1}{2}}(AJ + X(t)A) + (\alpha + 1)X(t)J - tX(t)J. \end{aligned}$$

Usando que  $X(t) = t^{-\frac{1}{2}}X$ , donde de nuevo, abusando de la notación,  $X$  es la matriz anti-hermítica independiente de  $t$  con entradas nulas excepto en las diagonales  $(i, i + 1)$  y

$(i+1, i)$ , cuyas entradas vienen dadas en (3.19), y agrupando en términos de potencias de  $t$ , se tiene la siguiente expresión de la función matricial  $\chi(t)$  (véase (3.24)):

$$\begin{aligned} \chi(t) = & \frac{1}{t} \left[ \frac{1}{4} J^2 (J + 2\alpha I) \right] + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left[ J^2 A + A J^2 + J^2 X + (2\alpha + 1) A J + (2\alpha + 1) X J \right. \\ & \left. - J A + J X J \right] + A J A + X J X + A J X + X J A + A X J - X A J - X A \\ & - A^2 - \frac{1}{2} J^2 - t^{\frac{1}{2}} (A J + X J) - t^{-\frac{1}{2}} J e^{-A t} (F_0) e^{A t} t^{\frac{1}{2}} J. \end{aligned} \quad (3.25)$$

El objetivo ahora es buscar una matriz  $F_0$  tal que la anterior expresión sea siempre hermitica para  $t > 0$ . Para ello, proponemos la siguiente definición de  $F_0$ :

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_{0,1,1} & F_{0,1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_{0,2,2} & F_{0,2,3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{0,N-1,N-1} & F_{0,N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{0,N,N} \end{pmatrix} \equiv V_1 + V_2,$$

donde, denotamos  $V_{1,i,i} = F_{0,i,i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , y  $V_{1,i,j} = 0$  en cualquier otro caso, y  $V_2 = F_0 - V_1$ . Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} t^{-\frac{1}{2}} J F_0 t^{\frac{1}{2}} J &= V_1 + t^{-\frac{1}{2}} V_2, \\ -t \cdot t^{-\frac{1}{2}} J (\text{ad}_A F_0) t^{\frac{1}{2}} J &= -t^{\frac{1}{2}} V_3 - V_4, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{3,i,i+1} &= \begin{cases} \nu_i (F_{0,i+1,i+1} - F_{0,i,i}), & i = 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \\ V_{4,i,i+2} &= \begin{cases} \nu_i F_{0,i+1,i+2} - \nu_{i+1} F_{0,i,i+1}, & i = 1, \dots, N-2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la fórmula  $X(JA - AJ) = XA$  en la expresión (3.25), se tiene que  $\frac{1}{4} J^2 (J + 2\alpha I)$ ,  $XJX$  y  $-\frac{1}{2} J^2$  son ya matrices hermiticas. La estructura de las matrices  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , hace que, para que (3.25) sea hermitica para todo  $t > 0$ , sea suficiente imponer que las matrices

$$\frac{1}{2} [J^2 A + A J^2 + J^2 X + (2\alpha + 1) A J + (2\alpha + 1) X J - J A + J X J] - V_2, \quad (3.26)$$

$$-(A J + X J) - V_3, \quad (3.27)$$

y

$$(A J A + A J X + A X J - A^2) - V_4, \quad (3.28)$$

sean hermiticas y que

$$\text{ad}_A^2 F_0 = 0. \quad (3.29)$$

La primera condición (3.26) permite definir la diagonal superior  $(i, i + 1)$  de la matriz  $F_0$  como

$$F_{0,i,i+1} = (\alpha + N - i)[\nu_i(N - i - 1) + x_{i,i+1}(2N - 2i - 1)], \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

la cual, usando (3.19) y (3.22), implica que

$$F_{0,i,i+1} = -\frac{(N - 1)(\alpha + N - i)\nu_i}{|\nu_{N-1}|^2}, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (3.30)$$

La segunda condición (3.27) obliga a definir  $F_{0,i,i}$  de manera recursiva mediante la siguiente expresión:

$$F_{0,i,i} = F_{0,i+1,i+1} - \left[ N - i - 1 + (2N - 2i - 1) \frac{x_{i,i+1}}{\nu_i} \right], \quad i = N - 1, N - 2, \dots, 1.$$

Poniendo  $F_{0,N,N} = 0$  y usando (3.19) y (3.22) se obtiene que

$$F_{0,i,i} = \frac{(N - 1)(N - i)}{|\nu_{N-1}|^2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.31)$$

La tercera condición (3.28) equivale a que

$$(N - i - 2)\nu_i\nu_{i+1} + (2N - 2i - 3)\nu_i x_{i+1,i+2} + \nu_i F_{0,i+1,i+2} - \nu_{i+1} F_{0,i,i+1} = 0,$$

un hecho directamente verificable usando (3.19), (3.21) y (3.30). Por lo tanto, siendo la matriz nula, es hermítica.

Por último, la cuarta condición (3.29) es equivalente a

$$\begin{aligned} (\text{ad}_A^2 F_0)_{i,i+2} &= \nu_i \nu_{i+1} (F_{0,i,i} - 2F_{0,i+1,i+1} + F_{0,i+2,i+2}) = 0, \\ (\text{ad}_A^2 F_0)_{i,i+3} &= \nu_i \nu_{i+1} F_{0,i+2,i+3} - 2\nu_i \nu_{i+2} F_{0,i+1,i+2} + \nu_{i+1} \nu_{i+2} F_{0,i,i+1} = 0, \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, \dots, N - 2$ , que de nuevo se comprueba usando (3.30) y (3.31).

Mirando con cuidado las expresiones (3.30) y (3.31)  $F_0$  se expresa de manera más compacta:

$$F_0 = \frac{N - 1}{|\nu_{N-1}|^2} [J - (\alpha I + J)A].$$

Por último, las condiciones de frontera (1.10) también se pueden comprobar, a partir de las definiciones de  $F_2$  y  $F_1$  en (3.13) y (3.23).

Hemos demostrado pues que el peso matricial  $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$  tiene otro operador diferencial de segundo orden, cuya expresión resumimos en el siguiente

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $W$  el peso matricial definido en (3.6) donde el módulo de los parámetros  $\nu_i, i = 1, \dots, N - 2$ , de la matriz  $A$  están definidas a partir de  $\nu_{N-1}$*

---

usando las ecuaciones (3.22). Considérense las matrices  $A$  y  $J$  definidas en (3.4) y (3.5) respectivamente, e  $Y$ ,  $X(t)$  y  $G(t)$  definidas por

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{N-1}{\nu_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(N-2)}{\nu_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{N-1}{\nu_{N-1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$X(t) = t^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\bar{x}_{1,2} & 0 & x_{2,3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{x}_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{x}_{N-1,N} & 0 \end{pmatrix},$$

$$G(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} J + A \right) + e^{\Lambda t} t^{\frac{1}{2}} J X(t) t^{-\frac{1}{2}} J e^{-\Lambda t},$$

donde  $x_{i,i+1} = -\frac{i(N-i)}{(2N-2i-1)\bar{\nu}_i}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . Definamos, por último, los coeficientes del operador diferencial  $F_2$ ,  $F_1$  y  $F_0$  por

$$\begin{aligned} F_2 &= t(J - \Lambda t), \\ F_1 &= ((1 + \alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha + 2)A + Y^* - ad_A Y), \\ F_0 &= \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2} [J - (\alpha I + J)A]. \end{aligned}$$

Entonces el operador diferencial de segundo orden

$$D_2 = \partial^2 F_2 + \partial^1 F_1 + \partial^0 F_0 \quad (3.33)$$

es simétrico con respecto a  $W$ .  $W$  admite la factorización  $W(t) = t^\alpha e^{-t} R(t) R^*(t)$ ,  $\alpha > -1$ , donde  $R(t) = e^{\Lambda t} t^{\frac{1}{2}} J e^{2tX(t)}$  satisface  $R'(t) = G(t)R(t)$ .

□

Para acabar esta sección probamos que los operadores diferenciales de segundo orden  $D_1$  y  $D_2$  (definidos en (3.9) y (3.33)), simétricos con respecto a  $W$ , conmutan entre ellos y satisfacen cierta relación dada por un polinomio de grado  $N$  en dos variables.

**Teorema 3.1.3.** *Los operadores diferenciales de segundo orden  $D_1$  y  $D_2$  definidos en (3.9) y (3.33), respectivamente, conmutan, i.e.,  $[D_1, D_2] = 0$ . Es más, satisfacen la siguiente relación:*

$$\prod_{i=1}^N \left( (i-1)D_1 - D_2 + \left[ \frac{(N-1)(N-i)}{|\nu_{N-1}|^2} + (i-1)(N-i) \right] I \right) = 0. \quad (3.34)$$

DEMOSTRACIÓN: Sea la familia de polinomios ortogonales matriciales mónicos con respecto a  $W$  como autofunciones. A raíz de la Proposición 1.3.1, existe un isomorfismo entre operadores diferenciales y sus correspondientes autovalores. Como  $D_1$  y  $D_2$  tienen un mismo sistema de autofunciones, conmutan si y sólo si sus correspondientes autovalores conmutan. A partir de la Nota 1.3.2, se puede obtener una expresión explícita de los autovalores de los polinomios mónicos en términos de los coeficientes líderes de los coeficientes diferenciales de los correspondientes operadores:

$$\Lambda_n(D_1) = n(A - I) + (J + \alpha I)A - J,$$

$$\Lambda_n(D_2) = -n^2A - n(J + (\alpha + 1)A + Y^* - \text{ad}_A Y) + \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2}(J - (\alpha I + J)A).$$

Debido a que  $\Lambda_n(D_1)$  y  $\Lambda_n(D_2)$  sólo tienen elementos no nulos en las diagonales  $(i, i)$  y  $(i, i + 1)$ , éstos conmutan si y sólo si

$$\begin{aligned} \Lambda_n(D_1)_{i,i+1}[\Lambda_n(D_2)_{i+1,i+1} - \Lambda_n(D_2)_{i,i}] + \Lambda_n(D_2)_{i,i+1}[\Lambda_n(D_1)_{i,i} - \Lambda_n(D_1)_{i+1,i+1}] &= 0, \\ \Lambda_n(D_1)_{i,i+1}\Lambda_n(D_2)_{i+1,i+2} - \Lambda_n(D_2)_{i,i+1}\Lambda_n(D_1)_{i+1,i+2} &= 0. \end{aligned}$$

Estas fórmulas se comprueban sin mucha dificultad usando las definiciones de  $A$ ,  $J$  e  $Y$  (véase (3.4), (3.5) y (3.32)) y las fórmulas (3.21) y (3.22). Por lo tanto,  $[D_1, D_2] = 0$ .

Veamos ahora la prueba de (3.34). Al igual que antes, se usa el isomorfismo entre operadores diferenciales y correspondientes autovalores. Por lo tanto, podemos trabajar con los autovalores directamente. Escribamos, para  $i = 1, \dots, N$ , la siguiente expresión

$$\Delta_i = (i - 1)\Lambda_n(D_1) - \Lambda_n(D_2) + \left( \frac{(N-1)(N-i)}{|\nu_{N-1}|^2} + (i-1)(N-i) \right) I.$$

Es suficiente probar que  $\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_N = 0$ . Es directo comprobar que el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal principal de  $\Delta_i$  es 0. Luego teniendo en cuenta que  $\Lambda_n(D_1)$  y  $\Lambda_n(D_2)$  sólo tienen elementos no nulos en las diagonales  $(i, i)$  y  $(i, i + 1)$ , cuando se va multiplicando la expresión  $\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_i = 0$  las primeras  $i$  filas se anulan, hasta llegar a  $i = N$ , donde se consigue lo que queríamos probar<sup>1</sup>.  $\square$

### 3.1.2. Fórmulas de estructura

Se completa esta sección mostrando algunas fórmulas de estructura para una sucesión de polinomios ortogonales matriciales  $(\mathcal{P}_{n,\alpha,a})_n$  con respecto al peso matricial

$$W_{\alpha,a}(t) = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t(1 + |a|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \alpha > -1, \quad t \in (0, +\infty). \quad (3.35)$$

Este peso matricial es nuestro peso  $W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}$  para tamaño  $N = 2$ .

---

<sup>1</sup>En [PR] existe otra manera más conceptual de probar este resultado para el Ejemplo 1.4.5.

La sucesión  $(\mathcal{P}_{n, \alpha, a})_n$  se puede introducir en términos de una fórmula de Rodrigues. Escribiendo

$$R_a(t) = \begin{pmatrix} t(1 + |a|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix},$$

la familia de polinomios definida por

$$\mathcal{P}_{n, \alpha, a}(t) = \Phi_{n, \alpha, a} [t^{\alpha+n} e^{-t} (R_a(t) + X_{n, a})]^{(n)} R_a^{-1}(t) t^{-\alpha} e^t, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde

$$\Phi_{n, \alpha, a} = \begin{pmatrix} 1 & -a(1 + \alpha) \\ 0 & 1/\lambda_{n, a} \end{pmatrix}, \quad X_{n, a} = \begin{pmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{n, a} = 1 + n|a|^2,$$

es ortogonal con respecto al peso matricial  $W_{\alpha, a}$  definido en (3.35). El correspondiente coeficiente líder  $\Upsilon_{n, \alpha, a}$  de  $\mathcal{P}_{n, \alpha, a}$  es la matriz no singular dada por

$$\Upsilon_{n, \alpha, a} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -a(1 + n + \alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este resultado puede ser probado como en [DG3, DL6], por lo que se omiten los cálculos.

La normalización mediante las matrices  $\Phi_{n, \alpha, a}$  permite obtener una expresión sencilla para otras fórmulas de estructura para los polinomios  $(\mathcal{P}_{n, \alpha, a})_n$ . Por ejemplo, se puede probar que satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:

$$t\mathcal{P}_{n, \alpha, a}(t) = A_n \mathcal{P}_{n+1, \alpha, a}(t) + B_n \mathcal{P}_{n, \alpha, a}(t) + C_n \mathcal{P}_{n-1, \alpha, a}(t),$$

donde las matrices  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , y  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , están dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} A_n &= - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B_n &= \begin{pmatrix} 2n + 3 + \alpha - \frac{1}{\lambda_{n+1, a}} & a(1 + n + \alpha) \\ \frac{\bar{a}}{\lambda_{n+1, a} \lambda_{n, a}} & 2n + \alpha + \frac{1}{\lambda_{n, a}} \end{pmatrix}, \\ C_n &= - \frac{1}{\lambda_{n, a}} \begin{pmatrix} n\lambda_{n+1, a}(1 + n + \alpha) & 0 \\ \frac{n\bar{a}}{\lambda_{n, a}} & n\lambda_{n-1, a}(n + \alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La  $L^2$ -norma de  $(\mathcal{P}_{n, \alpha, a})_n$  está dada por la matriz diagonal

$$\|\mathcal{P}_{n, \alpha, a}\|_{L^2(W)}^2 = n! \begin{pmatrix} \Gamma(\alpha + n + 2)\lambda_{n+1, a} & 0 \\ 0 & \Gamma(\alpha + n + 1)/\lambda_{n, a} \end{pmatrix},$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>El contenido de la primera parte de este capítulo forma parte del artículo [DdI1].

### 3.2. El peso $W_{\alpha,a} + \delta_0 M$

En esta sección consideramos una familia de pesos matriciales que consiste en modificar el peso matricial  $W_{\alpha,a}$  introducido en (3.35) añadiéndole una masa en el cero. Concretamente consideramos los pesos matriciales

$$W_{\alpha,a,\gamma}(t) = W_{\alpha,a}(t) + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} a^2(1+\alpha)^2 & a(1+\alpha) \\ a(1+\alpha) & 1 \end{pmatrix}}_M \delta_0(t), \quad \gamma > 0, \quad (3.36)$$

donde

$$W_{\alpha,a}(t) = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t(1+a^2t) & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha > -1, \quad t \in (0, +\infty). \quad (3.37)$$

Mostramos en la primera parte de este capítulo que existen 2 operadores diferenciales de segundo orden simétricos con respecto a  $W_{\alpha,a}$ . Los mostramos aquí de nuevo para beneficio del lector:

$$D_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-t & at \\ 0 & \alpha+1-t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1 & a(1+\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -at^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2 & -\frac{t(1+a^2(2+\alpha))}{a} \\ \frac{1}{a} & -t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & -\frac{1+\alpha}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $D$  el siguiente operador diferencial de segundo orden:

$$D = \underbrace{\partial^2 \begin{pmatrix} 0 & -at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix}}_{F_2(t)} + \underbrace{\partial^1 \begin{pmatrix} t & -\frac{t(1+a^2(3+\alpha))}{a} \\ \frac{1}{a} & -1-\alpha \end{pmatrix}}_{F_1(t)} + \underbrace{\partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{a^2} & -\frac{(1+\alpha)(1+a^2)}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F_0}.$$

El operador diferencial  $D$  está generado linealmente a partir de  $D_1$  y  $D_2$  mediante la relación  $D = -D_1 + D_2$ . Es por lo tanto simétrico para  $W_{\alpha,a}$ .

No es difícil ver, teniendo en cuenta la evaluación de  $F_2(t)$  y  $F_1(t)$  en  $t=0$ , i.e.,

$$F_2(0) = 0,$$

$$F_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & -(1+\alpha) \end{pmatrix},$$

que se satisfacen las condiciones introducidas en (2.9), es decir,

$$F_2(0)M = 0,$$

$$F_1(0)M = 0,$$

$$F_0M - MF_0^* = 0,$$

del Teorema 2.2.1, lo que implica que  $D$  es también simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales definida en (3.36).

Estamos pues ante un ejemplo de una familia infinita de pesos matriciales que comparten un mismo operador diferencial simétrico. Esta es la primera vez que se muestra un ejemplo de este fenómeno (inexistente en el caso escalar). Volveremos a él en el Capítulo 4.

Completamos esta sección dando expresiones explícitas para la nueva familia  $(P_{n, \gamma})_n$  de polinomios ortogonales matriciales mónicos con respecto a  $W_\gamma$  (por simplicidad no escribimos la dependencia de  $\alpha$  y  $\alpha$ ). Daremos dos expresiones, una mediante la fórmula de recurrencia a tres términos, y otra mediante cierta representación en términos de dos familias fijas  $(P_n)_n$  y  $(P_{n, 1})_n$ .

Si  $(P_n)_n$  es la familia mónica ortogonal con respecto a (3.37), entonces verifica la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:

$$tP_n = P_{n+1} + B_n P_n + A_n P_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = I,$$

donde para  $n = 0, 1, \dots$ ,

$$B_n = \begin{pmatrix} 2n + \alpha + 3 + \frac{n + \alpha + 1}{\lambda_n} - \frac{n + \alpha + 2}{\lambda_{n+1}} & a(n + \alpha + 1) \left( \frac{n + \alpha + 2}{\lambda_{n+1}} - \frac{n + \alpha}{\lambda_n} - 2 \right) \\ \frac{a}{\lambda_n \lambda_{n+1}} & 2n + \alpha - \frac{n + \alpha}{\lambda_n} + \frac{n + \alpha + 1}{\lambda_{n+1}} \end{pmatrix},$$

y para  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$A_n = \begin{pmatrix} (n + \alpha + 1) \left( n + 1 - \frac{1}{\lambda_n^2} \right) & a(n + \alpha)(n + \alpha + 1) \left( \frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} - 2 \right) \\ \frac{an}{\lambda_n^2} & (n + \alpha) \left( n - 1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_n = 1 + na^2$ .

Usando la equivalencia entre fórmulas de recurrencia dada en la Proposición 2.2.4, se tiene que los coeficientes de Fourier (2.14) que hacen falta para determinar explícitamente la fórmula de recurrencia para la familia  $(P_{n, \gamma})_n$  están dados por

$$\tilde{C}_n^{n+1, \gamma} = -\frac{\gamma \lambda_n (\alpha + 1)^{(n+1)}}{\epsilon_n} \begin{pmatrix} 0 & a(\alpha + n + 2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\tilde{C}_n^{n+2, \gamma} = \frac{\gamma \lambda_n (\alpha + 1)^{(n+2)}}{\epsilon_n} \begin{pmatrix} 0 & a(\alpha + n + 3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde el número  $(x)^{(n)}$  denota el factorial creciente o *símbolo de Pochhammer*, definido por

$$(x)^{(n)} = x(x+1) \cdots (x+n-1) \quad \text{para } n > 0, \quad (x)^{(0)} = 1, \quad (3.38)$$

y la sucesión  $\epsilon_n$  se define por recurrencia mediante la fórmula

$$\begin{cases} \epsilon_0 = \gamma + \Gamma(\alpha + 1), \\ \epsilon_n = n\epsilon_{n-1} + \gamma \lambda_n (\alpha + 1)^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.39)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler. Por lo tanto se puede generar la nueva familia de polinomios ortogonales matriciales mónicos  $(P_{n,\gamma})_n$  usando la fórmula (2.15) de la Proposición 2.2.4.

En este caso, la familia  $(P_{n,\gamma})_n$  (debido a la singularidad de  $M$ ) admite una representación en términos de dos familias fijas  $(P_n)_n$  y  $(P_{n,1})_n$  de la siguiente forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma} P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma}) P_{n,1},$$

donde

$$\begin{cases} \alpha_{0,\gamma} = 1 - \gamma, \\ \alpha_{n,\gamma} = \frac{(n-1)!(1-\gamma)\Gamma(\alpha+1)}{\epsilon_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

donde  $\epsilon_n$  está definida en (3.39).

Esta expresión de la familia  $(P_{n,\gamma})_n$  en términos de  $(P_n)_n$  y  $(P_{n,1})_n$  explica el hecho sorprendente de que cada  $Y = P_{n,\gamma}$ ,  $\gamma \geq 0$ , (fijando  $n$ ) sea solución de la misma ecuación diferencial de segundo orden

$$Y'' \begin{pmatrix} 0 & -at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + Y' \begin{pmatrix} t & -\frac{t(1+a^2(3+\alpha))}{a} \\ \frac{1}{a} & -1-\alpha \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{a^2} & -\frac{(1+\alpha)(1+a^2)}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_n Y,$$

donde

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \frac{1+a^2(n+1)}{a^2} & -\frac{(1+\alpha+n)(1+a^2(n+1))}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es el correspondiente autovalor.<sup>3</sup>

### 3.3. Polinomios ortogonales matriciales asociados al espacio proyectivo complejo

En esta sección se muestra cómo construir una sucesión explícita de polinomios ortogonales asociados a los pesos introducidos en la Sección 1.4. No se usará aquí la fórmula de Rodrigues (como se hizo en la Sección 3.1.2) sino un procedimiento diferente basado en la función hipergeométrica matricial introducida por J. A. Tirao en [T2] (o en la Sección 1.5).

La sección se completa calculando una base para los operadores diferenciales de hasta segundo orden que tienen a una de estas familias como autofunciones.

En esta sección se usa el producto interno (1.2). Debido a eso, es necesario considerar operadores diferenciales traspuestos en relación a los considerados en el resto de secciones de este capítulo. Por conveniencia, se hará también un cambio de notación. Se introducen los parámetros  $\beta = n - 1$  y  $\alpha = m$ , que pasan a tomar valores reales mayores que  $-1$ .

<sup>3</sup>El contenido de esta segunda sección forma parte del artículo [DdI2].

En los ejemplos que se estudian en esta sección, se usan dos pares equivalentes dependiendo de la situación. Por un lado, para expresar los polinomios ortogonales en términos de la función hipergeométrica matricial (y más adelante en el Capítulo 6 para relacionarlo con procesos *quasi-birth-and-death*) será más conveniente usar un par que haga que el coeficiente constante  $F_0$  del operador diferencial sea diagonal. Sin embargo, para el estudio del álgebra de operadores (que se estudiará en el Capítulo 5) será más conveniente usar el par original.

### 3.3.1. El ejemplo de 1 salto

Sea  $\{W, D\}$  el par introducido al final del Ejemplo 1.4.4 (y por primera vez en [GPT5]). En este caso, escribiendo  $\beta = n - 1$  y  $\alpha = m$ , el operador diferencial queda de la siguiente manera:

$$D = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0, \quad \partial = \frac{d}{dt}, \quad (3.40)$$

donde

$$\begin{aligned} F_2(t) &= t(1-t)I, \\ F_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha+1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix}, \\ F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-k+1) & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k+2) & \beta-k+2 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta-k+3) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\alpha, \beta > -1$  y  $0 < k < \beta + 1$ . Nótese que ahora los coeficientes de  $D$  van multiplicando a izquierda. Esto implica que existe una familia de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  con respecto al producto interno definido por  $W$  (véase (1.21)) según (1.2), tal que  $DP_n^* = P_n^* \Lambda_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Como se dijo antes, al venir estos ejemplos de teoría de representación de grupos es más conveniente usar este producto interno.

#### Autofunciones en términos de la función hipergeométrica

En esta sección se busca una expresión de los polinomios ortogonales en términos de la función hipergeométrica matricial (introducida en la Sección 1.5). Para ello, como se verá más adelante, es conveniente considerar un par equivalente a  $\{W, D\}$  (ver Definición 1.2.4) que tenga al coeficiente  $F_0$  como una matriz diagonal. Sea  $T$  la siguiente matriz no singular:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\alpha+\beta-k+2}{\beta-k+1} & -\frac{\alpha+\beta-k+3}{\beta-k+1} \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha+\beta-k+3)^{(2)}}{(\beta-k+1)^{(2)}} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

donde  $(x)^{(n)}$  es el símbolo de Pochhammer definido en (3.38).

Entonces el par  $\{T^*WT, T^{-1}DT\}$  es equivalente a  $\{W, D\}$ . Por simplicidad, retendremos los signos  $W$  y  $D$  para el peso matricial y el operador diferencial transformados, que se escribe como

$$D = t(1-t)\partial^2 + (X - tU)\partial^1 + V\partial^0, \quad (3.42)$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \beta - k + 2) & 0 \\ 0 & 0 & -2(\alpha + \beta - k + 3) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 4 & -1 & \frac{2}{\alpha + \beta - k + 2} \\ 0 & \alpha + \beta + 5 & -\frac{2(\alpha + \beta - k + 3)}{\alpha + \beta - k + 2} \\ 0 & 0 & \alpha + \beta + 6 \end{pmatrix},$$

y

$$X = \begin{pmatrix} \alpha + 1 + \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha + \beta - k + 2} & \frac{(\alpha + 1)(\alpha + \beta - k + 4)}{(\alpha + \beta - k + 2)(\alpha + \beta - k + 3)} & 0 \\ \frac{2(\beta - k + 1)}{\alpha + \beta - k + 2} & \alpha + 2 + \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha + \beta - k + 4} - \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha + \beta - k + 2} & \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha + \beta - k + 4} \\ 0 & \frac{(\beta - k + 2)(\alpha + \beta - k + 2)}{(\alpha + \beta - k + 3)(\alpha + \beta - k + 4)} & \alpha + 3 - \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha + \beta - k + 4} \end{pmatrix},$$

Obsérvese que ahora el coeficiente constante  $V$  es diagonal (de hecho es la diagonal de  $F_0$  en (3.40)). Esto facilitará los cálculos que vendrán a continuación.

Primero hay que comprobar que toda familia de polinomios matriciales  $(P_n)_n$  que sean autofunciones del operador diferencial  $D$  es a su vez ortogonal con respecto al peso matricial  $W$ . La justificación es como sigue: esta familia verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$DP_n^* \equiv t(1-t)(P_n^*)'' + (X - tU)(P_n^*)' + VP_n^* = P_n^* \Lambda_n.$$

Por ser  $D$  simétrico, se tiene que

$$(DP_n^*, P_m^*) = (P_n^* \Lambda_n, P_m^*) = \langle P_m, P_n \rangle \Lambda_n,$$

y

$$(P_n^*, DP_m^*) = (P_n^*, P_m^* \Lambda_m) = \Lambda_m^* \langle P_m, P_n \rangle.$$

Al igualar las dos expresiones anteriores se obtienen unas ecuaciones matriciales de tipo Sylvester, que admiten solución única (véase [Gr]) siempre y cuando los autovalores  $\Lambda_n$  y  $\Lambda_m^*$  tengan espectros disjuntos para todo  $n \neq m$ . Los autovalores  $\Lambda_n$  y  $\Lambda_m^*$ ,  $n \neq m$ , no tienen por qué tener en general espectros disjuntos (lo que abre la posibilidad de varias soluciones polinómicas), aunque en este caso particular sí lo tienen excepto para valores excepcionales de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k$ . Por lo tanto  $\langle P_m, P_n \rangle = 0$  si  $n \neq m$ , es decir, que los polinomios  $(P_n)_n$  son ortogonales. Un tratamiento más general del comportamiento de este espectro para cualquier dimensión matricial puede encontrarse en [PR].

A continuación se busca una familia de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  que tenga su correspondiente autovalor diagonal (y es la que se expresará en términos de la función hipergeométrica matricial). Para ello, partimos de la (única) sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos  $(\widehat{P}_n)_n$  con respecto a  $W$ . Esta sucesión verifica

$$D\widehat{P}_n^* \equiv t(1-t)(\widehat{P}_n^*)'' + (X-tU)(\widehat{P}_n^*)' + V\widehat{P}_n^* = \widehat{P}_n^* \Gamma_n,$$

donde  $\Gamma_n = -n^2I + n(I-U) + V$ . Como se observa, este autovalor no es diagonal. Ahora bien, si se considera otra familia  $(P_n)_n$  dada por

$$\widehat{P}_n(t) = S_n^{-1}P_n(t), \quad \det S_n \neq 0,$$

se tiene que

$$DP_n^*(t) = P_n^*(t)(S_n^*)^{-1}\Gamma_n S_n^*.$$

Como el espectro de  $\Gamma_n$  es disjunto para todo  $n$ , excepto para valores excepcionales de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k$ , se puede escoger  $S_n^*$  como la matriz cuyas columnas son las autofunciones de  $\Gamma_n$  (únicas salvo escalar), de tal manera que

$$DP_n^* \equiv t(1-t)(P_n^*)'' + (X-tU)(P_n^*)' + VP_n^* = P_n^* \Lambda_n, \quad (3.43)$$

con el autovalor diagonal

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} = (S_n^*)^{-1}\Gamma_n S_n^*, \quad (3.44)$$

y los valores de  $t_i$  serán dados posteriormente en (3.47).

*Nota 3.3.1.* Una expresión explícita de estos polinomios ortogonales puede obtenerse en términos de los coeficientes del operador diferencial  $D$  (y que se usará al final de esta y en la siguiente sección). Denotando por  $P_n^*(t) = \sum_{j=0}^n A_j^n t^j$ , las ecuaciones que satisfacen estos coeficientes  $A_j^n$ ,  $j = n, n-1, \dots, 0$ , en relación con los coeficientes del operador diferencial son

$$\begin{aligned} \Gamma_n A_n^n &= A_n^n \Lambda_n, \\ \Gamma_j A_j^n - A_j^n \Lambda_n &= -(j+1)(X+j)A_{j+1}^n, \quad j = n-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Todas estas ecuaciones son de tipo Sylvester. La primera de estas ecuaciones tiene una solución  $A_n^n$  única salvo la elección de 3 escalares. El resto de coeficientes  $A_j^n$  es también único ya que el espectro de cada  $\Gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , es disjunto del espectro de  $\Lambda_n$ , excepto para valores excepcionales de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k$ .

A continuación el objetivo será relacionar la ecuación diferencial satisfecha por los polinomios  $(P_n)_n$  introducidos anteriormente con la ecuación hipergeométrica matricial (1.25). El método que se usa es el de “vectorizar” las soluciones  $(P_n)_n$ , es decir, reemplazar matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  por vectores en  $\mathbb{C}^9$ . Esta es la forma de solventar el problema que surge

porque en la ecuación hipergeométrica todos los coeficientes multipliquen a izquierda, mientras que en la ecuación para  $(P_n)_n$  el autovalor lo hace a derecha. Esta aplicación se llamará “vec”. Será importante tener en cuenta cómo se transforma esta aplicación bajo la multiplicación de matrices a derecha e izquierda. Para ello es necesario considerar el *producto de Kronecker* (véase [HJ]) de dos matrices  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$  y  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ . Este producto se denota por  $A \otimes B$ , que pasa a ser la matriz por bloques

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pr,qs}(\mathbb{C}).$$

Este tipo de herramientas ya se usó con el mismo propósito en [T2] y [GPT4].

Esta notación permite reescribir la ecuación diferencial (3.43) como la ecuación diferencial equivalente

$$t(1-t)\text{vec}(P_n^*)'' + (C - t\tilde{U})\text{vec}(P_n^*)' - \tilde{T}\text{vec}(P_n^*) = 0, \quad (3.46)$$

donde  $C$  y  $\tilde{U}$  son matrices de tamaño  $9 \times 9$  dadas por

$$C = X \otimes I, \quad \tilde{U} = U \otimes I, \quad \text{y} \quad \tilde{T} = V \otimes I - I \otimes \Lambda_n^*,$$

es decir, el autovalor multiplica ahora también a izquierda. El hecho más significativo es que la matriz  $\tilde{T}$  es diagonal, ya que se tomó  $V$  como diagonal y se buscó una familia  $(P_n)_n$  para que tuviera autovalor diagonal. Se obtiene entonces que

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^9 t_i E_{ii},$$

donde

$$\begin{aligned} t_1 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3), \\ t_2 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) - (\alpha + \beta - k + 2), \\ t_3 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - 2(\alpha + \beta - k + 3), \\ t_4 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta - k + 2, \\ t_5 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4), \\ t_6 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - (\alpha + \beta - k + 4), \\ t_7 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) + 2(\alpha + \beta - k + 3), \\ t_8 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + \alpha + \beta - k + 4, \\ t_9 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Aquí de nuevo  $E_{ij}$  denota la matriz con entrada 1 en  $(i, j)$  y 0 en cualquier otro sitio.

