UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

DPTO. DE TEORIA DE FUNCIONES

LOS ESPACIOS (HM) Y LOS CARDINALES MEDIBLES

Visado en Sevilla,
Septiembre de 1981.
El director,

Juan Arias de Reyna M.

Fdo. Juan Arias de Reyna Martínez, Profesor Agregado de Análisis Matemático IV y V de la Universidad de Sevilla.

Tesis que presenta José Antonio Facenda Aguirre para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas.

José A. Facenda

Fdo.
José A. Facenda Aguirre

Autorizo la consulta de esta memoria

José A. Facenda

Mi más sincero agradecimiento al Prof. Dr. D. Juan Arias de Reyna Martínez por la formación que me ha proporcionado, así como por la valiosa dirección que ha llevado a cabo en este trabajo.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

La teoría no estándar de los espacios vectoriales topológicos es debida a los autores C. W. Henson y L. C. Moore Jr., que la desarrollaron en un artículo publicado en la revista Trans. Amer. Math. Soc. en el año 1972. En tal trabajo, estos autores definen la envolvente no estándar de un e.v.t. $E(T)$ como el e.v.t. $\hat{E}(\hat{T})$, definido por $\hat{E} = fin_T({}^*E)/\mu_T(0)$, siendo $\hat{T}$ la topología cociente. Si el espacio E es separado, la aplicación de E en $\hat{E}$ que a cada punto le asocia su mónada, es un isomorfismo para las estructuras de e.v.t. de E y $\hat{E}$. Más aún, puede probarse que el cierre de la imagen de E en $\hat{E}$ es una compleción del espacio E. Si φ es la aplicación canónica de fin_T sobre $\hat{E}$, la imagen de E en $\hat{E}$ no es más que $\varphi(pns_T)$. Entonces, el problema que plantearon ambos autores fue el siguiente:

Sea E(T) un e.v.t.s. en una estructura $\mathfrak{M}$. Sabemos que bajo ciertas condiciones sobre la extensión $^*\mathfrak{M}$ el espacio $\hat{E}(\hat{T})$ es completo. Entonces, ¿cuándo es el propio $\hat{E}(\hat{T})$ una compleción de E(T)?. Puede demostrarse que así ocurre si y solo si $pns_T = fin_T$. Sin embargo, esto es equivalente a una condición estándar sobre el espacio E(T), y por tanto, independiente de la extensión $^*\mathfrak{M}$ que se haya elegido. En definitiva, probaron el teorema:

"Sea E un e.v.t.s. Entonces, $pns_T = fin_T$ si y solo si todo ultraflitro $\mathfrak{F}$ sobre E que verifique la condición

(*) $\forall U \in \mathfrak{U}(E) \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot U \in \mathfrak{F}$

es de Cauchy". Pués bien, en el caso de que un espacio verifique el teorema anterior, todas las envolventes no estándar construidas son isomorfas; más concretamente, isomorfas a una compleción de E. Si ocurriera que $pns_T \neq fin_T$ entonces pueden encontrarse envolventes de cardinalidad tan grande como se quiera, bajo una condición adicional. En el primer caso, se dice que el espacio en cuestión tiene envolventes no estándar invariantes.

Nosotros vamos a estudiar en esta memoria propiedades de los espacios con envolventes no estándar invariantes. Los autores K. D. Stroyan y W. A. J. Luxemburg proponen llamar a estos espacios, espacios (HM), ya que Henson y Moore iniciaron su estudio. Nosotros adoptaremos esta notación en toda la memoria.

Como vemos, los espacios (HM) han surgido mediante el análisis no estándar aplicado al estudio de los espacios vectoriales topológicos. Sabido es que toda demostración realizada mediante análisis no estándar puede ser hecha sin el uso de tales métodos, para ello, es necesario tener todos y cada uno de los pasos lógicos dados en la demostración no estándar, cosa que sabemos no ocurre en general. Nosotros en la memoria no haremos uso del análisis no estándar, todas las demostraciones que hagamos serán mediante el análisis usual. En el primer capítulo incluimos un apartado en el cual probamos algunas de las propiedades más relevantes conocidas de los espacios (HM). Queremos mencionar que las demostraciones dadas son nuevas; realmente se ha desarrollado una técnica estándar para manejar estos espacios, partiendo de la definición: "Un e.v.t. E es (HM) si todo ultrafiltro sobre E que verifique la condición (*) es de Cauchy". (Henson, Moore, teorema 4.1, [1972]).

A continuación, pasamos a comentar el contenido de los cuatro capítulos que componen la memoria:

En el primer capítulo comenzamos introduciendo la definición estándar de estos espacios. A los ultrafiltros que verifican la propiedad (*) proponemos llamarles ultrafiltros casi-acotados. S. F. Bellenot, ([1976]) los llama "ultrafiltros casi de Cauchy" (almost Cauchy) pero el nombre no nos parece adecuado y preferimos adoptar el nuestro.

Una vez introducidos estos espacios, lo más inmediato plantearse es su comportamiento ante las construcciones usuales, estudio que hacemos en el apartado primero. En general estos espacios son estables por construcciones proyectivas pero no inductivas. Así, el cociente no se conserva en general, aunque hay una amplia clase de espacios que sí lo conservan (como los Schwartz y los dotados de la topología localmente convexa más fina bajo ciertas condiciones por ejemplo). Este problema, nos lleva a definir en este primer capítulo (apartado 3) una nueva topología en el cociente que sí mantendrá el carácter (HM) del espacio y las propiedades usuales del cociente.

También vemos en este primer capítulo, antes de definir la topología cociente, las propiedades más importantes de los espacios (HM) ya conocidas anteriormente, pero que nosotros demostramos sin el uso del análisis no estándar. En cada enunciado se cita la referencia donde puede encontrarse la demostración no estándar. Son de destacar los siguientes resultados:

(a) En un espacio (HM), los acotados son precompactos. O sea, todo espacio (HM) es un espacio BTB (véase Wilansky, [1978]).

(b) Si el espacio es metrizable, la condición anterior es necesaria y suficiente para que el espacio sea (HM).

(c) Como ya mencionamos antes implicitamente, los espacios de Schwartz son (HM).

(d) Por último, entre los Frechet, los (HM) coinciden con los Montel.

(e) Como mejora de un resultado de Henson y Moore, deducimos en unos corolarios que en los espacios metrizables, los (HM) coinciden con los co-Schwartz, y en particular, todo espacio metrizable Schwartz, es co-Schwartz.

El segundo capítulo de la memoria, lo iniciamos con otras propiedades de los espacios (HM) estudiadas por nosotros. Introducimos los espacios co-(HM) como aquellos **cuyo** dual fuerte es (HM). Es conocido que entre los espacios de Frechet, o los espacios DF, los (HM) coinciden con los co-(HM). Nosotros destacamos como resultado más importante de esta sección que entre los espacios DF, los (HM) coinciden con los Schwartz.

En la siguiente sección empezamos por caracterizar la topología de los espacios (HM) con dual fuerte metrizable que sean σ-infratonelados. En particular, por un resultado anterior, estos espacios son DF-Schwartz. Imponiendo una condición similar a la σ-(infra)tonelación como es: "toda sucesión acotada en $E'(\lambda(E',E))$ es equicontinua" , demostramos que un espacio con base numerable de conjuntos precompactos verificando esa condición es tal que $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio (HM). Estas condiciones implican a su vez una similar a la (infra)tonelación, pués demostramos que en este caso, todo $\lambda(E',E)$ acotado es equicontinuo. De estos resultados deducimos algunas condiciones para que un espacio sea (HM) o co-(HM), admitiendo caracteres de infratonelación generalmente.

Queremos observar que los resultados obtenidos en esta sección son válidos en general en un contexto más amplio; basta exigir que los acotados sean precompactos en el espacio en cuestión. Sin embargo, hemos preferido mantener en el enunciado el carácter (HM) del espacio.

En el tercer apartado abordamos un problema que apareció implicitamente en el primer capítulo. Probamos que dado un e.l.c.s. E(T), existe sobre una topología menos fina que T que dota al espacio E de estructura de

(HM), siendo la más fina con esa propiedad. Estudiamos entonces propiedades relativas a esta topología cuando tenemos una aplicación lineal definida entre dos espacios.

El capítulo lo concluimos en el cuarto apartado, donde definimos una propiedad que llamamos SC, aprovechando un resultado de Bellenot ([1976]), que afirma que todo espacio (HM) completo tiene la propiedad HC, propiedad definida por este autor en el artículo citado. Nosotros probamos que la propiedad SC implica el carácter B-completo del espacio.

En el tercer capítulo destaca un resultado. Probamos que la variedad generada por los espacios (HM) es simplemente generada, pués demostramos que todo espacio (HM) es un T(μ)-espacio, siendo μ el primer cardinal medible no numerable; lo cual es equivalente a decir, según se prueba en la memoria, que en un espacio (HM) con cardinal de una base de Hamel mayor que el primero medible, no puede definirse una norma contínua. El primer apartado finaliza con algunas consecuencias del resultado principal. Como consecuencia del teorema probado por nosotros (que mejora sustancialmente el teorema 2 de Henson, Moore, [1973]) resolvemos negativamente una conjetura propuesta por Bellenot ([1976]) que planteaba la cuestión de que si el carácter (HM) es equivalente a que los acotados sean precompactos y el espacio inductivo semi-reflexivo.

El estudio que tuvimos que hacer para el capítulo anterior de los cardinales medibles, así como el hecho de que el ultraproducto de una familia de espacios de Banach no es más que una envolvente no estándar, como se expone en la memoria, nos lleva a estudiar el ultraproducto de una familia de espacios localmente convexos.

Para llevar a cabo este estudio, hemos tenido que suponer la existencia de ultrafiltros numerablemente completos, o lo que es igual, que el cardinal del conjunto de índices de la familia que se considere, sea medible. En tales circunstancias, a partir de una familia $\{E_i : i \in I\}$ de e.l.c. construimos un espacio que notamos $\underset{i\in I}{P}(E_i)$ y llamamos ultraproducto de la familia anterior.

A continuación se estudian clases de espacios estables por ultraproductos; probamos que los espacios separables, metrizables, normables, los dotados de la topología débil, los de dimensión finita y los Schwartz, son estables. Sin embargo, los espacios (HM) no lo son. En la demostración, se hace uso de ultrafiltros normales, cuya existencia tenemos garantizada debido a las hipótesis de medibilidad existentes.

Si consideramos una familia $\{E_i : i \in I\}$ de modo que $E_i = E$, $\forall i \in I$, el ultraproducto se convierte en lo que usualmente se denomina ultrapotencia. Sabemos además que un espacio E puede considerarse como subespacio de cualquier ultrapotencia suya sin más que asociar a cada elemento del espacio el elemento de la ultrapotencia con todas las coordenadas iguales. En el cuarto apartado de la memoria, identificamos la topología del espacio E cuando se considera como subespacio de una ultrapotencia suya, resultado que nos lleva a definir espacios invariantes por ultraproductos como aquellos cuya topología coincide con la inducida por el ultraproducto. Damos un ejemplo de espacio invariante y de otro que no lo es.

Por último, analogamente al estudio de ultraproductos de espacios de Banach, se define el concepto de lo que llamamos espacio representable en otro, y se demuestra que dados dos espacios E y F, bajo ciertas condiciones, F es representable en E si y solo si F es isomorfo a un subespacio de una ultrapotencia determinada de E.

C A P I T U L O   I

LOS ESPACIOS DE HENSON Y MOORE

1. Espacios (HM). Propiedades de estabilidad.

En todo este capítulo, así como en el resto de la memoria, representaremos por E un espacio localmente convexo separado, dotado de una topología T; abreviadamente, e.l.c.s. Asimismo, denotaremos por $\mathcal{U}$ el filtro de los entornos del origen.

Definición 1.1:

"Sea E un e.l.c.s. y $\mathcal{F}$ un filtro sobre E. Diremos que $\mathcal{F}$ es casi-acotado si:

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(E) \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \;\big|\; n\cdot U \in \mathcal{F} \text{ ".}$$

Todo filtro acotado (véase Horvath [1966] , p. 135) es casi-acotado; por eso hemos elegido este nombre para este tipo de filtros que aparecerán con cierta asiduidad en el resto de la memoria.

Definición 1.2:

"Sea E un e.l.c.s. Diremos que E es un espacio (HM) si todo ultrafiltro casi-acotado sobre E, es de Cauchy".

Una vez conocida la definición de estos espacios, vamos a estudiar algunas propiedades de estabilidad:

Proposición 1.3:

"(a) Sea E un espacio (HM) y F un subespacio de E. Entonces, F dotado de la topología inducida por E es un espacio (HM).

(b) Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de espacios (HM). Entonces, el producto $\prod_{i \in I} E_i$ es también un espacio (HM)".

Demostración:

(a) Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre F y j la inyección canónica de F en E. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathfrak{F}$, es conocido que $j(\mathcal{B})$ genera un ultrafiltro $\mathcal{G}$ sobre E (véase Bourbaki [1971] , p. I.41), que es casi-acotado, pués si $U \in \mathcal{U}(E)$ entonces $V = U \cap F \in \mathcal{U}(F)$, luego existe n tal que $n \cdot V \in \mathfrak{F}$ $\Rightarrow$

$$\exists\, B \in \mathcal{B} \mid n \cdot V \supset B \Rightarrow n \cdot j(V) \supset j(B) \Rightarrow$$

$$n \cdot j(V) \in \mathcal{G} \Rightarrow n \cdot U \in \mathcal{G}, \quad \text{pués } n \cdot U \supset n(U \cap F)$$

Dado que E es (HM), se sigue que $\mathcal{G}$ es de Cauchy, de donde se deduce que $\mathcal{F}$ también lo es:

$$\text{Sea } V \in \mathcal{U}(F) \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}(E) \mid U \cap F \subset V$$

Dado U, $\exists\, Y \in \mathcal{G} \mid Y - Y \subset U \Rightarrow$

$$Y \cap F - Y \cap F \subset V$$

Para concluir, solo queda demostrar que $Y \cap F \in \mathcal{F}$:

$$Y \in \mathcal{G} \Rightarrow \exists\, B' \in \mathcal{B} \mid Y \supset j(B') \Rightarrow$$

$$j^{-1}(Y) \supset j^{-1}j(B') = B' \Rightarrow j^{-1}(Y) = Y \cap F \in \mathcal{F}.$$

(b) Llamemos E al espacio producto, y sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre E. Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$ y p_i es la i-ésima proyección de E en E_i, se sigue que $p_i(\mathcal{B})$ es base de un ultrafiltro $\mathcal{F}_i$ casi-acotado sobre E_i, puesto que si $U^{(i)} \in \mathcal{U}(E_i)$, consideremos

$$V = \prod_{j \in I} V_j \ , \quad \text{donde}$$

$$V_j = \begin{cases} E_j & j \neq i \\ U^{(i)} & j = i \end{cases}$$

Es obvio que $V \in \mathcal{U}(E) \Rightarrow$

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \mid n \cdot V \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B} \mid B \subset n \cdot V \Rightarrow$$

$$p_i(B) \subset n \cdot p_i(V) = n \cdot U^{(i)} \Rightarrow n \cdot U^{(i)} \in \mathcal{F}_i.$$

En definitiva, cualquiera que sea $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ es un ultrafiltro de Cauchy sobre E_i, luego si $V \in \mathcal{U}(E) \Rightarrow$

$$V \supset \prod_{i \in I} V_i \quad \text{donde}$$

$$V_{i_j} \in \mathcal{U}(E_{i_j}) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{y}$$

$$V_k = E_k \ , \ k \neq i_j \ , \ 1 \leq j \leq n$$

Dado $V_k \in \mathcal{U}(E_k), \exists X_k \in \mathcal{F}_k \ \Big| \ X_k - X_k \subset V_k \Rightarrow$ (en particular, para $k \neq i_j$, $1 \leq j \leq n$, puede tomarse $X_k = E_k$)

$$\prod_{k\in I} X_k - \prod_{k\in I} X_k \subset V$$

y se tiene que $\prod_{k\in I} X_k \in \mathcal{F}$, pués

$$X_{i_j} \supset P_{i_j}(B_j), \quad 1 \leq j \leq n; \text{ sea } B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{B} \Rightarrow$$

$$\prod_{k\in I} X_k \supset \prod_{i\in I} P_i(B) \supset B \Rightarrow \prod_{k\in I} X_k \in \mathcal{F} .$$

Hemos demostrado por tanto que los espacios (HM) son estables por subespacios y productos; en el curso de la demostración hemos usado un hecho que lo enunciamos sin demostración para posteriores aplicaciones:

<u>Lema 1.4:</u>

"Sean E y F dos e.l.c.s. y $f:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro casi-acotado sobre E, entonces $f(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro casi-acotado sobre F".

A continuación vamos a demostrar un resultado más general sobre la estabilidad de los espacios (HM), que incluye la proposición 1.3:

Proposición 1.5:

"Sea E un espacio vectorial y $\{F_i : i \in I\}$ una familia de espacios (HM). Para cada índice $i \in I$, sea f_i una aplicación lineal de E en F_i. Entonces, el espacio E dotado de la topología menos fina que hace continuas todas las aplicaciones f_i, es un espacio (HM)".

Demostración:

Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre E. Por el lema 1.4, $f_i(\mathfrak{F})$ es un ultrafiltro casi-acotado en F_i, luego es de Cauchy.

$$\text{Si } W \in \mathcal{U}(E) \quad \Rightarrow \quad W \supset \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(U_j),$$

donde $U_j \in \mathcal{U}(F_{i_j})$. Entonces, para cada j,

$$\exists\, A_j \in \mathfrak{F} \mid f_{i_j}(A_j) - f_{i_j}(A_j) \subset U_j.$$

Basta tomar $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{F}$ y $A - A \subset W$.

Corolario 1.6:

"Sea E un espacio vectorial y $\{T_i : i \in I\}$ una familia de topologías que dotan a E de estructura de espacio (HM). Sea $F_i = E(T_i)$ y $f_i : E \longrightarrow F_i$ la aplicación identidad. Entonces, E dotado de la topología inicial relativa a estas aplicaciones, es un (HM)".

Los espacios (HM) también son estables por imágenes isomorfas, como demuestra el siguiente resultado:

Proposición 1.7:

"Sean E y F dos e.l.c.s. y $f:E \longrightarrow F$ isomorfismo. Entonces, si E es (HM), F es (HM)".

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre F. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{F}$, $f^{-1}(\mathcal{B})$ es base de un ultrafiltro $\mathcal{G}$ casi-acotado sobre E. Por tanto, $\mathcal{G}$ es de Cauchy.

$$\text{Si } U \in \mathcal{U}(F) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(E) \Rightarrow$$

$$\exists A \in \mathcal{G} \mid A - A \subset f^{-1}(U)$$

Sea $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \supset f^{-1}(B) \Rightarrow$

$f^{-1}(B) - f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U)$, y como f es biyectiva,

$B - B \subset U \Rightarrow \mathcal{F}$ es de Cauchy.

Podría plantearse, una vez en este punto, el estudiar si estos espacios son estables por cocientes separados, con lo cual, tendrían estructura de variedad (véase Diestel, Morris, Saxon [1972]). Pero veremos más adelante que no ocurre así, y por tanto, los espacios (HM) no tienen estructura de variedad, aunque sí de prevariedad (véase Bellenot, [1975]), pués son estables por imágenes isomorfas, subespacios y productos arbitrarios.

