ESTABILIDAD DE LA PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO PARA APLICACIONES NO-EXPANSIVAS

M. ANGELES JAPÓN PINEDA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ESTABILIDAD DE LA PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO PARA APLICACIONES NO-EXPANSIVAS

Memoria presentada por
M. Angeles Japón Pineda
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

M. Angeles Japón Pineda.

Vº Bº del Director:

Dr. D. Tomás Domínguez Benavides
Catedrático del Departamento
de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Mayo 1998.

AGRADECIMIENTOS

Nunca tendría palabras suficientes para expresar mi gratitud al profesor D. Tomás Domínguez Benavides, director de este trabajo. Desde que terminé la Licenciatura de Matemáticas él ha sido mi maestro, iniciándome en el camino de la investigación, guiándome y orientándome en todo momento. Con su infinita amabilidad siempre ha dedicado el tiempo necesario en escuchar y resolver todas mis dudas, estimulando mi curiosidad y mi interés por profundizar en el campo de la investigación matemática.

Gracias a su ánimo constante, su inagotable paciencia y a la confianza que ha depositado en mí, he sido capaz de trabajar todo lo necesario para que esta Memoria vea la luz en estos días. Sin su valiosa ayuda y su continuo apoyo esto no hubiera sido posible.

Desde aquí, quiero felicitarle no sólo por su gran calidad científica, sino por algo que destaca en él a simple vista y que me consta es la opinión general de las personas que lo rodean: su saber estar y su calidad humana.

No sólo he realizado una Tesis, sino que además he tenido la enorme suerte de ganar una gran amistad que espero conservar siempre.

Sinceramente, gracias.

También me gustaría agradecer a todos los miembros del grupo de investigación "Análisis Funcional no Lineal" por la excelente acogida que me han brindado y sobre todo, porque en cada uno de ellos he encontrado un amigo.

Me gustaría mencionar en especial a los profesores D. José Carmona, D. Genaro López y de nuevo al director de esta Tesis, porque me animaron desde un principio a continuar trabajando en la Facultad de Matemáticas, en un momento donde mi indecisión me hacia dudar sobre qué camino debía elegir.

Quisiera hacer extensible mi agradecimiento a la Fundación Cámara, ya que me permitieron mantener vivas mis ilusiones de incorporarme algún día a la vida universitaria.

También quisiera agradecer al profesor D. José María Ayerbe su gran interés en leer una primera redacción de esta Memoria. Las circunstancias no lo han permitido. Estoy segura que sus sugerencias me hubieran sido muy útiles.

En definitiva, me gustaría expresar mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático, porque siempre me han atendido y ayudado cada vez que lo he necesitado, y porque entre todos forman una familia muy peculiar de la que creo ya formo parte.

Quisiera mencionar al profesor D. Jesús García Falset, de la Universidad de Valencia, y agradecerle algunas de sus valiosas sugerencias.

No sé si algún día podré compensar a mi familia por todo el tiempo que les he robado hasta ahora. A mi madre, por todos los esfuerzos que hace diariamente para que todo esté en su sitio y preparado en cualquier momento. A mi padre, que con su tesón y trabajo diario nos guía a todas por el buen camino. Siempre han confiado en mí, me han apoyado y gracias a ellos, he tenido la oportunidad de estudiar y conseguir todas las cosas que ahora tengo.

A mis hermanas Rocío, Loli y Belén que son las que soportan mi mal humor. Sé que no les he dedicado todo el tiempo que ellas merecen. Espero compensarles día a día.

Por último, quisiera agradecer a Miguel todos los años que lleva a mi lado, apoyándome y confiando en mí. Su paciencia y su constante ánimo hacen que mis malos ratos se conviertan en buenos. En él siempre he encontrado un amigo y una persona con quien compartir mi vida.

A mis padres
y hermanas

A Miguel

Indice

Introducción

La teoría métrica del punto fijo estudia la existencia de dichos puntos para aplicaciones definidas en un espacio métrico y bajo condiciones que no son invariantes al pasar a métricas equivalentes.

En este aspecto, el teorema métrico de punto fijo más conocido e importante es el Teorema de Banach también llamado Principio de la aplicación contractiva, el cual asegura que cada contracción T de un espacio métrico completo X en sí mismo tiene un único punto fijo. Sus numerosas aplicaciones teóricas y prácticas en distintas áreas de las Matemáticas y de otras Ciencias, y la sencillez de su demostración, hacen del Teorema de Banach una de las herramientas más importantes del Análisis Matemático. Además dicho teorema posee una demostración constructiva, ya que permite obtener el punto fijo mediante aproximaciones sucesivas con una estimación del error que se comete en dicha aproximación.

Si relajamos la condición de contractividad permitiendo que la aplicación sea no-expansiva, es decir, $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para todo x, $y \in X$, un simple ejemplo, las traslaciones en $\mathbb{R}^n$, muestran que en este caso no se mantiene el Teorema de Banach. Incluso una condición intermedia, $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ para todo x, $y \in X$ (T es llamada débil contractiva), tampoco asegura la existencia de punto fijo. Considerar como ejemplo la aplicación $Tx = x + \frac{1}{x}$ definida en el espacio métrico completo $[1, +\infty)$. En esta situación, no es sorprendente que durante casi cuarenta años no se hayan obtenido resultados significativos acerca de la existencia de puntos fijos para operadores no-expansivos.

En el año 1965, Browder [Br1] probó que toda aplicación no-expansiva T definida en un subconjunto C convexo, cerrado, acotado de un espacio de Hilbert X, con imagen en sí mismo, tiene un punto fijo. En ese mismo año Browder [Br2], Göhde [Gh] y Kirk [Ki1] probaron que este resultado podía ser mejorado suponiendo una condición más débil, como la de ser X un espacio uniformemente convexo o un espacio de Banach reflexivo con estructura normal. Se dice que un espacio de Banach X tiene estructura normal (NS) si cualquier subconjunto $A \subset X$ convexo, cerrado, acotado y diametral es unitario.

A partir de los resultados anteriores, se ha desarrollado una extensa teoría intentando encontrar condiciones más generales para un espacio de Banach X y para un subconjunto C que aseguren la existencia de puntos fijos. Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad del punto fijo (FPP) si cada aplicación no-expansiva T definida en un subconjunto $C \subset X$ convexo, cerrado, acotado, con imagen en C, tiene un punto fijo.

El siguiente ejemplo, debido a Kakutani, muestra que existen espacios de Banach sin la propiedad del punto fijo. En efecto, sea B la bola unidad de c_0 y definimos la aplicación $T : B \to B$, $T(x_1, x_2, \ldots) = (1 - \|x\|, x_1, \ldots)$. Es fácil comprobar que T es no-expansiva y no tiene puntos fijos en B.

El fracaso de la FPP en este ejemplo se debe a la no compacidad débil de la bola unidad de c_0, ya que puede probarse que cada aplicación no-expansiva definida en un subconjunto de c_0 convexo, débil compacto, con imagen en sí mismo, tiene un punto fijo.

Ejemplos como este, han originado el estudio de la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas sobre dominios más restrictivos. En este sentido, se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad débil del punto fijo (w-FPP) si toda aplicación no-expansiva definida en un subconjunto C convexo, débil compacto, con imagen en C, tiene punto fijo. Se dice que X tiene estructura normal débil (w-NS) si todo subconjunto $A \subset X$ convexo, débil compacto y diametral es unitario. Obviamente, cuando el espacio de Banach X es reflexivo, las propiedades FPP, w-FPP y NS, w-NS son idénticas respectivamente. De la prueba del Teorema de Kirk mencionado anteriormente, se deduce que si X es un espacio de Banach con w-NS entonces X cumple la w-FPP.

Si X es un espacio de Banach dual, también podemos considerar en X la topología débil estrella correspondiente a la dualidad. En este caso, si se sustituye en la definición de la w-FPP la condición de compacidad débil por la de compacidad débil estrella, se define la propiedad débil estrella del punto fijo

($w^\star$-FPP). De forma análoga es definida la estructura normal débil estrella de un espacio de Banach ($w^\star$-NS). Una ligera modificación del Teorema de Kirk prueba que la condición $w^\star$-NS implica la propiedad $w^\star$-FPP.

Debido a que la topología débil estrella es menos fina que la topología débil, trivialmente se comprueba que X tiene la w-FPP si X verifica la $w^\star$-FPP.

A la vista del ejemplo de Kakutani, surge la siguiente cuestión: ¿Tiene todo espacio de Banach X la propiedad débil del punto fijo? Esta cuestión, que permaneció abierta durante mucho tiempo, fue resuelta por Alspach [A] en 1981, probando que $L_1[0,1]$ no cumple la w-FPP. De forma análoga, podríamos preguntarnos si todo espacio de Banach dual cumple la $w^\star$-FPP. Este hecho no se deduce directamente del ejemplo de Alspach ya que el espacio $L_1[0,1]$ no tiene predual. Sin embargo, también la respuesta a esta pregunta es negativa. Si consideramos el espacio de Banach l_1 como dual del espacio c_0 y la topología débil estrella $\sigma(l_1, c_0)$, Lim [Lm] definió una aplicación sobre un subconjunto convexo, débil estrella compacto, sin punto fijo, la cual resulta ser una isometría para un renormamiento equivalente de l_1.

Es evidente que l_1 cumple la w-FPP ya que tiene la propiedad de Schur (toda sucesión débilmente convergente es convergente), y esta propiedad implica directamente la w-FPP, pues en este caso, los conjuntos débilmente compactos son compactos para la topología de la norma. El Teorema de Schauder garantiza la existencia de un punto fijo para toda aplicación continua definida en un compacto.

Como la propiedad de Schur se mantiene por renormas equivalentes, el ejemplo anterior resulta ser un espacio de Banach con la w-FPP y que no cumple la $w^\star$-FPP.

Con respuesta al ejemplo de Alspach y respecto a la cuestión sobre qué espacios de Banach cumplen la FPP, Maurey [Ma] probó que cada subespacio reflexivo de $L_1[0,1]$ sí verifica la FPP. Surge aquí el problema fundamental de esta teoría que permanece abierto desde que fue expresamente planteado hace más de diez años: ¿Tienen todos los espacios de Banach reflexivos la propiedad del punto fijo? Si X es reflexivo, ¿cumple X la FPP? De hecho, recientemente ha sido probado por Dowling y Lennard [DoL] que cada subespacio de $L_1[0,1]$ es reflexivo si y sólo si cumple la FPP.

En 1982, Van Dulst [Du] probó que cada espacio de Banach separable podía ser renormado de forma que con la nueva norma, el espacio tuviese la condición de Opial y por tanto la w-FPP. En el caso de que el espacio X fuese dual de otro espacio de Banach separable, Van Dulst demostró un resultado análogo para la topología débil estrella, es decir, se puede definir una norma equivalente tal que X con la nueva norma cumple la $w^\star$-FPP.

Este hecho, junto con los ejemplos de Alspach y de Lim, prueban que ni la propiedad débil, ni la propiedad débil estrella del punto fijo, se transmiten en general, al considerar normas equivalentes.

Sin embargo, un método para probar que un espacio de Banach X cumple la w-FPP o $w^\star$-FPP, puede ser probar que este espacio está "cerca" de otro espacio de Banach con dicha propiedad. Para ello, necesitamos una medida que estime la "proximidad" entre dos espacios de Banach y otra medida que cuantifique el grado de "intensidad" con el que un espacio de Banach X cumple la propiedad del punto fijo. En el primer sentido, puede utilizarse la distancia de Banach-Mazur entre dos espacios de Banach isomorfos X, Y, definida como sigue:

$$d(X,Y) = \inf\{ \|U\|\|U^{-1}\| : \ U : X \to Y, \ U \text{ isomorfismo}\}.$$

Inicialmente se plantea el problema de estabilidad de la propiedad débil del punto fijo para aplicaciones no-expansivas del siguiente modo: Sea X un espacio de Banach con la propiedad w-FPP. ¿Cuál es el mayor número $K = K(X)$ tal que si Y es otro espacio de Banach isomorfo a X con $d(X,Y) < K$, entonces podemos asegurar que Y cumple también la w-FPP? La respuesta a esta pregunta es desconocida en general. Es claro que $K(l_1) = +\infty$, ya que cada espacio isomorfo a l_1 tiene la propiedad de Schur. Sin embargo, sorprendentemente éste es el único espacio para el cual $K(X)$ es conocido. Ni siquiera para los espacios de Hilbert se conoce la constante $K(X)$. En los últimos años, este problema ha sido ampliamente estudiado, obteniéndose cotas inferiores de $K(X)$ para la mayoría de los espacios de Banach clásicos, basadas en coeficientes geométricos o usando propiedades geométricas del espacio X.

Nótese que el problema anterior es equivalente al siguiente: Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con la w-FPP y $|\cdot|$ es una norma equivalente tal que $\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$ para todo $x \in X$, ¿cuál es el valor máximo de d para que el espacio $Y = (X, |\cdot|)$ siga cumpliendo la w-FPP?

También ha sido planteado un problema de estabilidad en el sentido contrario al anterior. Supongamos que X es un espacio de Banach que no cumple la w-FPP. ¿Podemos encontrar un número $K' = K'(X) > 1$ tal que si $d(X,Y) < K'$ entonces el espacio de Banach Y tampoco cumple la w-FPP? La respuesta a esta pregunta es conocida, al menos cuando el espacio X es separable. Este hecho fue observado por Zizler en 1971 [Z] quien probó que cada espacio de Banach X separable puede ser renormado con una norma equivalente $|\cdot|$ tal que el espacio $Y = (X, |\cdot|)$ es uniformente convexo en cada dirección, condición que implica la w-FPP. Además, con una ligera modificación en su demostración, puede conseguirse $d(X,Y) < 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ fijado de antemano.

El problema de la estabilidad ha sido generalizado para el estudio de la $w^\star$-FPP. Si X es un espacio de Banach dual cumpliendo la $w^\star$-FPP, ¿cuál es el mayor número $K^\star = K^\star(X)$ tal que si Y es otro espacio de Banach isomorfo a X con $d(X,Y) < K^\star$, entonces Y cumple también la $w^\star$-FPP? Nada se sabe en general. De nuevo, sólo es conocido $K^\star(l_1)$, donde l_1 es considerado dual de c_0. Soardi [S] probó en 1980 que $K^\star(l_1) \geq 2$. Este hecho, junto con el ejemplo de Lim, construido en un renormamiento equivalente de l_1 con distancia de Banach-Mazur a l_1 igual 2, prueban que $K^\star(l_1) = 2$.

Poco más es conocido sobre la estabilidad de la $w^\star$-FPP. Sin embargo, cuando consideramos la topología débil, el problema de la estabilidad ha sido ampliamente desarrollado y son muchos los autores que han trabajado en este tema, definiendo constantes geométricas que en cierta forma miden la "intensidad" con que un espacio de Banach X cumple la w-FPP.

Esta teoría, probar que un espacio de Banach cumple la w-FPP a través de considerar su proximidad a otro espacio de Banach con dicha propiedad, fue iniciada por Bynum en 1980 [By]. Bynum definió los coeficientes de estructura normal $N(X)$, $WCS(X)$, este último conocido como coeficiente de sucesiones débilmente convergentes, y demostró que las condiciones $N(X) > 1$, $WCS(X) > 1$ implican NS y w-NS respectivamente. Además, ambos coeficientes pueden ser considerados como una medida de la "intensidad" de la estructura normal del espacio. En efecto, es fácil comprobar que si dos espacios de Banach X, Y son isomorfos entonces $N(X) \leq d(X,Y)N(Y)$

y $WCS(X) \leq d(X,Y)WCS(Y)$. Como consecuencia, si $d(X,Y) < N(X)$ ó $d(X,Y) < WCS(X)$, el espacio Y tiene NS o w-NS respectivamente. Aplicando el Teorema de Kirk, deducimos que si Y es un espacio de Banach tal que existe otro espacio X con $d(X,Y) < WCS(X)$, entonces Y cumple la w-FPP. Un resultado análogo es derivado del coeficiente $N(X)$ para espacios reflexivos y la FPP. Sin embargo, el hecho de que $1 \leq N(X) \leq WCS(X)$ para todo espacio de Banach, hace que el papel del coeficiente de sucesiones débilmente convergentes sea más fructífero y haya proporcionado mejores resultados en el estudio de la propiedad del punto fijo.

Bynum mejoró el resultado anterior asegurando que Y cumple la FPP si existe un espacio de Banach X uniformemente convexo tal que $d(X,Y) \leq WCS(X)$ [By].

Hasta ahora, siempre hemos inferido la propiedad del punto a fijo a través de la estructura normal del espacio. Sin embargo, ni la estructura normal débil, ni la condición $WCS(X) > 1$, caracterizan los espacios de Banach con la w-FPP. En efecto, si renormamos el espacio l_2 con la norma equivalente $|x|_{2,\infty} = \max\{\|x^+\|_2, \|x^-\|_2\}$, donde x^+, x^- denotan respectivamente la parte positiva y negativa del vector x, es fácil comprobar que el espacio $l_{2,\infty} = (l_2, \|\cdot\|_{2,\infty})$ es reflexivo y sin estructura normal. De hecho, a partir de la sucesión básica, se puede comprobar $WCS(l_{2,\infty}) = 1$. En cambio, $d(l_2, l_{2,\infty}) = 2^{1/2} = WCS(l_2)$. Aplicando el resultado de estabilidad de Bynum enunciado anteriomente, deducimos que el espacio $l_{2,\infty}$ sí cumple la FPP.

Este hecho sugiere la búsqueda de nuevas condiciones geométricas independientes de la estructura normal del espacio, que permitan asegurar la propiedad del punto fijo. En este sentido, algunos autores han definido nuevos coeficientes geométricos para un espacio de Banach X, que no sólo prueban que X cumple la w-FPP, sino que constituyen una medida para cuantificar el grado de "intensidad" con que el espacio verifica la w-FPP y por tanto, pueden ser aplicados al estudio de la estabilidad de la propiedad débil del punto fijo. El instrumento principal en el que se basa esta nueva línea de investigación es el Lema de Goebel-Karlovitz.

En 1991 García-Falset [G1] definió un coeficiente geométrico denotado $R(X)$ y probó que si X, Y son dos espacios de Banach isomorfos tal que $d(X,Y) < 2/R(X)$, entonces Y cumple la w-FPP. Como ejemplos, podemos derivar que si Y es un espacio de Banach tal que $d(Y, c_0) < 2$ ó $d(Y, l_{2,\infty}) < 2^{1/2}$, entonces Y cumple la w-FPP.

Posteriormente, en 1996, Domínguez Benavides [D2] definió una nueva constante geométrica llamada $M(X)$, y probó que si Y es un espacio de Banach cumpliendo $d(X, Y) < M(X)$ para algún espacio X, entonces Y verifica la w-FPP. A partir de las definiciones se puede comprobar que $M(X) \geq WCS(X)$, $M(X) \geq 2/R(X)$ para todo espacio de Banach X, llegando a ser ambas, desigualdades estrictas en algunos espacios.

Otro resultado sobre estabilidad de la propiedad débil del punto fijo basado en el Lema de Goebel-Karlovitz es el siguiente: Supongamos que X es un espacio de Banach con la propiedad M de Kalton. Si Y es otro espacio de Banach tal que $d(X, Y) < (1 + \sqrt{5})/2$ es probado en [GS] que Y cumple la w-FPP.

Son muchos los resultados conocidos sobre estabilidad de la w-FPP. Sin embargo, los citados anteriormente son algunos de los más significativos.

Podríamos plantearnos cuál es la diferencia con respecto a la topología débil estrella y por qué no se conoce casi nada sobre la estabilidad de la w^*-FPP. La respuesta a esta pregunta se basa en el siguiente hecho: los conjuntos convexos y cerrados en norma no son, en general, cerrados para la topología débil estrella. Esta propiedad, que sí se cumple con la topología débil, es fundamental para probar que gran variedad de propiedades geométricas del espacio de Banach implican la w-NS y se usa fuertemente en la demostración del Lema de Goebel-Karlovitz.

Aunque es cierto que w^*-NS implica w^*-FPP, sin embargo, no se conoce ningún coeficiente geométrico que mida la propiedad w^*-NS, en el sentido que los coeficientes definidos por Bynum $N(X)$ ó $WCS(X)$ miden la estructura normal del espacio. Tampoco se sabe si un resultado similar al Lema de Goebel-Karlovitz es cierto en el marco de la topología débil estrella.

La estabilidad de la propiedad del punto fijo también puede estudiarse usando técnicas totalmente diferentes. Sea (X, d) un espacio métrico y C un subconjunto de X. Se dice que una aplicación $T : C \to C$ es uniformemente Lipschitziana si existe una constante k tal que $d(T^n x, T^n y) \leq k d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in C$, $n \in \mathbb{N}$.

Si X e Y son dos espacios de Banach isomorfos, C un subconjunto de Y y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva, es fácil comprobar que para cualquier isomorfismo $f : X \to Y$, la aplicación $f^{-1} \circ T \circ f : f^{-1}(C) \subset X \to f^{-1}(C)$ es uniformemente Lipschitziana con constante $\|f^{-1}\|\|f\|$. Como consecuencia, si X es un espacio de Banach tal que para todo subconjunto $C \subset X$ convexo, cerrado, acotado y para toda aplicación $T : C \to C$ k-uniformemente Lipschitziana existe punto fijo, entonces se puede asegurar que un espacio de Banach Y cumple la FPP si $d(X,Y) < k$. Así, la teoría de existencia de puntos fijos para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas, puede ser aplicada al estudio de la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas a través de la estabilidad.

Para un espacio de Banach X es definido la constante de Lifshitz $k_0(X)$ y se prueba [Li] que si C es un subconjunto de X convexo, cerrado, acotado y $T : C \to C$ una aplicación uniformemente Lipschitziana con constante $k < k_0(X)$, entonces T tiene punto fijo. Como aplicación, podemos concluir que un espacio de Banach Y cumple la FPP si existe otro espacio X con $d(X,Y) < k_0(X)$.

Sin embargo, la constante de Lifshitz sólo ha sido calculada en los espacios de Hilbert, cuyo valor es $\sqrt{2}$ [Li], y en algunos espacios isomorfos a l_2 [D4], [Zh]. Por tanto, mediante este argumento, la cota de estabilidad para la FPP que obtenemos en los espacios de Hilbert es $\sqrt{2}$, valor que es muy inferior a las cotas de estabilidad conocidas en estos espacios, bien a través del coeficiente $M(X)$ cuyo valor en l_2 es $\sqrt{3}$ [D2], o bien la cota de estabilidad obtenida por Lin [Ln2], que es $\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$.

Por otra parte, el hecho de que existan espacios de Banach sin la propiedad w-FPP o sin la w^*-FPP, junto con la importancia de otras topologías definidas en espacios de Banach, han motivado el estudio de la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas definidas en subconjuntos compactos con respecto a topologías distintas de la débil o débil estrella (ver [Be], [LT], [Le], [Kh1], [Ki2], [KhT]).

Nuestro objetivo principal en esta Memoria es estudiar la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas definidas en subconjuntos de un espacio de Banach, que son secuencialmente compactos respecto a una topología arbitraria y la conservación de esta propiedad al renormar el espacio, desarrollando al mismo tiempo una teoría coherente que englobe los resultados conocidos para la topología débil, la débil estrella u otras topologías.

En el Capítulo 1 se hace un resumen de los principales conceptos y resultados conocidos que son indispensables para una buena comprensión del resto de la Tesis. No incluimos demostraciones, salvo alguna excepción, e intentamos dar referencias concretas de todos los resultados. Incluimos también algunos resultados técnicos, que aunque deben ser conocidos, no aparecen en las referencias usuales.

En el Capítulo 2 comenzamos con la definición de propiedad del punto fijo con respecto a alguna topología definida en X. De esta forma, dado un espacio de Banach X y una topología τ arbitraria sobre X, diremos que X cumple la propiedad del punto fijo con respecto a τ (τ-FPP), si para cada subconjunto $C \subset X$ convexo, acotado en norma, τ-secuencialmente compacto y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva, existe punto fijo.

Cuando τ es la topología débil, la definición anterior coincide con la definición de w-FPP debido al Teorema de Eberlein-Simulian. Es más, cuando X es un espacio de Banach cuyo predual es separable (que es una de las hipótesis de partida en cualquier trabajo que estudie la $w^\star$-FPP), sabemos que un conjunto es $w^\star$-compacto si y sólo si es $w^\star$-secuencialmente compacto. Por tanto, la definición de la τ-FPP engloba como casos particulares las definiciones de w-FPP y $w^\star$-FPP.

Con respecto a los artítulos citados anteriomente, donde se estudia la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas con dominio compacto para alguna topología concreta, en todos ellos se exigen como hipótesis adicionales, la acotación del conjunto de partida, así como su compacidad secuencial con respecto a dicha topología. Como consecuencia, la definición que damos generaliza el concepto usual de propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas con respecto a cualquier topología.

Por analogía, diremos que un espacio de Banach X tiene estructura normal con respecto a una topología τ (τ-NS), si todo subconjunto $A \subset X$

convexo, acotado en norma, τ-secuencialmente compacto y diametral es unitario.

Una primera cuestión sería si se cumple un resultado análogo al Teorema de Kirk en el marco de una topología arbitraria, es decir, si podemos asegurar la propiedad τ-FPP a partir de la τ-NS. Damos una respuesta afirmativa a esta pregunta, suponiendo que la función norma $\|\cdot\|$ es τ-secuencialmente semicontinua inferiomente (τ-sec.s.c.i.). Es muy fácil probar que esta condición es equivalente a que la bola unidad cerrada B_X sea τ-secuencialmente cerrada. Es evidente que tanto la topología débil como la topología débil estrella cumplen esta propiedad.

A continuación estudiaremos propiedades que garantizen la τ-estructura normal del espacio. Para ello definimos la propiedad τ-GGLD de la siguiente forma:

Si X es un espacio de Banach y τ una topología sobre X, diremos que X cumple la propiedad τ-GGLD si:

$$\lim_n \|x_n\| < \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge al vector nulo en la topología τ y tal que existen ambos límites.

Es conocido que la propiedad w-GGLD garantiza la estructura normal débil del espacio [Ji]. Sin embargo, la demostración está fuertemente basada en la equivalencia entre los conjuntos convexos, cerrados en norma y los conjuntos convexos, débilmente cerrados. Puesto que esta equivalencia no es cierta para una topología arbitraria (incluso para la topología débil estrella), tenemos que usar un método alternativo basado en la separabilidad del espacio para establecer un resultado análogo:

Teorema:

Sea X un espacio de Banach separable y τ una topología de espacio vectorial topológico (e.v.t.) sobre X. Si X cumple la propiedad τ-GGLD entonces X tiene τ-NS.

Mediante un ejemplo mostramos que el inverso del resultado anterior no es cierto ni siquiera para la topología débil.

También podemos plantear el problema de estabilidad de la τ-FPP. Sea X un espacio de Banach y τ una topología definida en X. ¿Cuál es el mayor número $K_\tau = K_\tau(X)$, tal que si Y es otro espacio de Banach isomorfo a X con $d(X,Y) < K_\tau$, entonces podemos asegurar que Y cumple la τ-FPP? Para abordar esta cuestión necesitaríamos una medida que cuantifique la "intensidad" con que el espacio X verifica la τ-FPP. Para ello definimos el siguiente coeficiente geométrico:

$$\tau CS(X) = \inf\left\{\frac{\lim_{n,m;n\neq m}\|x_n - x_m\|}{\lim_n \|x_n\|}\right\}$$

donde el ínfimo está tomado sobre todas las sucesiones acotadas, τ-convergentes a cero, tales que ambos límites existen y $\lim\|x_n\| \neq 0$.

Una primera observación es que si el espacio X cumple una propiedad análoga a la propiedad de Schur para la topología τ, es decir, toda sucesión τ-convergente es convergente en norma, no podemos definir el coeficiente $\tau CS(X)$. Sin embargo, en este caso, si C es un conjunto τ-secuencialmente compacto es inmediato comprobar que C es compacto en norma y por tanto, cualquier aplicación no-expansiva definida en C tiene puntos fijos debido al Teorema de Schauder.

El coeficiente $\tau CS(X)$ es en realidad, una generalización del coeficiente $WCS(X)$, pero no de la definición original dada por Bynum, sino de una definición equivalente de este coeficiente probada posteriormente. Veremos con un ejemplo, que no es conveniente hacer una extensión directa de $WCS(X)$ para una topología arbitraria según la definición original.

El teorema enunciado anteriormente garantiza que X tiene τ-estructura normal si $\tau CS(X) > 1$ y X, τ verifican las hipótesis del teorema.

En particular probamos que $\tau CS(L_1(\mu)) = 2$ cuando τ es la topología de la convergencia local en medida (clm), lo cual nos proporciona una nueva demostración de un hecho conocido [Le], [Be]: $L_1(\mu)$ cumple la τ-FPP cuando τ es la clm topología, a pesar de que no tiene la w-FPP.

Además, si X e Y son dos espacios de Banach isomorfos se cumple la desigualdad $\tau CS(X) \leq d(X,Y)\tau CS(Y)$, por tanto, podemos enunciar un primer resultado general de estabilidad de la propiedad del punto fijo:

Teorema:

Sea X es un espacio de Banach separable y τ una topología de e.v.t. definida sobre X. Si $|\cdot|$ es una norma equivalente en X tal que la función $|\cdot|$ es τ-sec.s.c.i. y $d(X,Y) < \tau CS(X)$, entonces Y cumple la τ-FPP.

Este primer resultado de estabilidad dado para cualquier topología τ de e.v.t. definida sobre X plantea un problema: sólo puede ser aplicado para aquellas normas equivalentes $|\cdot|$ que son funciones τ-sec.s.c.i., y esta propiedad no se conserva por isomorfismos. De hecho, mostramos un ejemplo de un espacio de Banach X y una topología τ tal que la norma es τ-sec.s.c.i., pero pueden definirse normas equivalentes, tan próximas como se quiera a la norma original, que no cumplen dicha propiedad.

Sin embargo, si el espacio de Banach X verifica que toda sucesión acotada en norma, τ-convergente, es débilmente convergente al mismo límite, propiedad que denotamos por (A_τ), podremos garantizar que cualquier norma equivalente es una función τ-sec.s.c.i., incluida la norma original del espacio. Este hecho es consecuencia de que la propiedad (A_τ) se conserva por isomorfismos. Además, probamos que en el caso de que X sea un espacio de Banach reflexivo y τ una topología de espacio localmente convexo, menos fina que la de la norma, el espacio X cumple la propiedad (A_τ).

A continuación generalizamos las definiciones de algunos módulos conocidos en el caso de la topología débil, como por ejemplo, los módulos de medidas de no compacidad y el módulo de Opial, y los relacionamos con el nuevo coeficiente $\tau CS(X)$. Comprobaremos que condiciones más débiles que la condición de Opial uniforme y la propiedad UKK generalizadas, implican la τ-FPP en el caso de que τ sea una topología de e.v.t. y la norma $\|\cdot\|$ sea una función τ-sec.s.c.i.

¿Es posible generalizar el Lema de Goebel-Karlovitz en el marco general de una topología de e.v.t. definida sobre X? Para ello necesitamos garantizar, en primer lugar, la existencia de sucesiones de puntos fijos aproximados ($\lim \|Tx_n - x_n\| = 0$). Veremos que bajo las hipótesis de convexidad y acotación del dominio de una aplicación no-expansiva T, siempre podemos encontrar una sucesión en tales condiciones.

Por otro lado, la prueba original del Lema de Goebel-Karlovitz está fuertemente basada en la débil semicontinuidad inferior de las funciones tipo w-nulas, y esto se cumple de nuevo porque los conjuntos convexos, cerrados en norma, son débilmente cerrados. Dada una topología τ y $\{x_n\}$ una sucesión en X τ-convergente a cero, definimos la función tipo τ-nula asociada a la sucesión $\{x_n\}$ como $\Gamma_{\{x_n\}}(x) = \limsup_n \|x_n - x\|$. Probaremos que en el caso de que τ sea una topología de e.v.t. tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i., entonces el Lema de Goebel-Karlovitz es cierto. Nótese que si el espacio de Banach X satisface la propiedad (A_τ), las funciones τ-nulas son τ-sec.s.c.i. Además, si τ es una topología métrica o τ es una topología menos fina que la inducida por la norma en un espacio de Banach separable, los conjuntos τ-secuencialmente compactos son también τ-compactos.

Una vez probado el Lema de Goebel-Karlovitz, podríamos plantearnos si se pueden deducir resultados de estabilidad de la τ-FPP, al igual que se hace en el marco de la topología débil. Para ello, generalizamos el coeficiente geométrico definido por Domínguez Benavides [D2] para τ una topología arbitraria en X y probaremos el siguiente resultado:

Teorema:

Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma equivalente en X tal que:

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$ y denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Si las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. en Y y $d < M_\tau(X)$, entonces Y cumple la τ-FPP.

De nuevo, si el espacio de Banach X cumple la propiedad (A_τ), las funciones τ-nulas son τ-sec.s.c.i. considerando cualquier norma equivalente en X, incluida la norma original. En particular, aplicando el teorema anterior a los espacios $L_p(\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ con la topología de la convergencia local en medida obtenemos el siguiente resultado de estabilidad:

Teorema:

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y $|\cdot|$ una norma equivalente en $L_p(\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ tal que $|f| \le \|f\|_p \le d|f|$ para cada $f \in L_p(\mu)$. Si denotamos $Y = (L_p(\mu), |\cdot|)$ y se cumple

$$d < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces Y cumple la clm-FPP.

Obsérvese que los valores anteriores coinciden con los correspondientes a $M(l_p)$ obtenidos en [D2]. De hecho, probaremos que en el caso de que μ sea la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$, la *clm* topología coincide con la topología débil en los subconjuntos acotados de l_p. En el caso $p = 1$, probaremos que la *clm* topología coincide con la topología débil estrella $\sigma(l_1, c_0)$, pero de nuevo sólo en los subconjuntos acotados para la norma de l_1.

Definiremos también una constante geométrica $\lambda_\tau(X)$, no considerada hasta ahora, tal que la condición $\lambda_\tau(X) < 1$ implica la τ-FPP, y proporciona una nueva cota de estabilidad para dicha propiedad. Por otra parte, si generalizamos la propiedad M de Kalton para una topología arbitraria, comprobaremos que en este caso $\lambda_\tau(X) = 0$, y por tanto, que X tiene la τ-FPP. Además, cuando X tiene la propiedad de Kalton generalizada $M(\tau)$, la constante de estabilidad que proporciona el coeficiente $\lambda_\tau(X)$ coincide con $(1 + \sqrt{5})/2$, que es el valor de estabilidad para la topología débil y para los espacios con la propiedad M dada en [GS].

Cuando τ es la topología débil, comprobaremos la desigualdad $\lambda_w(X) \le R(X) - WCS(X)$ y encontraremos un ejemplo de un espacio de Banach donde $WCS(X) = 1$, $R(X) = 2$, mientras que $\lambda_w(X) < 1$. Por consiguiente, podremos asegurar que este espacio cumple la w-FPP aunque los resultados de Bynum [By] y García-Falset [G2] no puedan ser aplicados.

El uso de esta constante nos permite probar también que si Y es un espacio de Banach tal que $d(Y, L_p(\mu)) < (1 + \sqrt{5})/2$ para algún $p \in (1, +\infty)$, entonces Y cumple la τ-FPP.

En el Capítulo 3 trataremos el problema de la estabilidad de la τ-FPP desde una perspectiva diferente: el estudio de teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares.

Si X es un espacio de Banach y C un subconjunto de X, se dice que una aplicación $T : C \to C$ es asintóticamente regular si $\lim_n \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0$ para todo $x \in C$ [BrP]. Obsérvese que el concepto de regularidad asintótica es invariante si cambiamos la norma en X por otra norma equivalente. En [I] es probado que si $T : C \to C$ es no-expansiva y C es convexo, para cualquier $\lambda \in (0, 1)$ la aplicación $\lambda I + (1 - \lambda)T$ es asintóticamente regular, además de ser no-expansiva. Es evidente que el conjunto de puntos fijos de las aplicaciones T y $\lambda I + (1 - \lambda)T$ coinciden. Así, el problema de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas es equivalente al estudio de existencia de dichos puntos para aplicaciones no-expansivas que son a la vez asintóticamente regulares.

Para una aplicación $T : C \to C$ vamos a denotar por $|T|$ la constante exacta de Lipschitz, es decir:

$$|T| = \sup \left\{ \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} : x, y \in C,\ x \neq y \right\}$$

y definimos $s(T) = \liminf_n |T^n|$ donde $\{T^n\}$ denota la sucesión de iteraciones de la aplicación T.

Supongamos que X es un espacio de Banach, C un subconjunto de X y $|\cdot|$ una norma equivalente en X tal que $|x| \leq \|x\| \leq d|x|$ para todo $x \in X$. Denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Sea $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva para la norma en Y y asintóticamente regular. Veamos que la aplicación T es uniformemente Lipschitziana en X y $s(T) \leq d$. En efecto, si $x, y \in C$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\|T^n x - T^n y\| \leq d|T^n x - T^n y| \leq d|x - y| \leq d\|x - y\|.$$

Por tanto $|T^n| \leq d$ y $s(T) \leq d$.

Como consecuencia, si encontramos una cota superior de $s(T)$ que permita asegurar la existencia de puntos fijos para aplicaciones asintóticamente regulares y uniformemente Lipschitzianas para la norma de X, obtendremos una cota de estabilidad de la propiedad del punto fijo y podremos concluir que Y cumple la τ-FPP si $d(X, Y)$ es menor que dicha cota.

Para encontrar un primer resultado de estabilidad mediante estas técnicas, vamos a hacer uso de la τ-característica de un espacio de Banach $\kappa_\tau(X)$ definida en [DX]. En [DX] se prueba que si X es un espacio de Banach, τ una topología arbitraria sobre X, $C \subset X$ convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación uniformemente Lipschitziana y asintóticamente regular con $s(T) < \kappa_\tau(X)$, entonces T tiene punto fijo. Aplicando este resultado a la estabilidad de la propiedad del punto fijo probaremos lo siguiente:

Teorema:

Sea X un espacio de Banach y τ una topología arbitraria sobre X. Sea $|\cdot|$ una norma equivalente en X tal que

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$. Si $d < \kappa_\tau(X)$ entonces $Y = (X, |\cdot|)$ tiene la τ-FPP.

Lo sorprendente de este nuevo teorema de estabilidad a través de las aplicaciones asintóticamente regulares, es la garantía de estabilidad de la τ-FPP para cualquier topología definida en X, sin tener que exigir hipótesis adicionales ni sobre la norma original de X ni sobre la nueva norma equivalente.

Con objeto de calcular $\kappa_\tau(X)$ es los espacios de Banach usuales, relacionamos dicha constante con otros coeficiente geométricos conocidos. Probaremos que cuando τ es una topología de e.v.t. en X tal que la norma es τ-sec.s.c.i. y X verifica la condición τ-uniforme de Opial, se cumple $\kappa_\tau(X) = 1 + r_{X,\tau}(1)$. Esta igualdad y el hecho de que en el espacio $L_p(\mu)$ la norma $\|\cdot\|_p$ es *clm*-sec.s.c.i. para todo $p \in [1, +\infty)$, nos van a permitir enunciar el siguiente resultado de estabilidad de la *clm*-FPP:

Teorema:

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y τ la topología de la convergencia local en medida en $L_1(\mu)$. Sea $|\cdot|$ una nueva norma definida en $L_1(\mu)$ tal que

$$|f| \leq \|f\|_1 \leq d|f|$$

para todo $f \in L_1(\mu)$. Si $d < 2$ entonces $Y = (L_1(\mu), |\cdot|)$ cumple la clm-FPP.