Comparando (3.46) con la ecuación hipergeométrica (1.25), es necesario encontrar dos matrices  $A$  y  $B$  tales que el siguiente sistema de ecuaciones matriciales no lineales se satisfaga:

$$\tilde{U} = I + A + B, \quad \text{y} \quad \tilde{T} = AB.$$

El hecho de que  $\tilde{T}$  sea diagonal hará más sencillo encontrar estas dos matrices. En caso contrario el proceso se vuelve muy engorroso. Una vez que se encuentren  $A$  y  $B$  se podrá escribir la ecuación (3.46) como una ecuación hipergeométrica (véase más adelante en (3.48)).

La factorización  $\tilde{T} = AB$  no es única, sin embargo admite una solución buscando una matriz  $A$  por bloques de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix},$$

donde cada  $A_{ij}$  es una matriz diagonal de tamaño  $3 \times 3$ . Una vez que se tenga  $A$ , la matriz  $B$  se obtiene por la expresión

$$B = \tilde{U} - A - I.$$

Llamemos

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} \phi_i & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

donde los valores  $\phi_i, \varphi_i, \psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se determinarán más adelante.

Los elementos de la diagonal de  $A_{12}$  son de la siguiente forma:

$$\frac{\gamma_1}{-\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha + \beta + 4},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi$ , en cada entrada.

Denotando por

$$\omega_{13} = \frac{2}{\alpha + \beta - k + 2},$$

$$\omega_{23} = -\frac{2(\alpha + \beta - k + 3)}{\alpha + \beta - k + 2},$$

los elementos de la última columna de  $U$ , los elementos de la diagonal de  $A_{23}$  se convierten en

$$\frac{-\omega_{23}\gamma_2}{-\gamma_2 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 5},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi$ , en cada entrada.

Por último, los elementos de la diagonal de  $A_{13}$  son un poco más complicados y vienen dados por la expresión

$$-\frac{\omega_{13}\gamma_1}{-\gamma_1 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 5} - \frac{\omega_{23}\gamma_1}{(-\gamma_1 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 5)(-\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha + \beta + 4)}$$

$$-\frac{\omega_{23}\gamma_1\gamma_2}{(-\gamma_1 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 5)(-\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha + \beta + 4)(-\gamma_2 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 5)},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi$ , en cada entrada.

Los parámetros  $\phi_i, \varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, 3$ , están sujetos a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \phi_1 = -n \quad \text{ó} \quad \phi_1 = n + \alpha + \beta + 3, \\ \varphi_1^2 - (\alpha + \beta + 3)\varphi_1 + t_2 = 0, \\ \psi_1^2 - (\alpha + \beta + 3)\psi_1 + t_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_2^2 - (\alpha + \beta + 4)\phi_2 + t_4 = 0, \\ \varphi_2 = -n \quad \text{ó} \quad \varphi_2 = n + \alpha + \beta + 4, \\ \psi_2^2 - (\alpha + \beta + 4)\psi_2 + t_6 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_3^2 - (\alpha + \beta + 5)\phi_3 + t_7 = 0, \\ \varphi_3^2 - (\alpha + \beta + 5)\varphi_3 + t_8 = 0, \\ \psi_3 = -n \quad \text{ó} \quad \psi_3 = n + \alpha + \beta + 5. \end{cases}$$

Una vez obtenidas las matrices  $A$  y  $B$  se tiene que el vector  $\text{vec}(P_n^*)$  satisface la ecuación hipergeométrica matricial

$$t(1-t)\text{vec}(P_n^*)'' + (C - t(I + A + B))\text{vec}(P_n^*)' - AB\text{vec}(P_n^*) = 0. \quad (3.48)$$

Los autovalores de  $C$  son  $\{\alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3\}$  con multiplicidad 3 cada uno, con lo que, como  $\alpha > -1$ , la función hipergeométrica matricial  ${}_2F_1(C, A, B; t)$  es analítica en  $|t| < 1$  y las soluciones en  $t = 0$  de (3.48) están dadas por

$$\text{vec}(\Phi(t)) = {}_2F_1(C, A, B; t)\text{vec}(\Phi(0)).$$

La función  ${}_2F_1(C, A, B; t)$  no es un polinomio, como en el caso escalar, pero sin embargo se tiene que

$$\text{vec}(P_n^*(t)) = {}_2F_1(C, A, B; t)\text{vec}(P_n^*(0)) \quad (3.49)$$

es un polinomio vectorial de grado  $n$  en  $t$ .

Es más, para (3.49) podemos dar el valor explícito de  $P_n^*(0)$ , usando la misma estrategia explicada en (3.45). Se tiene entonces que

$$P_n^*(0) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) \\ 0 & p_{22}(n) & p_{23}(n) \\ 0 & 0 & p_{33}(n) \end{pmatrix},$$

donde

---

$$\begin{aligned}
p_{11}(n) &= \frac{(-1)^n(\alpha + \beta - k + n + 2)(\alpha + \beta - k + n + 3)(\alpha + 1)^{(n)}}{(\alpha + \beta - k + 3)(\alpha + \beta - k + 2)(\alpha + \beta + n + 3)^{(n)}}, \\
p_{12}(n) &= \frac{2(-1)^n n(\beta - k + 1)(\alpha + \beta - k + n + 3)(\alpha + 2)^{(n-1)}}{(k + n + 1)(\alpha + \beta - k + 4)(\alpha + \beta - k + 2)(\alpha + \beta + n + 4)^{(n-1)}}, \\
p_{13}(n) &= \frac{(-1)^n n(n-1)(\beta - k + 1)(\beta - k + 2)(\alpha + 3)^{(n-2)}}{(k + n)(k + n + 1)(\alpha + \beta - k + 3)(\alpha + \beta - k + 4)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n-2)}}, \\
p_{22}(n) &= \frac{(-1)^{n+1}(\alpha + \beta - k + 2)(\alpha + \beta - k + n + 4)(\alpha + 2)^{(n)}}{n(\alpha + \beta - k + 4)(\alpha + \beta + n + 4)^{(n)}}, \\
p_{23}(n) &= \frac{(-1)^{n+1}(\beta - k + 2)(\alpha + \beta - k + 2)(\alpha + 3)^{(n-1)}}{(k + n)(\alpha + \beta - k + 4)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n-1)}}, \\
p_{33}(n) &= \frac{(-1)^n(\alpha + \beta - k + 2)(\alpha + \beta - k + 3)(\alpha + 3)^{(n)}}{n(n+1)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n)}}.
\end{aligned}$$

### Operadores diferenciales de segundo orden

Como se mencionó anteriormente, hay una ventaja computacional en estudiar los operadores diferenciales introducidos directamente en [GPT5]. Uno de ellos ya fue introducido en (3.40) y que volvemos a escribir

$$D_1 = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0,$$

donde

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= t(1-t)I, \\
F_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha+1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix}, \\
F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-k+1) & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k+2) & \beta-k+2 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta-k+3) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Este operador tiene una sucesión (no mónica) de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  tal que

$$D_1 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde los autovalores pueden elegirse diagonales (por el mismo argumento que se explicó en la sección anterior) y además coinciden con los autovalores de (3.42):

$$\Lambda_n(D_1) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix},$$

donde los valores de  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , están dados en (3.47). La relación entre esta familia y la introducida en la sección anterior difiere en una multiplicación por la matriz  $T$  dada en (3.41).

La expresión explícita de la familia de polinomios coeficiente a coeficiente (de la manera explicada en la Nota 3.3.1) con la que se trabaja en esta sección y, posteriormente, en el Capítulo 5 está incluida en el Apéndice A.1.

Fijando esta familia de polinomios ortogonales matriciales se tiene que podemos encontrar otro operador diferencial de segundo orden  $D_2$ , linealmente independiente de  $D_1$ , tal que

$$D_2 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde el operador está dado por

$$D_2 = G_2(t)\partial^2 + G_1(t)\partial^1 + G_0(t)\partial^0,$$

con

$$\begin{aligned} G_2(t) &= \begin{pmatrix} t(1-t) & 0 & 0 \\ t/2 & t(1-t)/2 & 0 \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}, \\ G_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta - k + 4 & \beta - k + 1 & 0 \\ -(\alpha + \beta - k + 4)/2 & (\alpha + 4)/2 & (\beta - k + 2)/2 \\ 0 & -(\alpha + \beta - k + 5) & -(\beta - k + 2) \end{pmatrix} \\ &\quad - t \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 4 & \beta - k + 1 & 0 \\ 0 & (\alpha + \beta + 5)/2 & (\beta - k + 2)/2 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta + 6 \end{pmatrix}, \\ G_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -k(\beta - k + 1) & 0 \\ 0 & k(\alpha + \beta - k + 2)/2 & -k(\beta - k + 2)/2 \\ 0 & 0 & k(\alpha + \beta - k + 3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El autovalor asociado a  $D_2$  es

$$\Lambda_n(D_2) = \begin{pmatrix} -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + k(\alpha + \beta - k + 2)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k(\alpha + \beta - k + 3) \end{pmatrix}.$$

Es significativo que el autovalor de  $D_2$  es también diagonal. Esto implica, por la equivalencia existente entre operadores diferenciales y correspondientes autovalores dada en la Proposición 1.3.1, que  $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1 = 0$ , es decir, conmutan.

En el Capítulo 5, basándonos en evidencias computacionales, conjeturamos que el álgebra de operadores diferenciales es conmutativa, generada por dos elementos,  $D_1$  y  $D_2$ , y mostramos las relaciones entre ellos.

*Nota 3.3.2.* Al mismo tiempo que el trabajo de esta sección se realizaba se conseguía dar una expresión del operador diferencial del ejemplo de 1 salto para cualquier tamaño

matricial en [PT2]. Posteriormente, en [PR], se estudiaron sus autofunciones en relación con la función hipergeométrica matricial por otro método diferente al usado en esta sección y se obtuvo una expresión de otro operador diferencial de segundo orden que conmuta con el primero.

### 3.3.2. El ejemplo de 2 saltos

En esta sección se hará un trabajo análogo al realizado en la sección anterior, aunque los cálculos serán más tediosos. El problema reside en que el ejemplo más sencillo cuando se efectúan dos saltos en la representación tiene dimensión  $4 \times 4$ . Aquí se calcula como antes una expresión de los polinomios ortogonales matriciales en términos de la función hipergeométrica matricial y se encuentra una base para los operadores diferenciales de segundo orden. En el Capítulo 5 se verá que el comportamiento del álgebra será muy distinto al ejemplo anterior.

Sea  $\{W, D\}$  el par introducido al final del Ejemplo 1.4.6 (haciendo de nuevo el cambio  $\beta = n - 1$  y  $\alpha = m$ ). El operador diferencial en forma hipergeométrica (con los correspondientes cambios) queda entonces como

$$D = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0, \quad \partial = \frac{d}{dt},$$

con  $F_2, F_1, F_0$  dados por

$$\begin{aligned} F_2(t) &= t(1-t)I, \\ F_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha + 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha + 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha + 2 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2 - k_1 + 2}{k_2 - k_1 + 1} & -\frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_1 + 1} & \alpha + 1 \end{pmatrix} \\ &\quad -t \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta + 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta + 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta + 6 \end{pmatrix}, \\ F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(k_2 - k_1 + 2)(\beta - k_2 + 1)}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{(k_2 - k_1)(\beta - k_1 + 2)}{k_2 - k_1 + 1} & 0 \\ 0 & -(\alpha + \beta + 2) + k_2 & 0 & \beta - k_1 + 2 \\ 0 & 0 & -(\alpha + \beta + 3) + k_1 & \beta - k_2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\alpha + \beta + 3) + k_1 + k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\alpha, \beta > -1$  y  $0 < k_1 < k_2 < \beta + 1$ .

## Autofunciones en términos de la función hipergeométrica

Al igual que antes, se calculará un par equivalente a  $\{W, D\}$  que tenga el coeficiente  $F_0$  del operador diferencial diagonal. Para ello, si se considera la matriz no singular

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(\alpha+\beta-k_2+2)(k_2-k_1+1)}{(\beta-k_2+1)(k_2-k_1+2)} & -\frac{(\alpha+\beta-k_2+3)}{(\beta-k_2+1)} \\ 0 & -\frac{(\alpha+\beta-k_1+3)(k_2-k_1+1)}{(\beta-k_1+2)(k_2-k_1)} & 0 & -\frac{(\alpha+\beta-k_1+4)}{(\beta-k_1+2)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\alpha+\beta-k_1+4)(\alpha+\beta-k_2+3)}{(\beta-k_1+2)(\beta-k_2+1)} \end{pmatrix},$$

se tiene que el par  $\{T^*WT, T^{-1}DT\}$  es equivalente a  $\{W, D\}$ . Por simplicidad, retendremos los signos  $W$  y  $D$  para la matriz peso y el operador diferencial transformados, que pasa a escribirse como

$$D = t(1-t)\partial^2 + (X-tU)\partial^1 + V\partial^0,$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k_1+3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+\beta-k_2+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2\alpha+2\beta-k_1-k_2+6) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & -1 & -1 & \frac{2\alpha+2\beta-k_1-k_2+6}{(\alpha+\beta-k_2+2)(\alpha+\beta-k_1+3)} \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 & -\frac{(k_1-k_2)(\alpha+\beta-k_1+4)}{(\alpha+\beta-k_1+3)(k_1-k_2-1)} \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+5 & -\frac{(k_1-k_2-2)(\alpha+\beta-k_2+3)}{(k_1-k_2-1)(\alpha+\beta-k_2+2)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} C_{11}(\alpha, \beta, k_1, k_2) & \frac{(\alpha+1)(\alpha+\beta-k_2+3)}{(\alpha+\beta-k_2+2)(\alpha+\beta-k_1+3)} & \frac{(\alpha+1)(\alpha+\beta-k_1+4)}{(\alpha+\beta-k_2+2)(\alpha+\beta-k_1+3)} & 0 \\ \frac{(k_1-k_2)(\beta-k_1+2)}{(\alpha+\beta-k_1+3)(k_1-k_2-1)} & C_{22}(\alpha, \beta, k_1, k_2) & C_{23}(\alpha, \beta, k_1, k_2) & \frac{(k_1-k_2)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta-k_2+3)(k_1-k_2-1)} \\ \frac{(k_1-k_2-2)(\beta-k_2+1)}{(k_1-k_2-1)(\alpha+\beta-k_2+2)} & C_{32}(\alpha, \beta, k_1, k_2) & C_{33}(\alpha, \beta, k_1, k_2) & \frac{(k_1-k_2-2)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta-k_1+4)(k_1-k_2-1)} \\ 0 & \frac{(\alpha+\beta-k_1+3)(\beta-k_2+1)}{(\alpha+\beta-k_1+4)(\alpha+\beta-k_2+3)} & \frac{(\alpha+\beta-k_2+2)(\beta-k_1+2)}{(\alpha+\beta-k_1+4)(\alpha+\beta-k_2+3)} & C_{44}(\alpha, \beta, k_1, k_2) \end{pmatrix},$$

donde

$$C_{11}(\alpha, \beta, k_1, k_2) = \alpha + 1 - \frac{(\alpha+1)(k_1-k_2-2)}{(\alpha+\beta-k_2+2)(k_2-k_1+1)} - \frac{(\alpha+1)(k_1-k_2)}{(\alpha+\beta-k_1+3)(k_2-k_1+1)},$$

$$C_{22}(\alpha, \beta, k_1, k_2) = \alpha + 2 + \frac{(\alpha+1)(k_1-k_2)}{(\alpha+\beta-k_1+3)(k_2-k_1+1)} - \frac{(\alpha+2)(k_1-k_2)}{(\alpha+\beta-k_2+3)(k_2-k_1+1)},$$

$$C_{33}(\alpha, \beta, k_1, k_2) = \alpha + 2 + \frac{(\alpha+1)(k_1-k_2-2)}{(\alpha+\beta-k_2+2)(k_2-k_1+1)} - \frac{(\alpha+2)(k_1-k_2-2)}{(\alpha+\beta-k_1+4)(k_2-k_1+1)},$$

$$C_{44}(\alpha, \beta, k_1, k_2) = \alpha + 3 + \frac{(\alpha+2)(k_1-k_2-2)}{(\alpha+\beta-k_1+4)(k_2-k_1+1)} + \frac{(\alpha+2)(k_1-k_2)}{(\alpha+\beta-k_2+3)(k_2-k_1+1)},$$

$$C_{23}(\alpha, \beta, k_1, k_2) = \frac{(k_1-k_2)(\beta-k_1+2)}{(k_1-k_2-1)(\alpha+\beta-k_1+3)(\alpha+\beta-k_2+3)},$$

$$C_{32}(\alpha, \beta, k_1, k_2) = \frac{(k_1-k_2-2)(\beta-k_2+1)}{(k_1-k_2-1)(\alpha+\beta-k_1+4)(\alpha+\beta-k_2+2)}.$$

Se puede obtener una familia (no mónica) de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  que satisfaga la ecuación diferencial

$$t(1-t)(P_n^*)'' + (X - tU)(P_n^*)' + VP_n^* = P_n^* \Lambda_n,$$

donde

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix},$$

y  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , serán dados en (3.50). La razón de su construcción y ortogonalidad es la misma ya comentada en la Sección 3.3.1 y no se repitirá aquí.

Al igual que antes se reemplazan matrices en  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  por vectores en  $\mathbb{C}^{16}$  y se sigue llamando a esta aplicación “vec”. Entonces se puede considerar la siguiente ecuación diferencial equivalente:

$$t(1-t)\text{vec}(P_n^*)'' + (C - t\tilde{U})\text{vec}(P_n^*)' - \tilde{T}\text{vec}(P_n^*) = 0,$$

donde  $C$  y  $\tilde{U}$  son las matrices de tamaño  $16 \times 16$  obtenidas de  $X$  y  $U$  respectivamente, de la misma manera que en la sección anterior. El hecho de que  $V$  y los autovalores  $\Lambda_n$  sean diagonales hacen que  $\tilde{T}$  sea también diagonal:

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{16} t_i E_{ii},$$

donde

$$\begin{aligned} t_1 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3), \\ t_2 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) - (\alpha + \beta - k_1 + 3), \\ t_3 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) - (\alpha + \beta - k_2 + 2), \\ t_4 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - (2\alpha + 2\beta - k_1 - k_2 + 6), \\ t_5 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta - k_1 + 3, \\ t_6 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4), \\ t_7 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + k_2 - k_1 + 1, \\ t_8 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - (\alpha + \beta - k_2 + 3), \\ t_9 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta - k_2 + 2, \\ t_{10} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + k_1 - k_2 - 1, \\ t_{11} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4), \\ t_{12} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - (\alpha + \beta - k_1 + 4), \\ t_{13} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) + 2\alpha + 2\beta - k_1 - k_2 + 6, \\ t_{14} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + \alpha + \beta - k_2 + 3, \\ t_{15} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + \alpha + \beta - k_1 + 4, \\ t_{16} &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Al igual que en la Sección 3.3.1 se buscan dos matrices  $A, B$  que satisfagan las dos ecuaciones matriciales no lineales

$$\tilde{U} = I + A + B, \quad \text{y} \quad \tilde{T} = AB.$$

Procediendo como antes, se busca que  $A$  tenga la siguiente estructura:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix},$$

donde cada  $A_{ij}$  es una matriz diagonal de tamaño  $4 \times 4$ . Una vez obtenida  $A$ , la matriz  $B$  vendrá dada por

$$B = \tilde{U} - A - I.$$

Nótese que la entrada por bloques  $(2, 3)$  de  $A$  es nula, una observación que tendrá consecuencias más adelante.

Sea

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} \phi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

con  $\phi_i, \varphi_i, \psi_i, \xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , a determinar luego.

Los elementos de la diagonal de  $A_{12}$  son de la forma

$$\frac{\gamma_1}{-\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha + \beta + 4},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi, \xi$ , en cada entrada.

Los elementos de la diagonal de  $A_{13}$  son de la forma

$$\frac{\gamma_1}{-\gamma_1 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 4},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi, \xi$ , en cada entrada.

Denotando por

$$\omega_{14} = \frac{2\alpha + 2\beta - k_1 - k_2 + 6}{(\alpha + \beta - k_2 + 2)(\alpha + \beta - k_1 + 3)},$$

$$\omega_{24} = -\frac{(k_1 - k_2)(\alpha + \beta - k_1 + 4)}{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(k_1 - k_2 - 1)},$$

$$\omega_{34} = -\frac{(k_1 - k_2 - 2)(\alpha + \beta - k_2 + 3)}{(k_1 - k_2 - 1)(\alpha + \beta - k_2 + 2)},$$

los elementos de la última columna de  $U$ , los elementos de la diagonal de  $A_{34}$  son de la forma

$$\frac{-\omega_{34}\gamma_3}{-\gamma_3 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5},$$


---

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi, \xi$ , en cada entrada, y los elementos de la diagonal de  $A_{24}$  son de la forma

$$\frac{-\omega_{24}\gamma_2}{-\gamma_2 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi, \xi$ , en cada entrada.

Los elementos de la diagonal de  $A_{14}$  son un poco más complicados, y están dados por:

$$\frac{\omega_{14}\gamma_1}{-\gamma_1 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5} \frac{\omega_{24}\gamma_1}{(-\gamma_1 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5)(-\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha + \beta + 4)} \frac{\omega_{34}\gamma_1}{(-\gamma_1 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5)(-\gamma_1 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 4)} \frac{\omega_{24}\gamma_1\gamma_2}{(-\gamma_1 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5)(-\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha + \beta + 4)(-\gamma_2 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5)} \frac{\omega_{34}\gamma_1\gamma_3}{(-\gamma_1 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5)(-\gamma_1 - \gamma_3 + \alpha + \beta + 4)(-\gamma_3 - \gamma_4 + \alpha + \beta + 5)},$$

con  $\gamma = \phi, \varphi, \psi, \xi$ , en cada entrada.

Los parámetros  $\phi_i, \varphi_i, \psi_i, \xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , están sujetos a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \phi_1 = -n \quad \text{ó} \quad \phi_1 = n + \alpha + \beta + 3, \\ \varphi_1^2 - (\alpha + \beta + 3)\varphi_1 + t_2 = 0, \\ \psi_1^2 - (\alpha + \beta + 3)\psi_1 + t_3 = 0, \\ \xi_1^2 - (\alpha + \beta + 3)\xi_1 + t_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_2^2 - (\alpha + \beta + 4)\phi_2 + t_5 = 0, \\ \varphi_2 = -n \quad \text{ó} \quad \varphi_2 = n + \alpha + \beta + 4, \\ \psi_2^2 - (\alpha + \beta + 4)\psi_2 + t_7 = 0, \\ \xi_2^2 - (\alpha + \beta + 4)\xi_2 + t_8 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_3^2 - (\alpha + \beta + 4)\phi_3 + t_9 = 0, \\ \varphi_3^2 - (\alpha + \beta + 4)\varphi_3 + t_{10} = 0, \\ \psi_3 = -n \quad \text{ó} \quad \psi_3 = n + \alpha + \beta + 4, \\ \xi_3^2 - (\alpha + \beta + 4)\xi_3 + t_{12} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_4^2 - (\alpha + \beta + 5)\phi_4 + t_{13} = 0, \\ \varphi_4^2 - (\alpha + \beta + 5)\varphi_4 + t_{14} = 0, \\ \psi_4^2 - (\alpha + \beta + 5)\psi_4 + t_{15} = 0, \\ \xi_4 = -n \quad \text{ó} \quad \xi_4 = n + \alpha + \beta + 5. \end{cases}$$

Ahora,  $\text{vec}(P_n^*)$  satisface la ecuación hipergeométrica matricial

$$t(1-t)\text{vec}(P_n^*)'' + (C - t(I + A + B))\text{vec}(P_n^*)' - AB\text{vec}(P_n^*) = 0.$$

Los autovalores de  $C$  son  $\{\alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3\}$  con  $\alpha + 1$  y  $\alpha + 3$  de multiplicidad 4 y  $\alpha + 2$  de multiplicidad 8. Luego si  $\alpha > -1$  estamos en las condiciones de la definición de la función hipergeométrica matricial introducida en [T2].

La función  ${}_2F_1(C, A, B; t)$  no es una función polinómica, como en el caso clásico, pero sin embargo se tiene que

$$\text{vec}(P_n^*(t)) = {}_2F_1(C, A, B; t)\text{vec}(P_n^*(0))$$

es un polinomio vectorial de grado  $n$  en  $t$ .

En este caso podemos dar un valor explícito de  $P_n^*(0)$ , como antes, usando (3.45):

$$P_n^*(0) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & p_{14}(n) \\ 0 & p_{22}(n) & 0 & p_{24}(n) \\ 0 & 0 & p_{33}(n) & p_{34}(n) \\ 0 & 0 & 0 & p_{44}(n) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} p_{11}(n) &= \frac{(-1)^n(\alpha + \beta - k_1 + n + 3)(\alpha + \beta - k_2 + n + 2)(\alpha + 1)^{(n)}}{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + \beta - k_2 + 2)(\alpha + \beta + n + 3)^{(n)}}, \\ p_{12}(n) &= \frac{(-1)^n n(k_2 - k_1)(\beta - k_1 + 2)(\alpha + \beta - k_2 + n + 2)(\alpha + 2)^{(n-1)}}{(k_1 + n)(k_2 - k_1 + 1)(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + \beta - k_2 + 3)(\alpha + \beta + n + 4)^{(n-1)}}, \\ p_{13}(n) &= \frac{(-1)^n n(k_2 - k_1 + 2)(\beta - k_2 + 1)(\alpha + \beta - k_1 + n + 3)(\alpha + 2)^{(n-1)}}{(k_2 + n + 1)(k_2 - k_1 + 1)(\alpha + \beta - k_1 + 4)(\alpha + \beta - k_2 + 2)(\alpha + \beta + n + 4)^{(n-1)}}, \\ p_{14}(n) &= \frac{(-1)^n n(n-1)(\beta - k_2 + 1)(\beta - k_1 + 2)(\alpha + 3)^{(n-2)}}{(k_1 + n)(k_2 + n + 1)(\alpha + \beta - k_1 + 4)(\alpha + \beta - k_2 + 3)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n-2)}}, \\ p_{22}(n) &= \frac{(-1)^{n+1}(\alpha + \beta - k_2 + n + 4)(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + 2)^{(n)}}{n(\alpha + \beta - k_2 + 3)(\alpha + \beta + n + 4)^{(n)}}, \\ p_{24}(n) &= \frac{(-1)^{n+1}(\beta - k_2 + 1)(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + 3)^{(n-1)}}{(k_2 + n + 1)(\alpha + \beta - k_2 + 3)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n-1)}}, \\ p_{33}(n) &= \frac{(-1)^{n+1}(\alpha + \beta - k_1 + n + 4)(\alpha + \beta - k_2 + 2)(\alpha + 2)^{(n)}}{(\alpha + \beta - k_1 + 4)(\alpha + \beta + n + 4)^{(n)}}, \\ p_{34}(n) &= \frac{(-1)^{n+1}(\beta - k_1 + 2)(\alpha + \beta - k_2 + 2)(\alpha + 3)^{(n-1)}}{(k_1 + n)(\alpha + \beta - k_1 + 4)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n-1)}}, \\ p_{44}(n) &= \frac{(-1)^n(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + \beta - k_2 + 2)(\alpha + 3)^{(n)}}{n(n+1)(\alpha + \beta + n + 5)^{(n)}}. \end{aligned}$$

Obsérvese que  $p_{23}(n) = 0$ . Esto está relacionado con el hecho de que el bloque (2, 3) de  $A$  sea nulo.

### Operadores diferenciales de segundo orden

Como ya se mencionó anteriormente, hay una ventaja computacional en estudiar el operador diferencial introducido directamente en [GPT5], que volvemos a escribir aquí

$$D_1 = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0, \quad (3.51)$$

donde

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= t(1-t)I, \\
F_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2-k_1+2}{k_2-k_1+1} & -\frac{k_2-k_1}{k_2-k_1+1} & \alpha+1 \end{pmatrix} \\
&\quad -t \begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix}, \\
F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(k_2-k_1+2)(\beta-k_2+1)}{k_2-k_1+1} & \frac{(k_2-k_1)(\beta-k_1+2)}{k_2-k_1+1} & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta+2)+k_2 & 0 & \beta-k_1+2 \\ 0 & 0 & -(\alpha+\beta+3)+k_1 & \beta-k_2+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\alpha+\beta+3)+k_1+k_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Este operador tiene una sucesión (no mónica) de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  tal que

$$D_1 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde los autovalores pueden elegirse diagonales

$$\Lambda_n(D_1) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix},$$

con  $t_i, i = 1, 2, 3, 4$ , dados en (3.50). La única diferencia aquí es que  $t_2$  y  $t_3$  no aparecen en el orden natural.

La expresión de la familia  $(P_n)_n$ , usando de nuevo (3.45), está incluida en el Apéndice A.2.

Encontramos que, aparte de  $D_1$ , hay 2 operadores más de segundo orden linealmente independientes que tienen a la familia  $(P_n)_n$  como autofunciones. Uno de ellos está dado por

$$D_2 = G_2(t)\partial^2 + G_1(t)\partial^1 + G_0(t)\partial^0, \quad (3.52)$$

con  $G_2, G_1, G_0$  dados por

$$\begin{aligned}
 G_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1-k_2-1}{k_1-k_2}t & 0 & \frac{k_1-k_2-1}{k_1-k_2}t(1-t) & 0 \\ 0 & \frac{k_1-k_2-2}{k_1-k_2-1}t & \frac{1}{k_1-k_2-1}t & t(1-t) \end{pmatrix}, \\
 G_1(t) &= \begin{pmatrix} -(\beta - k_1 + 2) & 0 & -(\beta - k_1 + 2) & 0 \\ 0 & -\frac{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2 - 2)}{k_1 - k_2 - 1} & -\frac{\beta - k_1 + 2}{k_1 - k_2 - 1} & -(\beta - k_1 + 2) \\ \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(k_1 - k_2 - 1)}{k_1 - k_2} & -\frac{(\beta - k_2 + 1)(k_1 - k_2 - 2)}{(k_1 - k_2 - 1)(k_1 - k_2)} & g_{33} & -\frac{\beta - k_2 + 1}{k_1 - k_2} \\ 0 & \frac{(k_1 - k_2 - 2)(\alpha + \beta - k_1 + 4)}{k_1 - k_2 - 1} & \frac{\alpha + \beta - k_1 + 4}{k_1 - k_2 - 1} & \alpha + \beta - k_1 + 4 \end{pmatrix} \\
 &\quad -t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\beta - k_1 + 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\beta - k_1 + 2) \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha + \beta + 5)(k_1 - k_2 - 1)}{k_1 - k_2} & -\frac{\beta - k_2 + 1}{k_1 - k_2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta + 6 \end{pmatrix}, \\
 G_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1 + k_1)(\beta - k_1 + 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + k_1)(\beta - k_1 + 2) \\ 0 & 0 & -\frac{(1 + k_1)(\alpha + \beta - k_1 + 3)(k_1 - k_2 - 1)}{k_1 - k_2} & \frac{(1 + k_1)(\beta - k_2 + 1)}{k_1 - k_2} \\ 0 & 0 & 0 & -(1 + k_1)(\alpha + \beta - k_1 + 4) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

donde

$$g_{33} = \alpha + \beta - k_1 + 3 + \frac{\beta - k_1 + 2}{k_2 - k_1 + 1} - \frac{\alpha + 2}{k_1 - k_2}.$$

El autovalor de  $D_2$  tal que

$$D_2 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

está dado por la matriz diagonal

$$\Lambda_n(D_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(n+k_1+1)(n+\alpha+\beta-k_1+3)(k_1-k_2-1)}{k_1-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(n+k_1+1)(n+\alpha+\beta-k_1+4) \end{pmatrix}.$$

Existe otro operador diferencial de segundo orden linealmente independiente con respecto a los anteriores

$$D_3 = H_2(t)\partial^2 + H_1(t)\partial + H_0(t)\partial^0, \quad (3.53)$$

con  $H_2, H_1, H_0$  dados por

$$\begin{aligned}
H_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1-k_2-2}t & \frac{1}{k_1-k_2-2}t(1-t) & 0 & 0 \\ -t & 0 & -t(1-t) & 0 \\ 0 & -t & 0 & -t(1-t) \end{pmatrix}, \\
H_1(t) &= \begin{pmatrix} \beta - k_1 + 1 & \frac{\beta - k_2 + 1}{k_1 - k_2 - 1} & \frac{(k_1 - k_2)(\beta - k_1 + 2)}{k_1 - k_2 + 1} & 0 \\ \frac{\alpha + \beta - k_2 + 2}{k_1 - k_2 - 2} & h_{22} & \frac{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2)}{(k_1 - k_2 - 2)(k_1 - k_2 - 1)} & \frac{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2 - 1)}{k_1 - k_2 - 2} \\ -(\alpha + \beta - k_1 + 3) & \frac{\beta - k_2 + 1}{k_1 - k_2 - 1} & -h_{33} & 0 \\ 0 & -h_{33} - \frac{1}{k_1 - k_2 - 1} & \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 - 1} & -(\alpha + \beta - k_1 + 3) \end{pmatrix} \\
&\quad -t \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta - k_2 + 1}{k_1 - k_2 - 1} & \frac{(k_1 - k_2)(\beta - k_1 + 2)}{k_1 - k_2 - 1} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha + \beta + 5}{k_1 - k_2 - 2} & 0 & \frac{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2 - 1)}{k_1 - k_2 - 2} \\ 0 & 0 & -(\alpha + \beta + 5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\alpha + \beta + 6) \end{pmatrix}, \\
H_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(2+k_2)(\beta-k_2+1)}{k_1-k_2-1} & -\frac{(1+k_1)(k_1-k_2)(\beta-k_1+2)}{k_1-k_2-1} & 0 \\ 0 & -\frac{(\alpha+\beta-k_2+2)(2+k_2)}{k_1-k_2-2} & 0 & \frac{(\beta-k_1+2)(k_2+2-k_1^2+k_1k_2)}{k_1-k_2-2} \\ 0 & 0 & (1+k_1)(\alpha+\beta-k_1+3) & -(\beta-k_2+1) \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
h_{22} &= \beta - k_1 + 3 + \frac{\beta - k_1 + 2}{k_1 - k_2 - 1} + \frac{\alpha + 2}{k_1 - k_2 - 2}, \\
h_{33} &= \alpha + \beta - k_1 + 4 + \frac{\beta - k_1 + 2}{k_1 - k_2 - 1}, \\
h_{44} &= 2\alpha + 2\beta - k_1 - k_2 + 6 + k_1(\alpha + \beta - k_1 + 3).
\end{aligned}$$

El autovalor de  $D_3$  tal que

$$D_3 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_3), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

está dado por la matriz diagonal

$$\Lambda_n(D_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(n+k_2+2)(n+\alpha+\beta-k_2+2)}{k_1-k_2-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n+k_1+1)(n+\alpha+\beta-k_1+3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n \end{pmatrix},$$

donde

$$\omega_n = n^2 + n(\alpha + \beta + 5) + k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 2\alpha + 2\beta - k_2 + 6.$$

Como consecuencia, al ser los tres autovalores diagonales, los operadores diferenciales de segundo orden conmutan entre sí. Sin embargo, el álgebra no va a ser conmutativa, como en el ejemplo de 1 salto. En el Capítulo 5 se muestran evidencias computacionales

que nos permitan conjeturar que la estructura del álgebra en este caso es no conmutativa, ya que será necesario considerar en la base de operadores diferenciales elementos de orden 4, que tienen autovalores no conmutativos con respecto a los de orden 2. También daremos un conjunto de relaciones entre los generadores.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>El contenido de esta última parte del capítulo está contenido en el artículo [GdI1].