2. Propiedades conocidas de los espacios (HM).

En este segundo apartado, vamos a demostrar algunas propiedades ya conocidas anteriormente de los espacios (HM). En cada resultado, citaremos la bibliografía donde puede encontrarse demostrado. La diferencia estriba en que las demostraciones dadas por nosotros, no hacen uso del análisis no estándar, y por eso hemos considerado de interés el incluirlas aquí.

Proposición 1.8:

"(a) Sea E un espacio (HM). Entonces, todo subconjunto acotado de E es precompacto.

(b) Sea E un e.l.c.s. metrizable. Entonces, E es (HM) si y solo si todo acotado de E, es precompacto".

(Parte (a) véase Henson, Moore [1972] , para la parte (b), Henson, Moore [1973]).

Demostración:

(a) Sea $A \subset E$ acotado y $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro tal que $A \in \mathfrak{F}$. Es obvio que $\mathfrak{F}$ es casi-acotado, y como E es (HM), se sigue que $\mathfrak{F}$ es de Cauchy. Por tanto, A es precompacto. (Robertson, Robertson [1964] p.59).

(b) La condición necesaria es cierta siempre sea o no el espacio metrizable. Basta ver la suficiente:
Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre E y supongamos que no es de Cauchy. Entonces,

$$\exists\, U \in \mathcal{U}(E) \mid \forall A \in \mathcal{F},\ A - A \not\subset U$$

Dado U $\exists\, V \in \mathcal{U}(E)$ equilibrado $\mid V + V \subset U$.

Decir que $\mathcal{F}$ no es de Cauchy es decir que

$$\forall A \in \mathcal{F},\quad A \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V),\ \forall\, x_1 \ldots x_n \in E,$$

pués en caso contrario, si $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$, para

ciertos puntos $x_1, \ldots, x_n$ de E $\Rightarrow$

$\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V) \in \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro,

$$\exists\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant n \mid x_i + V \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow$$

$(x_i + V) - (x_i + V) = V + V \subset U$, luego $\mathcal{F}$

contendría un conjunto pequeño de orden U, y sería por tanto de Cauchy.

Como E es metrizable, posee una base de entornos numerable; elijamos una $U_1 \supset U_2 \supset \ldots,$ siendo en particular $U_1 = V$.

Entonces, vamos a construir una sucesión $\{x_n\}$ en E de tal modo que

$$x_{h+1} \in \left(\bigcap_{i=1}^{h} (x_i + V)^c\right) \cap (n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_h U_h)\ ,\ \text{donde}$$

cada $n_i \in \mathbb{N}$ es tal que $n_i U_i \in \mathcal{F}$, de la siguiente forma:

Sea $x_1 \in n_1 U_1$; supongamos construido x_k y vamos a definir x_{k+1}. Es claro que $n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_k U_k \in \mathcal{F}$, pués cada $n_i U_i \in \mathfrak{F}$; por tanto,

$$n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_k U_k \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + V) \qquad \Rightarrow$$

$$\exists\, x_{k+1} \in (n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_k U_k) \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + V) .$$

La sucesión $\{x_n\}$ así costruida, es acotada, pués si $W \in \mathcal{U}(E) \Rightarrow \exists\, h \mid U_h \subset W$;

$x_i \in n_h U_h \subset n_h W$, $\forall\, i \geqslant h+1$, y para los h primeros términos, basta tener en cuenta que W es absorbente.

Sin embargo, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es precompacto, dado que si $i \neq j \Rightarrow$

$x_i - x_j \notin U_1$, por la construcción hecha.

Tal contradicción nos demuestra que E es (HM).

El siguiente resultado nos proporciona una amplia clase de estos espacios:

<u>Proposición 1.9:</u>

"Sea E un espacio de Schwartz. Entonces, E es (HM)".

(Véase Henson, Moore [1973]).

Demostración:

Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre E.

Si $U \in \mathcal{U}(E)$ es arbitrario, sea $W \in \mathcal{U}(E)$ equilibrado tal que $W + W \subset U$.

Como E es Schwartz, dado W, existe $V \in \mathcal{U}(E)$ tal que V es precompacto en el espacio normado E_W $\Rightarrow$

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{h} (x_i + n^{-1}W) \ ,$$ donde $n \in \mathbb{N}$ es tal

que $n \cdot V \in \mathfrak{F}$. $\Rightarrow$

$$n \cdot V \subset \bigcup_{i=1}^{h} (nx_i + W) \quad \Rightarrow$$

$$\bigcup_{i=1}^{h} (nx_i + W) \in \mathfrak{F}$$, y como $\mathfrak{F}$ es ultrafiltro,

$$\exists\, k, \quad 1 \leqslant k \leqslant h \ \Big| \ nx_k + W \in \mathfrak{F} \quad \Rightarrow$$

$$(nx_k + W) - (nx_k + W) = W + W \subset U,$$

luego $\mathfrak{F}$ contiene un conjunto pequeño de orden U y por tanto, se trata de un ultrafiltro de Cauchy.

Corolario 1.10:

"Todo espacio nuclear es (HM)".

La demostración es obvia ya que todo nuclear es un espacio de Schwartz. Nótese, que en particular, un espacio E dotado de la topología débil $\sigma(E,E')$, es (HM).

Como consecuencia inmediata de la proposición 1.9, podemos deducir también:

Corolario 1.11:

"Un espacio normado E es (HM) si y solo si es de dimensión finita".

(Véase Henson, Moore [1972]).

Entre los espacios de Fréchet, existe esta caracterización de los (HM):

Proposición 1.12:

"Entre los espacios de Fréchet, los (HM) coinciden con los espacios de Montel".

(Véase Henson, Moore, [1973]).

Demostración:

Si suponemos que E es (HM), todo cerrado y acotado es cerrado y precompacto (proposición 1.8 (a)), luego precompacto y completo; o sea, compacto. Además, E es tonelado por ser Fréchet. Luego es Montel.

Reciprocamente, si E es de Montel, es claro que todo acotado es precompacto, y por tanto, E es (HM). (Proposición 1.8 (b)).

Sin embargo, a pesar de este resultado, los espacios (HM) no coinciden con los de Montel, piénsese por ejemplo en un espacio normado de dimensión infinita dotado de la topología débil. Es (HM), y no es de Montel pués la topología débil es estrictamente menos fina que la fuerte.

De este resultado también vamos a deducir uno enunciado anteriormente, en el que afirmábamos que los espacios (HM) no eran estables por cocientes separados:

Sea E un espacio Fréchet - Montel y F subespacio cerrado de E tal que E/F no es Fréchet - Montel.

(Véase Köthe, [1969] , p.433). Por la proposición, E es (HM), y E/F no es Frechet - (HM), en particular, no es (HM) pués Frechet sí lo es. Luego este contraejemplo de Köthe demuestra que los espacios (HM) no forman una variedad. Existen no obstante espacios (HM) que son estables por cocientes separados; por ejemplo, todos los espacios de Schwartz. Este problema nos llevará en el siguiente apartado a dar una nueva definición de topología cociente, bajo la cual, los espacios (HM) sí serán estables para la formación de cocientes.

A continuación vamos a dar la demostración estándar de un teorema de Bellenot ([1976] , t. 3.1) a partir del cual puede deducirse una caracterización de los espacios (HM). El resultado también es importante en sí pués nos da una **nueva definición** de los espacios inductivos semi-reflexivos: (Berezanskii, [1968]).

<u>Proposición 1.13:</u>

"Sea E un e.l.c.s. Entonces, son equivalentes,

(a) E es inductivo semi-reflexivo

(b) Todo ultrafiltro casi-acotado es $\sigma(E,E')$-convergente".

Demostración:

(a) $\Rightarrow$(b): Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro casi-acotado sobre E. Sea u: $E' \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $u(f) = \lim_{\mathfrak{F}} f$.

En primer lugar, u está bien definida pués para cada $f \in E'$, es $\{f\}^{\circ}$ un entorno de cero en E, luego existe un n natural tal que $n \cdot \{f\}^{\circ} \in \mathfrak{F}$, entonces, en este conjunto del ultrafiltro es $|f(x)| \leq n$, luego existe el límite que define u. Es claro también que u es lineal.

Si $M \subset E'$ es equicontinuo, M^o es entorno de cero en E, luego existe n natural tal que $n \cdot M^o \in \mathfrak{F}$. Si $f \in M$, $|f(x)| \leq n$, $\forall x \in n \cdot M^o$, luego u es acotada en M. En definitiva, $u \in E'^*$ y es acotada en los equicontinuos. Como E es inductivo semi-reflexivo, existe $z \in E$ tal que $u(f) = f(z)$, $\forall f \in E'$.

Veamos que $\mathfrak{F} \longrightarrow z \; (\sigma(E,E'))$. O sea, para cualesquiera $f_i \in E'$ $(1 \leq i \leq n)$,

$$z + \{f_1, \ldots, f_n\}^o \in \mathfrak{F} \quad .$$

Es claro que si $z + \{f_i\}^o \in \mathfrak{F}$ $(1 \leq i \leq n)$, entonces $z + \{f_1, \ldots, f_n\}^o \in \mathfrak{F}$, luego basta demostrar que si $f \in E'$ entonces $z + \{f\}^o \in \mathfrak{F}$.

En caso contrario, $Z = (z + \{f\}^o)^c \in \mathfrak{F}$, luego si $x \in Z$ es $|f(x) - f(z)| = |f(x) - u(f)| > 1$; de donde, como $Z \in \mathfrak{F}$, tomando límite, se tendría que $|u(f) - u(f)| \geq 1$, lo cual es absurdo.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $u \in E'^*$ acotada en los equicontinuos. La demostración consiste en construir un ultrafiltro casi-acotado $\mathfrak{F}$, que por hipótesis será $\sigma(E,E')$-convergente a un elemento $z \in E$ que será tal que su imagen canónica en E'^* es u, con lo cual se tendrá demostrado que E es inductivo semireflexivo.

Para ello, sea

$$\mathcal{S} = \{U: \text{U es entorno de cero absolutamente convexo, cerrado y } u \in U^{o\bullet}\}.$$

(Si $A \subset E$, A^{o} es la polar en la dualidad $\langle E,E' \rangle$; mientras que para $B \subset E'$, $B^{\bullet}$ es la polar en la dualidad de E' y E'^{*}).

Para cada $U_1,\ldots,U_n \in \mathcal{J}$ y $x'_1,\ldots,x'_m \in E'$, sea

$$S(U_1,\ldots,U_n,x'_1,\ldots,x'_m) =$$

$$= \{x \in E:\ x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n\ ,\ |\langle x-u,x'_j \rangle| < 1,\ 1 \leq j \leq m\}$$

Estos conjuntos forman base de un filtro (vêase Henson y Moore, [1973] , teorema 6) que es casi-acotado, pués si V es un entorno de cero en E, sea $W \subset V$ absolutamente convexo y cerrado, como W^{o} es equicontinuo, $\exists$ n tal que $|u(f)| \leq n$, $\forall f \in W^{o}$; o sea, $u \in n \cdot W^{o\bullet} = (n \cdot W)^{o\bullet}$, luego $n \cdot W \in \mathcal{J}$ y por tanto, $n \cdot W$ está en el filtro, y con mayor razôn lo está $n \cdot V$.

El filtro construido lo extendemos a un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ que es casi-acotado; existe pués $z \in E$ de modo que $\mathfrak{F} \longrightarrow z\ (\sigma(E,E'))$. Ahora bien; es claro que en E'^{*} , $\mathfrak{F} \longrightarrow u$, luego u es la imagen canônica de z.

A partir de este teorema, Bellenot deduce una caracterizaciôn de los espacios (HM) completos (vêase el corolario 3.2, [1976]).

A continuaciôn, vamos a dar un ejemplo debido a Henson y Moore ([1973] , p. 194) de espacio en el que los acotados son relativamente compactos pero el espacio no es (HM).

<u>EJEMPLO:</u>

Sea E el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$ de soporte finito, $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$ y F el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, acotadas en algún elemento de $\mathfrak{F}$.

Dotamos a E de la topología $|\sigma|(E,F)$, de la convergencia uniforme sobre los intervalos ordenados de F. Esta topología está generada por la familia de seminormas:

$$p_f(g) = \sum_{k=1}^{\infty} |g(k)f(k)| \quad , \forall f \in F .$$

Puede demostrarse que $(E, |\sigma|(E,F))' = F$, y que todo $|\sigma|(E,F)$-acotado, es relativamente $|\sigma|(E,F)$-compacto. Veamos sin embargo que este espacio no es (HM):

Consideremos la aplicación $T: \mathbb{N} \longrightarrow E$ tal que $T(h) = \chi_{\{h\}}$. (Si $g \in E$ es arbitraria, y su soporte está formado por $n_1 \ldots n_k$, entonces, $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(n_i)$, donde $\lambda_i = g(n_i)$).

Ya sabemos que mediante la aplicación T, el ultrafiltro $\mathfrak{F}$ genera otro ultrafiltro, que seguiremos notando $\mathfrak{F}$ sobre E. Vamos a demostrar:

(i) $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro que no es de Cauchy

(ii) $\mathfrak{F}$ es casi-acotado.

A la vista de (i) y (ii), podremos afirmar por tanto que $(E, |\sigma|(E,F))$, no es un espacio (HM):

(i) Consideremos la función constante igual a 1, que evidentemente está en F.

$\forall \varepsilon > 0, \quad U = \{ g \in E : \ p_1(g) < \varepsilon \}$ es un entorno de 0 para la topología $|\sigma|(E,F)$.

Si $\mathfrak{F}$ fuese de Cauchy, existiría $A \in \mathfrak{F} \mid$

$A - A \subset U$, y este $A \supset T(B)$, donde $B \in \mathfrak{F}$.

Si fijamos un $\varepsilon < 2$, como $T(B) - T(B) \subset U \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |T(b)(k) - T(b')(k)| \leq \varepsilon, \ \forall b, b' \in B \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\chi_{\{b\}}(k) - \chi_{\{b'\}}(k)| \leq \varepsilon, \ \forall b, b' \in B$$

Como $\mathfrak{F}$ es libre sobre $\mathbb{N}$, ningún subconjunto finito de $\mathbb{N}$ puede pertenecer a $\mathfrak{F}$, luego en particular, B es infinito y la suma anterior siempre es ≥ 2.

(ii) Sea $U \in \mathcal{U}(E)$ arbitrario $\Rightarrow$

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ g \in E : p_{f_i}(g) \leq a \right\} =$$

$$= \left\{ g \in E : \sup_{1 \leq i \leq n} p_{f_i}(g) \leq a \right\} =$$

$$= \left\{ g \in E : \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_i(k) g(k)| \right) \leq a \right\},$$

donde $f_1, \ldots, f_n$ son elementos arbitrarios de $F \Rightarrow$

$$\exists M(f_i) \in \mathfrak{F} \mid |f_i(h)| \leq M_i, \ \forall h \in M(f_i).$$

Además, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} M(f_i) \in \mathfrak{F} \Rightarrow T\left(\bigcap_{i=1}^{n} M(f_i)\right) \in \mathfrak{F}$

(considerado en este último caso como filtro sobre E).

Vamos a demostrar entonces que existe $m \in \mathbb{N}$ |

$$T\left(\bigcap_{i=1}^{n} M(f_i)\right) \subset m \cdot U \quad ,$$

lo cual concluirá la prueba de (ii).

Sea pués $g \in T\left(\bigcap_{i=1}^{n} M(f_i)\right) \Rightarrow$

$$\exists\, h \in \bigcap_{i=1}^{n} M(f_i) \quad | \quad g = T(h) = \chi_{\{h\}} .$$

Entonces,

$$\sup_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_i(k) \cdot \chi_{\{h\}}(k) \right| \right) =$$

$$= \sup_{1\leq i\leq n} \left| f_i(h) \right| \leq M \text{ , donde } M = \max_{1\leq i\leq n} \{ M_i \} .$$

Eligiendo un m matural de modo que $a \cdot m \geq M \Rightarrow$

$$\sup_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_i(k) \cdot \chi_{\{h\}}(k) \right| \right) \leq a \cdot m \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} \chi_{\{h\}} \in U \quad \Rightarrow \quad \chi_{\{h\}} \in m \cdot U ,$$

cualquiera que sea $h \in \bigcap_{i=1}^{n} M(f_i)$.

Por tanto, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro casi-acotado.

Para concluir este apartado, vamos a dar una condición suficiente para que un espacio sea (HM). En primer lugar, vamos a enunciar el resultado que demostraremos posteriormente:

<u>Proposición 1.14:</u>

"Sea $\langle E,F \rangle$ un sistema dual, y $\mathcal{Q}$ la familia de todas las sucesiones de F convergentes a 0 $\sigma(F,E)$-localmente. Entonces, el espacio E dotado de la topología generada por la familia $\mathcal{Q}$,es Schwartz".

Antes de pasar a la demostración, queremos hacer algunos comentarios. En primer lugar, los resultados que usaremos sobre la convergencia local, pueden encontrarse en Köthe [1969] 28.3). En segundo lugar, bajo las hipótesis de esta proposición, los autores Henson y Moore, demuestran que el espacio E es (HM). Nosotros demostramos un poco más al ver que es Schwartz. (Véase Henson, Moore, [1973]).

Demostración:

El ver que la familia $\mathcal{Q}$ realmente genera una topología localmente convexa sobre E lo omitimos. (Puede demostrarse que se tiene: (a) $\bigcup\{A : A \in \mathcal{Q}\} = F$; (b) Dados A y A' de $\mathcal{Q}$, existe A'' tal que $A \cup A' \subset A''$ y (c) Si $A \in \mathcal{Q}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces, $\lambda \cdot A \in \mathcal{Q}$).

Suponemos pués E dotado de la topología generada por $\mathcal{Q}$. Sea $U \in \mathcal{U}(E)$ cualquiera; entonces,

$$\exists \{y_n\} \in \mathcal{Q} \quad | \quad U = \{y_n\}^{\circ} \qquad \Rightarrow$$

$$\exists \{a_n\} \subset \mathbb{R}^+ \quad | \quad a_n \to \infty \quad ; \quad a_n y_n \to 0.$$

Esta última convergencia en el espacio F se refiere a la topología débil $\sigma(F,E)$; aunque realmente es indiferente pués la convergencia local es un concepto invariante por dualidad; es decir, no depende de la topología compatible elegida.

Como la sucesión $\{a_n\}$ tiende a infinito, no es restricción el suponer que $a_n \geqslant 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Sean entonces $B = \text{eco}(\{y_n\})$ y

$$C = \text{eco}(\{\sqrt{a_n}\, y_n\});$$

como para cada n, y_n está en el segmento que une 0 con $\sqrt{a_n}\, y_n$ (pués $a_n \geqslant 1$), se sigue que $B \subset C$ y por tanto, podemos considerar la inyección canónica $F_B \longrightarrow F_C$.

Por otra parte,

$$q_C(\{y_n\}) = \inf\{\lambda > 0:\ y_n \in \lambda C\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a_n}},$$

y como $\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ tiende a 0, se sigue que $\{y_n\}$ es precompacto, y por tanto, lo es su envolvente absolutamente convexa B. En definitiva, hemos probado que la inyección $F_B \longrightarrow F_C$ es una aplicación precompacta, luego su traspuesta, será una aplicación también precompacta.

La aplicación traspuesta actua $(F_C)' \longrightarrow (F_B)'$

Ahora bien; E_{C^o} es isométrico a un subespacio de $(F_C)'$, puesto que C es absolutamente convexo y acotado. Analogamente ocurre con E_{B^o} ; luego la restricción de la aplicación traspuesta citada anteriormente, es una aplicación que va de E_{C^o} en E_{B^o} , que sigue siendo precompacta.