Puesto que existen normas equivalentes a $\|\cdot\|_1$ (tan próximas a ella como se quiera) que no son τ-sec.s.c.i., este teorema es una generalización estricta del resultado de estabilidad obtenido a través del coeficiente $(clm)CS(L_1(\mu))$.

Como para la medida cardinal la clm topología es equivalente a la topología débil estrella $\sigma(l_1, c_0)$ para los conjuntos acotados de l_1, como consecuencia del teorema anterior deduciremos el resultado probado en [S]: Si $d(Y, l_1) < 2$ entonces Y tiene la $w^{\star}$-FPP.

Por otra parte, comprobaremos a partir del ejemplo dado por [Lm], que el valor 2 es la mejor cota de estabilidad posible para $L_1(\mu)$ y la clm topología.

En nuestra búsqueda de puntos fijos para aplicaciones asintóticamente regulares, en la segunda sección de este capítulo, probaremos un nuevo teorema de punto fijo para tales aplicaciones y comprobaremos con ejemplos como, incluso para la topología débil, se mejoran estrictamente todos los resultados conocidos en este campo ([DX], [D4], [Ku]). El enunciado de dicho teorema será el siguiente:

Teorema:

Sean X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. sobre X menos fina que la inducida por la norma y tal que $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Sea $C \subset X$ acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones:

a) $\frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau,}\left(\frac{\tau CS(X)^-}{s(T)}\right)\right) < 1,$

b) $s(T) - r_{X,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{s(T)}\right) < 1,$

c) X satisface la condición no estricta de Opial con respecto a τ y

$\frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,\chi,\tau}\left(\frac{1^-}{s(T)}\right)\right) < 1.$

Entonces T tiene punto fijo.

Aquí $\Delta_{X,\chi,\tau}(\cdot)$, $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ denotan los coeficientes geométricos que resultan de generalizar los módulos de no compacidad definidos para la medida de no compacidad de Hausdorff χ y la medida de separación β. En el caso de que X sea reflexivo y τ la topología débil, dichos módulos coinciden exactamente con los módulos de no compacidad. Por $r_{X,\tau}(\cdot)$ denotamos el módulo de Opial asociado a la topología τ.

A partir del teorema anterior deduciremos una serie de corolarios de fácil aplicación, que aseguran puntos fijos para una aplicación asintóticamente regular. Entre ellos destacamos el siguiente:

Corolario:

Sean X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. sobre X menos fina que la inducida por la norma y tal que $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Sea $C \subset X$ acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular. Si $s(T) < 1 + r_{X,\tau}(1)$, entonces T tiene punto fijo.

Este resultado fue primeramente probado en [DX] para la topología débil y con la hipótesis adicional de condición uniforme de Opial. Posteriormente, ha sido probado en [Ku] pero con la condición de Opial no estricta con respecto a τ.

Otra consecuencia inmediata que se obtiene a partir del teorema anterior es que, bajo las mismas hipótesis, si $s(T) < \sqrt{\tau CS(X)}$ entonces T tiene punto fijo.

Aplicando este resultado al problema de la estabilidad de la τ-FPP deduciremos que si τ es una topología de e.v.t. definida en X tal que la norma es τ-sec.s.c.i., e Y es otro espacio de Banach con $d(X,Y) < \sqrt{\tau CS(X)}$, entonces Y cumple la τ-FPP.

Evidentemente siempre se cumple $\sqrt{\tau CS(X)} \leq \tau CS(X)$ pero, como hemos visto en el Capítulo 2, para utilizar $\tau CS(X)$ como cota de estabilidad de la τ-FPP, necesitamos ciertas condiciones de regularidad de las normas. Mostraremos un ejemplo de un espacio de Banach X y una topología τ de e.v.t. sobre X, tal que la norma original es τ-sec.s.c.i. y cumple $\tau CS(X) = 2$. Sin embargo, definiremos en X una norma equivalente $|\cdot|$ que no es τ-sec.s.c.i., por tanto, si denotamos $Y = (X, |\cdot|)$ no podremos deducir la τ-FPP para Y a partir de ningún resultado dado en el Capítulo 2, ya que en todos ellos se exigía que la nueva norma equivalente fuese τ-sec.s.c.i. Tampoco podremos usar el resultado de estabilidad obtenido a través de la constante $\kappa_\tau(X)$ ya que comprobaremos que $d(X,Y) > \kappa_\tau(X)$. No obstante, aseguraremos que Y cumple la τ-FPP porque se cumplirá $d(X,Y) < \sqrt{2}$.

A partir del teorema anterior otras cotas de estabilidad de la τ-FPP serán obtenidas. Para ello, tendremos que exigir que τ sea una topología de e.v.t. definida en X menos fina que la de la norma y que $\|\cdot\|$ sea τ-sec.s.c.i.

Nótese que en los resultados de estabilidad de la τ-FPP obtenidos a través de las aplicaciones asintóticamente regulares, las características de la norma equivalente serán indiferentes.

En el Capítulo 4 y último vamos a aplicar los resultados de estabilidad obtenidos en los capítulos anteriores a una clase muy conocida de espacios de Banach clásicos: los Espacios de funciones de Orlicz.

Estos espacios constituyen una generalización de los espacios de funciones de Lebesgue $L_p(\mu)$ y fueron introducidos en los años treinta por Orlicz y Birnbaum. Para ello, consideraron funciones con algunas propiedades similares a las funciones tipo $|x|^p$ que determinan la norma $\|\cdot\|_p$.

De esta forma, dada una función $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$, se dice que Φ es una función de Orlicz si Φ es convexa, continua, creciente, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y Φ una función de Orlicz consideramos el espacio de Orlicz correspondiente:

$$L_\Phi(\mu) = \left\{ f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \text{ medible tal que } \exists \alpha > 0 \text{ con } \int_\Omega \Phi(\alpha|f|)d\mu < +\infty \right\}.$$

La posibilidad de introducir una estructura de espacio normado en $L_\Phi(\mu)$, junto con las interesantes propiedades de estos espacios y sus muchas aplicaciones en el campo de las ecuaciones diferenciales, han permitido un gran desarrollo de la teoría de los espacios de Orlicz hasta nuestros días.

El espacio de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ puede dotarse de estructura de espacio de Banach con dos normas equivalentes, la norma de Luxemburg $N_\Phi(\cdot)$ y la norma de Orlicz $\|\cdot\|_\Phi$.

Si consideramos en $L_\Phi(\mu)$ la topología de la convergencia local en medida y cualquiera de las normas anteriores, probaremos que en ambos casos $L_\Phi(\mu)$ cumple la condición *clm*-uniforme de Opial y encontraremos una cota inferior del módulo de Opial asociado. Para ello, probaremos en primer lugar, que dada una sucesión $\{f_n\}$ en $L_\Phi(\mu)$ *clm*-convergente a la función nula, siempre puede construirse una subsucesión que se se comporta, en cierto sentido, como si tuviera soportes disjuntos.

Algunas hipótesis sobre Φ serán necesarias. Diremos que una función de Orlicz verifica la condición Δ_2 si existe $K > 0$ tal que $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

Si denotamos $X = (L_\Phi(\mu), |\cdot|)$, donde $|\cdot|$ representa la norma de Luxemburg o la norma de Orlicz, vamos a conseguir la siguiente cadena de desigualdades entre los distintos coeficientes geométricos estudiados anteriormente:

$$(clm)CS(X) \geq \kappa_{clm}(X) = 1 + r_{X,clm}(1) \geq a_0 > 1,$$

donde a_0 se define como $a_0 = \inf\{\Phi^{-1}(t)/\Phi^{-1}(t/2) : t > 0\}$. En el caso de que $\Phi(x) = |x|^p$ veremos que todos los valores anteriores coinciden con $2^{1/p}$.

Inspirándonos en unos coeficientes geométricos definidos por Y. Cui, H. Hudzik, H. Zhu ([CH], [CHZ]) en los espacios de Orlicz de sucesiones, definiremos otros coeficientes D_Φ, O_Φ en espacios de funciones, que nos permitiran obtener cotas inferiores de $\kappa_{clm}(L_\Phi(\mu))$ cuando en $L_\Phi(\mu)$ se consideran las normas de Luxemburg u Orlicz respectivamente. Observamos que estas cotas mejoran, en general, las obtenidas mediante a_0 y estudiaremos algunos importantes ejemplos donde todas ellas coinciden.

Como consecuencia de un corolario mencionado anteriormente, vamos a poder deducir teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares definidas en subconjuntos de $L_\Phi(\mu)$. Por ejemplo, enunciaremos el siguiente resultado:

Teorema:

Sea Φ una función de Orlicz finita, no degenerada, cumpliendo la condición Δ_2 y consideremos el espacio $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Luxemburg. Si C es un subconjunto de $L_\Phi(\mu)$ convexo, acotado, clm-compacto y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular con $s(T) < a_0$, entonces T tiene punto fijo.

Nótese que el teorema no es cierto si sólo exigimos a C ser convexo y débil compacto. En efecto, la función de Orlicz $\Phi(x) = |x|$ cumple todas las condiciones necesarias, pero el espacio $L_1(\mu)$ no tiene la w-FPP. Así, debe existir un subconjunto $C \subset L_1(\mu)$ convexo, débil compacto y una aplicación $T : C \to C$ no-expansiva sin puntos fijos. Por el resultado de Ishikawa

[I] podemos suponer que T es también asintóticamente regular, por tanto $s(T) = 1$, mientras que para $L_1(\mu)$ el valor a_0 vale 2.

Un teorema análogo al anterior es obtenido para la norma de Orlicz.

Como consecuencia de los teoremas de punto fijo obtenidos para aplicaciones asintóticamente regulares, deduciremos los correspondientes resultados de estabilidad de la clm-FPP en espacios de funciones de Orlicz.

Sin embargo, también vamos a poder obtener estabilidad de la clm-FPP a través de coeficientes geométricos estudiados en el Capítulo 2. En efecto, cuando la función de Orlicz Φ y su complementaria Φ^* verifican ambas la condición Δ_2, el espacio $L_\Phi(\mu)$ verifica la propiedad (A_{clm}). Por tanto, serán aplicables los resultados de estabilidad obtenidos mediante el uso del Lema de Goebel-Karlovitz. En esta línea, si consideramos $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Luxemburg, vamos a encontrar una cota inferior del coeficiente $M_{clm}(L_\Phi(\mu))$ que coincide con el valor exacto de $M_{clm}(L_p(\mu))$ cuando la función de Orlicz es de la forma $|x|^p$ para algún $p > 1$.

Cuando μ es la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$, encontramos cotas de estabilidad desconocidas hasta ahora de la w-FPP en los espacios de Orlicz de sucesiones l_Φ.

CAPITULO 1

Preliminares

En este primer capítulo exponemos algunas definiciones y resultados conocidos sobre la teoría del punto fijo para aplicaciones no-expansivas. Aunque a lo largo de los últimos años han aparecido gran cantidad de trabajos en este campo, nosotros sólo haremos mención de aquellos resultados relacionados con el tema de esta Memoria. Sin embargo, intentaremos exponerlos proporcionando simultáneamente al lector una idea de como ha evolucionado la investigación sobre la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas, comenzando con la propiedad de estructura normal del espacio y buscando caminos alternativos cuando el espacio de Banach carece de dicha propiedad.

A lo largo de toda la Memoria, X denotará un espacio de Banach de dimensión infinita con norma $\|\cdot\|$ (siempre que no se especifique otra norma en particular), B_X representará su bola unidad cerrada $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $X^\star$ denotará el dual de X, es decir, el espacio de las formas lineales y continuas sobre X.

La mayoría de los resultados contenidos en este capítulo pueden ser consultados en [GoK1], [ADL].

1.1 Aplicaciones no-expansivas: Teoría general

Definición 1.1 *Sea (C, d) un espacio métrico. Una aplicación $T : C \to C$ se dice no-expansiva si*

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

para todo $x, y \in C$.

Definición 1.2 *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas (FPP), si para todo subconjunto $C \subset X$ convexo, cerrado, acotado y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva, existe punto fijo.*

A continuación introducimos algunos conceptos geométricos que utilizaremos con frecuencia a lo largo de toda la Memoria.

Definición 1.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es τ-secuencialmente semicontinua inferiormente (τ-sec.s.c.i.) si para toda sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a x con respecto a la topología τ se cumple:*

$$f(x) \leq \liminf_n f(x_n).$$

Es conocido que si X es un espacio de Banach y w la topología débil, entonces la función norma $\|\cdot\|$ es w-sec.s.c.i. En efecto, sea $\{x_n\}$ una sucesión en X débilmente convergente a un vector x. Por el Teorema de Hahn-Banach sabemos que existe $x^\star \in X^\star$ con $\|x^\star\|_{X^\star} = 1$ y $x^\star(x) = \|x\|$. Por la convergencia débil se cumple:

$$\|x\| = x^\star(x) = \lim_n x^\star(x_n) \leq \|x^\star\|_{X^\star} \liminf_n \|x_n\| = \liminf_n \|x_n\|.$$

Lo mismo sucede para cualquier topología débil estrella si X es un espacio dual. Denotemos E un espacio predual de X, es decir, $E^\star = X$, y sea $\{x_n\}$ una sucesión en X convergente a un vector x en la topología débil estrella $\sigma(X, E)$. Sea $e \in E$ con $\|e\|_E \leq 1$. Debido a la convergencia en la topología $\sigma(X, E)$ se obtiene:

$$|x(e)| = \lim_n |x_n(e)| \leq \liminf_n \|x_n\| \|e\|_E \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

Como $\|x\| = \sup\{|x(e)| : \|e\|_E \leq 1\}$, finalmente se cumple $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$, y por tanto, la función $\|\cdot\|$ es $w^\star$-sec.s.c.i.

Definición 1.4 *Sea (M, d) un espacio de métrico:*

1) Si M tiene estructura de espacio vectorial y A es un subconjunto de M, se define la envolvente convexa de A como:

$$\operatorname{co}(A) = \left\{ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\, x_i \in A,\, \lambda_i \geq 0,\, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

2) El diámetro de un conjunto A es diam$(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.
3) El radio de Chebyshev de A es definido como:

$$r(A) = \inf\{\sup\{d(x,y) : y \in A\} : x \in A\}.$$

Notaremos $r(A,x) = \sup\{d(x,y) : y \in A\}$.

Definición 1.5 *Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Se definen respectivamente el diámetro asintótico y radio asintótico de $\{x_n\}$ como:*

$$\operatorname{diam}_a(\{x_n\}) = \lim_n \sup_{k,m \geq n} \|x_k - x_m\|,$$

$$r_a(\{x_n\}) = \inf\left\{\limsup_n \|x_n - x\| : x \in \operatorname{co}(\{x_n\})\right\}.$$

Definición 1.6 *Sea A un subconjunto acotado de un espacio de Banach X. Un punto $x \in \operatorname{co}(A)$ se denomina diametral para A si diam$(A) = r(A,x)$. Se dice que un subconjunto convexo A es diametral si todos sus puntos son diametrales.*

El siguiente concepto fue introducido por Brodskii y Milman [BM] en 1948. Posteriormente se descubrió que está fuertemente relacionado con el estudio de existencia de puntos fijos.

Definición 1.7 *Un espacio de Banach X tiene estructura normal (NS) si cada subconjunto $A \subset X$ convexo, cerrado, acotado con diam$(A) > 0$, contiene un punto no diametral, es decir, se cumple $r(A) < \operatorname{diam}(A)$.*

Nótese que si un espacio X tiene estructura normal, para todo subconjunto A convexo, cerrado y acotado, existe un elemento $x \in A$ tal que A está contenido en una bola con centro x y radio menor estrictamente que el diam(A).

El siguiente teorema fue probado por Kirk en 1964 y relaciona la estructura normal con la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas.

Teorema 1.1 [Ki1] *Sea X un espacio de Banach reflexivo con estructura normal. Entonces toda aplicación no-expansiva definida en un subconjunto de X convexo, cerrado, acotado, con imagen en sí mismo, tiene punto fijo.*

Como consecuencia del Teorema de Kirk, todo espacio de Banach reflexivo con estructura normal cumple la FPP.

Asociado a la estructura normal de un espacio de Banach, Bynum [By] definió el coeficiente de estructura normal como:

$$N(X) = \inf\left\{\frac{\operatorname{diam}(A)}{r(A)} : A \subset X, \text{ convexo, cerrado, acotado}\right\}.$$

Obviamente, a partir de la definición, si $N(X) > 1$ entonces X tiene estructura normal. Se dice que un espacio de Banach tiene estructura normal uniforme si $N(X) > 1$. Es conocido que la condición $N(X) > 1$ implica reflexividad del espacio X (ver [M]).

A partir del Teorema de Kirk son muchas las propiedades geométricas estudiadas en un espacio de Banach que implican estructura normal. Veamos a continuación algunas clases de espacios de Banach que tienen estructura normal.

Definición 1.8 *Se dice que un espacio de Banach X es uniformemente convexo, si para cada $\varepsilon \in (0,2]$ existe $\delta > 0$, tal que para todo $x, y \in X$ con $\|x\|, \|y\| \leq 1$ y $\|x-y\| \geq \varepsilon$, se cumple $\|(x+y)/2\| \leq 1-\delta$.*

Asociado a la convexidad uniforme se define el módulo de Clarkson como:

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \epsilon\right\},$$

Trivialmente, X es uniformemente convexo si y sólo si $\delta(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Utilizando la igualdad del paralelogramo dada en los espacios de Hilbert, es fácil comprobar que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

Definición 1.9 *Sea X un espacio de Banach. Para cada $z \in X$ con $\|z\| = 1$ podemos considerar el siguiente módulo de convexidad:*

$$\delta_{X,z}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|, \|y\| \leq 1,\, x - y = tz\,, t \in \mathbb{R}, |t| \geq \epsilon\right\}.$$

Se dice que el espacio X es uniformemente convexo en cada dirección (UCED) si $\delta_{X,z}(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $z \in X$ con $\|z\| = 1$.

De nuevo, se comprueba fácilmente que un espacio de Banach uniformemente convexo es UCED.

Teorema 1.2 [DJS] *Si X es un espacio de Banach UCED entonces X tiene estructura normal.*

El módulo de Clarkson y el coeficiente de estructura normal estan relacionados por la siguiente fórmula:

Teorema 1.3 [By] *Si X es un espacio de Banach entonces:*

$$N(X) \geq (1 - \delta_X(1))^{-1}.$$

Como consecuencia, la condición $\delta_X(1) > 0$ implica reflexividad y estructura normal del espacio de Banach X, y por tanto la FPP.

El ejemplo dado por Kakutani [K] en c_0 pone de manifiesto la existencia de espacios de Banach sin la FPP. Este hecho, junto con la propiedad de que los subconjuntos convexos, cerrados y acotados de un espacio de Banach reflexivo son débilmente compactos, lleva a plantearse la siguiente cuestión: ¿Podemos asegurar la existencia de puntos fijos si exigimos que el dominio de la aplicación no-expansiva sea débil compacto?

Definición 1.10 *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad débil del punto fijo (w-FPP) si para cada subconjunto $C \subset X$ convexo, débil compacto y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva existe punto fijo.*

El ejemplo de Alspach [A] prueba que también existen espacios de Banach sin la w-FPP. Concretamente, en [A] se muestra una aplicación no-expansiva definida en un subconjunto convexo, débil compacto de $L_1([0,1])$, con imagen en sí mismo, y que no tiene puntos fijos.

Definición 1.11 *Se dice que un espacio de Banach tiene estructura normal débil (w-NS) si $r(A) < \operatorname{diam}(A)$, para todo subconjunto A convexo, débil compacto con diam$(A) > 0$.*

Obviamente, si el espacio de Banach X es reflexivo, las propiedades FPP, w-FPP y NS, w-NS son idénticas respectivamente.

Utilizando los razonamientos que aparecen en el Teorema de Kirk [Ki1] es fácil probar que todo espacio de Banach con w-NS cumple la w-FPP.

Asociado a la estructura normal débil del espacio, Bynum [By] definió el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes $WCS(X)$ de la siguiente forma:

$$WCS(X) = \sup\{M \geq 1 : M \cdot r_a(\{x_n\}) \leq \operatorname{diam}_a(\{x_n\})\}$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones $\{x_n\}$ que son débilmente convergentes.

Nótese que $WCS(X) = +\infty$ si el espacio X tiene la propiedad de Schur, es decir, toda sucesión débilmente convergente es convergente en norma. En otro caso, es fácil observar que $WCS(X) \in [1,2]$.

Teorema 1.4 [By] *Si $WCS(X) > 1$ entonces el espacio X tiene w-NS.*

De aquí, que este coeficiente definido por Bynum se conozca también con el nombre de coeficiente de estructura normal débil.

La constante $WCS(X)$ está relacionada con el coeficiente de estructura normal del siguiente modo: $1 \leq N(X) \leq WCS(X)$ [By].

La siguiente expresión equivalente de $WCS(X)$ es probada en el Lema VI.3.8 de [ADL] y permite simplificar su cálculo en la mayoría de los espacios de Banach:

Teorema 1.5 *Sea X un espacio de Banach que no tiene la propiedad de Schur. Entonces:*

$$WCS(X) = \inf\{\tfrac{\lim_{n,m;n\neq m}\|x_n - x_m\|}{\lim\|x_n\|} : w - \lim x_n = 0, \text{ existen los límites } \lim_{n,m;n\neq m}\|x_n - x_m\|, \lim\|x_n\| \text{ y } \lim\|x_n\| \neq 0\}$$

Es de interés hacer notar, que cada sucesión acotada en un espacio métrico contiene una subsucesión $\{x_n\}$ tal que existe $\lim_{n,m;n\neq m} d(x_n, x_m)$ (ver Teorema III.1.5 en [ADL]).

El problema de cararterizar los espacios de Banach que cumplen la w-FPP es un problema abierto en la actualidad. No obstante, en los últimos años se ha desarrollado una extensa teoría intentando encontrar condiciones geométricas sobre el espacio X que aseguren la w-FPP. Enunciamos a continuación algunas propiedades geométricas que implican la w-NS y por tanto, debido al Teorema de Kirk, la w-FPP.

Definición 1.12 *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad generalizada de Gossez Lami-Dozo (GGLD) si cumple:*

$$\liminf \|x_n\| < \limsup_n \limsup_m \|x_n - x_m\|$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ débilmente convergente a cero.

Esta propiedad, como su propio nombre indica, es una generalización de una propiedad que fue definida por Gossez y Lami-Dozo pero exclusivamente para espacios de Banach X con base de Schauder. (Ver definición en [GL1])

Teorema 1.6 [Ji] *Si X es un espacio de Banach con la propiedad GGLD entonces X tiene w-NS, y por tanto, la w-FPP.*

Definición 1.13 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología arbitraria definida sobre X. Se dice que X verifica la condición de Opial con respecto a τ si*

$$\liminf_n \|x_n\| < \liminf_n \|x_n + x\|$$

para todo $x \in X$ y toda sucesión $\{x_n\}$ τ-convergente al vector nulo. En caso de que la desigualdad estricta sea un menor o igual, diremos que X cumple la condición de Opial no estricta con respecto a τ.

Asociado a la topología τ y a la condición de Opial se define el siguiente módulo:

$$r_{X,\tau}(c) = \inf\{\liminf_n \|x_n + x\| - 1\}, \qquad c \geq 0$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los vectores $x \in X$ con $\|x\| \geq c$ y todas las sucesiones τ-convergentes a cero, tal que $\liminf_n \|x_n\| \geq 1$.

Se dice que X verifica la condición τ-uniforme de Opial si $r_{X,\tau}(c) > 0$ para todo $c > 0$. Usando los mismos argumentos que para la topología débil, se prueba que $r_{X,\tau}(\cdot)$ es una función creciente y continua en $[0, +\infty)$. Cuando τ es la topología débil, se dice simplemente que X verifica la condición de Opial, condición de Opial no estricta o condición de Opial uniforme, y el módulo de Opial es denotado por $r_X(\cdot)$.

Teorema 1.7 [GL2] *Si X es un espacio de Banach con la condición de Opial, entonces X tiene estructura normal débil.*

Además, en [LTX] se relacionan el módulo de Opial con el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes por la siguiente fórmula.

Teorema 1.8 *Si X es un espacio de Banach entonces $WCS(X) \geq 1+r_X(1)$.*

Como consecuencia, la condición $r_X(1) > 0$ implica directamente la w-NS del espacio.

Definición 1.14 *Un espacio de Banach X se denomina casi uniformemente convexo (NUC) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta < 1$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de X con $sep(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} > \varepsilon$, entonces $co(\{x_n\}) \cap B(0, 1-\delta) \neq \emptyset$.*

Usando las medidas de no compacidad, se define un módulo de convexidad casi uniforme, al igual que el módulo de Clarkson es definido con respecto a la convexidad uniforme. Recordemos que la medida de no compacidad de Hausdorff y la medida de separación se definen respectivamente como:

$$\chi(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \text{ puede ser recubierto por un número finito de bolas de radio menor que } \varepsilon\},$$

$$\beta(A) = \sup\{r > 0 : \text{ existe una } r\text{-separación infinita en } A\},$$

donde entendemos por r-separación un subconjunto $B \subset A$ tal que $d(x,y) \geq r$ para todo $x, y \in B$, $x \neq y$.

Además, ambas medidas de no compacidad estan relacionadas de forma que $\chi(A) \leq \beta(A) \leq 2\chi(A)$ para todo conjunto $A \subset X$ acotado.

A continuación probamos un lema técnico sobre el cálculo de la medida χ en conjuntos numerables que nos será de gran utilidad en capítulos posteriores:

Lema 1.1 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X tal que X cumple la condición no estricta de Opial con respecto a τ. Si $\{x_n\}$ es una sucesión τ-convergente a un vector x, y existe $\lim \|x_n - x\|$ entonces $\chi(\{x_n\}) = \lim \|x_n - x\|$.*

Prueba:

Denotemos $l = \lim \|x_n - x\|$.

Sea $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| \leq l + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Con lo cual, $\chi(\{x_n\}) \leq l + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario deducimos $\chi(\{x_n\}) \leq l$.

Supongamos que $\chi(\{x_n\}) < l$ y tomemos $\chi(\{x_n\}) < r < l$. Por definición de la medida χ, la sucesión $\{x_n\}$ está contenida en un número finito de bolas con radio menor que r. Entonces existe $y \in X$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $\|x_{n_k} - y\| \leq r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la condición de Opial no estricta se cumple:

$$l = \lim_n \|x_n - x\| \leq \liminf_n \|x_n - y\| \leq \limsup_k \|x_{n_k} - y\| \leq r < l.$$

Por tanto, $\chi(\{x_n\}) = l$.

Definición 1.15 *Sea X un espacio de Banach y ϕ la medida de no compacidad χ ó β. Se define el módulo de no compacidad asociado a ϕ como:*

$$\Delta_{X,\phi}(\varepsilon) = \inf\{1 - \text{dist}(0, A) : A \subset B_X \textit{ convexo }, \phi(A) \geq \varepsilon\}.$$

Es claro que X es NUC si y sólo si $\Delta_\phi(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$, con ϕ la medida de no compacidad de Hausdorff o ϕ la medida de separación. En el caso de que ϕ sea la medida de no compacidad de Hausdorff, la función $\Delta_{X,\chi}(\cdot)$ es continua en el intervalo $[0, 1)$ [B].

En la siguiente definición suponemos que X es un espacio de Banach sin la propiedad de Schur. Recuérdese que esto, en particular, sucede si X es reflexivo.

Definición 1.16 *Se dice que un espacio de Banach X es uniformemente Kadec Klee (UKK) si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de X, débilmente convergente a un vector x y $sep(\{x_n\}) > \varepsilon$, entonces $\|x\| < 1 - \delta$.*

En [Le], [Kh1] esta definición ha sido generalizada para una topología τ de e.v.t. en X menos fina que la topología inducida por la norma y tal que la función norma $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i.

Asociado a la propiedad UKK se considera la siguiente función conocida como módulo de Partington [P]:

$$P_X(\varepsilon) = \inf \{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X, \, w - \lim x_n = x, \, \text{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon\}.$$

Trivialmente, un espacio de Banach X es UKK si y sólo si $P_X(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

El coeficiente $WCS(X)$ es relacionado con el módulo de Partington del siguiente modo:

Teorema 1.9 [DL] *Si X es un espacio de Banach entonces:*

$$WCS(X) \geq \lim_{\varepsilon \to 1^-} \frac{1}{1 - P_X(\varepsilon)} = \frac{1}{1 - P_X(1^-)}.$$

Por tanto, si $P_X(1^-) > 0$, X tiene w-NS.

Huff [Hu] probó que un espacio de Banach X es NUC si y sólo si X es UKK y reflexivo. En [ADL] puede encontrarse otra prueba de esta equivalencia usando módulos de no compacidad. Para ello es probado que, cuando el espacio de Banach es reflexivo, los módulos de no compacidad anteriores pueden ser definidos de forma equivalente como:

$$\Delta_{X,\chi}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X, \; w - \lim_n x_n = x, \; \chi(\{x_n\}) > \varepsilon\}$$

$$\Delta_{X,\beta}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X, \; w - \lim_n x_n = x, \; \text{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon\} = P_X(\varepsilon)$$

Definición 1.17 *Sean X, Y dos espacios de Banach isomorfos. Se define la distancia de Banach-Mazur entre X, Y como:*

$$d(X,Y) = \inf\{ \|U\|\|U^{-1}\| : \; U : X \to Y, \; U \text{ } isomorfismo\}.$$

La teoría de probar que un espacio de Banach X cumple la w-FPP estudiando su proximidad a otro espacio de Banach con dicha propiedad, fue iniciada por Bynum [By] en 1980. Bynum comprobó que el coeficiente de estructura normal $N(X)$ y el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes $WCS(X)$, constituyen una medida de la intensidad con la que un espacio de Banach tiene estructura normal, a partir de las desigualdades

$N(X) \leq d(X,Y)N(Y)$, $WCS(X) \leq d(X,Y)WCS(Y)$ para todo par de espacios de Banach X, Y isomorfos. Como consecuencia, si $d(X,Y) < N(X)$ ó $d(X,Y) < WCS(X)$ el espacio Y tiene NS o w-NS respectivamente. Se sigue inmediatamente que si Y es un espacio de Banach tal que existe otro espacio de Banach X con $d(X,Y) < WCS(X)$ entonces Y cumple la w-FPP. Un resultado análogo se deduce a partir del coeficiente de estructura normal para los espacios de Banach reflexivos y la FPP.

Sin embargo, Bynum mejoró el resultado anterior probando el siguiente teorema:

Teorema 1.10 [By] *Si Y es un espacio de Banach tal que existe otro espacio de Banach X uniformemente convexo con $d(X,Y) \leq WCS(X)$, entonces Y cumple la w-FPP.*

Definición 1.18 *Sean $p \in [1,+\infty)$, $q \in [1,+\infty]$. Se definen los espacios de Bynum $l_{p,q}$ como $l_{p,q} = (l_p, \|\cdot\|_{p,q})$ donde:*

$$\|x\|_{p,q} = \left(\|x^+\|_p^q + \|x^-\|_p^q\right)^{1/q} \quad si\ q \in [1,+\infty),$$

$$\|x\|_{p,\infty} = \max\{\|x^+\|_p, \|x^-\|_p\},$$

los vectores x^+, x^- denotan la parte positiva y la parte negativa del vector x respectivamente y $\|x\|_p$ denota la norma de x en l_p.

Es fácil comprobar que fijado $p \in [1,+\infty)$, los espacios $l_{p,q}$ son isomorfos al espacio l_p para todo $q \in [1,+\infty]$.

El coeficiente $WCS(X)$ ha sido calculado en la mayoría de los espacios de Banach clásicos. Así, a partir del resultado de estabilidad dado por Bynum podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.11 *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones:*

1) $d(X,l_p) \leq 2^{1/p}$ para algún $p \in (1,+\infty)$;

2) $d(X,l_{p,q}) < \min\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}$ para $p > 1, q \geq 1$;

3) existe un espacio de medida σ-finito y $p \in (1,+\infty)$ tal que

$$d(X, L_p(\mu)) \leq \min\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\};$$

entonces X cumple la FPP.

El teorema anterior es inmediato a partir del resultado de Bynum y de los valores de los siguientes coeficientes: $WCS(l_p) = 2^{1/p}$ [By], $WCS(l_{p,q}) = \min\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}$ [DLX], $N(L_p(\mu)) = \min\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ si μ es una medida σ-finita [D1], [Pr]. En [D1] se prueba además que si $p \geq 2$ ó μ no es una medida puramente atómica, entonces $WCS(L_p(\mu)) = N(L_p(\mu))$.

Hasta ahora, hemos derivado la propiedad del punto a fijo a través de la estructura normal del espacio. Sin embargo, si consideramos los espacios de Bynum $l_{p,\infty}$, encontramos una clase de espacios de Banach reflexivos sin estructura normal. De hecho, a partir de la sucesión básica, se puede comprobar $WCS(l_{p,\infty}) = 1$ para todo $p \in (1, +\infty)$. En cambio, $d(l_p, l_{p,\infty}) = 2^{1/p} = WCS(l_p)$. Aplicando el resultado de estabilidad de Bynum enunciado anteriomente, deducimos que los espacios $l_{p,\infty}$ sí cumplen la FPP. Como consecuencia, ni la estructura normal, ni la condición $WCS(X) > 1$, caracterizan los espacios de Banach con la propiedad del punto fijo.

Este hecho sugiere la búsqueda de nuevas condiciones geométricas independientes de la estructura normal del espacio, que permitan asegurar la propiedad del punto fijo. En este sentido, algunos autores han definido nuevos coeficientes geométricos para un espacio de Banach X, que no sólo prueban que el espacio cumple la w-FPP, sino que constituyen una medida para cuantificar el grado de "intensidad" con el que X verifica la w-FPP, y por tanto, pueden ser aplicados al estudio de la estabilidad de la propiedad débil del punto fijo.

El instrumento principal en el que se basa esta nueva línea de investigación es el Lema de Goebel-Karlovitz. Para enunciar y comprender este nuevo resultado necesitamos conocer previamente algunas definiciones:

Definición 1.19 *Sea C un subconjunto de un espacio de Banach X y $T : C \to C$ una aplicación. Una sucesión $\{x_n\} \subset C$ es llamada sucesión de puntos fijos aproximados (a.f.p.s.) si* $\lim \|Tx_n - x_n\| = 0$.

En el caso de que el subconjunto C sea convexo, cerrado, acotado y $T : C \to C$ sea una aplicación no-expansiva, siempre existe una sucesión de puntos fijos aproximados en C. En efecto, fijado $x_0 \in C$, definimos las aplicaciones $T_n : C \to C$ como

$$T_n x = \frac{1}{n}x_0 + (1 - \frac{1}{n})Tx$$

para todo $x \in C$. Es muy fácil comprobar que T_n es una aplicación contractiva. Aplicando el Teorema de Punto Fijo de Banach, existe $x_n \in C$ tal que $T_n x_n = x_n$. Esta condición implica que $\|Tx_n - x_n\| \leq \mathrm{diam}(C)/n$ y por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos fijos aproximados en C.

Supongamos que X un espacio de Banach, $C \subset X$ un subconjunto convexo, débil compacto y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Si T no tiene puntos fijos, usando el Lema de Zörn y la débil compacidad del conjunto C, es fácil probar que existe $K \subset C$ convexo, débil compacto con $\mathrm{diam}(K) > 0$, tal que $T(K) \subset K$ y K es minimal, en el sentido de que no existe ningún subconjunto propio de K convexo, débil compacto e invariante por la acción de T. Como consecuencia, si X es un espacio de Banach que no verifica la w-FPP, siempre podemos suponer que existe K convexo, débil compacto, invariante con respecto a alguna aplicación no-expansiva T, minimal y con $\mathrm{diam}(K) > 0$.

Lema 1.2 Lema de Goebel-Karlovitz ([Go], [Kr2]):
Sea X un espacio de Banach, K un subconjunto de X convexo, débil compacto, minimal invariante con respecto a alguna aplicación no-expansiva T y con diam$(K) > 0$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos fijos aproximados entonces:

$$\lim \|x_n - x\| = \mathrm{diam}(K)$$

para todo $x \in K$.

Para más detalles sobre el Lema de Goebel-Karlovitz ver por ejemplo [GoK1], [ADL].

A partir del Lema de Goebel-Karlovitz han surgido numerosos resultados positivos en la teoría del punto fijo que no hacen uso de la estructura normal de un espacio de Banach.

En 1991, García-Falset [G1] definió el siguiente coeficiente geométrico:

$$R(X) = \sup\{\liminf \|x_n + x\| : \|x_n\| \leq 1, \|x\| \leq 1,\ w - \lim x_n = 0\}$$

y probó que la condición $R(X) < 2$ implica w-FPP para un espacio de Banach X [G2].

Si consideramos el espacio de Banach c_0 es fácil comprobar, usando de nuevo la sucesión básica, que $WCS(c_0) = 1$. En cambio, se prueba en [G1] que $R(c_0) = 1$ y por tanto que c_0 tiene la w-FPP.

Como aplicación al problema de la estabilidad de la propiedad débil del punto fijo, es probado que si Y es un espacio de Banach tal que existe otro espacio de Banach X con $d(X,Y) < 2/R(X)$ entonces Y cumple la w-FPP. Como ejemplo, podemos afirmar que todo espacio de Banach Y con $d(Y, c_0) < 2$ cumple la w-FPP.

Posteriormente, en 1996, Domínguez Benavides [D2] definió un nuevo coeficiente geométrico para un espacio de Banach X, que mejora los resultados de punto fijo para aplicaciones no-expansivas derivados del coeficiente de Bynum $WCS(X)$ y del coeficiente $R(X)$.

Definición 1.20 *Sea X un espacio de Banach y a un número real no negativo. Se define*

$$R(a,X) = \sup\{\liminf \|x_n + x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ w - \lim x_n = 0,\ \|x\| \leq a,$$

$$\textit{existe} \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| \leq 1\}.$$

El coeficiente $M(X)$ es definido como:

$$M(X) = \sup\left\{\frac{1+a}{R(a,X)} : a \geq 0\right\}.$$

Teorema 1.12 [D2] *Si X es un espacio de Banach con $M(X) > 1$, entonces X tiene la w-FPP.*

Si Y es un espacio de Banach tal que existe otro espacio X con $d(X,Y) < M(X)$, entonces Y cumple también la w-FPP.

A partir de las definiciones se comprueba que $R(0,X) = 1/WCS(X)$ y $R(1,X) \leq R(X)$. Por tanto $M(X) \geq WCS(X)$ y $M(X) \geq 2/R(X)$. Además las desigualdades anteriores pueden ser desigualdades estrictas en algunos espacios [D2].

Teorema 1.13 [D2] *Para cada $p \in (1, +\infty)$ se obtiene*

$$M(l_p) = \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

En particular $M(l_2) = \sqrt{3}$ *. Como consecuencia, si* $d(X, l_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ *para algún* $p \in (1, +\infty)$*, entonces* X *cumple la* w*-FPP.*

Otra propiedad que implica la propiedad débil del punto fijo y que proporciona resultados de estabilidad es la siguiente:

Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una sucesión en X débilmente convergente a cero. Definimos la función tipo w-nula asociada a la sucesión $\{x_n\}$ como la función:

$$\Gamma_{\{x_n\}}(x) = \limsup \|x_n - x\|$$

para todo $x \in X$.