---



## Capítulo 4

# Operadores diferenciales con varias familias de polinomios ortogonales matriciales como autofunciones

*Aquí y allá se ven nadando algunos náufragos  
por entre en vasto abismo de las olas.*

VIRGILIO, ENEIDA, LIBRO I, LÍNEA 118

El objetivo de este capítulo es mostrar una variada colección de ejemplos de familias de pesos matriciales  $W_\gamma$ ,  $\gamma \geq 0$ , que comparten un mismo operador diferencial simétrico de segundo orden. Todas las familias que mostramos son de la forma

$$W_\gamma(t) = W(t) + \gamma \delta_{t_0}(t)M(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \gamma \geq 0,$$

donde  $W$  es un peso matricial conocido y  $M(t_0)$  una matriz (hermítica) semidefinida positiva.

El *modus operandis* con el que trabajamos en este capítulo es el siguiente: elegimos un peso matricial  $W$  conocido y del que se sabe que tiene varios operadores diferenciales simétricos de orden 2. Calculamos todos sus operadores diferenciales simétricos de segundo orden  $D$  de la forma

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t), \quad \partial = \frac{d}{dt}.$$

A continuación se le añade una delta de Dirac en cualquier punto de la recta real con una masa  $M(t_0)$  semidefinida positiva y tratamos de resolver el sistema de ecuaciones (no lineales)

$$\begin{aligned} F_2(t_0)M(t_0) &= 0, \\ F_1(t_0)M(t_0) &= 0, \\ F_0M(t_0) &= M(t_0)F_0^*. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si encontramos soluciones no triviales, el Teorema 2.2.1 garantiza que la familia  $W_\gamma$  comparte operadores diferenciales simétricos de segundo orden. Obviamente, cuantos más operadores diferenciales linealmente independientes tenga asociados el peso matricial  $W$ , más probable será que  $W_\gamma$  comparta operadores.

Estudiaremos tres tipos de ejemplos. Los primeros ejemplos son pesos matriciales de tamaño  $2 \times 2$ , pero con la característica especial de que para cada uno de ellos la dimensión (real) del espacio lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 es 5. Algunos de ellos ya han aparecido en la literatura. Otros son alteraciones de pesos matriciales ya introducidos, pero esta modificación hace que aparezcan 5 operadores diferenciales linealmente independientes de orden a lo sumo dos. Para cada ejemplo veremos que el peso matricial alterado por una delta de Dirac admite un operador diferencial simétrico de segundo orden. Además, el punto  $t_0$  podrá estar localizado en cualquier punto de la recta real, incluso si está fuera o dentro del soporte del peso matricial. Algunas fórmulas de estructura para algunas familias de polinomios ortogonales matriciales estarán incluidas en el Apéndice B.

El segundo conjunto de ejemplos son pesos matriciales de tamaño general  $N \times N$  con la propiedad de que la dimensión (real) del espacio lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 para cada uno de ellos es 3. Al haber menos libertad, el punto  $t_0$  de la delta de Dirac para estos ejemplos será necesario localizarlo en un extremo del soporte del peso matricial (concretamente en  $t_0 = 0$ ). Para cada ejemplo veremos que el peso matricial alterado admite un sólo operador diferencial simétrico.

Por último estudiaremos ejemplos con propiedades diferentes a las mostradas en los dos primeros tipos de ejemplos. Por ejemplo, veremos un peso matricial para el cual al añadirle una delta de Dirac en un punto específico aparecen dos operadores diferenciales linealmente independientes (en vez de sólo uno). También estudiaremos ejemplos donde no existen operadores diferenciales simétricos de segundo orden asociados a  $W_\gamma, \gamma > 0$ , pero sí de cuarto orden.<sup>1</sup>

## 4.1. Pesos con una delta de Dirac en cualquier punto

### 4.1.1. Pesos de la forma $e^{-t^2} e^{A t} e^{A^* t}$ , con $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Este peso matricial fue introducido por primera vez en la Sección 5.1 de [DG1]. En [DG3] se estudiaron con profundidad fórmulas de estructura fundamentales y en [CG2] se exploró su álgebra de operadores diferenciales. Concretamente se dio una base de operadores de orden a lo sumo dos, que tiene dimensión (real) 5, formada por la identidad y 4 operadores diferenciales de segundo orden linealmente independientes.

Desarrollando la exponencial se tiene la siguiente expresión explícita para el peso matricial:

---

<sup>1</sup>Los ejemplos más significativos de este capítulo podemos encontrarlos en el artículo [DdI2].

$$W_a(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t} = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Los momentos de  $W_a$  se expresan en términos de los momentos de Hermite

$$h_{2m} = \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2m)!}{4^m m!}, \quad h_{2m+1} = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Los momentos de  $W_a$  vienen entonces dados por

$$\mu_{2m} = \begin{pmatrix} h_{2m} + a^2 h_{2m+2} & 0 \\ 0 & h_{2m} \end{pmatrix}, \quad \mu_{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & ah_{2m+2} \\ ah_{2m+2} & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Como hemos mencionado al comienzo del capítulo, una vez que tenemos la expresión de todos los operadores de segundo orden simétricos para  $W_a$ , fijamos el punto  $t_0$  y resolvemos las ecuaciones (4.1) (buscando los coeficientes  $F_2, F_1$  y  $F_0$  del operador diferencial y la matriz  $M(t_0)$  no nula). En este caso encontramos que el siguiente operador diferencial

$$D_{a,t_0} = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t), \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \begin{pmatrix} -\xi_{a,t_0}^{\mp} + at_0 - at & -1 - (a^2 t_0)t + a^2 t^2 \\ -1 & -\xi_{a,t_0}^{\mp} + at \end{pmatrix}, \\ F_1(t) &= \begin{pmatrix} -2a + 2\xi_{a,t_0}^{\mp} t & -2t_0 - 2a\xi_{a,t_0}^{\mp} + 2(2 + a^2)t \\ 2t_0 & 2(\xi_{a,t_0}^{\mp} - at_0)t \end{pmatrix}, \\ F_0(t) &= \begin{pmatrix} \xi_{a,t_0}^{\mp} + 2\frac{t_0}{a} & 2\frac{2 + a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & -\xi_{a,t_0}^{\mp} - 2\frac{t_0}{a} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M(t_0) = M(a, t_0) = \begin{pmatrix} (\xi_{t_0,a}^{\pm})^2 & \xi_{t_0,a}^{\pm} \\ \xi_{t_0,a}^{\pm} & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\xi_{a,t_0}^{\pm} = \frac{at_0 \pm \sqrt{4 + a^2 t_0^2}}{2},$$

verifican dichas ecuaciones.

Este operador diferencial se obtiene como combinación lineal de los operadores diferenciales de segundo orden (el operador identidad de orden 0 está incluido) que aparecen en [CG2]. Llamándolos  $I, D_1, D_2$  y  $D_4$ , se tiene que

$$D_{a,t_0} = \left(-\xi_{a,t_0}^{\mp} + \frac{2t_0}{a}\right)I - \xi_{a,t_0}^{\mp} D_1 - \frac{4t_0}{a} D_2 + \frac{4}{a^2} D_4.$$

Es fácil ver que evaluando los coeficientes diferenciales de  $D_{a,t_0}$  en  $t = t_0$ , y usando que  $\xi_{a,t_0}^+ \xi_{a,t_0}^- + 1 = 0$ , se verifican las ecuaciones (4.1). Dado que  $D_{a,t_0}$  es simétrico con respecto a  $W_a$ , el Teorema 2.2.1 implica que  $D_{a,t_0}$  es simétrico también con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{a,t_0,\gamma}(t) = W_a(t) + \gamma \delta_{t_0}(t) M(a, t_0), \quad \gamma \geq 0.$$

Como consecuencia, las familias de polinomios ortogonales matriciales mónicos  $(P_{n,a,t_0,\gamma})_n$  con respecto a  $W_{a,t_0,\gamma}$ ,  $\gamma \geq 0$ , son autofunciones del operador diferencial de segundo orden en común,  $D_{a,t_0}$ , definido en (4.3), es decir, para cualquier  $\gamma \geq 0$

$$P_{n,a,t_0,\gamma} D_{a,t_0} = \Gamma_{n,a,t_0} P_{n,a,t_0,\gamma}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde

$$\Gamma_{n,a,t_0} = \begin{pmatrix} \xi_{a,t_0}^\mp (2n+1) + \frac{2t_0}{a} & \frac{(2+na^2)(2+(n+1)a^2)}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & \xi_{a,t_0}^\mp (2n-1) - 2nat_0 - \frac{2t_0}{a} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que ni  $D_{a,t_0}$  ni el autovalor  $\Gamma_{n,a,t_0}$  dependen de  $\gamma$ .

*Nota 4.1.1.* Finalizamos esta sección con un breve comentario acerca del peso matricial  $W(t) = e^{-t^2} e^{A^t} e^{A^*t}$  donde  $A$  es la matriz  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.4)$$

Ligando los parámetros  $a$  y  $b$  de la matriz  $A$  de la forma

$$a^2 b^2 = 4(b^2 - a^2), \quad (4.5)$$

la dimensión (real) del espacio de operadores diferenciales de orden  $a$  lo sumo dos es sólo 3 (si (4.5) no se verifica, la dimensión es 2, mientras que para el peso  $W_a$  en (4.2) era 5). Una base se encuentra en [D7]. Nuestro método, sin embargo, no produce ningún operador diferencial común de segundo orden para  $W$  añadiéndole una delta de Dirac en un punto.

#### 4.1.2. Pesos de la forma $t^\alpha e^{-t} t^B t^{B^*}$ , con $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Este peso matricial fue introducido por primera vez en la Sección 6.2 de [DG1]. En [DL6] se estudiaron fórmulas de estructura, así como la existencia de un segundo operador diferencial de orden 2 considerando *buenas factorizaciones* del peso matricial de tamaño  $N = 2$  (en el sentido explicado en la Sección 3.1.1). Sin embargo, no se ha realizado un estudio detallado similar al ejemplo de la sección anterior de su álgebra de operadores diferenciales. No obstante, se tiene, al igual que todos los ejemplos en esta sección, que el espacio lineal de operadores diferenciales simétricos de orden  $a$  lo sumo dos tiene dimensión (real) 5.

El peso matricial tiene la siguiente estructura:

$$W_{a,\alpha}(t) = t^\alpha e^{-t} t^B t^{B*} = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 + a^2(t-1)^2 & a(t-1) \\ a(t-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1. \quad (4.6)$$

Los momentos de  $W_{a,\alpha}$  están dados por

$$\mu_n = \Gamma(n + \alpha + 1) \begin{pmatrix} \theta_n & a(\alpha + n) \\ a(\alpha + n) & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde

$$\theta_n = a^2(\alpha^2 + (2n + 1)\alpha + n^2 + n + 1) + \alpha^2 + (2n + 3)\alpha + (n + 1)(n + 2).$$

De la misma manera que el ejemplo anterior, fijamos  $t_0 \in \mathbb{R}$  y resolvemos las ecuaciones (4.1). Encontramos que el operador diferencial

$$D_{a,\alpha,t_0} = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t), \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} F_2 &= \begin{pmatrix} at_0 & a^2 t_0 \\ -t_0 & -at_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \zeta^\pm - \frac{1+(\alpha+t_0)(1+a^2)}{a} & -(\alpha+t_0+1)(1+a^2) \\ 0 & \zeta^\pm + a \end{pmatrix} \\ &\quad + t^2 \begin{pmatrix} 0 & (1+a^2)(1+\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_1 &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -a(3t_0 - 2 + (\alpha + 1)^2) \\ +(\alpha + 3)(\zeta^\pm - \frac{t_0 + \alpha + 1}{a}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2a\zeta^\pm - (1+a^2)(\alpha^2 + 2t_0 + 3\alpha) \\ +\alpha t_0(a^2 - 1) - (t_0 + \alpha + 3) \end{pmatrix} \\ t_0 - \alpha - 1 & \zeta^\pm(\alpha + 1) - a\alpha t_0 \end{pmatrix} \\ &\quad + t \begin{pmatrix} -\zeta^\pm + a(t_0 - 1) + \frac{t_0 + \alpha + 1}{a} & (1+a^2)(\alpha^2 + 3\alpha - t_0\alpha + 2) + 2(\alpha - 1) \\ 0 & -\zeta^\pm + a\alpha \end{pmatrix}, \\ F_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{\zeta^\pm}{2} + \frac{a(t_0 - 1)}{2} + \frac{(\alpha + 2)(t_0 + \alpha + 1)}{2a} - \frac{a(1 + \alpha)}{1 + a^2} & 1 + a\alpha\zeta^\pm - \alpha(t_0 - 1)(a^2 + \alpha + 2) + \frac{1 + \alpha}{1 + a^2} \\ \frac{1 + \alpha}{1 + a^2} & \frac{\zeta^\pm}{2} - \frac{a(t_0 - 1)}{2} - \frac{(\alpha + 2)(t_0 + \alpha + 1)}{2a} + \frac{a(1 + \alpha)}{1 + a^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M(t_0) = M(a, \alpha, t_0) = \begin{pmatrix} (\zeta_{a,\alpha,t_0}^\pm)^2 & \zeta_{a,\alpha,t_0}^\pm \\ \zeta_{a,\alpha,t_0}^\pm & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\zeta_{a,\alpha,t_0}^\pm = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + 1)(t_0 + \alpha) - a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + 1)(a^2(t_0 - \alpha - 1)^2 + (t_0 + \alpha + 1)^2)}}{a},$$

verifican dichas ecuaciones

No es difícil ver, como antes, que los coeficientes de  $D_{a,\alpha,t_0}$  evaluados en  $t_0$  satisfacen las ecuaciones (4.1). Como es simétrico para el peso matricial (4.6), el Teorema 2.2.1 implica que  $D_{a,\alpha,t_0}$  es también simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{a,\alpha,t_0,\gamma}(t) = W_{a,\alpha}(t)\chi_{(0,+\infty)}(t) + \gamma\delta_{t_0}(t)M(a,\alpha,t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > -1, \quad \gamma \geq 0. \quad (4.8)$$

Obsérvese que el punto  $t_0$  puede tomarse fuera o dentro del soporte de (4.6).

De la misma manera, las familias de polinomios ortogonales matriciales mónicos  $(P_{n,a,\alpha,t_0,\gamma})_n$  con respecto a  $W_{a,\alpha,t_0,\gamma}$ ,  $\gamma \geq 0$ , definida en (4.8), son autofunciones del mismo operador diferencial de segundo orden  $D_{a,\alpha,t_0}$  definido en (4.7), es decir,

$$P_{n,a,\alpha,t_0,\gamma}D_{a,\alpha,t_0} = \Gamma_{n,a,\alpha,t_0}P_{n,a,\alpha,t_0,\gamma}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde

$$\Gamma_{n,a,\alpha,t_0} = \frac{1}{2}n(n-1)F_2'' + nF_1' + F_0.$$

Nótese que ni  $D_{a,\alpha,t_0}$  ni  $\Gamma_{n,a,\alpha,t_0}$  dependen de  $\gamma$ .

Una expresión de la familia  $(P_{n,a,\alpha,t_0,\gamma})_n$  para el caso especial de  $\alpha = 0$ ,  $a = 1/2$  y  $t_0 = 0$  en términos de su fórmula de recurrencia a tres términos, así como cierta representación de la forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma}P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma})P_{n,1},$$

con  $\alpha_{n,\gamma}$  una sucesión escalar, puede encontrarse en el Apéndice B.1.

#### 4.1.3. Pesos de la forma $t^\alpha e^{-t} e^{At} J t^{J^*} e^{A^*t}$ , con $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Este peso matricial fue introducido por primera vez en el Ejemplo 4 de [CMV] para mostrar que las derivadas de sus polinomios ortogonales matriciales son ortogonales con respecto a otro peso matricial. También aparece en la Sección 3.1.1, donde se da la expresión de un operador diferencial simétrico de segundo orden para él (véase (3.10)).

El peso matricial está dado por

$$W_{a,\alpha}(t) = t^\alpha e^{-t} e^{At} J t^{J^*} e^{A^*t} = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} (1+a^2)t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1. \quad (4.9)$$

Los momentos de  $W_{a,\alpha}$  están dados por

$$\mu_n = \begin{pmatrix} (1+a^2)\Gamma(n+\alpha+3) & a\Gamma(n+\alpha+2) \\ a\Gamma(n+\alpha+2) & \Gamma(n+\alpha+1) \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Fijando el punto  $t_0$  y resolviendo las ecuaciones (4.1) encontramos que el operador diferencial

$$D_{a,\alpha,t_0} = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
F_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{t_0\phi^\pm}{1+\alpha} & 0 \end{pmatrix} + (1+\alpha^2)t \begin{pmatrix} -t_0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi^\pm - \alpha t_0}{a} + \frac{t_0\phi^\pm}{a(1+\alpha)} \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 & (1+\alpha^2)\phi^\pm \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
F_1 &= \begin{pmatrix} t_0(\alpha\phi^\pm - (1+\alpha^2)(\alpha+3)) & 0 \\ -\frac{(\alpha+1-t_0)\phi^\pm}{\alpha+1} & (\alpha+1)(\alpha\phi^\pm - t_0(1+\alpha^2)) + \frac{(t_0+\alpha+1)\phi^\pm}{a} \end{pmatrix} \\
&\quad + t \begin{pmatrix} (1+\alpha^2)t_0 - \alpha\phi^\pm & (1+\alpha^2)(\alpha+3-t_0)\phi^\pm \\ 0 & \frac{\alpha t_0(1+\alpha^2) - \phi^\pm}{a} - \frac{t_0(1+\alpha^2)\phi^\pm}{a(\alpha+1)} \end{pmatrix}, \\
F_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(1+\alpha^2)t_0 - \alpha\phi^\pm + \frac{(1+\alpha+t_0)\phi^\pm}{a}] & (\alpha+1)[- \alpha t_0(1+\alpha^2) + (1+\alpha^2-t_0)\phi^\pm] \\ \frac{\phi^\pm}{1+\alpha^2} & -\frac{1}{2}[(1+\alpha^2)t_0 - \alpha\phi^\pm + \frac{(1+\alpha+t_0)\phi^\pm}{a}] \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M(t_0) = M(\alpha, \alpha, t_0) = \begin{pmatrix} (\phi_{\alpha, \alpha, t_0}^\pm)^2 & \phi_{\alpha, \alpha, t_0}^\pm \\ \phi_{\alpha, \alpha, t_0}^\pm & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\phi^\pm = \phi_{\alpha, \alpha, t_0}^\pm = \frac{1}{2} \frac{(\alpha^2+1)(1+\alpha+t_0) \pm \sqrt{(\alpha^2+1)(\alpha^2(\alpha+1-t_0)^2 + (\alpha+1+t_0)^2)}}{\alpha},$$

verifican dichas ecuaciones.

Mostramos aquí una base de operadores diferenciales de segundo orden que tienen a los polinomios ortogonales matriciales con respecto a  $W_{\alpha, \alpha}$  como autofunciones, formada por cuatro elementos:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+3-t & 0 \\ 0 & \alpha+1-t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1 & a(\alpha+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
D_2 &= \partial^2 \begin{pmatrix} (\alpha+1)t & 0 \\ a & (\alpha+2+\alpha^2)t \end{pmatrix} \\
&\quad + \partial^1 \begin{pmatrix} (\alpha+1)(\alpha+3+\alpha^2-t) & -\alpha t(1+\alpha^2)(\alpha+1) \\ a & (\alpha+1)(\alpha+2) - t(\alpha+2+\alpha^2) \end{pmatrix}, \\
D_3 &= \partial^2 \begin{pmatrix} -\frac{(2+\alpha^2)}{a}t & (1+\alpha^2)t^2 \\ -1 & at \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} -\frac{2(\alpha+3+\alpha^2-t)}{a} & 2(1+\alpha^2)t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{2(2+\alpha)}{a} & -(\alpha+1)(\alpha+2) \\ \frac{1}{1+\alpha^2} & 0 \end{pmatrix}, \\
D_4 &= \partial^2 \begin{pmatrix} at & -(1+\alpha^2)t^2 \\ 1 & -at \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} 2a & -2(\alpha+2+\alpha^2)t \\ -\frac{2}{1+\alpha^2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{a(1+\alpha)}{1+\alpha^2} & -(\alpha+1)(\alpha+2) \\ \frac{1}{1+\alpha^2} & -\frac{a(1+\alpha)}{1+\alpha^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$


---

De esta manera, el operador  $D_{a,\alpha,t_0}$  se puede expresar como combinación lineal de los introducidos anteriormente

$$D_{a,\alpha,t_0} = \frac{1}{2} \left[ a\phi^\pm - (1+a^2)t_0 - \frac{(\alpha+1+t_0)\phi^\pm}{a} \right] I \\ + \left[ a\phi^\pm - (1+a^2)t_0 + \frac{(\alpha+3-t_0)\phi^\pm}{a} \right] D_1 + \frac{(t_0-\alpha-1)\phi^\pm}{a(1+\alpha)} D_2 + \phi^\pm D_3.$$

Los coeficientes de  $D_{a,\alpha,t_0}$  evaluados en  $t_0$  satisfacen las ecuaciones (4.1). Como es simétrico para el peso matricial (4.9), el Teorema 2.2.1 implica que  $D_{a,\alpha,t_0}$  es también simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{a,\alpha,t_0,\gamma}(t) = W_{a,\alpha}(t)\chi_{(0,+\infty)}(t) + \gamma\delta_{t_0}(t)M(a,\alpha,t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > -1, \quad \gamma \geq 0.$$

De nuevo,  $t_0$  puede tomarse fuera o dentro del soporte de (4.9).

#### 4.1.4. Pesos de la forma $t^\alpha(1-t)^\beta T(t)T(t)^*$

Consideremos el siguiente peso matricial, para  $\alpha, \beta > -1$  y  $0 < k < \beta + 1$ :

$$W_{\alpha,\beta,k}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta \begin{pmatrix} kt^2 + \beta - k + 1 & (\beta - k + 1)(1-t) \\ (\beta - k + 1)(1-t) & (\beta - k + 1)(1-t)^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1). \quad (4.10)$$

Este peso es una variación sobre uno que proviene de teoría de representación de grupos y que tiene 2 operadores diferenciales de segundo orden asociados que conmutan (véase [CG2] y [PR], la Sección 1.4.5 o la Sección 4.2.2 posterior para tamaño  $N = 2$ ). La diferencia es que la dimensión (real) del espacio lineal de operadores diferenciales de orden a lo sumo 2 es 5. Este ejemplo no está relacionado (por lo que sabemos) con ninguna situación que provenga de ninguna representación de grupos.

Fijando  $t_0$  y resolviendo las ecuaciones (4.1) encontramos que el operador diferencial

$$D_{\alpha,\beta,k,t_0} = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0,$$

donde

$$\begin{aligned}
F_2 &= \begin{pmatrix} -t_0 & t_0 \\ -t_0 & t_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{\varphi^\pm(3t_0-1)+1-t_0}{\varphi^\pm} - \frac{1+\alpha-t_0(\alpha-\beta)}{\beta-k+1} & -2t_0 + \frac{1+\alpha-t_0(\alpha-\beta)}{\beta-k+1} \\ 2t_0 & \frac{1-(\varphi^\pm+1)t_0-\varphi^\pm}{\varphi^\pm} \end{pmatrix} \\
&\quad + t^2 \begin{pmatrix} \frac{\varphi^\pm(1-2t_0)-1+t_0}{\varphi^\pm} + \frac{1+\alpha-t_0(\alpha-\beta)}{\beta-k+1} & t_0 - \frac{t_0(1+\beta)}{\beta-k+1} \\ -t_0 & \frac{t_0+\varphi^\pm-1}{\varphi^\pm} \end{pmatrix}, \\
F_1 &= \begin{pmatrix} \left( \frac{t_0(\beta+3\alpha+8)-2(\alpha+2)}{\varphi^\pm} + \frac{(\alpha+3)(1-t_0)}{\varphi^\pm} + \frac{(\alpha+3)(t_0(\alpha-\beta)-1-\alpha)}{\beta-k+1} \right) & \left( \frac{\alpha+3-t_0(\beta+3\alpha+8)}{\varphi^\pm} + \frac{2(t_0-1)}{\varphi^\pm} + \frac{(\alpha+3)(t_0(\alpha-\beta)-1-\alpha)}{\beta-k+1} \right) \\ (\alpha+\beta+4)t_0-1-\alpha & -t_0(\alpha+\beta+4) + \frac{(1+\alpha)(1-t_0)}{\varphi^\pm} \end{pmatrix} \\
&\quad + t \begin{pmatrix} (\alpha+\beta+4)(1-2t_0 + \frac{t_0-1}{\varphi^\pm} + \frac{t_0(\alpha-\beta)-1-\alpha}{\beta-k+1}) & \left( \frac{1+\alpha+t_0(\alpha+\beta+4)}{(\beta+1)(1+\alpha+t_0(\alpha+\beta+4))} + \frac{(1+\alpha)(1-t_0)}{\beta-k+1} \right) \\ 1+\alpha-t_0(\alpha+\beta+4) & \frac{(\alpha+\beta+4)(\varphi^\pm+t_0-1)}{\varphi^\pm} \end{pmatrix}, \\
F_0 &= \begin{pmatrix} \left( \frac{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+k(\alpha+2)(t_0-2)+2)}{(\alpha+2)(t_0(\alpha-k+1)-1-\alpha)} - \frac{(\alpha+\beta-2k+2)(t_0-1)}{2\varphi^\pm} \right) & \frac{-k(t_0-1)}{\varphi^\pm} - \frac{k(2+\alpha)(\alpha+\beta+2+k(t_0-1))}{\beta-k+1} \\ k(\alpha+2)(1-t_0) - (1+\beta) - \frac{(\beta-k+1)(t_0-1)}{\varphi^\pm} & \left( \frac{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+k(\alpha+2)(t_0-2)+2)}{(\alpha+\beta-2k+2)(t_0-1)} - \frac{(\alpha+2)(t_0(\alpha-k+1)-1-\alpha)}{2(\beta-k+1)} \right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M(t_0) = M(t_0, \alpha, \beta, k) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{\alpha, \beta, k, t_0}^\pm \\ \varphi_{\alpha, \beta, k, t_0}^\pm & (\varphi_{\alpha, \beta, k, t_0}^\pm)^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
\varphi^\pm &= \varphi_{\alpha, \beta, k, t_0}^\pm = \frac{(\alpha+\beta-2k+2)(1-t_0) + \beta + 1}{2(\alpha+\beta - (1-t_0)k + 2)} \\
&\quad \pm \frac{\sqrt{(1+\alpha)^2 - 2t_0(1+\alpha)(\alpha+\beta-2k+2) + t_0^2((\alpha+\beta-2k+2)^2 + 4k(\beta-k+1))}}{2(\alpha+\beta - (1-t_0)k + 2)},
\end{aligned}$$

verifican dichas ecuaciones. Para evitar singularidades hay que suponer que  $t_0 \neq -\frac{1}{k}(\alpha + \beta - k + 2)$ . También, cuando se considera la raíz  $\varphi^-$  es necesario imponer que  $t_0 \neq 1$  para que tenga sentido el operador diferencial.

No es difícil ver, como antes, que los coeficientes de  $D_{\alpha, \beta, k, t_0}$  evaluados en  $t_0$  verifican las ecuaciones (4.1). Como es simétrico con respecto al peso matricial (4.10), el Teorema 2.2.1 implica que  $D_{\alpha, \beta, k, t_0}$  es también simétrico con respecto cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{\alpha, \beta, k, t_0, \gamma}(t) = W_{\alpha, \beta, k}(t) \chi_{(0,1)}(t) + \gamma \delta_{t_0}(t) M(\alpha, \beta, k, t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \gamma \geq 0.$$

De nuevo, el punto  $t_0$  puede tomarse fuera o dentro del soporte del peso matricial (4.10).

Una expresión de la familia  $(P_{n, \alpha, \beta, k, t_0, \gamma})_n$  para el caso especial de  $\alpha = \beta = 0$ ,  $k = 1/2$  y  $t_0 = 0$  en términos de su fórmula de recurrencia a tres términos, así como cierta representación de la forma

$$P_{n, \gamma} = \alpha_{n, \gamma} P_n + (1 - \alpha_{n, \gamma}) P_{n, 1},$$

con  $\alpha_{n, \gamma}$  una sucesión escalar, puede encontrarse en el Apéndice B.2.

## 4.2. Pesos con una delta de Dirac en puntos específicos

A lo largo de esta sección se denota por  $E_{ij}$  a la matriz con entrada 1 en  $(i, j)$  y 0 en cualquier otro sitio.

### 4.2.1. El peso $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$

Este peso matricial se introdujo en la Sección 3.1:

$$W(t) = t^\alpha e^{-t} e^{At} t^{\frac{1}{2}} J t^{\frac{1}{2}} J^* e^{A^*t}, \quad t \in (0, +\infty) \quad \alpha > -1, \quad (4.11)$$

donde  $A$  denota la matriz nilpotente de tamaño  $N \times N$  con  $N - 1$  parámetros libres

$$A = \sum_{i=1}^{N-1} \nu_i E_{i, i+1}, \quad \nu_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

y  $J$  denota la matriz singular diagonal

$$J = \sum_{i=1}^N (N-i) E_{ii}.$$

Vimos en la Sección 3.1 que existen dos operadores diferenciales simétricos de segundo orden linealmente independientes. El primero está dado en el Teorema 3.9 por

$$D_1 = \partial^2 t I + \partial^1 [(\alpha + 1)I + J + t(A - I)] + \partial^0 [(J + \alpha I)A - J],$$

y el segundo en el Teorema 3.1.2 por

$$D_2 = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0,$$

donde los coeficientes están definidos por

$$\begin{aligned} F_2 &= t(J - At), \\ F_1 &= (1 + \alpha + J)J + Y - t(J + (\alpha + 2)A + Y^* - AY + YA), \\ F_0 &= \frac{N-1}{\nu_{N-1}^2} [J - (\alpha + J)A], \end{aligned}$$

con  $Y = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i(N-i)}{\nu_i} E_{i+1,1}$ . La existencia de este segundo operador diferencial sólo era posible imponiendo unas ligaduras entre los parámetros de la matriz  $A$ , dadas en (3.22).