Pero $C^o = \{\sqrt{a_n} y_n\}^o = V$, entorno de 0 en E(T), (pués basta considerar la sucesión $\{\sqrt{a_n}\} \subset \mathbb{R}^+$, es tal que tiende a infinito y además, $\sqrt{a_n} \cdot \sqrt{a_n} y_n \longrightarrow 0$ en F) y $B^o = \{y_n\}^o = U$. Por tanto, dado el entorno U de cero, hemos encontrado $V \subset U$ entorno de cero de modo que la aplicación $E_V \longrightarrow E_U$ es precompacta; así pués, E(T) será un espacio de Schwartz y en particular, (HM).

De este resultado, podemos deducir algunas consecuencias, que vamos a hacer a continuación:

Supongamos que E(T) es un e.l.c. metrizable. Entonces, en su dual coinciden estas topologías:

(a) De la convergencia uniforme sobre las sucesiones convergentes a cero.

(b) De la convergencia uniforme sobre los compactos.

(c) De la convergencia uniforme sobre los precompactos.

(d) La topología más fuerte que coincide con $\sigma(E',E)$ sobre los equicontinuos.

Si denotamos por T' esta topología común, se sigue del resultado anterior (dado que en un espacio metrizable las sucesiones convergentes coinciden con las localmente convergentes) que $E'(T')$ es un espacio de Schwartz. En particular,

Corolario 1.15:

"Sea $E(T)$ un e.l.c. metrizable tal que todo acotado es precompacto. Entonces, su dual fuerte es un espacio de Schwartz".

Demostración:

Es inmediata sin más que tener en cuenta que la topología fuerte es la (c) anterior.

Nótese por otra parte que lo que el corolario nos dice es que todo espacio (HM) metrizable, es co-Schwartz, pero en un espacio co-Schwartz, todo acotado es precompacto (y separable), luego supuesto metrizable, sería (HM). En definitiva, hemos probado:

Corolario 1.16:

"Entre los e.l.c. metrizables, los espacios (HM) coinciden con los co-Schwartz".

Como caso particular, restringiéndonos a los espacios de Schwartz, podemos enunciar:

Corolario 1.17:

"Todo e.l.c. metrizable Schwartz, es co-Schwartz".

Terzioglu, [1969] había demostrado esta implicación exigiendo que el espacio fuera de Frechet.

Hemos demostrado por tanto que entre los espacios metrizables, los (HM) coinciden con los co-Schwartz. Sabida es también la caracterización entre los Frechet. En el siguiente capítulo, veremos la clasificación de los espacios (HM) entre otro tipo de espacios, como por ejemplo los DF, etc...

3. Topología cociente (HM).

Como ya demostramos anteriormente, los espacios (HM) no son estables en general por cocientes separados, aunque existe una amplia gama de estos espacios que sí lo son (como por ejemplo los Schwartz). En este último apartado del primer capítulo de nuestra mamoria, vamos a dar una nueva definición de topología cociente, que tendrá la propiedad de mantener la estabilidad de los espacios (HM). Veremos también que conserva las propiedades usuales de la topología cociente ya conocida.

Sea E un espacio (HM) y F un subespacio cerrado de E. Consideremos el espacio vectorial cociente E/F. Entonces,

Definición 1.18:

"La topología cociente (HM) sobre E/F es la más fina para la cual el espacio E/F es (HM) y la aplicación canónica $\varphi: E \longrightarrow E/F$ es contínua".

En primer lugar, tal topología existe realmente, pués el conjunto de las topologías que dotan al cociente de estructura de espacio (HM) y además la aplicación cociente es continua, no es vacío; consideremos por ejemplo la topología débil $\sigma(E/F,(E/F)')$, (habiendo dotado al cociente de su topología usual). Es claro que dicha topología es (HM), pués es nuclear y por tanto Schwartz, y además, la aplicación cociente es contínua.

Tal topología existe por tanto, y además es menos fina que la usual, pués la usual es la más fina que hace continua la aplicación cociente, pero en general no dota al cociente de estructura de espacio (HM).

Aunque en la definición anterior hemos supuesto que F es subespacio cerrado de E, ello no es necesario, si no fuera cerrado lo que ocurre es que la topología cociente (HM) no sería separada, como demuestra el siguiente resultado:

<u>Proposición 1.19:</u>

"Sea E un espacio (HM) y F un subespacio de E. La topología cociente (HM) es separada si y solo si F es cerrado en E".

Demostración:

Si la topología cociente (HM) es separada, con mayor razón lo es la usual, que es más fina, y por tanto, F será cerrado en E.

Reciprocamente, si F es cerrado, consideremos el cociente dotado de la topología débil $\sigma(E/F,(E/F)')$. Esta topología es separada por ser F cerrado, y además dota al cociente de estructura (HM), luego la topología cociente (HM), que es más fina que ésta, es separada.

Supongamos por otra parte que E y F son dos espacios (HM), y $f:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Consideremos el diagrama de la hoja siguiente. Vamos a demostrar que la aplicación $\bar{f}$ es continua si lo es f.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \\ E/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Si f es contínua, Ker(f) es cerrado pués suponemos que F es separado. El espacio cociente E/Ker(f) lo dotamos de la topología cociente (HM), y la aplicación $\bar{f}$ la definimos como en el caso usual, $\bar{f}(\varphi(x)) = f(x)$.

Pués bien, supuesto que f es contínua, $\bar{f}$ también lo es:

Sabemos que E/Ker(f) e Im(f) son isomorfos, algebraicamente. Consideremos en el cociente la topología definida por la familia de entornos de cero:

$$\left\{ \bar{f}^{-1}(V) \;:\; V \text{ es entorno absolutamente convexo en } \mathrm{Im}(f) \right\} .$$

Para esta topología se tiene que E/Ker(f) es un espacio (HM), por serlo Im(f), (como subespacio de F, que sí lo es) y además la aplicación φ es continua:

$$\varphi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = (\bar{f}\circ\varphi)^{-1}(V) = f^{-1}(V),$$

que es entorno de cero en E pués f es continua.
Por último, es claro que $\bar{f}$ con esta topología es continua; luego también lo será con la topología cociente (HM), que es la más fina con estas dos propiedades.

Notemos por último, que como en el caso usual, la aplicación $\bar{f}$ no es bicontinua. En cualquier caso, si f es abierta, entonces $\bar{f}$ será bicontinua en ambas situaciones.

C A P I T U L O   II

RELACION DE LOS ESPACIOS (HM) CON OTRAS CLASES DE E.L.C.

1. Otras propiedades de los espacios (HM).

En el primer capítulo, segundo apartado, hemos dado algunas propiedades de los espacios (HM) ya conocidas (salvo la mejora hecha en la proposición 1.14 y sus corolarios). En esta primera sección del segundo capítulo, vamos a dar otras propiedades nuevas de los espacios (HM) estudiadas por nosotros.

Proposición 2.1:

"Sea E un espacio (HM) completo. Entonces, E es distinguido".

Demostración:

Es inmediata a partir de dos resultados que citamos a continuación:

Por ser (HM) completo, es inductivo semireflexivo (véase Bellenot, [1976]), lo cual equivale a ser semi-reflexivo y forzadamente distinguido. (Véase Berezanskii, [1968]). En particular, es distinguido.

Anteriormente, vimos que entre los espacios de Frechet, los (HM) coinciden con los Montel. Este resultado puede debilitarse un poco, para obtener:

Proposición 2.2:

"Entre los e.l.c. metrizables, los (HM) cuasi-completos coinciden con los semi-Montel".

Demostración:

Supongamos E un espacio (HM) cuasi-completo, y sea $A \subset E$ acotado. Es claro que A es precompacto, y por tanto, su cierre, $\bar{A}$, es precompacto y completo (pués es cerrado y acotado en un espacio cuasi-completo), y por tanto, compacto. Luego E es semi-Montel.

El recíproco es inmediato pués el espacio es metrizable y todo acotado es precompacto.

Nótese que en la condición necesaria no se ha hecho uso de la metrizabilidad del espacio; la hemos incluido en la hipótesis para obtener la condición suficiente.

En el siguiente resultado, estudiamos bajo que condiciones, el dual fuerte de un espacio (HM) metrizable, sigue siendo metrizable:

Proposición 2.3:

"Sea E un espacio (HM) metrizable. Entonces, E' dotado de la topología fuerte $\beta(E',E)$ es metrizable si y solo si E es finito dimensional".

Demostración:

La condición suficiente es clara. Para la necesaria, dado que E es metrizable, para que su dual fuerte sea metrizable es necesario y suficiente que E sea normable (Köthe, [1969] 29.1(7)); ahora bien, si E es (HM), esta condición es equivalente a que el espacio E sea de dimensión finita.

Corolario 2.4:

"El dual fuerte de un espacio (HM) metrizable de dimensión infinita, es un espacio (HM) no metrizable".

Proposición 2.5:

"Sea E un espacio (HM) de dimensión infinita con una base de acotados numerable. Entonces, E no es metrizable".

Demostración:

Recordemos en primer lugar que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de acotados si cada A_n es acotado y si A es un acotado de E, existe un n tal que $A \subset A_n$.

Si E fuera metrizable, sería entonces normable, (Köthe, [1969] 29.1(2)) y como el espacio E es de dimensión infinita llegaríamos a un absurdo.

Anteriormente, hemos encontrado espacios cuyo dual fuerte es (HM). Ello nos motiva para dar la siguiente definición:

Definición 2.6:

"Se dice que un espacio E es co-(HM) si su dual fuerte es (HM)".

Hemos llamado a estos espacios así dada la analogía existente con los espacios co-Schwartz y co-nucleares (o dual nuclear).

Antes de seguir, veamos algunos ejemplos:

1º. Es trivial demostrar que entre los espacios co-(HM) están los co-Schwartz.

2º. Un espacio metrizable (HM) es co-(HM), pués por el corolario 1.16, los espacios (HM) metrizables coinciden con los co-Schwartz.

3º. Existen más espacios que son (HM) y co-(HM); por ejemplo, los espacios de Silva. En realidad, todo espacio de Silva es Schwartz, luego (HM). Además, el dual fuerte de un espacio de Silva es un Frechet - Schwartz (y reciprocamente, puede probarse que el dual fuerte de un Frechet - Schwartz es Silva), luego es co-(HM). Por otra parte, Bellenot ([1976]) ha probado que entre los espacios Frechet ó DF, los (HM) coinciden con los co-(HM), luego el teorema de dualidad válido para los espaios nucleares sigue siendo válido en este caso más general. Recuérdese por otra parte, que en el caso de los espacios de Schwartz, tal resultado no es válido.

Para dar una caracterización de los espacios (HM) entre otro tipo de espacios, damos el siguiente resultado:

<u>Proposición 2.7:</u>

"Entre los espacios DF, los (HM) coinciden con los Schwartz".

Demostración:

De acuerdo con Bellenot, ([1976]), un espacio DF es Schwartz si y solo si sus acotados son precompactos, condición que también es necesaria para que un DF sea un espacio (HM).

Podemos resumir entonces algunos resultados en el siguiente cuadro:

$$\begin{tikzcd} & \text{Frechet-Schwartz} \arrow[dl, Rightarrow, "(a)"'] \arrow[d, Rightarrow, "(b)"'] \arrow[dr, Rightarrow, "(c)"] & \\ \text{Frechet-co-Schwartz} \arrow[r, Leftrightarrow, "(1)"] & \text{Frechet-Montel} \arrow[r, Leftrightarrow, "(2)"] & \text{Frechet-(HM)} \end{tikzcd}$$

Las demostraciones son las siguientes:

La equivalencia (1) la vimos en un resultado anterior; en la proposición 1.12.

La equivalencia (2) es consecuencia inmediata del corolario 1.16.

La implicación (a) la demostramos en el corolario 1.17 para espacios metrizables solamente.

La implicación (c) la vimos en la proposición 1.9 y por último, la implicación (b) es conocida.

Las implicaciones consideradas son estrictas, téngase en cuenta el contraejemplo de Köthe citado anteriormente.

Por otra parte, de acuerdo con el último resultado demostrado, se tienen también las siguientes equivalencias, donde las dos últimas son el resultado enunciado anteriormente de Bellenot:

$$\text{DF - Schwartz} \Leftrightarrow \text{DF - (HM)}$$
$$\text{DF - (HM)} \Leftrightarrow \text{DF - co-(HM)}$$
$$\text{Frechet - (HM)} \Leftrightarrow \text{Frechet - co-(HM)}$$

Teniendo en cuenta estas equivalencias, se deducen inmediatamente los dos resultados siguientes, demostrados por Terzioglu, [1969] :

<u>Proposición 2.8:</u>

"El dual fuerte de un DF-Schwartz es un Montel. El dual fuerte de un Frechet-Montel es un Schwartz".

Para terminar este apartado, vamos a dar otras dos propiedades de los espacios (HM). Para la primera, nos hace falta el concepto de espacio B-semireflexivo, introducido por Raman ([1970]). La idea es la siguiente:

Si E es un e.l.c. y $B \subset E'$, absolutamente convexo y acotado, se dirá reflectivo si E'_B es un espacio de Banach reflexivo con B como bola unidad. La clase de los conjuntos reflectivos generan una topología polar sobre E, notada por T_r y llamada topología reflectiva. Si E es tonelado y $\tilde{E}$ es la compleción de $E(T_r)$, se dice que E es B-semireflexivo si $E = \tilde{E}$ algebraicamente. Entonces,

<u>Proposición 2.9:</u>

"Todo espacio Frechet (HM) es B-semireflexivo".

Demostración:

Como E es reflexivo (por ser Montel), bastará demostrar, de acuerdo con el teorema 17 de Raman, [1970], que el dual fuerte de E es bornológico. Por la proposición 2.1, E es distinguido, y como E es metrizable, por un teorema de Grothendieck (Horvath, [1966] t. 3.16.1) se sigue que $E'(\beta(E',E))$ es bornológico.

<u>Proposición 2.10:</u>

"Sea E un espacio Frechet (HM) estable por cocientes separados. Entonces, todo subconjunto acotado de un cociente separado de E está contenido en la imagen canónica de un compacto de E".

Demostración:

Sea M subespacio cerrado de E y $A \subset E/M$ acotado. Sea $\varphi : E \longrightarrow E/M$ la aplicación canónica. Como E/M es (HM), A es precompacto, luego relativamente compacto,

$\Rightarrow \quad \exists\, K \subset E/M$ compacto $\mid$ $A \subset K$.

Dado K, como el cociente es Frechet, existe $L \subset E$ compacto tal que $K = \varphi(L)$. Luego $A \subset \varphi(L)$.

Para terminar este apartado, vamos a hacer dos comentarios: el primero se refiere a la relación de los espacios (HM) con los Schwartz. Sabemos que los Schwartz son (HM). Para obtener algún recíproco, puede exigirse por ejemplo que el espacio sea quasinormable. O sea, los (HM) quasinormables coinciden con los Schwartz. En el segundo, observamos la relación existente entre los espacios (HM) y los semi-Montel, o Montel. A partir de ella, pueden demostrarse muchas propiedades análogas; por ejemplo:

<u>Proposición 2.11:</u>

"En un espacio (HM) cuasi-completo, toda sucesión $\sigma(E,E')$ convergente, es convergente al mismo límite".

Demostración:

Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión débilmente convergente a un punto $x \in E$. El conjunto $\{x, x_1, x_2, \ldots\}$ es acotado. Sea A cerrado y acotado tal que contiene a $\{x, x_1, x_2, \ldots\}$. Como E es semi-Montel, A es compacto, y sobre él coinciden las topologías débil y la propia del espacio E. Luego la sucesión $\{x_n\}$ converge a x.

A resultados de este tipo son a los que nos referimos, usando las propiedades de los Montel.

2. Condiciones de tonelación en los espacios (HM).

En este apartado vamos a imponer algunas condiciones de tonelación a cierta clase de espacios (HM) para así poder caracterizar su topología. Comenzamos entonces con el siguiente resultado:

Lema 2.12:

"Sea E un espacio (HM) y E' su dual. Entonces, todo subconjunto equicontinuo de E', es relativamente $\beta(E',E)$-compacto".

Demostración:

Antes de darla, vamos a hacer una observación: Si notamos $\lambda(E',E)$ la topología de la convergencia uniforme sobre los precompactos de E, es claro que si E es un espacio (HM), entonces las topologías $\lambda(E',E)$ y $\beta(E',E)$ coinciden, pués los acotados son precompactos. Supongamos entonces que $A \subset E'$ es equicontinuo $\Rightarrow$

$$\exists V \in \mathcal{U}(E) \quad | \quad A \subset V^{o} .$$

Sobre los equicontinuos, las topologías $\lambda(E',E)$ y $\sigma(E',E)$ coinciden, luego por el teorema de Alaoglu - Bourbaki, se sigue que V^{o} es $\lambda(E',E)$-compacto. Por tanto, de acuerdo con la nota anterior, V^{o} es $\beta(E',E)$-compacto, y por tanto A es relativamente $\beta(E',E)$-cpto.

Usando este resultado, tenemos la siguiente caracterización anunciada antes:

Proposición 2.13:

"Sea E un espacio (HM) σ-infratonelado tal que su dual fuerte es metrizable. Entonces, la topología de E es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos relativamente $\beta(E',E)$-compactos de E'".

Demostración:

Recordamos que un espacio σ-infratonelado es aquel en que toda sucesión acotada del dual fuerte, es equicontinua.

Representemos por T la topología de E (de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de E') y por T^{β}_{rc} la topología de la convergencia uniforme sobre los relativamente $\beta(E',E)$-compactos.

Por el lema anterior, es claro que $T \leq T^{\beta}_{rc}$.

Recíprocamente, sea $A \subset E'$ relativamente $\beta(E',E)$-compacto. En particular, es $\beta(E',E)$-precompacto, y como $E'(\beta(E',E))$ es metrizable $\Rightarrow$

$$\exists \{u_n\} \subset E' \mid u_n \rightarrow 0 , \quad A \subset \overline{eco}(\{u_n\}) .$$

(Véase Robertson, Robertson [1964] , p.133).

Como $u_n \rightarrow 0$ en el dual fuerte, en particular, $\{u_n\}$ es $\beta(E',E)$-acotado, y como E es σ-infratonelado, es por tanto equicontinuo $\Rightarrow$

$$\exists U \in \mathcal{U}(E) \quad \mid \quad \{u_n\} \subset U^{\circ} .$$

Haciendo el mismo razonamiento que en el lema anterior se deduce que U° es $\beta(E',E)$-compacto $\Rightarrow$

$$\overline{\mathrm{eco}}\,(\{u_n\}) \subset U^{\circ} \quad \Rightarrow \quad A \subset U^{\circ} \quad \Rightarrow$$

A es equicontinuo, y por tanto, $T_{rc}^{\beta} \leqslant T$.

Como caso particular de deducción inmediata, se tiene la siguiente caracterización de los DF-(HM):

Corolario 2.14:

"Sea E un espacio DF-(HM). Entonces, la topología de E es la topología de la convergencia uniforme sobre los relativamente $\beta(E',E)$-compactos".

Exigiendo una condición de σ-tonelación, podemos deducir el siguiente resultado:

Proposición 2.15:

"Sea E un espacio (HM) σ-tonelado. Entonces, toda sucesión debilmente convergente en E', es fuertemente convergente al mismo límite".

Demostración:

Sea $\{x'_n\} \subset E'$ tal que $x'_n \longrightarrow x'$ $(\sigma(E',E))$. El conjunto $\{x', x'_1, x'_2, \ldots\}$ es en particular debilmente acotado, y como E es σ-tonelado, es equicontinuo, luego existe un entorno de 0, U, tal que

$$\{x', x'_1, x'_2, \ldots\} \subset U^{\circ}.$$

Dado que U° es $\beta(E',E)$-compacto, se tiene que $\{x'_n\}$ converge a x' fuertemente.