Nótese que las funciones tipo w-nulas son w-sec.s.c.i. Para ello basta comprobar que el conjunto $\Gamma^{-1}_{\{x_n\}}((-\infty, a])$ es débil cerrado para cada $a \in \mathbb{R}$, y esto se debe a que dicho conjunto es convexo y cerrado en norma. En efecto, si $\{y_k\}$ es una sucesión débilmente convergente a un vector y, para cada $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_{\{x_n\}}(y) - \epsilon < \Gamma_{\{x_n\}}(y_k)$ para todo $k \geq k_0$, ya que el conjunto $\Gamma^{-1}_{\{x_n\}}\left((\Gamma_{\{x_n\}}(y) - \epsilon, +\infty)\right)$ es un entorno de y en la topología débil. Como consecuencia $\Gamma_{\{x_n\}}(y) \leq \liminf_k \Gamma_{\{x_n\}}(y_k)$.

Definición 1.21 [Ka] *Se dice que un espacio de Banach* X *cumple la propiedad* M *de Kalton si las funciones tipo* w*-nulas son constantes por esferas, es decir,*

$$\Gamma_{\{x_n\}}(x) = \Gamma_{\{x_n\}}(y)$$

si $\|x\| = \|y\|$.

Teorema 1.14 [GS]

Sea X *un espacio de Banach con la propiedad* M *de Kalton. Si* Y *es otro espacio de Banach tal que*

$$d(X, Y) < \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

entonces Y *tiene la* w*-FPP. En particular, si* X *es un espacio de Banach con la propiedad* M *de Kalton,* X *cumple la* w*-FPP.*

Cuando el espacio de Banach X es un dual, también podemos considerar en X la topología débil estrella y podríamos plantearnos la cuestión de que si toda aplicación definida en un subconjunto convexo, débil estrella compacto tiene punto fijo.

Definición 1.22 *Sea X un espacio de Banach dual. Se dice que X tiene la propiedad débil estrella del punto fijo ($w^\star$-FPP), si toda aplicación no-expansiva definida en un subconjunto convexo, débil estrella compacto, con imagen en sí mismo, tiene punto fijo.*

La propiedad débil estrella del punto fijo depende del espacio predual que estemos considerando. En efecto, el espacio l_1 tiene la $w^\star$-FPP cuando consideramos como predual el espacio c_0, definido como las sucesiones de números reales que convergen a cero [Kr1]. Sin embargo, comprobemos con el siguiente ejemplo que si consideramos como predual de l_1 el espacio c de las sucesiones de números reales convergentes y la correspondiente topología débil estrella $\sigma(l_1, c)$, ahora el espacio l_1 no cumple la $w^\star$-FPP.

Ejemplo 1.1 Consideremos l_1 y la topología débil estrella $\sigma(l_1, c)$.

Definimos el siguiente subconjunto:

$$C = \left\{ x = \{x(n)\}_n \in l_1 : \sum_n x(n) = 1,\ x(n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Trivialmente el conjunto C es convexo y está contenido en la bola unidad de l_1 la cual es débil estrella compacta. Además, si consideramos como formas lineales en l_1 los siguientes vectores de c: $e_n = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ ($n \in \mathbb{N}$), con el valor 1 en la componente enésima, $e_0 = (1, 1, 1, \cdots)$; el conjunto C puede ser expresado de la forma $C = \cap_n E_n \cap A$ donde

$$E_n = \{x = \{x(n)\}_n \in l_1 : x(n) \geq 0\} = e_n^{-1}[0, +\infty),$$

$$A = \left\{ x = \{x(n)\}_n : \sum_n x(n) = 1 \right\} = e_0^{-1}\{1\}.$$

Como consecuencia, C es cerrado para la topología $\sigma(l_1, c)$ y por tanto es débil estrella compacto. Finalmente, la aplicación $T : C \to C$ dada por $T(x) = (0, x(1), x(2), \cdots)$ es no-expansiva y no tiene puntos fijos en C.

Observar que en la construcción de este ejemplo es fundamental poder asegurar que el conjunto A es $\sigma(l_1, c)$-cerrado y esto se debe a que el vector $e_0 \in c$.

En lo siguiente, siempre que hablemos de la topología débil estrella en l_1 nos estaremos refiriendo a la topología $\sigma(l_1, c_0)$, correspondiente a la dualidad con el espacio c_0.

Como para cualquier espacio de Banach dual, la topología débil estrella es menos fina que la topología débil, es evidente que la $w^\star$-FPP implica la w-FPP y que en el caso de que el espacio de Banach sea reflexivo ambas propiedades coinciden. Sin embargo el recíproco es falso.

Por otra parte, es conocido que si X es un espacio de Banach tal que $d(X, l_1) < 2$ entonces X tiene la $w^\star$-FPP [S]. Veamos con un ejemplo que la cota anterior es la máxima cota posible de estabilidad de la propiedad débil estrella del punto fijo para el espacio l_1:

Ejemplo 1.2 [Lm]

Consideremos el espacio de Bynum $l_{1,\infty}$, es decir, el espacio l_1 con la norma equivalente

$$\|x\|_{1,\infty} = \max\{\|x^+\|_1, \|x^-\|_1\}.$$

Es fácil probar que $\|x\|_{1,\infty} \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_{1,\infty}$ para todo $x \in l_1$, por tanto $d(l_1, l_{1,\infty}) = 2$.

Definimos el siguiente subconjunto de l_1:

$$K = \left\{ x = \{x(k)\}_{k\geq 1} \in l_1 : x(k) \geq 0, \sum_{k\geq 1} x(k) \leq 1 \right\}.$$

K es convexo y puede ser expresado como la intersección entre la bola unidad de l_1 y el conjunto débil estrella cerrado $\{x \in l_1 : x(k) \geq 0\}$. Como la bola unidad de l_1 es débil estrella compacta entonces K es débil estrella compacto.

Sea $T : K \to K$ la siguiente aplicación:

$$Tx = \left(1 - \sum_{k\geq 1} x(k), x(1), x(2), \cdots, x(k), \cdots \right)$$

para todo $x \in K$. Es un simple cálculo comprobar que la aplicación T está bien definida y $\|Tx - Ty\|_{1,\infty} = \|x - y\|_{1,\infty}$ para todo $x, y \in K$. Como consecuencia T es no-expansiva en $l_{1,\infty}$. Sin embargo, fácilmente se comprueba que T no tiene puntos fijos en K.

De esta forma encontramos un espacio de Banach con distancia de Banach-Mazur a l_1 igual a 2 pero sin la $w^\star$-FPP.

Por otro lado, al ser $l_{1,\infty}$ isomorfo al espacio l_1, $l_{1,\infty}$ tiene la propiedad de Schur y por tanto sí cumple la w-FPP. El hecho de que el espacio de Banach l_1 sí cumpla la $w^\star$-FPP implica que la $w^\star$-FPP no se conserva al pasar a normas equivalentes.

Siguiendo un desarrollo similar al efectuado con la topología débil y la w-FPP se puede enunciar la siguiente definición:

Definición 1.23 *Se dice que un espacio de Banach dual X tiene estructura normal débil estrella ($w^\star$-NS) si $r(A) < \mathrm{diam}(A)$ para todo subconjunto A convexo, débil estrella compacto con diam$(A) > 0$.*

Una ligera modificación del Teorema de Kirk [Ki1] prueba que la $w^\star$-NS implica la $w^\star$-FPP.

Sin embargo, el hecho de que los subconjuntos convexos y cerrados en norma no sean débilmente estrella cerrados, propiedad que sí se cumple para la topología débil, hace que trabajar con la topología débil estrella resulte un proceso más complicado. Ni siquiera se sabe si un resultado similar al Lema de Goebel-Karlovitz es cierto en este marco. Como consecuencia, son pocos los resultados positivos de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas definidas en subconjuntos convexos y débil estrella compactos.

También ha sido estudiada la existencia de puntos fijos de aplicaciones no-expansivas con dominios contenidos en espacios métricos.

Definición 1.24 *Sea (M,d) un espacio métrico y S una familia de subconjuntos de M. Se dice que S es normal si $r(A) < \mathrm{diam}(A)$ para cada $A \in S$ con diam$(A) > 0$. Se dice que la familia S es numerablemente compacta si cada subfamilia numerable de S con la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.*

El siguiente teorema fue probado por Kirk [Ki2] en 1981 y muestra condiciones suficientes para que una aplicación no-expansiva definida en un espacio métrico acotado tenga punto fijo.

Teorema 1.15 *Sea (M,d) un espacio métrico acotado y supongamos que M tiene una clase S de subconjuntos numerablemente compacta, estable por* *intersecciones arbitrarias y normal. Supongamos además que S contiene las bolas cerradas de M. Entonces cada aplicación no-expansiva $T : M \to M$ tiene punto fijo.*

1.2 Aplicaciones uniformemente Lipschitzianas

A continuación introducimos un concepto más general que incluye como caso particular las aplicaciones no-expansivas.

Definición 1.25 *Sea (X, d) un espacio métrico y C un subconjunto de X. Una aplicación $T : C \to C$ se denomina uniformemente Lipschitziana si existe una constante k tal que*

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in C$, $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que si T es una aplicación no-expansiva, para todo $n \in \mathbb{N}$ las iteradas T^n son también aplicaciones no-expansivas. Por tanto una aplicación no-expansiva es uniformemente Lipschitziana con constante $k = 1$.

El estudio de las aplicaciones uniformemente Lipschitzianas puede ser aplicado al estudio de la estabilidad de la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas. En efecto, sean X, Y dos espacios de Banach isomorfos y $f : X \to Y$ un isomorfismo entre ellos. Sea C un subconjunto de Y y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva para la norma de Y. Entonces la aplicación $f^{-1} \circ T \circ f : f^{-1}(C) \subset X \to f^{-1}(C)$ es uniformemente Lipschitziana en X con constante $\|f^{-1}\|\|f\|$. En efecto, si $x, y \in f^{-1}(C)$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{-1} \circ T^n \circ f(x) - f^{-1} \circ T^n \circ f(y)\| \leq \|f^{-1}\|\|T^n \circ f(x) - T^n \circ f(y)\| \leq$$

$$\|f^{-1}\|\|f(x) - f(y)\| \leq \|f^{-1}\|\|f\|\|x - y\|.$$

De aquí se deduce que si X es un espacio de Banach tal que para todo subconjunto C convexo, cerrado, acotado y para toda aplicación $T : C \to C$ k-uniformemente Lipschitziana existe punto fijo, entonces un espacio Y tiene la FPP si $d(X, Y) < k$.

Recíprocamente, puede ser probado que si T es uniformemente Lipschitziana, T es no-expansiva con respecto a una métrica equivalente ([GoK1] pág.170). Así, el problema de la estabilidad de la propiedad del punto fijo para isomorfismos o renormas equivalentes conduce al estudio de existencia de puntos fijos para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas.

Sin embargo, ambos problemas no son equivalentes. Lifshitz [Li] dio un ejemplo de una aplicación uniformemente Lipschitziana con constante $k = \frac{\pi}{2}$, definida en un subconjunto C convexo, cerrado y acotado de l_2, con imagen en C y sin puntos fijos. Como consecuencia, no puede deducirse para los espacios de Hilbert, una cota de estabilidad de la FPP mayor que $\frac{\pi}{2}$ a través de teoremas de punto fijo para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas. No obstante, por el Teorema 1.13, si X es un espacio de Banach isomorfo a l_2 y $d(X, l_2) < \sqrt{3}$, entonces X tiene la FPP.

El estudio de la teoría del punto fijo para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas fue iniciado en 1973 por Goebel y Kirk [GoK2] quienes probaron el siguiente resultado:

Teorema 1.16 *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo con módulo de convexidad $\delta_X(\cdot)$ y C un subconjunto de X convexo, cerrado y acotado. Si $T : C \to C$ es una aplicación uniformemente Lipschitziana con constante k menor que la única solución de la ecuación:*

$$h\left(1 - \delta_X\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 1$$

entonces T tiene punto fijo.

Dos años más tarde, Lifshitz [Li] introdujo la siguiente constante:

Definición 1.26 *Sea (M, ρ) un espacio métrico. Se define la característica de Lifshitz $\kappa(M)$ como:*

$$\kappa(M) = \sup\{b > 0 : \exists a > 1 \textit{ tal que } \forall x, y \in M, \forall r > 0, \rho(x,y) > r,$$

$$\exists z \in M \textit{ con } B(x, br) \cap B(y, ar) \subset B(z, r)\}$$

Aquí, $B(x, r)$ denota la bola cerrada centrada en x y de radio r.

Es claro que $\kappa(M) \geq 1$. En [Li] es probado el siguiente teorema:

Teorema 1.17 *Si (M,ρ) es un espacio métrico, acotado, completo y $T: M \to M$ es uniformemente Lipschitziana con constante $k < \kappa(M)$, entonces T tiene punto fijo.*

Para un espacio de Banach X se define la constante de Lifshitz como

$$\kappa_0(X) = \inf\{\kappa(M) : M \subset X \text{ convexo, cerrado, acotado }\}$$

Como consecuencia, si X es un espacio de Banach, $C \subset X$ un subconjunto convexo, cerrado, acotado y $T : C \to C$ una aplicación uniformemente Lipschitziana con constante $k < \kappa_0(X)$, entonces T tiene punto fijo.

En [DwT] es probado que si X es un espacio de Banach y h la solución de la ecuación $h\,(1 - \delta_X(1/h)) = 1$ entonces $h \leq \kappa_0(X)$.

Si enfocamos el resultado anterior desde el punto de vista de la estabilidad de la propiedad del punto fijo, podemos concluir que un espacio de Banach Y tiene la propiedad del punto fijo si existe otro espacio de Banach X con $d(X,Y) < \kappa_0(X)$.

Definición 1.27 [BrP] *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto de X. Una aplicación $T : C \to C$ se denomina asintóticamente regular si*

$$\lim_n \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0$$

para todo $x \in C$.

Teorema 1.18 [I] *Sea C un subconjunto convexo de un espacio de Banach X. Si $T : C \to C$ es una aplicación no-expansiva, para cualquier $\lambda \in (0,1)$ la aplicación:*

$$\lambda I + (1-\lambda)T : C \to C, \qquad x \to \lambda x + (1-\lambda)Tx$$

es asintóticamente regular, además de ser no-expansiva.

Trivialmente, el conjunto de puntos fijos de las aplicaciones T y $\lambda I + (1-\lambda)T$ coinciden. Así, por el Teorema 1.18, el problema de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas es equivalente al mismo problema si consideramos que la aplicación T es a la vez no-expansiva y asintóticamente regular.

Obsérvese que el concepto de regularidad asintótica es un invariante al renormar el espacio con una norma equivalente.

CAPITULO 2

Constantes geométricas relacionadas con la estabilidad de la τ-FPP

Comenzaremos este capítulo definiendo qué entendemos por propiedad del punto fijo con respecto a una topología τ sobre X. Aunque la definición no será una extensión directa del concepto usual de propiedad del punto fijo, comprobaremos que cuando τ es la topología débil, o en el caso de que X sea un espacio de Banach con predual separable y τ la topología débil estrella, la definición dada es equivalente a la w-FPP y a la w^*-FPP respectivamente. Puede observarse que nuestra definición engloba también otros conceptos de propiedad del punto fijo estudiados en [Be], [LT], [Le], [Kh1], [KhT].

Con idea de extender el Teorema de Kirk [Ki1] a topologías distintas a las usuales, damos una definición de estructura normal con respecto a una topología τ en X, coherente con las definiciones de w-NS y w^*-NS.

Definimos también la propiedad τ-GGLD y comprobaremos que bajo ciertas condiciones de regularidad para la topología τ, la propiedad τ-GGLD implica la τ-NS y ésta la τ-FPP.

Además, en la sección primera generalizamos la definición del coeficiente de sucesiones débilmente convergentes $WCS(X)$ dado por Bynum, definiendo el coeficiente $\tau CS(X)$. Para ello, usaremos una definición equivalente de $WCS(X)$, comprobando que no es conveniente hacer una extensión según la definición original. Probaremos que $\tau CS(X) > 1$ implica la τ-FPP y que el coeficiente $\tau CS(X)$ produce estabilidad de la τ-FPP en el mismo sentido que $WCS(X)$ con la topología débil. Algunas hipótesis adicionales sobre la topología τ serán necesarias.

Como aplicación estudiaremos el caso de $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida.

En la sección segunda definiremos otros coeficientes geométricos y su estudiaremos su relacción con $\tau CS(X)$.

En la sección tercera vamos a generalizar el Lema de Goebel-Karlovitz para τ una topología sobre X tal que las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. y los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. Estudiaremos además condiciones suficientes para que una topología τ definida sobre X verifique tales propiedades. Como consecuencia generalizaremos también un resultado de [LlJ] que nos será de gran utilidad para obtener resultados positivos de estabilidad de la τ-FPP a partir del Lema de Goebel-Karlovitz.

Por último, en la sección cuarta, definiremos el coeficiente $M_\tau(X)$ inspirado en [D2] y veremos como dicho coeficiente proporciona cotas de estabilidad de la τ-FPP. En particular, para $L_p(\mu)$ con $p > 1$ y la topología de la convergencia local en medida, obtendremos las mismas cotas de estabilidad de la *clm*-FPP, que las dadas para el espacio l_p y la topología débil a través del coeficiente $M(X)$ [D2].

Definiremos también un nuevo coeficiente geométrico $\lambda_\tau(X)$, no considerado hasta ahora, y veremos con un ejemplo como los resultados sobre la τ-FPP conseguidos a través de $\lambda_\tau(X)$ mejoran el Teorema 5 en [By] y Teorema 3 en [G1] cuando τ es la topología débil. Comprobaremos que las cotas de estabilidad de la τ-FPP conseguidas mediante el uso de $\lambda_\tau(X)$ generalizan las dadas en [GS] para la topología débil. Finalmente daremos algunos ejemplos donde pueden ser aplicadas.

2.1 Propiedad del punto fijo y estructura normal respecto a una topología τ

Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto de X. A lo largo de la Memoria, cuando digamos que C es acotado o cerrado, siempre nos estaremos refiriendo a los conceptos de acotación en norma y cierre en la topología inducida por la norma.

Definición 2.1 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología arbitraria sobre X. Diremos que X tiene la propiedad del punto fijo con respecto a la topología τ (τ-FPP), si para cada subconjunto $C \subset X$ no vacío, convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva existe un punto fijo.*

Definición 2.2 *Diremos que un espacio de Banach X tiene estructura normal con respecto a una topología τ (τ-NS), si para cada subconjunto C convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto con diam(C) > 0 existe $x \in C$ no diametral, es decir,* $\sup\{\|x - y\| : y \in C\} < diam(C)$.

Debido al Teorema de Eberlein-Simulian, que prueba la equivalencia entre débil compacidad y débil secuencial compacidad, es claro que para todo espacio de Banach las Definiciones 2.1 y 2.2 son análogas a las definiciones de propiedad débil del punto fijo (w-FPP) y estructura normal débil (w-NS) si sustituimos la topología τ por la topología débil del espacio.

Cuando X es un espacio de Banach cuyo predual es separable también las definiciones dadas coinciden con la $w^\star$-FPP y la $w^\star$-NS respectivamente. En efecto, tanto la $w^\star$-compacidad como la $w^\star$-secuencial compacidad implican la acotación del conjunto debido al Teorema de Banach-Steinhaus. Además, en este caso, puede definirse una métrica en la bola unidad cerrada de X compatible con la topología débil estrella. Por tanto, un subconjunto $C \subset X$ es $w^\star$-compacto si y sólo si C es $w^\star$-secuencialmente compacto.

Por otra parte, en los trabajos [Be], [LT], [Le], [Kh1], [KhT] se ha estudiado la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas definidas en dominios más generales. En todos ellos se exigen como hipótesis adicionales la acotación del dominio así como su compacidad secuencial con respecto a una topología concreta.

Teorema 2.1 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X tal que la norma $\|\cdot\|$ es una aplicación τ-sec.s.c.i. Si X tiene τ-NS entonces X satisface la τ-FPP.*

Prueba:

Sea $C \subset X$ no vacío, convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y sea $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Vamos a demostrar que T tiene un punto fijo utilizando el Teorema 1.15.

Denotemos por $\mathcal{S}$ la siguiente familia de subconjuntos de C:

$$\mathcal{S} = \{K \subset C : K \text{ convexo y } \tau\text{-secuencialmente cerrado}\} .$$

Trivialmente $\mathcal{S}$ es estable por intersecciones arbitrarias y por hipótesis, $\mathcal{S}$ es una familia normal. Comprobemos que $\mathcal{S}$ es también una familia numerablemente compacta:

Sea $\{K_n\}_n$ una subfamilia numerable de $\mathcal{S}$ con la propiedad de la intersección finita. Denotemos $A_n = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$. Los conjuntos A_n son no vacíos, convexos, τ-secuencialmente cerrados, $A_{n+1} \subset A_n$ y $\cap_n K_n = \cap_n A_n$. Tomemos $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $\{x_n\}$. Como C es τ-secuencialmente compacto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ τ-convergente a un vector x. Como los conjuntos A_n son τ-secuencialmente cerrados y $A_{n+1} \subset A_n$, necesariamente $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\cap_n K_n \neq \emptyset$.

Por último, la τ-secuencial semicontinuidad inferior de la norma claramente implica que las bolas cerradas de X son τ-secuencialmente cerradas. Así, $\mathcal{S}$ contiene los conjuntos $B \cap C$ para toda bola cerrada B. Finalmente, por el Teorema 1.15, T tiene un punto fijo en C.

Definición 2.3 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X. Diremos que X tiene la propiedad τ-GGLD si:*

$$\lim_n \|x_n\| < \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ que converga al vector nulo en la topología τ y tal que existen los límites $\lim_n \|x_n\|$ y $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|$.

Nota 2.1 Si τ es la topología débil la propiedad τ-GGLD es implicada por la propiedad GGLD la cual implica estructura normal débil [Ji] y por tanto la w-FPP. Nuestro principal objetivo en esta sección es probar un resultado equivalente cuando τ es una topología arbitraria. Es de interés hacer notar que la prueba dada en [Ji] está fuertemente basada en un conocido hecho: los subconjuntos de X convexos y cerrados en norma son débilmente cerrados. Este hecho es falso en general cuando τ es una topología arbitraria sobre X. Por ejemplo, consideremos $X = L_1([0,1])$ y τ la topolología de la convergencia en medida. Recordemos que si $\{f_n\}$ y f son funciones μ-medibles, se dice que $f_n \to f$ en medida si para cada $\delta > 0$ se cumple

$$\lim_n \mu\left(\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}\right) = 0.$$

En el espacio $L_1([0,1])$ la sucesión $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ converge en medida a la función nula, sin embargo, $0 \notin \bar{co}\{f_n\}$ ya que $\|g\|_1 = 1$ para toda $g \in co\{f_n\}$.

Debido a que no podemos utilizar los argumentos habituales cuando τ no es la topología débil, en el siguiente teorema vamos a suponer que el espacio X es separable y de esta forma evitaremos la no equivalencia entre subconjuntos convexos, cerrados y τ-cerrados.

Teorema 2.2 *Sea X un espacio de Banach separable y τ una topología de espacio vectorial topológico (e.v.t.) sobre X. Si X tiene la propiedad τ-GGLD entonces X tiene τ-NS.*

Prueba:

Supongamos que X no tiene τ-NS. Entonces existe un subconjunto C convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto, con $\operatorname{diam}(C) = 1$ y diametral. Veamos que existe una sucesión $\{x_n\} \subset C$ tal que $\lim_n \|x_n - x\| = 1$ para todo $x \in C$:

Sea $\{y_k\}$ una sucesión densa en C. Construiremos por inducción, una sucesión $\{x_n\} \subset C$ tal que $\lim_n \|x_n - y_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $x_1 = y_1$ y supongamos que se han construido $x_2, \ldots, x_{n-1} \in C$ tales que $\|x_m - y_k\| \geq 1 - \frac{1}{m}$ para $k \leq m$, $m = 1, \ldots, n-1$.

Denotemos por b el centro geométrico de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, es decir:

$$b = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$$

Como C es un conjunto diametral existe $x_n \in C$ tal que $\|x_n - b\| \geq 1 - \frac{1}{n^2}$. Entonces si $k \leq n$ se cumple:

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq \|x_n - b\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_n}{n} - \frac{y_i}{n} \right) \right\| \leq$$

$$\frac{1}{n} \|x_n - y_k\| + \sum_{i=1; i \neq k}^{n} \frac{1}{n} \|x_n - y_i\| \leq \frac{1}{n} \|x_n - y_k\| + \frac{n-1}{n},$$

lo cual implica $\|x_n - y_k\| \geq 1 - \frac{1}{n}$ para $k = 1, \ldots, n$.

Como consecuencia, para cada $k \in \mathbb{N}$ se duduce:

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \liminf_n \|x_n - y_k\| \leq \limsup_n \|x_n - y_k\| \leq 1,$$

y por tanto $\{x_n\}$ cumple la condición requerida.

Finalmente, si definimos las funciones $\varphi_1(x) = \liminf_n \|x_n - x\|$, $\varphi_2(x) = \limsup_n \|x_n - x\|$, ambas son continuas y constantes iguales a 1 en un conjunto denso en C. Así, $\lim_n \|x_n - x\| = 1$ para todo $x \in C$.

Ahora bien, C es un subconjunto τ-secuencialmente compacto, por tanto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ y un vector $x \in C$ tal que $\{x_{n_k}\}$ es τ-convergente al vector x. También podemos suponer que existe $\lim_{k,j;k \neq j} \|x_{n_k} - x_{n_j}\|$ (ver Teorema III.1.5. de [ADL]) y debido a la condición que satisface $\{x_n\}$, este límite debe ser igual a 1.

Por último, consideramos la sucesión $y_k = x_{n_k} - x$ la cual converge a 0 en τ por ser τ una topología de e.v.t. sobre X. Además, $\lim_k \|y_k\| = 1$ y $\lim_{k,j;k \neq j} \|y_k - y_j\| = 1$. Este hecho contradice la propiedad τ-GGLD.

Como consecuencia de los Teoremas 2.1 y 2.2 el siguiente resultado es inmediato:

Teorema 2.3 *Sea X es un espacio de Banach separable y τ una topología de e.v.t. sobre X. Si X tiene la propiedad τ-GGLD y la función $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. entonces X tiene la τ-FPP.*

El recíproco del Teorema 2.3 no es cierto en general, incluso cuando τ es la topología débil de X.

Ejemplo 2.1 Sea X el espacio $L_1[0,1]$ e introducimos en X la norma equivalente

$$|||x|||^2 = \|x\|_1^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{2^k}\right)^2$$

donde $x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)e_k$, $\{e_k\}$ es una base de Schauder en $L_1[0,1]$ (por ejemplo, el sistema de Haar) y $\|\cdot\|_1$ es la norma usual de $L_1[0,1]$.

Debido a que $L_1[0,1]$ no tiene la w-FPP por el Teorema 2.3 sabemos que $L_1[0,1]$ no cumple la propiedad w-GGLD. Por tanto, debe existir una sucesión $\{x_n\}$ débilmente nula tal que $\lim_n \|x_n\|_1 = \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|_1$.

Es de fácil comprobación que si $\{x_n\}$ es una sucesión débilmente nula entonces

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k)|}{2^k} = 0.$$

En efecto, como $\{x_n\}$ es débilmente convergente, $\{x_n\}$ es acotada en norma y por tanto, existe $M > 0$ tal que $|x_n(k)| \leq M$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2M}$. Por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$, $1 \leq k \leq k_0$. De esta forma, para $n \geq n_0$ obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k)|}{2^k} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|x_n(k)|}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{|x_n(k)|}{2^k} \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} + M \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Así:

$$\frac{\lim_{n,m;n\neq m} |||x_n - x_m|||^2}{\lim_n |||x_n|||^2} = \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|_1^2}{\lim_n \|x_n\|_1^2} = 1.$$

En cambio, el espacio $(L_1[0,1], |||\cdot|||)$ es UCED (Ver [DGZ], Corolario 6.9, pág. 66) y por tanto, satisface la w-FPP.

Para estudiar la estabilidad de la propiedad del punto fijo referida a la topología débil se define en [By] el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes $WCS(X)$. Para una topología τ arbitraria vamos a definir el siguiente coeficiente:

Definición 2.4 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X. Definimos el coeficiente*

$$\tau CS(X) = \inf \left\{ \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|}{\lim_n \|x_n\|} \right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones acotadas, τ-convergentes a cero, tales que ambos límites existen y $\lim \|x_n\| \neq 0$.

Nótese que el coeficiente $\tau CS(X)$ sólo puede estar definido si el espacio X tiene sucesiones τ-convergentes que no son convergentes en norma. No obstante, veamos que en caso contrario, podemos deducir directamente que X satisface la τ-FPP. En efecto, si toda sucesión τ-convergente es convergente en norma y C es un subconjunto τ-secuencialmente compacto, entonces C es secuencialmente compacto en norma y por tanto compacto. Como una aplicación no-expansiva es continua, aplicando el Teorema de Schauder se deduce que cualquier aplicación $T : C \to C$ no-expansiva tiene punto fijo.

De hecho, en este caso, también puede probarse la existencia de un punto fijo de T sin tener que recurrir al Teorema de Schauder:

Si τ coincide con la topología débil y C es un subconjunto acotado, convexo y w-secuencialmente compacto, C es también cerrado en norma. Lo anterior permite la aplicación del Teorema de Punto Fijo de Banach para aplicaciones contractivas en el conjunto C, para encontrar una sucesión de puntos fijos aproximados (para más detalles ver por ejemplo [GoK1]).

Supongamos ahora que τ es una topología arbitraria sobre X. Ahora el conjunto C no tiene por qué ser cerrado en norma. Sin embargo, al ser T uniformemente continua, es muy fácil comprobar que T puede extenderse de forma no-expansiva a una aplicación $\bar{T} : \bar{C}^{\|\cdot\|} \to \bar{C}^{\|\cdot\|}$ tal que $\bar{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in C$.

Por tanto, sigue siendo cierto que existe una sucesión de puntos fijos aproximados $\{x_n\}$ en C sin más que aproximar la sucesión de puntos fijos aproximados para $\bar{T}$ por puntos de C. Como C es un subconjunto τ-secuencialmente compacto, además podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que la sucesión $\{x_n\}$ es τ-convergente en C. Si la topología τ verifica que todas las sucesiones τ-convergentes son convergentes en norma y denotamos $x = \lim x_n$, necesariamente x es un punto fijo de T en C.

Así, siempre podemos suponer que el espacio X tiene sucesiones τ-convergentes que no lo son en norma y que dado un subconjunto C convexo, acotado, τ secuencialmente compacto y una aplicación no-expansiva $T : C \to C$, siempre podemos encontrar una sucesión $\{x_n\} \subset C$ de puntos fijos aproximados para T, es decir, cumpliendo $\lim \|T(x_n) - x_n\| = 0$. La existencia de una sucesión con tales características nos será de gran utilidad en las secciones 3 y 4.

Teniendo en cuenta la definición del coeficiente $\tau CS(X)$, el siguiente resultado es evidente a partir del Teorema 2.3.

Teorema 2.4 *Sea X un espacio de Banach separable y τ una topología de e.v.t. sobre X tal que la norma es τ-sec.s.c.i. Si $\tau CS(X) > 1$ entonces X tiene la τ-FPP.*

Nota 2.2 En el caso de que τ sea la topología débil el coeficiente $\tau CS(X)$ coincide con el coeficiente de sucesiones débilmente convergentes $WCS(X)$ (ver [ADL], pág. 120). Sin embargo, al extender la definición de $WCS(X)$ a una topología arbitraria parece más conveniente usar la Definición 2.4 que hacer una extensión directa según la definición original de este coeficiente. En efecto, consideremos $X = L_1[0,1]$ y τ la topología de la convergencia en medida. Tomemos en $L_1[0,1]$ la sucesión $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ que convege en medida a la función nula. Además $\mathrm{diam}_a(\{f_n\}) = 2$ ya que $\|f_n - f_m\| = 2 - 2\frac{m}{n}$ para $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. En cambio, sea $f \in \mathrm{co}(\{f_n\})$, i.e.

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k, \ , \ \alpha_k \geq 0 \ , \ k = 1, ..., m \ ; \ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

Si $n > m$ es fácil comprobar que $\|f - f_n\| = 2 - 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \dfrac{k}{n}$. Así, $\limsup_n \|f - f_n\| = 2$ y por tanto $r_a(\{f_n\}) = 2$. Por consiguiente:

$$1 = \inf \left\{ \frac{\mathrm{diam}_a(\{f_n\})}{r_a(\{f_n\})} \right\}$$

cuando $\{f_n\}$ recorre las sucesiones τ-convergentes que no son convergentes en norma. Sin embargo, probaremos más tarde que $\tau CS(L_1[0,1]) = 2$ cuando τ es la topología de la convergencia en medida en $L_1([0,1])$.

En el siguiente teorema veremos que el coeficiente $\tau CS(X)$ produce estabilidad de la τ-FPP en el mismo sentido que $WCS(X)$ cuando τ es la topología débil. Nótese que si X, Y son espacios de Banach isomorfos podemos considerar que Y es el espacio X dotado de una norma equivalente y es de fácil comprobación que $\tau CS(X) \leq d(X,Y)\tau CS(Y)$.

Teorema 2.5 *Sea X un espacio de Banach separable y τ una topología de e.v.t. sobre X. Sea $|\cdot|$ una norma equivalente en X tal que*

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$ y denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Si la función $|\cdot|$ es τ-sec.s.c.i. y $d < \tau CS(X)$ entonces Y cumple la τ-FPP.

Es importante hacer notar que el Teorema 2.5 sólo asegura estabilidad de la τ-FPP para aquellas normas equivalentes que son τ-sec.s.c.i. En el siguiente ejemplo comprobamos que la τ-secuencial semicontinuidad inferior de la norma no se conserva al pasar a normas equivalentes.

Ejemplo 2.2 Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los vectores $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (-a, \sqrt{1-a^2})$ donde $a \in (0,1)$ y definimos $\|(x_1,x_2)\|_e = \|x_1e_1 + x_2e_2\|_2$ donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclidea en $\mathbb{R}^2$.

En el espacio $L_1[0,1]$ definimos la norma $|f| = \|(\int_0^{1/2}|f|, \int_{1/2}^1 |f|)\|_e$. Es fácil probar que esta norma es equivalente a la norma usual de $L_1[0,1]$, de hecho, la distancia de Banach-Mazur entre ambos espacios tiende a $\sqrt{2}$ cuando a se acerca a cero. Consideremos la sucesión $f_n = 2\chi_{[0,1/2]} + an\chi_{[(n-1)/n,1]}$. Esta sucesión tiende a $2\chi_{[0,1/2]}$ en la topología de la convergencia en medida, no obstante, $|f_n| = \|(1,a)\|_e = \sqrt{1-a^2} < 1 = |2\chi_{[0,1/2]}|$, con lo cual, la norma $|\cdot|$ no es secuencialmente semicontinua inferiormente para la topología de la convergencia en medida. Sin embargo, en el Ejemplo 2.3 comprobaremos que la norma usual de $L_1([0,1])$ sí verifica dicha propiedad.

Nota 2.3 En el siguiente capítulo daremos un ejemplo de un espacio de Banach X y una topología τ definida en X (Ejemplo 3.2), tal que la norma $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Sin embargo, el espacio X podrá ser renormado con una norma equivalente $|\cdot|$ tan próxima a la norma original como se quiera, y de forma que esta nueva norma $|\cdot|$ no es τ-sec.s.c.i.

A continuación, dado un espacio de Banach X y una topología τ definida sobre X, vamos a estudiar una condición suficiente para que el espacio verifique que cualquier norma equivalente definida en X sea τ-sec.s.c.i.

Definición 2.5 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X. Diremos que X verifica la propiedad (A_τ) si toda sucesión acotada, τ-convergente es débilmente convergente al mismo límite.*

Lema 2.1 *Si X es un espacio de Banach y τ una topología sobre X tal que X verifica la propiedad (A_τ), entonces cualquier norma equivalente definida en X, incluida la norma original, es τ-sec.s.c.i.*

Prueba:

Denotemos como usualmente $\|\cdot\|$ la norma original de X y sea $\{x_n\}$ una sucesión τ-convergente a un vector x. Si $\liminf_n \|x_n\| = +\infty$ trivialmente se cumple $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$. Por tanto, podemos suponer que $\liminf_n \|x_n\| < +\infty$. Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ acotada tal que $\lim_k \|x_{n_k}\| = \liminf_n \|x_n\|$. Como $\{x_{n_k}\}$ es τ-convergente al vector x y el espacio X verifica la propiedad (A_τ), $\{x_{n_k}\}$ es también débilmente convergente a x. Aplicando que la función $\|\cdot\|$ es w-sec.s.c.i. se cumple

$$\|x\| \leq \lim_k \|x_{n_k}\| = \liminf_n \|x_n\|.$$

Por otra parte, como es evidente que la propiedad (A_τ) se conserva por isomorfismos, cualquier norma equivalente $|\cdot|$ definida en X es también τ-sec.s.c.i.

Consecuentemente, si X verifica la propiedad (A_τ), el Teorema 2.5 es una generalización del Teorema 1 en [By] para topologías distintas a la débil.

Lema 2.2 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y τ una topología de espacio localmente convexo, menos fina que la de la norma y de Hausdorff. Entonces X tiene la propiedad (A_τ).*

Prueba:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, τ-convergente a un vector $x \in X$. Si X es reflexivo podemos extraer una subsucesión $\{y_n\} \subset \{x_n\}$ débilmente convergente. Denotemos y su límite débil.

Supongamos que $x \neq y$. Por hipótesis, podemos encontrar dos subconjuntos U, V convexos, disjuntos, abiertos para la topología τ con $x \in U$, $y \in V$. Aplicando que la sucesión $\{y_n\}$ converge a x en la topología τ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Como U es convexo se cumple que $\mathrm{co}(\{y_n\}_{n\geq n_0}) \subset U$.

Por otra parte, como la sucesión $\{y_n\}$ converge débil a y, $y \in \overline{\mathrm{co}}(\{y_n\}_{n\geq n_0})$, con lo cual debe existir $\{z_k\} \subset \mathrm{co}(\{y_n\}_{n\geq n_0})$ tal que $\lim_k z_k = y$. Sin embargo, este hecho es una contradicción, ya que por ser τ menos fina que la topología inducida por la norma, el conjunto V es abierto en norma y contiene a y, mientras que $z_k \in U$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $x = y$.

Finalmente, como cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ débilmente convergente, tiene al vector x como límite débil , se deduce que toda la sucesión $\{x_n\}$ tiene que converger débilmente a dicho vector.

Como aplicación de los resultados generales sobre la τ-FPP vistos en esta primera sección, vamos a estudiar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita. Para $1 \leq p < +\infty$ consideremos el espacio de Banach separable $L_p(\mu)$ con su norma habitual $\|\cdot\|_p$.

Si $\{\Omega_n\}_1^\infty$ es una partición σ-finita de Ω definimos τ como la topología generada por la distancia:

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \quad \text{para } f,g \in L_p(\mu).$$

Esta topología es conocida como la topología de convergencia local en medida (clm). En el caso de que $\mu(\Omega) < +\infty$ la métrica

$$d(f,g) = \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \quad \text{para } f,g \in L_p(\mu)$$

genera la topología clm y en este caso la clm topología es equivalente a la topología de la convergencia en medida. Este hecho no es cierto en general si $\mu(\Omega) = +\infty$. En efecto, consideremos la medida de Lebesgue en $[0, +\infty)$ y la partición $\cup_{n=1}^{\infty}[n-1, n)$. La sucesión $\{\chi_{[n,n+1)}\}$ converge a la función nula en la clm topología ya que $d(\chi_{[n,n+1)}, 0) = \frac{1}{2^{n+1}}$. En cambio, $\mu(\{x \in [0, +\infty) : |\chi_{[n,n+1)}(x)| \geq \delta\}) = 1$ si $\delta < 1$.