En este caso tomamos  $t_0 = 0$ . Evidencias computacionales muestran que esta elección de  $t_0$  parece necesaria. Encontramos que el operador diferencial

$$D = -(N-1)D_1 + D_2,$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M = \sum_{i,j=1}^N \left( \prod_{k=\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}-1} \frac{\nu_k(\alpha + N - k)}{N - k} \right) \left( \prod_{k=1}^{N-\max\{i,j\}} \frac{\nu_{N-k}(\alpha + k)}{k} \right)^2 E_{ij},$$

verifican las ecuaciones (4.1). En efecto, evaluando los coeficientes  $\tilde{F}_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , de  $D$  en  $t = 0$  se observa que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(0) &= 0, \\ \tilde{F}_1(0) &= Y - \sum_{i=1}^N (i-1)(\alpha + N - i + 1)E_{ii}, \\ \tilde{F}_0 &= \frac{(N-1)(1 + \nu_{N-1}^2)}{\nu_{N-1}^2} [J - (\alpha + J)A]. \end{aligned}$$

Considerando la estructura bidiagonal de las matrices  $\tilde{F}_2(0)$ ,  $\tilde{F}_1(0)$  y  $\tilde{F}_0$ , es fácil comprobar que se verifican las ecuaciones (4.1). Como el operador  $D$  es simétrico con respecto al peso (4.11) el Teorema 2.2.1 implica que  $D$  es también simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = W(t) + \gamma\delta(t)M, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad \gamma \geq 0.$$

Las fórmulas de estructura para la familia de polinomios  $P_{n,\gamma}$  para tamaño  $N = 2$ , así como la expresión de  $D$  y  $W_\gamma$ , fueron estudiadas en la Sección 3.2.

#### 4.2.2. El ejemplo de 1 salto

Este ejemplo en tamaño  $N \times N$ , dado en el Ejemplo 1.4.5, se puede encontrar por primera vez en [PT2]. El operador diferencial asociado de segundo orden proviene del operador de Casimir actuando sobre funciones esféricas matriciales sobre el grupo  $SU(n+1)$  (ver Sección 1.4 para más información). Para tamaño  $N = 3$  se estudiaron detalladamente sus autofunciones y operadores diferenciales de segundo orden en la Sección 3.3.

El peso matricial está dado en (1.22), en tanto que un operador diferencial de segundo orden simétrico asociado se puede encontrar en (1.23). Al igual que en la sección anterior existe un segundo operador diferencial (dado en [PR]), cuya expresión es la siguiente:

$$D_2 = t(Q_0 + Q_1 - tQ_1)\partial^2 + (-(P_0 + P_1) + tP_1)\partial^1 + (\alpha + 2N + 3k - 2)V\partial^0,$$

donde

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_{i=2}^N 3(i-1)E_{i,i-1}, \quad Q_1 = \sum_{i=1}^N (\alpha - N + 3i - 2)E_{ii}, \\ P_0 &= \sum_{i=1}^N [(\alpha + 2N - 2)(\beta + 2i - 1) - 3k(N - i) - 3(i-1)(\beta - k + i - 1)]E_{ii} \\ &\quad - \sum_{i=2}^N (i-1)(3(\beta - k + i) + N + 2\alpha - 1)E_{i,i-1}, \end{aligned}$$

$$P_1 = - \sum_{i=1}^N (\alpha - N + 3i - 2)(\alpha + \beta + N + i)E_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} 3(\beta - k + i)(N - i)E_{i,i+1}.$$

Obsérvese que los operadores van actuando a izquierda (por lo tanto es conveniente usar el producto interno (1.2)), lo que supondrá un cambio en las ecuaciones (4.1), que pasan a ser

$$\begin{aligned} M(t_0)F_2(t_0) &= 0, \\ M(t_0)F_1(t_0) &= 0, \\ M(t_0)F_0 &= F_0^*M(t_0), \end{aligned} \tag{4.12}$$

como consecuencia de usar el producto interno (1.2) en el Teorema 2.2.1.

En este caso tomamos  $t_0 = 0$ . Evidencias computacionales muestran que esta elección de  $t_0$  parece necesaria. Cuando resolvemos las ecuaciones anteriores encontramos que el operador diferencial

$$D = -(\alpha - N + 1)D_1 + D_2,$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M = \sum_{i,j=1}^N \binom{N-1}{i-1} \binom{N-1}{j-1} \frac{(\alpha + \beta - k + i + 1)^{(N-i)} (\alpha + \beta - k + j + 1)^{(N-j)}}{(\beta - k + i)^{(N-i)} (\beta - k + j)^{(N-j)}} E_{ij},$$

donde  $(x)^{(n)}$  denota el símbolo de Pochhammer definido en (3.38), verifican dichas ecuaciones. En efecto, evaluando los nuevos coeficientes  $\tilde{F}_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , de  $D$  en  $t = 0$  observamos que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(0) &= 0, \\ \tilde{F}_1(0) &= \sum_{i=2}^N 3(i-1)(\alpha + \beta - k + i)E_{i,i-1} - \sum_{i=1}^{N-1} 3(\beta - k + i)(N - i)E_{i,i+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N 3[(i-1)(\alpha + \beta - k + i) + (i-4)(\beta - k + i)]E_{ii}, \\ \tilde{F}_0 &= -3(N + k - 1) \sum_{i=1}^N (i-1)(\alpha + \beta - k + i)E_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} (N - i)(\beta - k + i)E_{i,i+1}. \end{aligned}$$

Considerando la estructura tridiagonal de las matrices  $\tilde{F}_2(0)$ ,  $\tilde{F}_1(0)$  y  $\tilde{F}_0$ , es directo comprobar que verifican las ecuaciones (4.12). Como el operador diferencial  $D$  es simétrico con respecto al peso matricial (1.22), el Teorema 2.2.1 implica que  $D$  es también simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{\alpha,\beta,k,\gamma}(t) = W_{\alpha,\beta,k}(t) + \gamma\delta(t)M(\alpha, \beta, k), \quad t \in (0, 1), \quad \alpha, \beta > -1, \quad 0 < k < \beta + 1, \quad \gamma \geq 0.$$

Para ilustrar, mostramos el caso  $N = 2$ . En este caso, el peso matricial para  $t \in (0, 1)$ ,  $\alpha, \beta > -1, 0 < k < \beta + 1$  es

$$W(t) = t^\alpha(1-t)^\beta \begin{pmatrix} kt + \beta - k + 1 & (1-t)(\beta - k + 1) \\ (1-t)(\beta - k + 1) & (1-t)^2(\beta - k + 1) \end{pmatrix},$$

y el operador diferencial y la matriz  $M$  que hace que se verifiquen las ecuaciones (4.12) son

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & t(1-t) \end{pmatrix} \partial^2 + \left[ \begin{pmatrix} -\beta + k - 1 & -\beta + k - 1 \\ \alpha + \beta - k + 2 & \alpha + \beta - k + 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & \beta - k + 1 \\ 0 & -(\alpha + \beta + 4) \end{pmatrix} \right] \partial^1 + \begin{pmatrix} 0 & (1+k)(\beta - k + 1) \\ 0 & (1+k)(\alpha + \beta - k + 2) \end{pmatrix} \partial^0,$$

y

$$M = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta - k + 2)^2}{(\beta - k + 1)^2} & \frac{\alpha + \beta - k + 2}{\beta - k + 1} \\ \frac{\alpha + \beta - k + 2}{\beta - k + 1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Una expresión de esta familia  $(P_{n,\alpha,\beta,k,\gamma})_n$  (para  $N = 2$ ) para el caso especial de  $\alpha = \beta = 0$ ,  $k = 1/2$  en términos de su fórmula de recurrencia a tres términos, así como cierta representación de la forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma} P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma}) P_{n,1},$$

con  $\alpha_{n,\gamma}$  una sucesión escalar, puede encontrarse en el Apéndice B.3.

*Nota 4.2.1.* Podría esperarse, al igual que los ejemplos que hemos introducido en esta sección, que añadiendo una delta de Dirac en un punto específico al peso matricial  $W(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}$ , con  $A$  dado en (4.4), introduciría un ejemplo, sin embargo no es cierto. La causa de esta ausencia podría estar en que los puntos límites del soporte de este peso matricial son no acotados. Esto hace que las condiciones (4.1) no tengan solución, excepto la trivial.

## 4.3. Otros ejemplos

### 4.3.1. El ejemplo de 2 saltos

Este peso matricial fue introducido en (1.24), aunque la primera vez que se mostró fue en [GPT5]. Como se vio en la Sección 3.3.2, el espacio lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 tiene dimensión (real) 4. Una base está formada por la identidad y 3 operadores diferenciales simétricos de segundo orden linealmente independientes. Cuando le añadimos una delta de Dirac en cualquier punto y tratamos de resolver las ecuaciones (4.12), se tiene que, para que haya soluciones no triviales,  $t_0$  debe ser necesariamente 0, y para este valor suceden varias cosas.

Por un lado, existen varios casos en los que sólo podemos encontrar un sólo operador diferencial asociado, como en todos los ejemplos que hemos mostrado en este capítulo. Sin embargo, existe un caso significativo donde podemos encontrar 2 operadores diferenciales comunes de segundo orden simétricos con respecto al peso matricial modificado con una delta de Dirac localizada en  $t_0 = 0$ .

Para este caso, la matriz  $M$  semidefinida positiva (y singular)

$$\begin{aligned}
M = & E_{44} + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)^2(\alpha + \beta - k_2 + 2)^2}{(\beta - k_1 + 2)^2(\beta - k_2 + 1)^2} E_{11} + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)^2(k_1 - k_2 - 2)^2}{(\beta - k_1 + 2)^2(k_1 - k_2 - 1)^2} E_{22} \\
& + \frac{(\alpha + \beta - k_2 + 2)^2(k_1 - k_2)^2}{(\beta - k_2 + 1)^2(k_1 - k_2 - 1)^2} E_{33} + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + \beta - k_2 + 2)}{(\beta - k_1 + 2)(\beta - k_2 + 1)} (E_{14} + E_{41}) \\
& + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + \beta - k_2 + 2)^2(k_1 - k_2)}{(\beta - k_1 + 2)(\beta - k_2 + 1)^2(k_1 - k_2 - 1)} (E_{13} + E_{31}) \\
& + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)^2(\alpha + \beta - k_2 + 2)(k_1 - k_2 - 2)}{(\beta - k_1 + 2)^2(\beta - k_2 + 1)(k_1 - k_2 - 1)} (E_{12} + E_{21}) \\
& + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(\alpha + \beta - k_2 + 2)(k_1 - k_2 - 2)(k_1 - k_2)}{(\beta - k_1 + 2)(\beta - k_2 + 1)(k_1 - k_2 - 1)^2} (E_{23} + E_{32}) \\
& + \frac{(\alpha + \beta - k_1 + 3)(k_1 - k_2 - 2)}{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2 - 1)} (E_{24} + E_{42}) + \frac{(\alpha + \beta - k_2 + 2)(k_1 - k_2)}{(\beta - k_2 + 1)(k_1 - k_2 - 1)} (E_{34} + E_{43}),
\end{aligned}$$

y los operadores diferenciales de segundo orden  $D_2$  y  $D_3$  introducidos en (3.52) y (3.53), respectivamente, verifican las condiciones (4.12). Como estos dos eran simétricos con respecto a  $W$ , se tiene, por el Teorema 2.2.1, que también son simétricos con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = W(t) + \gamma\delta(t)M, \quad t \in (0, 1) \quad \gamma \geq 0.$$

#### 4.3.2. El peso $e^{-t^2} e^{At^2} e^{A^*t^2}$ , $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , para operadores de orden 4

Este peso matricial fue considerado por primera vez en la Sección 5.2 de [DG1] y fue estudiado en detalle en [DG2]. El peso matricial tiene la siguiente estructura:

$$W_a(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t} = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 t^4 & at^2 \\ at^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Existe sólo un operador diferencial de segundo orden (sin contar a la identidad). En este caso, las ecuaciones (4.1) no dan soluciones (con  $M \neq 0$ ) para ningún valor de  $t_0$  dado que hay un sólo operador y  $F_2 = I$ . Sin embargo, cuando calculamos los operadores de orden 4, aparecen 4 nuevos linealmente independientes (módulo operadores de menor orden). Al tener más libertad, las nuevas ecuaciones

$$\begin{aligned}
F_4(t_0)M(t_0) &= 0, \\
F_3(t_0)M(t_0) &= 0, \\
F_2(t_0)M(t_0) &= 0, \\
F_1(t_0)M(t_0) &= 0, \\
F_0M(t_0) &= M(t_0)F_0^*,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

sí admiten solución no trivial, pero el punto  $t_0$  debe estar localizado en 0. Para ese caso, el operador diferencial de cuarto orden

$$D = \partial^4 F_4(t) + \partial^3 F_3(t) + \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t),$$

donde

$$\begin{aligned} F_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{\omega_a^\pm}{4} + \frac{a}{16} - \frac{a}{8}t^2 & -\frac{1}{8} - \frac{a(a-8\omega_a^\pm)}{16}t^2 + \frac{a^2}{8}t^4 \\ -\frac{1}{8} & \frac{\omega_a^\pm}{4} + \frac{a}{8}t^2 \end{pmatrix}, \\ F_3 &= \begin{pmatrix} (-\frac{5a}{4} + \omega_a^\pm)t & (1 + 2a\omega_a^\pm)t + \frac{a(5a-8\omega_a^\pm)}{4}t^3 \\ 0 & -\omega_a^\pm t \end{pmatrix}, \\ F_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}(17a - 20\omega_a^\pm + \frac{8}{a}) + \omega_a^\pm t^2 & \frac{1}{4}(12a\omega_a^\pm + 5 + \frac{8\omega_a^\pm}{a}) + (-1 + 9a\omega_a^\pm + \frac{17a^2}{8})t^2 \\ -\frac{1}{4}(1 - \frac{8\omega_a^\pm}{a}) & -\frac{1}{2}(\omega_a^\pm - \frac{2}{a}) + (-\omega_a^\pm + \frac{a}{4})t^2 \end{pmatrix}, \\ F_1 &= \begin{pmatrix} 2(2\omega_a^\pm + \frac{1}{a})t & -(1 + 8\omega_a^\pm a + \frac{8\omega_a^\pm}{a})t \\ 0 & -\frac{2}{a}t \end{pmatrix}, \\ F_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + 2\omega_a^\pm + \frac{8\omega_a^\pm}{a^2}) & 1 - \frac{4\omega_a^\pm}{a} - a\omega_a^\pm + \frac{2}{a^2} \\ \frac{2}{a^2} & -\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + 2\omega_a^\pm + \frac{8\omega_a^\pm}{a^2}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M = M(a) = \begin{pmatrix} (\omega_a^\pm)^2 & \omega_a^\pm \\ \omega_a^\pm & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\omega_a^\pm = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{4},$$

verifican dichas ecuaciones. Nótese ahora que es necesario imponer que  $|a| \geq 4$  para que  $M$  sea semidefinida positiva.

Como el operador  $D$  de orden 4 es simétrico con respecto a  $W_a$ , por el Teorema 2.2.1 también será simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{a,\gamma}(t) = W_a(t) + \gamma\delta(t)M, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \gamma \geq 0.$$

#### 4.3.3. El peso $t^\alpha e^{-t} e^{\Lambda t} e^{\Lambda^* t}$ , $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , para operadores de orden 4

Este peso matricial fue considerado por primera vez en la Sección 6.1 de [DG1] y ha sido estudiado en [DL6] y en [CG2]. El peso matricial tiene la siguiente estructura:

$$W_{a,\alpha}(t) = t^\alpha e^{-t} e^{\Lambda t} e^{\Lambda^* t} = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + a^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1.$$

Aparece en [CG2] que, al igual que el ejemplo anterior, existe un sólo operador de segundo orden (sin contar a la identidad) y 4 operadores diferenciales linealmente independientes de orden 4 (módulo operadores de menor orden). Al igual que antes podemos generar un ejemplo cuando  $t_0 = 0$ .

Resolviendo las ecuaciones (4.13), encontramos un operador diferencial simétrico de cuarto orden  $D$  (que omitimos por su extensión) y una matriz semidefinida positiva (y singular)

$$M = M(a) = \begin{pmatrix} 1 & v_{a,\alpha}^\pm \\ v_{a,\alpha}^\pm & (v_{a,\alpha}^\pm)^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$v_{a,\alpha}^\pm = \frac{a(1+\alpha) \pm \sqrt{a^2(1+\alpha)^2 - 4}}{2}.$$

De nuevo, para que  $M$  sea semidefinida positiva, es necesario imponer  $|a| \geq \frac{2}{1+\alpha}$ .

Como consecuencia, usando el Teorema 2.2.1,  $D$  es simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales

$$W_{a,\alpha,\gamma}(t) = W_{a,\alpha}(t) + \gamma\delta(t)M, \quad t \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad \gamma \geq 0.$$

## Capítulo 5

# El álgebra de operadores diferenciales

*Cuando deseamos probar una hipótesis, ¿qué debemos hacer?  
No podemos verificar todas sus consecuencias, pues serían  
infinitas en número; nos contentamos con verificar algunas  
y, si tenemos éxito decimos que la hipótesis se ha confirmado.*

HENRI POINCARÉ

El objetivo principal de este capítulo es estudiar las álgebras de operadores diferenciales asociadas a los pesos matriciales introducidos en el Capítulo 3. Concretamente, nos centraremos en el peso matricial  $W_{\alpha, \alpha}$  de tamaño  $2 \times 2$  (véase (3.35)), el ejemplo de 1 salto de tamaño  $3 \times 3$  de la Sección 3.3.1 y el ejemplo de 2 saltos de tamaño  $4 \times 4$  de la Sección 3.3.2.

Se usarán en este capítulo los conceptos definidos en la Sección 1.3, donde se estudiaba de manera general esta álgebra. Para un peso matricial  $W$  y una familia fija de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$ , el conjunto

$$\mathcal{D}(W) = \{D \in \mathfrak{D} : P_n D = \Lambda_n(D) P_n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (5.1)$$

donde  $D$  es un operador diferencial de cualquier orden y  $\Lambda_n(D) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  para todo  $n$ , es un espacio vectorial sobre los números complejos y una álgebra con la composición de operadores diferenciales.

Se denotará por  $\mathcal{D}_k$  al espacio de operadores diferenciales de orden menor o igual que  $k$ . El álgebra  $\mathcal{D}(W)$  se descompone pues de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}(W) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}_k,$$

donde  $\mathcal{R}_k$  es un subespacio de  $\mathcal{D}_k$  tal que  $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k-1} \oplus \mathcal{R}_k$ .

El álgebra de operadores diferenciales asociada a los polinomios ortogonales clásicos de Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel es trivial. Se ha probado recientemente (véase [M2]),

que si  $\mathcal{U}$  es un operador diferencial de orden  $2k$  tal que  $\mathcal{U}p_n = \lambda_n p_n$ , entonces existen  $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, k$ , tal que

$$\mathcal{U} = \sum_{j=0}^k c_j \mathcal{F}^j,$$

donde  $\mathcal{F}$  es el operador diferencial clásico de segundo orden tal que  $\mathcal{F}p_n = \lambda_n p_n$ . Luego el álgebra es isomorfa al anillo de polinomios con coeficientes complejos en una variable. También es conocido que no existen operadores de orden impar en ninguna de estas álgebras escalares (véase [Kr1]).

La situación en el caso matricial es bastante diferente, ya que existen álgebras que pueden ser no conmutativas y estar generadas por varios elementos, como se verá en los ejemplos de este capítulo. La dificultad en el caso matricial ha hecho que tan sólo haya podido demostrarse la estructura de una de estas álgebras en [T3] y usando propiedades muy particulares del peso matricial (en concreto para  $W_a = \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 t^2 & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix} e^{-t^2}$ )

La finalidad de esta capítulo es conjeturar sobre evidencias computacionales qué estructura tiene el álgebra para los ejemplos del Capítulo 3. Para ello trataremos de expresar  $\mathcal{D}(W)$  como  $\langle \mathcal{A} \mid \mathfrak{R} \rangle$ , donde  $\mathcal{A}$  es un conjunto de generadores y  $\mathfrak{R}$  un conjunto de relaciones entre los generadores.

El estudio sistemático de esta álgebra requiere herramientas más sofisticadas relacionadas con representación de álgebras no conmutativas. Un camino en esta dirección podría ser el uso de *bases de Gröbner no conmutativas*. Más información sobre este tema puede encontrarse en [Mo, U].

*Nota 5.0.1.* No queremos dejar de apuntar, como se menciona en [CG1], que en el caso escalar existe una potente teoría iniciada por Burchall y Chaundy alrededor de 1920 que asocia al álgebra (conmutativa)  $\mathcal{D}(W)$  una curva algebraica y un fibrado vectorial sobre él. El conjunto de autofunciones no tiene por qué ser polinomios. Un par de interesantes referencias pueden encontrarse en [Kri, Mum].

## 5.1. El peso $W_{\alpha,a}$

Sea  $W_{\alpha,a}$  el siguiente peso matricial:

$$W_{\alpha,a}(t) = t^\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} t(1 + |a|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \alpha > -1, \quad t \in (0, +\infty),$$

ya introducido en la Sección 3.1.2. En dicha sección ya se dieron algunas fórmulas de estructura y, sobre todo, la familia de polinomios ortogonales matriciales con la que trabajaremos, denotada por  $(\mathcal{P}_{n,\alpha,a})_n$ , y expresada en términos de una fórmula de Rodrigues.

En la siguiente tabla, obtenida por computaciones directas, se muestra el número de nuevos operadores diferenciales linealmente independientes (módulo operadores diferenciales de menor orden) que aparecen a medida que se incrementa el orden de los operadores que se estudian:

k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8
1	0	2	2	2	2	2	2	2

El operador diferencial de orden 0 no es más que la identidad, es decir  $\mathcal{R}_0 = \langle cI \rangle$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Se observa que no existen operadores diferenciales de primer orden ( $\mathcal{R}_1 = \langle 0 \rangle$ ). Una base de operadores diferenciales de segundo orden (simétricos) está dada por

$$D_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha + 2 - t & at \\ 0 & \alpha + 1 - t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1 & a(1 + \alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -at^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha + 2 & -\frac{1}{a}(1 + |a|^2(\alpha + 2))t \\ \frac{1}{a} & -t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1}{|a|^2} & -\frac{1 + \alpha}{\bar{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como ya se vio en la Sección 3.2, luego  $\mathcal{R}_2 = \langle D_1, D_2 \rangle$ . Los respectivos autovalores (asociados a la familia  $(\mathcal{P}_{n, \alpha, a})_n$ ) están dados por las matrices diagonales

$$\Lambda_n(D_1) = \begin{pmatrix} -n - 1 & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_n(D_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|a|^2} & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ahora viene algo sorprendente, ya que existen dos nuevos operadores diferenciales de tercer orden, un fenómeno que es imposible en el caso escalar. Este es el primer peso matricial no reducible a escalares del que se conoce que tiene operadores diferenciales de orden impar (véase la definición al final de la Sección 1.1). Una base de  $\mathcal{R}_3$  está dada por

$$D_3 = \partial^3 \begin{pmatrix} -|a|^2 t^2 & at^2(1 + |a|^2 t) \\ -\bar{a}t & |a|^2 t^2 \end{pmatrix} \\ + \partial^2 \begin{pmatrix} -t(2 + |a|^2(\alpha + 5)) & at(2\alpha + 4 + t(1 + |a|^2(\alpha + 5))) \\ -\bar{a}(\alpha + 2) & t(2 + |a|^2(\alpha + 2)) \end{pmatrix} \\ + \partial^1 \begin{pmatrix} t - 2(\alpha + 2)(1 + |a|^2) & \frac{|a|^2(\alpha + 1)(\alpha + 2) + t(1 + 2|a|^2(1 + |a|^2(\alpha + 2)))}{\bar{a}} \\ -\frac{1}{a} & 2\alpha + 2 - t \end{pmatrix} \\ + \partial^0 \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\frac{1}{\bar{a}}(1 + \alpha)(|a|^2\alpha - 1) \\ \frac{1}{a} & -(1 + \alpha) \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned}
D_4 = & \partial^3 \begin{pmatrix} |a|^2 t^2 & at^2(-1 + |a|^2 t) \\ \bar{a}t & -|a|^2 t^2 \end{pmatrix} \\
& + \partial^2 \begin{pmatrix} |a|^2 t(\alpha + 5) & -at(-2\alpha - 4 + t(3 + |a|^2(\alpha + 5))) \\ \bar{a}(\alpha + 2) & -|a|^2 t(\alpha + 2) \end{pmatrix} \\
& + \partial^1 \begin{pmatrix} 2|a|^2(\alpha + 2) + t & a(\alpha + 1)(\alpha + 2) - t\left(\frac{1}{\bar{a}} + 2a(2 + |a|^2)(\alpha + 2)\right) \\ -\frac{1}{a} & -t \end{pmatrix} \\
& + \partial^0 \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\frac{1}{\bar{a}}(1 + \alpha)(1 + |a|^2(\alpha + 2)) \\ \frac{1}{a} & -(1 + \alpha) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Los correspondientes autovalores están dados por

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(D_3) &= \frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} 0 & a(1 + \alpha + n)\lambda_{n,a}\lambda_{n+1,a} \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, \\
\Lambda_n(D_4) &= \frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} 0 & -a(1 + \alpha + n)\lambda_{n,a}\lambda_{n+1,a} \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,
\end{aligned}$$

donde

$$\lambda_{n,a} = 1 + n|a|^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

El operador  $D_3$  es simétrico (autoadjunto) porque verifica las ecuaciones de simetría de tercer orden dadas al final de la Sección 2.1 con sus correspondientes condiciones de frontera. El operador  $D_4$  no es simétrico, pero es anti-simétrico, o sea que  $\imath D_4$  es simétrico, con  $\imath$  la unidad imaginaria.

*Nota 5.1.1.* Los coeficientes líderes  $F_{3,i}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , de  $D_3$  y  $D_4$ , se pueden expresar como

$$F_{3,1}(t) = t \left( At - \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \text{ad}_{\lambda}^n A^* \right), \quad F_{3,2}(t) = t \left( At + \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \text{ad}_{\lambda}^n A^* \right), \quad (5.3)$$

donde  $A$  está dada en (3.4). De las anteriores expresiones es fácil ver (usando que  $t^{-\frac{1}{2}J} A t^{\frac{1}{2}J} = t^{-\frac{1}{2}J} A$ ,  $t^{-\frac{1}{2}J} A^* t^{\frac{1}{2}J} = t^{\frac{1}{2}J} A^*$  y  $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \text{ad}_{\lambda}^n A^* e^{At} = e^{At} A^*$ , con  $J$  dado en (3.5)) que

$$t^{-\frac{1}{2}J} e^{-At} (F_{3,1}) e^{At} t^{\frac{1}{2}J} = t^{-\frac{1}{2}J} (At^2 - tA^*) t^{\frac{1}{2}J} = t^{\frac{3}{2}}(A - A^*),$$

implicando que la primera de las ecuaciones de simetría de orden 3,  $F_3 W + W F_3^* = 0$ , se verifica, ya que  $t^{\frac{3}{2}}(A - A^*)$  es siempre una matriz anti-hermítica para todo  $t > 0$ . El mismo argumento sirve para  $F_{3,2}$ .

Los coeficientes (5.3) tienen, en realidad, un carácter general, y constituyen un posible punto de partida para la resolución de las ecuaciones de simetría de orden impar para este ejemplo.

A partir de orden 4, todo parece indicar que el resto de operadores diferenciales puede generarse en función de los 5 operadores diferenciales introducidos hasta ahora (la identidad  $I$  y  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ). Conviene, sin embargo, hacer un cambio de base para facilitar los cálculos y tener relaciones más compactas entre los operadores diferenciales. La nueva base será  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , donde

$$\begin{aligned} L_1 &= D_1 - \frac{1}{|a|^2} I, \\ L_2 &= 2D_2 - D_1 - \frac{1}{|a|^2} I, \\ L_3 &= D_3, \\ L_4 &= D_4. \end{aligned}$$

El correspondiente sistema de autovalores es ahora (recuérdese la definición de  $\lambda_{n,\alpha}$  dada en (5.2)), para  $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \Lambda_n(L_1) &= -\frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} \lambda_{n+1,\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda_{n,\alpha} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_n(L_2) &= \frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} \lambda_{n+1,\alpha} & 0 \\ 0 & -\lambda_{n,\alpha} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_n(L_3) &= \frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} 0 & a(1 + \alpha + n)\lambda_{n,\alpha}\lambda_{n+1,\alpha} \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_n(L_4) &= \frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} 0 & -a(1 + \alpha + n)\lambda_{n,\alpha}\lambda_{n+1,\alpha} \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Evidencias computacionales permiten concluir que una posible base para los operadores de orden par  $2k$  (conmutativos entre sí) sería  $\{L_1^k, L_1^{k-1}L_2\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , mientras que para los operadores de orden impar (no conmutativos entre sí ni con los de orden par) sería  $\{L_1^k L_3 - L_3 L_1^k, L_2^k L_3 + L_3 L_2^k\}$  para  $\mathcal{R}_{4k-1}$ , y  $\{L_1^k L_3 + L_3 L_1^k, L_2^k L_3 - L_3 L_2^k\}$  para  $\mathcal{R}_{4k+1}$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , respectivamente, y  $\mathcal{R}_1 = \langle 0 \rangle$ .

Los generadores  $\{I, L_1, L_2, L_3, L_4\}$  satisfacen el siguiente conjunto de interesantes relaciones:

1. Cuatro relaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} L_1^2 &= L_2^2, \\ L_3^2 &= -L_4^2, \\ L_1 L_2 &= L_2 L_1, \\ L_3 L_4 &= -L_4 L_3. \end{aligned}$$


---

2. Cuatro relaciones permutacionales:

$$\begin{aligned} L_1 L_3 - L_2 L_4 &= 0, \\ L_2 L_3 - L_1 L_4 &= 0, \\ L_3 L_2 + L_4 L_1 &= 0, \\ L_3 L_1 + L_4 L_2 &= 0. \end{aligned}$$

3. Cuatro relaciones de *segundo grado*:

$$\begin{aligned} L_3 &= L_1 L_4 - L_4 L_1, \\ L_4 &= L_1 L_3 - L_3 L_1, \\ L_3 &= L_2 L_3 + L_3 L_2, \\ L_4 &= L_2 L_4 + L_4 L_2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

4. Por último, un par de relaciones de *tercer grado*:

$$\begin{aligned} L_1 L_3^2 &= L_3^2 L_1, \\ L_2 L_3^2 &= L_3^2 L_2. \end{aligned}$$

La segunda ecuación en (5.4) permite deshacernos del operador  $L_4$  como posible generador del álgebra  $\mathcal{D}(W)$ .

Por último presentamos una relación más que permite conjeturar que el álgebra completa  $\mathcal{D}(W)$  está generada por  $\{I, L_1, L_3\}$ , que es la siguiente:

$$\begin{aligned} &[|a|^2(2 + \alpha) - 1] [ |a|^2(\alpha - 1) - 1 ] L_2 = 2|a|^2 [ |a|^2(2\alpha + 1) - 2 ] L_1 \\ &\quad + [ |a|^4(\alpha^2 + \alpha - 5) - |a|^2(2\alpha + 1) + 1 ] L_1^2 \\ &\quad - 2|a|^2 [ |a|^2(2\alpha + 1) - 2 ] L_1^3 + 3|a|^4 L_1^4 \\ &\quad - \frac{1}{2} [ |a|^2(2\alpha + 1) - 2 ] L_3^2 + \frac{15}{2} |a|^2 L_3^2 L_1 - \frac{9}{2} |a|^2 L_3 L_1 L_3. \end{aligned}$$

Nótese que existen ciertos valores excepcionales  $\alpha = 1 + \frac{1}{|a|^2}$  y  $\alpha = -2 + \frac{1}{|a|^2}$  para los que la parte izquierda de la fórmula anterior se anula. En estos casos, conjeturamos que el álgebra está generada por  $\{I, L_1, L_2, L_3\}$ .

*Nota 5.1.2.* El estudio del álgebra de operadores diferenciales asociada al peso  $W_{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_{N-1}}$  de la Sección 3.1 para tamaño arbitrario  $N$  no se ha abordado en detalle, pero la siguiente tabla muestra, informativamente, el número de operadores diferenciales linealmente independientes (módulo operadores de menor orden) que aparecen a medida que se incrementa el orden y la dimensión matricial:

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8
N = 2	1	0	2	2	2	2	2	2	2
N = 3	1	0	2	0	3	4	5	6	16
N = 4	1	0	2	0	3	0	4	6	9

Es significativo que para los casos  $N = 3, 4$ , no existen operadores de orden 3, pero sí de orden 5 y 7, respectivamente. La causa podría estar en que en esos casos los coeficientes (5.3) son polinomios matriciales de grado como mínimo 4 (debido al hecho de que  $A$  es una matriz nilpotente de orden  $N$ ), y por lo tanto no podría ser el coeficiente líder de un operador de tercer orden.<sup>1</sup>

## 5.2. El ejemplo de 1 salto

Tanto en esta como en la siguiente sección, estudiaremos el álgebra de operadores diferenciales asociados a los ejemplos que provienen de teoría de representación de grupos, y que se introdujeron en la Sección 3.3. Se recuerda que en estos dos casos los operadores actuaban a izquierda y los autovalores venían multiplicados a derecha, como consecuencia de usar el producto interno (1.2). Es por ello que el álgebra se define ahora como

$$\mathcal{D}(W) = \{D \in \mathfrak{D} : DP_n^* = P_n^* \Lambda_n(D), n = 0, 1, 2, \dots\}. \tag{5.5}$$

No obstante, todas las propiedades que caracterizan al álgebra (5.1) de la Sección 1.3 se aplican de la misma manera al álgebra (5.5).