Como ya observamos en el primer capítulo, no es restricción el imponer a un espacio (HM) el carácter completo; si lo suponemos, obtenemos propiedades más ricas. En la siguiente proposición, resaltamos alguna de ellas:

Proposición 2.16:

"Sea E un espacio (HM) completo. Entonces,
(a) su dual fuerte es tonelado
(b) si E es tonelado, es reflexivo".

Demostración:

Ya habíamos demostrado antes que un (HM) completo (en realidad bastaba cuasi-completo) es semireflexivo, luego su dual fuerte es tonelado. Si el espacio es además tonelado, entonces es reflexivo. (Treves, [1967], proposiciones 36.4 y 36.5).

De la parte (a), se deduce (Horvath, [1966], proposición 3.16.1) que un espacio (HM) completo es distinguido, resultado demostrado anteriormente por otro camino.

Proposición 2.17:

"Sea E(T) un e.l.c.s. con una base numerable de conjuntos precompactos tal que verifica la condición:
(*) toda sucesión acotada en $E'(\lambda(E',E))$ es equicontinua. Entonces, $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio (HM)".

Demostración:

La condición (*) implica en particular el carácter σ-infratonelado de E, pués la topología $\lambda(E',E)$ es menos fina que la topología fuerte, $\beta(E',E)$.

Como hemos supuesto la existencia de una base numerable de conjuntos precompactos en E, el dual E', dotado de la topología $\lambda(E',E)$ es metrizable. Basta ver entonces que todo acotado es precompacto.

Si no fuera así, existiría un subconjunto B de E', $\lambda(E',E)$-acotado pero no precompacto $\Rightarrow$

$$\exists\, U \quad \lambda(E',E)\text{-entorno de } 0 \text{ y } \{x_n\} \subset B \quad \text{tales que}$$

$$x_n - x_m \notin U, \quad \forall\, n,m \; (n \neq m).$$

La sucesión $\{x_n\}$ obviamente no es precompacta para la topología $\lambda(E',E)$, aunque sí acotada, como subconjunto de B. Por la condición (*), $\{x_n\}$ debe ser equicontinuo. Pero sobre los conjuntos equicontinuos, las topologías $\lambda(E',E)$ y $\sigma(E',E)$ coinciden; por tanto, $\{x_n\}$ que es relativamente $\sigma(E',E)$-compacto, debería ser relativamente $\lambda(E',E)$-compacto, lo cual es absurdo pués $\{x_n\}$ no es precompacto siquiera para dicha topología.

A partir de este resultado, podemos obtener algunas consecuencias, que exponemos a continuación:

<u>Corolario 2.18:</u>

"Bajo las hipótesis de la proposición, si E(T) es un espacio de Mazur, entonces $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio de Frechet - Montel".

Demostración:

Si representamos por T_{c_o} la topología sobre E' de la convergencia uniforme sobre las sucesiones que tienden a cero, es conocido que $E'(T_{c_o})$ es completo por ser Mazur (Wilansky, [1978] , teorema 8.6.5). Ahora bien, es claro que $T_{c_o} \lesssim \lambda(E',E)$, luego $E'(\lambda(E',E))$ también es completo, y por tanto, Frechet. Por la proposición es (HM), o sea, Frechet - Montel.

<u>Corolario 2.19:</u>

"Si E(T) es un espacio (HM) σ -infratonelado con una base numerable de conjuntos acotados, entonces E(T) es co-(HM)".

Demostración:

Dado que E es (HM) y los acotados coinciden con los precompactos, se sigue que el espacio E posee una base numerable de precompactos. Además, como las topologías $\lambda(E',E)$ y $\beta(E',E)$ coinciden, la condición (*) de la proposición no es más que el carácter σ-infratonelado de E. Por tanto, de acuerdo con la proposición, se puede concluir que $E'(\beta(E',E))$ es (HM).

Recuérdese que la topología de estos espacios la tenemos caracterizada en la proposición 2.13. En la hipótesis del corolario, basta exigir que los acotados sean precompactos; no es necesario el carácter (HM).

Exigiendo un poco más, se puede llegar a la siguiente caracterización:

Corolario 2.20:

"Sea $E(T)$ un e.l.c.s. infratonelado con una base numerable de conjuntos acotados. Entonces, $E(T)$ es un espacio (HM) si y solo si $E'(\beta(E',E))$ es co-(HM)".

Demostración:

Si $E''(\beta(E'',E'))$ es un espacio (HM), también lo es $E(T)$, pués al ser infratonelado, la aplicación canónica $E \longrightarrow E''_{\beta}$ es un homeomorfismo.

Recíprocamente, si $E(T)$ es (HM), las topologías $\lambda(E',E)$ y $\beta(E',E)$ coinciden; el carácter infratonelado de E implica la condición (*) de la proposición, luego por ésta, $E'(\beta(E',E))$ es un espacio (HM). Pero el dual fuerte de un espacio σ-infratonelado con una base numerable de acotados es un espacio de Frechet, (véase Pietsch, [1970] , 0.7.6), luego $E'(\beta(E',E))$ es un Frechet - (HM), o sea, Frechet - Montel, y el dual fuerte de un Frechet - Montel, es Schwartz. En particular, (HM).

En este corolario hemos caracterizado una parte de espacios (HM) que son DF (pués todo infratonelado con base numerable de acotados es DF), y entre estos espacios es conocido que el carácter (HM) es equivalente al co-(HM). Luego podemos enunciar:

Corolario 2.21:

"Si $E(T)$ es un espacio infratonelado con una base numerable de acotados, entonces $E(T)$ es (HM) si y solo si $E'(\beta(E',E))$ es (HM) y co-(HM)".

Por un razonamiento análogo al empleado anteriormente, puede demostrarse también que si un espacio es infratonelado y tiene una base numerable de conjuntos acotados, entonces es Schwartz si y solo si su dual fuerte es Frechet co-Schwartz. Un resultado muy parecido es conocido: Un espacio infratonelado es Schwartz si y solo si su dual fuerte es co-Schwartz (Wong, [1979] , p. 37), aunque claro está, al quitar la hipótesis de base numerable de acotados, el dual fuerte no será metrizable.

En las hipótesis de la proposición 2.17, podemos deducir que el espacio verifica una condición similar a la infratonelación:

Corolario 2.22:

"En las hipótesis de la prop. 2.17, se verifica que todo $\lambda(E',E)$-acotado es equicontinuo".

Demostración:

Sea $A \subset E'$, $\lambda(E',E)$-acotado. Como es un espacio (HM), es precompacto, y separable (pués $E'(\lambda(E',E))$ es metrizable) $\Rightarrow$

$$\exists \{a_n\} \subset A \quad \text{tal que} \quad A \subset \overline{\{a_n\}} \ .$$

Ahora bien, $\{a_n\}$ como subconjunto de A es una sucesión $\lambda(E',E)$-acotada, luego por la condición (*) de la proposición 2.17, se sigue que es equicontinua, luego

$$\exists\ U \in \mathcal{U}(E) \mid \{a_n\} \subset U^o \Rightarrow$$

$\overline{\{a_n\}} \subset U^o$ y por tanto, A es equicontinuo.

A partir de esta demostración, podemos hacer el siguiente razonamiento:

Supongamos un e.l.c.s. tal que:

(a) Los acotados son precompactos

(b) Es σ-infratonelado

(c) Posee una base numerable de acotados

(d) Es cuasi-completo.

Entonces, dicho espacio es reflexivo.

La prueba es fácil a partir de lo anterior; un subconjunto cerrado y acotado es compacto y por tanto, $\sigma(E,E')$-compacto. Luego el espacio es semireflexivo. Pero exactamente igual a como demostramos el corolario anterior, se deduce que el espacio es infratonelado, pués las topologías $\beta(E',E)$ y $\lambda(E',E)$ coinciden en este caso. Conclusión: el espacio es reflexivo.

Si sustituimos la condición (d) por

(d') El espacio es completo,

entonces, los espacios que verifican (b), (c) y (d') son los llamados F'-espacios por Pietsch [1970] ; entonces, podemos enunciar:

Corolario 2.23:

"Cualquier F'-espacio en el que los acotados sean precompactos es reflexivo".

El resultado también es cierto para los espacios de Frechet, pués entonces sería (HM) y por tanto, Montel. En particular, los espacios F'-(HM) son reflexivos. Más particularmente, los nucleares F ó F'-espacios, son reflexivos. (Pietsch, [1970] , teorema 4.4.12).

Con estos resultados, terminamos el estudio de condiciones de tonelación en los espacios (HM).

3. La topología (HM) asociada a un e.l.c.

En este apartado vamos a demostrar que dado un e.l.c. cualquiera, existe una topología sobre él, que lo dota de estructura de espacio (HM), y además es la más fina entre las menos fuertes que la topología inicial del espacio. A continuación, veremos algunas propiedades de esta topología. La idea de la construcción de ésta, la vimos en el primer capítulo (corolario 1.6); ahora la formalizamos:

Proposición 2.24:

"Sea $E(T)$ un e.l.c.s. y E' su dual. Entonces, existe una topología, θ_E, sobre E, tal que:

(a) $\sigma(E,E') \leq \theta_E \leq T$.

(b) $E(\theta_E)$ es un espacio (HM).

(c) Si T' es otra topología sobre E tal que $E(T')$ es un espacio (HM) y $\sigma(E,E') \leq T' \leq T$, entonces $T' \leq \theta_E$".

Demostración:

Consideremos la siguiente familia:

$$\mathcal{T} = \{T_\alpha : T_\alpha \text{ es topología sobre } E,\ E(T_\alpha) \text{ es (HM) y } T_\alpha \leq T\} .$$

Es claro que esta familia es no vacía, pués E dotado de la topología débil $\sigma(E,E')$ es (HM), y además, $\sigma(E,E') \leq T$. Luego $\sigma(E,E') \in \mathcal{T}$.

Sea entonces θ_E la topología supremo, en el retículo de las topologías vectoriales, de la familia $\mathcal{T}$.

Dicha topología es proyectiva (la inicial respecto a las aplicaciones identidad $E \longrightarrow E(T_\alpha)$) de espacios (HM), luego por el corolario 1.6, $E(\theta_E)$ es un espacio (HM). La topología θ_E hace continuas todas las aplicaciones $E(\theta_E) \longrightarrow E(T_\alpha)$, luego $T_\alpha \leq \theta_E$. En particular, $\sigma(E,E') \leq \theta_E \leq T$, pués $T_\alpha \leq T$. Por último, si T' es otra topología comprendida entre la débil y T , y $E(T')$ es un espacio (HM), entonces $T' \in \mathcal{T}$, y por tanto, $T' \leq \theta_E$.

Lo que nos proponemos hacer en el resto del apartado es lo siguiente: Supongamos $E(T_E)$ y $F(T_F)$ dos e.l.c.s. y sean θ_E y θ_F las topologías (HM) asociadas respectivas. Entonces, si tenemos un morfismo estricto para las topologías (HM) asociadas, lo seguirá siendo para las iniciales, bajo ciertas condiciones. Con este objeto, necesitamos dos lemas previos:

Lema 2.25:

"Sean E y F dos e.l.c.s. y $f:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua para las topologías (HM) asociadas a E y F respectivamente. Entonces, f es continua si dotamos a E y F de las topologías de Mackey".

Demostración:

Consideremos el diagrama de la hoja siguiente. Sea W $\tau(F,F')$ entorno de 0 $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} E(\theta_E) \arrow[r, "f"] & F(\theta_F) \\ E(\tau(E,E')) \arrow[u, "i_E"] \arrow[r, "f"] & F(\tau(F,F')) \arrow[u, "i_F"'] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ podemos suponer $W \supset B^o$, donde B es absolutamente convexo y $\sigma(F',F)$-compacto. Como f es debilmente continua, su traspuesta también, luego ${}^t f(B) = A$ es absolutamente convexo y $\sigma(E',E)$-compacto $\Rightarrow$

$V = A^o$ es $\tau(E,E')$ entorno de 0 .

Como

$${}^t({}^t f)(A^o) \subset B^o \quad \Rightarrow$$

$$f(V) \subset W \quad \text{como se quería.}$$

<u>Lema 2.26:</u>

"Sean E y F dos e.l.c.s y $f:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua para las topologías (HM) asociadas. Si la topología de E coincide con la de Mackey, entonces f es continua para las topologías de E y F".

Demostración:

De acuerdo con el lema anterior, f es continua para las topologías de Mackey. Como $T_F \leq \tau(F,F')$, es claro que $f:E(\tau(E,E')) \longrightarrow F(T_F)$, es continua.

En particular, el lema anterior puede aplicarse cuando el espacio E sea metrizable, pués entonces, su topología es la de Mackey. En este caso, puede hacerse una demostración directa, sin usar el lema 2.18.

Pués sea $\{U_k\}$ una base de entorno de 0 decreciente en $E(T_E)$; si f no fuera continua para las topologías T_E y T_F

$$\exists V \in \mathcal{U}(F) \quad | \quad k^{-1}U_k \not\subset f^{-1}(V) \ , \ \forall k \geqslant 1$$

(V lo suponemos equilibrado). Sea $x_k \in k^{-1}U_k \setminus f^{-1}(V)$.

Es claro que la sucesión $\{kx_k\}$ tiende a 0 en T_E y por tanto en θ_E. Luego $\{kf(x_k)\}$ tiende a 0 en θ_F. En particular, es acotado, luego existe a > 0 |

$$\{kf(x_k)\} \subset aV .$$

Entonces, si k > a, se sigue que $f(x_k) \in V$, lo cual va contra la construcción de la sucesión $\{x_k\}$.

El resultado a que hacíamos referencia al principio, es el siguiente:

<u>Proposición 2.27:</u>

"Sea $E(T_E)$ un espacio (HM) estable por cocientes separados y $F(T_F)$ un e.l.c. metrizable. Sea f una aplicación lineal y continua entre ambos. Entonces, si $f:E(\theta_E) \longrightarrow F(\theta_F)$ es un morfismo estricto, f es también morfismo estricto para las topologías T_E y T_F".

Demostración:

(a) Supongamos en primer lugar que f es inyectiva, y sea $g:f(E) \longrightarrow E$ la aplicación inversa de f.

Como f(E) es metrizable, la topología inducida por T_F es la de Mackey, y al ser g continua para las topologías (HM) asociadas, se sigue de los lemas anteriores que es continua para las topologías T_E y T_F.

(b) Supongamos que f no es inyectiva.
Llamemos N al núcleo de f. Nótese, que como $E(T_E)$ es un espacio (HM), las topologías T_E y θ_E coinciden.

Como

$$f:E(T_E) \longrightarrow F(\theta_F)$$ es un morfismo estricto, se sigue que

$$\bar{f}:E(T_E)/N \longrightarrow F(\theta_F)$$ también lo es.

Si representamos por $\theta_{E/N}$ la topología (HM) asociada al cociente E/N, es claro que dicha topología coincide con la del cociente, pués E es estable por cocientes. Luego la aplicación $\bar{f}$ anterior es un morfismo estricto para las topologías (HM) asociadas a E/N y F respectivamente, y por la primera parte de la demostración, se sigue que

$$\bar{f}:E(T_E)/N \longrightarrow F(T_F)$$ es un morfismo estricto; con lo cual, $f = \varphi \circ \bar{f}$ es un morfismo estricto. (φ es la aplicación canónica de E en E/N).

Como hemos visto, **hemos** impuesto la hipótesis de ser E un espacio (HM) estable por cocientes separados. Veamos que podemos suprimir esta estabilidad, haciendo uso de la topología cociente (HM) definida en el primer capítulo:

En el caso de ser la aplicación f inyectiva no hay ningún problema, así que abordaremos el caso de que no lo sea. Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} E(\theta_E) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & F(\theta_F) \\ E(\theta_E)/N \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(E) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ es un morfismo estricto para las topologías que figuran en el diagrama. (Im(E) lleva la inducida).

Consideremos sobre $E(\theta_E)/N$ la topología cociente (HM), que notaremos T_c. Ya demostramos que esta topología es menos fina que la cociente usual, y además, la aplicación $\bar{f}$ sigue siendo continua cuando sobre el cociente se consideraba esa topología.

Además, como la aplicación

$\bar{f}^{-1}: \mathrm{Im}(E) \longrightarrow E(\theta_E)/N$ es continua,

pués $\bar{f}$ es morfismo estricto, y la identidad de $E(\theta_E)/N$ en $E/N(T_c)$ es continua, se sigue que

$\bar{f}^{-1}: \mathrm{Im}(E) \longrightarrow E/N(T_c)$ es continua.

Luego $\bar{f}$ es un morfismo estricto, y de acuerdo con lo anterior, f también lo es.

(Obsérvese que hemos usado el siguiente hecho: Si E es un espacio (HM) y N subespacio cerrado de E, entonces sobre E/N coinciden la topología cociente (HM) y la topología (HM) asociada a ese espacio, como se comprueba facilmente).

4. La propiedad SC.

Este apartado lo dedicamos a definir la propiedad SC (subspace closure) y demostrar que dicha propiedad implica la B-completitud (proposición 2.30).

La propiedad SC es una generalización de la propiedad HC de Bellenot, [1975] , que a su vez generalizó unos resultados de Raman, [1970] . Siempre que nos refiramos en este apartado a la propiedad HC, entenderemos que es la del autor Bellenot citado anteriormente.

Las propiedades HC de Bellenot y Raman, coinciden en los espacios ω-tonelados (Bellenot, [1975]). Basándonos en ello, vamos a dar en primer lugar un resultado que generaliza la proposición 2.9:

Proposición 2.28:

"Sea E un espacio (HM) completo tonelado. Entonces, E es B-semireflexivo".

Demostración:

Dado que el espacio es (HM) completo, es inductivo semireflexivo (Bellenot, [1976]); o lo que es equivalente, tiene la propiedad HC (Bellenot, [1975]).

Como el espacio es tonelado, las propiedades de Bellenot y Raman coinciden, y por tanto, (teorema 16 de Raman, [1970]), E es B-semireflexivo.

Aplicando el teorema 12 del trabajo citado anteriormente de Raman, podemos deducir también que el espacio es reflexivo (véase proposición 2.16 (b)).

Este resultado mejora la proposición 2.9.

Definición 2.29:

"Sea E un e.l.c.s. Diremos que E tiene la propiedad SC si todo subespacio cerrado de E' para la convergencia local, es $\sigma(E',E)$-cerrado".

Recordamos que la convergencia local de una sucesión en el dual de un espacio E significa que existe un entorno de 0 en E tal que la sucesión converge en el espacio normado asociado a dicho entorno. También queremos decir que cerrado para la convergencia local, lo entendemos por sucesiones.

Es obvio que la propiedad SC inplica la propiedad HC. A continuación, demostramos el resultado anunciado al principio:

Proposición 2.30:

"Sea E un e.l.c.s. con la propiedad SC. Entonces, E es B-completo".

Demostración:

Demostremos que todo subespacio de E' casi-cerrado, es $\sigma(E',E)$-cerrado. (Como es casi-cerrado, la intersección del subespacio con la polar de cualquier entorno de cero, es $\sigma(E',E)$-cerrado).

Logicamente, dado que el espacio E tiene la propiedad SC, bastará demostrar que un subespacio casi-cerrado, es cerrado para la convergencia local, con lo cual se concluirá la demostración.

Sea pués H un subespacio de E' casi-cerrado, y $\{x_n\}$ una sucesión en H convergente localmente a un elemento $y \in E'$. Veamos que $y \in H$.