El Lema de Fatou junto con el hecho de que cada sucesión de funciones clm-convergente tiene una subsucesión que converge en casi todo a la misma función límite, implican que la norma $\|\cdot\|_p$ es clm-sec.s.c.i. para todo $p \in [1, +\infty)$. Además de [BL] se deduce que si $\{f_n\}$ es una sucesión en $L_p(\mu)$ clm-convergente a cero y f es otra función en $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, entonces:

$$\limsup_n \|f_n - f\|_p^p = \|f\|_p^p + \limsup_n \|f_n\|_p^p \qquad (\dagger)$$

En primer lugar, vamos a calcular el módulo de Opial de $L_p(\mu)$ con respecto a la clm topología. Veremos que:

$$r_{L_p(\mu),clm}(c) = (c^p + 1)^{1/p} - 1, \qquad p \in [1, +\infty).$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L_p(\mu)$ clm-convergente a la función nula y tal que $\liminf_n \|f_n\|_p \geq 1$. Sea f otra función en $L_p(\mu)$ con $\|f\|_p \geq c$. Tomemos una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ tal que $\lim_k \|f_{n_k} - f\|_p = \liminf_n \|f_n - f\|_p$. Utilizando $(\dagger)$:

$$\liminf_n \|f_n - f\|_p = \lim_k \|f_{n_k} - f\|_p = \left(\|f\|_p^p + \limsup_k \|f_{n_k}\|_p^p \right)^{1/p} \geq (c^p + 1)^{1/p}$$

con lo cual $r_{L_p(\mu),clm}(c) \geq (c^p + 1)^{1/p} - 1$. Si consideramos las funciones $f = a\chi_{\Omega_1}$ y $f_n = b_n \chi_{\Omega_n}$ donde $a^p = c^p/\mu(\Omega_1)$ y $b_n = 1/\mu(\Omega_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ conseguimos la igualdad.

Vamos a calcular ahora el valor del coeficiente $(clm)CS(L_p(\mu))$ para $p \in [1, +\infty)$:

Sea $\{f_n\} \in L_p(\mu)$ una sucesión acotada en norma, clm-convergente a la función nula y tal que existen los límites $\lim_n \|f_n\|_p$, $\lim_{n,m;n\neq m} \|f_n - f_m\|_p$. Supongamos que $\lim_n \|f_n\|_p = 1$ y denotemos $d = \lim_{n,m;n\neq m} \|f_n - f_m\|_p$. Si ε

es un número positivo arbitrario, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \|f_n - f_m\|_p^p - d^p \right| < \varepsilon$ si $n, m > k$. Aplicando (†) a la sucesión $\{f_n\}_{n>k}$ y a la función f_k obtenemos:

$$d^p + \varepsilon \geq \limsup_n \|f_n - f_k\|^p = \|f_k\|_p^p + \limsup_n \|f_n\|_p^p = \|f_k\|_p^p + 1.$$

Tomando límites cuando k tiende a ∞ deducimos $d^p + \varepsilon \geq 2$. Como ε es arbitrario obtenemos $(clm)CS(L_p(\mu)) \geq 2^{1/p}$. Si consideramos la sucesión $f_n = c_n \chi_{\Omega_n}$ con $c_n^p = 1/\mu(\Omega_n)$ deducimos finalmente:

$$(clm)CS(L_p(\mu)) = 2^{1/p} \qquad \text{para } p \in [1, +\infty).$$

Como para $p > 1$ el espacio $L_p(\mu)$ es reflexivo y la topología clm es métrica y menos fina que la de la norma, por el Lema 2.2, $L_p(\mu)$ cumple la propiedad (A_{clm}) (otra prueba de este hecho puede encontrarse en [HS], pág. 207).

Nótese que la propiedad (A_{clm}) implica que cada subconjunto de $L_p(\mu)$ convexo, acotado, clm-secuencialmente compacto es w-compacto. Como consecuencia, podemos deducir directamente que $L_p(\mu)$ tiene la clm-FPP para $1 < p < +\infty$, ya que es un hecho bien conocido que $L_p(\mu)$ tiene la w-FPP para $1 < p < +\infty$.

No obstante, es sabido que $WCS(L_p(\mu)) \geq \min\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ y la igualdad se mantiene si $p > 2$ ó μ no es puramente atómica [D1]. Por tanto, el Teorema 2.5 produce mayor estabilidad de la clm-FPP en $L_p(\mu)$ que la que se consigue para la propiedad débil del punto fijo a través del coeficiente de sucesiones débilmente convergentes que, por otra parte, da la mejor cota de estabilidad conocida para la w-FPP en los espacios $L_p(\mu)$.

En la última sección de este capítulo obtendremos una mejor cota de estabilidad de la clm-FPP en $L_p(\mu)$ que la obtenida a través de $(clm)CS(L_p(\mu))$.

Para $p = 1$ la situación es completamente diferente. Alspach [A] probó que el espacio $L_1([0,1])$ no cumple la w-FPP. En cambio, por el Teorema 2.4, $L_1(\mu)$ sí tiene la clm-FPP. Además, si $|\cdot|$ es una norma equivalente en $L_1(\mu)$ clm-sec.s.c.i., tal que $|f| \leq \|f\|_1 \leq d|f|$ para toda $f \in L_1(\mu)$ con $d < 2$, entonces $Y = (L_1(\mu), |\cdot|)$ cumple también la clm-FPP. Nótese que para poder aplicar el Teorema 2.5 es necesario exigir que la nueva norma equivalente $|\cdot|$ sea clm-sec.s.c.i., ya que $L_1(\mu)$ no cumple la propiedad (A_{clm}) (por ejemplo, la sucesión $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ es clm-convergente a cero pero no converge débil a la función nula). Veremos en el Capítulo 3 que, usando diferentes técnicas, podemos prescindir de esta condición.

Caso particular:

Supongamos el caso particular que $\Omega = \mathbb{N}$ y μ es la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$. En estas condiciones, la *clm* topología en el espacio l_p viene dada por la métrica:

$$d(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x(k)|}{1+|x(k)|}$$

donde x denota el vector $x = \{x(k)\}_{k\geq 1} \subset l_p$, $1 \leq p < +\infty$.

Veamos que para $p > 1$ la *clm* convergencia es equivalente a la convergencia débil para sucesiones acotadas de l_p:

En efecto, sea $\{x_n\} \subset l_p$ una sucesión acotada, *clm*-convergente a cero. Fijado $k \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad:

$$\frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k)|}{1+|x_n(k)|} \leq d(x_n, 0) \to_{n\to\infty} 0.$$

Por tanto, $\lim_n |x_n(k)| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $y = \{y(k)\}_{k\geq 1} \in l_q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, y M una cota superior del conjunto $\{\|x_n\|_p : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y(k)|^q < \varepsilon^q.$$

Como la sucesión $\{x_n\}$ converge a cero coordenada a coordenada, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x_n(k)|^p \leq \varepsilon^p / k_0$ para todo $n \geq n_0$, $1 \leq k \leq k_0$. Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) y(k)\right| \leq \sum_{k=1}^{k_0} |x_n(k)||y(k)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_n(k)||y(k)| \leq$$

$$\|y\|_q \left(\sum_{k=1}^{k_0} |x_n(k)|^p\right)^{1/p} + \|x_n\|_p \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y(k)|^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\|y\|_q \varepsilon + M\varepsilon.$$

Si hacemos tender ε a cero, comprobamos que la sucesión $\{x_n\}$ es débilmente convergente al vector nulo.

Recíprocamente, sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente nula. De nuevo, esta sucesión converge a cero coordenada a coordenada, por tanto:

$$\lim_n \frac{|x_n(k)|}{1+|x_n(k)|} = 0, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|x_n(k)|}{1+|x_n(k)|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } n \geq n_0,\ 1 \leq k \leq k_0.$$

De esta forma, para $n \geq n_0$ obtenemos:

$$d(x_n, 0) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k)|}{1+|x_n(k)|} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k)|}{1+|x_n(k)|} \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Para $p = 1$ la situación es diferente. Comprobemos que en este caso la *clm* convergencia es equivalente a la convergencia débil estrella para las sucesiones acotadas de l_1:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, *clm* convergente a cero, y sea $y \in c_0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que $|y(k)| \leq \varepsilon$ para $k \geq k_0$. Razonando de la misma forma anterior, se prueba que $\lim_n y(x_n) = 0$. El recíproco es análogo al caso $p > 1$, ya que la convergencia débil estrella implica también la convergencia coordenada a coordenada.

Nótese que las equivalencias anteriores sólo son válidas para sucesiones acotadas. Si $p > 1$ la sucesión $x_n = n^{2/q} e_n$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y e_n la sucesión básica, es *clm* convergente a cero ya que

$$d(x_n, 0) = \frac{1}{2^n} \frac{n^{2/q}}{1+n^{2/q}} \to_{n\to\infty} 0.$$

En cambio, si consideramos el vector $y = \{\frac{1}{k^{2/q}}\}_{k\geq 1} \in l_q$ se obtiene $y(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente ocurre para $p = 1$, la sucesión $x_n = ne_n$ y el vector $y = \{\frac{1}{k}\}_k \in c_0$.

Como consecuencia, $w^\star CS(l_1) = 2$ y deducimos que l_1 tiene la $w^\star$-FPP. Además, como cualquier norma es $w^\star$-sec.s.c.i., de lo anterior se deduce un conocido resultado de Soardi [S]: Si X es isomorfo a l_1 y $d(X, l_1) < 2$, entonces X tiene la $w^\star$-FPP.

2.2 Otros coeficientes geométricos y su relación con $\tau CS(X)$

Definición 2.6 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X tal que la función norma es τ-sec.s.c.i. Consideremos χ, β las medidas de no compacidad de Hausdorff y de separación respectivamente. Asociados a cada una de estas medidas definimos los siguientes módulos:*

$$\Delta_{X,\chi,\tau}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \chi(\{x_n\}) > \varepsilon\}$$

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \beta(\{x_n\}) > \varepsilon\}$$

Es conocido que si el espacio de Banach es reflexivo y τ es la topología débil, las definiciones anteriores coinciden con los módulos de no compacidad asociados a las correspondientes medidas de no compacidad. Por otra parte, es un fácil ejercicio comprobar:

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \mathrm{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon\}$$

donde recordemos que $\mathrm{sep}(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$.

El módulo $\Delta_{X,\beta,w}(\cdot)$ es también conocido como módulo de Partington.

Definición 2.7 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología en X. Diremos que X es uniformemente Kadec Klee con respecto a τ (UKK(τ)), si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de X, τ-convergente a un vector x con sep($\{x_n\}$) $> \varepsilon$, entonces $\|x\| < 1 - \delta$.*

Trivialmente X es UKK(τ) si y sólo si $\Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

A continuación vamos a calcular los módulos definidos anteriormente en los espacios $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida:

Ejemplo 2.4 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida como en el Ejemplo 2.3 y consideremos de nuevo τ como la topología de la convergencia local en medida. Denotemos $X = (L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$. En estas condiciones vamos a probar que:

$$\Delta_{X,\beta,clm}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{1/p},$$

$$\Delta_{X,\chi,clm}(\varepsilon) = 1 - (1 - \varepsilon^p)^{1/p},$$

para $1 \leq p < +\infty$.

Calculemos en primer lugar $\Delta_{X,\chi,clm}(\varepsilon)$:

Sea $\{f_n\} \subset L_p(\mu)$ una sucesión *clm*-convergente a la función $f \in L_p(\mu)$. Supongamos que $\|f_n\|_p \leq 1$ y $\chi(\{f_n\}) > \varepsilon$. Tomemos una subsucesión $\{g_n\} \subset \{f_n\}$ tal que existe $\lim_n \|g_n\|_p$ y $\lim_n \|g_n - f\|_p = \limsup_n \|f_n - f\|_p$. Definimos la sucesión $h_n = g_n - f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando (†) a la sucesión $\{h_n\}$ y a la función $-f$ obtenemos:

$$\|f\|_p^p = \lim_n \|h_n + f\|_p^p - \lim_n \|h_n\|_p^p =$$

$$\lim_n \|g_n\|_p^p - \lim_n \|g_n - f\|_p^p \leq 1 - \lim_n \|g_n - f\|_p^p.$$

Notemos $l = \lim_n \|g_n - f\|_p = \limsup_n \|f_n - f\|_p$ y sea $\eta > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_p \leq l + \eta$ para todo $n \geq n_0$ y por tanto $\chi(\{f_n\}) \leq l + \eta$. Como η es arbitrario $\varepsilon < \chi(\{f_n\}) \leq l$. Como consecuencia, $\|f\|_p \leq (1 - \varepsilon^p)^{1/p}$ y

$$\Delta_{X,\chi,clm}(\varepsilon) \leq 1 - (1 - \varepsilon^p)^{1/p}.$$

Para conseguir la igualdad, sea $\eta > \varepsilon$ y consideramos $f = a\chi_{\Omega_1}$ con $a^p = (1 - \eta^p)/\mu(\Omega_1)$ y la sucesión $f_n = f + b_n \chi_{\Omega_n}$ con $b_n^p = \eta^p / \mu(\Omega_n)$ para todo $n \geq 2$ donde $\{\Omega_n\}$ es una partición σ-finita de Ω. Trivialmente se comprueba $\|f_n - f\|_p = \eta$ para todo $n \geq 2$ con lo cual, debido a que el espacio $L_p(\mu)$ cumple la condición *clm*-uniforme de Opial y al Lema 1.1, $\chi(\{f_n\}) = \eta > \varepsilon$. La sucesión $\{f_n\}$ está claramente en la bola unidad de $L_p(\mu)$, $clm-\lim_n f_n = f$ y además $\|f\|_p^p = (1 - \eta^p)$. Como η es cualquier número mayor que ε se deduce la igualdad.

Calculemos ahora $\Delta_{X,\beta,clm}(\varepsilon)$:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión *clm*-convergente a $f \in L_p(\mu)$. Supongamos $\|f_n\|_p \leq 1$ y $\mathrm{sep}(\{f_n\}) > \varepsilon$. Tomemos una subsucesión $\{g_n\} \subset \{f_n\}$ tal que existen los límites $\lim_n \|g_n - f\|_p$, $\lim_n \|g_n\|_p$. Mediante el mismo razonamiento anterior:

$$\|f\|_p^p \leq 1 - \lim_n \|g_n - f\|_p^p.$$

Notemos $l = \lim_n \|g_n - f\|_p$ y fijemos $m \in \mathbb{N}$.

$$\varepsilon^p \leq \limsup_n \|g_n - g_m\|_p^p = \limsup_n \|g_n - f - (g_m - f)\|_p^p$$

Aplicando de nuevo la igualdad (†) a la sucesión $\{g_n - f\}_n$ y al vector $g_m - f$ obtenemos:

$$\varepsilon^p \leq \|g_m - f\|_p^p + \lim_n \|g_n - f\|_p^p.$$

Tomando límite cuando m tiende a infinito deducimos $l \geq \varepsilon/2^{1/p}$. Como consecuencia $\|f\|_p^p \leq (1 - \varepsilon^p/2)^{1/p}$ y

$$\Delta_{X,\beta,clm}(\varepsilon) \leq 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Para conseguir la igualdad, sea $\eta > \varepsilon$ y consideramos la función $f = a\chi_{\Omega_1}$ con $a^p = (1-\eta^p/2)/\mu(\Omega_1)$ y la sucesión $f_n = f + b_n\chi_{\Omega_n}$ con $b_n^p = \eta^p/(2\mu(\Omega_n))$ para todo $n \geq 2$. Evidentemente $clm - \lim_n f_n = f$, $\|f\|_p = 1$, $\|f_n - f_m\|_p = \eta$ y $\|f\|_p = (1 - \eta^p/2)^{1/p}$. Como η es cualquier número real mayor que ε conseguimos la igualdad.

A continuación vamos a estudiar relaciones entre el coeficiente $\tau CS(X)$ y los módulos de Opial, $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ y $\Delta_{X,\chi,\tau}(\cdot)$.

Lema 2.3 *Si X es un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X entonces $\tau CS(X) \geq 1 + r_{X,\tau}(1)$.*

Prueba:

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\tau CS(X)$ existe una sucesión $\{x_n\}$ normalizada, τ-convergente al vector nulo y tal que $l = \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| \leq \tau CS(X) + \varepsilon$. Por otra parte, para m suficientemente grande podemos suponer $\liminf_n \|x_n - x_m\| \leq l + \varepsilon$. Por tanto:

$$1 + r_{X,\tau}(1) \leq \liminf_n \|x_n - x_m\| \leq \tau CS(X) + 2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario obtenemos $1 + r_{X,\tau}(1) \leq \tau CS(X)$.

Lema 2.4 *Si X es un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X entonces*

$$\tau CS(X) \geq \lim_{\varepsilon\to 1^-} \frac{1}{1-\Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon)} = \frac{1}{1-\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)}$$

Prueba:

Sea $\varepsilon < 1$ y $\{x_n\}$ una sucesión τ-convergente a cero tal que existe $\lim_n \|x_n\|$ y $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| = (\varepsilon+1)/2$. Sea $\varepsilon < \eta < (\varepsilon+1)/2$. Podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\eta \leq \|x_n - x_m\| \leq 1$ si $m, n \geq k_0$.

Sea $m \geq k_0$ y consideremos la sucesión $\{y_n\} = \{x_n - x_m\}_{n\geq k_0}$ que es τ-convergente al vector $-x_m$. La sucesión $\{y_n\}$ está además contenida en la bola unidad de X y $\mathrm{sep}(\{y_n\}) \geq \eta > \varepsilon$. Por definición del módulo $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ obtenemos $\|x_m\| \leq 1-\Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon)$. Si hacemos tender m a infinito conseguimos:

$$\frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|}{\lim_n \|x_n\|} \geq \frac{\frac{\varepsilon+1}{2}}{1-\Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon)}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 1^-$ deducimos finalmente la desigualdad deseada.

Nota 2.4 Si X es UKK(τ), por el Lema 2.4 $\tau CS(X) > 1$. Por tanto, si X es separable, τ es una topología de e.v.t. en X tal que la norma es τ-sec.s.c.i. y X es UKK(τ), entonces X verifica la τ-FPP [Le]. Nótese que, por el Teorema 2.4, el resultado anterior es también cierto si simplemente $\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-) > 0$. Aplicando el Lema 2.3, lo mismo es cierto si $r_{X,\tau}(1) > 0$.

Lema 2.5 *Supongamos que X verifica la condición no estricta de Opial con respecto a τ una topología de e.v.t. definida en X. Entonces $\tau CS(X) \geq h_0$ donde*

$$h_0 = \sup\left\{t \geq 1 : \frac{1}{t} + \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{t}\right) \geq 1\right\}.$$

Prueba:

Definimos la función

$$h(t) = \frac{1}{t} + \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{t}\right).$$

Como $\Delta_{X,X,\tau}(\cdot)$ es creciente la función h es estrictamente decreciente. Supongamos por reducción al absurdo que $\tau CS(X) < h_0$. Tomemos $l \in (\tau CS(X), h_0)$ y una sucesión normalizada que converga a cero en la topología τ y tal que $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| \leq l$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $l + 2\varepsilon < h_0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq l + \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Fijemos $k \geq n_0$ y consideremos la sucesión $y_n = (x_k - x_n)/(l + \varepsilon)$ con $n \geq n_0$. Entonces $\{y_n\}$ está contenida en la bola unidad de X, converge al vector $x_k/(l + \varepsilon)$ en la topología τ y además:

$$\left\|y_n - \frac{x_k}{l+\varepsilon}\right\| = \left\|\frac{x_n}{l+\varepsilon}\right\| = \frac{1}{l+\varepsilon} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por la condición de Opial no estricta con respecto a τ y el Lema 1.1 deducimos $\chi(\{y_n\}) = 1/(l + \varepsilon) > 1/(l + 2\varepsilon)$. Por tanto, si denotamos $l' = l + 2\varepsilon$ obtenemos:

$$\frac{1}{l'} < \frac{1}{l+\varepsilon} = \left\|\frac{x_k}{l+\varepsilon}\right\| \leq 1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1}{l+2\varepsilon}\right) = 1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1}{l'}\right).$$

Por consiguiente $h(l') < 1$, lo cual es una contradicción con la definición de h_0 y el hecho de que $l' < h_0$.

Nota 2.5 Las cotas inferiores para $\tau CS(X)$ dadas por los Lemas 2.3, 2.4 y 2.5 son, en general, las mejores posibles. Obsérvese que para el espacio $X = (L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ con la *clm* topología podemos comprobar:

$$1 + r_{X,clm}(1) = 2^{1/p}, \qquad \frac{1}{1 - \Delta_{X,\beta,clm}(1^-)} = 2^{1/p}, \qquad h_0 = 2^{1/p}$$

valores que coinciden con el valor exacto de $(clm)CS(L_p(\mu))$. Sin embargo, existen espacios de Banach en los cuales las desigualdades son estrictas (ver Capítulo VI de [ADL]).

2.3 Una generalización del Lema de Goebel-Karlovitz

Uno de los principales instrumentos utilizados en el estudio de la w-FPP es el Lema de Goebel-Karlovitz. El objetivo fundamental en esta sección será generalizar dicho Lema para el estudio de la τ-FPP donde τ es ahora una topología arbitraria definida sobre X. No hay que olvidar, que la prueba original del Lema de Goebel-Karlovitz está fuertemente basada en la débil secuencial semicontinuidad inferior de las funciones tipo w-nulas. En general, si X es un espacio de Banach, τ una topología sobre X y $\{x_n\}$ una sucesión en X τ-convergente a cero, definimos la función tipo τ-nula asociada a la sucesión $\{x_n\}$ como:

$$\Gamma_{\{x_n\}}(x) = \limsup_n \|x_n - x\|$$

para todo $x \in X$.

Como es de suponer, para probar un resultado análogo al Lema de Goebel-Karlovitz para una topología τ, tendremos que imponer que las funciones tipo τ-nulas sean τ-sec.s.c.i.

Un argumento habitual que se sigue en las demostraciones de resultados que implican la w-FPP es el proceso de reducción al absurdo. Si se supone que el espacio X no tiene la w-FPP siempre se puede encontrar una aplicación T no-expansiva y sin puntos fijos, definida en un subconjunto C no vacío, convexo, w-compacto y minimal, es decir, no hay un subconjunto propio de C convexo, w-compacto y T-invariante. Además la minimalidad de C implica que dicho conjunto debe ser es diametral. (Para más detalles ver por ejemplo [GoK1]).

Sea X un espacio de Banach. En el resto del Capítulo 2 vamos a suponer que τ es una topología de e.v.t. sobre X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. Obsérvese que esta condición no es muy restrictiva. Además de cumplirla la topología débil y cualquier topología métrica, si el espacio de Banach X es separable y τ es una topología menos fina que la inducida por la norma, los conjuntos τ-secuencialmente compactos son también τ-compactos. En efecto, la separabilidad de X implica que el espacio es Lindelöf para la topología de la norma ya que tiene una base numerable de conjuntos abiertos. Lo mismo es cierto para τ si es una topología menos fina que la inducida por la norma. Así, los subconjuntos τ-secuencialmente compactos son numerablemente compactos y Lindelöf, y por tanto son τ-compactos.

Veamos que en estas condiciones las mismas hipótesis de trabajo utilizadas con la topología débil son ciertas:

Si X no tiene la τ-FPP, por definición, existe un subconjunto $C \subset X$ convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y una aplicación $T: C \to C$ sin puntos fijos. Definimos la siguiente familia de subconjuntos de C:

$$\Omega = \{K \subset C : \ K \neq \emptyset, K \text{ convexo}, \ K \ \tau - \text{sec. cerrado}, \ T(K) \subset K\}.$$

Si ordenamos Ω con la relación de inclusión obtenemos una familia inductiva, es decir, para cualquier cadena totalmente ordenada existe un elemento minimal. Por tanto, via el Lema de Zörn podemos suponer que C es minimal en el sentido de que no hay un subconjunto propio de C que sea convexo, τ-secuencialmente compacto y T-invariante.

La minimalidad de C implica también que no existe ningún subconjunto propio de C convexo, τ-secuencialmente cerrado que contenga a $T(C)$. En efecto, si A fuera un subconjunto de C con tales propiedades obtendríamos $T(A) \subset T(C) \subset A$. Así, el conjunto A sería también T-invariante y por tanto $A = C$.

Supongamos además que la norma es una función τ-sec.s.c.i. Se comprueba fácilmente que esta condición es equivalente a que las bolas cerradas en X sean τ-secuencialmente cerradas. Veamos que en este caso el conjunto minimal C es también diametral:

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x_0 \in C$ tal que $r = \sup\{\|x - x_0\| : x \in C\} < \text{diam}(C)$. Entonces el subconjunto

$$K = \{y \in C : \sup\{\|x - y\| : x \in C\} \leq r\}$$

es no vacío, convexo y τ-secuencialmente cerrado. En efecto, si $\{y_n\}$ es una sucesión en K τ-convergente a un vector $y \in C$, para cualquier $x \in C$ la sucesión $\{x - y_n\}_n$ converge al vector $x - y$, y por ser la norma τ-sec.s.c.i. obtenemos:

$$\|x - y\| \leq \liminf_n \|x - y_n\| \leq \liminf_n \sup_{x \in C} \|x - y_n\| \leq r.$$

Así $y \in K$. Como consecuencia K es τ-secuencialmente compacto.

Comprobemos que el conjunto K es también T-invariante:

Sea $y \in K$. Como $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \leq r$ para todo $x \in C$ se sigue que $T(C) \subset B(Ty, r) \cap C$. Así, $B(Ty, r) \cap C$ es un subconjunto de C convexo, τ-secuencialmente cerrado que contiene a $T(C)$. Por tanto $C = B(Ty, r) \cap C$ y $Ty \in K$.

La minimalidad de C implica $K = C$ y $\|x - y\| \leq r$ para todo $x, y \in C$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $r < \operatorname{diam}(C)$. Por consiguiente, C es diametral.

Como consecuencia del estudio anterior podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.6 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. definida en X, tal que la norma es τ-sec.s.c.i. y los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. Si X no cumple la τ-FPP, existe una aplicación $T : C \rightarrow C$ no-expansiva y sin puntos fijos, con $C \subset X$ convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y minimal. Además, bajo estas condiciones, C es también diametral.*

Estamos ahora en condiciones de enunciar el Lema de Goebel-Karlovitz. Recordemos que al principio del Capítulo 2 probamos que siempre podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ de puntos fijos aproximados en C (i.e. $\lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0$).

Obsérvese que si suponemos que las funciones de tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. entonces la aplicación $\|\cdot\|$ es también τ-sec.s.c.i., sin más que considerar la función tipo τ-nula asociada a la sucesión idénticamente nula.

Por último, en el caso de que X tenga la propiedad (A_τ), razonando de igual forma que en el Lema 2.1, se prueba fácilmente que las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i., por ser las funciones tipo w-nulas w-sec.s.c.i. Recuérdese que la propiedad (A_τ) se conserva por isomorfismos.

Lema 2.6 Generalización del Lema de Goebel-Karlovitz

Sea X un espacio de Banach, τ una topología de e.v.t. tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y supongamos que las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. Sea $T : C \subset X \rightarrow C$ una aplicación no-expansiva y sin puntos fijos, con C convexo, acotado, τ-secuencialmente *compacto y minimal. Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión de puntos fijos aproximados entonces:*

$$\lim_n \|x_n - x\| = \operatorname{diam}(C)$$

para todo $x \in C$.

Prueba:

Como C es τ-secuencialmente compacto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{x_n\}$ es τ-convergente y, si es necesario, haciendo una traslación del problema podemos suponer que el vector nulo pertenece a C y que $\{x_n\}$ es τ-convergente al vector nulo.

Sea $x_0 \in C$ y denotemos $r = \Gamma_{\{x_n\}}(x_0)$.
Definimos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{x \in C : \Gamma_{\{x_n\}}(x) \leq r\right\}$$

Evidentemente A es un subconjunto de C no vacío y convexo. Veamos que A es τ-secuencialmente compacto y T-invariante:

- A es τ-secuencialmente compacto:
Basta probar que A es τ-secuencialmente cerrado. Sea $\{z_k\}$ una sucesión de A que es τ-convergente a un vector z. La función $\Gamma_{\{x_n\}}(\cdot)$ es τ-sec.s.c.i., entonces $\Gamma_{\{x_n\}}(z) \leq \liminf_k \Gamma_{\{x_n\}}(z_k) \leq r$ y por tanto $z \in A$.

-A es T-invariante:
Sea $x \in A$,

$$\Gamma_{\{x_n\}}(Tx) = \limsup_n \|x_n - Tx\| \leq \limsup_n \|x_n - Tx_n\| +$$

$$\limsup_n \|Tx_n - Tx\| \leq \limsup_n \|x_n - x\| = \Gamma_{\{x_n\}}(x) \leq r.$$

Como consecuencia, la minimalidad de C implica que $A = C$.

Veamos ahora que $r = \operatorname{diam}(C)$:
Como $\{x_n\}$ es τ-nula y la norma es τ-sec.s.c.i., dado $x \in C$ se tiene que $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n - x\| \leq r$, ya que la sucesión $\{x_n - x\}$ es τ-convergente al vector $-x$. Ahora bien, C es diametral y el vector nulo pertenece a C, entonces $r \leq \operatorname{diam}(C) = \sup\{\|x\| : x \in C\} \leq r$.

Como $x_0 \in C$ es arbitrario, hemos probado que

$$\limsup_n \|x_n - x\| = \mathrm{diam}(C)$$

para todo $x \in C$.

Sin embargo, es evidente que cualquier subsucesión de una sucesión de puntos fijos aproximados es también una sucesión de puntos fijos aproximados. Por tanto, para todo $x \in C$ existe $\lim_n \|x_n - x\| = \mathrm{diam}(C)$.

Nota 2.6 En el caso de que X y τ cumplan las hipótesis necesarias para aplicar el Lema 2.6, podemos prescindir en el Teorema 2.3 de la separabilidad del espacio. En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos fijos aproximados τ-convergente a cero siempre podemos encontrar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$, que sigue siendo una sucesión de puntos fijos aproximados, tal que existe $\lim_{k,l;k\neq l} \|x_{n_k} - x_{n_l}\|$. En este caso $\lim_k \|x_{n_k}\| = \lim_{k,l;k\neq l} \|x_{n_k} - x_{n_l}\|$ y por tanto, X no cumple la propiedad τ-GGLD.

Una consecuencia del Lema anterior es la siguiente proposición que generaliza un resultado de [LlJ] cuando τ es una topología con las propiedades citadas anteriormente:

Proposición 2.1 *Supongamos que X, τ, T, C son como en el Lema 2.6. Si* $\mathrm{diam}(C) = 1$ *y* $\{x_n\}$ *es una sucesión de puntos fijos aproximados en C τ-convergente a cero, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $t \in [0,1]$ existe una sucesión $\{z_n\}$ en C tal que:*

i) $\{z_n\}$ *es τ-convergente a un vector $z \in C$,*

ii) $\|z_n\| > 1 - \varepsilon$ *para cualquier $n \in \mathbb{N}$,*

iii) $\limsup_n \limsup_m \|z_n - z_m\| \leq t$,

iv) $\limsup_n \|z_n - x_n\| \leq 1 - t$.

Prueba:

Por el Lema 2.6 sabemos que si $\{w_n\}$ es una sucesión de puntos fijos aproximados en C, $\lim_n \|w_n\| = 1$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in C$ y $\|T(x) - x\| < \delta(\varepsilon)$ entonces $\|x\| > 1 - \varepsilon$. En efecto, en caso contrario, existiría $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar

$x_n \in C$ verificando $\|Tx_n - x_n\| < \frac{1}{n}$ y $\|x_n\| \leq 1 - \varepsilon$. La sucesión $\{x_n\}$ sería una sucesión de puntos fijos aproximados en C, pero $\limsup_n \|x_n\| \leq 1 - \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $t \in [0,1]$. Elegimos $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \min\{1, \delta(\varepsilon)\}$ y sea $\{\eta_n\}$ una sucesión de números positivos, decreciente a cero tal que $\gamma + \eta_n < \min\{1, \delta(\varepsilon)\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos la aplicación contractiva $S_n : \bar{C}^{\|\cdot\|} \to \bar{C}^{\|\cdot\|}$ como:

$$S_n(x) = (1-\gamma)\bar{T}(x) + \gamma t x_n \qquad \text{para } x \in \bar{C}^{\|\cdot\|},$$

donde $\bar{T}$ es la única extensión no-expansiva de T al conjunto $\bar{C}^{\|\cdot\|}$. El Teorema de Punto Fijo de Banach para aplicaciones contractivas, nos asegura la existencia de un punto fijo de S_n. Así, existe $y_n \in \bar{C}^{\|\cdot\|}$ tal que:

$$y_n = (1-\gamma)\bar{T}(y_n) + \gamma t x_n.$$

Pero $\bar{T}(y_n)$ se define como el límite de las imagenes por T de cualquier sucesión de vectores de C que converga al vector y_n. Por tanto, existe $z_n \in C$ tal que:

$$\|z_n - (1-\gamma)T(z_n) - \gamma t x_n\| < \eta_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{z_n\}$ es una sucesión en C que es τ-secuencialmente compacto, podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que $\{z_n\}$ es τ-convergente a un vector $z \in C$.

Veamos que $\{z_n\}$ cumple el resto de las condiciones requeridas:

ii) Aplicando la desigualdad triangular:

$$\|z_n - T(z_n)\| \leq \eta_n + \|(1-\gamma)T(z_n) + \gamma t x_n - T(z_n)\| \leq$$

$$\eta_n + \gamma\|T(z_n) - t x_n\| \leq \eta_n + \gamma < \delta(\varepsilon).$$

Como consecuencia $\|z_n\| > 1 - \varepsilon$.

iii) Aplicando de nuevo la desigualdad triangular, usando la no-expansividad de T y el valor de $\operatorname{diam}(C)$, obtenemos:

$$\|z_n - z_m\| \leq \eta_n + \eta_m + \|(1-\gamma)T(z_n) + \gamma t x_n - (1-\gamma)T(z_m) - \gamma t x_m\| \leq$$

$$\eta_n + \eta_m + (1-\gamma)\|T(z_n) - T(z_m)\| + \gamma t\|x_n - x_m\| \leq$$

$$\eta_n + \eta_m + (1-\gamma)\|z_n - z_m\| + \gamma t.$$

Así:

$$\|z_n - z_m\| \leq \frac{\eta_n + \eta_m}{\gamma} + t.$$

Si tomamos límites cuando n, m tienden a infinito, $\limsup_n \limsup_m \|z_n - z_m\| \leq t$.

iv) Por último, usando los mismos argumentos:

$$\|z_n - x_n\| \leq \eta_n + \|(1-\gamma)T(z_n) + \gamma t x_n - x_n + (1-\gamma)T(x_n) - (1-\gamma)T(x_n)\| \leq$$
$$\eta_n + (1-\gamma)\|T(z_n) - T(x_n)\| + (1-\gamma)\|T(x_n) - x_n\| + \gamma(1-t)\|x_n\| \leq$$
$$\eta_n + (1-\gamma)\|z_n - x_n\| + (1-\gamma)\|T(x_n) - x_n\| + \gamma(1-t).$$

Por tanto,

$$\|z_n - x_n\| \leq \frac{\eta_n}{\gamma} + 1 - t + \frac{1-\gamma}{\gamma}\|T(x_n) - x_n\|.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito obtenemos la desigualdad que queríamos probar.

Nota 2.7 Es interesante observar que únicamente hemos utilizado la τ-compacidad del conjunto C para asegurar que la familia Ω es inductiva y poder aplicar el Lema de Zörn para obtener un subconjunto minimal. Si de alguna otra forma pudiéramos garantizar la existencia de un subconjunto minimal en C, el Lema de Goebel-Karlovitz seguiría siendo válido sin tener que exigir a la topología τ que los conjuntos τ-secuencialmente compactos sean τ-compactos. Para más información sobre este tema ver [Kh2].

2.4 Aplicaciones del Lema de Goebel-Karlovitz generalizado

En esta sección estudiaremos una serie de resultados que serán consecuencia de la generalización del Lema de Goebel-Karlovitz. Así, supondremos siempre que X es un espacio de Banach y τ es una topología de e.v.t. sobre X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos.

El primer teorema que vamos a estudiar está inspirado en [D2]. Necesitamos previamente generalizar la definición del coeficiente $M(X)$ dada en [D2] para topologías arbitrarias sobre X.

Definición 2.8 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X. Para cualquier $a \geq 0$ definimos el coeficiente*

$$R_\tau(a, X) = \sup\left\{ \liminf_n \|x_n + x\| \right\}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los vectores $x \in X$ con $\|x\| \leq a$ y todas las sucesiones de la bola unidad, τ-convergentes al vector nulo con $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| \leq 1$.

Definimos el coeficiente $M_\tau(X)$ como:

$$M_\tau(X) = \sup\left\{ \frac{1+a}{R_\tau(a,X)} : a \geq 0 \right\}$$

Nótese que en el caso de que τ sea la topología débil $M_w(X) = M(X)$.

Teorema 2.7 *Sean X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma equivalente en X con*

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$ y denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Si las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. en Y y $d < M_\tau(X)$ entonces Y cumple la τ-FPP.

Prueba:

Como $d < M_\tau(X)$ existe $a \geq 0$ tal que $dR_\tau(a,X) < 1 + a$. Además podemos suponer que $a > 0$ ya que $R_\tau(\cdot, X)$ es una función continua. Sea $t = (1+a)^{-1} \in (0,1)$ y elegimos un número positivo $\varepsilon < 1 - (1+a)^{-1}dR_\tau(a,X)$.

Si Y no tiene la τ-FPP, como τ cumple las condiciones del Teorema 2.6, podemos encontrar $T : C \to C$ no-expansiva en Y con C convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y minimal. Además, mediante una traslación y una homotecia siempre podemos suponer que $\mathrm{diam}(C) = \{|x - y| : x, y \in$

$C\} = 1$, $0 \in C$ y existe una sucesión $\{x_n\} \subset C$ de puntos fijos aproximados τ-convergente a cero.

Como las funciones tipo τ-nulas (definidas para la norma $|\cdot|$) son τ-sec.s.c.i., se verifica el Lema de Goebel-Karlovitz generalizado y por tanto la Proposición 2.1. Así, dado ε y $t = (1+a)^{-1}$ existe una sucesión $\{z_n\} \subset C$ tal que:

i) $\{z_n\}$ es τ-convergente a un vector $z \in C$,

ii) $|z_n| > 1 - \varepsilon$ para $n \in \mathbb{N}$,

iii) $\limsup_n \limsup_m |z_n - z_m| \leq t$,

iv) $\limsup_n |z_n - x_n| \leq 1 - t$.

Tomando una subsucesión si fuera necesario también podemos suponer que existen los límites $\lim_n \|z_n - z\|$, $\lim_{n,m;n\neq m} \|z_n - z_m\|$.

Además $\lim_{n,m;n\neq m} \|z_n - z_m\| \leq d \limsup_n \limsup_m |z_n - z_m| \leq dt$.