El peso matricial  $W$  para el ejemplo de 1 salto (de tamaño  $3 \times 3$ ) viene dado por

$$W = t^\alpha(1 - t)^\beta Z(t), \quad t \in (0, 1), \quad \alpha, \beta > -1, \quad 0 < k < \beta + 1,$$

donde  $Z(t)$  es polinomio matricial de grado 4 dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta - k + 1)^{(2)} + k(\beta - k + 1)t + \frac{1}{2}(k)^{(2)}t^2 & (\beta - k + 1)(1 - t)(\beta - k + 2 + kt) & \frac{1}{2}(\beta - k + 1)^{(2)}(1 - t)^2 \\ (\beta - k + 1)(1 - t)(\beta - k + 2 + kt) & (\beta - k + 1)(1 - t)^2(2\beta - 2k + 4 + kt) & (\beta - k + 1)^{(2)}(1 - t)^3 \\ \frac{1}{2}(\beta - k + 1)^{(2)}(1 - t)^2 & (\beta - k + 1)^{(2)}(1 - t)^3 & \frac{1}{2}(\beta - k + 1)^{(2)}(1 - t)^4 \end{pmatrix}.$$

Como siempre,  $(x)^{(n)}$  denota el símbolo de Pochhammer. La familia de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  con respecto a  $W$  que se usa en esta sección está dada explícitamente en el Apéndice A.1 y su coeficiente líder  $A_n$  viene dado por la matriz triangular inferior

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \frac{n + \alpha + \beta - k + 2}{\beta - k + 1} & 0 \\ 1 & -\frac{n + \alpha + \beta - k + 3}{\beta - k + 1} & \frac{(n + \alpha + \beta - k + 3)^{(2)}}{(\beta - k + 1)^{(2)}} \end{pmatrix}.$$

En la siguiente tabla, obtenida por computaciones directas, se muestra el número de nuevos operadores diferenciales linealmente independientes (módulo operadores diferenciales de menor orden) que aparecen a medida que se incrementa el orden de los operadores que se estudian:

k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8	k = 9	k = 10
1	0	2	0	3	0	3	0	3	0	3

<sup>1</sup>Esta sección forma parte del artículo [DdI].

El operador diferencial de orden 0 no es más que la identidad, es decir  $\mathcal{R}_0 = \langle cI \rangle$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Se observa que no hay operadores diferenciales de orden impar, o sea,  $\mathcal{R}_{2k+1} = \langle 0 \rangle$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Una base para los operadores de segundo orden está dada por  $\{D_1, D_2\}$ , donde

$$D_1 = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0,$$

con

$$\begin{aligned} F_2(t) &= t(1-t)I, \\ F_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha+1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix}, \\ F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-k+1) & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k+2) & \beta-k+2 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta-k+3) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$D_2 = G_2(t)\partial^2 + G_1(t)\partial^1 + G_0(t)\partial^0,$$

con

$$\begin{aligned} G_2(t) &= \begin{pmatrix} t(1-t) & 0 & 0 \\ t/2 & t(1-t)/2 & 0 \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}, \\ G_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+\beta-k+4 & \beta-k+1 & 0 \\ -(\alpha+\beta-k+4)/2 & (\alpha+4)/2 & (\beta-k+2)/2 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k+5) & -(\beta-k+2) \end{pmatrix} \\ &\quad - t \begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & \beta-k+1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta+5)/2 & (\beta-k+2)/2 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix}, \\ G_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -k(\beta-k+1) & 0 \\ 0 & k(\alpha+\beta-k+2)/2 & -k(\beta-k+2)/2 \\ 0 & 0 & k(\alpha+\beta-k+3) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como ya se mencionó al final de la Sección 3.3.1. Sus respectivos autovalores vienen dados por las matrices diagonales ( $n = 0, 1, \dots$ )

$$\Lambda_n(D_1) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} t_1 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3), \\ t_2 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) - (\alpha + \beta - k + 2), \\ t_3 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - 2(\alpha + \beta - k + 3), \end{aligned}$$

y

$$\Lambda_n(D_2) = \begin{pmatrix} -n^2 - n(\alpha + \beta + 3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-n^2 - n(\alpha + \beta + 4) + k(\alpha + \beta - k + 2)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k(\alpha + \beta - k + 3) \end{pmatrix}.$$

Esto significa que  $D_1$  y  $D_2$  conmutan entre sí.

Cuando estudiamos los operadores diferenciales de mayor orden, se observa que todos ellos siguen teniendo autovalores diagonales, con lo que nos hace sospechar que todos ellos puedan obtenerse en términos de la base  $\{I, D_1, D_2\}$ . En efecto, para operadores de orden 4, se comprueba directamente que el conjunto formado por los 3 elementos  $\{D_1^2, D_2^2, D_1D_2\}$  es linealmente independiente, con lo que constituye una base de  $\mathcal{R}_4$ . Además, es un hecho general que el conjunto formado por los 3 elementos  $\{D_1^k, D_2^k, D_1^{k-1}D_2\}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , es linealmente independiente, con lo tenemos un candidato para una base del conjunto  $\mathcal{R}_{2k}$ ,  $k = 2, 3, \dots$

Ahora dirigimos nuestra atención a buscar relaciones entre los generadores. Como  $D_1$  y  $D_2$  conmutan entre sí, se obtiene la base para  $\mathcal{R}_4$  propuesta arriba. Sin embargo, para  $\mathcal{R}_6$ , al estar generado de nuevo por 3 elementos, nos hace pensar que el operador  $D_1D_2^2$  tenga que obtenerse como combinación lineal de todos los operadores diferenciales introducidos hasta ese momento, es decir, que existan números complejos  $s_1, s_2, \dots, s_9$  tal que

$$s_1I + s_2D_1 + s_3D_2 + s_4D_1^2 + s_5D_2^2 + s_6D_1D_2 + s_7D_1^3 + s_8D_2^3 + s_9D_1^2D_2 = D_1D_2^2. \quad (5.6)$$

Esto es cierto y esos coeficientes son

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, \\ s_2 &= -\frac{1}{3}k(k+1)(\alpha + \beta - k + 3)(\alpha + \beta - k + 2), \\ s_3 &= \frac{1}{3}k(k+1)(\alpha + \beta - k + 3)(\alpha + \beta - k + 2), \\ s_4 &= -\frac{1}{3}k(\alpha + \beta - k + 3), \\ s_5 &= -\frac{1}{3}(\alpha + \beta + 2) - k(\alpha + \beta - k + 1) - \frac{4}{3}k, \\ s_6 &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + 2) + \frac{4}{3}k(\alpha + \beta - k + 1) + 2k, \\ s_7 &= 0, \quad s_8 = \frac{2}{3}, \quad s_9 = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sin embargo, ahora ocurre algo sorprendente: si sustituimos (5.7) en (5.6) se obtiene la siguiente factorización:

$$(D_1 - D_2)(D_2 - k(\alpha + \beta - k + 3)I)(D_1 - 2D_2 + (1 + k)(\alpha + \beta - k + 2)I) = 0. \quad (5.8)$$

La causa por la que aparece esta relación se puede razonar considerando que el álgebra generada por  $D_1$  y  $D_2$  es isomorfa al cociente de  $\mathbb{C}[x, y]$  (el álgebra de polinomios en

dos variables conmutativas) con el ideal de polinomios que satisfacen  $p(D_1, D_2) = 0$ . A raíz del isomorfismo entre operadores diferenciales y correspondientes autovalores eso es equivalente a que

$$\Lambda_n(p(D_1, D_2)) = p(\Lambda_n(D_1), \Lambda_n(D_2)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como las matrices  $\Lambda_n(D_1)$  y  $\Lambda_n(D_2)$  son diagonales con autovalores  $t_1(n)$ ,  $t_2(n)$ ,  $t_3(n)$  y  $r_1(n) = t_1(n)$ ,  $r_2(n) = \frac{1}{2}(t_2(n) + (k+1)(\alpha + \beta - k + 2))$ ,  $r_3(n) = k(\alpha + \beta - k + 3)$ , respectivamente, es directo deducir 3 polinomios incluidos en el ideal en cuestión, que son

$$\begin{aligned} x - y & \text{ de la entrada } (1, 1), \\ x - 2y + (1+k)(\alpha + \beta - k + 2) & \text{ de la entrada } (2, 2), \\ y - k(\alpha + \beta - k + 3) & \text{ de la entrada } (3, 3), \end{aligned}$$

que son precisamente los factores que aparecen en nuestra relación (5.8) reemplazando  $x, y$  por  $D_1, D_2$ .

Es importante la observación de que sólo se anula el producto de los tres factores a la vez, y no ninguno de los productos de un número menor de factores.

En resumen, conjeturamos, a raíz de las evidencias computacionales, que el álgebra  $\mathcal{D}(W)$  es isomorfa al cociente del álgebra de polinomios en dos variables conmutativas con el ideal generado por la relación (5.8).

*Nota 5.2.1.* El estudio del álgebra de operadores diferenciales asociado al peso matricial (1.22) de dimensión matricial arbitraria (la generalización del peso estudiado en esta sección) no se ha abordado en detalle, pero la siguiente tabla muestra, informativamente, el número de operadores diferenciales linealmente independientes (módulo operadores de menor orden) que aparecen a medida que se incrementa el orden y la dimensión matricial:

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8
N = 2	1	0	2	0	2	0	2	0	2
N = 3	1	0	2	0	3	0	3	0	3
N = 4	1	0	2	0	3	0	4	0	4
N = 5	1	0	2	0	3	0	4	0	5

Se observa que siempre existen dos operadores diferenciales de segundo orden que conmutan entre sí. La relación que se obtiene ahora es el producto de  $N$  factores lineales. Se puede encontrar más información sobre estas relaciones para tamaño general en [PR]. También se observa, para cada  $N$ , que el número de operadores diferenciales que van apareciendo se estabiliza en  $N$ , para órdenes suficientemente grandes.<sup>2</sup>

### 5.3. El ejemplo de 2 saltos

El estudio del álgebra de operadores en este ejemplo es, sin duda, el que más dificultades tiene de computación y comportamiento.

<sup>2</sup>Esta sección forma parte del artículo [GdI1].

El correspondiente peso matricial  $W$  (de tamaño  $4 \times 4$ ) está descrito al final del Ejemplo 1.4.6.

La familia de polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_n$  con respecto a  $W$  que usaremos en esta sección está dada explícitamente en el Apéndice A.2, y su coeficiente líder viene dado por la matriz triangular inferior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{(k_1 - k_2 - 1)(n + 2 + \beta + \alpha - k_2)}{(k_2 - k_1 + 2)(\beta + 1 - k_2)} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{(n + 3 + \beta + \alpha - k_1)(k_2 - k_1 + 1)}{(k_1 - k_2)(\beta + 2 - k_1)} & 0 \\ 1 & -\frac{n + 3 + \beta + \alpha - k_2}{\beta + 1 - k_2} & -\frac{n + 4 + \beta + \alpha - k_1}{\beta + 2 - k_1} & \frac{(n + 3 + \beta + \alpha - k_2)(n + 4 + \beta + \alpha - k_1)}{(\beta + 1 - k_2)(\beta + 2 - k_1)} \end{pmatrix}.$$

En la siguiente tabla, obtenida por computaciones directas, se muestra el número de nuevos operadores diferenciales linealmente independientes (módulo operadores diferenciales de menor orden) que aparecen a medida que se incrementa el orden de los operadores que se estudian:

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
1	0	3	0	6	0	6	0	6	0	6

El operador diferencial de orden 0 no es más que la identidad, es decir  $\mathcal{R}_0 = \langle cI \rangle$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Se observa que, al igual que en el ejemplo de 1 salto, no hay operadores diferenciales de orden impar, o sea,  $\mathcal{R}_{2k+1} = \langle 0 \rangle$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Una base para los operadores de segundo orden está dada por  $\{D_1, D_2, D_3\}$ , donde  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ , para evitar volverlos a escribir, están dados en (3.51), (3.52) y (3.53), respectivamente. Recordamos sus autovalores ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$\Lambda_n(D_1) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} t_1 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 3), \\ t_2 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) - (\alpha + \beta - k_2 + 2), \\ t_3 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 4) - (\alpha + \beta - k_1 + 3), \\ t_4 &= -n^2 - n(\alpha + \beta + 5) - (2\alpha + 2\beta - k_1 - k_2 + 6), \end{aligned}$$

$$\Lambda_n(D_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(n+k_1+1)(n+\alpha+\beta-k_1+3)(k_1-k_2-1)}{k_1-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(n+k_1+1)(n+\alpha+\beta-k_1+4) \end{pmatrix},$$

y

$$\Lambda_n(D_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(n+k_2+2)(n+\alpha+\beta-k_2+2)}{k_1-k_2-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n+k_1+1)(n+\alpha+\beta-k_1+3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n \end{pmatrix},$$

donde

$$\omega_n = n^2 + n(\alpha + \beta + 5) + k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 2\alpha + 2\beta - k_2 + 6.$$

Como consecuencia, al ser los tres autovalores diagonales, todos los operadores de orden 2 conmutan entre sí. Al incrementar el orden del operador diferencial no se pueden obtener todos como combinación lineal de los operadores de segundo orden, como ocurría en el ejemplo de 1 salto, ya que a partir de orden 4, van a aparecer operadores que no conmutan con los de segundo orden.

Para poder dar un candidato a base de  $\mathcal{R}_{2k}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , será necesario dividirlos en conmutativos y no conmutativos. Se observa que para cada  $k = 2, 3, \dots$  aparecen cuatro operadores que conmutan entre sí y dos operadores extra que no conmutan entre sí, ni con otro elemento en la base.

Denotemos por E y F a los dos operadores diferenciales de orden 4 que no conmutan:

$$E = J_4(t)\partial^4 + J_3(t)\partial^3 + J_2(t)\partial^2 + J_1(t)\partial^1 + J_0(t)\partial^0,$$

$$F = K_4(t)\partial^4 + K_3(t)\partial^3 + K_2(t)\partial^2 + K_1(t)\partial^1 + K_0(t)\partial^0,$$

con sus coeficientes líderes  $J_4(t)$  y  $K_4(t)$  dados por

$$J_4(t) = \frac{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2)}{(\beta - k_2 + 1)} t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1 - k_2 - 2}(1 - t) & 0 & \frac{1}{k_1 - k_2 - 2}(1 - t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1 - k_2 - 1} & 0 & -\frac{1}{k_1 - k_2 - 2}(1 - t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4(t) = \frac{(\beta - k_2 + 1)(k_1 - k_2 - 2)}{(\beta - k_1 + 2)} t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1 - k_2}(1 - t) & \frac{1}{k_1 - k_2}(1 - t)^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{1}{k_2 - k_1 + 1}(1 - t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La expresión explícita de los operadores de cuarto orden E y F puede encontrarse en el Apéndice A.3.

Los correspondientes autovalores están dados por

$$\Lambda_n(E) = (n + \alpha + \beta - k_1 + 3)(n + \alpha + \beta - k_2 + 3)(n + k_1)(n + k_1 + 1)E_{23},$$

$$\Lambda_n(F) = (n + \alpha + \beta - k_1 + 4)(n + \alpha + \beta - k_2 + 2)(n + k_2 + 1)(n + k_2 + 2)E_{32},$$

donde recordamos que  $E_{ij}$  denota la matriz con valor 1 en la entrada  $(i, j)$  y 0 en cualquier otro sitio.

En la siguiente tabla se muestra una posible descomposición de  $\mathcal{R}_{2k}$  (por supuesto no es la única elección):

	CONMUTATIVOS	NO-CONMUTATIVOS
$\mathcal{R}_0$	I	
$\mathcal{R}_2$	$D_1, D_2, D_3$	
$\mathcal{R}_4$	$D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_1D_2$	E, F
$\mathcal{R}_6$	$D_1^3, D_2^3, D_3^3, D_1^2D_2$	$D_1E, D_2F$
$\mathcal{R}_8$	$D_1^4, D_2^4, D_3^4, D_1^3D_2$	$D_1^2E, D_2^2F$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{R}_{2k}$	$D_1^k, D_2^k, D_3^k, D_1^{k-1}D_2$	$D_1^{k-2}E, D_2^{k-2}F$

Los operadores  $D_1, D_2$  y  $D_3$  son simétricos con respecto a  $W$ . Sin embargo, los operadores  $E$  y  $F$  no son simétricos, como se puede comprobar usando las ecuaciones de simetría de cuarto orden dadas al final de la Sección 2.1 (adecuadas al producto interno (1.2)). Se puede comprobar directamente que la primera de dichas ecuaciones de simetría no se satisface, es decir

$$WJ_4 \neq J_4^*W, \quad \text{y} \quad WK_4 \neq K_4^*W.$$

Por último, y a diferencia del ejemplo de 1 salto, en este caso hemos encontrado muchas relaciones entre los candidatos a generadores

$$\{I, D_1, D_2, D_3, E, F\}.$$

Mostramos las que a nuestro parecer pueden ser más interesantes, pero obviamente no quiere decir que sean todas:

$$D_2(D_1 + D_3 - k_1(\alpha + \beta - k_1 + 3)I) = 0,$$

$$\begin{aligned} &[(k_1 - k_2)D_2 + (k_1 - k_2 - 1)D_3] [-D_1 + (k_1 - k_2 - 1)D_2 \\ &+ (k_1 - k_2 - 2)D_3 + (1 + k_2)(\alpha + \beta - k_2 + 2)I] = 0, \end{aligned}$$

$$D_1E + ED_3 = (k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 1 + k_2)E,$$

$$ED_1 - D_1E = (k_1 - k_2 - 1)E,$$

$$FD_1 + D_3F = (k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 1 + k_2)F,$$

$$D_1F - FD_1 = (k_1 - k_2 - 1)F,$$

$$D_2E = 0, \quad \text{y} \quad FD_2 = 0.$$

Además, las expresiones  $EF$  y  $FE$  se pueden obtener en términos de  $\{I, D_2, D_3\}$ . Por ejemplo, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(k_1 - k_2 - 1)^3}{(k_1 - k_2)^2} FE &= D_2 [(k_1 - k_2)D_2 + (k_1 - k_2 - 1)(\alpha + \beta - 2k_1 + 3)I] \\ &[(k_2 - k_1)D_2 - (k_1 - k_2 - 1)^2(\alpha + \beta - k_1 - k_2 + 1)I] [D_2 + D_3 - (\alpha + \beta - k_1 - k_2 + 2)I]. \end{aligned}$$

La expresión EF, por su extensión, se puede encontrar en el Apéndice A.4.

En resumen, todas estas evidencias computacionales nos permiten conjeturar que el álgebra  $\mathcal{D}(W)$  es no conmutativa y está generada por el subálgebra generada por  $\{I, D_1, D_2, D_3, E, F\}$  junto con el conjunto de relaciones anteriores entre los miembros de la base.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Esta sección forma parte del artículo [GdI1].

---

## Capítulo 6

# Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*

*Es más importante tener belleza en nuestras ecuaciones  
que hacer que cuadren con el experimento.*

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC

El objetivo de este capítulo es mostrar una aplicación directa que la teoría de polinomios ortogonales matriciales satisfaciendo ecuaciones diferenciales de segundo orden ha proporcionado a la teoría de probabilidades, específicamente al campo de los procesos llamados *quasi-birth-and-death*. Las nociones básicas sobre teoría de probabilidades que permiten entender este capítulo se encuentran en la Sección 1.6.

Como se comentó en la Introducción, los polinomios escalares tienen una extensa aplicación en varios campos como la mecánica cuántica, equilibrio electrostático o procesos de nacimiento y muerte. En el caso matricial hay indicios de las prometedoras aplicaciones que los nuevos ejemplos pueden aportar. En esta dirección es ya conocida su relación para modelizar sistemas cuánticos relativistas (véase [DG6]), o un problema de *time-and-band limiting* (véase [DG2]), aparte de las aplicaciones a la teoría de dispersión (*scattering theory*) en [Ge].

En este capítulo, usando un ejemplo proveniente de teoría de representación de grupos, construiremos una familia cuya matriz de Jacobi (tridiagonal por bloques) es estocástica y con especiales propiedades probabilísticas, constituyendo un ejemplo natural de cadena de Markov de dimensión 2 en tiempo discreto, o sea, un proceso *quasi-birth-and-death*.

Una vez obtenida la matriz de probabilidades de transición calcularemos objetos probabilísticos de interés, como una expresión de la matriz de transición en  $n$  pasos o de la medida invariante, usando una familia de polinomios ortogonales matriciales y su correspondiente medida de ortogonalidad.

Finalmente, para tamaño  $2 \times 2$ , estudiaremos en detalle el comportamiento de la medida invariante mediante varias gráficas que muestren la variedad de situaciones dependiendo

de los valores de los parámetros que se elijan.<sup>1</sup>

## 6.1. La familia de ejemplos

A lo largo de lo que sigue denotaremos por  $E_{ij}$  a la matriz con valor 1 en la entrada  $(i, j)$  y 0 en cualquiera otra, donde los índices  $i, j$  se mueven de 1 en adelante.

Partimos del par  $\{W, D\}$  introducido en [PT2] (y en el Capítulo 1 en el Ejemplo 1.4.5). Los parámetros que usamos son  $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$  (es el tamaño de la matriz),  $\alpha, \beta > -1$  y  $0 < k < \beta + 1$ . El operador diferencial (a izquierda)  $D$ , dado en (1.23), admite como autofunciones a una familia de polinomios ortogonales matriciales (su conjugada) con respecto al peso matricial  $W$  de tamaño  $N \times N$ , dado en (1.22).

El peso matricial  $W$  garantiza la existencia de una relación de recurrencia a tres términos para cualquier familia de polinomios ortogonales matriciales. Sin embargo, nuestro objetivo es hallar una familia muy particular de polinomios ortogonales matriciales  $(Q_n)_n$  con  $Q_0 = I$ , cuya relación de recurrencia a tres términos desemboque en una matriz de Jacobi que sea estocástica y tal que sus normas sean matrices diagonales. Debido a ello, modificaremos el par introducido en [PT2].

Consideremos la siguiente matriz no singular triangular superior:

$$T = \sum_{i \leq j} (-1)^{i-1} \frac{(j-1)_{i-1}}{(N-1)_{i-1}} \frac{(\alpha + \beta - k + j)^{(i-1)}}{(\beta - k + 1)^{(i-1)}} E_{ij},$$

donde, como siempre,  $(a)_n$  denota el factorial acotado (definido en (1.18)) y  $(a)^{(n)}$  el símbolo de Pochhammer (definido en (3.38)).

Con esta matriz, podemos considerar un nuevo par  $\{\widetilde{W}, \widetilde{D}\}$  equivalente al anterior (ver Definición 1.2.4), donde

$$\widetilde{W} = T^*WT,$$

y

$$\widetilde{D} = T^{-1}DT = t(1-t)\partial^2 + (\widetilde{C} - t\widetilde{U})\partial^1 + \widetilde{V}\partial^0,$$

con

$$\begin{aligned} \widetilde{C} = & \sum_{i=1}^N \left( \alpha + N - i + 1 + \frac{(i-1)(N-i+1)(\beta-k+i-1)}{\alpha + \beta - k + 2i - 2} - \frac{i(N-i)(\beta-k+i)}{\alpha + \beta - k + 2i} \right) E_{ii} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left( i + \frac{i(N-i-1)(\beta-k+i+1)}{\alpha + \beta - k + 2i + 1} - \frac{i(N-i)(\beta-k+i)}{\alpha + \beta - k + 2i} \right) E_{i,i+1} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{i(N-i)(\beta-k+i)}{\alpha + \beta - k + 2i} - \frac{(i-1)(N-i)(\beta-k+i)}{\alpha + \beta - k + 2i - 1} \right) E_{i+1,i}, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Este capítulo forma parte de la referencia [GdI2].

$$\tilde{U} = \sum_{i=1}^N (\alpha + \beta + N + i)E_{ii} + \sum_{i < j} \left( (-1)^{j-i} \frac{(\alpha + \beta - k + 2i - 1)(i)^{(j-i)}}{(\alpha + \beta - k + i)^{(j-i)}} \right) E_{ij},$$

$$\tilde{V} = - \sum_{i=1}^N (i-1)(\alpha + \beta - k + i)E_{ii}.$$

Nótese que  $T$  se elige de tal manera que  $\tilde{V}$  sea una matriz diagonal.

Con este nuevo par equivalente, se puede construir una familia  $Q_n = \sum_{j=0}^n A_j^n t^j$  de polinomios ortogonales matriciales con coeficiente líder  $A_n^n$  triangular inferior

$$\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} (\alpha + \beta - k + 2i - 1) \times$$

$$\times \frac{(n)^{(j-i)}(k+n)^{(N-j)}(\alpha + \beta - k + n + j)^{(i-1)}(\alpha + \beta + n + N + j - 1)^{(n)}}{(k)^{(N-j)}(\beta + N)^{(n)}(\alpha + \beta - k + i)^{(j)}} E_{ji},$$

tal que  $Q_0(t) = I$  y  $\tilde{D}Q_n^*(t) = Q_n^*(t)\Lambda_n$ , donde los autovalores  $\Lambda_n$  están dados por la matriz diagonal

$$\Lambda_n = - \sum_{i=1}^N (n^2 + (\alpha + \beta + N + i - 1)n + (i-1)(\alpha + \beta - k + i))E_{ii}.$$

Esta elección de coeficiente líder está motivada por la propiedad de que esta familia  $(Q_n)_n$  verifica

$$Q_n(1)e_N^* = e_N^*, \quad (6.1)$$

donde  $e_N$  denota el vector fila de dimensión  $N$  con todas sus componentes igual a 1.

*Nota 6.1.1.* El hecho de que el coeficiente independiente  $\tilde{V}$  sea diagonal permite escribir de manera sencilla los polinomios ortogonales en términos de la función hipergeométrica matricial, así como se hizo en la Sección 3.3.1 para tamaño  $3 \times 3$ . En este caso se procede de la misma manera buscando matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  de dimensión  $N^2 \times N^2$  tal que

$$t(1-t)\text{vec}(Q_n^*)'' + (C - t(I + A + B))\text{vec}(Q_n^*)' - AB\text{vec}(Q_n^*) = 0,$$

donde  $C = \tilde{C} \otimes I$  y  $A$  y  $B$  satisfacen las ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \tilde{U} \otimes I &= I + A + B, \\ \tilde{T} &= AB, \end{aligned}$$

con

$$\tilde{T} = -\tilde{V} \otimes I + I \otimes \Lambda_n^* = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_n^1 & & & \\ & \tilde{\Lambda}_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\Lambda}_n^N \end{pmatrix},$$

donde cada diagonal está dada por ( $j = 1, \dots, N$ )

$$\tilde{\Lambda}_n^j = - \sum_{i=1}^N (n^2 + n(\alpha + \beta + N + i - 1) + (i - j)(\alpha + \beta - k) + i(i - 1) - j(j - 1)) E_{ii}.$$

Una vez resuelto para  $A$ , se tiene que  $B = \tilde{U} \otimes I - A - I$ . Un candidato para  $A$  que resuelva las ecuaciones anteriores es la siguiente matriz triangular superior por bloques:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{NN} \end{pmatrix}.$$

Denotamos los bloques diagonales de  $A$  por las matrices diagonales ( $i = 1, \dots, N$ )

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} \gamma_i^1 & & & \\ & \gamma_i^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_i^N \end{pmatrix},$$

donde sus entradas verifican las ecuaciones cuadráticas

$$(\gamma_i^j)^2 + (1 - u_{ii})\gamma_i^j - (\tilde{\Lambda}_n^i)_{jj} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Aquí,  $u_{ij}$  denota la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $\tilde{U}$ . A raíz de esto, el resto de los bloques de  $A$  se define recursivamente por

$$A_{i,i+j} = - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{u_{i+k,i+j}}{u_{i+j,i+j}} A_{i,i+k}, \quad i = 1, \dots, j, \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

Como los autovalores de  $C$  son  $\{\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + N\}$  de multiplicidad  $N$  cada uno y  $\alpha > -1$ , estamos en las condiciones de la definición de la función hipergeométrica matricial introducida en la Sección 1.5. Por tanto, se tiene que

$$\text{vec}(Q_n^*(t)) = {}_2F_1(C, A, B; t) \text{vec}(Q_n^*(0))$$

es un polinomio vectorial de grado  $n$  en  $t$ .

En este caso incluso podemos dar el valor de  $Q_n^*(0)$ :

$$\begin{aligned} Q_n^*(0) &= \sum_{i \leq j} (-1)^n \binom{N-i}{j-i} (n)_{j-i} \frac{(k+n)^{(N-j)} (\alpha+j)^{(n+i-j)} (\beta-k+i)^{(j-i)}}{(k)^{(N-i)} (\beta+N)^{(n)}} \times \\ &\times \frac{(\alpha+\beta-k+n+i+j)^{(N-j)} (\alpha+\beta+n+N+i-1)^{(j-i)}}{(\alpha+\beta-k+2j)^{(N-j)} (\alpha+\beta-k+i+j-1)^{(j-i)}} E_{ij}. \end{aligned}$$

En [PR] se halla una expresión en términos de  ${}_2F_1$  para una familia de polinomios que están relacionados con nuestra familia  $(Q_n)_n$  de la forma  $Q_n(t) = A_n^n T^* (\tilde{A}_n^n)^{-1} P_n(t) (T^*)^{-1}$ , donde  $P_n(t) = \tilde{A}_n^n t^n + \dots$ . Esta familia  $(P_n)_n$  no satisface la misma relación de recurrencia que introduciremos a continuación.

Continuamos con el objetivo principal de esta sección, que es dar una expresión explícita de la relación de recurrencia a tres términos para la familia  $(Q_n)_n$ . Esta viene dada mediante la siguiente fórmula:

$$tQ_n(t) = A_n Q_{n+1}(t) + B_n Q_n(t) + C_n Q_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.2)$$

donde  $Q_{-1}(t) = 0$  y  $Q_0(t) = I$ . Para  $n = 0, 1, \dots$ ,  $A_n$  es la matriz bidiagonal inferior

$$A_n = \sum_{i=1}^N \frac{(k+n)(\beta+n+N)(\alpha+\beta+n+N+i-1)(\alpha+\beta-k+n+i)}{(k+n+N-i)(\alpha+\beta-k+n+2i-1)(\alpha+\beta+2n+N+i-1)^{(2)}} E_{ii} \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i(k+n)(k+N-i-1)(\beta+n+N)}{(\alpha+\beta+2n+N+i)(\alpha+\beta-k+n+2i+1)(k+n+N-i-1)^{(2)}} E_{i+1,i},$$

para  $n = 1, 2, \dots$ ,  $C_n$  es la matriz bidiagonal superior

$$C_n = \sum_{i=1}^N \frac{n(\alpha+n+i-1)(k+n+N-1)(\alpha+\beta-k+n+N+i-1)}{(k+n+N-i)(\alpha+\beta-k+n+2i-1)(\alpha+\beta+2n+N+i-2)^{(2)}} E_{ii} \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{n(N-i)(k+n+N-1)(\beta-k+i)}{(\alpha+\beta+2n+N+i-1)(\alpha+\beta-k+n+2i-1)(k+n+N-i-1)^{(2)}} E_{i,i+1},$$

y para  $n = 0, 1, \dots$ ,  $B_n$  es la matriz tridiagonal

$$B_n = \sum_{i=1}^N \left( 1 + \frac{n(k+n-1)(k+n+N-1)(\beta+n+N-1)}{(\alpha+\beta+2n+N+i-2)(k+n+N-i-1)^{(2)}} \right. \\ \left. - \frac{(n+1)(k+n)(k+n+N)(\beta+n+N)}{(\alpha+\beta+2n+N+i)(k+n+N-i)^{(2)}} - \frac{i(N-i)(k+N-i-1)(\beta-k+i)}{(\alpha+\beta-k+n+2i)(k+n+N-i-1)^{(2)}} \right. \\ \left. + \frac{(i-1)(N-i+1)(k+N-i)(\beta-k+i-1)}{(\alpha+\beta-k+n+2i-2)(k+n+N-i)^{(2)}} \right) E_{ii} \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(N-i)(\beta-k+i)(\alpha+\beta-k+n+i)(\alpha+\beta+n+N+i-1)}{(k+n+N-i)(\alpha+\beta+2n+N+i-1)(\alpha+\beta-k+n+2i-1)^{(2)}} E_{i,i+1} \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i(\alpha+n+i)(k+N-i-1)(\alpha+\beta-k+n+N+i)}{(k+n+N-i-1)(\alpha+\beta+2n+N+i)(\alpha+\beta-k+n+2i)^{(2)}} E_{i+1,i}.$$

Las herramientas necesarias para demostrar esta fórmula de recurrencia están contenidas implícitamente en [GPT2] y [PT1], donde se estudia el caso particular de  $\beta = k = 1$ , y que no incluimos aquí, por salirse del objetivo del capítulo.