Como $x_n \longrightarrow y$ localmente $\Rightarrow$

$$\exists U \in \mathcal{U}(E) \mid x_n , y \in E'_{U^o} \; ; \; x_n \longrightarrow y \text{ en } E'_{U^o} .$$

En particular, $H \cap U^o$ es $\sigma(E',E)$-cerrado.

Pero,

$$\sigma(E'_{U^o}, E) \leq \sigma(E'_{U^o}, (E'_{U^o})') \quad ; \quad \text{luego}$$

$H \cap U^o$, que es cerrado para la primera topología, lo es también para la segunda.

Pero esa topología, $\sigma(E'_{U^o}, (E'_{U^o})')$, es la topología débil del espacio E'_{U^o} normado con la jauja de U. Decir que $x_n \longrightarrow y$ localmente significa que converge para la topología de la norma en E'_{U^o} ; con mayor razón, para la topología débil anterior.

Como $H \cap U^o$ es $\sigma(E',E)$-cerrado, lo es cualquier múltiplo suyo. Del hecho de que $x_n \longrightarrow y$ localmente, podemos suponer que $x_n \in H \cap U^o$, para todo n.

Como $H \cap U^o$ es cerrado para la topología débil de E'_{U^o}, y $x_n \longrightarrow y$ para esa topología, se sigue en conclusión que $y \in H$.

Este resultado es lo más que hemos podido obtener en conexión con los espacios (HM); sabemos que todo espacio (HM) completo tiene la propiedad HC, pero no existe una relación entre los espacios B-completos y los (HM):

B-completo no implica (HM). Basta pensar en un espacio de Banach de dimensión infinita.

(HM) no implica B_r-completo. Un ejemplo de tal espacio puede ser el de las distribuciones, $\mathcal{D}'(\Omega)$, es (HM) pués es nuclear (Pietsch, [1972]) y no es un espacio B_r-completo. (Valdivia, [1974]).

C A P I T U L O   III

LA VARIEDAD GENERADA POR LOS ESPACIOS (HM)

1. Los espacios (HM) y los cardinales medibles.

El objetivo fundamental de este capítulo es demostrar que la variedad generada por los espacios (HM), es simplemente generada. Con este objeto, vamos a recordar algunos conceptos.

En primer lugar, ya sabemos que los espacios (HM) no forman variedad pués no son estables por cocientes separados. Entendemos por variedad generada por los espacios (HM) como la intersección de todas las variedades que los contienen. Para demostrar que es simplemente generada, habrá que probar que existe un cardinal m tal que todo espacio (HM) es un T(m)-espacio. (O sea, que todo entorno de cero debe contener un subespacio de codimensión menor que m). (Consúltese el trabajo de los autores Diestel, Morris, Saxon, [1972]).

En segundo lugar, vamos a recordar el concepto de cardinal medible. Se dice que un cardinal α es medible, si es no numerable y toda medida definida sobre $\mathcal{P}(\alpha)$ que solo tome los valores 0 y 1, es β-aditiva, para cada $\beta < \alpha$. (Lo cual es equivalente a decir que existe un ultrafiltro libre sobre α que es β-completo, para cada $\beta < \alpha$). (Véase Bell - Slomson, [1969] , o bien, Chang - Keisler, [1973]).

En lo que resta de memoria, representaremos por μ el primer cardinal medible. Entonces, el resultado a que hacíamos referencia antes es:

Teorema 3.1:

"Sea E un espacio (HM). Entonces, E es un $T(\mu)$-espacio".

Demostración:

Hay que demostrar que todo entorno de cero contiene un subespacio de codimensión menor que μ.

Vamos a hacer un razonamiento por reducción al absurdo. Si no fuera un $T(\mu)$-espacio, $\Rightarrow$

$$\exists\ U \in \mathcal{U}(E)\ \big|\ \forall\ M \subset U,\ M \text{ subespacio, } \operatorname{cod}(M) \geqslant \mu \quad .$$

Sea N el mayor subespacio de E contenido en el entorno de cero U, y sea F un suplemento algebraico de N; $E = N \oplus F$. Es claro que $U \cap F$ es entorno de cero en F, además, el mayor subespacio de F contenido en dicho entorno es el subespacio trivial $\{0\}$, pués en caso contrario contradiríamos la elección del subespacio N.

Luego la jauja del entorno $U \cap F$ sería una norma.

Podemos entonces hacer una reducción del problema al siguiente supuesto:

(*) En un espacio (HM) con cardinal de una base de Hamel mayor o igual que el primer cardinal medible, no puede existir una norma continua.

Demostrado este resultado, se tiene demostrado el teorema, mediante el siguiente razonamiento:

Sea E un espacio (HM), supongamos que no fuera T(μ)-espacio, luego existiría el entorno U de cero considerado anteriormente. Sea $E = N \oplus F$; donde N y F tienen el mismo significado que antes; F es un espacio (HM) pués E lo es, su dimensión es la codimensión de N, luego $\dim(F) \geq \mu$, y sin embargo, existiría en F una norma continua, como es la jauja del entorno $U \cap F$. (Dicha jauja es continua pués U puede elegirse abierto, con lo cual $U \cap F$ es un entorno abierto en F tal que $0 \in \text{int}(U \cap F)$, o sea, su jauja es continua).

Demostramos a continuación el enunciado (*):

Sea $\{e_i : i \in I\}$ un conjunto con la misma cardinalidad que una base de Hamel de E. Como la dimensión de E es mayor o igual al primer cardinal medible, existe un ultrafiltro libre y numerablemente completo sobre E (realmente, el ultrafiltro puede considerarse definido también sobre el conjunto de índices I, cuyo cardinal es mayor o igual que μ).

Sea $\mathcal{F}$ tal ultrafiltro. (Numerablemente completo lo entendemos como ω^{+}-completo).

Veamos que $\mathcal{F}$ es casi-acotado:

Sea $V \in \mathcal{U}(E)$ equilibrado y convexo;

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot V \quad , \quad y \quad E \in \mathcal{F} \quad ,$$

como $\mathcal{F}$ es numerablemente completo,

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad | \quad n \cdot V \in \mathcal{F} \quad .$$

Como E es un espacio (HM), el ultrafiltro debería ser de Cauchy. Sin embargo, vamos a demostrar que no lo es , con lo cual llegaremos a una contradicción y habremos concluido la demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\|..\|$ una norma continua definida sobre E. Vamos a demostrar que el conjunto $\{e_i : i \in I\}$ puede construirse de tal forma que

$\| e_i - e_j \| \geq \varepsilon$, $i \neq j$, con lo cual, $\mathcal{F}$ no será un ultrafiltro de Cauchy. (Como ya observamos anteriormente, el ultrafiltro lo podemos considerar definido sobre E o sobre I. Si lo consideramos solo sobre I, éste induce uno sobre E. En la demostración, usamos este hecho sin especificarlo en concreto).

Vamos a emplear inducción transfinita para construir el conjunto $\{e_i : i \in I\}$ verificando lo deseado.

Es claro que dado e_1 , e_2 puede construirse tal que $\| e_1 - e_2 \| \geq \varepsilon$. Supongamos entonces construido $\{e_\alpha : \alpha < \beta\}$, y veamos que podemos construir el elemento e_β :

Consideremos el subespacio generado por el conjunto $\{e_\alpha : \alpha < \beta\}$ (su dimensión será card(β) a lo sumo, si los elementos son linealmente independientes), y su cierre. La dimensión del cierre sería a lo más card$(\beta)^{\aleph_0}$,pués para cada elemento del cierre existe una sucesión de elementos del conjunto que tienden hacia él en el sentido de la norma (aunque en general, no para la topología de E) luego

$$\mathrm{card}(\beta)^{\aleph_0} < (2^{\mathrm{card}(\beta)})^{\aleph_0} = 2^{\mathrm{card}(\beta)} < \mu$$

pués μ es inaccesible y β era tal que card$(\beta) < \mu$.

Por tanto, existe un elemento e_β fuera de ese subespacio, pués si no, la dimensión de E no sería mayor o igual que el primer cardinal medible. Además, tal elemento siempre se puede elegir de modo que diste de ese subespacio una cantidad $\geq \varepsilon$, sin más que multiplicarlo por una constante adecuada.

Podemos entonces concluir que el ultrafiltro $\mathcal{F}$ no sería de Cauchy, lo cual implicaría que el espacio E no sería (HM), contradiciendo la hipótesis.

Una vez demostrado el teorema queremos hacer algunas observaciones:

Hemos usado una caracterización de la numerabilidad completa distinta de la definición dada. El siguiente resultado puede encontrarse en Bell, Slomson, [1969] , y engloba la propiedad usada:

"Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I. Entonces $\mathcal{F}$ es α-completo si y solo si siempre que $\beta \leq \alpha$ y $\{A_\xi : \xi < \beta\}$ sea una partición de I, existe un único ξ_0 tal que $A_{\xi_0} \in \mathcal{F}$ ".

Esta propiedad será usada repetidamente en el tema siguiente. Cuando no se considera una partición, puede garantizarse la existencia de al menos un elemento en el ultrafiltro.

Consideremos por otra parte, los dos enunciados siguientes:

(a) Sea E un espacio (HM) de dimensión de Hamel mayor o igual que el primer cardinal medible. Entonces, no puede definirse una norma continua sobre E.

(b) Todo espacio (HM) es un $T(\mu)$-espacio.

En el transcurso del teorema, se demostró que (a) $\Rightarrow$ (b). Realmente, son proposiciones equivalentes:

Nótese que el enunciado (a) es equivalente a decir que si existe una norma continua, entonces la dimensión ha de ser menor o igual al primer cardinal medible. Supongamos entonces que p fuese una norma continua definida sobre E. Es claro que $\{x \in E: p(x) \leq 1\}$ es un entorno de cero en E, y como p es norma, el único subespacio que contiene es el trivial, $\{0\}$. Como es un $T(\mu)$-espacio, debe ser $\operatorname{cod}(\{0\}) < \mu$, o sea, la dimensión de E es menor que el primer cardinal medible.

En particular, cuando se dota a un espacio vectorial de la topología localmente convexa más fina, siempre se puede definir una norma continua, por eso, la dimensión del espacio ha de ser menor que el primer cardinal medible. (Véase Henson, Moore, [1973]).

Corolario 3.2:

"La variedad generada por los espacios (HM) es simplemente generada".

Entre los espacios (HM) estables por cocientes separados sabemos que se encuentran los Schwartz; aplicando un resultado citado anteriormente de Henson y Moore, podemos demostrar:

Proposición 3.3:

"Los espacios (HM) dotados de la topología localmente convexa más fina son estables por cocientes separados".

Demostración:

Sea E un espacio (HM) dotado de la topología localmente convexa más fina y F un subespacio cerrado de E. Por el resultado citado de Henson y Moore (teorema 2, [1973]), sabemos que dim(E) $< \mu$.

Ahora bien, la topología cociente sobre E/F es la topología localmente convexa más fina, pués ésta la heredan los cocientes. Luego por dicho teorema 2, E/F es un espacio (HM).

Para terminar este apartado, vamos a dar una definición, de cardinal minimal de una familia de seminormas, a partir de la cual deduciremos un resultado:

Definición 3.4:

"Sea E un espacio vectorial y $\mathcal{P} = \{ p_i : i \in I \}$ una familia de seminormas definidas sobre E. Se define el cardinal minimal de $\mathcal{P}$ y lo notamos $\alpha(\mathcal{P})$ al cardinal: $\alpha(\mathcal{P}) = \inf \{ \text{card}(J) : \{ q_j : j \in J \}$ es familia de seminormas que define igual topología que $\mathcal{P} \}$ ".

Si E es un e.l.c.s. y la familia $\mathcal{P}$ define la topología de E, entonces E será normable cuando $\alpha(\mathcal{P}) = 1$, y metrizable si $\alpha(\mathcal{P}) = \aleph_0$.

El resultado que mencionábamos al principio es:

Proposición 3.5:

"Sea E un espacio (HM) y $\mathcal{P} = \{ p_i : i \in I \}$ una familia de seminormas continuas sobre E tal que el cardinal minimal $\alpha(\mathcal{P}) < \mu$. Entonces, si $N = \{ x \in E : p_i(x) = 0, \forall i \in I \}$, se verifica que $\text{cod}(N) < \mu$ ".

Demostración:

Para cada $i \in I$, sea $N_i = \{ x \in E : p_i(x) = 0 \}$. Es claro que $N = \bigcap_{i \in I} N_i$. Sea G_i un suplemento algebraico de N_i , para cada $i \in I$. Cada G_i es un espacio (HM) pués E lo es. Más aún, p_i restringida a G_i es una norma continua, ya que es seminorma continua, y si $x \neq 0$ es un elemento de G_i tal que $p_i(x) = 0$, entonces $x \in N_i$. Como $G_i \cap N_i = \{ 0 \}$, es $x = 0$.

Tenemos un espacio (HM) y una norma continua definida en él. Debe ser por tanto $\dim(G_i) < \mu$, $\forall i \in I$.

Luego $\mathrm{cod}(N_i) < \mu$, $\forall i \in I$.

Dado que $\alpha(\mathcal{P}) < \mu$, es $\mathrm{cod}(N) < \mu$.

Como caso particular, podemos enunciar:

<u>Corolario 3.6:</u>

"Si la topología de un espacio (HM) está definida por una familia $\mathcal{P}$ de seminormas tal que $\alpha(\mathcal{P}) < \mu$ entonces la dimensión del espacio es menor que μ ".

Demostración:

Si E es tal espacio (separado desde luego), de acuerdo con las notaciones de la proposición, es en este caso $N = \{0\}$, luego $\mathrm{cod}(N) = \dim(E) < \mu$.

Este resultado es análogo al ya demostrado en el caso de suponer la existencia de una norma continua en un espacio (HM).

2. Aplicación a los espacios inductivos semi-reflexivos.

En este apartado, como consecuencia del teorema 3.1 vamos a resolver un problema dejado abierto por Bellenot ([1976]) sobre una caracterización de los espacios (HM). El contra-ejemplo que damos es el siguiente:

Proposición 3.7:

"Admitiendo la existencia de cardinal medible, existe un espacio que es inductivo semi-reflexivo, los acotados son de dimensión finita pero no es (HM)".

Demostración:

Sea μ el primer cardinal medible no numerable y consideremos el espacio vectorial E de base de Hamel $\{\alpha : \alpha < \mu\}$. Consideremos a continuación el espacio $F = \{\{a_\alpha\}_{\alpha<\mu} : \mathrm{card}(\{a_\alpha : a_\alpha \neq 0\}) < \aleph_0\}$, y dotamos a E de la topología T_0 definida por la familia de seminormas $\{p_a : a \in F\}$, donde

$$p_a(x) = \sum |a_\alpha \cdot x_\alpha| \quad , \quad a = \{a_\alpha\}_{\alpha<\mu} \quad , \quad x = \sum x_\alpha \cdot \alpha \, .$$

1º. Los acotados de E son de dimensión finita:

Para cada $x \in E$, definimos su soporte como

$$\mathrm{sop}(x) = \{\alpha < \mu : x_\alpha \neq 0\} \text{ , que es finito.}$$

Sea $B \subset E$ acotado, y notemos por $A = \bigcup_{x \in B} \mathrm{sop}(x)$.

Basta probar que A es un conjunto finito. Si no fuera así, dado $x^1 \in B$, existiría $x^2 \in B$ tal que

$$\mathrm{sop}(x^2) \cap (A \setminus \mathrm{sop}(x^1)) = \emptyset .$$

Así sucesivamente, construiríamos una sucesión $\{x^n\}$ en B de tal modo que

$$\mathrm{sop}(x^n) \not\subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{sop}(x^i)$$

. Sea pués

$$\alpha_\mu \in \mathrm{sop}(x^n) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{sop}(x^i),$$

y consideremos el elemento $a \in F$ definido de la siguiente manera:

$$a_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \alpha_\mu \\ n/x^n_{\alpha_\mu} & \alpha = \alpha_\mu \end{cases}$$

. Entonces,

$p_a(x^n) = \sum |a_\alpha x^n_\alpha| \geqslant n$, luego B no sería un conjunto acotado en E.

Puede probarse que el dual de E dotado de esta topología es el espacio F.

A continuación, afinamos la topología de E añadiendo la norma de $\ell^2(\mu)$. Sea T la topología así obtenida. El dual no varía, pués si f es una forma lineal continua para la norma, será un elemento de $\ell^2(\mu)$, o sea, una familia de cuadrado sumable por lo que el conjunto de las coordenadas no nulas de este elemento es numerable y por tanto, está en F.

2º. El espacio $E(T)$ no es (HM).

Pués su dimensión es medible y existe una norma continua definida en este espacio. Además, los acotados de $E(T)$ son de dimensión finita, pués $T \geqslant T_0$.

3º. El espacio $E(T)$ es inductivo semi-reflexivo.

Al introducir la norma de $\ell^2(\mu)$ lo que hacemos es aumentar los equicontinuos de E'. Si u es una forma lineal sobre E' acotada en los equicontinuos para la topología T, es acotada en los equicontinuos para la topología T_o, luego basta probar que $E(T_o)$ es inductivo semi-reflexivo.

Sea pués $u \in E'^*$ acotada en los equicontinuos. Para cada $a \in F$, sea M_a el conjunto:

$M_a = \{\{b_\alpha\} : |b_\alpha| \leq |a_\alpha|, \forall\alpha\}$. Es claro que M_a es equicontinuo, pués si $U_a = \{x \in E : p_a(x) \leq 1\}$, entonces,

$\sum |x_\alpha b_\alpha| \leq \sum |x_\alpha a_\alpha| = p_a(x) \leq 1$ si $x \in U_a$, luego $M_a \subset U_a^o$. Puede probarse que estos conjuntos constituyen un sistema fundamental de equicontinuos.

Consideremos pués u acotada en cada M_a. Vamos a probar que u está en la imagen canónica de E.

Los $\alpha < \mu$ tales que $a_\alpha \neq 0$ definen un conjunto numerable sobre μ. Entonces, si $A \subset \mu$ es numerable, el espacio $\{a \in F : \text{sop}(a) \subset A\}$ es isomorfo algebraicamente a ω, se define $f: \omega \longrightarrow F$ tal que

$f(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{a_\alpha\}_{\alpha<\mu}$, donde $a_\alpha = 0$ si $\alpha \notin A$ y $a_\alpha = x_n$ si $\alpha = \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$ es una enumeración de A.

Analogamente, puede considerarse una aplicación $g: \varphi \longrightarrow E$ definida de la siguiente manera: Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in \varphi$; sea $g(\{x_n\}) = \{y_\alpha\}_{\alpha<\mu}$, donde $y_\alpha = 0$ si $\alpha \notin A$ e $y_\alpha = x_n$ si $\alpha = \alpha_n$.

Además, la topología que induce E en φ es la más fina, pués si p es una seminorma sobre φ y $x = \sum x_i e^i$,

$p(x) \leq \sum |x_i| p(e^i) = \sum_{\alpha<\mu} |x_\alpha a_\alpha|$, y esta es una de las seminormas de E.

Ahora bien; φ con la topología convexa más fina es completo y nuclear (Pietsch, 6.1.1, [1972]), luego es inductivo semi-reflexivo (Berezanskii, [1969]).

Como $u \circ f$ es una forma lineal sobre ω acotada en los equicontinuos (Köthe, 30(2).3, [1969]), existe $x^A \in \varphi$ tal que $u(a) = \langle g(x^A), a \rangle$ si sop(a) $\subset$ A. (*)

Si A, B son subconjuntos numerables y disjuntos de μ, existen por el razonamiento anterior x^A, x^B y $x^{A\cup B}$ en φ que verifican las ecuaciones correspondientes del tipo (*). Es claro que $x^{A\cup B} = x^A + x^B$.