Para n fijo consideramos la sucesión $\{z_n - z_m\}_m$ que es τ-convergente a $z_n - z$. Entonces $|z_n - z| \leq \liminf_m |z_n - z_m|$. Tomando límite cuando n tiende a infinito obtenemos:

$$\lim_n \|z_n - z\| \leq d \liminf_n |z_n - z| \leq d \liminf_n \liminf_m |z_n - z_m| \leq dt.$$

Dado η, $0 < \eta < (1-\varepsilon)/R_\tau(a,X) - dt$, podemos suponer a través de una subsucesión, que $\|z_n - z\| \leq dt + \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, como la sucesión $\{z_n - x_n\}_n$ es τ-convergente a z se cumple:

$$\|z\| \leq d|z| \leq d \liminf_n |z_n - x_n| \leq d(1-t),$$

con lo cual

$$\left\|\frac{z}{dt+\eta}\right\| \leq \frac{d(1-t)}{dt+\eta} \leq \frac{d(1-t)}{dt} = a.$$

Así, la sucesión $\{\frac{z_n - z}{dt+\eta}\}_n$ y el vector $\frac{z}{dt+\eta}$ están en las condiciones de definición del coeficiente $R_\tau(a,X)$. Por tanto:

$$\frac{1-\varepsilon}{dt+\eta} \leq \liminf_n \frac{|z_n|}{dt+\eta} = \liminf_n \left|\frac{z_n - z}{dt+\eta} + \frac{z}{dt+\eta}\right| \leq R_\tau(a,X).$$

que resulta una contradicción debido a la elección de η y ε.

Corolario 2.1 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y $|\cdot|$ una norma equivalente en $L_p(\mu)$, $p > 1$, tal que*

$$|f| \leq \|f\|_p \leq d|f|$$

para cada $f \in L_p(\mu)$. Denotemos $Y = (L_p(\mu), |\cdot|)$. Si

$$d < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces Y tiene la clm-FPP.

Prueba:

Si $p > 1$ vimos que el espacio $L_p(\mu)$ cumplía la propiedad (A_{clm}). Como ésta se conserva por isomorfismos, cualquier norma $|\cdot|$ equivalente a $\|\cdot\|_p$ verifica que las funciones clm-tipo, $\Gamma_{\{x_n\}}(x) = \limsup_n |x_n - x|$ (para $x \in X$), son clm-sec.s.c.i. Además, trivialmente la clm topología verifica todas las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema 2.7.

Calculemos $M_{clm}(L_p(\mu))$:

Sea $\{f_n\} \subset L_p(\mu)$ una sucesión clm-convergente a la función nula con $\|f_n\|_p \leq 1$ y $\lim_{n,m;n\neq m} \|f_n - f_m\|_p \leq 1$. Sea otra función $f \in L_p(\mu)$ con $\|f\|_p \leq a$.

Tomemos una subsucesión $\{g_n\} \subset \{f_n\}$ tal que $\lim \|g_n + f\|_p = \liminf \|f_n + f\|_p$ y existe $\lim \|g_n\|_p$. Aplicando la igualdad (†) dada en el Ejemplo 2.3 a la sucesión $\{g_n\}$ y a la función $-f$ obtenemos:

$$\lim \|g_n + f\|_p^p = \|f\|_p^p + \lim \|g_n\|_p^p.$$

Sin embargo, por definición del coeficiente $(clm)CS(L_p(\mu))$ se cumple:

$$\lim \|g_n\|_p \leq \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|g_n - g_m\|_p}{(clm)CS(L_p(\mu))} \leq \frac{1}{2^{1/p}}.$$

Con lo cual $\lim \|g_n + f\|_p^p \leq a^p + \frac{1}{2}$ y $R_{clm}(a, L_p(\mu)) \leq \left(a^p + \frac{1}{2}\right)^{1/p}$.

Para conseguir la igualdad consideramos las funciones:

$$f = \frac{a}{(\mu(\Omega_1))^{1/p}} \chi_{\Omega_1}, \qquad f_n = \frac{1}{(2\mu(\Omega_n))^{1/p}} \chi_{\Omega_n} \quad n \geq 2,$$

donde $\{\Omega_n\}$ es una partición σ-finita de Ω.

Finalmente, mediante cálculos elementales se comprueba:

$$M_{clm}(L_p(\Omega)) = \sup\left\{\frac{1+a}{\left(a^p+\frac{1}{2}\right)^{1/p}} : a \geq 0\right\} = \left(1+2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Nótese que el valor anterior coincide con el coeficiente $M(l_p)$ para todo $1 < p < +\infty$ [D2].

Los dos próximos resultados de estabilidad que vamos a enunciar son consecuencia del Teorema 2.7 cuando consideramos τ la topología débil del espacio de Banach. La prueba de ambos es encontrada en [DJ1] donde se calcula el coeficiente $M(X)$ en los espacios de Bynum $l_{p,q}$ y en los espacios E_β que definimos a continuación.

Definición 2.9 *Consideremos el espacio de Hilbert* $(l_2, \|\cdot\|_2)$ *y definimos las normas equivalentes* $|x|_\beta = \max\{\|x\|_2, \beta\|x\|_\infty\}$ *con* $\beta > 1$. *Definimos los espacios de Banach* E_β *como* $E_\beta = (l_2, |\cdot|_\beta)$.

Estos espacios son importantes en la Teoría de Punto Fijo porque es conocido que E_β no tiene estructura normal si $\beta \geq \sqrt{2}$. Sin embargo, comprobaremos que para todo $\beta > 1$, E_β cumple la w-FPP. (Este resultado es también probado en [Ln1])

Corolario 2.2 *Si un espacio de Banach* Y *cumple*

$$d(Y, E_\beta) < M(E_\beta) = \begin{cases} \sqrt{3} & si\ 1 < \beta \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\beta}\left(1+\sqrt{\frac{\beta^2-1}{2}}\right) & si\ \sqrt{\frac{3}{2}} < \beta < \sqrt{2} \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & si\ \sqrt{2} \leq \beta \end{cases}$$

entonces Y *cumple la* w-*FPP*.

Corolario 2.3 *Consideremos los espacios de Bynum* $l_{p,q}$ *y la topología débil. Si* Y *es un espacio de Banach tal que*

$$d(Y, l_{p,q}) < M(l_{p,q}) = \min\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{q(p-1)}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

para algún $p \in (1, +\infty)$, $q \in [1, +\infty]$, *entonces* Y *tiene la* w-*FPP*.

Las cotas de estabilidad dadas en los Corolarios 2.2, 2.3 son las cotas de estabilidad de la propiedad débil del punto fijo más altas que se conocen para los espacios E_β y $l_{p,q}$ respectivamente.

Para un espacio de Banach X en [G2] es definido el coeficiente $R(X)$ y se prueba que si Y es otro espacio de Banach isomorfo a X con $d(X,Y) < 2/R(X)$, entonces Y cumple la w-FPP. En particular, X tiene la w-FPP si $R(X) < 2$.

Al igual que hemos hecho con el coeficiente $M(X)$ definido en [D2], podemos generalizar el coeficiente $R(X)$ para τ una topología sobre X. Así, definimos:

$$R_\tau(X) = \sup\{\liminf_n \|x_n + x\| : x_n \to^\tau 0, \|x_n\| \leq 1, \|x\| \leq 1\}.$$

Trivialmente $R_\tau(1,X) \leq R_\tau(X)$. Por tanto, si Y es isomorfo a X, τ verifica las condiciones del Teorema 2.7 y $d(X,Y) < 2/R_\tau(X)$, aplicando dicho teorema deducimos que Y satisface la τ-FPP. En particular, X cumple la τ-FPP si $R_\tau(X) < 2$ y τ es una topología de e.v.t. definida en X, tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y las aplicaciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i.

A continuación, vamos a definir un nuevo coeficiente geométrico para un espacio de Banach X con respecto a una topología τ definida en X.

Definición 2.10 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X. Definimos el coeficiente*

$$\lambda_\tau(X) = \sup\{\limsup_n \|x_n + x\| - \lim_{n,m;\, n\neq m} \|x_n - x_m\|\}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los vectores $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ y las sucesiones τ-convergentes a cero de la bola unidad de X tal que existe $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|$ y $\lim_n \|x_n\| = 1$

Teorema 2.8 *Sean X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos. Sea $|\cdot|$ una norma equivalente en X tal que*

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$ y denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Si las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. en Y y

$$d < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{\lambda_\tau(X)}{\tau CS(X)} + 1\right)}}{2\left(\frac{\lambda_\tau(X)}{\tau CS(X)} + 1\right)}$$

entonces Y tiene la τ-FPP. Como consecuencia, si las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. en X y $\lambda_\tau(X) < 1$, X cumple la τ-FPP.

Prueba:

Por simplificar la notación definimos

$$s = \frac{\lambda_\tau(X)}{\tau CS(X)} + 1.$$

Supongamos que Y no cumple la τ-FPP. Usando el mismo razonamiento que en la prueba del Teorema 2.7, dados

$$t = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4s}} \in (0, 1), \qquad 0 < \varepsilon < 1 - dts$$

podemos encontrar una sucesión $\{z_n\}$ en las mismas condiciones que en la prueba de dicho teorema.

Tomando una subsucesión de $\{z_n\}$ si fuera necesario podemos suponer que existen los límites:

$$\lim_n |z_n - z|, \quad \lim_n \|z_n - z\|, \quad \lim_{n,m;n\neq m} \|z_n - z_m\|.$$

Al igual que en el Teorema 2.7, $|z| \leq (1 - t)$ y $\lim_n |z_n - z| \leq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $\{x_n\}$ denota la sucesión de puntos fijos aproximados, aplicando el Lema de Goebel-Karlovitz generalizado obtenemos:

$$\lim_n |z_n - z| \geq \lim_n |x_n - z| - \limsup_n |z_n - x_n| \geq 1 - (1 - t) = t.$$

Por tanto, $t = \lim_n |z_n - z|$.

Notemos $c = \lim_n \|z_n - z\| \geq \lim_n |z_n - z| = t$. La definición de t y la condición impuesta a d implican que $d < t(1 - t)^{-1}$ con lo cual $\|z\| \leq d|z| \leq d(1 - t) \leq t \leq c$.

Por otra parte, $\{z_n - z\}_n$ es una sucesión τ-convergente al vector nulo, luego:

$$c \leq \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|z_n - z_m\|}{\tau CS(X)} \leq \frac{dt}{\tau CS(X)}.$$

Por consiguiente:

$$1 - \varepsilon \leq \limsup_n |z_n| \leq \limsup_n \|z_n\| = c \limsup_n \left\| \frac{z_n - z}{c} + \frac{z}{c} \right\| \leq$$

$$c \left(\lambda_\tau(X) + \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|z_n - z_m\|}{c} \right) \leq c\lambda_\tau(X) + dt \leq dt \left(\frac{\lambda_{\tau}(X)}{\tau CS(X)} + 1 \right)$$

lo cual es una contradicción por la elección de ε.

Veamos que el coeficiente $\lambda_\tau(X)$ puede ser relacionado con algunos de los coeficientes definidos anteriormente.

Nótese que en la definición de $\lambda_\tau(X)$ podemos sustituir la condición $\lim_n \|x_n\| = 1$ por $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente es fácil comprobar la desigualdad

$$\lambda_\tau(X) \leq R_\tau(X) - \tau CS(X).$$

De esta forma, el Teorema 2.8 mejora el Teorema 5 en [By] y el Teorema 3 en [G2] cuando τ es la topología débil.

En el siguiente ejemplo veremos un espacio de Banach donde no podemos aplicar los Teoremas citados anteriormente pero en cambio, podemos asegurar que tiene la w-FPP gracias al Teorema 2.8.

Ejemplo 2.5 Consideremos los espacios de Bynum $l_{2,1}$ y $l_{2,\infty}$. Recordemos que estos espacios son el espacio l_2 renormado con una norma equivalente. Así, $l_{2,1} = (l_2, \|\cdot\|_{2,1})$ y $l_{2,\infty} = (l_2, \|\cdot\|_{2,\infty})$ donde

$$\|x\|_{2,1} = \|x^+\|_2 + \|x^-\|_2, \qquad \|x\|_{2,\infty} = \max\{\|x^+\|_2, \|x^-\|_2\},$$

$$x^+ = \{x^+(n)\}_n \quad \text{con} \quad x^+(n) = \max\{x(n), 0\},$$

$$x^- = \{x^-(n)\}_n \quad \text{con} \quad x^-(n) = \max\{-x(n), 0\}.$$

Definimos el espacio de Banach $X = l_{2,1} \oplus_2 l_{2,\infty}$ dotado de la norma

$$\|(x,y)\| = \left(\|x\|_{2,1}^2 + \|y\|_{2,\infty}^2\right)^{1/2}$$

para todo $(x, y) \in X$.

Obsérvese que si consideramos la sucesión w-nula $x_n = e_n$ y el vector $x = -e_1$ comprobamos que $R_w(l_{2,1}) = 2$ y como consecuencia $R_w(X) = 2$. Por otra parte, si definimos $y_n = e_n$ conseguimos una sucesión convergente débilmente al vector nulo y tal que $\|y_n - y_m\|_{2,\infty} = 1$. Obtenemos ahora $WCS(l_{2,\infty}) = 1$ y por tanto $WCS(X) = 1$.

No obstante, si comprobamos que $\lambda_w(X) < 1$, por el Teorema 2.8 podemos asegurar que X satisface la w-FPP.

Sea (x, y) un vector en X, $x \in l_{2,1}$, $y \in l_{2,\infty}$, tal que $\|(x, y)\| \leq 1$ y sea $\{(x_n, y_n)\}_n$ una sucesión débilmente nula en X con $\|(x_n, y_n)\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son dos sucesiones débilmente nulas en l_2 tal que

$$\|x_n\|_{2,1}^2 + \|y_n\|_{2,\infty}^2 = 1, \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

No es difícil probar (ver [DJ1], Proposición 2) que podemos suponer:

1) $\operatorname{supp} x_n \cap \operatorname{supp} x_m = \operatorname{supp} y_n \cap \operatorname{supp} y_m = \emptyset$,

2) $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} x_n = \operatorname{supp} y \cap \operatorname{supp} y_n = \emptyset$,

3) $\|x_n^+\|_2 = \|x_m^+\|_2, \quad \|x_n^-\|_2 = \|x_m^-\|_2, \quad \|y_n^+\|_2 = \|y_m^+\|_2, \quad \|y_n^-\|_2 = \|y_m^-\|_2$

para cada $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, donde para un vector $x = \{x(k)\}_k$ denotamos por $\operatorname{supp} x = \{k : x(k) \neq 0\}$.

Nótese que si x, y son vectores de l_2 con $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} y = \emptyset$ entonces $(x+y)^+ = x^+ + y^+$, $(x+y)^- = x^- + y^-$, $(x-y)^+ = x^+ + y^-$, $(x-y)^- = x^- + y^+$. Por otra parte, es claro que en tal caso se cumple $\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$.

Por lo tanto:

$$\|(x, y) + (x_n, y_n)\|^2 = \|x_n + x\|_{2,1}^2 + \|y_n + y\|_{2,\infty}^2 \leq$$

$$(\|x\|_{2,1} + \|x_n\|_{2,1})^2 + \max\left\{\|y_n^+\|_2^2 + \|y^+\|_2^2, \|y_n^-\|_2^2 + \|y^-\|_2^2\right\} \leq$$

$$(\|x\|_{2,1} + \|x_n\|_{2,1})^2 + \|y_n\|_{2,\infty}^2 + \|y\|_{2,\infty}^2 \leq 2 + 2\|x\|_{2,1}\|x_n\|_{2,1}$$

Así:

$$\|(x, y) + (x_n, y_n)\| \leq \sqrt{2}\sqrt{1 + \|x\|_{2,1}\|x_n\|_{2,1}} \leq \sqrt{2}\sqrt{1 + \|x_n\|_{2,1}}.$$

Por otro lado,

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|^2 = \|x_n - x_m\|_{2,1}^2 + \|y_n - y_m\|_{2,\infty}^2 =$$

$$\left(\left(\|x_n^+\|_2^2 + \|x_m^-\|_2^2\right)^{1/2} + \left(\|x_n^-\|_2^2 + \|x_m^+\|_2^2\right)^{1/2}\right)^2 +$$

$$\max\left\{\|y_n^+\|_2^2 + \|y_m^-\|_2^2, \|y_n^-\|_2^2 + \|y_m^+\|_2^2\right\} \geq$$

$$4(\|x_n^+\|_2^2 + \|x_n^-\|_2^2) + \max\{\|y_n^+\|_2^2, \|y_n^-\|_2^2\} \geq 2\|x_n\|_{2,1}^2 + \|y_n\|_{2,\infty}^2 = 1 + \|x_n\|_{2,1}^2.$$

Como consecuencia:

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| \geq \sqrt{1 + \|x_n\|_{2,1}^2}.$$

Por tanto:

$$\lambda(X) \leq \sqrt{2}\sqrt{1 + \|x_n\|_{2,1}} - \sqrt{1 + \|x_n\|_{2,1}^2} \leq$$

$$\sup_{t\in[0,1]} (\sqrt{2}\sqrt{1+t} - \sqrt{1+t^2})$$

y por cálculo elemental puede fácilmente comprobarse que este supremo es menor estricto que 1.

Para un espacio de Banach, en [DGJ] se generaliza la propiedad M introducida por Kalton para una topología τ arbitraria sobre X. Así, diremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad $M(\tau)$ si las funciones tipo τ-nulas son constantes en las esferas, es decir, $\Gamma_{\{x_n\}}(x) = \Gamma_{\{x_n\}}(y)$ si $\|x\| = \|y\|$. En [DGJ] es también probado que si un espacio X tiene la propiedad $M(\tau)$ entonces las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. y además, son funciones no decrecientes con respecto a $\|x\|$. Este último hecho implica que si $\{x_n\}$ es una sucesión τ-convergente a cero en un espacio X con la propiedad $M(\tau)$ y existen los límites $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|$ y $\lim_n \|x_n\| = 1$ entonces:

$$\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \limsup_n \|x_n - x\|.$$

Como consecuencia, si X es un espacio de Banach con la propiedad $M(\tau)$ entonces $\lambda_\tau(X) = 0$. En este caso, la cota dada en el Teorema 2.8 es $(1 + \sqrt{5})/2$.

Corolario 2.4 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X tal que los conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos y supongamos que X tiene la propiedad $M(\tau)$. Si Y es un espacio de Banach isomorfo a X tal que las funciones tipo τ-nulas son τ-sec.s.c.i. en Y y*

$$d(X,Y) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

entonces Y tiene la τ-FPP.

Nota 2.8 Obsérvese que en el caso de que la topología τ tenga la propiedad (A_τ) el Corolario anterior es una generalización del Corolario 3.3 en [GS] para las topologías en X cuyos conjuntos τ-secuencialmente compactos son τ-compactos.

Por último, vamos a mostrar algunos ejemplos inspirados en [Kh1] donde el Corolario 2.4 puede ser aplicado. De hecho, estos ejemplos van a cumplir una propiedad más fuerte que la propiedad $M(\tau)$.

Definición 2.11 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología sobre X. Diremos que X satisface la propiedad $L(\tau)$ si existe una función $\rho : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ que cumple:*

1) $\rho(\cdot,\cdot)$ es continua y creciente en cada variable.

2) $\rho(\limsup_n \|x_n\|, \|y\|) = \limsup_n \|x_n - y\|$ para cada $y \in X$ y cada sucesión $\{x_n\}$ τ-convergente al vector nulo.

Es claro que la propiedad $L(\tau)$ implica $M(\tau)$.

Ejemplo 2.6 En el espacio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ consideramos la topología débil w. Si $\{x_n\}$ es débilmente convergente a cero se tiene:

$$\limsup_n \|x_n - y\|_\infty = \max\{\limsup_n \|x_n\|_\infty, \|y\|_\infty\}$$

para todo $y \in c_0$. Así c_0 verifica la propiedad $L(w)$ con $\rho(r,s) = \max\{r,s\}$.

Ejemplo 2.7 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y τ la topología de la convergencia local en medida. Fácilmente se prueba, a partir de la igualdad (†) dada en el Ejemplo 2.3, que para todo $p \in [1, +\infty)$ el espacio $L_p(\mu)$ verifica la propiedad $L(clm)$ con $\rho(r, s) = (r^p + s^p)^{1/p}$.

Además, si Y es un espacio de Banach tal que existe $p > 1$ con $d(Y, L_p(\mu)) < (1 + \sqrt{5})/2$, por el Corolario 2.4, Y cumple la clm-FPP. Nótese que esta cota es siempre inferior a la obtenida en el Corolario 2.1 para todo $p > 1$.

Ejemplo 2.8 Sea X un espacio de Banach reflexivo con una aplicación de dualidad J_ϕ débilmente secuencialmente continua, donde ϕ es una función continua, estrictamente creciente tal que $\phi(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$. Sea $\varphi(t) = \int_0^t \phi(x)dx$. Entonces:

$$\varphi(\|x + y\|) = \phi(\|x\|) + \int_0^1 < y, J_\phi(x + ty) > dt$$

para todo $x, y \in X$. Así, si $\{x_n\}$ es débilmente nula y $x \in X$ tenemos

$$\varphi(\limsup_n \|x_n + x\|) = \phi(\limsup_n \|x_n\|) + \phi(\|x\|).$$

Luego X tiene la propiedad $L(w)$ tomando $\rho(r, s) = \varphi^{-1}(\phi(r) + \phi(s))$.

CAPITULO 3

Teoremas de Punto Fijo para aplicaciones asintóticamente regulares y estabilidad de la τ-FPP

En este capítulo vamos a estudiar la estabilidad de la τ-FPP a través de teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares. Comenzamos definiendo la τ-característica de un espacio de Banach X y comprobando como esta constante, denotada por $\kappa_\tau(X)$, resulta una cota de estabilidad para la τ-FPP. Lo novedoso de esta teoría es que $\kappa_\tau(X)$ garantiza estabilidad para cualquier topología τ definida en X, sin exigir ninguna hipótesis adicional sobre la norma de X ni sobre la nueva norma equivalente considerada en X. Como aplicación probaremos que el valor 2 es la mejor cota de estabilidad posible para el espacio $L_1(\mu)$ y la *clm* topología.

En la segunda sección vamos a introducir un nuevo teorema de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares y comprobaremos con algunos ejemplos, como mejora los resultados conocidos en este campo, incluso para la topología débil.

Por último, deduciremos teoremas de estabilidad de la propiedad del punto fijo para una topología τ, aunque algunas condiciones adicionales sobre τ serán necesarias.

3.1 La τ-característica de un espacio de Banach

Definición 3.1 *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto de X. Se dice que una aplicación $T : C \to C$ es asintóticamente regular si*

$$\lim_n \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0$$

para todo vector $x \in C$.

El concepto de aplicación asintóticamente regular fue introducido por primera vez en [BrP]. Nótese que la regularidad asintótica de una aplicación es invariante si cambiamos la norma por otra equivalente.

En [I] es probado que si $T : C \to C$ es no-expansiva y C es convexo, para cualquier $\lambda \in (0,1)$ la aplicación $\lambda I + (1-\lambda)T$ es asintóticamente regular, además de ser no-expansiva. Es evidente que el conjunto de puntos fijos de las aplicaciones T y $\lambda I + (1-\lambda)T$ coinciden. Así, el problema de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas es equivalente al estudio de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas que son a la vez asintóticamente regulares.

Definición 3.2 *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto de X y $T : C \to C$ una aplicación. Denotamos por $|T|$ la constante exacta de Lipschitz, es decir:*

$$|T| = \sup\left\{\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} : x, y \in C,\ x \neq y\right\}$$

y definimos

$$s(T) = \liminf_n |T^n|$$

donde $\{T^n\}$ denota la sucesión de iteraciones de la aplicación T.

En el caso de que T sea uniformemente Lipschitziana con constante k es claro que $s(T) \leq k$. (En [GK] se puede encontrar una aplicación uniformemente Lipschitziana tal que $\liminf_n |T^n| < \limsup_n |T^n|$).

Uno de los primeros resultados de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares fue dado en [DX] y se basa en la siguiente constante geométrica:

Definición 3.3 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología arbitraria sobre X. Sea M un subconjunto de X no vacío, convexo y acotado.*

i) Se dice que un número $b \geq 0$ tiene la propiedad (P_τ) con respecto a M si existe $a > 1$ tal que para todo $x, y \in M$, $r > 0$ con $\|x - y\| \geq r$ y para toda sucesión $\{\xi_n\} \subset M$ τ-convergente en M con $\limsup_n \|\xi_n - x\| \leq ar$ y $\limsup_n \|\xi_n - y\| \leq br$, existe $z \in M$ tal que $\liminf_n \|\xi_n - z\| \leq r$.

ii) $\kappa_\tau(M) = \sup\{b > 0 : b$ tiene la propiedad (P_τ) con respecto a $M\}$.

iii) Se define la τ-característica de X como:

$$\kappa_\tau(X) = \inf\{\kappa_\tau(M) : M \subset X \text{ no vacío, convexo, acotado}\}.$$

En [DX] es probado el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología arbitraria sobre X. Sea $C \subset X$ convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación uniformemente Lipschitziana y asintóticamente regular. Si $s(T) < \kappa_\tau(X)$ entonces T tiene un punto fijo.*

De esta forma, cuando T es asintóticamente regular la τ-característica de X juega un papel similar a la constante de Lifshitz para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas (ver Teorema 1.17).

Corolario 3.1 *Sea X un espacio de Banach, τ una topología definida en X y $|\cdot|$ una norma equivalente tal que*

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$. Si $d < \kappa_\tau(X)$ entonces $Y = (X, |\cdot|)$ tiene la τ-FPP.

Prueba:

Sea $C \subset Y$ un subconjunto convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva con respecto a la norma $|\cdot|$. Denotemos $S = (I + T)/2$ que sigue siendo una aplicación no-expansiva en Y y además asintóticamente regular. Es muy fácil comprobar que S es uniformemente Lipschitziana para la norma $\|\cdot\|$ con constante d. En efecto, si $x, y \in C$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\|S^n x - S^n y\| \leq d|S^n x - S^n y| \leq d|x - y| \leq d\|x - y\|.$$

Como $s(S) \leq d < \kappa_\tau(X)$ por el Teorema 3.1, S tiene un punto fijo en C. Pero el conjunto de puntos fijos de S y T coinciden, con lo cual Y tiene la τ-FPP.

La diferencia substancial del Corolario 3.1 con respecto a los resultados de estabilidad obtenidos en el Capítulo 2 radica en la carencia de hipótesis adicionales sobre la norma equivalente $|\cdot|$.

En el siguiente teorema vamos a relacionar las constantes $\tau CS(X)$ y $\kappa_\tau(X)$ para conseguir una nueva cota superior de $s(T)$ que nos permita asegurar la existencia de puntos fijos si T es asintóticamente regular.

Teorema 3.2 *Sean X un espacio de Banach y τ una topología sobre X menos fina que la de la norma tal que $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Sea $C \subset X$ acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular. Si*

$$s(T) < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\tau CS(X)\,(\kappa_\tau(X) - 1)}}{2}$$

entonces T tiene punto fijo.

Este teorema generaliza el Teorema 3 en [D4] donde este mismo resultado es probado para la topología débil y los coeficientes $WCS(X)$ y $\kappa_w(X)$. Como la prueba del Teorema 3.2 es similar a la dada en [D4] preferimos omitirla. También en [D4] encontramos un ejemplo de un espacio de Banach con $1 < \kappa_w(X) < WCS(X)$ y es fácil comprobar que en estas condiciones $\kappa_w(X)$ es menor que la constante dada en el Teorema 3.2.

Antes de seguir estudiando nuevos resultados de estabilidad basados en teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares, vamos a relacionar la constante $\kappa_\tau(X)$ con otros coeficientes geométricos definidos en el Capítulo 2.

Primeramente, veamos como en algunas clases de espacios de Banach podemos utilizar una definición equivalente de $\kappa_\tau(X)$ que facilita su uso. Usando el Teorema 2.1 y Nota 2.2 en [DX] podemos enunciar:

Lema 3.1 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. sobre X tal que la $\|\cdot\|$ es una función τ-sec.s.c.i. Si X satisface la condición τ-uniforme de Opial entonces:*

$$\begin{aligned}\kappa_\tau(M) = \sup\{b>0 : \forall z, y \in M, \forall r>0 \quad &\textit{con} \quad \|z-y\| \geq r \quad \textit{y cada} \\ &\textit{sucesión} \quad \{\xi_n\} \subset M \quad \tau\textit{-convergente a } z \quad \textit{tal que} \\ &\limsup_n \|\xi_n - y\| \leq br, \ \textit{entonces} \quad \liminf_n \|\xi_n - z\| \leq r\}\end{aligned}$$

Lema 3.2 *Sea X es un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. en X tal que la $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Si X tiene la condición τ-uniforme de Opial entonces $\kappa_\tau(X) = 1 + r_{X,\tau}(1)$.*

Prueba:

Comenzemos probando que $\kappa_\tau(X) \geq 1 + r_{X,\tau}(1)$. Para ello es suficiente probar que para todo subconjunto $M \subset X$ no vacío, acotado, convexo se cumple $\kappa_\tau(M) \geq 1 + r_{X,\tau}(1)$.

Sea $b < 1 + r_{X,\tau}(1)$ y veamos que b verifica la condición de la definición equivalente de $\kappa_\tau(M)$ dada en el Lema 3.1:

Sean $z, y \in M$, $r > 0$ con $\|z-y\| \geq r$ y sea $\{\xi_n\} \subset M$ una sucesión τ-convergente a z tal que $\limsup_n \|\xi_n - y\| \leq br$.

Supongamos que $\liminf_n \|\xi_n - z\| > r$. Definimos la sucesión $\{\eta_n\} = \{\frac{\xi_n - z}{r}\}$ que es τ-convergente al vector nulo y $\liminf_n \|\eta_n\| \geq 1$. Por lo tanto:

$$\liminf_n \left\|\eta_n + \frac{z-y}{r}\right\| = \frac{1}{r} \liminf_n \|\xi_n - y\| \geq 1 + r_{X,\tau}(1).$$

Se sigue entonces que $\liminf_n \|\xi_n - y\| \geq r\,(1 + r_{X,\tau}(1)) > br$ lo cual es una contradicción.

Para probar la igualdad veamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $M \subset X$ no vacío, acotado, convexo tal que $\kappa_\tau(M) < 1 + r_{X,\tau}(1) + \varepsilon$.

Sea $b = 1 + r_{X,\tau}(1) + \varepsilon$. Por definición de $r_{X,\tau}(1)$ existe una sucesión acotada $\{x_n\}$ τ-convergente a cero con $\liminf \|x_n\| \geq 1$ y un vector $x \in X$ con $\|x\| \geq 1$ tal que:

$$\liminf_n \|x_n - x\| < r_{X,\tau}(1) + 1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Definimos $M = \mathrm{co}(\{x_n\} \cup \{0\} \cup \{x\})$. Veamos que b no cumple la definición de $\kappa_\tau(M)$ del Lema 3.1:

Tomemos $z = 0$, $y = x$,

$$r = \frac{1 + r_{X,\tau}(1) + \frac{1}{2}\varepsilon}{1 + r_{X,\tau}(1) + \varepsilon} < 1$$

y una subsucesión $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ para la cual existe $\lim_j \|x_{n_j}\|$ y $\lim_j \|x_{n_j} - x\| = \liminf_n \|x_n - x\|$. De esta forma $\|z - y\| = \|x\| \geq 1 > r$ y además:

$$\limsup_j \|x_{n_j} - y\| = \liminf_n \|x_n - x\| < 1 + r_{X,\tau}(1) + \frac{1}{2}\varepsilon = br.$$

Sin embargo, $\liminf_j \|x_{n_j} - z\| = \lim_j \|x_{n_j}\| \geq \liminf \|x_n\| \geq 1 > r$.

Por tanto $\kappa_\tau(M) < 1 + r_{X,\tau}(1) + \varepsilon$ y tenemos probada la igualdad.

Teorema 3.3 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y τ la topología de la convergencia local en medida en $L_1(\mu)$. Sea $|\cdot|$ una nueva norma definida en $L_1(\mu)$ tal que*

$$|f| \leq \|f\|_1 \leq d|f|$$

para todo $f \in L_1(\mu)$. Si $d < 2$ entonces $Y = (L_1(\mu), |\cdot|)$ cumple la clm-FPP.

Prueba:

Probamos en el Ejemplo 2.3 que $L_1(\mu)$ tiene la propiedad clm-uniforme de Opial. Aplicando el Lema 3.2 obtenemos $\kappa_{clm}(L_1(\mu)) = 1 + r_{L_1(\mu),clm}(1) = 2$. Por el Corolario 3.1 se obtiene el resultado deseado.

Obsérvese que en el Teorema 2.5 obtuvimos el resultado anterior pero sólo para aquellas normas $|\cdot|$ que fueran clm-sec.s.c.i.

Un resultado análogo se obtendría para $p > 1$, el espacio $L_p(\mu)$ y el valor $\kappa_{clm}(L_p(\mu)) = 2^{1/p}$. Sin embargo, recuérdese que si $p > 1$ el espacio $L_p(\mu)$ verifica la propiedad (A_{clm}) y en este caso, el Corolario 2.1 produce una mayor estabilidad de la clm-FPP.

Nota 3.1 En particular, para l_1 con la topología débil estrella $\sigma(l_1, c_0)$ obtenemos de nuevo el resultado de Soardi [S]: Y tiene la $w^\star$-FPP si $d(Y, l_1) < 2$.

Por otra parte, el Ejemplo 1.2 muestra que el valor 2 es la mejor cota de estabilidad para l_1 y la topología débil estrella, por tanto, será el mejor valor de estabilidad para $L_1(\mu)$ y la *clm* topología. En efecto, en el Ejemplo 1.2 es probado que existe una aplicación no-expansiva T definida en un subconjunto K de $l_{1,\infty}$ convexo, acotado, $w^\star$-compacto, con imagen en K y sin puntos fijos. Debido a la equivalencia entre la topología débil estrella y la *clm* topología para conjuntos acotados de l_1, el conjunto K es convexo, acotado y *clm*-secuencialmente compacto. Por tanto $l_{1,\infty}$ no cumple la *clm*-FPP. Recuérdese que $d(l_1, l_{1,\infty}) = 2$.

Lema 3.3 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. definida en X con norma τ-sec.s.c.i. Supongamos que X tiene la condición τ-uniforme de Opial. Entonces:*

$$\kappa_\tau(X) \geq \frac{1}{1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)}.$$

Prueba:

Sea $M \subset X$ convexo, cerrado, acotado y sea $b < (1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-))^{-1}$. Entonces existe $\varepsilon < 1$ tal que $b < (1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon))^{-1}$. Veamos que b cumple la condición de la definición equivalente de $\kappa_\tau(M)$ dada en el Lema 3.1.

Sean $z, y \in M$ con $\|z - y\| \geq r$ y $\{\xi_n\} \subset M$ una sucesión τ-convergente al vector z con $\limsup_n \|\xi_n - y\| \leq br$. Sea $\{\xi_{n_k}\}$ una subsucesión tal que existen los límites $\lim_k \|\xi_{n_k} - y\|$, $\lim_{k,l;k\neq l} \|\xi_{n_k} - \xi_{n_l}\|$ y $\lim_k \|\xi_{n_k} - z\| = \liminf_n \|\xi_n - z\|$. Denotemos $\lim_{k,l;k\neq l} \|\xi_{n_k} - \xi_{n_l}\| = lr$. Veamos que $l \leq b$.

En caso contrario, sea $0 < \eta < r(l - \varepsilon b)/(\varepsilon + 1)$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq k_0$ se cumple $\|\xi_{n_k} - y\| \leq br + \eta$ y $\|\xi_{n_k} - \xi_{n_l}\| \geq lr - \eta$. Consideremos la sucesión

$$z_k = \frac{\xi_{n_k} - y}{br + \eta}$$

para $k \geq k_0$. Esta sucesión está en la bola unidad de X y es τ-convergente al vector $(z - y)/(br + \eta)$. Además $\operatorname{sep}(\{z_k\}) \geq (lr - \eta)/(br + \eta) > \varepsilon$. Usando la definición del módulo $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ obtenemos:

$$\frac{r}{br + \eta} \leq \frac{\|z - y\|}{br + \eta} \leq 1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon).$$

Tomando límites cuando η tiende a cero conseguimos

$$\frac{1}{b} \leq 1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(\varepsilon)$$

lo cual es una contradicción con la elección de ε.

Como consecuencia, $l \leq b$. Usando el Lema 2.4 del Capítulo 2 deducimos:

$$\frac{1}{1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)} \leq \tau CS(X) \leq \frac{lr}{\lim_k \|\xi_{n_k} - z\|}$$

y por tanto:

$$\liminf_n \|\xi_n - z\| = \lim_k \|\xi_{n_k} - z\| \leq lr\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)\right) \leq$$

$$br\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)\right) < r.$$

Lema 3.4 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología en X de e.v.t. tal que la norma es τ-sec.s.c.i. Supongamos que X verifica la condición τ-uniforme de Opial. Entonces $\kappa_\tau(X) \geq h_0$ donde*

$$h_0 = \sup\left\{t \geq 1 : \frac{1}{t} + \Delta_{X,\chi,\tau}\left(\frac{1^-}{t}\right) \geq 1\right\}$$

Prueba:

Definimos la función estrictamente decreciente:

$$h(t) = \frac{1}{t} + \Delta_{X,\chi,\tau}\left(\frac{1^-}{t}\right)$$

Sea $M \subset X$ no vacío, convexo y acotado y sea $b < h_0$. Vamos a probar que b cumple la condición de la definición equivalente de $\kappa_\tau(M)$ dada para espacios con la condición τ-uniforme de Opial.

Sean $y, z \in M$ tal que $\|z - y\| \geq r$ y sea $\{\xi_n\}$ una sucesión en M τ-convergente al vector z con $\limsup_n \|\xi_n - y\| \leq br$.

Veamos que $\chi(\{\xi_n - y\}) \leq r$:

Supongamos por reducción al absurdo que $\chi(\{\xi_n - y\}) > r$. Consideramos la sucesión $\{(\xi_n - y)/br\}$ que es τ-convergente al vector $(z-y)/br$. Aplicando la definición de $\Delta_{X,\chi,\tau}(\frac{1}{b})$ obtenemos:

$$\Delta_{X,\chi,\tau}\left(\frac{1}{b}\right) \leq 1 - \frac{\|z - y\|}{br} \leq 1 - \frac{1}{b}$$

Pero $b < h_0$, por tanto $h(b) > 1$, es decir:

$$\Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1}{b}\right) > 1 - \frac{1}{b}.$$

Con lo cual $\chi(\{\xi_n - y\}) = \chi(\{\xi_n\}) \leq r$.

Por definición de la medida de Hausdorff χ, para cada $\delta > 0$ existe $w \in X$ tal que $\|\xi_n - w\| < r + \delta$ para una cantidad infinita de números naturales. La condición de Opial implica:

$$\liminf_n \|\xi_n - z\| \leq \liminf_n \|\xi_n - w\| \leq r + \delta.$$

Como δ es arbitrario, finalmente obtenemos $\liminf_n \|\xi_n - z\| \leq r$. Esto completa la prueba.

Lema 3.5 *Sea X un espacio de Banach con la condición no estricta de Opial con respecto a una topología de e.v.t. τ definida en X. Entonces $\kappa_\tau(X) \leq \tau CS(X)$.*

Prueba:

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\tau CS(X)$ existe una sucesión $\{x_n\}$ normalizada, τ-convergente al vector nulo tal que

$$\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\| < \tau CS(X) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $M = \mathrm{co}(\{x_n\} \cup \{0\})$. Veamos que $\kappa_\tau(M) \leq \tau CS(X) + \varepsilon$.

Sea $b < \kappa_\tau(M)$. Por definición, existe $a > 1$ con la siguiente propiedad:

Si $x, y \in M$, $r > 0$ con $\|x - y\| \geq r$ y $\{\xi_n\} \subset M$ es una sucesión τ-convergente en M tal que $\limsup_n \|\xi_n - x\| \leq ar$ y $\limsup_n \|\xi_n - y\| \leq br$, entonces existe algún $z \in M$ tal que $\liminf_n \|\xi_n - z\| \leq r$.