La ventaja que tiene trabajar con el par equivalente  $\{\widetilde{W}, \widetilde{D}\}$  es que la correspondiente matriz de Jacobi es *estocástica*. Las entradas de  $A_n$ ,  $B_n$  y  $C_n$  son no negativas y si aplicamos el vector  $e_n^*$  a ambos lados de la fórmula (6.2), evaluando en  $t = 1$  y usando (6.1), obtenemos que la suma de los elementos de cada fila de la matriz de Jacobi es 1 (en [PT3] se prueba la estocasticidad de esta matriz de Jacobi usando otra estrategia diferente). Por lo tanto proporciona un ejemplo de proceso *quasi-birth-and-death*.

Podemos calcular otras cantidades de utilidad. Por ejemplo, se tiene una expresión de las normas de la familia  $(Q_n)_n$  con respecto al peso matricial  $\widetilde{W}$ , dadas por las matrices diagonales

$$\|Q_n\|_{\widetilde{W}}^2 = \langle Q_n, Q_n \rangle_{\widetilde{W}} = \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+N)\Gamma(\alpha+n+i)(k+N+n-1)_{i-1}}{\binom{N-1}{i-1} \Gamma(N)\Gamma(\alpha+\beta+N+i+2n)} \times \frac{(k+N-i)^{(n)}(\alpha+\beta+N+i+n-1)^{(n)}(\alpha+\beta-k+i+n)^{(N)}}{(\alpha+\beta-k+2i+n-1)(k)^{(n)}(\beta-k+1)^{(i-1)}(\beta+N)^{(n)}} E_{ii}, \quad (6.3)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler. Nótese que las normas son diagonales, un hecho que será importante en el estudio de los aspectos probabilísticos de este ejemplo, que veremos en la siguiente sección.

Recopilamos brevemente toda la información anterior para los casos  $N = 1, 2$ . Para  $N = 1$ , el peso  $\widetilde{W}$  y el operador diferencial  $\widetilde{D}$  están dados por

$$\widetilde{W}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta, \quad \widetilde{D} = t(1-t)\partial^2 + (\alpha+1+t(\alpha+\beta+2))\partial^1.$$

Por lo tanto, los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos y las normas están dadas por  $(n = 0, 1, \dots)$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ B_n &= 1 + \frac{n(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta} - \frac{(n+1)(n+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2}, \\ C_n &= \frac{n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \\ \|Q_n\|_{\widetilde{W}}^2 &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)^2}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

En este caso se obtienen los polinomios de Jacobi en  $(0, 1)$ .

Para  $N = 2$ , el peso  $\widetilde{W}$  y el operador diferencial  $\widetilde{D}$  están dados por

$$\widetilde{W}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta \begin{pmatrix} kt+\beta-k+1 & (\alpha+\beta+2)t-\alpha-1 \\ (\alpha+\beta+2)t-\alpha-1 & t((2\alpha+\beta-k+3)t-2\alpha+k-2) + \frac{(\alpha+1)^2(1-t)^2}{\beta-k+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{D} &= t(1-t)\partial^2 + \left[ \begin{pmatrix} \alpha+2 - \frac{\beta-k+1}{\alpha+\beta-k+2} & 1 - \frac{\beta-k+1}{\alpha+\beta-k+2} \\ \frac{\beta-k+1}{\alpha+\beta-k+2} & \alpha+1 + \frac{\beta-k+1}{\alpha+\beta-k+2} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - t \begin{pmatrix} \alpha+\beta+3 & -1 \\ 0 & \alpha+\beta+4 \end{pmatrix} \right] \partial^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta+k-2 \end{pmatrix} \partial^0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos y las normas están dadas por ( $n = 0, 1, \dots$ )

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{(n+k)(n+\beta+2)(n+\alpha+\beta+2)}{(n+k+1)(2n+\alpha+\beta+2)^{(2)}} & 0 \\ \frac{k(n+\beta+2)}{(n+k+1)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta-k+3)} & \frac{(n+\beta+2)(n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta-k+2)}{(n+\alpha+\beta-k+3)(2n+\alpha+\beta+3)^{(2)}} \end{pmatrix},$$

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta-k+2)}{(n+\alpha+\beta-k+1)(2n+\alpha+\beta+1)^{(2)}} & \frac{n(\beta-k+1)}{(n+k)(2n+\alpha+\beta+2)(n+\alpha+\beta-k+1)} \\ 0 & \frac{n(n+\alpha+1)(n+k+1)}{(n+k)(2n+\alpha+\beta+2)^{(2)}} \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} B_n^{11} & \frac{(\beta-k+1)(n+\alpha+\beta+2)}{(n+k+1)(2n+\alpha+\beta+2)(n+\alpha+\beta-k+2)} \\ \frac{k(n+\alpha+1)}{(n+k)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta-k+2)} & B_n^{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$B_n^{11} = 1 + \frac{n(n+k-1)(n+\beta+1)}{(n+k)(2n+\alpha+\beta+1)} - \frac{k(\beta-k+1)}{(n+\alpha+\beta-k+2)(n+k)^{(2)}} - \frac{(n+1)(n+k)(n+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+3)(n+k+1)},$$

$$B_n^{22} = 1 + \frac{n(n+k+1)(n+\beta+1)}{(n+k)(2n+\alpha+\beta+2)} + \frac{k(\beta-k+1)}{(n+\alpha+\beta-k+2)(n+k)^{(2)}} - \frac{(n+1)(n+k+2)(n+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+4)(n+k+1)},$$

y, finalmente,

$$\|Q_n\|_{\tilde{W}}^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+2)^2(n+\alpha+\beta-k+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+2)} \begin{pmatrix} \frac{n+k}{k(2n+\alpha+\beta+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(n+\alpha+1)(n+k+1)}{(\beta-k+1)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta+2)} \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo corresponde con la extensión natural del ejemplo introducido en [G1] para  $k = \frac{\beta+1}{2}$ .

Con estos datos es sencillo comprobar que las correspondientes matrices de Jacobi (tridiagonal y pentadiagonal, respectivamente) son estocásticas.

## 6.2. Aspectos probabilísticos

Pasemos ahora a estudiar aspectos probabilísticos de el ejemplo introducido en la sección anterior usando las definiciones y resultados de la Sección 1.6.

La matriz de Jacobi

$$P = \mathcal{L} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

que se construye a partir de los coeficientes introducidos en la sección anterior es una matriz estocástica, es decir,  $Pe = e$ , donde  $e$  denota el vector columna semi-infinito con todas las componentes igual a 1. Es por ello que la matriz de Jacobi  $\mathcal{L}$  en este caso constituye una matriz de probabilidades de transición  $P$  dependiente de tres parámetros,  $\alpha, \beta$  y  $k$ .

Etiquetando los estados por los pares de enteros  $(i, j)$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , la matriz (6.4) tiene bloques  $P_{i,i'}$  de tamaño  $N \times N$ . La probabilidad de ir en un paso del estado  $(i, j)$  al estado  $(i', j')$  está dada por el valor de la entrada  $(j, j')$  del bloque  $P_{i,i'}$ . El proceso de Markov que manejamos es *irreducible* y *aperiódico*. Esto es directo de comprobar observando que por cada par de estados  $(i, j)$ ,  $(i', j')$ , cada entrada del bloque  $(i, i')$  de  $P^n$  es una entrada positiva para un valor de  $n$  suficientemente grande. Esto es debido a la estructura tridiagonal por bloques que tiene  $P$  y a su vez a las estructuras diagonales que tiene cada diagonal por bloques.

Pasamos ahora a estudiar la persistencia o recurrencia del proceso. Para ello se usan los resultados del Teorema 1.6.3 adaptados a procesos *quasi-birth-and-death*, que se pueden encontrar en [DRSZ]. Por ejemplo, podemos usar la fórmula de Karlin-McGregor para estudiar el comportamiento de la serie matricial

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n.$$

Basta estudiar el carácter de la anterior serie matricial componente a componente. Usando  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ , se tiene que

$$e_j^T \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n \right) e_j = e_j^T \left[ \left( \int_0^1 \frac{Q_i(t) \widetilde{W}(t) Q_i^*(t)}{1-t} dt \right) \left( \int_0^1 Q_i(t) \widetilde{W}(t) Q_i^*(t) dt \right)^{-1} \right] e_j,$$

donde  $e_j^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  denota el  $j$ -ésimo vector unitario de dimensión  $N$ . De esta manera, como dice el Corolario 4.1 de [DRSZ], y debido a que nuestro proceso es irreducible, un proceso es *persistente* si y sólo si

$$e_j^T \left( \int_0^1 \frac{\widetilde{W}(t)}{1-t} \mu_0^{-1} dt \right) e_j = \infty \quad (6.5)$$

para algún  $j \in \{1, \dots, N\}$ , donde  $\mu_0 = \int_0^1 \widetilde{W}(t) dt = \|Q_0\|_{\widetilde{W}}^2$  es el primer momento, dado en (6.3). En caso contrario, el proceso es *transitorio*. La ventaja de tener una familia donde  $Q_0 = I$  hace que podamos estudiar estos conceptos sin tener que recurrir a ningún tipo de conjugaciones. Asimismo, la expresión explícita de  $\widetilde{W}(t)$  es fundamental para obtener estas equivalencias.

Por lo tanto, en nuestro proceso concluimos que

$$\begin{array}{ll} \text{si } -1 < \beta \leq 0 & \text{el proceso es } \textit{persistente}, \\ \text{si } \beta > 0 & \text{el proceso es } \textit{transitorio}, \end{array}$$

debido a que  $\widetilde{W}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta \widetilde{Z}(t)$ , donde  $\widetilde{Z}(t)$  es un polinomio matricial con la propiedad de que

$$\widetilde{Z}(1) = \frac{(\beta + 1)^{(N-1)}}{(N-1)!} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto indica que  $\widetilde{Z}$  no tiene problemas de definición en  $t = 1$  y que  $\widetilde{W}$  sólo depende del factor escalar  $t^\alpha(1-t)^\beta$  para estudiar el límite cuando  $t \rightarrow 1$ . Por lo tanto, la condición (6.5) se cumple si y sólo si  $-1 < \beta \leq 0$ .

El Corolario 4.2 de [DRSZ] da también una condición necesaria y suficiente para que un proceso sea *persistente ergódico*, basado en la existencia de un salto en una de las entradas de  $\widetilde{W}$ . Pero esto nunca pasa en nuestro proceso ya que  $\widetilde{W}$  es siempre diferenciable en el intervalo  $(0, 1)$ . Por lo tanto nuestro proceso *nunca es persistente ergódico*. Como consecuencia, para  $-1 < \beta \leq 0$ , el proceso es *persistente nulo*. En otras palabras, si  $\beta > 0$ , nunca hay seguridad de retorno a un mismo estado, y si  $-1 < \beta \leq 0$ , hay seguridad, pero el tiempo medio de recurrencia es infinito.

También podemos probar que el proceso es persistente nulo estudiando los momentos de  $\widetilde{W}$ . Lo haremos, por simplificar, en el caso de tamaño  $N = 2$ . Una extensión a procesos *quasi-birth-and-death* del punto (2) del Teorema 1.6.3 nos hace deducir que un proceso es persistente nulo si y sólo si es persistente y

$$e_j^T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n \right) e_j = 0,$$

para todo  $j$ . Es suficiente probarlo para  $i = j = 0$ , por la irreducibilidad del proceso. Usando la fórmula (véase por ejemplo [M])

$$P_{00}^n = \mu_n \mu_0^{-1},$$

y usando que los momentos de  $\widetilde{W}$  están dados por

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \widetilde{W}(t) dt = \begin{pmatrix} m_{11}^n & m_{12}^n \\ m_{12}^n & m_{22}^n \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11}^n &= \frac{\Gamma(\beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta - k + 2)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 3)}, \\ m_{12}^n &= \frac{n\Gamma(\beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 3)}, \\ m_{22}^n &= \frac{\Gamma(\beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 4)} \left( (n + \alpha + 1)(n + k - \alpha) + \frac{(\beta + 2)(\alpha + 1)^2}{\beta - k + 1} \right), \end{aligned}$$

se concluye que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$  para  $-1 < \beta \leq 0$ , con lo que el proceso es persistente nulo. Aquí hacemos uso de fórmulas asintóticas para la función Gamma de Euler como  $\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z)} \approx z^\alpha$  a medida que  $|z| \rightarrow \infty$  (véase [AAR] ó [Le]).

Todas las consideraciones hasta ahora introducidas tienen una gran dependencia del peso matricial  $\widetilde{W}(t)$  y de la matriz  $P$ , de cuyas expresiones disponemos.

Ahora vamos con algo bien delicado, que es la obtención explícita de la *medida invariante*. Como se observó en (6.3), nuestra familia de polinomios ortogonales matriciales  $(Q_n)_n$  tenía la inusual propiedad de que todas sus normas eran matrices diagonales. Las entradas diagonales de estas normas, inspirado en el caso de procesos de nacimiento y muerte, nos ofrece un candidato natural de medida invariante  $\pi$  para nuestro proceso. Recordamos que una medida invariante es un vector fila con componentes positivas

$$\pi = (\pi^0; \pi^1; \dots)$$

con la propiedad de que

$$\pi P = \pi.$$

Tenemos convincentes evidencias computacionales que nos proporcionan la muy significativa propiedad de que las componentes de  $\pi$  están dadas por las inversas de las diagonales de las normas, es decir,

$$\pi^n = e_N (\|Q_n\|_W^2)^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde  $e_N$  denota el vector fila de dimensión  $N$  con todas sus componentes igual a 1. El hecho de que el proceso nunca es persistente ergódico implica que no existe una medida invariante tal que  $\pi e < \infty$ .

Además se tiene, usando el Teorema 1.6.5, que esta medida invariante  $\pi$  es *única* cuando el proceso es persistente, es decir, cuando  $-1 < \beta \leq 0$ . Para los valores de  $\beta$  donde el proceso es transitorio, tenemos indicios computacionales suficientes para afirmar que esta unicidad también se conserva.

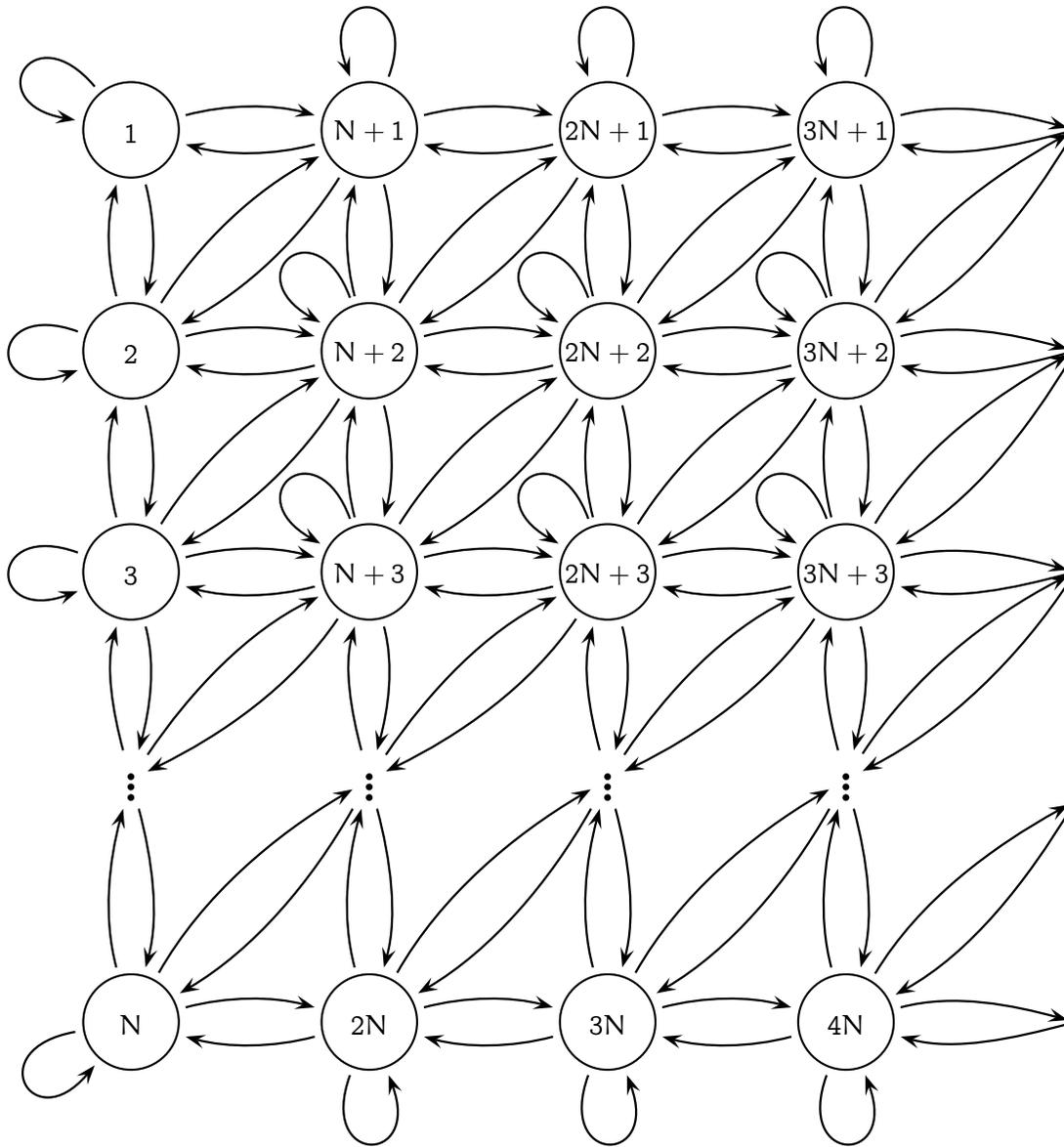
En general, un proceso transitorio no tiene por qué tener una única medida invariante, como se comprueba en el ejemplo de la caminata al azar sobre los enteros para valores generales de  $p$  y  $q$  ( $p + q = 1$ ) tratado en [KMcG] para el caso  $p \neq q$ . Sin embargo, como comentamos antes, para los valores donde nuestro proceso es transitorio, i.e.  $\beta > 0$ , podemos encontrar una única expresión de la medida invariante en términos de las normas de los polinomios ortogonales matriciales.

Para concluir esta sección, mostramos el diagrama asociado a nuestra familia de ejemplos. Los estados de nuestro diagrama están etiquetados por dos índices  $i = 0, 1, 2, \dots$  y  $j = 1, \dots, N$ . Sin embargo, usaremos el siguiente orden lineal para los estados, más conveniente:

$$(0, 1), (0, 2), \dots, (0, N), (1, 1), (1, 2), \dots, (1, N), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, N), \dots$$

Por lo tanto, la etiqueta 3, por ejemplo, en el diagrama siguiente, se corresponde con el par  $(0, 3)$ , mientras que la etiqueta  $N + 2$  se corresponde con el par  $(1, 2)$ , etc.

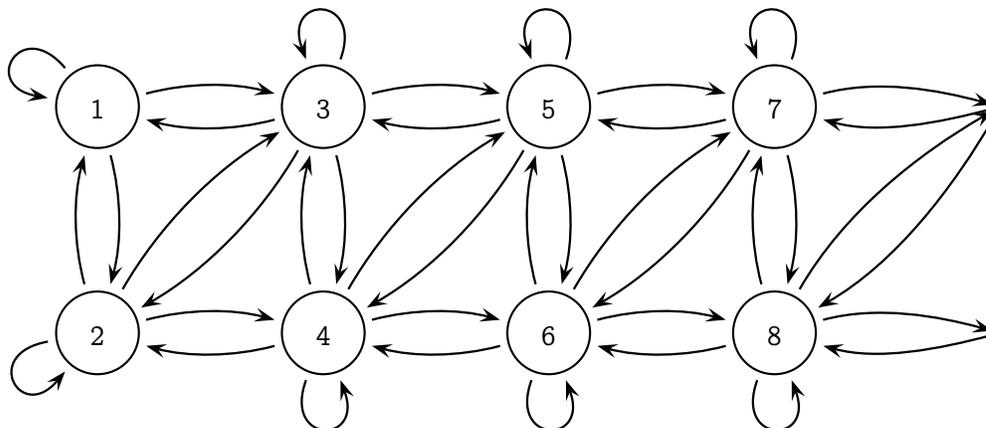
El espacio de estados y las correspondientes transiciones de 1 paso tienen la siguiente forma:



### 6.3. La forma de la medida invariante

El objetivo de esta sección será estudiar en detalle el comportamiento de la medida invariante cuando el número de fases  $N$  es igual a 2. En ese caso, la matriz de probabilidades de transición es pentadiagonal (dada al final de la Sección 6.1) y el diagrama asociado adopta la siguiente forma:

---



La medida invariante  $\pi$  tal que  $\pi P = \pi$  está dada por

$$\pi = (\pi^0; \pi^1; \dots),$$

donde  $\pi^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , es el vector fila de dimensión 2 dado por

$$\pi^n = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+2)^2(n+\alpha+\beta-k+2)} \left( \frac{k(2n+\alpha+\beta+2)}{n+k}, \frac{(\beta-k+1)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+1)(n+k+1)} \right).$$

De esta expresión explícita se obtienen directamente varias cantidades. Datos de especial interés son los valores iniciales y los valores asintóticos a medida que  $n \rightarrow \infty$ . El valor inicial está dado por

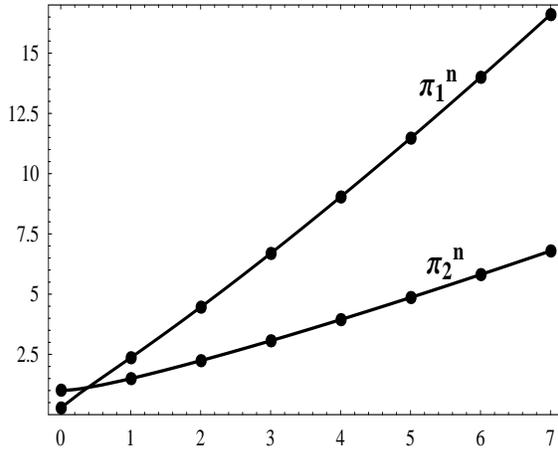
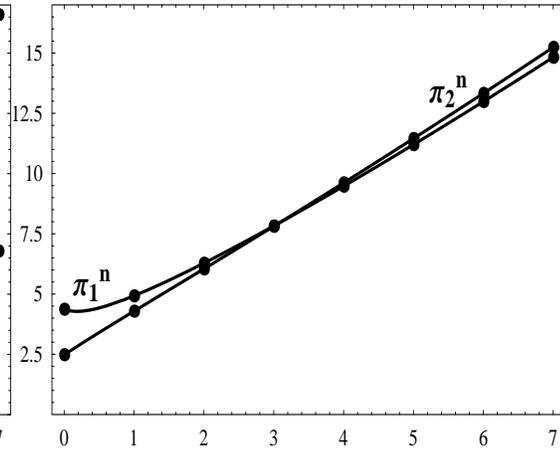
$$\pi^0 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+2)(\alpha+\beta-k+2)} \left( 1, \frac{(\beta-k+1)(\alpha+\beta+3)}{(\alpha+1)(k+1)} \right).$$

El comportamiento en  $n \rightarrow \infty$  se estudia usando fórmulas asintóticas de la función Gamma de Euler como las que usamos en la sección anterior. Se tiene entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n = \begin{cases} (\infty, \infty), & \text{si } \beta > -\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{\pi}(2k, 1-2k), & \text{si } \beta = -\frac{1}{2}, \\ (0, 0), & \text{si } -1 < \beta < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

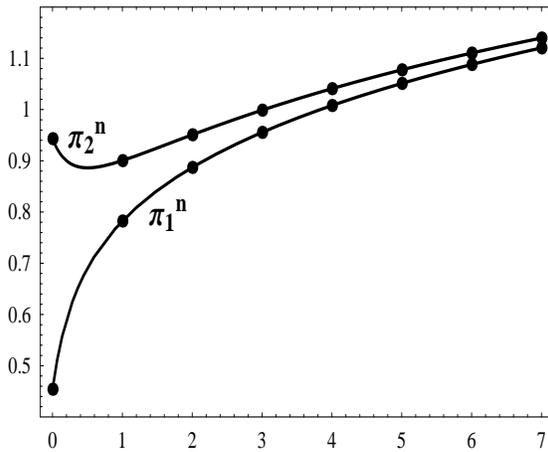
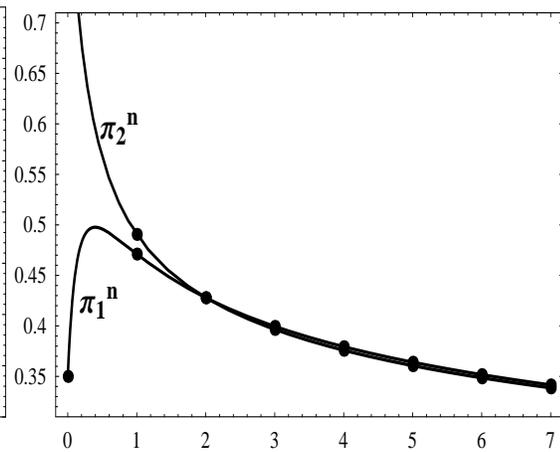
Véase que el comportamiento asintótico para  $n \rightarrow \infty$  sólo depende de  $\beta$ .

A continuación estudiamos gráficas de las dos componentes  $\pi_1^n$  y  $\pi_2^n$  de la medida invariante en términos de la variable  $n$  en algunos de los casos más significativos. La forma que tienen ambas curvas cambia dependiendo de los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k$ . El efecto que tiene el parámetro  $\beta$  en la medida invariante nos hace diferenciar 4 regiones,  $-1 < \beta < -1/2$ ,  $\beta = -1/2$ ,  $-1/2 < \beta < 0$  y  $\beta \geq 0$ . El parámetro  $\alpha$  tiene la aportación de cambiar la curvatura o los valores iniciales de las curvas en  $-1 < \alpha < 0$  ó  $\alpha \geq 0$ , y, por último, el parámetro  $k$  afecta a las curvas cuando se encuentra en el punto medio de su definición  $\frac{\beta+1}{2}$ , mientras que la situación en el resto de valores es bastante simétrica.

Figura 6.1:  $\alpha = -0,9, \beta = 0,1, k = 0,8$ Figura 6.2:  $\alpha = 2,5, \beta = 0,1, k = 0,55$ 

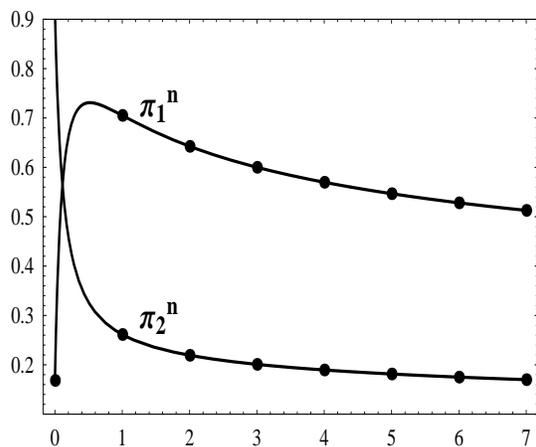
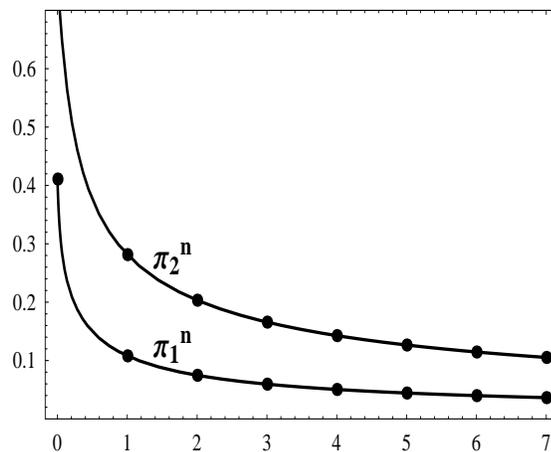
Las primeras dos figuras muestran las situaciones más interesantes cuando  $\beta > 0$ .

Las Figuras 6.3 y 6.4 muestran cómo la situación puede cambiar para pequeñas alteraciones alrededor de  $\beta = -1/2$ . En la Figura 6.3, ambas curvas tienen un crecimiento logarítmico y la segunda componente tiene un mínimo, mientras que en la Figura 6.4 ambas curvas tienden a 0.

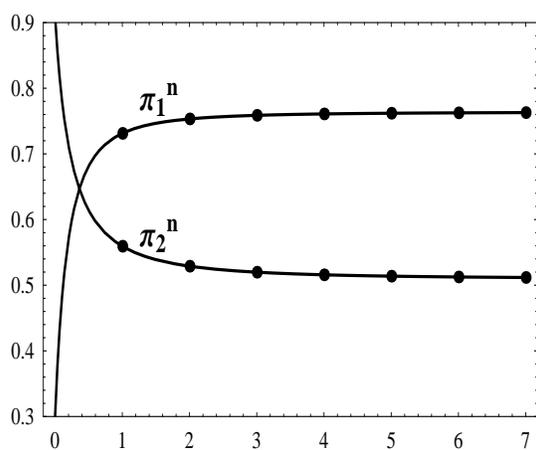
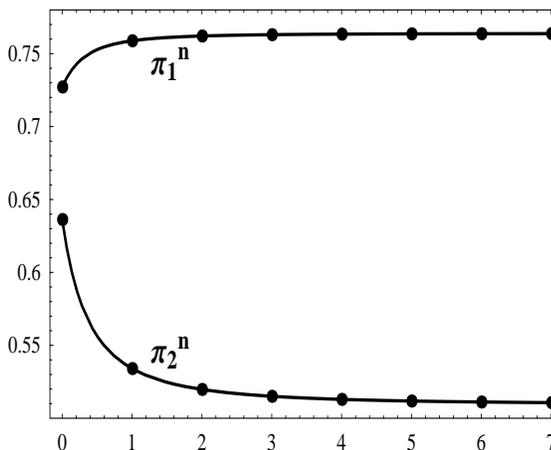
Figura 6.3:  $\alpha = -0,8, \beta = -0,4, k = 0,3$ Figura 6.4:  $\alpha = -0,9, \beta = -0,6, k = 0,2$ 

Se observa que en la Figura 6.5, con  $k$  aproximándose a  $\beta + 1$ , es parecida a la Figura 6.4. La Figura 6.6 muestra las consecuencias de elegir  $k$  muy cercano a 0.

Las últimas figuras se refieren al caso de  $\beta = -1/2$ , donde ambas componentes convergen para valores grandes de  $n$ . En la Figura 6.7 se observa que el valor inicial de la primera componente es siempre menor que todos los valores de la segunda componente, y que el valor inicial de la segunda componente es siempre mayor que los valores de la primera componente. Un pequeño cambio en  $\alpha$  tiene el efecto de que los valores de la

Figura 6.5:  $\alpha = -0,98, \beta = -0,6, k = 0,3$ Figura 6.6:  $\alpha = -0,9, \beta = -0,8, k = 0,05$ 

primera componente son siempre mayores que los valores de la segunda, como muestra la Figura 6.8.

Figura 6.7:  $\alpha = -0,92, \beta = -0,5, k = 0,3$ Figura 6.8:  $\alpha = -0,68, \beta = -0,5, k = 0,3$ 

De nuevo, pequeños cambios en  $\alpha$  hacen que las curvaturas de cada componente cambien en la Figura 6.9 con respecto a la Figura 6.8. En la Figura 6.10 ambas componentes tienden al mismo valor sin cortarse nunca, una consecuencia de elegir  $k = \frac{\beta+1}{2}$ .

Las últimas dos figuras muestran cómo las situaciones pueden cambiar para pequeñas perturbaciones de  $\alpha$  y  $k$ . En la Figura 6.11 ambas curvas parten del mismo valor inicial y luego convergen a límites diferentes, mientras que en la Figura 6.12 ambas componentes convergen al mismo valor.