Entonces, podemos expresar μ como una unión disjunta de conjuntos numerables;

$$\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha \quad \text{siendo} \quad A_\alpha = [\alpha \cdot \omega, (\alpha + 1)\cdot \omega).$$

Para cada $\alpha<\mu$, dado que A_α es numerable, existe un elemento $x^{(\alpha)} \in E$ tal que $u(a) = \langle x^{(\alpha)}, a \rangle$, siempre que sop(a) $\subset A_\alpha$. Entonces, todos los $x^{(\alpha)}$ son nulos salvo a lo sumo un número finito de ellos, pués si no, existiría una sucesión $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ tal que $x^{(\alpha_i)} \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$. Si consideramos el conjunto numerable $A = \bigcup A_{\alpha_i}$, debe existir $x^A \in E$ tal que $u(a) = \langle x^A, a \rangle$, sop(a) $\subset$ A. Como x^A restringido a cada A_{α_i} coincide con $x^{(\alpha_i)}$, se tendría que x^A tiene un número infinito de coordenadas no nulas, lo cual no puede ser.

Tiene sentido pués considerar el elemento de E dado por la expresión $x = \sum_{\alpha<\mu} x^{(\alpha)}$. Si $a \in F$, se tiene que $u(a) = \langle x , a \rangle$.

Pués sea $A = \mathrm{sop}(a)$, entonces existe $x^A \in E$ tal que $u(c) = \langle x^A , c \rangle$ siempre que $\mathrm{sop}(c) \subset A$. Pero si $\mathrm{sop}(c) \subset A \cap A_\alpha$, es $u(c) = \langle x , c \rangle$; luego x y x^A coinciden en $A \cap A_\alpha$, para todo α . Por tanto x y x^A coinciden en A y es $u(a) = \langle x^A, a \rangle = \langle x, a \rangle$.

Así pués, E es inductivo semi-reflexivo.

En este contra-ejemplo hemos probado un poco más de lo que dejaba abierto Bellenot, pués este autor preguntaba si el carácter (HM) era equivalente a ser inductivo semi-reflexivo y los acotados precompactos.

C A P I T U L O   IV

ULTRAPRODUCTOS DE E.L.C.

1. Introducción.

En este capítulo, vamos a introducir la definición de ultraproducto de una familia de espacios localmente convexos. Queremos dar en primer lugar una justificación de como hemos llegado a este capítulo.

Sabido es que el ultraproducto de una familia de espacios de Banach ya ha sido estudiado, aunque no servía la construcción conjuntista del ultraproducto pués no conservaba el carácter normado y completo del espacio resultante.

En el desarrollo del estudio de los espacios (HM) hecho en nuestra memoria, no hemos usado para nada el análisis no estándar, pero existe una gran relación entre la construcción del ultraproducto de una familia de espacios de Banach y la construcción de la envolvente no estándar de un espacio normado, como pasamos a exponer a continuación:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios de Banach y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto sobre I. Consideremos

$$\ell^\infty(I;E_i) = \left\{ \{x_i : i \in I\} : x_i \in E_i,\ \|x_i\| \leq M,\ \forall i \in I \right\}$$

dotado de la norma $\|\{x_i\}\| = \sup \|x_i\|$.

Si llamamos

$$N = \left\{ \{x_i\} \in \ell^\infty(I;E_i) : \lim_{\mathcal{F}} \|x_i\| = 0 \right\},$$

puede demostrarse que N es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(I;E_i)$. Entonces, el ultraproducto de la familia $\{E_i\}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{F}$ se define como el espacio cociente $\ell^\infty(I;E_i)/N$, dotado de la norma cociente.

Puede demostrarse que la norma en el ultraproducto viene definida por la expresión:

$$\|\{x_i\}\| = \lim_{\mathcal{F}} \|x_i\|$$, límite que siempre existe:

Dado el elemento $\{x_i\}$ del ultraproducto, consideremos la aplicación:

$f: I \longrightarrow B$ tal que $f(i) = \|x_i\|$, donde $B = [0,M]$.

El ultrafiltro imagen en B de $\mathcal{F}$ por f lo notamos $\mathcal{G}$. Es claro que la familia $\{\bar{G} : G \in \mathcal{G}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, y como B es compacto, existe un elementò $\alpha \in \bigcap\{\bar{G} : G \in \mathcal{G}\}$.

Entonces, $\lim_{\mathcal{F}} f(i) = \lim_{\mathcal{F}} \|x_i\| = \alpha$:

Pués si V es un entorno de α arbitrario, es claro que $V \cap f(M) \neq \emptyset$, $\forall M \in \mathfrak{F}$, luego $\{V \cap f(M) : M \in \mathfrak{F}\}$ es base de un ultrafiltro más fino que $\mathcal{G}$ pués $f(M) \supset f(M) \cap V$; luego debe coincidir con él, de donde se deduce lo deseado.

Hemos dado esta demostración porque la construcción de las seminormas en el ultraproducto de una familia de e.l.c. es muy similar, (no es propiamente la construcción, sino la demostración de la existencia de las seminormas en el ultraproducto), como veremos en la sección siguiente.

Veamos ahora que el ultraproducto de una familia de espacios de Banach, coincide con una envolvente no estándar:

Sea $\mathcal{M}$ una estructura que contiene a la familia $\{E_i : i \in I\}$, sea ${}^*\mathcal{M}$ una extensión de $\mathcal{M}$ construida a partir del ultrafiltro $\mathfrak{F}$. Dicha extensión es $\aleph_1$-saturada (Luxemburg, [1969], teorema 1.6.4); además, como la mónada de $\mathfrak{F}$ es no vacía (teorema 2.1.2 del trabajo citado), existe un elemento $p \in {}^*I$ tal que $p \in {}^*M$, $\forall M \in \mathfrak{F}$. Consideremos entonces el espacio de Banach interno ${}^*E_p$. Dada la construcción de ${}^*\mathcal{M}$, ${}^*E_p$ corresponde exactamente al ultraproducto usual de la familia $\{E_i\}$. Puede demostrarse que las clases de equivalencia del ultraproducto corresponden exactamente a los elementos de la envolvente no estándar ${}^*E_p$ así construida. En particular, son espacios de Banach isométricos.

Esta relación existente entre ambos conceptos y el estudio de los cardinales medibles que tuvimos que hacer en el capítulo anterior, nos han llevado al estudio del ultraproducto de e.l.c.

Nótese que en el caso de los espacios de Banach, el ultrafiltro sobre el conjunto de índices se supone numerablemente incompleto; en este caso necesitaremos más, que sea al menos numerablemente completo, con lo cual, el cardinal del conjunto de índices que manejemos ha de ser mayor o igual que el primer cardinal medible, y por tanto, se tendrá garantizada la existencia de tal ultrafiltro. De todas formas, para un estudio de estos cardinales pueden consultarse Bell, Slomson, [1969] , Chang, Keisler, [1973] , ó Comfort, Negrepontis, [1974].

2. Ultraproducto de una familia de e.l.c.s.

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de e.l.c.s. donde I es un conjunto de índices de cardinal mayor que el primero medible, y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro numerablemente completo sobre I. Consideremos las funciones:

$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} E_i$ tales que $f(i) \in E_i$ y establezcamos la relación $=_{\mathcal{F}}$ dada por:

$f =_{\mathcal{F}} g$ si y solo si $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$.

Claramente, $=_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia. A la clase de una función f se le llamará germen de f según el ultrafiltro $\mathcal{F}$. Entonces,

Definición 4.1:

"Se define el ultraproducto de la familia $\{E_i\}$ y lo representamos $\underset{i \in I}{P}(E_i)$ como el espacio de los gérmenes de las funciones según el ultrafiltro $\mathcal{F}$ ".

Sobre el ultraproducto, se considera la topología definida por las seminormas:

Para cada familia $\{p_i : i \in I\}$ de seminormas sobre los espacios $\{E_i\}$, se define

$$\bar{p}(\{x_i\}) = \lim_{\mathcal{F}} p_i(x_i) \quad , \quad \{x_i\} \in \underset{i \in I}{P}(E_i)$$

Puede demostrarse facilmente que realemente, $\bar{p}$ es una seminorma sobre el ultraproducto. Además, el límite anterior siempre existe:

Dado un elemento $\{x_i\} \in \underset{i\in I}{P} (E_i)$, como

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{i \in I: p_i(x_i) \in [n,n+1)\}$$ y el ultrafiltro $\mathcal{F}$ es numerablemente completo, existe $m\in\mathbb{N}$ de modo que $\{i \in I: p_i(x_i) \in [m,m+1)\} \in \mathcal{F}$.

Haciendo un razonamiento análogo al hecho para demostrar la existencia del límite en el caso del ultraproducto de espacios de Banach, se llega a que este límite realmente existe siempre.

Tenemos pués definido el ultraproducto de una familia de e.l.c. como un nuevo espacio localmente convexo. Si todos los espacios E_i son iguales a un cierto espacio E, el ultraproducto se dice ultrapotencia y lo representaremos simplemente por $P(E)$.

Nosotros hemos supuesto de partida que los espacios E_i son todos separados, y por eso el ultraproducto también lo es. De todos modos, lo establecemos en la

Proposición 4.2:

"Si los espacios E_i son todos separados, entonces el ultraproducto $\underset{i\in I}{P} (E_i)$ también lo es".

Demostración:

Es inmediato, pués dado un elemento $\{x_i\}$ del ultraproducto (que no esté en la clase cero) podemos elegir seminormas p_i tales que $p_i(x_i) = 1$, con lo que es claro que $\bar{p}(\{x_i\}) \neq 0$.

Como ya dijimos, nosotros supondremos siempre que los espacios que se consideren serán separados, con lo que el ultraproducto también lo será. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3:

"Los ultraproductos $\underset{i\in I}{P}(E_i)$ y $\underset{i\in I}{P}(E'_i)$ están en dualidad, mediante la forma bilineal:

$$\langle \{x_i\} , \{x'_i\} \rangle = \lim_{\mathcal{F}} \langle x_i , x'_i \rangle \text{ ".}$$

La demostración es inmediata.

3. Estabilidad por ultraproductos.

Definición 4.4:

"Diremos que una clase de e.l.c. es estable por ultraproductos si el ultraproducto de cualquier familia de la clase sigue siendo un elemento de la clase".

A partir de la definición, vamos a dar a continuación algunos resultados sobre clases se espacios estables por ultraproductos. Veremos también que los espacios (HM) no son estables por ultraproductos.

Proposición 4.5:

"Los espacios de Schwartz son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios de Schwartz (el conjunto de índices I, como siempre en este capítulo, de cardinal mayor que el primero medible); veamos que el ultraproducto, $\underset{i\in I}{P}(E_i)$ es un espacio también de Schwartz. Para ello, demostraremos que dado un entorno $\overline{U}$ de 0 en el ultraproducto, existe otro entorno $\overline{V}$ de cero, de modo que cualquiera que sea $\alpha > 0$, $\overline{V}$ puede ser cubierto por un número finito de trasladados de $\alpha \cdot \overline{U}$.

Sea pués $\overline{U}$ un entorno de 0 en $\underset{i\in I}{P}(E_i)$ y sea $\overline{p}$ su jauja; $\bar{p} = \lim\limits_{\mathcal{F}} p_i$, luego $\bar{U}$ determina unos entornos de cero en los espacios E_i, que llamaremos U_i. Como cada E_i es un espacio de Schwartz, $\Rightarrow$

$\exists V_i \in \mathcal{U}(E_i)$ tales que para cualquier $\alpha > 0$,

$$V_i \subset \bigcup_{k=1}^{n(\alpha,i)} (x_{k,\alpha,i} + \alpha \cdot U_i) ,$$

siendo $x_{k,\alpha,i}$ puntos del espacio E_i .

Ahora bien, fijado $\alpha > 0$, se tiene que

$$I = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{ i \in I : n(\alpha,i) = h \}$$ y como

el ultrafiltro es numerablemente completo, existe $h \in \mathbb{N}$ de modo que

$$A_h = \{ i \in I : n(\alpha,i) = h \} \in \mathcal{F} .$$

Consideremos entonces los puntos $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_h$ del ultraproducto tales que $\bar{x}_r$ tiene coordenada $i \in A_h$ dada por $x_{r,\alpha,i} \in E_i$, $1 \leq r \leq h$.

(Nótese que basta definir las coordenadas de un elemento del ultraproducto solo en un conjunto del ultrafiltro, pués dada la relación de equivalencia existente, cualquiera que sea la definición de las demás, van a estar en la misma clase).

Sea q_i la jauja del entorno V_i, y $\bar{q}$ la seminorma determinada por ellas en el ultraproducto. Esta seminorma determina un entorno de cero $\bar{V}$ en el ultraproducto. Veamos entonces que

$$\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{h} (\overline{x}_i + \alpha\cdot\overline{U}) .$$

Sea pués $\overline{x} = \{x_i\} \in \overline{V}$. Si $i \in A_h \Rightarrow$

$x_i \in x_{r_i,\alpha,i} + \alpha\cdot U_i$ con $1 \leq r_i \leq h$.

Pero como podemos poner

$$A_h = \bigcup_{k=1}^{h} \{i \in A_h : r_i = k\} \in \mathcal{F} \Rightarrow$$

$$\exists k ,\ 1 \leq k \leq h \mid \{i \in A_h : r_i = k\} \in \mathcal{F} .$$

Luego entonces,

$\overline{x} \in \overline{x}_k + \alpha\cdot\overline{U}$ y se concluye la demostración.

El razonamiento usado en esta demostración sobre la numerabilidad completa del ultrafiltro, será usada en las que siguen, y no lo especificaremos tanto como lo hemos hecho en ésta.

Otra clase de espacios estables, nos la da el siguiente resultado:

Proposición 4.6:

"Los espacios separables son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios separables, y $\{x_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso en E_i.

Consideremos los elementos $\overline{x}_n$ del ultraproducto tales que $\overline{x}_n = \{x_{i,n} : i \in I\}$. Veamos que forman un subconjunto denso en el ultraproducto $\underset{i\in I}{P}(E_i)$.

Sea entonces $\overline{x} = \{x_i\}$ un elemento arbitrario del ultraproducto.

Para cada $i \in I$, existe $x_{i,n(i)} \in E_i$ tal que $p_i(x_i - x_{i,n(i)}) < 1$, siendo p_i una seminorma en el espacio E_i.

Ahora bien; dado que

$$I = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \{i \in I : n(i) = h\} \quad , \text{ y el ultra-}$$

filtro es numerablemente completo, $\Rightarrow$

$$\exists h \in \mathbb{N} \mid \{i \in I : n(i) = h\} \in \mathfrak{F} .$$

Entonces, si $\overline{p}$ es la seminorma determinada por la familia $\{p_i : i \in I\}$ en el ultraproducto, se tiene:

$$\overline{p}(\overline{x} - \overline{x}_h) = \lim_{\mathfrak{F}} p_i(x_i - x_{i,h}) \leqslant 1 ;$$

luego $\{\overline{x}_n\}$ es un subconjunto denso de $\underset{i\in I}{P}(E_i)$.

Proposición 4.7:

"Los espacios metrizables son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios metrizables y $p_1^{(i)} \leqslant p_2^{(i)} \leqslant \ldots \leqslant p_n^{(i)} \leqslant \ldots$ una sucesión de seminormas que definen la topología del espacio E_i .

Sea $\overline{p} = \lim\limits_{\mathfrak{F}} p_i$ una seminorma arbitraria en el ultraproducto, $\underset{i\in I}{P}(E_i)$. Para cada $i \in I$,

$$\exists\, n(i) \mid p_i \leqslant p_{n(i)}^{(i)}$$

. Entonces, como

$$I = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{ i \in I : n(i) = h \} \Rightarrow$$

$$\exists h \mid \{ i \in I : n(i) = h \} \in \mathfrak{F} \quad .$$

Por tanto, podemos expresar, siendo $\overline{x} \in \underset{i\in I}{P}(E_i)$ arbitrario,

$$\overline{p}(\overline{x}) = \lim_{\mathfrak{F}} p_i(x_i) \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} p_{n(i)}^{(i)}(x_i) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{F}} p_h^{(i)}(x_i) = \overline{p}_h(\overline{x})$$

Luego si $\overline{p}$ es una seminorma cualquiera en $\underset{i\in I}{P}(E_i)$ hemos encontrado un $h \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{p} \leqslant \overline{p}_h$ (siendo cada $\overline{p}_h$ la seminorma determinada en el ultraproducto por la familia $\{p_h^{(i)}: i \in I\}$). O sea, el conjunto numerable de seminormas $\{\overline{p}_h : h \in \mathbb{N}\}$ define la topología de $\underset{i\in I}{P}(E_i)$ que por lo tanto, es metrizable.

Corolario 4.8:

"Los espacios normables son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios normados y $\|..\|_i$ una norma que define la topología del espacio E_i. Siguiendo el razonamiento de la proposición, basta tomar $p^{(i)}_{n(i)} = n \cdot \|..\|_i$, con lo cual, resulta que $\bar{p}_n = n\|..\|$ (siendo $\|..\| = \lim\limits_{\mathfrak{F}} \|..\|_i$) y el ultraproducto es por tanto normable.

Proposición 4.9:

"Los espacios dotados de la topología débil son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios dotados con la topología débil $\sigma(E_i, E_i')$. Sea $\bar{p}$ una seminorma sobre el ultraproducto, determinada por la familia $\{p_i : i \in I\}$. Como cada E_i está dotado de la topología débil, cada seminorma p_i será de la forma

$$p_i(.) = \sup_{1 \leq k \leq n_i} |\langle . \, , x'_{k,i} \rangle| \quad ; \; x'_{k,i} \in E_i' \, .$$

Entonces, cualquiera que sea $\bar{x} = \{x_i\} \in \underset{i \in I}{P}(E_i)$,

$$\bar{p}(\bar{x}) = \lim_{\mathfrak{F}} p_i(x_i) = \lim_{\mathfrak{F}} \sup_{1 \leq k \leq n_i} |\langle x_i, x'_{k,i} \rangle| \, ,$$

Como siempre,

$$I = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{ i \in I : n_i = h \} \quad , \text{ luego}$$

$$\exists h \in \mathbb{N} \;\Big|\; A_h = \{ i \in I : n_i = h \} \in \mathfrak{F} \quad ; \text{ entonces,}$$

$$\overline{p}(\overline{x}) = \lim_{\mathfrak{F}} \sup_{1 \leq k \leq h} |\langle x_i \, , \, x'_{k,i} \rangle| \leq$$

$$\leq \sup_{1 \leq k \leq h} \lim_{\mathfrak{F}} |\langle x_i \, , \, x'_{k,i} \rangle| =$$

$$= \sup_{1 \leq k \leq h} |\langle \overline{x} \, , \, \overline{x}'_k \rangle| \quad , \text{ donde los elemen-}$$

tos $\overline{x}'_k$ ($1 \leq k \leq h$) del ultraproducto están definidos de tal forma que las coordenadas para $i \in A_h$, son los $x'_{k,i}$. (Hemos usado implicitamente el hecho de que se verifica $\underset{i \in I}{P} (E'_i) \subset (\underset{i \in I}{P} (E_i))'$ lo cual es fácil comprobar).

(La desigualdad escrita más arriba es cierta, pués por la técnica de siempre, fijado un $\overline{x}$, el supremo se da con un mismo k).