Supongamos que $b > \tau CS(X) + \varepsilon$ y elegimos $0 < \eta < 1$ tal que

$$\tau CS(X) + \frac{\varepsilon}{2} \leq (\tau CS(X) + \varepsilon)(1 - \eta), \qquad a(1 - \eta) > 1.$$

Sea $r = 1 - \eta$ y N lo suficientemente grande para que

$$\limsup_n \|x_n - x_N\| < \tau CS(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq (\tau CS(X) + \varepsilon)(1 - \eta) < br.$$

Consideremos $x = 0$, $y = x_N$. Como $\|x - y\| = 1 > r$ existe $z \in M$ tal que $\liminf_n \|x_n - z\| \leq r = 1 - \eta$. Este hecho contradice la condición no estricta de Opial con respecto a τ. Por lo tanto, $b \leq \tau CS(X) + \varepsilon$ y $\kappa_\tau(X) \leq \kappa_\tau(M) \leq \tau CS(X)$.

En el siguiente ejemplo veremos que la desigualdad en el Lema 3.5 puede ser estricta:

Ejemplo 3.1 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y τ la topología de la convergencia local en medida. Supongamos que $\{\Omega_n\}$ es una partición σ-finita de Ω y que Ω_1 es un átomo. Para $p > 1$ consideramos en $L_1(\mu)$ la norma equivalente

$$|||f||| = \left\{ \left(\int_{\Omega_1} |f| d\mu \right)^p + \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_1} |f| d\mu \right)^p \right\}^{1/p}$$

y denotemos $X = (L_1(\mu), |||\cdot|||)$.

Es fácil comprobar que si $\{f_n\}$ es una sucesión convergente a cero en la clm topología entonces $\int_{\Omega_1} |f_n| d\mu \to 0$. Por consiguiente, usando los mismos razonamientos que en el Ejemplo 2.3 deducimos $(clm)CS(X) = 2$. Además, trivialmente se comprueba, aplicando el Lema de Fatou, que la norma $|||\cdot|||$ es clm-sec.s.c.i.

Veamos que X verifica la condición clm-uniforme de Opial:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión clm-convergente a cero con $\liminf |||f_n||| \geq 1$ y sea $f \in X$ con $|||f||| \geq c$. A través de una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que existen los límites:

$$\lim \|(f_n + f)\chi_{\Omega_1}\|_1, \quad \lim \|(f_n + f)\chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1, \quad \lim \|f_n \chi_{\Omega_1}\|_1, \quad \lim \|f_n \chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1.$$

Aplicando la igualdad (†) dada en el Ejemplo 2.3 y usando la desigualdad $(a + b)^p \geq a^p + b^p$ si $a, b \geq 0$, $p \geq 1$, obtenemos:

$$\lim |||f_n + f|||^p = \lim \|(f_n + f)\chi_{\Omega_1}\|_1^p + \lim \|(f_n + f)\chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1^p =$$
$$(\lim \|f_n \chi_{\Omega_1}\|_1 + \|f \chi_{\Omega_1}\|_1)^p + \left(\lim \|f_n \chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1 + \|f \chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1\right)^p \geq$$
$$\lim \|f_n \chi_{\Omega_1}\|_1^p + \lim \|f_n \chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1^p + \|f \chi_{\Omega_1}\|_1^p + \|f \chi_{\Omega \setminus \Omega_1}\|_1^p \geq 1 + c^p.$$

Con lo cual $r_{X,clm}(c) \geq (1 + c^p)^{1/p} - 1 > 0$. Para conseguir la igualdad consideramos las funciones $f = (c/\mu(\Omega_1))\chi_{\Omega_1}$, $f_n = (1/\mu(\Omega_n))\chi_{\Omega_n}$ con $n \geq 2$.

Aplicando el Lema 3.2, $k_{clm}(X) = 1 + r_{X,clm}(1) = 2^{1/p}$.

Nota 3.2 Se puede observar que las cotas superiores e inferiores de $\kappa_\tau(X)$ obtenidas por los Lemas 3.3, 3.4, 3.5 son en general, las mejores posibles, pues en l_p con la topología débil nos dan su valor exacto [DX]. Igual sucede para $L_p(\mu)$ con la topología de la convergencia local en medida ya que sabemos:

$$h_0 = 2^{1/p}, \quad \frac{1}{1 - \Delta_{L_p(\mu),\beta,clm}(1^-)} = 2^{1/p}, \quad (clm)CS(L_p(\mu)) = 2^{1/p},$$

y $\kappa_{clm}(L_p(\mu)) = 1 + r_{L_p(\mu),clm}(1) = 2^{1/p}$.

3.2 Un nuevo Teorema de Punto Fijo para aplicaciones asintóticamente regulares

En esta sección vamos a probar un nuevo teorema de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares y veremos como puede ser aplicado a la estabilidad de la propiedad del punto fijo con respecto a una topología τ arbitraria definida en X.

Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ como usualmente y sea τ una topología en X. Si C es un subconjunto de X, para una aplicación $T : C \to C$ asintóticamente regular consideramos $s(T)$ como en la Definición 3.2.

Supongamos que $|\cdot|$ es una norma equivalente en X tal que $|x| \leq \|x\| \leq d|x|$ para todo $x \in X$ y denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Si C es un subconjunto convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ es una aplicación no-expansiva para la norma $|\cdot|$ y asintóticamente regular, vimos en la prueba del Corolario 3.1 que $s(T) \leq d$.

Como consecuencia, siempre que encontremos una cota superior de $s(T)$ que permita asegurar la existencia de punto fijo si T es asintóticamente regular, obtendremos una cota superior de la distancia de Banach-Mazur entre X y un espacio de Banach isomorfo Y que permite asegurar la τ-FPP para Y.

Teorema 3.4 *Sean X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. sobre X menos fina que la inducida por la norma y tal que $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Sea $C \subset X$ acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una* *aplicación asintóticamente regular. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones:*

a) $\frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1-\Delta_{X,\beta,\tau,}\left(\frac{\tau CS(X)^-}{s(T)}\right)\right)<1$,
b) $s(T)-r_{X,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{s(T)}\right)<1$,
c) X *satisface la condición no estricta de Opial con respecto a* τ *y* $\frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1-\Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{s(T)}\right)\right)<1$.

Entonces T *tiene punto fijo.*

Prueba:

Tomemos una subsucesión $\{n_k\}$ de números naturales tal que

$$s(T)=\lim_k |T^{n_k}|$$

Obsérvese que para cada vector x arbitrario de C y cada sucesión $\{n_k\}$ podemos encontrar una subsucesión $\{n_k(x)\}$ de $\{n_k\}$ (subsucesión que dependerá de x) tal que:

- La sucesión $\{T^{n_k(x)}x\}_k$ converge con respecto a τ a un vector de C que denotaremos por $l(x)$.
- Existen los límites $\lim_{l,k;l\neq k}\|T^{n_k(x)}x-T^{n_l(x)}x\|$ y $\lim_k\|T^{n_k(x)}x-l(x)\|$.

Podemos construir una sucesión $\{x_m\}\subset C$ y sucesiones de enteros positivos $\{n_k(x_m)\}_k$ del siguiente modo:

$$x_0\in C \quad \text{arbitrario},$$

$$x_m=l(x_{m-1})=\tau-\lim_k T^{n_k(x_{m-1})}x_{m-1},$$

$$\{n_k(x_m)\}_k\subset\{n_k(x_{m-1})\}_k \quad \forall k\geq 1.$$

Consideremos la sucesión de números naturales $n_i=n_i(x_i)$ para todo $i\in\mathbb{N}$, construida por un proceso diagonal. Así, la sucesión $\{x_m\}$ verifica las siguientes propiedades:

i) Existen los límites $\lim_{i,j;i\neq j}\|T^{n_i}x_m-T^{n_j}x_m\|$ y $\lim_i\|T^{n_i}x_m-x_{m+1}\|$ para todo $m\in\mathbb{N}$.

ii) $s(T) = \lim_i |T^{n_i}|$.

Probemos que la sucesión $\{x_m\}$ converge en norma un vector de C. Para ello vamos a comprobar que $\{x_m\}$ es una sucesión de Cauchy:

Denotemos $B_m = \lim_i \|T^{n_i}x_m - x_{m+1}\|$.

En primer lugar veamos que existe $\alpha < 1$ tal que $B_m \leq \alpha B_{m-1}$:

Utilizando la definición del coeficiente $\tau CS(X)$ obtenemos:

$$B_m \leq \frac{\lim_{i,j;i\neq j} \|T^{n_i}x_m - T^{n_j}x_m\|}{\tau CS(X)}$$

La regularidad asintótica de T implica que $\lim_j \|T^{n_j-l}x_m - x_m\| = \lim_j \|T^{n_j}x_m - x_m\|$ para $l \in \mathbb{N}$ fijo. Así:

$$\lim_{i,j;i\neq j} \|T^{n_i}x_m - T^{n_j}x_m\| = \limsup_i \left(\limsup_j \|T^{n_i}x_m - T^{n_j}x_m\|\right) \leq$$

$$\limsup_i |T^{n_i}| \limsup_j \|x_m - T^{n_j-n_i}x_m\| = s(T) \limsup_j \|x_m - T^{n_j}x_m\|.$$

Con lo cual

$$B_m \leq \frac{s(T)}{\tau CS(X)} \limsup_j \|x_m - T^{n_j}x_m\|.$$

Vamos a separar la prueba en tres casos:

Caso a):

Fijemos $i \in \mathbb{N}$ y definimos la sucesión

$$\{z_j\} = \left\{\frac{T^{n_i}x_m - T^{n_j}x_{m-1}}{L_i B_{m-1}}\right\}_j$$

donde $L_i = |T^{n_i}|$. Como

$$\limsup_j \|T^{n_i}x_m - T^{n_j}x_{m-1}\| \leq |T^{n_i}| \limsup_j \|x_m - T^{n_j}x_{m-1}\| = L_i B_{m-1},$$

dado cualquier número positivo η, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{\frac{z_j}{1+\eta}\}_{j\geq j_0}$ está contenida en la bola unidad de X. Por otra parte esta sucesión es τ-convergente al vector

$$\frac{T^{n_i}x_m - x_m}{L_i B_{m-1}(1+\eta)}$$

y además

$$\lim_{j,k;j\neq k} \|\frac{z_j}{1+\eta} - \frac{z_k}{1+\eta}\| = \frac{1}{(1+\eta)L_iB_{m-1}} \lim_{j,k;j\neq k} \|T^{n_j}x_{m-1} - T^{n_k}x_{m-1}\| \geq$$

$$\frac{1}{L_i(1+\eta)B_{m-1}}\tau CS(X)B_{m-1} > \frac{\tau CS(X)}{L_i(1+2\eta)}.$$

Aplicando la definición del módulo $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ a la sucesión $\{\frac{z_j}{1+\eta}\}_{j\geq j_0}$ obtenemos:

$$\frac{\|T^{n_i}x_m - x_m\|}{(1+\eta)L_iB_{m-1}} \leq 1 - \Delta_{X,\beta,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{(1+2\eta)L_i}\right)$$

Elegimos $i \in \mathbb{N}$ tal que $(1+2\eta)L_i < s(T)(1+3\eta)$. Entonces:

$$\frac{\|T^{n_i}x_m - x_m\|}{(1+\eta)L_iB_{m-1}} \leq 1 - \Delta_{X,\beta,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{(1+3\eta)s(T)}\right)$$

Tomando límites cuando $i \to +\infty$ y $\eta \to 0$ obtenemos $B_m \leq \alpha B_{m-1}$ donde

$$\alpha = \frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)^-}{s(T)}\right)\right) < 1.$$

Caso b):

Denotamos la sucesión

$$\{z_j\} = \left\{\frac{T^{n_j}x_{m-1} - x_m}{B_{m-1}}\right\}_j$$

En este caso $\{z_j\}$ es τ-convergente al vector nulo y $\lim_j \|z_j\| = 1$. Aplicando la definición del módulo de Opial a la sucesión $\{z_j\}$ y al vector $(x_m - T^{n_i}x_m)/B_{m-1}$ obtenemos:

$$\liminf_j \left\|z_j + \frac{x_m - T^{n_i}x_m}{B_{m-1}}\right\| = \liminf_j \frac{\|T^{n_j}x_{m-1} - T^{n_i}x_m\|}{B_{m-1}} \geq$$

$$1 + r_{X,\tau}\left(\frac{\|T^{n_i}x_m - x_m\|}{B_{m-1}}\right).$$

Así:

$$1 + r_{X,\tau}\left(\frac{\|T^{n_i}x_m - x_m\|}{B_{m-1}}\right) \leq \frac{1}{B_{m-1}}L_i \liminf_j \|T^{n_j}x_{m-1} - x_m\| = L_i$$

lo cual implica, usando la continuidad del módulo de Opial que:

$$1 + r_{X,\tau}\left(\frac{\limsup_i \|T^{n_i}x_m - x_m\|}{B_{m-1}}\right) \leq s(T).$$

Por tanto

$$\frac{\limsup_i \|T^{n_i}x_m - x_m\|}{B_{m-1}} \leq \sup\{c > 0 : r_{X,\tau}(c) \leq s(T) - 1\},$$

y como consecuencia $B_m \leq \alpha B_{m-1}$ donde

$$\alpha = \frac{s(T)}{\tau CS(X)} \sup\{c > 0 : r_{X,\tau}(c) \leq s(T) - 1\}.$$

Obsérvese que la condición impuesta en b) y el hecho de que el módulo de Opial sea una aplicación creciente implican que $\alpha < 1$. En efecto, si $\alpha \geq 1$ entonces $\sup\{c > 0 : r_{X,\tau}(c) \leq s(T) - 1\} \geq \frac{\tau CS(X)}{s(T)}$ con lo cual $r_{X,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{s(T)}\right) \leq s(T) - 1$ contradiciendo *b*).

Caso c):

Supongamos que X satisface la condición no estricta de Opial con respecto a τ. Consideremos la misma sucesión $\{z_j\}$ que en el caso a).

Sea $\eta > 0$ y $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{\frac{z_j}{1+\eta}\}_{j \geq j_0} \subset B_X$. Como vimos en el caso a), $\{z_j\}$ es τ-convergente al vector

$$z = \frac{T^{n_i}x_m - x_m}{L_i B_{m-1}}.$$

Por otra parte:

$$\lim_j \|\frac{z_j}{1+\eta} - \frac{z}{1+\eta}\| = \lim_j \frac{\|T^{n_j}x_{m-1} - x_m\|}{L_i B_{m-1}(1+\eta)} = \frac{1}{L_i(1+\eta)}$$

La condición de Opial no estricta y el Lema 1.1 aseguran que $\chi(\{z_j/(1+\eta)\}) = 1/(L_i(1+\eta)) > 1/(L_i(1+2\eta))$.

Aplicando la definición del módulo $\Delta_{X,X,\tau}(\cdot)$ a la sucesión $\{\frac{z_j}{1+\eta}\}_{j\geq j_0}$ y al vector $\frac{z}{1+\eta}$ obtenemos:

$$\frac{\|T^{n_i}x_m - x_m\|}{L_i B_{m-1}(1+\eta)} \leq 1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1}{L_i(1+2\eta)}\right) \leq 1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1}{s(T)(1+3\eta)}\right)$$

si consideramos $i \in \mathbb{N}$ tal que $L_i(1+2\eta) < s(T)(1+3\eta)$.

Tomando límites cuando $\eta \to 0$ e $i \to \infty$ obtenemos $B_m \leq \alpha B_{m-1}$ con

$$\alpha = \frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{s(T)}\right)\right) < 1$$

En definitiva, en los tres casos hemos encontrado $\alpha < 1$ tal que $B_m \leq \alpha B_{m-1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, $\lim_m B_m = 0$.

Veamos que efectivamente $\{x_m\}$ es una sucesión de Cauchy:

Por la τ-secuencial semicontinuidad inferior de la norma obtenemos:

$$\|x_m - x_{m+1}\| \leq \limsup_i \|x_m - T^{n_i}x_m\| + \limsup_i \|T^{n_i}x_m - x_{m+1}\| \leq$$

$$\limsup_i \left(\liminf_j \|T^{n_j}x_{m-1} - T^{n_i}x_m\|\right) + B_m \leq s(T)B_{m-1} + B_m \to_{m\to+\infty} 0.$$

Así, existe $z = \lim_m x_m$. Como la topología τ es menos fina que la topología inducida por la norma, el conjunto C es τ-secuencialmente cerrado en norma y por consiguiente cerrado. Por tanto, $z \in C$.

Vamos a probar que z es punto fijo de T:

$$\|z - T^{n_i}z\| \leq \|z - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - T^{n_i}x_m\| + \|T^{n_i}x_m - T^{n_i}z\| \leq$$

$$\|z - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - T^{n_i}x_m\| + L_i\|x_m - z\|$$

Con lo cual, $\limsup_i \|z - T^{n_i}z\| \leq \|z - x_{m+1}\| + B_m + s(T)\|x_m - z\|$. Como este último término tiende a cero cuando m tiende a infinito deducimos

$$\lim_i \|z - T^{n_i}z\| = 0.$$

Por hipótesis existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|T^k| < +\infty$. Usando la continuidad de T^k se obtiene que la sucesión $\{T^{n_i+k}z\}_i$ converge a $T^k z$. Pero por ser T asintóticamente regular se cumple

$$\lim_i \|T^{n_i+k}z - T^{n_i}z\| = 0,$$

por tanto $T^k z = z$.

Por último, es fácil comprobar por inducción que $T^{ks}z = z$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Así:

$$\|Tz - z\| = \|T^{ks+1}z - T^{ks}z\| \to_{s\to\infty} 0$$

Como consecuencia z es punto fijo de T en C.

Corolario 3.2 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología de e.v.t. menos fina que la norma tal que $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. Sea $C \subset X$ convexo, acotado, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular. Si $s(T) < \sqrt{\tau CS(X)}$ entonces T tiene punto fijo.*

Prueba:

Como se cumple que $\Delta_{X,\tau,\beta}(\varepsilon) \geq 0$ para todo $\varepsilon > 0$ por ser la norma τ-sec.s.c.i., si $s(T) < \sqrt{\tau CS(X)}$ trivialmente se verifica la condición a) del teorema anterior.

El Corolario 3.2 fue probado en [DX] para la topología débil.

Nota 3.3 El Corolario 3.2 tiene una aplicación inmediata al estudio de la estabilidad de la τ-FPP:

Si X es un espacio de Banach y τ una topología en X en las condiciones del Corolario 3.2, para cualquier norma equivalente $|\cdot|$, el espacio $Y = (X, |\cdot|)$ tiene la τ-FPP si $d(X,Y) < \sqrt{\tau CS(X)}$.

Aunque siempre se tenga la desigualdad $\sqrt{\tau CS(X)} \leq \tau CS(X)$ el Corolario 3.2 garantiza estabilidad simplemente si la norma de X es τ-sec.s.c.i. Por el contrario, en el Teorema 2.5, donde la cota de estabilidad era $\tau CS(X)$, teníamos que exigir además, que el espacio de Banach X fuese separable, y sólo podía ser aplicado en aquellas normas $|\cdot|$ que fuesen τ-sec.s.c.i.

Veamos en el siguiente ejemplo que el Corolario 3.2 puede garantizar estabilidad de la propiedad del punto fijo, en casos en que otros resultados no puedan ser aplicados. Además, comprobaremos que la τ-secuencial semicontinuidad inferior de la norma no se transmite por isomorfismos, por muy "próximos" que estén ambos espacios.

Ejemplo 3.2 Sea $X = \mathbb{R} \times L_1([0,1])$ dotado con la norma:

$$\|(\lambda, f)\|_X = (|\lambda|^p + \|f\|_1^p)^{1/p} \qquad \text{con } p > 2$$

y sea τ la topología producto entre la topología usual de $\mathbb{R}$ y la topología de la convergencia en medida en $L_1([0,1])$. Si $\{(\lambda_n, f_n)\}$ es una sucesión en X τ-convergente a cero es claro que $\lim_n \lambda_n = 0$, por tanto $\tau CS(X) =$

$(clm)CS(L_1([0,1])) = 2$. Veamos que $\kappa_\tau(X) = 2^{1/p}$. Para ello comprobaremos, a través del módulo de Opial $r_{X,\tau}(\cdot)$, que X cumple la condición τ-uniforme de Opial y por el Lema 3.2, $\kappa_\tau(X) = 1 + r_{X,\tau}(1)$.

Sea $\{(\lambda_n, f_n)\}$ una sucesión τ-convergente al vector nulo en X tal que $\liminf_n \|(\lambda_n, f_n)\|_X \geq 1$ y sea (λ, f) otro vector de X con $\|(\lambda, f)\|_X \geq c$. Tomemos una subsucesión $\{(\lambda_{n_k}, f_{n_k})\}$ tal que

$$\liminf_n \|(\lambda_n, f_n) + (\lambda, f)\|_X = \lim_k \|(\lambda_{n_k}, f_{n_k}) + (\lambda, f)\|_X$$

y existen los límites $\lim_k |\lambda_{n_k} + \lambda|$, $\lim_k \|f_{n_k}\|_1$ y $\lim_k \|f_{n_k} + f\|_1$. De esta forma, usando la igualdad (†) dada en el Ejemplo 2.3 y la desigualdad $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ si $a, b \geq 0$, deducimos:

$$\liminf_n \|(\lambda_n, f_n) + (\lambda, f)\|_X^p = \lim_k |\lambda_{n_k} + \lambda|^p + \lim_k \|f_{n_k} + f\|_1^p =$$

$$\lim_k |\lambda_{n_k} + \lambda|^p + \left(\lim_k \|f_{n_k}\|_1 + \|f\|_1\right)^p \geq$$

$$\lim_k |\lambda_{n_k}|^p + |\lambda|^p + \lim_k \|f_{n_k}\|_1^p + \|f\|_1^p \geq 1 + c^p.$$

Si consideramos la sucesión $\{(0, n\chi_{[0,\frac{1}{n}]})\} \subset X$ y el vector $(c, 0) \in X$ obtenemos:

$$\lim_n \|(0, n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}) + (c,0)\|_X = \lim_n \|(c, n\chi_{[0,\frac{1}{n}]})\|_X = (c^p + 1)^{1/p}.$$

Como consecuencia $r_{X,\tau}(c) = (c^p + 1)^{1/p} - 1$ y $\kappa_\tau(X) = 2^{1/p}$.

Sea $a \in (0,1)$. Definimos el espacio $Y = (X, \|\cdot\|_Y)$ donde $\|\cdot\|_Y$ es la siguiente norma equivalente en X:

$$\|(\lambda, f)\|_Y = (|\lambda|^p + |||f|||^p)^{1/p}$$

con $|||f||| = \|(\int_0^{1/2} |f|, \int_{1/2}^1 |f|)\|_m$ y $\|(\cdot,\cdot)\|_m$ es la norma en $\mathbb{R}^2$ cuya bola unidad es la envolvente convexa equilibrada del conjunto $\{(0,1), (1+a, a)\}$.

Vamos a comprobar que la norma $\|\cdot\|_Y$ no es τ-sec.s.c.i. Para ello, consideremos la sucesión $\{(0, f_n)\} \subset Y$ donde $f_n = 2\chi_{[0,1/2]} + an\chi_{[\frac{n-1}{n},1]}$. Esta sucesión converge en τ al vector $(0, 2\chi_{[0,1/2]})$. Sin embargo:

$$\|(0, f_n)\|_Y = \|(1,a)\|_m = \frac{a^2+1}{1+a} < 1 = \|(1,0)\|_m = \|(0, 2\chi_{[0,1/2]})\|_Y.$$

Como consecuencia, no podemos aplicar en el espacio Y ninguno de los resultados de estabilidad obtenidos en el Capítulo 2 ya que todos ellos exigían que la norma en Y fuese τ-sec.s.c.i.

Por otra parte, es un fácil ejercicio comprobar que $d(X,Y) = 1 + 2a$. Observar que si a tiende a 0, $d(X,Y)$ tiende a 1. Por tanto, no existe en general, una cota superior de la distancia de Banach-Mazur entre dos espacios isomorfos que garantize la transmisión de la τ-secuencial semicontinuidad inferior de la norma.

Fijemos $a \in (0,1)$ tal que $2^{1/p} < 1 + 2a < \sqrt{2}$. Como la norma en X es τ-sec.s.c.i. podemos aplicar el Corolario 3.2 y deducir que Y tiene la τ-FPP. Obsérvese que el Corolario 3.1 y el Teorema 3.2 tampoco puede ser aplicados porque las cotas de estabilidad allí dadas son estrictamente menor que la distancia de Banach-Mazur entre X e Y.

Corolario 3.3 *Sean X, τ, C, T como en el Corolario 3.2. Si $s(T) < \frac{1}{1-\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)}$ entonces T tiene punto fijo.*

Prueba:

Sabemos por Lema 2.4 que $\tau CS(X) \geq \frac{1}{1-\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)}$, con lo cual la hipótesis asegura que $s(T) < \tau CS(X)$.

Por consiguiente:

$$\frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)^-}{s(T)}\right)\right) \leq \frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-)\right) < 1.$$

Corolario 3.4 *Sean X, τ, C, T como el Corolario 3.2. Si $s(T) < 1+r_{X,\tau}(1)$ entonces T tiene punto fijo.*

Prueba:

Si $s(T) < 1 + r_{X,\tau}(1)$ por el Lema 2.3 se cumple $s(T) < \tau CS(X)$. De esta forma:

$$s(T) - r_{X,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{s(T)}\right) < s(T) - r_{X,\tau}(1) < 1.$$

Corolario 3.5 *Sean X, τ,C, T como el Corolario 3.2. Supongamos que X verifica la condición no estricta de Opial con respecto a τ. Si $s(T) < h_0$ donde*

$$h_0 = \sup\{t \geq 1 : \frac{1}{t} + \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{t}\right) \geq 1\},$$

entonces T tiene punto fijo.

Prueba:

Vimos en el Lema 2.5 que bajo la hipótesis de condición no estricta de Opial $\tau CS(X) \geq h_0$.

Si $s(T) < h_0$ entonces $\frac{1}{s(T)} + \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{s(T)}\right) > 1$. Así:

$$s(T)\left(1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{s(T)}\right)\right) < 1$$

y como consecuencia

$$\frac{s(T)^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{s(T)}\right)\right) < \frac{s(T)}{\tau CS(X)} < 1.$$

Los Corolarios 3.3, 3.5 fueron probados en [DX] cuando τ es la topología débil y con la hipótesis adicional de que X verifica la condición uniforme de Opial. En este caso, la prueba está basada en el uso de la constante $\kappa_w(X)$. El Corolario 3.4 también es probado en [Ku] pero con la condición de propiedad no estricta de Opial con respecto a τ.

En el siguiente ejemplo comprobaremos que el Teorema 3.4 mejora todos los resultados previos de existencia de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares, incluso cuando τ es la topología débil:

Ejemplo 3.3 Sea $X = l_2$ dotado de la norma:

$$\|x\| = \left(|x_1|^p + \left(\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p}$$

donde $p > 2$. Vamos a comprobar que $\Delta_{X,\beta,w}(\varepsilon) = 1 - \sqrt[p]{1 - \varepsilon^p/2^{p/2}}$.

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de X que converge débil al vector x con $\text{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon$. Construyendo una subsucesión de soportes casi disjuntos utilizando un argumento de aproximación y usando las propiedades de la norma euclídea, no es difícil probar que podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $x = ae_1 + be_2$ y $x_n = ae_1 + be_2 + ce_{n+2}$ para $n \geq 1$. Como $\|x_n - x_m\| > \varepsilon$ tenemos que $c > \varepsilon/\sqrt{2}$. Por otra parte, usando que $\|x_n\| \leq 1$ y la desigualdad $(u+v)^p \geq u^p + v^p$ para cada $u, v \geq 0$ obtenemos:

$$\|x\| = (a^p + b^p)^{1/p} \leq \left(1 - \left(b^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{p/2} + b^p\right)^{1/p} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^{p/2}}\right)^{1/p}$$

Como consecuencia:

$$\Delta_{X,\beta,w}(\varepsilon) \geq 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^{p/2}}\right)^{1/p}$$

Si elegimos ahora la sucesión

$$x_n = \left(1 - \frac{\eta^p}{2^{p/2}}\right)^{1/p} e_1 + \frac{\eta}{\sqrt{2}} e_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

con $\eta > \varepsilon$ arbitrario, comprobamos fácilmente la igualdad.

Un argumento similar prueba que $\Delta_{X,X,w}(\varepsilon) = 1 - (1 - \varepsilon^p)^{1/p}$.

Para calcular $r_X(c)$ podemos suponer, de nuevo sin pérdida de generalidad, que $x = ae_1 + be_2$ y $x_n = e_{n+2}$ con $\sqrt[p]{a^p + b^p} \geq c$. Entonces:

$$\|x_n + x\| = \left(a^p + (b^2+1)^{p/2}\right)^{1/p} \geq \left(c^p - b^p + (b^2+1)^{p/2}\right)^{1/p} \geq (c^p+1)^{1/p}$$

usando la desigualdad $(b^2+1)^{p/2} \geq b^p + 1$.

Tomando $x = ce_1$ obtenemos la igualdad $r_X(c) = (c^p + 1)^{1/p} - 1$.

Para este espacio es probado en el Teorema 3 de [D4] que $WCS(X) = \sqrt{2}$. De esta forma, es fácil comprobar que el Teorema 3.4 asegura punto fijo de la aplicación T si

$$s(T) < K_p = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 2^{\frac{p}{2}+2}}}{2}\right)^{1/p}$$

obteniéndose el mismo valor en los tres casos (a), (b), (c).

También es probado en [D4] que $\kappa_w(X) = 2^{1/p}$, por tanto, si comparamos K_p con los valores:

$$\sqrt{WCS(X)} = \sqrt[4]{2}, \qquad \kappa_w(X) = \sqrt[p]{2}, \qquad 1 + r_X(1) = \sqrt[p]{2}$$

comprobamos que son siempre estrictamente menores que K_p. Como consecuencia, el Teorema 3.4 es una mejora de los Teoremas 3.1, 3.2 en [DX] y Teorema 3.2 en [Ku].

Si calculamos en X la constante dada en el Teorema 3.2 obtenemos:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4WCS(X)\,(\kappa_w(X) - 1)}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\,(2^{1/p} - 1)}}{2}.$$

Por ejemplo, para $p = 3$, se comprueba que este valor es estrictamente menor que K_3.

Ejemplo 3.4 Sea $X = \mathbb{R} \times l_2$ con la norma

$$\|(\lambda, x)\| = \|x\|_2 + \max\{0, |\lambda| - \frac{1}{2}\|x\|_2\}$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclídea. Sea τ la topología débil en X.

Es conocido en [Ku] que

$$WCS(X) = \sqrt{2}, \quad \kappa_w(X) = 1, \quad 1 + r_X(1) = \frac{5}{4}.$$

Vamos a probar que:

$$r_X(c) = \begin{cases} \sqrt{1 + c^2} - 1 & \text{si } c \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1+4c^2}{4c} - 1 & \text{si } c \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión w-convergente a cero con $\liminf \|x_n\| \geq 1$ y sea x un vector en X tal que $\|x\| \geq c$. Siguiendo un argumento como en el ejemplo anterior, podemos suponer que $x = (\lambda, \mu, 0, \cdots)$ con $\lambda, \mu \geq 0$, $\mu + \max\{0, \lambda - \frac{1}{2}\mu\} \geq c$ y $x_n = e_{n+1}$. Así, el problema del cálculo de $r_X(c)$ es equivalente al problema de obtener el ínfimo de la función:

$$g(\lambda, \mu) = \sqrt{1 + \mu^2} + \max\left\{0, \lambda - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mu^2}\right\}$$

donde $\mu + \max\{0, \lambda - \frac{1}{2}\mu\} \geq c$. Mediante cálculos elementales obtenemos el resultado deseado.

Para resolver la ecuación

$$K = 1 + r_X\left(\frac{WCS(X)}{K}\right)$$

podemos suponer que $1 + r_X(c) = (1 + 4c^2)/4c$ puesto que la solución debe ser menor o igual que $WCS(X)$. De esta forma, conseguimos:

$$K = \sqrt{\frac{32\sqrt{2}+8}{31}} \approx 1.3106$$

valor que mejora todos los resultados de existencia de punto fijo de aplicaciones asintóticamente regulares en este espacio (ver [Ku]).

Para terminar, enunciamos los resultados de estabilidad de la τ-FPP que se deducen del Teorema 3.4, similarmente a como el Corolario 3.1 se obtuvo del Teorema 3.1.

Corolario 3.6 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología menos fina que la inducida por la norma. Supongamos que $\|\cdot\|$ es τ-sec.s.c.i. y sea $|\cdot|$ otra norma definida en X tal que*

$$|x| \leq \|x\| \leq d|x|$$

para todo $x \in X$. Denotemos $Y = (X, |\cdot|)$. Si se cumple una de las siguientes condiciones:

a) $\frac{d^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,\beta,\tau,}\left(\frac{\tau CS(X)^-}{d}\right)\right) < 1$,
b) $d - r_{X,\tau}\left(\frac{\tau CS(X)}{d}\right) < 1$,
c) X satisface la condición no estricta de Opial con respecto a τ y $\frac{d^2}{\tau CS(X)}\left(1 - \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{d}\right)\right) < 1$,
entonces Y tiene la τ-FPP.

Corolario 3.7 *En las condiciones del corolario anterior, si se cumple una de las siguientes condiciones:*

a) $d < \frac{1}{1-\Delta_{X,\tau,\beta}(1^-)}$,
b) $d < 1 + r_{X,\tau}(1)$,
c) X verifica la condición de Opial no estricta con respecto a τ y $d < h_0 = \sup\{t \geq 1 : \frac{1}{t} + \Delta_{X,X,\tau}\left(\frac{1^-}{t}\right) \geq 1\}$,
entonces Y cumple la τ-FPP.

CAPITULO 4

Teoremas de Punto Fijo en espacios de Orlicz

Nuestro objetivo en este capítulo será aplicar los resultados de estabilidad de la τ-FPP, obtenidos en los Capítulos 2 y 3 a los espacios de Orlicz $L_\Phi(\mu)$. Para ello, partiremos de un espacio de medida (Ω, Σ, μ) σ-finito y consideraremos la topología τ de la convergencia local en medida en $L_\Phi(\mu)$.

La primera sección estará dedicada a la introducción de los espacios de Orlicz. Los resultados que incluimos pueden ser encontrados en [KR], [LiT], [RR], donde el lector puede ampliar los detalles.

En la segunda sección probaremos los resultados técnicos necesarios que utilizaremos en el resto del capítulo. Para ello, definiremos una nueva función $a(\cdot)$ a partir de una función de Orlicz dada, y veremos como las propiedades de $a(\cdot)$ pueden ser aplicadas al estudio de los espacios de Orlicz.

En las dos secciones siguientes haremos distinción entre el espacio de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Luxemburg o con la norma de Orlicz. En ambos casos, probaremos que cumplen la condición clm-uniforme de Opial y encontraremos una cota inferior del módulo de Opial con respecto a la clm topología. Daremos ejemplos donde esta cota coincide exactamente con el valor del módulo. Como aplicación, acotaremos inferiormente los coeficientes geométricos $(clm)CS(X)$, $\kappa_{clm}(X)$ y enunciaremos teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares en $L_\Phi(\mu)$.

En la sección quinta, compararemos los valores de los coeficientes geométricos obtenidos en las secciones 3 y 4 con los coeficientes ya conocidos para el espacio de Orlicz de sucesiones l_Φ y la topología débil. Esta comparación será posible ya que, en la mayoría de los casos, si μ es la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$, la *clm* topología coincide con la topología débil en los subconjuntos acotados de l_Φ.

Finalmente, en la sección sexta, enunciaremos los teoremas de estabilidad de la *clm*-FPP que se obtienen como consecuencia del cálculo de diversos coeficientes geométricos efectuados anteriormente. Además, probaremos que, bajo condiciones mínimas, el espacio $L_\Phi(\mu)$ cumple la propiedad (A_{clm}), por tanto, también serán aplicables los teoremas de estabilidad obtenidos en el Capítulo 2 basados en la generalización del Lema de Goebel-Karlovitz. En esta línea, cuando dotamos al espacio $L_\Phi(\mu)$ con la norma de Luxemburg, conseguiremos una cota inferior del coeficiente $M_{clm}(L_\Phi(\mu))$ que llega a ser idéntica al valor de $M_{clm}(L_p(\mu))$ cuando consideramos las funciones de Orlicz $\Phi(x) = |x|^p$ para $p \in (1, +\infty)$. Por último, aplicando este resultado a los espacios de sucesiones de Orlicz l_Φ con la topología débil, obtenemos las mejores cotas de estabilidad de la w-FPP en los espacios l_Φ conocidas hasta ahora.

4.1 Introducción

Comenzamos definiendo el concepto de función de Orlicz y su función complementaria.

Definición 4.1 *Se dice que* $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ *es una función de Orlicz si* Φ *es convexa, continua, creciente,* $\Phi(0) = 0$ *y* $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$. *Se dice que la función de Orlicz* Φ *es no degenerada si* $\Phi(x) > 0$ *para todo* $x > 0$.

Nótese que si Φ es una función finita, su continuidad es consecuencia de ser creciente y convexa. Si Φ es no degenerada, entonces Φ es también estrictamente creciente.

Definición 4.2 *Sea* Φ *una función de Orlicz. Se define la función complementaria de* Φ *como* $\Phi^\star(y) = \sup\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\}$ *para* $y \in [0, +\infty)$.

Claramente $\Phi^\star$ es convexa, creciente, $\Phi^\star(0) = 0$ y $\lim_{y\to+\infty} \Phi^\star(y) = +\infty$. Sin embargo, no siempre la función complementaria de una función de Orlicz es una función de Orlicz. Por ejemplo, si $\Phi(x) = |x|$ es fácil comprobar que $\Phi^*(y) = 0$ para $0 \leq y \leq 1$, $\Phi^*(y) = +\infty$ para $y > 1$. Como consecuencia, Φ^* no es una función de Orlicz.

Definición 4.3 *Se dice que una función de Orlicz Φ es una N-función si verifica:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty.$$

En el caso de que la función de Orlicz Φ sea una N-función es conocido que la función complementaria Φ^*, no sólo es una función de Orlicz, sino que cumple también las propiedades de una N-función (ver por ejemplo [KR] pág. 11).

Definición 4.4 *Se dice que una función de Orlicz satisface la condición Δ_2-regular si existe $K > 0$ tal que $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para $x \geq 0$ si $\mu(\Omega) = +\infty$ ó $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para $x \geq x_0 \in (0, +\infty)$ si $\mu(\Omega) < +\infty$.*

Independientemente de la medida de Ω, diremos que una función de Orlicz Φ verifica la condición Δ_2 si existe $K > 0$ tal que $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ para todo $x \geq 0$. Si Φ es finita, es trivial comprobar que Φ satisface la condición Δ_2 si y sólo si:

$$\limsup_{x\to 0} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < +\infty \qquad \text{y} \qquad \limsup_{x\to +\infty} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < +\infty.$$

Nótese que si Φ es una función de Orlicz cumpliendo la condición Δ_2 entonces para todo $\gamma \geq 0$ existe $K_\gamma > 0$ tal que $\Phi(\gamma x) \leq K_\gamma \Phi(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. En efecto, como Φ es una función creciente trivialmente se cumple lo anterior si $\gamma \leq 2$. Supongamos que $\gamma > 2$. Sea n_0 el primer número natural tal que $\gamma \leq 2^{n_0+1}$ y sea $x \in [0, +\infty)$. Aplicando que Φ cumple la condición Δ_2 es fácil deducir:

$$\Phi(\gamma x) \leq K^{n_0} \Phi\left(\frac{\gamma x}{2^{n_0}}\right) \leq K^{n_0} \Phi(2x) \leq K^{n_0+1} \Phi(x).$$

Definición 4.5 *Dado (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y una función de Orlicz Φ, se define el espacio de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ como:*

$$L_\Phi(\mu) = \{f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \text{ medible } : \int_\Omega \Phi(\alpha|f|)d\mu < +\infty \text{ para algún } \alpha > 0\},$$

donde identificamos las funciones medibles iguales en casi todo.