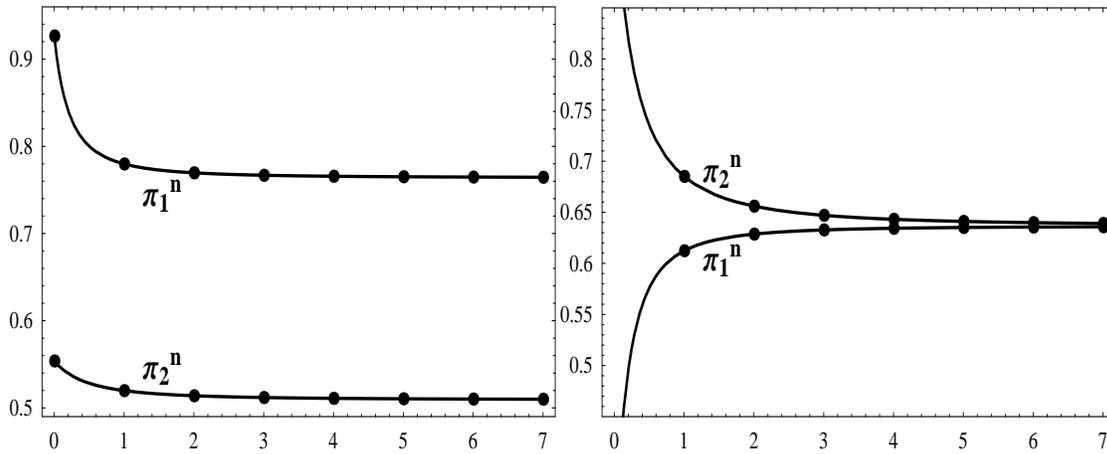


Figura 6.9:  $\alpha = -0,48, \beta = -0,5, k = 0,3$     Figura 6.10:  $\alpha = -0,9, \beta = -0,5, k = 0,25$

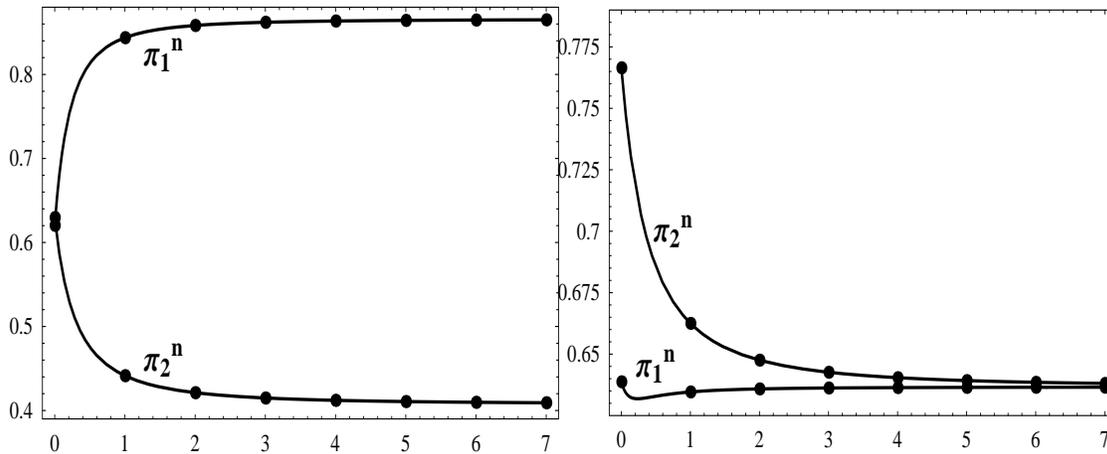


Figura 6.11:  $\alpha = -0,8, \beta = -0,5, k = 0,34$     Figura 6.12:  $\alpha = -0,7, \beta = -0,5, k = 0,25$

## 6.4. Conclusiones

Al igual que los procesos de nacimiento y muerte, una matriz tridiagonal por bloques  $\mathcal{L}$  con entradas no negativas y cuyas filas sumen siempre 1 determina unívocamente una cadena de Markov de dimensión 2 en tiempo discreto, o también llamado proceso *quasi-birth-and-death*. En todos estos procesos es de gran utilidad e importancia disponer de la matriz de probabilidades de transición en  $n$  pasos  $\mathcal{L}^n$  y de la medida invariante asociada.

La expresión de la matriz de probabilidades de transición  $P^n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  se simplifica enormemente usando la fórmula de Karlin-McGregor, pero con el inconveniente de que es necesario disponer de una expresión explícita del peso matricial  $W(t)$ . El número de ejemplos para los que esto se puede hacer es bastante escaso, debido a la dificultad de calcular esta  $W(t)$ .

De la misma manera, mientras que en los procesos de nacimiento y muerte, la medida

invariante estaba muy ligada a las normas de los polinomios ortogonales, en el caso de los procesos *quasi-birth-and-death* esta relación no es del todo directa, ya que las normas de los polinomios ortogonales matriciales no tienen por qué ser ni escalares ni diagonales.

En nuestro proceso partimos de un ejemplo que proviene de teoría de representación de grupos y que produce una familia de polinomios ortogonales matriciales con respecto a un peso matricial  $W$  que se puede calcular explícitamente, donde la matriz de Jacobi asociada resulta ser una matriz estocástica. Esto implica que podemos hacer uso de la fórmula de Karlin-McGregor. Además, la medida invariante puede hallarse en términos de las normas de los polinomios ortogonales matriciales, que en este caso son matrices diagonales. Por lo tanto constituye un ejemplo no trivial de proceso *quasi-birth-and-death* dependiente de cuatro parámetros,  $\alpha, \beta, k$  y  $N$ .

---

## Apéndice A

# Datos relacionados con los ejemplos de 1 y 2 saltos

### A.1. Autofunciones para el ejemplo de 1 salto

Los polinomios introducidos en la Sección 3.3.1 satisfacen

$$D_1 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_1),$$

y se expresan, después de una elección apropiada de 3 escalares, como

$$P_n^*(t) = \sum_{l=0}^n A_l^n t^{n-l},$$

donde

$$A_l^n = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

y las entradas  $x_{ij}$  están dadas por

$$\begin{aligned} x_{11} = & (-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n) (5n^2 + 2n + 2k - 2l + 2ln^2 \\ & + 2ln - 3kl^2 + 5kl + k^2l^2 - 3k^2l + 7nk + 2k^2 + 2l^2 - l\beta^2 - 3l\beta + 3l^2\beta + 4kl\beta \\ & + 3k^2n + n\alpha^2 + 3n\alpha + 5n^2\alpha + k^2n^2 + 7kn^2 + 2kn^3 + n^2\alpha^2 + 2n^3\alpha - 2kln^2 \\ & - 2k^2nl + 4\alpha kn^2 + 2\alpha k^2n + 2\alpha^2kn + 2ln^2\beta - 2\alpha knl + 2\alpha ln\beta + 2knl\beta + n^4 \\ & + 2nl\beta + 8\alpha kn + 2\alpha ln + 4n^3 + 2\alpha kl + 3\alpha k^2 + 3\alpha k + \alpha^2k^2 - 2\alpha k^2l + \alpha^2k \\ & + l^2\beta^2 - 2kl^2\beta + 2\alpha kl\beta) / \\ & (\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l-2-\beta-\alpha-2n) (k+n+1) (k+n)), \\ x_{12} = & - \frac{(-1)^l (n\alpha + \alpha k + l\beta + 2l + nk - kl + 2k + n^2 + 2n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(n+1)}{(k+n) \Gamma(n-l+1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l+1)}, \end{aligned}$$

$$x_{13} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n)}{\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{21} = \frac{(-1)^l (n\alpha + \alpha k + l\beta + 2l - \beta - 2 + nk - kl + 2k + n^2 + n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(n+1)}{(k+n)(k+n+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l)},$$

$$x_{22} = (-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) (-4lnk + 4n^2 + 4n + 4k + 12l - ln^2 + 4ln + 2kl^2 - 10kl + k^2l + 2nk - 2k^2 - 4l^2 + 2k\beta + 2l\beta^2 + 10l\beta - 2l^2\beta + 2l\alpha\beta + \alpha k\beta - 3kl\beta + n^2\beta - k^2n + n\alpha^2 + 2n\beta + 4n\alpha + 2n^2\alpha + 3nl\beta + kn\beta + \alpha kn - \alpha ln + n\alpha\beta + n^3 - 3\alpha kl - \alpha k^2 + 4\alpha k + 4l\alpha + \alpha^2 k) / (2\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) (\beta+1-k)(k+n)),$$

$$x_{23} = -\frac{(-1)^l (\beta+3+\alpha-k+n-l) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(n+1)}{(\beta+1-k) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(n-l+1) \Gamma(l+1)},$$

$$x_{31} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n)}{(k+n)(k+n+1) \Gamma(l-1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{32} = \frac{(-1)^l (\beta+3+\alpha-k+n-l) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(n+1)}{(k+n)(\beta+1-k) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l)},$$

$$x_{33} = \frac{(-1)^l (\beta+4+\alpha-k+n-l)(\beta+3+\alpha-k+n-l) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(n+1)}{(\beta+1-k)(\beta+2-k) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(n-l+1) \Gamma(l+1)}.$$

Aquí,  $\Gamma$  denota la función Gamma de Euler.

## A.2. Autofunciones para el ejemplo de 2 saltos

Los polinomios introducidos en la Sección 3.3.2 satisfacen

$$D_1 P_n^* = P_n^* \Lambda_n(D_1),$$

y se expresan, después de una elección apropiada de 4 escalares, como

$$P_n^*(t) = \sum_{l=0}^n A_l^n t^{n-l},$$

donde

$$A_l^n = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix},$$

y las entradas  $x_{ij}$  están dadas por

$$x_{11} = (-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n) (-\ln^2 k_1 - \ln^2 k_2 + \alpha k_2 l \beta - k_2 l^2 \beta - k_1 l^2 \beta + 5n^2 + 2k_1 l \beta + \alpha k_1 l \beta + 2k_2 l \beta + 2nk_2 + 5nk_1 + 2k_1 k_2 - l \beta^2 + 3l^2 \beta + 3n^2 k_2 + 4n^2 k_1 - 3l \beta + 3nk_1 k_2 - k_1 l^2 - 2l + 2n + 3\alpha k_1 + 2k_1 + 2l^2 - 2k_2 l^2 + 4k_2 l + k_1 l + \ln k_2 - \ln k_1 + 2\ln + 2\ln^2 + k_1 k_2 l^2 - 3k_1 k_2 l + l^2 \beta^2 + \alpha^2 k_1 + \alpha^2 k_1 k_2 + 3\alpha k_1 k_2 + k_1 n^3 + 2\alpha k_2 l + 2\alpha k_1 k_2 n - \alpha k_1 n l - \alpha k_2 n l + k_1 n l \beta + k_2 n^3 + 5n^2 \alpha + 2n l \beta + 4n^3 + k_1 k_2 n^2 + k_2 n l \beta + 3\alpha k_2 n + 2\alpha k_2 n^2 + 5\alpha k_1 n + 2\alpha k_1 n^2 + 2\alpha n l + \alpha^2 k_1 n + n \alpha^2 k_2 + 3n \alpha + n \alpha^2 - 2k_1 k_2 n l - 2\alpha k_1 k_2 l + 2\alpha n l \beta + 2n^3 \alpha + n^4 + 2\ln^2 \beta + n^2 \alpha^2) / (\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l-2-\beta-\alpha-2n) (n+k_2+1) (k_1+n)),$$

$$x_{12} = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) (2l+2k_1+\alpha k_1+l\beta+n^2+n\alpha+2n-k_1 l+n k_1)}{\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) (k_1+n)},$$

$$x_{13} = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) (2k_2+2+\alpha+l+n^2+3n+\alpha k_2+n k_2+n\alpha+l\beta-k_2 l)}{(n+k_2+1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(l+1)},$$

$$x_{14} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n)}{\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{21} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n) (n\alpha+\alpha k_1+l\beta+2l-\beta-2+n k_1-k_1 l+2k_1+n^2-n)}{(k_1+n) (n+k_2+1) \Gamma(l) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{22} = (-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) (\ln^2 k_1 - \ln^2 k_2 + k_2^2 k_1 l + 2n k_1^2 l - 2k_2^2 l - k_1^2 k_2 l + \alpha k_2 l \beta - k_2 l^2 \beta + k_1 l^2 \beta + 4n^2 + \alpha k_1 \beta + 2k_1 k_2 \beta - k_2^2 l \beta - k_1 l \beta^2 - 6k_1 l \beta - \alpha k_1 l \beta + \alpha k_1 k_2 \beta + k_1^2 l \beta + k_2 l \beta^2 + 3k_2 l \beta + 2nk_2 + 2k_1 k_2 - 4k_1^2 - k_1^2 \beta n + 2l \beta^2 + 2\alpha l \beta - 2l^2 \beta + 3n^2 k_2 - 2nk_2^2 - 3n^2 k_1 + 10l \beta + 2k_1 \beta - k_1^2 l^2 + 4k_1^2 l - 2k_2^2 k_1 - 4nk_1^2 + 2k_1^2 k_2 + 5nk_1 k_2 + 4k_1 l^2 + 12l + 4n + 4\alpha k_1 + 4\alpha l + 4k_1 - 4l^2 - 2k_1^2 \beta - 2k_2 l^2 + 2k_2 l - 12k_1 l - 4\ln k_1 + 4\ln - \ln^2 + k_1 k_2 l^2 - k_1 k_2 l - \alpha^2 k_1^2 - k_1^2 \beta \alpha + \alpha^2 k_1 - 4\alpha k_1^2 + \alpha^2 k_1 k_2 + 3\alpha k_1 k_2 + \alpha k_1^2 k_2 - \alpha k_2^2 k_1 - k_1 n^3 - 5\alpha k_1 l + 2\alpha k_2 l + k_1 k_2 n \beta + 3\alpha k_1 k_2 n + \alpha k_1 n l - \alpha k_2 n l + n^2 \beta - k_1 n l \beta - \alpha k_1 n \beta + \alpha k_2 n \beta + k_2 n^3 + 2n^2 \alpha - k_1^2 n^2 - k_2^2 n^2 + 2n \beta - k_2^2 k_1 n + k_1^2 k_2 n + 3n l \beta - k_1 n^2 \beta - k_1 n \beta + k_2 n^2 \beta + 2k_2 n \beta + n^3 + 2k_1 k_2 n^2 + k_2 n l \beta + 3\alpha k_2 n + 2\alpha k_2 n^2 - 2\alpha k_1 n - 2\alpha k_1 n^2 - n \alpha k_2^2 - 2\alpha k_1^2 n - \alpha n l - \alpha^2 k_1 n + n \alpha^2 k_2 + 4n \alpha + n \alpha^2 + n \alpha \beta - 2k_1 k_2 n l + 2\alpha k_1^2 l - 2\alpha k_1 k_2 l) / (\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) (\beta+1-k_2) (k_1+n) (k_2-k_1+2)),$$

$$x_{23} = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n)}{(n+k_2+1) \Gamma(l) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{24} = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n) (\beta+3+\alpha-k_2+n-l)}{(\beta+1-k_2) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(n-l+1) \Gamma(l+1)},$$

$$x_{31} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n) (n\alpha + \alpha + \alpha k_2 + l\beta + l - \beta + nk_2 - k_2 l + 2k_2 + n^2 + 2n)}{(k_1+n)(n+k_2+1) \Gamma(l) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{32} = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n)}{(k_1+n) \Gamma(l) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$\begin{aligned} x_{33} = & (-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n) (6 + \ln^2 k_1 - 2 \ln k_2^2 - \ln^2 k_2 \\ & + k_2^2 k_1 l - 5 k_2^2 l - k_1^2 k_2 l + \alpha k_2 l \beta - k_2 l^2 \beta + k_1 l^2 \beta + 6 n^2 - \alpha k_1 \beta + \alpha k_2^2 \beta - 2 k_1 k_2 \beta \\ & + 2 \alpha k_2 \beta - k_2^2 l \beta - k_1 l \beta^2 - 5 k_1 l \beta - \alpha k_1 l \beta - \alpha k_1 k_2 \beta + k_1^2 l \beta + k_2 l \beta^2 + 4 k_2 l \beta + \alpha^2 \\ & + 16 n k_2 - 14 n k_1 - 10 k_1 k_2 + 2 k_1^2 + 6 k_2^2 + \alpha \beta + 7 n^2 k_2 + 5 n k_2^2 - 7 n^2 k_1 - l \beta - 2 k_1 \beta + k_1^2 l \\ & - 2 k_2^2 k_1 + 3 n k_1^2 + 2 k_1^2 k_2 + k_2^2 l^2 + 2 k_2^2 \beta - 9 n k_1 k_2 + k_1 l^2 - 3 l + 4 k_2 \beta + 11 n + 10 \alpha k_2 \\ & - 6 \alpha k_1 - \alpha l + 12 k_2 - 8 k_1 + 5 \alpha - k_2 l^2 - 2 k_1 l - 2 \ln k_2 + 2 \ln k_1 - 4 \ln - \ln^2 - k_1 k_2 l^2 + 5 k_1 k_2 l \\ & + \alpha^2 k_2^2 - \alpha^2 k_1 + 2 \alpha^2 k_2 + \alpha k_1^2 + 5 \alpha k_2^2 - \alpha^2 k_1 k_2 - 7 \alpha k_1 k_2 + \alpha k_1^2 k_2 + 2 \beta - \alpha k_2^2 k_1 - 2 \alpha k_2^2 l \\ & - k_1 n^3 - \alpha k_2 l - k_1 k_2 n \beta - 3 \alpha k_1 k_2 n + \alpha k_1 n l - \alpha k_2 n l + n^2 \beta - k_1 n l \beta - \alpha k_1 n \beta + \alpha k_2 n \beta \\ & + k_2 n^3 + 2 n^2 \alpha + k_1^2 n^2 + k_2^2 n^2 + 3 n \beta - k_2^2 k_1 n + k_1^2 k_2 n + k_2^2 n \beta - n l \beta - k_1 n^2 \beta - 3 k_1 n \beta \\ & + k_2 n^2 \beta + 4 k_2 n \beta + n^3 - 2 k_1 k_2 n^2 + k_2 n l \beta + 9 \alpha k_2 n + 2 \alpha k_2 n^2 - 8 \alpha k_1 n - 2 \alpha k_1 n^2 + 2 n \alpha k_2^2 \\ & + \alpha k_1^2 n - \alpha n l - \alpha^2 k_1 n + n \alpha^2 k_2 + 7 n \alpha + n \alpha^2 + n \alpha \beta + 2 k_1 k_2 n l + 2 \alpha k_1 k_2 l) / \\ & (\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-3-\beta-\alpha-2n) (n+k_2+1) (k_1-k_2) (\beta+2-k_1)), \end{aligned}$$

$$x_{34} = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n) (\beta+4+\alpha-k_1+n-l)}{\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n) (\beta+2-k_1)},$$

$$x_{41} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-2-\beta-\alpha-2n)}{(k_1+n)(n+k_2+1) \Gamma(l-1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{42} = \frac{(-1)^l (\beta+3+\alpha-k_2+n-l) \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n)}{(k_1+n) (\beta+1-k_2) \Gamma(l) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{43} = \frac{(-1)^l (\beta+4+\alpha-k_1+n-l) \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-3-\alpha-2n)}{(n+k_2+1) (\beta+2-k_1) \Gamma(l) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-1) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n)},$$

$$x_{44} = \frac{(-1)^l \Gamma(n+1) \Gamma(l-2-\alpha-n) \Gamma(-\beta-4-\alpha-2n) (\beta+3+\alpha-k_2+n-l) (\beta+4+\alpha-k_1+n-l)}{\Gamma(l+1) \Gamma(n-l+1) \Gamma(-\alpha-n-2) \Gamma(l-4-\beta-\alpha-2n) (\beta+1-k_2) (\beta+2-k_1)}.$$

Aquí,  $\Gamma$  denota la función Gamma de Euler.

### A.3. Expresiones explícitas de E y F

Los operadores diferenciales de orden 4 que se introdujeron en la Sección 5.3 están dados por

$$E = J_4(t) \partial^4 + J_3(t) \partial^3 + J_2(t) \partial^2 + J_1(t) \partial^1 + J_0(t) \partial^0,$$

con  $J_4, J_3, J_2, J_1, J_0$  dados por

$$J_4 = \frac{(\beta - k_1 + 2)(k_1 - k_2)}{(\beta - k_2 + 1)} t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1 - k_2 - 2}(1 - t) & 0 & \frac{1}{k_1 - k_2 - 2}(1 - t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1 - k_2 - 1} & 0 & -\frac{1}{k_1 - k_2 - 2}(1 - t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \frac{(\beta + 2 - k_1)(k_2 - k_1)}{-k_1 + k_2 + 1} t \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{g_{31}^1}{(-k_1 + k_2 + 2)(\beta + 1 - k_2)} & 1 & \frac{2(-k_1 + k_2 + 1)(\beta + 4 + \alpha - k_2)}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)} & \frac{(-k_1 + k_2 + 1)}{-k_1 + k_2 + 2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2(\beta + 4 + \alpha - k_2)}{(\beta + 1 - k_2)} & -\frac{(-k_1 + k_2 + 2)}{(-k_1 + k_2 + 1)} & -\frac{g_{31}^2}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 1)} & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{(\beta + 2 - k_1)(k_2 - k_1)}{-k_1 + k_2 + 1} t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{g_{32}^1(-k_1 + k_2 + 1)}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)} & -1 & -\frac{2(g_{32}^1 + 2)(-k_1 + k_2 + 1)}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)} & -\frac{2(-k_1 + k_2 + 1)}{-k_1 + k_2 + 2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-2k_2 + k_1 + 2\beta + 2\alpha + 12)}{\beta + 1 - k_2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ t^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{(\beta + 2 - k_1)(k_2 - k_1)}{-k_1 + k_2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\beta + 2 - k_1)(k_2 - k_1)(k_1 + 6 + \alpha + \beta - k_2)}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)} & \frac{(\beta + 2 - k_1)(k_2 - k_1)}{-k_1 + k_2 + 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \frac{(\beta + 2 - k_1)(k_2 - k_1)}{-k_1 + k_2 + 1} \left[ \begin{pmatrix} -(\beta + 4 + \alpha - k_2) & \frac{(k_1 - k_2 - 2)(\beta + 1 - k_2)}{-k_1 + k_2 + 1} & \frac{g_{20}^1}{k_1 - k_2 - 1} & -(\beta + 1 - k_2) \\ \frac{(\beta + 4 + \alpha - k_2)g_{20}^2}{(-k_1 + k_2 + 2)(\beta + 1 - k_2)} & \frac{g_{20}^2}{-k_1 + k_2 + 1} & \frac{g_{20}^3 g_{20}^4}{(\beta + 1 - k_2)} & \frac{g_{20}^2}{-k_1 + k_2 + 2} \\ (\beta + 4 + \alpha - k_2) & \frac{(-k_1 + k_2 + 2)(\beta + 1 - k_2)}{-k_1 + k_2 + 1} & \frac{g_{20}^1}{-k_1 + k_2 + 1} & (\beta + 1 - k_2) \\ -\frac{(\beta + 3 + \alpha - k_2)(\beta + 4 + \alpha - k_2)}{\beta + 1 - k_2} & \frac{(k_1 - k_2 - 2)(\beta + 3 + \alpha - k_2)}{-k_1 + k_2 + 1} & \frac{g_{20}^5}{\beta + 1 - k_2} & -(\beta + 3 + \alpha - k_2) \end{pmatrix} \right]$$

$$+ t \begin{pmatrix} k_1 - k_2 + \beta + 4 + \alpha & \frac{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)}{-k_1 + k_2 + 1} & \frac{g_{21}^1}{-k_1 + k_2 + 1} & 2\beta + 2 - 2k_2 \\ g_{21}^2 & k_2 - k_1 - 3 - \alpha - \beta & \frac{g_{21}^3}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)} & -\frac{g_{21}^4}{-k_1 + k_2 + 2} \\ 0 & 0 & k_2 - k_1 - \alpha - \beta - 7 & -\beta - 1 + k_2 \\ 0 & 0 & g_{21}^5 & k_1 - k_2 + \alpha + \beta + 6 \end{pmatrix}$$

$$+ t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_2 - 2k_1 - \beta - 7 - \alpha & -\beta - 1 + k_2 \\ 0 & 0 & \frac{(-k_1 + k_2 + 1)g_{22}^1}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)} & \frac{(-k_1 + k_2 + 1)(-k_2 + 2k_1 + \beta + 6 + \alpha)}{-k_1 + k_2 + 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$J_1 = \frac{(\beta+2-k_1)(k_2-k_1)}{-k_1+k_2+1} \left( \begin{array}{cccc} \frac{-\beta-4-\alpha+k_2}{(\beta+4+\alpha-k_2)g_{20}^1} & \frac{(\beta+1-k_2)(k_1-k_2-2)}{-k_1+k_2+1} & \frac{-g_{20}^1}{-k_1+k_2+1} & -\beta-1+k_2 \\ \frac{\beta+4+\alpha-k_2}{(\beta+1-k_2)(-k_1+k_2+2)} & \frac{g_{20}^1}{-k_1+k_2+1} & \frac{g_{20}^3 g_{20}^4}{(\beta+1-k_2)} & \frac{g_{20}^2}{-k_1+k_2+2} \\ \frac{-(\beta+4+\alpha-k_2)(\beta+3+\alpha-k_2)}{\beta+1-k_2} & \frac{(\beta+1-k_2)(-k_1+k_2+2)}{-k_1+k_2+1} & \frac{g_{20}^1}{-k_1+k_2+1} & \beta+1-k_2 \\ \frac{-(\beta+4+\alpha-k_2)(\beta+3+\alpha-k_2)}{\beta+1-k_2} & \frac{(k_1-k_2-2)(\beta+3+\alpha-k_2)}{-k_1+k_2+1} & \frac{(\beta+3+\alpha-k_2)g_{20}^3}{(\beta+1-k_2)} & -\beta-3-\alpha+k_2 \end{array} \right) \\ + t \left( \begin{array}{cccc} \frac{-\beta-4-\alpha+k_2}{(\beta+4+\alpha-k_2)g_{20}^2} & \frac{(\beta+1-k_2)(k_1-k_2-2)}{-k_1+k_2+1} & \frac{-g_{20}^1}{-k_1+k_2+1} & -\beta-1+k_2 \\ \frac{\beta+4+\alpha-k_2}{(\beta+1-k_2)(-k_1+k_2+2)} & \frac{g_{20}^2}{-k_1+k_2+1} & \frac{g_{20}^3 g_{20}^4}{(\beta+1-k_2)} & \frac{g_{20}^2}{-k_1+k_2+2} \\ \frac{-(\beta+4+\alpha-k_2)(\beta+3+\alpha-k_2)}{\beta+1-k_2} & \frac{(\beta+1-k_2)(-k_1+k_2+2)}{-k_1+k_2+1} & \frac{g_{20}^1}{-k_1+k_2+1} & \beta+1-k_2 \\ \frac{-(\beta+4+\alpha-k_2)(\beta+3+\alpha-k_2)}{\beta+1-k_2} & \frac{(k_1-k_2-2)(\beta+3+\alpha-k_2)}{-k_1+k_2+1} & \frac{-(\beta+3+\alpha-k_2)g_{20}^1}{(\beta+1-k_2)(-k_1+k_2+1)} & -\beta-3-\alpha+k_2 \end{array} \right), \\ J_0 = \frac{(\beta+2-k_1)(k_2-k_1)}{-k_1+k_2+1} \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -(1+k_1)k_1(\beta+3+\alpha-k_2) & -k_1(1+k_1)(\beta+1-k_2) \\ 0 & 0 & g_{00}^1 & \frac{(1+k_1)k_1(-k_2+\beta+2+\alpha)(-k_1+k_2+1)}{-k_1+k_2+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} g_{31}^1 &= 5k_2 - 2\alpha k_1 + 2\alpha k_2 - 8k_1 + 2k_1 k_2 + 2k_2 \beta + 2\alpha - 2k_1 \beta - 2k_2^2 + 9 + 3\beta, \\ g_{31}^2 &= 7k_2 - 2\alpha k_1 - 8k_1 - 2k_1 \beta + \beta + 2k_1 k_2 + 2\alpha k_2 - 2k_2^2 + 7 + 2k_2 \beta + 2\alpha, \\ g_{32}^1 &= -2k_2 + k_1 + 2\beta + 2\alpha + 8, \quad g_{20}^1 = -\alpha k_1 + \alpha k_2 + \alpha + 3 + k_2 \beta - 4k_1 + 4k_2 - k_2^2 \\ &\quad + k_1 k_2 - k_1 \beta, \\ g_{20}^2 &= k_2 \beta + k_2 - k_1 \beta - 3k_1 - \alpha k_1 - k_2^2 + k_1 k_2 + 4 + \alpha k_2 + 2\beta + \alpha, \\ g_{20}^3 &= \frac{g_{20}^1}{-k_1 + k_2 + 2}, \quad g_{20}^4 = \frac{g_{20}^2}{-k_1 + k_2 + 1}, \quad g_{20}^5 = -\frac{(\beta + 3 + \alpha - k_2)g_{20}^1}{-k_1 + k_2 + 1}, \\ g_{21}^1 &= 4k_1 k_2 - 2\alpha k_1 - 2k_1^2 - 2k_2^2 + 2k_2 \beta + 10k_2 + 2\alpha k_2 + \beta + 10 + 2\alpha - 2k_1 \beta - 9k_1, \\ g_{21}^3 &= 4k_1 k_2 - 2k_1 \beta - 7k_1 - 2k_1^2 - 2k_2^2 + 2k_2 \beta + 6k_2 + 2\alpha k_2 + 3\beta + 10 + 2\alpha - 2\alpha k_1, \\ g_{21}^4 &= -\frac{(-k_1 + k_2 + 1)(\beta + 3 + \alpha - k_2)(\alpha + 4 - k_2 + 2k_1 + \beta)}{(\beta + 1 - k_2)(-k_1 + k_2 + 2)}, \\ g_{21}^5 &= \frac{(\beta + 4 + \alpha - k_2)(\alpha + 9 - k_2 + 2k_1 + \beta)}{\beta + 1 - k_2}, \\ g_{22}^1 &= k_2^2 - 4k_1 k_2 - 2k_2 \beta - 13k_2 - 2\alpha k_2 + 4\alpha k_1 + 17k_1 + k_1^2 + 4k_1 \beta + 2\alpha \beta + \alpha^2, \\ &\quad + 13\alpha + \beta^2 + 13\beta + 36 \\ g_{00}^1 &= \frac{(1+k_1)k_1(-k_2+\beta+2+\alpha)(\beta+3+\alpha-k_2)(-k_1+k_2+1)}{(-k_1+k_2+2)(\beta+1-k_2)}, \\ g_{21}^2 &= -2(26 - 2k_1^2 \beta - 2\alpha k_1 \beta + 2\alpha k_2 \beta + 4k_1 k_2 \beta - 2k_2^2 \beta + k_2 \beta^2 + 10\alpha + 12\beta \\ &\quad + 15k_1 k_2 - 3k_1 k_2^2 + 2k_1^2 k_2 + \alpha^2 k_2 - 2\alpha k_2^2 + 8\alpha k_2 - \alpha^2 k_1 + \alpha^2 - 8\alpha k_1 - k_1 \beta^2 \\ &\quad - 2\alpha k_1^2 + 8k_2 \beta - 8k_1 \beta + 4\alpha k_2 k_1 + \beta^2 + 2\alpha \beta + 12k_2 - 17k_1 + k_2^3 - 9k_2^2 - 7k_1^2). \end{aligned}$$