Nótese que de los dos últimos resultados demostrados se deduce que los espacios de dimensión finita, son estables por ultraproductos, pués son los únicos a la vez con topología débil y normados. Sin embargo, es más fácil una demostración directa, y por eso la damos:

Proposición 4.10:

"Los espacios de dimensión finita son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de espacios de dimensión finita, y U_i entorno de cero en E_i precompacto. Denotemos por p_i la jauja de U_i y consideremos la seminorma $\bar{p}$ determinada en el ultraproducto por dichas jaujas. Vamos a demostrar entonces que el entorno de cero $\bar{U}$ determinado por $\bar{p}$ en el ultraproducto, es precompacto.

Sea $\bar{V} \in \mathcal{U}(\underset{i\in I}{P}(E_i))$, $\bar{q} = \lim\limits_{\mathcal{F}} q_i$ su jauja.

Cada seminorma q_i define un entorno de 0 en el espacio E_i, que denotaremos por V_i; y como U_i es precompacto $\Rightarrow$

$$\exists\ x_i^1, \ldots, x_i^{n(i)} \in E_i \mid U_i \subset \bigcup_{j=1}^{n(i)} (x_i^j + V_i)$$

Dado que como siempre existe un conjunto del tipo $A_h = \{ i \in I : n(i) = h \} \in \mathcal{F}$, consideremos entonces los elementos $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^h$ del ultraproducto tales que si $i \in A_h$, la coordenada i-ésima de $\bar{x}^r$ es x_i^r , $(1 \leqslant r \leqslant h)$. Entonces, es fácil ver que

$$\bar{U} \subset \bigcup_{i=1}^{h} (\bar{x}^i + \bar{V}),$$ con lo cual, $\bar{U}$ es precompacto y el ultraproducto es de dimensión finita.

Hasta ahora hemos visto clases de espacios **estables** por ultraproductos. A continuación, vamos a ver que los espacios (HM) no son estables por ultraproductos, para lo cual necesitamos un concepto previo.

Se dice que un filtro $\mathcal{F}$, α-completo, sobre un cardinal α es normal si para cualquier función $f: \alpha \longrightarrow \alpha$ tal que $\{\beta<\alpha : f(\beta) < \beta\} \in \mathcal{F}$, entonces existe $\gamma < \alpha$ de tal forma que el conjunto $\{\beta<\alpha : f(\beta) = \gamma\} \in \mathcal{F}$.

Es conocido que si un cardinal es medible, entonces existe un ultrafiltro normal sobre él. (Véase Chang, Keisler, [1973] ó Comfort, Negrepontis, [1974]).

También usaremos el hecho de que si μ es el primer cardinal medible y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro libre y numerablemente completo sobre él, entonces $\mathcal{F}$ es β-completo, para cada $\beta<\mu$. (Véase Bell, Slomson, [1969]).

Para la construcción que haremos, necesitamos:

<u>Lema 4.11:</u>

"Sea μ el primer cardinal medible y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro libre y normal sobre μ. Sea L el conjunto de los ordinales límites menores que μ.
Entonces, $L \in \mathcal{F}$ ".

Demostración:

Sea $X_\alpha = \{\gamma<\mu : \gamma \neq \alpha + 1\}$, $\forall \alpha<\mu$.

Cada X_α está en el ultrafiltro $\mathcal{F}$, pués su complementario es finito, y el ultrafiltro es libre.
Entonces, como $\mathcal{F}$ es normal,

$$\underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha = \{\beta<\mu : \alpha<\beta \Rightarrow \beta \in X_\alpha\} \in \mathcal{F},$$

(véase Müller, Scott ed. [1978] , página 111).

Ahora bien;

si $\beta \in L \Rightarrow \beta \neq \alpha + 1$, $\forall \alpha < \beta$, luego $\beta \in \underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha$

Reciprocamente,

si $\beta \in \underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha$, $\beta \in L$, puês si no, existiría un $\alpha < \beta$ tal que $\beta = \alpha + 1$. Por tanto, $L \in \mathcal{F}$.

Con este resultado, pasamos al teorema:

Teorema 4.12:

"Los espacios (HM) no son estables por ultraproductos".

Demostración:

Sea E un espacio vectorial, con base de Hamel $\{\alpha : \alpha$ es ordinal, $\alpha < \mu\}$.

Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro libre y normal sobre μ.

Para cada $\alpha < \mu$ llamemos E_α al subespacio de E generado por la base $\{\beta : \beta < \alpha\}$, y dotemos cada E_α de la topología localmente convexa más fina. Es conocido que cada E_α es entonces un espacio (HM), (véase Henson, Moore, [1973]).

Vamos a definir una aplicación $f: \mu \longrightarrow \mu$ de la siguiente manera:

Sea $\{x_\alpha\} \in \prod E_\alpha$; entonces, sea

$f(\alpha) = \inf\{\beta : x_\alpha \in E_\beta\}$ si α es límite

$f(\alpha) = \alpha - 1$ en otro caso.

(Como vemos, para cada punto del producto, construimos una función f).

Es claro que si α no es límite, $f(\alpha) < \alpha$.

En el otro caso, como $x_\alpha \in E_\alpha$, x_α debe ser combinación lineal finita de ordinales menores que α , $x_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \lambda_\xi \cdot \xi$, luego x_α está al menos en algún E_ξ , $\xi < \alpha$. En definitiva, $f(\alpha) < \alpha$ siempre.

Como el ultrafiltro $\mathfrak{F}$ es normal, existe un conjunto $F \in \mathfrak{F}$ donde f es constante. Dado que por el lema 4.11, $L \in \mathfrak{F}$, en particular, en $L \cap F$, la aplicación f es constante, o sea,

$$\exists \gamma < \mu \mid \forall \alpha \in L \cap F , \quad f(\alpha) = \gamma \quad .$$

O sea, esto quiere decir que $x_\alpha \in E_\gamma$, cualquiera que sea $\alpha \in L \cap F$.

Teniendo en cuenta que la dimensión de E_γ es menor que μ podemos hacer el siguiente razonamiento:

Para cada elemento $x \in E_\gamma$, sea

$$O(x) = \{ \alpha \in F \cap L : x_\alpha = x \} \quad .$$

Es claro que

$$\bigcup_{x \in E_\gamma} O(x) = F \cap L \in \mathfrak{F}$$, y como el ultrafiltro $\mathfrak{F}$ es ν-completo, para cualquier $\nu < \mu$,

$$\exists x \in E_\gamma \mid O(x) \in \mathfrak{F} \quad .$$

Llamemos G a este conjunto del ultrafiltro.

Consideremos entonces $F \cap L \cap G \in \mathfrak{F}$; en este conjunto del ultrafiltro, f es constante; pongamos por ejemplo, $x_\alpha = x \in E_\gamma$, $\forall \alpha \in F \cap L \cap G$.

Definamos entonces la aplicación:

$$T : \underset{\alpha<\mu}{P} (E_\alpha) \longrightarrow E \quad \text{tal que}$$

$$T(\{x_\alpha\}) = x \quad .$$

Vamos a demostrar que es un isomorfismo para las estructuras algebraicas del ultraproducto de la familia $\{E_\alpha : \alpha < \mu\}$ y de E:

(a) La aplicación T es lineal:

Sean $\{x_\alpha\}$ e $\{y_\alpha\}$ dos elementos de $\underset{\alpha<\mu}{P}(E_\alpha)$ cualesquiera. Para el punto $\bar{x} = \{x_\alpha\}$, existirá un elemento $A_x \in \mathcal{F}$, de la forma $F_x \cap L \cap G_x$, según vimos en la construcción de f anterior, de modo que

$$\forall \alpha \in A_x \quad , \quad x_\alpha = x$$

Analogamente, para el punto $\bar{y} = \{y_\alpha\}$, existirá un elemento $A_y \in \mathcal{F}$ tal que

$$\forall \alpha \in A_y \quad , \quad y_\alpha = y \quad .$$

Consideremos el punto $\{z_\alpha\} = \{x_\alpha\} + \{y_\alpha\}$ del ultraproducto. Entonces,

$$A = \{i < \mu : z_i = x_i + y_i\} \in \mathcal{F} \quad .$$

Además, dado $\bar{z}$, existirá el correspondiente elemento $A_z \in \mathcal{F}$ de modo que

$$\forall \alpha \in A_z \quad , \quad z_\alpha = z \quad .$$

En particular, en el conjunto $A \cap A_z$, debe ser constante z_α ; pero ahí, $z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha$.

Si tomamos el conjunto del ultrafiltro dado por $A \cap A_z \cap A_x \cap A_y$, se tendrá que ahí,

$$z = z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha = x + y \quad ; \text{ o sea,}$$

$$T(\{z_\alpha\}) = T(\{x_\alpha\}) + T(\{y_\alpha\})$$

Analogamente se demuestra la propiedad del producto por escalar, con lo que la plicación T es lineal.

(b) La aplicación T es inyectiva:

Si $\{x_\alpha\}$ es un elemento del ultraproducto tal que $T(\{x_\alpha\}) = 0$, entonces, el elemento x correspondiente debe ser igual a cero, con lo que

$$\{i < \mu : x_i = 0\} \supset A_x \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow$$

$$\{i < \mu : x_i = 0\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{x_\alpha\} = 0 \in \underset{\alpha<\mu}{P}(E_\alpha).$$

(Hemos notado por A_x al elemento del ultrafiltro que sabemos existe dado el elemento $\bar{x} = \{x_\alpha\}$).

(c) La aplicación T es sobreyectiva:

Sea $y \in E$ arbitrario. Dada la definición del espacio E, el elemento y se puede expresar como

$$y = \sum_{\xi<\mu} \lambda_\xi \cdot \xi \quad \Rightarrow$$

$$\exists \gamma < \mu \quad | \quad y \in E_\gamma \quad .$$

Consideremos entonces el elemento $\{y_\alpha\} \in \underset{\alpha<\mu}{P}(E_\alpha)$ tal que:

$$y_\alpha = \begin{cases} y & \text{si} \quad \alpha \geq \gamma \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < \gamma \end{cases}$$

El elemento $\bar{y} = \{y_\alpha\}$ así construido, no está en la clase del vector cero del ultraproducto, pués

$$\{i < \mu : y_i = 0\} = \{i < \mu : i < \gamma\}.$$

Como μ es el primer cardinal medible, el conjunto $\{i<\mu : i<\nu\} \notin \mathfrak{F}$, puês en caso contrario, la traza de $\mathfrak{F}$ induciría un ultrafiltro que sería numerablemente completo sobre ν , contradiciendo la hipótesis de ser μ el primer cardinal medible. (En otras palabras, un ultrafiltro de este tipo no puede contener segmentos iniciales). Por tanto, como T es inyectiva, debe ser

$$T(\{y_\alpha\}) = y$$

, con lo cual, la aplicación T es sobreyectiva.

Ahora bien; E como ultraproducto lleva la topología localmente convexa más fina, puês si $\bar{p}$ es una seminorma sobre E, se puede poner

$$\bar{p}\,(.) = \lim_{\mathfrak{F}} p_\alpha\,(.)$$

, donde p_α es la restricción de la seminorma $\bar{p}$ al espacio E_α .

Y el espacio E no es (HM).

4. Invariancia por ultraproductos.

Vamos a terminar la memoria con este apartado. En él, vamos a considerar un e.l.c.s. E y formaremos una ultrapotencia suya, P(E), a través de un ultrafiltro α-completo, $\alpha > \omega$. Creemos necesaria hacer una aclaración en este punto:

Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro α-completo, $\alpha > \omega$, sobre un conjunto I, y α es el menor de los cardinales tales que $\mathcal{F}$ es α-completo, entonces α es medible. Pués como α es el menor cardinal con esa propiedad, existe una partición $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ de I en α partes de modo que $A_\beta \notin \mathcal{F}$, $\forall \beta$. Entonces, se construye un filtro $\mathcal{G}$ sobre α así:

$$A \in \mathcal{G} \quad \text{si y solo si} \quad \bigcup_{\beta \in A} A_\beta \in \mathcal{F} .$$

Puede probarse que $\mathcal{G}$ es un ultrafiltro libre α-completo sobre α, luego α es medible.

Entonces, cuando hagamos referencia a ultrafiltros α-completos, $\alpha > \omega$, entenderemos que α es el menor cardinal con esa propiedad y por tanto, será medible.

Dada la ultrapotencia P(E), existe una inyección canónica $j: E \longrightarrow P(E)$. En el siguiente resultado, caracterizamos la topología de E como subespacio de P(E):

Proposición 4.13:

"Sea E un e.l.c.s. y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro α-completo, $\alpha > \omega$. Formemos la ultrapotencia de E a través del ultrafiltro $\mathcal{F}$. Entonces, el subespacio E de P(E) lleva la topología límite inductivo de los subespacios de E con base de Hamel de cardinal menor que α ".

Demostración:

Sea T la topología de E y T_u la topología en E inducida por la de P(E). Se verifica que $T_u \geqslant T$, pués si p es una seminorma de las que definen la topología de E, se puede considerar sobre P(E) la seminorma dada por $\bar{p} = \lim\limits_{\mathcal{F}} p_i$, donde $p_i = p$, para todo i.

Si T^i es la topología límite inductivo de los subespacios con base de Hamel de cardinal menor que α , es claro que $T^i \geqslant T$, y por tanto, $(T^i)_u \geqslant T_u$, donde $(T^i)_u$ representa la topología inducida en E por P(E) si formamos la ultrapotencia del espacio $E(T^i)$.

Además, $(T^i)_u \geqslant T^i$, y realmente ambas topologías coinciden:

Una base de entornos de cero para la topología $(T^i)_u$ está formada por conjuntos de la forma:

$\{ x \in E : \bar{p}(j(x)) < 1 \}$, siendo $\bar{p}$ una seminorma continua sobre P(E); $\bar{p} = \lim p_k$ donde cada p_k es una seminorma continua en $E(T^i)$.

Si llamamos $U_\beta = \{ x \in E : p_\beta(x) < 1 \}$, puede probarse la igualdad:

$$\{ x \in E : \bar{p}(j(x)) < 1 \} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \bigcap_{\beta \in A} U_\beta \quad .$$

Estos conjuntos son absolutamente convexos y absorbentes, además, si F es un subespacio de E de dimensión menor que α , es conocido que card(F) $< \alpha$, por lo que el cardinal de la familia de seminormas que definen la topología de F es menor que α .(Pués todo cardinal medible es fuertemente inaccesible; véase por ejemplo Comfort, Negrepontis, [1974]). Entonces,

$\exists C \in \mathcal{F}$ tal que $\forall \gamma \in C$ es $U_\gamma \cap F = V$, entorno de cero en F. (Téngase en cuenta que $\mathcal{F}$ es α -completo) Por tanto,

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} \bigcap_{\beta\in A} U_\beta \Big) \cap F \supset V$$ y por tanto, hemos probado que $T^i \equiv (T^i)_u \geq T_u$. Solamente nos queda probar que $T^i \leq T_u$.

Para ello, basta ver que las topologías T_u y T coinciden en cada subespacio F de E de dimensión $< \alpha$.

Sabemos que $T|_F \leq T_u|_F$. Pero como el cardinal de la familia de seminormas que definen la topología de F es menor que α según observamos anteriormente, se sigue del hecho de que el ultrafiltro es α -completo que cualquier seminorma del ultraproducto restringida a F es realmente una de las de F.

Tenemos por tanto caracterizada la topología del espacio E considerado como subespacio de una ultrapotencia suya. Este resultado nos lleva a definir lo que entendemos por espacio invariante por ultraproductos:

<u>Definición 4.14:</u>

"Se dice que un e.l.c.s. E es invariante por ultraproductos si su topología es la límite inductivo de los subespacios de E con cardinal de una base de Hamel menor que el primero medible".

En el siguiente resultado, demostramos que la invariancia por ultraproductos, se conserva mediante límites inductivos:

Proposición 4.15:

"Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia de e.l.c.s. invariantes por ultraproductos, y para cada $i \in I$, sea $f_i : E_i \longrightarrow E$ una aplicación lineal. Entonces, el espacio E dotado de la topología límite inductivo, es invariante por ultraproductos".

Demostración:

Sea T la topología límite inductivo. Sea $V \subset E$ absolutamente convexo y absorbente tal que para cada subespacio F de E de dimensión no medible, se tiene

$$V \cap F = U_F \cap F \qquad , \quad \text{donde } U_F \text{ es en-}$$

torno de cero en E(T). Veamos entonces que V es también entorno de cero en E(T), o sea, que para cada $i \in I$, $f_i^{-1}(V)$ debe ser entorno de cero en E_i.

Ahora bien; como E_i es invariante por ultraproductos, basta ver que $f_i^{-1}(V)$ es entorno de cero en la topología límite inductivo de los subespacios de dimensión de Hamel no medible de E_i.

Sea pués F_i un subespacio de E_i de dimensión de Hamel no medible. Entonces,

si $x \in f_i^{-1}(V) \cap F_i$, o sea, $f_i(x) \in V \cap f_i(F_i)$,

sabemos que existe un entorno de cero en E(T), llamémosle $U_{f_i(F_i)}$, de modo que

$$V \cap f_i(F_i) = U_{f_i(F_i)} \cap f_i(F_i) \quad , \quad \text{luego}$$

$f_i(x) \in U_{f_i(F_i)} \cap f_i(F_i)$, lo cual es decir,

$$x \in f_i^{-1}(U_{f_i(F_i)}) \cap F_i \quad , \text{ y como } U_{f_i(F_i)} \text{ es}$$

entorno de cero en E(T), su imagen inversa por f_i lo es en E_i , de donde se sigue el resultado.

A continuación, vamos a ver un ejemplo de espacio invariante:

EJEMPLO:

Sea μ el primer cardinal medible no numerable, y consideremos el espacio $E = \mathbb{K}^{(\mu)}$. Entonces,

$$F = \{x \in \mathbb{K}^{\mu} : \operatorname{card}(\{\alpha < \mu : x_\alpha \neq 0\}) < \mu\} \quad , \text{ y el}$$

dual algebraico E^* es el producto $\mathbb{K}^{\mu}$.

Se verifica que el espacio E dotado de la topología débil $\sigma(E,E^*)$, es invariante por ultraproductos.

Pués si consideramos E como subespacio de P(E), sabemos que P(E) lleva una topología débil, pués ésta es estable por ultraproductos (proposición 4.9); entonces, cualquier forma lineal y continua sobre P(E), restringida a E sigue siendo continua para la topología $\sigma(E,E^*)$.

Luego P(E) induce la topología débil en E y por tanto, éste es invariante por ultraproductos.

Nótese que sin embargo, el espacio E , dotado de la topología débil $\sigma(E,F)$, no es invariante, pués basta considerar una forma lineal con todas sus coordenadas iguales a la unidad; sería continua sobre el ultraproducto pero no sobre E dotado de la topología $\sigma(E,F)$, porque no es un elemento de F.

De este ejemplo, podemos deducir cuando es un espacio dotado de una topología débil invariante por ultraproductos:

Consideremos un espacio E dotado de una topología débil $\sigma(E,F)$, y sea P(E) un ultraproducto de E. Es conocido que el espacio P(E), está dotado de una topología débil también. Entonces, para que esta topología induzca sobre E la topología débil $\sigma(E,F)$, debe ocurrir que cualquier forma lineal y continua sobre P(E) restringida a E debe ser continua; en otras palabras, los límites de formas lineales y continuas a través del ultrafiltro deben ser continuas sobre $(E, \sigma(E,F))$.