Siempre vamos a suponer que μ es una medida con la propiedad del subconjunto finito, es decir, si $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$ existe $F \subset E$ medible, tal que $0 < \mu(F) < +\infty$. Obsérvese que esta condición sólo excluye las medidas tales que $\mu(A) = 0$ si $A = \emptyset$ ó $\mu(A) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$. Recordemos que un conjunto $A \in \Sigma$ es llamado un átomo para la medida μ si para cada $B \subset A$, $B \in \Sigma$, se cumple $\mu(B) = 0$ ó $\mu(A - B) = 0$. Diremos que un conjunto $D \in \Sigma$ es difuso para la medida μ si no contiene átomos. En este caso, es conocido que para cualquier $\lambda \in [0, \mu(D)]$ podemos encontrar un conjunto $D_1 \subset D$, $D_1 \in \Sigma$, tal que $\mu(D_1) = \lambda$.

Para que el espacio de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ tenga estructura de espacio vectorial es condición suficiente que la función de Orlicz Φ sea Δ_2-regular. En el caso de que la medida μ sea difusa en un conjunto de medida positiva, la Δ_2-regularidad es también condición necesaria.

Si Φ es una función de Orlicz Δ_2-regular, podemos definir para cada $f \in L_\Phi(\mu)$:

$$N_\Phi(f) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) d\mu \leq 1\right\}$$

$$\|f\|_\Phi = \sup\left\{\int_\Omega |fg| d\mu : \int_\Omega \Phi^*(|g|)d\mu \leq 1\right\}$$

No es difícil comprobar que $N_\Phi(\cdot)$ y $\|\cdot\|_\Phi$ están bien definidas y dotan a $L_\Phi(\mu)$ de estructura de espacio normado. Estas normas se conocen como la norma de Luxemburg y la norma de Orlicz respectivamente. La norma de Luxemburg es también conocida con el nombre de "gauge", debido a que representa el funcional de Minkowski del conjunto $\{f \in L_\Phi(\mu) : \int \Phi(|f|)d\mu \leq 1\}$.

Si $\Phi = |x|^p$ para algún $p \in [1, +\infty)$ el espacio de Orlicz correspondiente coincide con $L_p(\mu)$. En este caso, para toda $f \in L_p(\mu)$ se obtiene $N_\Phi(f) = \|f\|_p$, y si $p > 1$ $\|f\|_\Phi = p^{1/p}q^{1/q}\|f\|_p$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

El siguiente teorema muestra la equivalencia entre ambas normas (ver por ejemplo [RR], Capítulo III).

Teorema 4.1 *Los espacios* $(L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$, $(L_\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ *son espacios de Banach isomorfos. De hecho,* $N_\Phi(f) \leq \|f\|_\Phi \leq 2N_\Phi(f)$ *para toda* $f \in L_\Phi(\mu)$.

En $L_\Phi(\mu)$ podemos definir el siguiente subespacio vectorial:

$$H_\Phi(\mu) = \left\{ f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \text{ medible } \mid \int_\Omega \Phi(\alpha|f|)d\mu < +\infty \quad \forall \alpha > 0 \right\}$$

Una condición suficiente para que el espacio $H_\Phi(\mu)$ coincida con $L_\Phi(\mu)$ es que la función de Orlicz Φ sea Δ_2-regular ([RR], pág. 77). De hecho, esta condición es también necesaria si existe un subconjunto de medida positiva difuso para μ.

4.2 Algunos Lemas técnicos

A partir de ahora siempre vamos a suponer que el espacio de medida (Ω, Σ, μ) es σ-finito y Φ es una función de Orlicz finita, no degenerada tal que cumple la condición Δ_2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer también $\Phi(1) = 1$. En efecto, si $\Phi(1) \neq 1$ definimos $\lambda_0 = \Phi^{-1}(1)$ y consideramos la aplicación $\Phi_1(x) = \Phi(\lambda_0 x)$. Trivialmente se comprueba que Φ_1 es una función de Orlicz no degenerada, cumple la condición Δ_2, $\Phi_1(1) = 1$ y la función conjugada de Φ_1 es $\Phi_1^\star(x) = \Phi^\star\left(\frac{x}{\lambda_0}\right)$. Es un simple ejercicio comprobar que los espacios $L_\Phi(\mu)$, $L_{\Phi_1}(\mu)$ son isométricos. De hecho, se obtienen las siguientes igualdades entre las normas:

$$N_{\Phi_1}(f) = \Phi^{-1}(1)N_\Phi(f),$$

$$\|f\|_{\Phi_1} = \Phi^{-1}(1)\|f\|_\Phi,$$

para toda $f \in L_\Phi(\mu) = L_{\Phi_1}(\mu)$.

Por comodidad en la notación, en el resto del capítulo denotaremos $\Psi = \Phi^{-1}$ y $I_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu$ si esta integral tiene sentido.

A continuación definimos una función, inspirada en [DR], que resultará un instrumento muy útil para la mayoría de los resultados que vamos a obtener.

Definición 4.6 *Sea $a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida como:*

$$a(\delta) = \inf \left\{ \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0 \right\}$$

Lema 4.1 *La función $a(\cdot)$ cumple las siguientes propiedades:*

(1) $a(\cdot)$ es decreciente, continua a la izquierda y $\lim_{\delta \to 1^-} a(\delta) = 1$.

(2) $a(\delta) > 1$ si $\delta < 1$.

(3) $a(\delta\delta') \geq a(\delta)a(\delta')$ si $\delta, \delta' \in (0, +\infty)$. En particular $a(\cdot)$ es estrictamente decreciente.

(4) $\lim_{\delta \to 0} a(\delta) = +\infty$.

Prueba:

(1). Trivialmente se comprueba que $a(\cdot)$ es una función decreciente, por tanto, si $\delta_0 \in (0, +\infty)$ existe $\lim_{\delta \to \delta_0^-} a(\delta) = l \geq a(\delta_0)$. Como consecuencia, $l \leq \Psi(t)/\Psi(\delta t)$ para todo $t > 0$ y $\delta < \delta_0$. Como la función Ψ es continua $l \leq \Psi(t)/\Psi(\delta_0 t)$ para todo $t > 0$, por consiguiente $l \leq a(\delta_0)$. Además, $\lim_{\delta \to 1^-} a(\delta) = 1$ ya que $a(1) = 1$.

(2). Supongamos que existe $\delta < 1$ tal que $a(\delta) \leq 1$. Por definición de $a(\delta)$ existe una sucesión $\{t_n\} \subset (0, +\infty)$ tal que $\lim_n \frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\delta t_n)} \leq 1$. Si la sucesión $\{t_n\}$ estuviera acotada, tomando una subsucesión si fuera necesario, podríamos suponer que $\{t_n\}$ converge a un número real que denotamos por t_0. Aplicando de nuevo la continuidad de Ψ, deducimos que $\Psi(t_0) \leq \Psi(\delta t_0)$ y por tanto $t_0 = 0$ ya que Ψ es estrictamente creciente y $\delta < 1$.

Por el contrario, si $\{t_n\}$ es una sucesión no acotada, podemos suponer, a través de una subsucesión, que diverge. Sin embargo, vamos a comprobar que ninguno de los límites $\liminf_{t \to 0^+} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} \leq 1$, $\liminf_{t \to +\infty} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} \leq 1$ son posibles:

Denotemos $\gamma = 1/\delta > 1$. Como la función Φ verifica la condición Δ_2, existe $K_0 > 0$ tal que $\Phi(\gamma t) \leq K_0 \Phi(t)$ para todo $t \geq 0$.

Sea $h > 1$ tal que $\gamma^h > K_0$. Elegimos un número real ε, $0 < \varepsilon < (\gamma - 1)^2(\gamma^h - 1)^{-1}$ y sea $\eta > 0$.

Si suponemos $\liminf_{t \to 0^+} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} \leq 1$ ó $\liminf_{t \to +\infty} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} \leq 1$ entonces se cumple $\liminf_{t \to 0^+} \frac{\Psi(\gamma t)}{\Psi(t)} \leq 1$ ó $\liminf_{t \to +\infty} \frac{\Psi(\gamma t)}{\Psi(t)} \leq 1$ respectivamente. En cualquiera de los dos casos existe $t_0 \in (0,+\infty)$ tal que $\Psi(\gamma t_0) - \Psi(t_0) < \varepsilon\Psi(t_0)$. Pero Ψ es una función cóncava, por tanto:

$$\Psi(\gamma^h t_0) < \Psi(t_0) + \frac{\Psi(\gamma t_0) - \Psi(t_0)}{\gamma t_0 - t_0}(\gamma^h t_0 - t_0) < \Psi(t_0)\left(1 + \varepsilon\frac{\gamma^h - 1}{\gamma - 1}\right) < \gamma\Psi(t_0).$$

Como consecuencia, $\Psi(\gamma^h t_0)/\gamma < \Psi(t_0)$.

Denotamos $s_0 = \Psi(\gamma^h t_0)$. Entonces:

$$\frac{\Phi(s_0)}{\Phi(s_0/\gamma)} = \frac{\gamma^h t_0}{\Phi(\Psi(\gamma^h t_0)/\gamma)} > \frac{\gamma^h t_0}{\Phi(\Psi(t_0))} = \gamma^h > K_0,$$

lo cual contradice la elección de K_0.

(3). Sean $\delta, \delta' \in (0,+\infty)$:

$$a(\delta\delta') = \inf\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta\delta' t)}; t > 0\right\} \geq \inf\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta t)} : t > 0\right\} \inf\left\{\frac{\Psi(\delta t)}{\Psi(\delta\delta' t)} : t > 0\right\} =$$

$$a(\delta)\inf\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi(\delta' t)} : t > 0\right\} = a(\delta)a(\delta').$$

El decrecimiento estricto de la función $a(\cdot)$ es consecuencia de esta desigualdad y de la propiedad (2).

(4). Tomando $\delta' = 1/2$ en (3), deducimos $a(\delta/2) \geq a(1/2)a(\delta)$ para todo $\delta > 0$ y por inducción, fácilmente se prueba, $a(1/2^n) \geq [a(1/2)]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea H un número positivo arbitrario. Como $a(1/2) > 1$ existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $[a(1/2)]^h > H$. Por tanto, si $\delta < 1/2^h$ obtenemos $a(\delta) > a(1/2^h) \geq [a(1/2)]^h > H$. Como consecuencia, $\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = +\infty$.

Lema 4.2 *Sea $a(\cdot)$ la función definida anteriormente. Si δ, s son números positivos entonces $\delta\Phi(s) \leq \Phi\left(\frac{s}{a(\delta)}\right)$.*

Prueba:

Sea $s > 0$ y denotemos $t = \Phi(s)$. Como $\Psi(t)/\Psi(\delta t) \geq a(\delta)$ para todo $t > 0$, obtenemos $s/a(\delta) \geq \Psi(\delta t)$. Como consecuencia, $\Phi(s/a(\delta)) \geq \delta\Phi(s)$.

De igual forma que en [D3], definimos la función $a^{-1} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ como $a^{-1}(\theta) = \sup\{\delta > 0 : a(\delta) > \theta\}$.

Lema 4.3 *La función $a^{-1}(\cdot)$ cumple las siguientes propiedades:*
(1) $a^{-1}(a(\delta)) = \delta$ *para cualquier* $\delta \in (0, +\infty)$.
(2) $a(a^{-1}(\theta)) \geq \theta$ *para cualquier* $\theta \in (0, +\infty)$.
(3) $a^{-1}(\theta\theta') \geq a^{-1}(\theta)a^{-1}(\theta')$ *para cualesquiera* $\theta, \theta' \in (0, +\infty)$.
(4) Para cualesquiera θ, s *números positivos se cumple* $\Phi\left(\frac{s}{\theta}\right) \geq a^{-1}(\theta)\Phi(s)$.
(5) $\lim_{\theta \to 0} a^{-1}(\theta) = +\infty$.

Prueba:

Las propiedades (1) y (2) son triviales a partir de la definición.

(3). Sean $\theta, \theta' \in (0, +\infty)$ y definimos $\delta = a^{-1}(\theta), \delta' = a^{-1}(\theta')$. Por la propiedad (3) del Lema 4.1 y aplicando (2) deducimos $a(a^{-1}(\theta)a^{-1}(\theta')) \geq a(a^{-1}(\theta))a(a^{-1}(\theta')) \geq \theta\theta'$. Como la función $a^{-1}(\cdot)$ es decreciente, usando (1) obtenemos $a^{-1}(\theta)a^{-1}(\theta') \leq a^{-1}(\theta\theta')$.

(4). Sean θ, s números positivos y notemos $\delta = a^{-1}(\theta)$. Por el Lema 4.2 y la propiedad (2) obtenemos:

$$a^{-1}(\theta)\Phi(s) \leq \Phi\left(\frac{s}{a\left(a^{-1}(\theta)\right)}\right) \leq \Phi\left(\frac{s}{\theta}\right).$$

(5). Probemos en primer lugar que existe $\theta_0 < 1$ con $a^{-1}(\theta_0) > 1$. En efecto, sea $\delta > 1$. Como la función $a(\cdot)$ es estrictamente decreciente se cumple $a(\delta) < a(1) = 1$. Entonces, si elegimos $\theta_0 < a(\delta)$, por definición de $a^{-1}(\theta_0)$ se obtiene $a^{-1}(\theta_0) > \delta > 1$.

Tomando $\theta = \theta' = \theta_0$ en (3) es muy fácil probar por inducción que $a^{-1}(\theta_0^n) \geq [a^{-1}(\theta_0)]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Razonando de igual forma que en la prueba de la propiedad (4) del Lema 4.1 obtenemos $\lim_{\theta \to 0} a^{-1}(\theta) = +\infty$.

En el siguiente lema estudiamos como podemos acotar la norma de una función $f \in L_\Phi(\mu)$ a través de la integral $I_\Phi(f)$.

Lema 4.4 *Sean* $\delta > 0$ *y* f *una función en* $L_\Phi(\mu)$. *Si* $I_\Phi(f) \leq \delta$ *entonces* $N_\Phi(f) \leq 1/a(\delta)$. *En particular, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $I_\Phi(f) < \delta$ *entonces* $|f| < \varepsilon$, *donde por* $|\cdot|$ *denotamos la norma de Luxemburg o la norma de Orlicz.*

Prueba:

Sean $\delta > 0$ y $f \in L_\Phi(\mu)$ con $I_\Phi(f) \leq \delta$. Aplicando la desigualdad dada en el Lema 4.2 obtenemos:

$$\int \Phi\left(a(\delta)|f|\right) \leq \int \frac{1}{\delta}\Phi(|f|) = \frac{1}{\delta}I_\Phi(f) \leq 1,$$

por tanto, $N_\Phi(f) \leq 1/a(\delta)$.

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $a(\delta) > 1/\varepsilon$ ya que $\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = +\infty$. Como consecuencia, si $I_\Phi(f) < \delta$ entonces $N_\Phi(f) < \varepsilon$.

Observar que el resultado anterior es también válido para la norma de Orlicz ya que es equivalente a $N_\Phi(\cdot)$.

El siguiente resultado será de gran importancia en el resto del capítulo, pues dada una sucesión en $L_\Phi(\mu)$, *clm* convergente a la función nula, nos permitirá construir una subsucesión cuyas funciones se comportan, en cierto sentido, como si tuvieran soportes disjuntos.

Lema 4.5 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y $\{f_n\}$ una sucesión en $L_\Phi(\mu)$ convergente a la función nula en la topología de la convergencia local en medida. Si f es otra función en $L_\Phi(\mu)$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, una sucesión $\{g_k\}$ y una función g en $L_\Phi(\mu)$ tal que:*

$$supp g_k \cap supp g = \emptyset \text{ para } k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_k |f_{n_k} - g_k| = 0 \quad y \quad |f - g| < \varepsilon$$

donde por $|\cdot|$ denotamos la norma de Luxemburg o la norma de Orlicz. Además, si $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$ es una partición σ-finita de Ω, las funciones g_k y g pueden ser construidas de forma que sus soportes están contenidos en una unión finita de Ω_k.

Prueba:

Dado $\varepsilon > 0$ por el Lema 4.4 existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \varepsilon$ si $h \in L_\Phi(\mu)$ y $I_\Phi(h) < \delta$.

Sea $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$ una partición σ-finita de Ω. Como $f \in L_\Phi(\mu)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k>k_0} \int_{\Omega_k} \Phi(|f|)d\mu < \frac{\delta}{2}$$

Por otra parte, por la continuidad absoluta de la integral, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un número real $\eta_k > 0$ tal que si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) < \eta_k$ entonces:

$$\int_A \Phi(|f|)d\mu \leq \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

Sea $\{\varepsilon_k\}$ una sucesión decreciente de números reales convergente a cero. Para cada ε_k elegimos el correspondiente δ_k dado en el Lema 4.4.

La sucesión $\{f_n\}$ es convergente a cero en la *clm* topología y sabemos que en los espacios de medida finita la *clm* convergencia es equivalente a la convergencia en medida. Como $\mu\left(\cup_1^{k_0}\Omega_k\right) < +\infty$ deducimos:

$$\lim_n \mu\left(\left\{x \in \cup_1^{k_0}\Omega_k : \Phi(|f_n(x)|) \geq \frac{\delta_1}{2\mu(\cup_1^{k_0}\Omega_k)}\right\}\right) = 0.$$

Por tanto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_1) \leq \eta_1$ si definimos A_1 como el conjunto:

$$A_1 = \left\{x \in \cup_1^{k_0}\Omega_k : \Phi(|f_{n_1}(x)|) \geq \frac{\delta_1}{2\mu(\cup_1^{k_0}\Omega_k)}\right\}.$$

Consideremos la función $f_{n_1} \in L_\Phi(\Omega)$ y un número entero $k_1 > k_0$ tal que

$$\sum_{k>k_1} \int_{\Omega_k} \Phi(|f_{n_1}|)d\mu < \frac{\delta_1}{2}.$$

Definimos la siguiente función de $L_\Phi(\mu)$:

$$g_1 = f_{n_1}\chi_{\cup_{k>k_0}^{k_1}\Omega_k \cup A_1}$$

Entonces:

$$I_\Phi(g_1 - f_{n_1}) = \int_{\cup_1^{k_0}\Omega_k \setminus A_1} \Phi(|f_{n_1}|) + \sum_{k>k_1} \int_{\Omega_k} \Phi(|f_{n_1}|) \leq \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1.$$

Supongamos que, por un método inductivo, hemos construido dos sucesiones finitas de números naturales $k_0 < k_1 < \ldots < k_{l-1}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_{l-1}$ y una sucesión finita de conjuntos medibles $A_i \subset \cup_1^{k_{i-1}}\Omega_k$ con $\mu(A_i) \leq \eta_i$ y $I_\Phi(g_i - f_{n_i}) \leq \delta_i$ para $i = 1, \ldots, l-1$, donde la función g_i es definida como

$$g_i = f_{n_i}\chi_{\cup_{k>k_{i-1}}^{k_i}\Omega_k \cup A_i}$$

Utilizando de nuevo que $\mu(\cup_1^{k_{l-1}}\Omega_k) < +\infty$ y $\{f_n\}$ converge a cero en la *clm* topología, podemos encontrar $n_l > n_{l-1}$ tal que $\mu(A_l) \leq \eta_l$ si definimos A_l como el conjunto:

$$A_l = \left\{ x \in \cup_1^{k_{l-1}}\Omega_k : \Phi(|f_{n_l}(x)|) \geq \frac{\delta_l}{2\mu(\cup_1^{k_{l-1}}\Omega_k)} \right\}.$$

Considerando la función $f_{n_l} \in L_\Phi(\mu)$, existe $k_l > k_{l-1}$ tal que

$$\sum_{k>k_l} \int_{\Omega_k} \Phi(|f_{n_l}|)d\mu \leq \frac{\delta_l}{2}.$$

Si definimos la función

$$g_l = f_{n_l}\chi_{\cup_{k>k_{l-1}}^{k_l}\Omega_k \cup A_l},$$

comprobamos que $I_\Phi(g_l - f_{n_l}) \leq \delta_l$. Como consecuencia, $|g_l - f_{n_l}| \leq \varepsilon_l$ y $\lim_k |g_k - f_{n_k}| = 0$.

Definimos la función

$$g = f\chi_{\left(\cup_1^{k_0}\Omega_k\right)\setminus(\cup_{k=1}^{\infty}A_k)} \in L_\Phi(\mu).$$

Es trivial comprobar que $\mathrm{supp} g_k \cap \mathrm{supp} g = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Además:

$$I_\Phi(f-g) \leq \sum_{k>k_0} \int_{\Omega_k} \Phi(|f|)d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \Phi(|f|)d\mu \leq \frac{\delta}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k+1}} = \delta.$$

Por la elección de δ concluimos finalmente que $|f-g| < \varepsilon$.

4.3 El espacio $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Luxemburg. Condición de Opial uniforme y Teoremas de Punto Fijo

En esta sección, vamos a considerar el espacio Banach $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Luxemburg, con Φ una función de Orlicz finita, no degenerada con la condición Δ_2.

En primer lugar, si Φ es una función de Orlicz cumpliendo la condición Δ_2-regular, es fácil probar que $I_\Phi(f) = 1$ si y sólo si $N_\Phi(f) = 1$. Para ello, es suficiente tener en cuenta la definición de la norma de Luxemburg y observar que la aplicación $h(c) = I_\Phi\left(\frac{f}{c}\right)$ $(c > 0)$ es continua y estrictamente decreciente. La continuidad de la función $h(c)$ puede probarse fácilmente usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Como el espacio de medida (Ω, Σ, μ) es σ-finito, podemos definir en $L_\Phi(\mu)$ la topología de la convergencia local en medida. Nuestro primer objetivo será probar que el espacio de Banach $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Luxemburg, verifica la condición clm-uniforme de Opial. Para ello, comprobaremos que el módulo de Opial asociado es estrictamente positivo para todo $c > 0$. Recordemos que si τ es una topología de espacio vectorial topológico definida en un espacio de Banach X, siempre se cumple $\tau CS(X) \geq 1 + r_{X,\tau}(1)$ (Lema 2.3). Además, si la norma es τ-sec.s.c.i. y X verifica la condición τ-uniforme de Opial entonces, por el Lema 3.2, $1 + r_{X,\tau}(1) = \kappa_\tau(X)$.

Teorema 4.2 *El espacio $X = (L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$ verifica la condición clm-uniforme de Opial. En particular:*

$$1 + r_{X,clm}(c) \geq a\left(\frac{1}{1 + a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}\right)$$

para todo $c > 0$.

Prueba:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L_\Phi(\mu)$ clm-convergente a la función nula tal que $\liminf N_\Phi(f_n) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea f otra función de $L_\Phi(\mu)$ con $N_\Phi(f) \geq c$. Es fácil comprobar que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $\lim_n N_\Phi(f_n + f)$, $N_\Phi(f_n) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además, que la sucesión $\{f_n\}$ está acotada en norma.

Tomemos $0 < \varepsilon < \min\{1, c\}$ y consideremos las funciones $\{f_{n_k}\}$, $\{g_k\}$, g como en el Lema 4.5. Debido a que $\lim_k N_\Phi(f_{n_k} - g_k) = 0$, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_\Phi(f_{n_k} - g_k) \leq \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Además, según la construcción de las funciones g_k, g, es trivial comprobar que $N_\Phi(g) \leq N_\Phi(f)$ y $N_\Phi(g_k) \leq N_\Phi(f_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definimos las funciones:

$$h = \frac{c}{c-\varepsilon} g, \qquad h_k = \frac{1}{1-\varepsilon} g_k$$

para $k \geq k_0$. Las funciones h y h_k tienen soportes disjuntos, $N_\Phi(h_k) \geq 1$ y $N_\Phi(h) \geq c$ ya que $N_\Phi(f-g) \leq \varepsilon$. Definimos

$$\rho = a\left(\frac{1}{1+a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}\right)$$

Usando las propiedades (3), (4) del Lema 4.3 y la definición de ρ deducimos:

$$I_\Phi\left(\frac{h_k+h}{\rho}\right) = I_\Phi\left(\frac{h_k}{\rho}\right) + I_\Phi\left(\frac{h/c}{\rho/c}\right) \geq$$

$$a^{-1}(\rho) I_\Phi(h_k) + a^{-1}\left(\frac{\rho}{c}\right) I_\Phi\left(\frac{h}{c}\right) \geq$$

$$a^{-1}(\rho) + a^{-1}\left(\frac{\rho}{c}\right) \geq a^{-1}(\rho) + a^{-1}(\rho)a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right) =$$

$$a^{-1}(\rho)\left[1 + a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = 1.$$

Como consecuencia:

$$\rho \leq N_\Phi(h_k+h) \leq N_\Phi(h_k - f_{n_k}) + N_\Phi(h-f) + N_\Phi(f_{n_k}+f) \leq$$

$$N_\Phi(h_k-g_k) + N_\Phi(g_k - f_{n_k}) + N_\Phi(h-g) + N_\Phi(g-f) + N_\Phi(f_{n_k}+f) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} N_\Phi(g_k) + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{c-\varepsilon} N_\Phi(g) + \varepsilon + N_\Phi(f_{n_k}+f) \leq$$

$$2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} N_\Phi(f_{n_k}) + \frac{\varepsilon}{c-\varepsilon} N_\Phi(f) + N_\Phi(f_{n_k}+f).$$

Tomando límites cuando k tiende a infinito deducimos:

$$\rho \leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} M + \frac{\varepsilon}{c-\varepsilon} N_\Phi(f) + \lim_k N_\Phi(f_{n_k}+f) =$$

$$2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} M + \frac{\varepsilon}{c-\varepsilon} N_\Phi(f) + \lim_n N_\Phi(f_n+f)$$

donde M es una cota superior de $\{N_\Phi(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Finalmente, como ε es arbitrario obtenemos $\rho \leq \lim_n N_\Phi(f_n+f)$ y por tanto $1 + r_{X,clm}(c) \geq \rho$.

Por otra parte, existe $\delta_0 > 0$ tal que $a(\delta_0) > 1/c$ ya que $\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = +\infty$. De esta forma, $a^{-1}(1/c) = \sup\{\delta > 0 : a(\delta) > 1/c\} \geq \delta_0 > 0$ y debido a que la función $a(\cdot)$ es estrictamente decreciente y $a(1) = 1$ comprobamos que $\rho > 1$ para cualquier $c > 0$. Como consecuencia, X tiene la propiedad clm-uniforme de Opial.

Para el caso particular $c = 1$ podemos conseguir una mejor estimación del módulo $r_{X,clm}(1)$. Para ello vamos a considerar nuevos parámetros, cuyas definiciones están inspiradas en [CH].

En primer lugar, si $\{\Omega_n\}$ es una partición σ-finita de Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$C_\Phi(n) = \inf\left\{c_f > 0 : \exists f \in L_\Phi(\mu),\, N_\Phi(f) \geq 1, I_\Phi\left(\frac{f}{c_f}\right) = \frac{1}{2},\right.$$
$$\left.\operatorname{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^n \Omega_i\right\}$$

Comprobemos que $C_\Phi(n)$ está bien definido y $C_\Phi(n) \geq 1$:

Sea $f \in L_\Phi(\mu)$ con $N_\Phi(f) \geq 1$ y definimos la función $h : (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ como $h(c) = I_\Phi\left(\frac{f}{c}\right)$. La función h es continua, decreciente y $h(1) \geq 1$ ya que $N_\Phi(f) \geq 1$. Por otra parte, sea $\{c_n\}$ una sucesión de números reales creciente y tendiendo a infinito. Si definimos las funciones $h_n = \Phi\left(\frac{|f|}{c_n}\right)$, obtenemos una sucesión de funciones decreciente y convergente a cero puntualmente. Aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona deducimos que $\lim_n \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{c_n}\right) = 0$ y por tanto $\lim_{c\to+\infty} h(c) = 0$. Como consecuencia, existe $c_f > 1$ tal que $h(c_f) = I_\Phi\left(\frac{f}{c_f}\right) = \frac{1}{2}$ y $C_\Phi(n) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como la sucesión $\{C_\Phi(n)\}_n$ es decreciente, definimos:

$$D_\Phi = \lim_n C_\Phi(n).$$

Veamos en primer lugar que la definición de la constante D_Φ no depende de la partición σ-finita elegida.

Lema 4.6 D_Φ *no depende la la sucesión* $\{\Omega_n\}$ *elegida.*

Prueba:

Sean $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega'_n\}$ dos particiones σ-finitas de Ω. Sean $C_\Phi(n)$ y D_Φ como anteriormente y definimos:

$$C'_\Phi(n) = \inf\{c'_f > 0 : \exists f \in L_\Phi(\mu), N_\Phi(f) \geq 1, I_\Phi\left(\tfrac{f}{c_f}\right) = \tfrac{1}{2},$$
$$\operatorname{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^n \Omega'_i\},$$

y $D'_\Phi = \lim_n C'_\Phi(n)$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y una función $f \in L_\Phi(\mu)$ con $N_\Phi(f) \geq 1$ y $\operatorname{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^n \Omega'_i = A$.

Como $\sum_n \int_{\Omega_n} \Phi(|f|)d\mu < +\infty$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} \int_{\Omega_n} \Phi(|f|)d\mu < \delta$, donde δ se ha elegido tal que $N_\Phi(g) < \varepsilon$ si $I_\Phi(g) < \delta$.

Sea $B = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ y definimos $h = (f\chi_B)/(1-\varepsilon)$. Entonces:

$$N_\Phi(h) \geq \frac{1}{1-\varepsilon} N_\Phi(f) - \frac{1}{1-\varepsilon} N_\Phi(f - f\chi_B) \geq \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1,$$

pues $I_\Phi(f - f\chi_B) = \int_{\Omega\setminus B} \Phi|f|d\mu < \delta$.

Sea $c_h > 0$ tal que $I_\Phi\left(\frac{h}{c_h}\right) = \frac{1}{2}$. Vamos a probar que $c'_f \geq c_h(1-\varepsilon)$. En efecto:

$$I_\Phi\left(\frac{f}{c_h(1-\varepsilon)}\right) = \int_B \Phi\left(\frac{|h|(1-\varepsilon)}{c_h(1-\varepsilon)}\right) d\mu + \int_{\Omega\setminus B} \Phi\left(\frac{|f|}{c_h(1-\varepsilon)}\right) d\mu \geq$$

$$\int_B \Phi\left(\frac{|h|}{c_h}\right) d\mu = I_\Phi\left(\frac{h}{c_h}\right) = \frac{1}{2}.$$

Con lo cual $c'_f \geq c_h(1-\varepsilon) \geq D_\Phi(N)(1-\varepsilon) \geq D_\Phi(1-\varepsilon)$. Así, $C'_\Phi(n) \geq D_\Phi(1-\varepsilon)$. Tomando límite cuando n tiende a infinito se obtiene $D'_\Phi \geq D_\Phi(1-\varepsilon)$ y como ε es arbitrario resulta $D'_\Phi \geq D_\Phi$. Análogamente se probaría $D_\Phi \geq D'_\Phi$.

Teorema 4.3 *En las condiciones anteriores, si* $X = (L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$ *se cumple* $1 + r_{X,clm}(1) \geq D_\Phi$.

Prueba:

Sea $\{f_m\}$ una sucesión en $L_\Phi(\mu)$ clm-convergente a la función idénticamente nula como en la prueba del Teorema 4.2. Sea f otra función en $L_\Phi(\mu)$ con $N_\Phi(f) \geq 1$. Razonando de igual forma que en el Teorema 4.2 definimos las funciones:

$$h = \frac{g}{1-\varepsilon}, \qquad h_k = \frac{g_k}{1-\varepsilon} \quad \text{para cada } k \geq k_0.$$

Fijemos $k \geq k_0$. Las funciones h, h_k tienen norma de Luxemburg mayor o igual que uno y soportes contenidos en una unión finita de $\{\Omega_n\}$ y disjuntos. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que supp$h$, supp$h_k \subset \cup_{i=1}^{n_0}\Omega_i$. Como consecuencia:

$$I_\Phi\left(\frac{h_k+h}{D_\Phi}\right) = I_\Phi\left(\frac{h_k}{D_\Phi}\right) + I_\Phi\left(\frac{h}{D_\Phi}\right) \geq I_\Phi\left(\frac{h_k}{C_\Phi(n_0)}\right) + I_\Phi\left(\frac{h}{C_\Phi(n_0)}\right) \geq$$

$$I_\Phi\left(\frac{h_k}{c_{h_k}}\right) + I_\Phi\left(\frac{h}{c_h}\right) = 1.$$

Por tanto $N_\Phi(h_k+h) \geq D_\Phi$.

Razonando como en la demostración del Teorema 4.2 y usando que ε es arbitrario, deducimos finalmente que:

$$D_\Phi \leq \lim_n N_\Phi(f_n+f).$$

Comprobemos que efectivamente, en el Teorema 4.3 obtenemos una mejor estimación del valor $1 + r_{X,clm}(1)$ que la dada en el Teorema 4.2.

Lema 4.7 $D_\Phi \geq a(1/2)$.

Prueba:

Comprobemos que $C_\Phi(n) \geq a(1/2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $f \in L_\Phi(\mu)$, $c_f > 0$ tal que $N_\Phi(f) \geq 1$, $I_\Phi\left(\frac{f}{c_f}\right) = 1/2$ y $\text{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^{n}\Omega_i$. Si aplicamos la desigualdad del Lema 4.2 con $\delta = 1/2$ obtenemos:

$$I_\Phi\left(\frac{f}{a(1/2)}\right) \geq \frac{1}{2}I_\Phi(f) \geq \frac{1}{2}.$$

Como la aplicación $c > 0 \to I_\Phi\left(\frac{f}{c}\right)$ es decreciente, $c_f \geq a(1/2)$. Por tanto, $C_\Phi(n) \geq a(1/2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Trivialmente, por definición de D_Φ, concluimos $D_\Phi \geq a(1/2)$.

A lo largo del capítulo denotaremos $a_0 = a(1/2)$. Obsérvese que aunque siempre se cumple la desigualdad $D_\Phi \geq a_0$, el cálculo de la constante a_0 es más simple y sólo depende de la función de Orlicz considerada, independientemente del espacio de medida.

En el caso particular de que $\Phi(x) = |x|^p$ para algún $p \in [1, +\infty)$ es muy fácil comprobar que $a(1/2) = 2^{1/p}$ y $C_\Phi(n) = 2^{1/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso $a(1/2) = D_\Phi = 2^{1/p}$ que es el valor exacto de $1 + r_{L_p(\mu),clm}(1)$. No obstante, veremos con algunos ejemplos que las constantes a_0 y D_Φ coinciden en un marco mucho más amplio que el que constituye la medida de Lebesgue y las funciones del tipo $|x|^p$ para algún $p \in [1, +\infty)$.

Por último, es muy fácil comprobar a partir del Lema de Fatou (ver [RR], pág 56), que la norma de Luxemburg es siempre *clm*-sec.s.c.i. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado.

Corolario 4.1 *Si* $X = (L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$ *entonces* $(clm)CS(X) \geq \kappa_{clm}(X) = 1 + r_{X,clm}(1) \geq D_\Phi \geq a_0$. *En particular, si* $\Phi(x) = |x|^p$ *para algún* $p \in [1, +\infty)$ *las desigualdades anteriores son igualdades y coinciden con* $2^{1/p}$.

Como consecuencia del estudio anterior y del Corolario 3.4 se obtiene el siguiente teorema de punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares. Nótese que por estar la topología *clm* definida a través de una métrica, los conjuntos *clm*-secuencialmente compactos coinciden con los conjuntos *clm*-compactos.

Teorema 4.4 *Sea* Φ *una función de Orlicz finita, no degenerada, cumpliendo la condición* Δ_2. *Sea* C *un subconjunto de* $(L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$ *convexo, acotado, clm-compacto y* $T : C \to C$ *una aplicación asintóticamente regular. Si* $s(T) < D_\Phi$ *entonces* T *tiene punto fijo.*

Obsérvese que podemos sustituir la constante D_Φ por a_0, cuyo cálculo es directo a partir de la función de Orlicz.

Nota 4.1 El resultado del Teorema 4.4 no es cierto si sólo exigimos a C ser débilmente compacto y convexo. En efecto, hemos comprobado que $D_\Phi \geq a_0 > 1$, sin embargo, puede ocurrir que $L_\Phi(\mu)$ no cumpla la w-FPP. Este es el caso de $L_1(\mu)$, donde $D_\Phi = 2$. Como $L_1(\mu)$ no tiene la w-FPP existe un conjunto C convexo, w-compacto y una aplicación $T : C \to C$ no-expansiva (y por el Teorema 1.18 podemos suponer que T es también asintóticamente regular) sin puntos fijos. Obsérvese que si T es no-expansiva $s(T) \leq 1$.

A continuación, veamos algunos ejemplos donde los parámetros a_0 y D_Φ no sólo coinciden, sino que además, su valor es exactamente el de las constantes $(clm)CS(X)$, $\kappa_{clm}(X)$, $1 + r_{X,clm}(1)$.

Ejemplo 4.1 Consideremos (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito tal que existe un subconjunto $A \in \Sigma$ difuso para μ con $\mu(A) = +\infty$. Sea Φ una función de Orlicz finita, no degenerada cumpliendo la condición Δ_2 y denotemos $X = (L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$. Veamos que $(clm)CS(X) = a_0$:

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $t > 0$ tal que

$$\frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)} \leq a_0 + \varepsilon.$$

Debido a que A es un conjunto difuso con medida infinita, podemos construir una sucesión $\{A_n\}$ de subconjuntos disjuntos de A con $\mu(A_n) = 1/t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos la siguiente sucesión de funciones en $L_\Phi(\mu)$:

$$f_n = c_n \chi_{A_n}, \qquad c_n = \Psi\left(\frac{1}{\mu(A_n)}\right) = \Psi(t).$$

La sucesión $\{f_n\}$ converge a la función nula en la *clm* topología. Además, trivialmente se comprueba que $I_\Phi(f_n) = 1$, por tanto, $N_\Phi(f_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobemos que $N_\Phi(f_n - f_m) \leq a_0 + \varepsilon$:

$$I_\Phi\left(\frac{f_n - f_m}{a_0 + \varepsilon}\right) = \Phi\left(\frac{c_n}{a_0 + \varepsilon}\right)\mu(A_n) + \Phi\left(\frac{c_m}{a_0 + \varepsilon}\right)\mu(A_m) \leq$$

$$\Phi\left(\Psi\left(\frac{t}{2}\right)\right)\mu(A_n) + \Phi\left(\Psi\left(\frac{t}{2}\right)\right)\mu(A_m) = 1.$$

Como consecuencia, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$a_0 \leq D_\Phi \leq 1 + r_{X,clm}(1) = \kappa_{clm}(X) \leq (clm)CS(X) \leq a_0 + \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, deducimos finalmente:

$$1 + r_{X,clm}(1) = \kappa_{clm}(X) = (clm)CS(X) = D_\Phi = a_0.$$

Como ejemplo particular de espacios de medidas en las condiciones del Ejemplo 4.1, podemos considerar $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue o cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con medida de Lebesgue infinita.