El segundo operador diferencial de orden 4 está dado por

$$F = K_4(t)\partial^4 + K_3(t)\partial^3 + K_2(t)\partial^2 + K_1(t)\partial^1 + K_0(t)\partial^0,$$

con  $K_4, K_3, K_2, K_1, K_0$  dados por

$$K_4 = \frac{(\beta - k_2 + 1)(k_1 - k_2 - 2)}{(\beta - k_1 + 2)} t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1 - k_2} (1 - t) & \frac{1}{k_1 - k_2} (1 - t)^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} (1 - t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \frac{k_2 - k_1 + 1}{(-\beta + k_2 - 1)(k_2 - k_1 + 2)} \left[ t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-h_{31}^1}{(-\beta - 2 + k_1)(k_2 - k_1)} & \frac{-2(-\beta - 5 - \alpha + k_1)(k_2 - k_1 + 1)}{(-\beta - 2 + k_1)(k_2 - k_1)} & -1 & \frac{-k_2 + k_1 - 1}{k_2 - k_1} \\ \frac{2(-\beta - 5 - \alpha + k_1)}{-\beta - 2 + k_1} & \frac{h_{31}^2}{(k_2 - k_1 + 1)(-\beta - 2 + k_1)} & \frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_1 + 1} & 1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + t^2 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_2 - k_1 + 1)(k_2 - 2k_1 + 2\beta + 11 + 2\alpha)}{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)} & \frac{-2(k_2 - k_1 + 1)(-2k_1 + k_2 + 13 + 2\alpha + 2\beta)}{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)} & 1 & \frac{2(k_2 - k_1 + 1)}{k_2 - k_1} \\ 0 & \frac{(k_2 - 2k_1 + 2\beta + 15 + 2\alpha)}{-\beta - 2 + k_1} & 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(-k_1 + k_2 + 8 + \alpha + \beta)(k_2 - k_1 + 1)}{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)} & 0 & \frac{-(k_2 - k_1 + 1)}{k_2 - k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$K_2 = \frac{k_2 - k_1 + 1}{(-\beta + k_2 - 1)(k_2 - k_1 + 2)} \left[ \begin{pmatrix} \beta + 5 + \alpha - k_1 & \frac{-h_{20}^1}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{-(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}{k_2 - k_1 + 1} & -k_1 + 2 + \beta \\ -\beta - 5 - \alpha + k_1 & \frac{h_{20}^2}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}{k_2 - k_1 + 1} & -\beta - 2 + k_1 \\ \frac{(-\beta - 5 - \alpha + k_1)h_{20}^3}{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)} & \frac{h_{20}^3 h_{20}^4}{-\beta - 2 + k_1} & \frac{h_{20}^4}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{h_{20}^5}{k_2 - k_1} \\ h_{20}^5 & \frac{-(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)h_{20}^6}{-\beta - 2 + k_1} & \frac{-(k_2 - k_1)(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)}{k_2 - k_1 + 1} & \beta + 4 + \alpha - k_1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + t \begin{pmatrix} k_1 - k_2 - 6 - \alpha - \beta & \frac{h_{21}^1}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}{k_2 - k_1 + 1} & -2\beta - 4 + 2k_1 \\ 0 & k_2 - k_1 + \beta + 9 + \alpha & 0 & -k_1 + 2 + \beta \\ h_{21}^4 & \frac{h_{21}^2}{(-\beta - 2 + k_1)(k_2 - k_1)} & k_2 + \beta + 5 + \alpha - k_1 & \frac{h_{21}^3}{k_2 - k_1} \\ 0 & \frac{-(-\beta - 5 - \alpha + k_1)(-k_1 + \alpha + 2k_2 + 12 + \beta)}{-\beta - 2 + k_1} & 0 & k_1 - k_2 - 8 - \alpha - \beta \end{pmatrix} \right. \\ \left. + t^2 \begin{pmatrix} 0 & 2k_2 - k_1 + 10 + \alpha + \beta & 0 & -k_1 + 2 + \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(k_2 - k_1 + 1)h_{22}^1}{(-\beta - 2 + k_1)(k_2 - k_1)} & 0 & \frac{-(k_2 - k_1 + 1)(2k_2 - k_1 + \alpha + 9 + \beta)}{k_2 - k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$K_1 = \frac{k_2 - k_1 + 1}{(-\beta + k_2 - 1)(k_2 - k_1 + 2)} \left[ \begin{array}{cccc} \beta + 5 + \alpha - k_1 & \frac{-h_{20}^1}{k_2 - k_1 + 1} & -\frac{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}{k_2 - k_1 + 1} & -k_1 + 2 + \beta \\ -\beta - 5 - \alpha + k_1 & \frac{h_{20}^2}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}{k_2 - k_1 + 1} & -\beta - 2 + k_1 \\ \frac{(-\beta - 5 - \alpha + k_1)h_{20}^3}{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)} & \frac{h_{20}^3 h_{20}^4}{-\beta - 2 + k_1} & \frac{h_{20}^3}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{h_{20}^3}{k_2 - k_1} \\ h_{20}^5 & \frac{-(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)h_{20}^3}{-\beta - 2 + k_1} & \frac{-(k_2 - k_1)(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)}{k_2 - k_1 + 1} & \beta + 4 + \alpha - k_1 \end{array} \right] \\ + t \left[ \begin{array}{cccc} k_1 - k_2 - 6 - \alpha - \beta & \frac{h_{21}^1}{k_2 - k_1 + 1} & \frac{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}{k_2 - k_1 + 1} & -2\beta - 4 + 2k_1 \\ 0 & k_2 - k_1 + \beta + 9 + \alpha & 0 & -k_1 + 2 + \beta \\ h_{21}^4 & \frac{h_{21}^2}{(-\beta - 2 + k_1)(k_2 - k_1)} & k_2 + \beta + 5 + \alpha - k_1 & \frac{h_{21}^3}{k_2 - k_1} \\ 0 & \frac{-(-\beta - 5 - \alpha + k_1)(-k_1 + \alpha + 2k_2 + 12 + \beta)}{-\beta - 2 + k_1} & 0 & k_1 - k_2 - 8 - \alpha - \beta \end{array} \right],$$

$$K_0 = \frac{k_2 - k_1 + 1}{(-\beta + k_2 - 1)(k_2 - k_1 + 2)} \left( \begin{array}{cccc} 0 & -(k_2 + 1)(2 + k_2)(-\alpha + k_1 - 4 - \beta) & 0 & -(k_2 + 1)(2 + k_2)(-\beta - 2 + k_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{00}^1 & 0 & \frac{(2 + k_2)(k_2 + 1)(-3 - \beta - \alpha + k_1)(k_2 - k_1 + 1)}{k_2 - k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

con

$$h_{31}^1 = -2k_1^2 - 2\alpha + 2k_1k_2 + 11k_1 + 2\alpha k_1 + 2k_1\beta - 2k_2\beta - 10k_2 - 2\alpha k_2 - \beta - 8,$$

$$h_{31}^2 = -2k_1^2 - 2\alpha + 2k_1k_2 + 13k_1 - 12 + 2k_1\beta + 2\alpha k_1 - 2k_2\beta - 10k_2 - 2\alpha k_2 - 3\beta,$$

$$h_{20}^1 = (-k_1^2 + 7k_1 + \alpha k_1 + k_1\beta + k_1k_2 - \alpha k_2 - 2\beta - k_2\beta - 5k_2 - \alpha - 7),$$

$$h_{20}^2 = (k_1k_2 + k_1\beta + 4k_1 + \alpha k_1 - k_2\beta - 4k_2 - \alpha k_2 - 2 - \alpha - k_1^2),$$

$$h_{20}^3 = \frac{h_{20}^1}{k_2 - k_1 + 1}, \quad h_{20}^4 = \frac{h_{20}^2}{k_2 - k_1}, \quad h_{20}^5 = \frac{-(-\beta - 5 - \alpha + k_1)(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)}{-\beta - 2 + k_1},$$

$$h_{21}^1 = -(2\alpha + 3\beta + 17 + 2k_1^2 - 4k_1k_2 - 18k_1 - 2k_1\beta - 2\alpha k_1 + 2k_2^2 + 2\alpha k_2 + 2k_2\beta + 17k_2),$$

$$h_{21}^3 = (\beta + 11 + 2\alpha + 2k_1^2 - 4k_1k_2 - 2k_1\beta - 14k_1 - 2\alpha k_1 + 2k_2^2 + 15k_2 + 2k_2\beta + 2\alpha k_2),$$

$$h_{21}^4 = \frac{(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)(k_2 - k_1 + 1)(-k_1 + \alpha + 2k_2 + 7 + \beta)}{(-\beta - 2 + k_1)(k_2 - k_1)},$$

$$h_{22}^1 = (k_2^2 + 4k_2\beta + 23k_2 + 4\alpha k_2 - 4k_1k_2 + \alpha^2 - 2\alpha k_1 - 19k_1 + 19\beta + 2\alpha\beta + k_1^2 + 72 - 2k_1\beta + \beta^2 + 19\alpha),$$

$$h_{00}^1 = \frac{(-3 - \beta - \alpha + k_1)(-\alpha + k_1 - 4 - \beta)(2 + k_2)(k_2 + 1)(k_2 - k_1 + 1)}{(k_2 - k_1)(-\beta - 2 + k_1)}.$$

$$h_{21}^2 = 2(-40 + 4\alpha k_1k_2 - k_2\beta^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha k_1\beta - 2\alpha k_2^2 - 2\alpha k_1^2 - \alpha^2 k_2 - 53k_2 + 56k_1 + 25k_1k_2 - 15k_1^2 + k_1^3 - 3k_1^2k_2 + 4k_1k_2\beta + \alpha^2 k_1 - 16\alpha k_2 + 16\alpha k_1 - \alpha^2 + 16k_1\beta k_2^2 - 16k_2\beta + 2k_1 - 12\beta - 14\alpha - 2\alpha k_2\beta - 9k_2^2 - 2k_2^2\beta - 2k_1^2\beta - \beta^2 + k_1\beta^2).$$

#### A.4. Expresión de FE

Esta expresión corresponde con el final de la Sección 5.3:

$$\begin{aligned}
& \frac{(k_1 - k_2 - 1)^3}{(k_1 - k_2 - 2)^2} EF = [(k_1 - k_2)D_2 + (k_1 - k_2 - 1)D_3] [D_2 + D_3 - (\alpha + \beta - k_2 + 2)] \times \\
& \times \left[ (k_1 - k_2 - 1)(k_1 - k_2 - 2) \left( (1 - k_1)(\alpha + \beta - k_1 + 1) + (1 + k_2)(\alpha + \beta - k_2 + 1) + 2 \right) D_2 \right. \\
& + (k_1 - k_2 - 1)^2 (k_1 - k_2 - 2) \left( (k_1 - k_2)(k_1(\alpha + \beta - k_1) - k_2(\alpha + \beta - k_2 - 4) \right. \\
& \left. \left. + 2(1 - \alpha - \beta)) - 2 \right) D_3 + (k_1 - k_2 - 1)(k_1 - k_2 - 2)^2 (2k_1 - 2k_2 + 1) D_2 D_3 \right. \\
& \left. - (k_1 - k_2 - 1)^3 (\alpha + \beta - 2k_2 + 1)(\alpha + \beta - k_1 - k_2 + 1) \right].
\end{aligned}$$


---



## Apéndice B

# Fórmulas para los polinomios ortogonales de algunos ejemplos del Capítulo 4

En este apéndice se dan algunas fórmulas para algunos de los ejemplos introducidos en el Capítulo 4 y para valores especiales de los parámetros. Para ello, se usará la Proposición 2.2.4. También, para cada uno de ellos, encontraremos una expresión de la forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma} P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma}) P_{n,1},$$

donde la sucesión  $\alpha_{n,\gamma}$  es escalar, a diferencia de la Proposición 2.2.5.

### B.1. Fórmulas para los polinomios ortogonales de la Sección 4.1.2

Encontramos una expresión de la familia  $(P_{n,\alpha,\alpha,t_0,\gamma})_n$  de la Sección 4.1.2 para el caso especial de  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1/2$  y  $t_0 = 0$ . En este caso, usando la notación de la Proposición 2.2.4, se tiene que la familia  $(P_n)_n = (P_{n,1/2,0})_n$  verifica la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:

$$tP_n = P_{n+1} + B_n P_n + A_n P_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = I,$$

donde

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{2n+3}{(5n+4)(5n+9)} & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{(5n+4)(5n+9)} & 2n+1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \quad A_n = \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)(5n+9)}{5n+4} & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)(5n-1)}{5n+4} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Luego para hallar la fórmula de recurrencia (2.15) para la familia  $(P_{n,\gamma})_n = (P_{n,1/2,0,0,\gamma})_n$  es necesario disponer de los dos siguientes coeficientes (véase (2.14)) para  $n = 0, 1, \dots$ :

$$\tilde{C}_n^{n+1,\gamma} = - \left( \frac{\frac{12\gamma(n+1)^{(2)}(5n+8)(5n+13)}{480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24)}}{\frac{24\gamma(n+1)^{(2)}(5n+8)(5n+13)}{(5n+9)(480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24))}} \quad \frac{\frac{3}{2} \frac{\gamma(n+1)^{(2)}(5n+8)^{(2)}(5n+13)}{480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24)}}{\frac{3\gamma(n+1)^{(2)}(5n+8)(5n+13)}{(5n+9)(480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24))}} \right),$$

$$\tilde{C}_n^{n+2,\gamma} = \left( \begin{array}{cc} \frac{12\gamma(n+1)^{(3)}(5n+8)(5n+18)}{480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24)} & \frac{3}{2} \frac{\gamma(n+1)^{(3)}(5n+8)^{(2)}(5n+18)}{480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24)} \\ \frac{24\gamma(n+1)^{(3)}(5n+8)(5n+18)}{(5n+14)(480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24))} & \frac{3\gamma(n+1)^{(2)}(5n+8)(5n+13)}{(5n+14)(480n+864+25\gamma(n+1)^{(2)}(5n^2+21n+24))} \end{array} \right).$$

También se obtiene cierta representación de  $(P_{n,\gamma})_n$  de la forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma} P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma}) P_{n,1},$$

donde

$$\alpha_{n,\gamma} = \frac{96(1-\gamma)(5n+4)}{480n+384+25\gamma n(n+1)(5n^2+11n+8)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Entonces la familia  $P_{n,\gamma}$  es ortogonal con respecto al siguiente peso matricial:

$$W_\gamma = e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(5t^2 - 2t + 1) & \frac{1}{2}(t - 1) \\ \frac{1}{2}(t - 1) & 1 \end{pmatrix} + \gamma \delta_0 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \geq 0,$$

y es autofunción del siguiente operador diferencial de segundo orden:

$$D = \partial^2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4}t(1-t) \\ 0 & \frac{5}{2}t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-t) & -1 + \frac{9}{2}t \\ -1 & 2(1-t) \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{9}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{20} \end{pmatrix}.$$

## B.2. Fórmulas para los polinomios ortogonales de la Sección 4.1.4

Encontramos una expresión de la familia  $(P_{n,\alpha,\beta,k,t_0,\gamma})_n$  de la Sección 4.1.4 para el caso especial de  $\alpha = \beta = 0$ ,  $k = 1/2$  y  $t_0 = 0$ . En este caso, usando la notación de la Proposición 2.2.4, se tiene que la familia  $(P_n)_n = (P_{n,0,0,1/2})_n$  verifica la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:

$$tP_n = P_{n+1} + B_n P_n + A_n P_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = I,$$

donde

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)(n+2)(2n^2+6n+3)}{(2n^2+4n+1)(2n^2+8n+7)} & -\frac{1}{2} \frac{2n^2+10n+11}{(2n^2+4n+1)(2n^2+8n+7)} \\ -\frac{1}{2} \frac{2n^2+2n-1}{(2n^2+4n+1)(2n^2+8n+7)} & \frac{2n^4+12n^3+23n^2+15n+1}{(2n^2+4n+1)(2n^2+8n+7)} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{n(n+2)(2n^2+4n-3)}{(2n+1)(2n+3)(2n^2+4n+1)} & -\frac{1}{2} \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n^2+4n+1)} \\ -\frac{1}{2} \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n^2+4n+1)} & \frac{1}{4} \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Luego para hallar la fórmula de recurrencia (2.15) para la familia  $(P_{n,\gamma})_n = (P_{n,0,0,1/2,0,\gamma})_n$  es necesario disponer de los dos siguientes coeficientes (véase (2.14)) para  $n = 0, 1, \dots$ :

$$\tilde{C}_n^{n+1,\gamma} = \left( \begin{array}{cc} \frac{\gamma(n+1)^{(3)}}{(2n^2+8n+7)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} & -\frac{\gamma(n+1)^{(3)}(2n+5)}{(2n^2+8n+7)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} \\ \frac{\gamma(n+1)^{(3)}(2n+3)}{(2n^2+8n+7)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} & -\frac{\gamma(n+1)^{(3)}(2n+3)(2n+5)}{(2n^2+8n+7)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} \end{array} \right),$$

$$\tilde{C}_n^{n+2,\gamma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\gamma(n+1)^{(4)}}{(2n+5)(2n^2+12n+17)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} & \frac{1}{2} \frac{\gamma(n+1)^{(4)}}{(2n^2+12n+17)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} \\ -\frac{1}{2} \frac{\gamma(n+1)^{(4)}}{(2n^2+12n+17)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} & \frac{1}{2} \frac{\gamma(n+1)^{(4)}(2n+5)}{(2n^2+12n+17)(4\gamma(n+1)^{(3)}(n+2)+2n^2+8n+7)} \end{pmatrix}.$$

También se obtiene cierta representación de  $(P_{n,\gamma})_n$  de la forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma} P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma}) P_{n,1},$$

donde

$$\alpha_{n,\gamma} = \frac{(1 - \gamma)(2n^2 + 4n + 1)}{2n^2 + 4n + 1 + 4\gamma(n)^{(3)}(n + 1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Entonces la familia  $P_{n,\gamma}$  es ortogonal con respecto al siguiente peso matricial:

$$W_\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + t^2 & 1 - t \\ 1 - t & (1 - t)^2 \end{pmatrix} + \gamma \delta_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \geq 0,$$

y es autofunción del siguiente operador diferencial de segundo orden:

$$D = \partial^2 \begin{pmatrix} 2t(t-1) & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} 8t-7 & 7-t \\ t-1 & 1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

### B.3. Fórmulas para los polinomios ortogonales de la Sección 4.2.2

Encontramos una expresión de la familia  $(P_{n,\alpha,\beta,k,\gamma})_n$  en el caso especial de  $\alpha = \beta = 0$ ,  $k = 1/2$ . En este caso, usando la notación de la Proposición 2.2.4, se tiene que la familia  $(P_n)_n = (P_{n,0,0,1/2})_n$  verifica la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:

$$tP_n = P_{n+1} + B_n P_n + A_n P_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = I,$$

donde

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{8n^4+32n^3+42n^2+24n+7}{(2n+1)^2(2n+3)^2} & -\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \\ -\frac{4n^2+4n-1}{2(2n+1)^2(2n+3)^2} & \frac{4n^2+8n+1}{2(2n+1)(2n+3)} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

y

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{n(4n^3+8n^2+n+1)}{4(2n+1)^4} & -\frac{n}{(2n+1)^3} \\ -\frac{n(4n^2+8n+1)}{4(2n+3)(2n+1)^4} & \frac{n(4n^3+12n^2+9n-2)}{4(2n+3)(2n+1)^3} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Luego para hallar la fórmula de recurrencia (2.15) para la familia  $(P_{n,\gamma})_n = (P_{n,0,0,1/2,\gamma})_n$  es necesario disponer de los dos siguientes coeficientes (véase (2.14)) para  $n = 0, 1, \dots$ :

$$C_n^{n+1,\gamma} = -\frac{2\gamma(2n+1)(n+1)^{(2)}}{(2n+3)(1+2\gamma(2n^2+6n+3)(n+1)^{(2)})} \begin{pmatrix} 2n+5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_n^{n+2,\gamma} = \frac{\gamma(2n+1)(n+1)^{(3)}}{(2n+3)(2n+5)(1+2\gamma(2n^2+6n+3)(n+1)^{(2)})} \begin{pmatrix} 2n+7 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

También se puede obtener cierta representación de  $(P_{n,\gamma})_n$  de la forma

$$P_{n,\gamma} = \alpha_{n,\gamma}P_n + (1 - \alpha_{n,\gamma})P_{n,1},$$

donde

$$\alpha_{n,\gamma} = \frac{1 - \gamma}{1 + 2\gamma n(n + 1)(2n^2 + 2n - 1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Entonces la familia  $P_{n,\gamma}$  es ortogonal con respecto al siguiente peso matricial:

$$W_\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+t & 1-t \\ 1-t & (1-t)^2 \end{pmatrix} + \gamma \delta_0 \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \geq 0,$$

y es autofunción del siguiente operador diferencial de segundo orden:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 3t(t-1) \end{pmatrix} \partial^2 + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}(t-1) \\ \frac{9}{2} & \frac{9}{2} - 12t \end{pmatrix} \partial^1 + \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{27}{4} \end{pmatrix} \partial^0.$$

---

# Bibliografía

- [AAR] Andrews, G. E., Askey, R. y Roy, R., *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics, No 71. Cambridge, 1999.
- [Be] Berezans'kiĭ, Ju. M., *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 17, American Mathematical Society, Rhode Island, 1968.
- [Boch] Bochner, S., *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math Z., **29** (1929), 730–736.
- [CMV] Cantero, M. J., Moral, L. y Velázquez, L., *Matrix orthogonal polynomials whose derivatives are also orthogonal*, J. Approx. Theory **146** (2007), 174–211.
- [CG1] Castro, M. M. y Grünbaum, F. A., *Orthogonal matrix polynomials satisfying first order differential equations: a collection of instructive examples*, J. Non-linear Math. Physics **12** (2005), supplement 2, 63–76.
- [CG2] Castro, M. M. y Grünbaum, F. A., *The algebra of matrix valued differential operators associated to a given family of matrix valued orthogonal polynomials: five instructive examples*, International Math. Research Notices **2006** (2006), Article ID 47602, 33 pages.
- [CG3] Castro, M. M. y Grünbaum, F. A., *The noncommutative bispectral problem for operators of order one*, Constr. Approx. (2007), doi: 10.1007/s00365-007-0676-y.
- [CH] Courant, R. y Hilbert, D., *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [DRSZ] Dette, H., Reuther, B., Studden, W. y Zygmunt, M., *Matrix measures and random walks with a block tridiagonal transition matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Applic. **29**, No. 1 (2006), 117–142.
- [D] Dirac, P. A. M., *Quantum Mechanics*, 4th ed. London: Oxford University Press, 1958.
- [DG] Duistermaat, J. J. y Grünbaum, F. A., *Differential equations in the spectral parameter*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 177–240.

- 
- [D1] Durán, A. J., *Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 87–104.
- [D2] Durán, A. J., *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory **74** (1993), 83–109.
- [D3] Durán, A. J., *On orthogonal polynomials with respect to positive definite matrix of measures*, Canad. J. Math. **47** (1995), 88–112.
- [D4] Durán, A. J., *Markov's theorem for orthogonal matrix polynomials*, Canad. J. Math. **48** (1996), 1180–1195.
- [D5] Durán, A. J., *Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential operator*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 585–600.
- [D6] Durán, A. J., *Ratio asymptotics for orthogonal matrix polynomials*, J. Approx. Theory **100** (1999), 304–344.
- [D7] Durán, A. J., *How to find weight matrices having symmetric second order differential operators with matrix leading coefficient*, prepublicación.
- [DD1] Durán, A. J. y Daneri, E., *Ratio asymptotics for orthogonal matrix polynomials with unbounded recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **110** (2001), 1–17.
- [DD2] Durán, A. J. y Daneri, E., *Weak convergence for orthogonal matrix polynomials*, Indag. Mathem. **13** (2002), 47–62.
- [DD] Durán, A. J. y Defez, E., *Orthogonal matrix polynomials and quadrature formulas*, Linear Algebra Appl. **345** (2002), 71–84.
- [DG1] Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *Orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, Internat. Math. Research Notices, 2004: **10** (2004), 461–484.
- [DG2] Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *A survey on orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **178** (2005), 169–190.
- [DG3] Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, I*, Constr. Approx. **22** (2005), no. 2, 255–271.
- [DG4] Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *Orthogonal matrix polynomials, scalar type Rodrigues' formulas and Pearson equations*, J. Approx. Theory. **134** (2005), 267–280.
-

- [DG5] Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *A characterization for a class of weight matrices with orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, International Math. Research Notices, 2005: **23** (2005), 1371–1390.
- [DG6] Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *P A M Dirac meets M G Krein: matrix orthogonal polynomials and Dirac's equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 3655–3662.
- [DdI1] Durán, A. J. and de la Iglesia, M. D., *Some examples of orthogonal matrix polynomials satisfying odd order differential equations*, J. Approx. Theory (2008), **150**, 153–174.
- [DdI2] Durán, A. J. y de la Iglesia, M. D., *Second order differential operators having several families of orthogonal matrix polynomials as eigenfunctions*, Internat. Math. Research Notices, pendiente de publicación.
- [DL1] Durán, A. J. y López-Rodríguez, P., *Orthogonal matrix polynomials: zeros and Blumenthal's theorem*, J. Approx. Theory **84** (1996), 96–118.
- [DL2] Durán, A. J. y López-Rodríguez, P., *The  $L^p$  space of a positive definite matrix of measures and density of matrix polynomials in  $L^1$* , J. Approx. Theory **90** (1997), 299–318.
- [DL3] Durán, A. J. y López-Rodríguez, P., *Density questions for the truncated matrix moment problem*, Canad. J. Math. **49**, No. 1, (1997), 708–721.
- [DL4] Durán, A. J. y López-Rodríguez, P., *N-extremal matrices of measures for an indeterminate matrix moment problem*, J. Funct. Anal. **174**, (2000), 301–321.
- [DL5] Durán, A. J. y López-Rodríguez, P., *Orthogonal matrix polynomials*, Laredo's SIAG Lecture Notes, R. Álvarez-Nodarse et al. editors, Advances in the Theory of Special Functions and Orthogonal Polynomials, Nova Science Publishers, Volume 1, 2003, 11–43.
- [DL6] Durán, A. J. y López-Rodríguez, P., *Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations, II*, Constr. Approx. **26**, No. 1, (2007), 29–47.
- [DLS] Durán, A. J., López-Rodríguez, P. y Saff, E. B., *Zero asymptotic behaviour for orthogonal matrix polynomials*, J. D'Analy. Math. **78** (1999), 37–60.
- [DP] Durán, A. J. y Polo, B., *Gaussian quadrature formulae for matrix weights*, Linear Algebra Appl. **355** (2002), 119–146.
- [DS] Durán, A. J. y Saff, E. B., *Zero location for nonstandard orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **113** (2001), 127–141.
-

- 
- [DvA] Durán, A. J. y Van Assche, W., *Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations*, Linear Algebra Appl. **219** (1995), 261–280.
- [Fe] Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications* (vol. 1), John Wiley & Sons Inc, 1968.
- [GV] Gangolli, R. y Varadarajan, V. S., *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988.
- [Gr] Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*(vol. 1 y 2), Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
- [Ge] Geronimo, J. S., *Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line*, Circuits Systems Signal Process **1**, 3, (1982), 471–495.
- [GLR] Gohberg, I., Lancaster P. y Rodman, L., *Matrix polynomials*, Academic Press, New York, London, 1982.
- [G1] Grünbaum, F. A., *Matrix valued Jacobi polynomials*, Bull. Sciences Math. **127**, 3, (2003), 207–214.
- [G2] Grünbaum, F. A., *Random walks and orthogonal polynomials: some challenges*, (2007), por aparecer en Probability, Geometry and Integrable Systems, MSRI Publication, volumen **55**, 2007. Véase también arXiv: math.PR/0703375v1.
- [GdI1] Grünbaum, F. A. y de la Iglesia, M. D., *Matrix valued orthogonal polynomials related to  $SU(N + 1)$ , their algebras of differential operators and the corresponding curves*, Exp. Math. **16**, No. 2, (2007), 189–207.
- [GdI2] Grünbaum, F. A. y de la Iglesia, M. D., *Matrix valued orthogonal polynomials arising from group representation theory and a family of quasi-birth-and-death processes*, SIAM J. Matrix Anal. Applic. **30**, No. 2 (2008), 741–761.
- [GPT1] Grünbaum, F. A., Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane*, J. Functional Analysis **188** (2002), 350–441.
- [GPT2] Grünbaum, F. A., Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *A matrix valued solution to Bochner's problem*, J. Physics A: Math. Gen. **34** (2001), 10647–10656.
- [GPT3] Grünbaum, F. A., Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *An invitation to matrix valued spherical functions: Linearization of products in the case of the complex projective space  $P_2(\mathbb{C})$* , see arXiv math. RT/0202304, MSRI publication *Modern Signal Processing*, D. Healy and D. Rockmore, editors **46** (2003), 147–160.
- [GPT4] Grünbaum, F. A., Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *Matrix valued orthogonal polynomials of the Jacobi type*, Indag. Mathem. **14** nrs. 3,4 (2003), 353–366.
-

- 
- [GPT5] Grünbaum, F. A., Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *Matrix valued orthogonal polynomials of the Jacobi type: The role of group representation theory*, Ann. Inst. Fourier, **55**, (5), (2005), 1–18.
- [GT] Grünbaum, F. A. y Tirao, J. A., *The algebra of differential operators associated to a weight matrix*, Integr. Equ. Oper. Theory **58** (2007), 449–475.
- [H] Hahn, W. *Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen*, Math. Z. **39** (1935), 634–638.
- [He] Helgason, S., *Groups and geometric analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, Am. Math. Soc., Providence, 2000.
- [Hil] Hildebrandt, E. H., *Systems of polynomials connected with the Charlier expansion and the Pearson differential and difference equation*, Ann. Math. Statist. **2** (1931), 379–439.
- [HJ] Horn, R. A. y Johnson, C. A., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [ILMV] Ismail, M.E.H., Letessier, J., Masson, D. y Valent, G., *Birth and death processes and orthogonal polynomials*, in Orthogonal Polynomials, P. Nevai (editor) Kluwer Acad. Publishers, 1990, 229–255.
- [KMcG] Karlin, S. y McGregor, J., *Random walks*, Illinois J. Math., **3** (1959), 66–81.
- [Kr1] Krall, H. L., *Certain differential equations for Tchebycheff polynomials*, Duke. Math. **4** (1938), 705–718.
- [Kr2] Krall, H. L., *On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation*, The Pennsylvania State College Bulletin **6** (1941), 1–24.
- [K1] Kreĭn, M. G., *Infinite J-matrices and a matrix moment problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **69** No. 2 (1949), 125–128.
- [K2] Kreĭn, M. G., *Fundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with deficiency index  $(m, m)$* , AMS Translations, Series 2, **97** (1971), Providence, Rhode Island, 75–143.
- [Kri] Krichever, I. M., *Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations*, (Ruso) Uspekhi Mat. Nauk **32** (1977), 185–213, *traducido en Russ.* Math. Surveys **32** (1977), 185–213.
- [LPT] Latouche, G., Pearce, C. E. M. y Taylor, P. G., *Invariant measures for quasi-birth-and-death processes*, Comm. Statist. Stochastic Models, **14** (1998), 443–460.
-

- 
- [LaR] Latouche, G. y Ramaswami, V., *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability, 1999.
- [Le] Lebedev, N. N., *Special functions and their applications*, Dover, New York, 1972.
- [Li] Littlejohn, L. L., *Symmetry factors for differential equations*, Amer. Math. Monthly **7** (1983), 462–464.
- [LK] Littlejohn, L. L. y Krall, A. M., *Orthogonal polynomials and higher order singular Sturm–Liouville systems*, Acta Appl. Math. **17** (1989), 99–170.
- [LR1] López-Rodríguez, P., *Riesz’s theorem for orthogonal matrix polynomials*, Constr. Approx. **15** (1999), 135–151.
- [LR2] López-Rodríguez, P., *Nevanlinna parametrization for a matrix moment problem*, Math. Scand. **89** (2001), 245–267.
- [M] Miranian, L., *Matrix valued orthogonal polynomials*, PhD. Thesis. University of California at Berkeley, (2005).
- [M1] Miranian, L., *Matrix valued orthogonal polynomials on the real line: some extensions of the classical theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 5731–5749.
- [M2] Miranian, L., *On classical orthogonal polynomials and differential operators*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 6379–6383.
- [Mo] Mora, T., *An introduction to commutative and noncommutative Gröbner basis*, Trans. Comp. Sci. **134** (1994), 131–173.
- [MF] Morse, P. M. y Feshbach, H., *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [Mum] Mumford, D., *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non-linear equations*, in: M. Nagata (ed.), Proceedings of International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, 115–153.
- [N] Neuts, M. F., *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel Dekker, New York, 1989.
- [O] Olver, Peter J., *Classical Invariant Theory*, Cambridge University Press, 1999.
- [PT1] Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *Three term recursion relation for spherical functions associated to the complex projective plane*, Math. Phys. Anal. and Geome. **7**, (2004), 193–221.
-

- 
- [PT2] Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *Matrix valued orthogonal polynomials arising from the complex projective space*, Constr. Approx. **25**, No. 2, (2006) 177–192.
- [PT3] Pacharoni, I. y Tirao, J. A., *Three Term Recursion Relation for Spherical Functions Associated to the Complex Hyperbolic Plane*, J. Lie Theory **17** (2007), No. 4, 791–828.
- [PT4] Pacharoni, I. y , *Matrix valued orthogonal polynomials associated to the group  $SU(N)$* , en preparación.
- [PR] Pacharoni, I. and Román, P., *A sequence of matrix valued orthogonal polynomials associated to spherical functions*, Constr. Approx. **28**, No. 2, (2008) 127–147.
- [RT] Román, P. y Tirao, J. A. *Spherical functions, the complex hyperbolic plane and the hypergeometric operator*, Internat. J. Math. **17** (2006), No. 10, 1151–1173.
- [Rou] Routh, E., *On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order*, Proc. London Math. Soc., **16** (1884), 245–261.
- [S] Seneta, E. , *Non-negative matrices and Markov chains*, Springer-Verlag, New York, third edition, 2006.
- [SvA] Sinap, A. y Van Assche, W., *Orthogonal matrix polynomials and applications*, J. Comput. Appl. Math. **66** (1996), 27–52.
- [Sz] Szegő, G., *Orthogonal polynomials*, AMS Colloquium Publications, Vol.23, AMS, Providence, RI, 1939.
- [T1] Tirao, J. A., *Spherical functions*, Rev. de la Unión Matem. Argentina **28** (1977), 75–98.
- [T2] Tirao, J. A., *The matrix valued hypergeometric equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **100** nr. 14 (2003), 8138–8141.
- [T3] Tirao, J. A., *The algebra of differential operators associated to a weight matrix: a first example*, en preparación.
- [Tri] Tricomi, F., *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, **79** Springer–Verlag, Berlin–Gotinga–Heidelberg, 1955.
- [U] Ufnarovski, V., *Introduction to noncommutative Gröbner bases theory*, in Gröbner Basis and Applications, edited by B. Buchberger, London Mathematical Society Lecture Note Series (No. 251), 1998.
- [VK] Vilenkin, N. y Klimyk, A., *Representation of Lie Groups and Special functions*, vol. 3, Kluwer Academic, Dordrecht, MA, 1992.
-

- [YMP1] Yakhlef, H. O., Marcellán, F. y Piñar, M. A., *Relative asymptotics for orthogonal matrix polynomials with convergent recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **111** (2001), 1–30.
- [YMP2] Yakhlef, H. O., Marcellán, F. y Piñar, M. A., *Perturbations in the Nevai class of orthogonal matrix polynomials*, Linear Algebra Appl. **336** (2001), 231–254.
-