A continuación, vamos a introducir una definición análoga a la ya conocida de representabilidad finita, estudiada en el caso de ultraproductos de espacios de Banach:

<u>Definición 4.16:</u>

"Sean E y F dos e.l.c.s. Se dice que F es representable en E si todo subespacio de F con cardinal de una base de Hamel menor que el primer cardinal medible (no numerable), es isomorfo a un subespacio de E".

Para terminar la memoria, queremos establecer un teorema análogo al ya conocido en el caso de ultraproductos en la teoría de espacios de Banach (véase por ejemplo Heinrich, [1980] , ó Schwartz, [1981] , o bien los primeros trabajos sobre esta materia de los autores Stern, Dacunha - Castelle y Krivine).

Las hipótesis que necesitaremos para tal teorema serán más fuertes que las ya conocidas. Previamente, necesitaremos el siguiente resultado, que establecemos sin demostración:

Lema 4.17:

"Sea E un e.l.c.s. arbitrario. Entonces,

(a) E es invariante por ultraproductos

(b) Cada seminorma continua sobre P(E) restringida a la imagen canónica de E en P(E) sigue siendo continua,

son proposiciones equivalentes".

Entonces, el teorema que establecemos es el siguiente:

Teorema 4.18:

"Sean E y F dos e.l.c.s. Supongamos que:

(i) F es invariante por ultraproductos

(ii) El cardinal de una base de Hamel para F es mayor o igual que el primer cardinal fuertemente compacto.

Entonces, son equivalentes,

(a) F es representable en E

(b) Existe un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ numerablemente completo de modo que F es isomorfo a un subespacio de P(E), ultrapotencia de E formada a través del ultrafiltro $\mathfrak{F}$ citado anteriormente".

Demostración:

Representaremos por μ el primer cardinal medible.

(a) $\Rightarrow$ (b):

Consideremos el siguiente conjunto:

$$I = \{ M : M \text{ es subespacio de } F, \dim(M) < \mu \}.$$

Consideremos sobre I el orden parcial dado por la inclusión; es decir,

$$M_1 < M_2 \quad \text{si y solo si} \quad M_1 \subset M_2 .$$

Es claro que I tiene la propiedad de la intersección finita; entonces, el filtro asociado a este orden está formado por (Bourbaki, [1971] , p. I.37):

$$I_o \subset I : \quad I_o = \{ M : M_o \subset M \} \quad , \text{ donde } M_o \in I .$$

Este filtro asociado es numerablemente completo, pués si $\{ I_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una sucesión de elementos del filtro, sea por ejemplo $I_n = \{ M : M_n \subset M \}$, $M_n \in I$, para cada n, entonces,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \left\{ M : \left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \right\rangle \subset M \right\}$$

también está en el filtro, puesto que $\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \right\rangle \in I$.

Dado que el cardinal del conjunto I es fuertemente compacto, por serlo el de F, podemos extender este filtro a un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ numerablemente completo. (Véase Comfort, Negrepontis, [1974] , o bien, Müller, Scott, [1978] , p. 114).

Consideremos entonces la ultrapotencia P(E) a través de este ultrafiltro. Por comodidad en la notación, vamos a representar por $i \in I$ el subespacio M_i ; entonces, por hipótesis,

$$\forall\, i \in I \quad \exists\, N_i \subset E \text{ subespacio y } T_i : M_i \longrightarrow N_i \text{ , iso-}$$

morfismo. Definamos entonces la aplicación:

$$T : F \longrightarrow P(E) \qquad \text{de modo que}$$

$$T(x) = \{ y_i \} \quad \text{, donde} \quad y_i = \begin{cases} T_i(x) & \text{si } x \in M_i \\ 0 & \text{si } x \notin M_i \end{cases}$$

Resta demostrar que esta aplicación es un isomorfismo inyectivo:

1º. T es lineal:

Sean $x, x' \in F$ dos elementos cualesquiera. Entonces,

$$\{ i : x, x' \in M_i \} = \{ i : x \in M_i \} \cap \{ i : x' \in M_i \} \in \mathfrak{F} \quad ,$$

pués ambos conjuntos pertenecen al ultrafiltro. Como T_i es una aplicación lineal, se sigue que

$$T(x + x') = T(x) + T(x') ,$$

dada la relación de equivalencia definida en el ultraproducto. Analogamente el producto por escalares.

2º. T es inyectiva:

Sea $x \in F$ tal que $T(x) = 0$.

O sea, $\{y_i\} = 0$, de donde se deduce que $\{i : y_i = 0\} \in \mathfrak{F}$. Tenemos que demostrar que todas las coordenadas y_i son nulas. En principio, podrían definirse las coordenadas $y_i \neq 0$ como quisiéramos y por tanto, $x \neq 0$. Veamos que no puede ocurrir tal cosa.

Sea $A = \{i : y_i = 0\}$. Basta probar que existe un elemento $j \in A$ tal que $x \in M_j$, pués entonces, $y_j = 0$, pero es $y_j = T_j(x)$, y por tanto, debe ser entonces $x = 0$.

Pero eso es claro, pués $A \cap \{j : x \in M_j\} \in \mathfrak{F}$ ya que ambos están en el ultrafiltro. Entonces esa intersección no es vacía, luego existe $j \in A$ tal que $x \in M_j$.

3º. La inversa de T restringida a la imagen de F, es una aplicación continua:

Consideremos $T^{-1}: T(F) \longrightarrow F$.

Sea p una seminorma continua sobre F. Basta demostrar que la seminorma $p \circ T^{-1}$ es continua sobre $T(F)$.

Para cada $i \in I$, $p_i = p|_{M_i}$ es una seminorma continua sobre el subespacio M_i, y como T_i es un isomorfismo de M_i en N_i, podemos considerar las seminormas definidas sobre N_i por $q_i = p_i \circ T_i^{-1}$.

Cada N_i es un subespacio de E; podemos considerar la seminorma $\bar{q}$ definida sobre el subespacio $\underset{i\in I}{P}(N_i)$ de $P(E)$, donde $\bar{q} = \lim\limits_{\mathfrak{F}} q_i$. Entonces,

$$\bar{q} \circ T(x) = \bar{q}(\{y_i\}) = \lim_{\mathfrak{F}} q_i(y_i)$$

Como $\{i : x \in M_i\} \in \mathfrak{F}$, y en estos conjuntos es $y_i = T_i(x) \Rightarrow$

$$\bar{q} \circ T(x) = \lim_{\mathfrak{F}} q_i(T_i(x)) = \lim_{\mathfrak{F}} p_i(x) = p(x) ,$$

pués $p_i = p|_{M_i}$.

Se sigue por tanto, que la aplicación T^{-1} es continua. Para completar esta implicación, demostremos:

4º. La aplicación T es continua:

Sea $\bar{q}$ una seminorma continua sobre $P(E)$. Veamos que induce mediante la aplicación T una seminorma continua sobre F.

Elijamos una representación $\{q_i\}$ de la seminorma $\bar{q}$; o sea, $\bar{q} = \lim q_i$.

Como cada q_i es una seminorma continua sobre el espacio E, en particular es continua restringida al subespacio correspondiente N_i, y mediante el isomorfismo $T_i: M_i \longrightarrow N_i$, tenemos una seminorma $p_i = q_i \circ T_i$ continua sobre el subespacio M_i de F. Entonces,

$$p(x) = \bar{q} \circ T(x) = \bar{q}(T(x)) = \lim_{\mathfrak{F}} q_i(y_i) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{F}} q_i(T_i(x)) = \lim_{\mathfrak{F}} p_i(x).$$

Dado que por hipótesis, F es invariante por ultraproductos, se sigue que p es una seminorma continua, de acuerdo con el lema 4.17.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Sea $T: F \longrightarrow P(E)$ un isomorfismo inyectivo, y sea H un subespacio de F de dimensión de Hamel menor que el primer cardinal medible. Se trata de probar que H es isomorfo a un subespacio de E.

Consideremos la familia

$$\mathcal{P} = \{ p : p \text{ es seminorma continua sobre } H \}.$$

Dado que la dimensión de H es menor que μ, se sigue que $\operatorname{card}(\mathcal{P}) < \mu$.

También, a cada elemento $x \in F$, le corresponde un elemento $T(x) \in P(E)$, del cual elegimos un representante que notamos $\{x_i\}$.

Por último, dado que T es un isomorfismo, para cada $p \in \mathcal{P}$, elegimos una familia de seminormas continuas sobre E, $\{p_i\}$, de modo que

$$p(x) = \lim_{\mathcal{F}} p_i(x_i) \quad , \qquad \text{si} \quad x \in H$$

Entonces, dada la igualdad anterior,

$$\forall x \in H \; , \; \forall p \in \mathcal{P} \; , \quad \exists A_{p,x} \in \mathcal{F} \quad \text{tal que}$$

$$i \in A_{p,x} \quad \Rightarrow \quad p_i(x_i) = p(x).$$

Además, si x e y son elementos arbitrarios de F, es claro que $\{x_i + y_i\}$ es un representante de la imagen de $x + y$ en el ultraproducto P(E). Si $\{z_i\}$ es el representante escogido de la imagen T(x+y), deben coincidir en un conjunto del ultrafiltro, o sea,

$$\forall x,y \in H \quad \exists A_{x,y} \in \mathcal{F} \quad \text{tal que}$$

$$i \in A_{x,y} \quad \Rightarrow \quad x_i + y_i = z_i \ .$$

Exactamente igual ocurre con el producto por escalares; si x es un elemento arbitrario de F y λ es un escalar, $\{\lambda x_i\}$ es un representante de la imagen de $\lambda \cdot x$ en P(E), luego si $\{z_i\}$ es otro, deben coincidir en algún conjunto del ultrafiltro; es decir,

$$\forall x \in H, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \exists A_{\lambda,x} \in \mathcal{F} \quad \text{tal que}$$

$$i \in A_{\lambda,x} \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot x_i = z_i \ .$$

Dado que el ultrafiltro $\mathcal{F}$ es β-completo, para cada $\beta < \mu$ (Bell, Slomson, [1969]), y el cardinal de una base de Hamel de H es menor que μ ,

$$A = \Big(\bigcap_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ x \in H}} A_{p,x}\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{x \in H \\ y \in H}} A_{x,y}\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ x \in H}} A_{\lambda,x}\Big) \in \mathcal{F}.$$

Entonces, definamos la aplicación siguiente:
Para cada $i \in A$, sea

$$f_i : H \longrightarrow E \qquad \text{tal que} \quad f_i(x) = x_i \ .$$

Por los razonamientos expuestos anteriormente, para cada $i \in A$, es $f_i(H)$ subespacio vectorial de E.

Es evidente que esta aplicación, así definida, es lineal, por la definición del conjunto A.

Además, si p es una seminorma continua sobre H, es claro que $p(x) = p_i(x_i)$, pués en particular, i está en $\bigcap\{A_{p,x} : p \in \mathcal{P}, x \in H\}$, siendo p_i una seminorma continua sobre el espacio E. Luego esta aplicación es abierta.

Es inyectiva pués si $x \neq 0$, $x \in H$, como H es separado, existe un entorno de cero, V, que no contiene al punto x. Entonces, la imagen de V por esta aplicación es un entorno de cero que no contiene a la imagen de x.

O sea, hemos probado que esta aplicación es biyectiva sobre su imagen, y que la inversa, definida sobre esa imagen, es una aplicación continua.

Solamente nos queda probar que la aplicación f_i es continua. El problema que se plantea es el siguiente:

Sabemos que en el subespacio H, $\mathrm{card}(\mathcal{P}) < \mu$; pero en el espacio E no tiene porque ser así necesariamente, el cardinal de la familia de seminormas continuas sobre E no tiene porque ser menor que μ ; entonces, dada una seminorma continua sobre E no tiene porque ser una de los representantes elegidos en un principio para cada seminorma de la familia $\mathcal{P}$, para que induzca una seminorma continua sobre H. Entonces, procedemos de la siguiente manera:

Llamemos E_i a la imagen por f_i de H; es claro que la topología de E induce una topología, que notaremos T_i' sobre cada subespacio E_i , y como la aplicación:

$$H(T) \longrightarrow E_i(T'_i)$$

es abierta, se sigue que $T \leq T_i$, donde por T_i representamos la topología inducida por T'_i en H.

Se tiene entonces para cada $i \in A$ una topología T_i sobre H. Podemos poner $A = \bigcup_{\mathcal{T}} \{ i \in A : T_i = \mathcal{T} \}$, donde $\mathcal{T}$ recorre el conjunto de las topologías localmente convexas sobre H.

Como $A \in \mathfrak{F}$ y el ultrafiltro es β-completo, para cualquier $\beta < \mu$, y la unión anterior es de menos de μ elementos (pués el cardinal de una base de Hamel para H es menor que μ), uno de los conjuntos anteriores debe estar en el ultrafiltro.

Luego existe $B \in \mathfrak{F}$ tal que todas las topologías T_i $(i \in B)$ son iguales a una topología, que representaremos por T'_1 sobre H.

Entonces, si la aplicación definida de H en E no fuese continua, existiría al menos una seminorma continua p sobre E que no induciría una seminorma continua sobre H.

Denotemos por $\bar{p}$ la seminorma sobre P(E) formada por el ultraproducto de la seminorma p; $\bar{p} = \lim_{\mathfrak{F}} p$.

Entonces,

$$\bar{p}(T(x)) = \lim_{\mathfrak{F}} p(x_i) \Rightarrow (T(x) = \{x_i\} \in P(E))$$

$$\exists C \in \mathfrak{F} \mid i \in C \Rightarrow p(x_i) = \bar{p}(T(x))$$

Pero la seminorma $\bar{p}$ induce, mediante la aplicación T , una seminorma $\bar{q}$ continua sobre F , o sea,

$$\bar{q}(x) = \bar{p}(T(x)).$$

Como $\bar{q} \in \mathcal{P}$, ya escogimos una representación $\{q_i\}$;

$$\bar{q}(x) = \lim_{\mathfrak{H}} q_j(x_j) ,$$

si $j \in B$ (téngase en cuenta que $B \subset A$),

$$q_j(x_j) = \bar{p}(T(x)) , \quad \forall\, x \in H .$$

Dado que $B \cap C$ es no vacía pués está en el ultrafiltro, desde luego contiene al menos un elemento i_o; entonces,

$$p(x_{i_o}) = \bar{p}(T(x)) = q_{i_o}(x_{i_o}) , \quad \forall\, x \in H .$$

Pero $x_{i_o} = f_{i_o}(x)$, pués $i_o \in A$, luego,

$$p(f_{i_o}(x)) = q_{i_o}(f_{i_o}(x)) , \quad \forall\, x \in H \quad \Rightarrow$$

$$p \circ f_{i_o} = q_{i_o} \circ f_{i_o}$$

Como ésta última es una seminorma continua sobre el subespacio H, también lo sería la primera, lo cual contradice la elección de la seminorma p.

En definitiva, F es representable en E.

B I B L I O G R A F I A

BELL, J.L. y SLOMSON, A.B.

[1969] Models and Ultraproducts: an introduction. North Holland. Amsterdam - London.

BELLENOT, S.F.

[1975] Prevarieties and Intertwined completeness of locally convex spaces. Math. Ann. 217, 59 - 67.

[1976] On nonstandard hulls of convex spaces. Can. J. Math., vol. XXVIII, nº1, 141 - 147.

BEREZANSKII, I.A.

[1968] Inductively reflexive locally convex spaces. Soviet Math. Doklady, 9(2), 1080 - 1082.

BOURBAKI, N.

[1971] Topologie générale. Hermann. Paris.

CHANG, C.C. y KEISLER, H.J.

[1973] Model Theory. North Holland. Amsterdam - London.

COMFORT, W.W. y NEGREPONTIS, S.

[1974] The Theory of Ultrafilters. Springer. Berlín - Heidelberg - New York.

DIESTEL, J. , MORRIS, S.A. y SAXON, S.A.

[1972] Varieties of linear topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 172, 207 - 230.

GARLING, D.J.H.

[1964] Locally convex spaces with denumerable systems of weakly compact subsets. Proc. Cambridge Phil. Soc. 60, 813 - 815.

GRAINGER, A.D.

[1979] Finite points of filters in infinite dimensional vector spaces. Fund. Math. 104, nº1, 47 - 67.

HEINRICH, S.

[1980] Ultraproducts in Banach space theory. J. reine angew. Math. 313, 72 - 104.

HENSON, C.W.

[1975] When do two Banach spaces have isometrically

isomorphic nonstandard hulls?.
Israel J. Math. 22, 57 - 67.

[1976] Nonstandard hulls of Banach spaces.
Israel J. Math. 25, 108 - 144.

HENSON, C.W. y MOORE, L.C.Jr.

[1972] The nonstandard theory of topological vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 172, 405 - 435.

[1973] Invariances of the nonstandard hulls of locally convex space. Duke Math. J. 40, 193 - 205.

[1974a] Subspaces of the nonstandard hull of a normed space. Trans. Amer. Math. Soc. 197, 131 - 143.

[1974b] Nonstandard hulls of the classical Banach spaces. Duke Math. J. 41, 277 - 284.

HORVATH, J.

[1966] <u>Topological vector spaces and distributions</u>, vol. I. Addison - Wesley. Reading, Mass.

JARCHOW, H. y SWART, J.

[1973] On Mackey convergence in locally convex spaces. Israel J. Math. 16, 150 - 158.

KOTHE, G.

[1969] <u>Topological vector spaces</u>, I. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

[1979] <u>Topological vector spaces</u>, II. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

LUXEMBURG, W.A.J. (Editor)

[1969] A general theory of monads, in Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Holt, Rinehart and Winston. New York.

[1973] What is nonstandard analysis?. Supplement to the Amer. Math. Monthly, vol. 80, 38 - 67.

MACHOVER, M. y HIRSCHFELD, J.

[1969] Lectures on Non-standard Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 94. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

Mc. KENNON, K. y ROBERTSON, J.M.

[1976] Locally convex spaces. Lecture Notes in Pure and applied mathematics, vol. 15. Marcel Dekker. New York.

MULLER, G.H. y SCOTT, D.S. (Editores)

[1978] Higher set theory. Lecture Notes in Math. vol. 669. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

PIETSCH, A.

[1972] Nuclear locally convex spaces. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

RAMAN, P.K.

[1970] On a class of reflexive spaces related to Ulam's conjecture on measurable cardinals. J. reine angew. Math. 245, 188 - 200.

ROBERTSON, A.P. y ROBERTSON, W.J.

[1973] Topological vector spaces. Cambridge.

SCHWARTZ, L.

[1981] Geometry and probability in Banach spaces. Lecture Notes in Math. vol. 852. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

STROYAN, K.D. y LUXEMBURG, W.A.J.

[1976] Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press. New York.

TERZIOGLU, T.

[1969] On Schwartz spaces. Math. Ann. 182, 236 - 242.

TREVES, F.

[1967] Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic Press. New York.

VALDIVIA, M.

[1974] The Space of Distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ is not B_r-complete. Math. Ann. 211, 145 - 149.

WILANSKY, A.

[1978] Modern Methods in Topological Vector Spaces. Mc Graw - Hill. New York.

WONG, Y. C.

[1979] Schwartz spaces, nuclear spaces and tensor products. Lectüre Notes in Math. vol. 726. Springer. Berlin - Heidelberg - New York.

FACULTAD DE [illegible]

Reunido el Tribunal integrado por [illegible]
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. José Antonio Faraudo Aguirre
titulada "los espacios (HM) y los cardinales
Medibles"

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente
"cum laude"

Sevilla, 19 de Noviembre 1.981

El Vocal, El Vocal, El Vocal

El Presidente, El Secretario, El Doctorado

José A. Faraudo