Ejemplo 4.2 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de media σ-finito que contenga un conjunto A medible, de medida positiva y difuso para μ. Supongamos que

$$a_0 = \limsup_{t \to +\infty} \frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Consideremos $\varepsilon > 0$ y sea $K > 0$ tal que

$$\frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)} \leq a_0 + \varepsilon$$

para todo $t \geq K$. Construimos una sucesión $\{A_n\}$ de subconjuntos disjuntos de A verificando $\mu(A_n) < \min\{1/K, \mu(A)/2^n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta construcción es posible ya que

$$\sum_n \mu(A_n) < \sum_n \frac{\mu(A)}{2^n} = \mu(A).$$

Definimos la sucesión $f_n = c_n \chi_{A_n}$ con $c_n = \Psi(1/\mu(A_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De igual forma que en el ejemplo anterior se comprueba que $N_\Phi(f_n - f_m) \leq a_0 + \varepsilon$ y como consecuencia:

$$1 + r_{X,clm}(1) = \kappa_{clm}(X) = (clm)CS(X) = D_\Phi = a_0.$$

4.4 El espacio $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Orlicz. Condición de Opial uniforme y Teoremas de Punto Fijo

En esta sección vamos a considerar el espacio de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ dotado con la norma de Orlicz. Para ello vamos a suponer que la función de Orlicz Φ es finita, no degenerada, con la condición Δ_2 y además que Φ es una N-función. Con esta última condición garantizamos que la función complementaria Φ^* sea una función de Orlicz. Recordemos que en este caso Φ^* es también una N-función.

Bajo las hipótesis anteriores, la norma de Orlicz puede ser expresada independientemente de la definición de Φ^* a través de la siguiente fórmula ([RR], pág. 69), cuya expresión es conocida como norma de Amemiya:

Teorema 4.5 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y Φ una N-función. Si f es una función de $L_\Phi(\mu)$, la norma de Orlicz $\|f\|_\Phi$ puede ser expresada únicamente en términos de Φ por la fórmula:*

$$\|f\|_\Phi = \inf\left\{\frac{1}{k}\left(1 + \int_\Omega \Phi(k|f|)d\mu\right) : k > 0\right\}.$$

Además, existe un valor k^* $(= k^*(f))$ tal que

$$\|f\|_\Phi = \frac{1}{k^*}\left(1 + \int_\Omega \Phi(k^*|f|)d\mu\right)$$

si y sólo si $k_1 \leq k^* \leq k_2$ donde $k_1 = \inf\{k > 0 : I_{\Phi^*}(\phi(k|f|)) \geq 1\}$ y $k_2 = \sup\{k > 0 : I_{\Phi^*}(\phi(k|f|)) \leq 1\}$, siendo ϕ la derivada por la izquierda de Φ.

Nota 4.2 En la bibliografía mencionada acerca de los espacios de Orlicz, ϕ puede denotar la derivada de Φ por la derecha. Obsérvese que al ser Φ una función monótona es derivable en casi todo, por tanto, el uso de cualquier derivada lateral es indiferente.

Teorema 4.6 *Sea Φ una N-función finita, no degenerada con la condición Δ_2. Entonces el espacio $X = (L_\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ verifica la condición clm-uniforme de de Opial. En particular:*

$$1 + r_{X,clm}(c) \geq a\left(\frac{1}{1 + a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}\right)$$

para todo $c > 0$.

Prueba:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L_\Phi(\mu)$ *clm*-convergente a la función nula con $\liminf \|f_n\|_\Phi \geq 1$ y sea $f \in L_\Phi(\mu)$ con $\|f\|_\Phi \geq c$. Aplicando el Lema 4.5 y usando los mismos razonamientos que en el Teorema 4.2, podemos suponer que $\|f_n\|_\Phi \geq 1$ y $\mathrm{supp} f_n \cap \mathrm{supp} f = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definimos

$$\rho = a\left(\frac{1}{1 + a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}\right).$$

Obsérvese que si $g \in L_\Phi(\mu)$ con $\|g\|_\Phi \geq 1$, por el Teorema 4.5 se cumple:

$$I_\Phi(kg) = \int_\Omega \Phi(k|g|)d\mu \geq k-1$$

para todo $k > 0$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Existirá $k_0 > 0$ ($k_0 = k_0(n)$) tal que:

$$\left\| \frac{f_n + f}{\rho} \right\|_\Phi = \frac{1}{k_0}\left(1 + \int_\Omega \Phi\left(k_0 \frac{|f_n + f|}{\rho}\right) d\mu\right).$$

Aplicando las propiedades (3) y (4) del Lema 4.3 y la definición de ρ obtenemos:

$$\left\| \frac{f_n + f}{\rho} \right\|_\Phi = \frac{1}{k_0}\left(1 + I_\Phi\left(\frac{k_0 f_n}{\rho}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_0 f}{\rho}\right)\right) \geq$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1 + a^{-1}(\rho) I_\Phi(k_0 f_n) + a^{-1}\left(\frac{\rho}{c}\right) I_\Phi\left(k_0 \frac{f}{c}\right)\right) \geq$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1 + a^{-1}(\rho)(k_0 - 1) + a^{-1}(\rho) a^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)(k_0 - 1)\right) \geq 1.$$

Como consecuencia, $\|f_n + f\|_\Phi \geq \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, X tiene la propiedad clm-uniforme de Opial ya que en el Teorema 4.2 probamos que $\rho > 1$ para todo $c > 0$. Razonando de igual forma que en dicho teorema, $1 + r_{X,clm}(c) \geq \rho$.

Al igual que en la sección anterior, para el caso $c = 1$ se puede conseguir una mejor estimación del valor $1 + r_{X,clm}(1)$ a través de los siguientes parámetros cuyas definiciones están ahora inspiradas en [CHZ]:

Sea $k > 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$C_\Phi(k,n) = \inf\left\{c_{k,f} > 0 : \exists f \in L_\Phi(\mu), \|f\|_\Phi \geq 1,\ I_\Phi\left(\tfrac{kf}{c_{k,f}}\right) = \tfrac{k-1}{2} \right.$$
$$\left. \operatorname{supp} f \subset \cup_{i=1}^n \Omega_i \right\}.$$

La constante $C_\Phi(k,n)$ está bien definida y además $C_\Phi(k,n) \geq 1$ para todo $k > 1$, $n \in \mathbb{N}$. En efecto, fijada $f \in L_\Phi(\mu)$ con $\|f\|_\Phi \geq 1$, definimos la función $h(c) = I_\Phi\left(\frac{kf}{c}\right)$ para todo $c > 0$. La función h es continua, decreciente, $h(1) \geq k-1$ y $\lim_{c\to+\infty} h(c) = 0$. Por tanto, existe $c_{k,f} > 1$ tal que $h(c_{k,f}) = (k-1)/2$.

Por otra parte, fijado $k > 1$, la sucesión $\{C_\Phi(k,n)\}_n$ es decreciente. De esta forma, podemos definir $O_\Phi(k) = \lim_n C_\Phi(k,n)$. Finalmente definimos

$$O_\Phi = \inf\{O_\Phi(k) : k > 1\}.$$

Lema 4.8 *La definición de O_Φ no depende de la partición σ-finita elegida.*

Prueba:

Sean $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega'_n\}$ dos particiones σ-finitas de Ω y denotemos $C_\Phi(k,n)$, $C_\Phi(k)$, O_Φ como anteriormente.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $k > 1$ y definimos:

$$C'_\Phi(k,n) = \inf\left\{c'_{k,f} > 0 : \exists f \in L_\Phi(\mu), \|f\|_\Phi \geq 1, I_\Phi\left(\frac{kf}{c'_{k,f}}\right) = \frac{k-1}{2} \right.$$
$$\left. \operatorname{supp} f \subset \cup_{i=1}^n \Omega'_i\right\},$$

$O'_\Phi(k) = \lim_n C'_\Phi(k,n)$, $O'_\Phi = \inf\{O'_\Phi(k) : k > 1\}$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y una función $f \in L_\Phi(\mu)$ con $\|f\|_\Phi \geq 1$ y $\operatorname{supp}(f) \subset \cup_{k=1}^n \Omega'_k = A$.

Sea $\delta > 0$ tal que $\|g\|_\Phi < \varepsilon$ si $g \in L_\Phi(\mu)$ y $I_\Phi(g) < \delta$ y sea $N \in \mathbb{N}$ con $\displaystyle\sum_{n>N} \int_{\Omega_n} \Phi(|f|)d\mu < \delta$.

Denotemos $B = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ y definimos $h = (f\chi_B)/(1-\varepsilon)$. Entonces:

$$\|h\|_\Phi \geq \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_\Phi + \frac{1}{1-\varepsilon}\|f - f\chi_B\|_\Phi \geq \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1,$$

ya que $I_\Phi(f - f\chi_B) = \int_{\Omega\setminus B} \Phi(|f|)d\mu < \delta$.

Sea $k > 1$ y $c_{k,h} > 0$ tal que $I_\Phi\left(\frac{kh}{c_{k,h}}\right) = \frac{k-1}{2}$. Veamos que $c'_{k,f} \geq c_{k,h}(1-\varepsilon)$:

$$I_\Phi\left(\frac{kf}{c_{k,h}(1-\varepsilon)}\right) = \int_B \Phi\left(\frac{k|h|(1-\varepsilon)}{c_{k,h}(1-\varepsilon)}\right) d\mu + \int_{\Omega\setminus B} \Phi\left(\frac{k|f|}{c_{k,h}(1-\varepsilon)}\right) d\mu \geq$$

$$\int_B \Phi\left(\frac{k|h|}{c_{k,h}}\right) d\mu = I_\Phi\left(\frac{kh}{c_{k,h}}\right) = \frac{k-1}{2}.$$

Se cumple entonces $c'_{k,f} \geq C_\Phi(k,N)(1-\varepsilon) \geq O_\Phi(k)(1-\varepsilon) \geq O_\Phi(1-\varepsilon)$. Por tanto $O'_\Phi \geq O_\Phi(1-\varepsilon)$. Como ε es arbitrario deducimos $O'_\Phi \geq O_\Phi$ y análogamente $O_\Phi \geq O'_\Phi$.

Teorema 4.7 *En las condiciones del Teorema 4.6, si $X = (L_\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ entonces $1 + r_{X,clm}(1) \geq O_\Phi$.*

Prueba:

Sea $\{f_m\}$ una sucesión en $L_\Phi(\mu)$ *clm*-convergente a la función nula con $\|f_m\|_\Phi \geq 1$ y sea $f \in L_\Phi(\mu)$ con $\|f\|_\Phi \geq 1$. Utilizando el Lema 4.5, podemos suponer $\text{supp} f_m \cap \text{supp} f = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y además, que para cada $m \in \mathbb{N}$ $\text{supp} f_m$ y $\text{supp} f$ están contenidos en una unión finita de $\{\Omega_n\}$.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Existirá $k_0 > 0$ ($k_0 = k_0(m)$) y $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(m)$) tal que:

$$\text{supp} f,\ \text{supp} f_m \subset \cup_{i=1}^{n_0} \Omega_i,$$

$$\left\| \frac{f_m + f}{O_\Phi} \right\|_\Phi = \frac{1}{k_0}\left(1 + I_\Phi\left(k_0 \frac{f_m + f}{O_\Phi}\right)\right).$$

Separemos la prueba en dos casos:

I. Si $k_0 \leq 1$, entonces $\|f_m + f\|_\Phi \geq O_\Phi$.

II. Si $k_0 > 1$, entonces $O_\Phi \leq O_\Phi(k_0) \leq C_\Phi(k_0, n_0)$. Con lo cual:

$$\left\| \frac{f_m + f}{O_\Phi} \right\|_\Phi = \frac{1}{k_0}\left(1 + I_\Phi\left(\frac{k_0 f_m}{O_\Phi}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_0 f}{O_\Phi}\right)\right) \geq$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1 + I_\Phi\left(\frac{k_0 f_m}{C_\Phi(k_0, n_0)}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_0 f}{C_\Phi(k_0, n_0)}\right)\right) \geq$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1 + I_\Phi\left(\frac{k_0 f_m}{c_{k_0, f_m}}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_0 f}{c_{k_0, f}}\right)\right) = \frac{1}{k_0}(1 + \frac{k_0 - 1}{2} + \frac{k_0 - 1}{2}) = 1.$$

De nuevo, comprobaremos que la constante O_Φ dada en el teorema anterior es mayor o igual que la cota inferior del módulo de Opial obtenida en el Teorema 4.6 para $c = 1$.

Lema 4.9 *En las condiciones del Teorema 4.6,* $O_\Phi \geq a_0$.

Prueba:

Comprobemos que para todo $k > 1$, $n \in \mathbb{N}$, se cumple $C_\Phi(k, n) \geq a_0$:

Sea $f \in L_\Phi(\mu)$ tal que $\|f\|_\Phi \geq 1$, $\text{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^{n} \Omega_i$, y sea $c_{k,f} > 0$ cumpliendo $I_\Phi\left(\frac{kf}{c_{k,f}}\right) = \frac{k-1}{2}$. Aplicando la desigualdad del Lema 4.2 con $\delta = 1/2$ y el Teorema 4.5 junto con el hecho de que $\|f\|_\Phi \geq 1$ deducimos:

$$I_\Phi\left(\frac{kf}{a_0}\right) \geq \frac{1}{2} I_\Phi(kf) \geq \frac{k-1}{2}.$$

Por tanto, $c_{k,f} \geq a_0$ y $C_\Phi(k,n) \geq a_0$. Trivialmente, por definición de O_Φ, se obtiene la desigualdad $O_\Phi \geq a_0$.

En el caso particular de que $\Phi(x) = |x|^p$ para algún $p \in (1, +\infty)$, mediante una simple comprobación se deduce $\|f\|_\Phi = p^{1/p}q^{1/q}\|f\|_p$ para toda $f \in L_p(\mu)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\|\cdot\|_p$ denota la norma usual de $L_p(\mu)$. Como consecuencia, si $\Phi(x) = |x|^p$ para algún $p \in (1, +\infty)$ y denotamos X el espacio de Banach $(L_p(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$, obtenemos:

$$(clm)CS(X) = 1 + r_{X,clm}(1) = \kappa_{clm}(X) = O_\Phi = a_0 = 2^{1/p}.$$

Si tenemos en cuenta que toda sucesión $\{f_n\}$ clm-convergente a una función f contiene una subsucesión que converge a f puntualmente en casi todo, y aplicamos el Lema de Fatou, es inmediato comprobar, por la definición de norma de Orlicz, que $\|\cdot\|_\Phi$ es clm-sec.s.c.i. Así, podemos enunciar:

Corolario 4.2 *Sea Φ una N-función, finita, no degenerada con la condición Δ_2. Denotemos $X = (L_\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$. Entonces $(clm)CS(X) \geq 1 + r_{clm,X}(1) = \kappa_{clm}(X) \geq O_\Phi \geq a_0$. En particular, si $\Phi(x) = |x|^p$ para algún $p \in (1, +\infty)$, las desigualdades anteriores se convierten en igualdades y coinciden con $2^{1/p}$.*

Aplicando el Corolario 3.4 se obtiene el siguiente teorema de punto fijo:

Teorema 4.8 *Sea Φ una N-función finita, no degenerada cumpliendo la condición Δ_2. Si C es un subconjunto de $(L_\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ convexo, acotado, clm-compacto y $T : C \to C$ es una aplicación asintóticamente regular con $s(T) < O_\Phi$, entonces T tiene punto fijo.*

Obsérvese que en el teorema anterior podríamos haber sustituido de nuevo la constante O_Φ por el valor a_0.

4.5 Aplicación a los espacios de Orlicz de sucesiones

Supongamos que μ es la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$. En este caso el espacio $L_\Phi(\mu)$ es conocido como el espacio de Orlicz de sucesiones y se denota l_Φ. El subespacio $H_\Phi(\mu)$ es denotado h_Φ.

Se dice que una función de Orlicz Φ cumple la condición Δ_2 en cero si y sólo si $\limsup_{x\to 0} \Phi(2x)/\Phi(x) < +\infty$.

En los espacios de sucesiones de Orlicz, la condición suficiente para que el subespacio h_Φ coincida con l_Φ es que Φ cumpla la condicion Δ_2 en cero. Además si Φ es una N-función y $(\Phi, \Phi^\star)$ cumplen ambas la condición Δ_2 en cero, entonces $l_\Phi^\star = l_{\Phi^\star}$ y l_Φ es reflexivo (ver [LiT] Capítulo 4). En estas condiciones, usando un argumento similar al efectuado en el Capítulo 2 con los espacios $L_p(\mu)$, se prueba que la topología de la convergencia local en medida coincide con la topología débil en los subconjuntos acotados de l_Φ.

El valor del coeficiente $WCS(l_\Phi)$ ha sido estudiado en [CH], [DR] si dotamos a l_Φ con la norma de Luxemburg. En cambio, para la norma de Orlicz, $WCS(l_\Phi)$ ha sido calculado en [CHZ]. En los tres trabajos se exige que la función de Orlicz Φ cumpla la condición Δ_2 en cero, obteniéndose siempre que $WCS(l_\Phi) > 1$.

Veamos en primer lugar que en el caso general de un espacio de medida σ-finito, la condición Δ_2 en cero no garantiza que el coeficiente $(clm)CS(L_\Phi(\mu))$ sea mayor estricto que uno. Para ello, consideremos un espacio de medida (Ω, Σ, μ) σ-finito que contenga un conjunto A medible, de medida positiva y difuso para μ. Definimos la siguiente función de Orlicz no degenerada:

$$\Phi(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Denotemos $X = (L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$. Es un simple cálculo comprobar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} = 2 < +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} = +\infty,$$

por tanto, Φ cumple la condición Δ_2 en cero pero no satisface la condición Δ_2. También es trivial comprobar que

$$a_0 = a\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{t\to +\infty} \frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)} = 1.$$

En esta situación, comprobamos en el Ejemplo 4.2 que $(clm)CS(X) = a_0 = 1$. Por el contrario, para esta misma función de Orlicz $WCS(l_\Phi) > 1$ [DR].

Supongamos entonces que Φ es una función de Orlicz cumpliendo la condición Δ_2 y vamos a comparar los resultados conocidos sobre $WCS(l_\Phi)$ con los obtenidos en este capítulo.

En [CH] se consideran los espacios de sucesiones de Orlicz-Musielak que son una generalización de los espacios de sucesiones de Orlicz. Adaptando su estudio al caso de l_Φ, en [CH] se definen los parámetros:

$$c_\Phi(n,m) = \inf\left\{c_x > 0 : N_\Phi(x) = 1, \sum_{i=m}^{m+n} \Phi\left(\frac{x_i}{c_x}\right) = \frac{1}{2}, \sum_{i=m}^{m+n} \Phi(x_i) = 1\right\},$$

$$d_\Phi = \lim_n \lim_m c_\Phi(n,m)$$

y es probado $WCS(l_\Phi) = d_\Phi$, para toda función de Orlicz Φ no degenerada cumpliendo la condición Δ_2 en cero. Claramente $c_\Phi(n,m) \geq C_\Phi(n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y por tanto $d_\Phi \geq D_\Phi$ donde $C_\Phi(n)$ y D_Φ son los parámetros definidos en la sección 3 cuando consideramos μ la medida cardinal.

En las mismas condiciones, se prueba en [DR] que $WCS(l_\Phi) \geq a'_0 = a'(1/2) > 1$ donde la función $a'(\cdot)$ está definida como

$$a'(\delta) = \inf\left\{\frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)} : t \in (0,1]\right\}$$

para $\delta \in (0,1]$. Trivialmente $a'(\delta) \geq a(\delta)$ para todo $\delta \in (0,1]$ y en particular $a'_0 \geq a_0$.

Por otra parte, es fácil comprobar que $d_\Phi \geq a'_0$ (ver Lema 2 en [DR]). Con lo cual, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$WCS(l_\Phi) = d_\Phi \geq a'_0 \geq a_0.$$

En el caso particular que $a'_0 = a_0 = \Psi(1/2)^{-1}$ ó $a'_0 = a_0 = \lim_{t\to 0} \Psi(t)/\Psi(t/2)$, en [DR] es probada la igualdad $WCS(l_\Phi) = a'_0$. Por consiguiente, en este caso las desigualdades anteriores se convierten en igualdades.

Probemos que

$$d_\Phi \leq \frac{\Psi\left(\frac{1}{n}\right)}{\Psi\left(\frac{1}{2n}\right)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello denotamos por s el término derecho de la desigualdad anterior y consideramos la sucesión $\{x_k\}$ en l_Φ con $x_k = c_n(e_{(k-1)n+1} +$

$\ldots + e_{kn})$ donde $c_n = \Psi(1/n)$ y $\{e_i\}$ denota la sucesión de vectores básicos en l_Φ. Es un simple cálculo comprobar que $N_\Phi(x_k) = 1$ y $N_\Phi(x_k - x_l) \leq s$ para todo $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$. Por tanto

$$WCS(l_\Phi) = d_\Phi \leq \frac{\Psi\left(\frac{1}{n}\right)}{\Psi\left(\frac{1}{2n}\right)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a'_0 = a_0 = \frac{\Psi\left(\frac{1}{n}\right)}{\Psi\left(\frac{1}{2n}\right)} \qquad \text{ó} \qquad a'_0 = a_0 = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}$$

obtenemos la igualdad entre todos los términos de la cadena anterior.

En el caso de que Φ sea una N-función, en [CHZ] se define una constante $d_{(\Phi)}$ y es probado que $WCS(l_\Phi) = d_{(\Phi)}$ si Φ cumple la condición Δ_2 en cero. Es inmediato comprobar a partir de las definiciones que $WCS(l_\Phi) = d_{(\Phi)} \geq O_\Phi \geq a_0$. Para los espacios l_p, $p > 1$, todas las constantes son iguales a $2^{1/p}$.

4.6 Estabilidad de la *clm*-FPP en los espacios de Orlicz $L_\Phi(\mu)$

En esta última sección vamos a aplicar los resultados obtenidos en las secciones 3 y 4 sobre el cálculo de diversos coeficientes geométricos, para estudiar la trasmisión de la propiedad del punto fijo con respecto a la topología de la convergencia local en medida, para renormas equivalentes en $L_\Phi(\mu)$.

Nótese que en el caso de que (Φ, Φ^*) sean N-funciones complementarias cumpliendo la condición Δ_2, todos los resultados que enunciaremos en esta sección pueden ser aplicados al espacio de sucesiones de Orlicz l_Φ con la topología débil.

En primer lugar, como aplicación inmediata de los Teoremas 4.4, 4.8 podemos enunciar los siguientes resultados de estabilidad:

Teorema 4.9 *Sea Φ una función de Orlicz, finita, no degenerada cumpliendo la condición Δ_2 y sea $|\cdot|$ una norma en $L_\Phi(\mu)$ tal que*

$$|f| \leq N_\Phi(f) \leq d|f|$$

para toda $f \in L_\Phi(\mu)$. *Si* $d < D_\Phi$, *el espacio* $Y = (L_\Phi(\mu), |\cdot|)$ *tiene la clm-FPP.*

Teorema 4.10 *Sea* Φ *una N-función, finita, no degenerada con la condición* Δ_2. *Si* $|\cdot|$ *es una norma en* $L_\Phi(\mu)$ *tal que*

$$|f| \leq \|f\|_\Phi \leq d|f|$$

para toda $f \in L_\Phi(\mu)$ *y se cumple* $d < O_\Phi$, *entonces el espacio* $Y = (L_\Phi(\mu), |\cdot|)$ *tiene la clm-FPP.*

Utilizando el valor de la constante a_0 podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.11 *En las condiciones del teorema anterior, supongamos que* $|\cdot|$ *es una norma en* $L_\Phi(\mu)$ *y denotemos* $Y = (L_\Phi(\mu), |\cdot|)$. *Si*

$$\min\{d(Y, (L_\Phi, N_\Phi(\cdot))), d(Y, (L_\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi))\} < a_0$$

entonces Y *tiene la clm-FPP.*

Veamos que no sólo podemos deducir resultados de estabilidad en los espacios de funciones de Orlicz haciendo uso de las aplicaciones asintóticamente regulares, sino que, bajo condiciones mínimas, los resultados obtenidos en el Capítulo 2 también pueden ser aplicados.

El siguiente teorema puede ser encontrado en [RR] (pág. 112):

Teorema 4.12 *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y* $(\Phi, \Phi^\star)$ *un par de funciones de Orlicz complementarias. Si* $\Phi, \Phi^\star$ *verifican ambas la condición* Δ_2, *entonces* $L_\Phi(\mu)$ $(L_{\Phi^\star}(\mu))$ *son espacios de Banach reflexivos.*

Aplicando el Lema 2.2 se obtiene:

Lema 4.10 *Si* $(\Phi, \Phi^\star)$ *son un par de funciones de Orlicz complementarias cumpliendo ambas la condición* Δ_2, *entonces el espacio* $L_\Phi(\mu)$ *tiene la propiedad* (A_{clm}).

Por tanto, no sólo las normas $N_\Phi(\cdot)$, $\|\cdot\|_\Phi$ son *clm*-sec.s.c.i. sino que cumple esta propiedad cualquier norma equivalente. Además, también las funciones tipo *clm*-nulas son *clm*-sec.s.c.i. tanto si consideramos la norma $N_\Phi(\cdot)$, la norma de Orlicz $\|\cdot\|_\Phi$ o cualquier norma equivalente en $L_\Phi(\mu)$. Como consecuencia, todos los teoremas de estabilidad obtenidos en el Capítulo 2 basados en el Lema de Goebel-Karlovitz generalizado son aplicables. En particular aplicando el Teorema 2.7 podemos obtener el siguiente resultado:

Teorema 4.13 *Sea Φ una función de Orlicz finita, no degenerada y tal que (Φ, Φ^*) cumplen ambas la condición Δ_2. Sea $|\cdot|$ una norma equivalente en $L_\Phi(\mu)$ tal que:*

$$|f| \leq N_\Phi(f) \leq d|f|$$

para toda $f \in L_\Phi(\mu)$. Si denotamos $Y = (L_\Phi(\mu), |\cdot|)$ y se cumple $d < M_\Phi$ con

$$M_\Phi = \sup\left\{(1+s)\,a\left(1+\frac{1}{a^{-1}(sa_0)}\right)a_0 : s \geq 0\right\}$$

entonces Y tiene la clm-FPP.

Prueba:

Denotemos $X = (L_\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$. Para probar el resultado vamos a encontrar una cota inferior del coeficiente $R_{clm}(s, X)$ para todo $s \geq 0$. Posteriormente aplicaremos el Teorema 2.7.

Si $s = 0$ es trivial comprobar que $R_{clm}(0, X) \leq 1/(clm)CS(X) \leq 1/a_0$. Nótese que el valor a_0 se consigue en la fórmula anterior si hacemos tender s a 0, ya que probamos en el Lema 4.3 que $\lim_{\theta\to 0} a^{-1}(\theta) = +\infty$.

Supongamos $s > 0$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de la bola unidad de $L_\Phi(\mu)$, *clm*-convergente a la función nula y tal que $\lim_{n,m;n\neq m} N_\Phi(f_n - f_m) \leq 1$. Consideramos otra función $f \in L_\Phi(\mu)$ con $N_\Phi(f) \leq s$ y supongamos (en caso contrario consideramos una subsucesión), que existen los límites $\lim_n N_\Phi(f_n)$, $\lim_n N_\Phi(f_n + f)$. Utilizando el Lema 4.5 podemos suponer también que $\mathrm{supp} f_n \cap \mathrm{supp} f = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim_{n,m;n\neq m} N_\Phi(f_n - f_m) \leq 1$ se cumple:

$$\lim_n N_\Phi(f_n) \leq \frac{\lim_{n,m;n\neq m} N_\Phi(f_n - f_m)}{(clm)CS(X)} \leq \frac{1}{a_0}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $g_n = f_n/(1+\varepsilon)$, con lo cual, podemos suponer que $N_\Phi(g_n) \leq 1/a_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por consiguiente, $I_\Phi(a_0 g_n) \leq 1$. Denotemos

$$\frac{1}{\rho} = a\left(1 + \frac{1}{a^{-1}(sa_0)}\right) a_0.$$

Utilizando las desigualdades (3), (4) del Lema 4.3 y la definición de ρ deducimos:

$$I_\Phi\left(\frac{g_n + f}{\rho}\right) = I_\Phi\left(\frac{g_n}{\rho}\right) + I_\Phi\left(\frac{f}{\rho}\right) \leq$$

$$\frac{1}{a^{-1}\left(\frac{1}{\rho a_0}\right)} I_\Phi(a_0 g_n) + \frac{1}{a^{-1}\left(\frac{s}{\rho}\right)} I_\Phi\left(\frac{f}{s}\right) \leq \frac{1}{a^{-1}\left(\frac{1}{\rho a_0}\right)} + \frac{1}{a^{-1}\left(\frac{s}{\rho}\right)} \leq$$

$$\frac{1}{a^{-1}\left(\frac{1}{\rho a_0}\right)} + \frac{1}{a^{-1}(sa_0)a^{-1}\left(\frac{1}{\rho a_0}\right)} = \frac{1}{a^{-1}\left(\frac{1}{\rho a_0}\right)}\left[1 + \frac{1}{a^{-1}(sa_0)}\right] = 1.$$

Como consecuencia, $\liminf_n N_\Phi(g_n + f) \leq \rho$. Como ε es arbitrario, deducimos finalmente que $R_{clm}(s, X) \leq \rho$ para $s > 0$.

Recordemos que el coeficiente $M_{clm}(X)$ se define como

$$M_{clm}(X) = \sup\left\{\frac{1+s}{R_{clm}(s,X)} : s \geq 0\right\}$$

por tanto,

$$M_{clm}(X) \geq M_\Phi.$$

Obsérvese que en el caso particular de que la función de Orlicz sea del tipo $\Phi(x) = |x|^p$ para algún $p \in (1, +\infty)$, la constante anterior coincide con $\left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ que es en realidad, el valor de $M_{clm}(L_p(\mu)) = M(l_p)$.

Por otra parte, si consideramos μ la medida cardinal definida en los subconjuntos de $\mathbb{N}$, la cota anterior es una nueva cota de establidad de la w-FPP para los espacios de sucesiones de Orlicz.

Bibliografía

[A] D.E. Alspach. *A fixed point free nonexpansive map*, Proc. Amer. Math. Soc., (1981), **82**, 423-424.

[ADL] J.M. Ayerbe, T. Domínguez Benavides, G. López Acedo. Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 99. Birkäuser: Basel 1997.

[B] J. Banas. *On modulus of noncompact convexity and its properties*, Canad. Math. Bull., 1987, **30**(2), 186-192.

[Be] M. Besbes. *Points fixes des contractions definies sur un convexe L^0-fermé de L^1*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math, (1990), **311**(5), 243-246.

[BL] H. Brezis, E. Lieb. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of funtionals.* Proc. Amer. Math. Soc., (1983), **88**(3), 486-490.

[BM] M.S. Brodskii, P.D. Milman. *On the center of a convex set*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, (1948), **59**(5), 837-840.

[Br1] F.E. Browder. *Fixed points theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, (1965), **43**, 1272-1276.

[Br2] F.E. Browder. *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, (1965), **54**, 1041-1044.

[BrP] F.E. Browder, W.V. Petryshyn. *The solutions by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., (1966), **72**, 571-576.

[By] W.L. Bynum. *Normal structure coefficients for Banach spaces*, Pacific J. Math., (1980), **86**(2), 427-435.

[CH] Y. Cui, H. Hudzik. *Maluta's coefficient and Opial's properties in Musielak-Orlicz spaces eqquiped with the Luxemburg norm.* Preprint.

[CHZ] Y. Cui, H. Hudzik, H. Zhu. *Maluta's coefficient in Musielak-Orlicz spaces equipped with the Orlicz norm*, Preprint.

[DJS] M.M. Day, R.C. James, S. Swaminathan. *Normed linear espaces which are uniformly convex in every direction*, Can. J. Math., (1971), **23**(6), 1051-1059.

[DGZ] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler. Smoothness and renorming in Banach spaces. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 64. Longman Scientific and Technical. Esses 1993.

[D1] T. Domínguez Benavides. *Normal structure coefficients of* $L_p(\Omega)$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, (1991), **117A**, 299-303.

[D2] T. Domínguez Benavides. *A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results*, Houston J. Math., (1996), **22**(4), 835-849.

[D3] T. Domínguez Benavides. *Some fixed point theorems in Orlicz sequence spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, (1996), Serie II, Suppl. 40, 79-91.

[D4] T. Domínguez Benavides. *Fixed point theorems for uniformly lipschitzian mappings and asymptotically regular mappings*, Nonlinear Anal., (1998), **32**(1), 15-27.

[DGJ] T. Domínguez Benavides, J. García Falset, M. A. Japón Pineda. *The* τ*-Fixed Point Property for nonexpansive mappings.* Preprint.

[DJ1] T. Domínguez Benavides, M.A. Japón Pineda. *Stability of the fixed point property for nonexpansive mappings in some classes of spaces*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., (1998), **5**(2).

[DJ2] T. Domínguez Benavides, M.A. Japón Pineda. *Opial modulus, moduli of noncompact convexity and fixed points for asymptotically regular mappings.* Preprint.

[DL] T. Domínguez Benavides, G. López Acedo. *Lower bounds for normal structure coefficients*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, (1992), **121A**, 245-252.

[DLX] T. Domínguez Benavides, G. López Acedo, H.K. Xu. *On quantitative and qualitative properties of the space* $l_{p,q}$, Houston J. Math., (1996), **22**(1), 89-99.

[DR] T. Domínguez Benavides, R. J. Rodríguez. *Some geometric coefficients in Orlicz sequence spaces*, Nonlinear Anal., (1993), **20**(4), 349-358.

[DX] T. Domínguez Benavides, H.K. Xu. *A new geometrical coefficient for Banach spaces and its applications in fixed point theory*, Nonlinear Anal., (1995), **25**(3), 311-325.

[DoL] P.N. Dowling, C.J. Lennard. *Every nonreflexive subspace of* $L_1[0,1]$ *fails the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc., (1997), **125**, 443-446.

[DwT] D.J. Downing, B. Turett. *Some properties of the characteristic of convexity relating to the fixed point theory,* Pacific J. Math., (1983), **104**, 343-350.

[Du] D. van Dulst. *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London Math. Soc., (1982), **25**(1), 139-144.

[G1] J. García-Falset. *Stability and fixed points for nonexpansive mappings*, Houston J. Math., (1994), **20**(3), 495-506.

[G2] J. García-Falset. *The fixed point property in Banach spaces with NUS-property*, J. Math. Anal. Appl. (1997), **215**, 532-542.

[GS] J. García-Falset, B. Sims. *Property (M) and the weak fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc. (1997), **125**(10), 2891-2896.

[Go] K. Goebel. *On the structure of the normal invariant sets for nonexpansive mappings,* Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, (1975), **29**, 70-72.

[GoK1] K. Goebel and W.A. Kirk. Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge University Press, 1990.

[GoK2] K. Goebel and W.A. Kirk. *A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant,* Studia Math., (1973), **47**, 135-140.

[Gh] D. Göhde. *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach., (1965), **30**, 251-258.

[GK] J. Gornicki, M. Krüppel. *Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math., (1988), **36**, 57-63.

[GL1] J.P. Gossez, E. Lami Dozo. *Structure normale et base de Schauder*, Bull. Acad. Roy. Belgique, (1969), **15**, 673-681.

[GL2] J.P. Gossez, E. Lami Dozo. *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., (1972), **40**, 565-573.

[Gu] N.M. Gulevich. *Fixed points of nonexpansive mappings*, J. Math. Sci., (1996), **79**(1), 755-815.

[HS] E. Hewitt and K. Stromberg. Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag, 1965.

[Hu] R. Huff. *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math., (1980), **4**, 743-749.

[I] S. Ishikawa. *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., (1970), **59**, 65-71.

[J] M.A. Japón Pineda. *A new constant in Banach spaces and stability of the fixed point property*, Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. (En prensa).

[Ji] A. Jiménez-Melado. *Stability of weak normal structure in James quasi reflexive space*, Bull. Austral. Math. Soc., (1992), **46**, 367-372.

[K] S. Kakutani. *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, (1943), **14** (4), 242-245.

[Ka] N.J. Kalton. *M-ideals of compact operators,* Illinois J. of Math., (1993), **37**, 147-169.

[Kr1] L.A. Karlovitz. *On nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., (1976), **55**, 321-325.

[Kr2] L.A. Karlovitz. *Some fixed point results for nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications: Proc. Seminar Dalhousie Univ., Halifax N. S., Canada, June 9-12, 1975, Academic Press, New York (1976), 91-103.

[Kh1] M.A. Khamsi. *On uniform Opial condition and uniform Kadec-Klee property in Banach and metric spaces.* Nonlinear Anal., (1996), **26**(10), 1733-1748.

[Kh2] M.A. Khamsi. *Fixed point theory in modular function spaces*, Recent Advances in Metric Fixed Point Theory, 31-59. Universidad de Sevilla: Ciencias 48 (1995).

[KhT] M. A. Khamsi, Ph. Turpin. *Fixed points of nonexpansive mappings in Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc., (1989), **105**(1), 102-110

[Ki1] W.A. Kirk. *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, (1964), **72**, 1004-1006.

[Ki2] W.A. Kirk. *An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., (1981), **82**(4), 640-642.

[KR] M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii. Convex Fuctions and Orlicz Spaces. Noordhoff, Groningen, 1961.

[Ku] T. Kuczumow. *Opial's modulus and fixed points of semigroups of mappings.* Preprint.

[LT] E. Lami Dozo, Ph. Turpin. *Nonexpansive mappings in generalized Orlicz spaces*, Studia Math., (1987), **86**, 155-188.

[Le] C. Lennard. *A new convexity property that implies a fixed point property for L_1*, Studia Math., (1991), **100**(2), 95-108.

[Li] E. A. Lifshitz. *Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces*, Voronez. Gos. Univ. Trudy Mat. Fak., (1975), **16**, 23-28. (En ruso).

[Lm] T.C. Lim. *Asymptotic centers and nonexpansive mappings in conjugate Banach spaces*, Pacific J. Math., (1980), **90**(1), 135-143.

[Ln1] P.K. Lin. *Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., (1985), **116**, 69-76.

[Ln2] P.K. Lin. *Stability of the fixed point property of Hilbert spaces.* Preprint.

[LTX] P.K. Lin, K.K. Tan, H.K. Xu. *Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal., (1995), **24**, 929-946.

[LiT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Classical Banach spaces I. Springer, Berlin (1977).

[LlJ] E. Llorens Fuster, A. Jiménez-Melado, *Opial modulus and stability of the fixed point property*, Nonlinear Anal. (En prensa).

[M] E. Maluta. *Uniformly normal structure and related coefficientes*, Pacific J. Math. (1984), **111**(2), 357-369.

[Ma] B. Maurey. *Points fixes des contractions de certains faiblement compats de L_1*, Seminaire d'Analyse Fonctionelle, Exposé VIII, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, (1980-81).

[P] J.P. Partington. *On nearly uniformly convex Banach spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1983), **93**, 127-129.

[Pr] S. Prus. *On Bynum's fixed point theorem*, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, (1990), **38**, 535-545.

[RR] M.M. Rao, Z.D. Ren. Theory of Orlicz Spaces. Marcel Dekker, New York, 1991.

[S] P. Soardi. *Schauder basis and fixed points of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., (1982), **101**(1), 193-198.

[Z] U. Zizler. *On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces*, Dissertationes Math. (Rozpravy. Mat.), (1971), **87**, 1-37.

[Zh] W. Zhao. *Geometrical coefficients and measures of non compactness*, Ph. D. Dissertation, University of Glasgow, (1992).

D. María Angeles Japón Pineda
"Estabilidad de la Propiedad del Punto Fijo por Aplicaciones No-expansivas".

Unanimidad APTO CUM LAUDE por

26 Junio 98.