R. 23011 LBS 1089017

043
193

BCA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ESPACIOS HIPERCONVEXOS Y TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO

Memoria presentada por
Rafael ESPINOLA GARCÍA
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.
Sevilla, Enero de 1998.

R. Espinola

Fdo. Rafael Espinola García

V^0 B^0 : El Director

Genaro López Acedo

Dr. D. Genaro LÓPEZ ACEDO
Profesor Titular
de Análisis Matemático de
la Universidad de Sevilla.

Depto. Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
17/1/98

4/2/98

5 FEBRERO 98.
DEPTO.

19 9

Fdo.: José CARMONA ALVAREZ

A mis padres

AGRADECIMIENTOS:

En primer lugar quisiera agradecer a mi director, el Prof. Genaro López Acedo, todo su trabajo y el tiempo dedicado a que esta Memoria esté a punto de ver la luz. Sin su dedicación esta Tesis no habría sido posible.

También quisiera agradecer a los miembros de mi grupo de investigación, y muy especialmente a su Director el Prof. Tomás Domínguez Benavides, la atención prestada, tanto a mi trabajo como a mi persona, en estos últimos años. Sus comentarios siempre me ayudaron a entender mucho mejor lo que, de un modo algo desordenado, las más de las veces, les intentaba desarrollar desde una pizarra.

A mis padres y hermano porque, entre otras muchas cosas, son los que me aguantan cuando no hay quien me aguante.

Muy especialmente a mis compañeros de travesía, Juan Carlos, Rafa, Fernando y Ricardo. Hemos alimentado muchas ilusiones juntos. Tal vez algún día se realicen y, si no, qué más da. Ellos también han tenido que aguantarme un poco más de la cuenta, aunque creo que está compensado porque, si no fuese por mí, jugarían mucho menos al tenis de lo que ya lo hacen. ¡Que lo sepais!

Por supuesto en esta sección de agradecimientos no podía olvidarme del maravilloso grupo de gente que trabaja en esto del punto fijo en la ciudad polaca de Lublin. Tuvieron la valentía de acogerme generosamente durante más de dos meses en su ciudad. Creo que nunca tendrán la más leve idea de lo bien que me sentí entre ellos. Particularmente me gustaría agradecer al Prof. K. Goebel por invitarme a visitar la Universidad Mariae Curie-Sklodowska, a S. Prus y K. Bolibok por su continua preocupacion para que me sintiese como en casa, a W. Kaczor por su inestimable ayuda con el ingles y su amabilidad y, muy especialmente, a A. Wiśnicki y J. Wośko por compartir tantísimos buenos momentos de matemáticas y amistad, a partir de los cuales se gestó el cuarto capítulo de esta Memoria.

A mi profesor de matemáticas de segundo de B.U.P. Creo que nunca sabré si su influencia fue lo que definitivamente me acercó a este mundo o lo que estuvo a punto de alejarme de él. Posiblemente me haya influido en ambos sentidos a la vez, pero, en cualquier caso, creo que se tiene bien ganado un sitio en estos agradecimientos como representante de todos aquellos profesores o maestros que me hicieron disfrutar alguna vez con sus enseñanzas.

También me gustaría agradecer a los congresos en general, la posibilidad de conocer gente tan maravillosa como nuestras amigas de Zaragoza: Raquel, Lucía y Almudena.

Por último, agradecer al autor de la siguiente cita, ya calvo desde hace más de un siglo, todos sus aforismos.

*“ Espero que caiga hecho pedazos todo aquello que
de mis verdades pueda caer hecho pedazos.”*

Índice

Introducción

El objetivo inicial de esta Memoria fue la búsqueda de teoremas de existencia de puntos fijos para aplicaciones condensantes en espacios métricos hiperconvexos. La idea de plantearnos este problema la motivó la lectura de un artículo de J. B. Baillon ([4]) en el que se prueba que en el teorema de existencia de punto fijo de W. A. Kirk ([22]) para aplicaciones no expansivas, es posible sustituir la hipótesis de convexidad por la de hiperconvexidad. Esto nos sugirió la posibilidad de hacer lo mismo para aplicaciones que verifican hipótesis de compacidad, como por ejemplo ocurre en el bien conocido Teorema de Darbo ([7]).

Los espacios métricos hiperconvexos fueron introducidos en 1956 por N. Aronszajn y P. Panitchpakdi al considerar el problema de encontrar una propiedad, en el marco de los espacios métricos, que garantizase la extensión de las aplicaciones uniformemente continuas, manteniendo el rango y el módulo de continuidad. Es aquí donde aparece de un modo completamente natural la propiedad de la hiperconvexidad, más fuerte que la convexidad métrica. Ese hecho justifica su nombre a pesar de no tener relación directa con la convexidad lineal.

El análisis de las ideas que se manejan en le teorema de Darbo nos llevó a estudiar con detenimiento el concepto de cierre hiperconvexo introducido por J. R. Isbell en [17]. Al observar las propiedades de este cierre, principalmente su comportamiento en relación con las medidas de no compacidad, surgieron las primeras ramificaciones en nuestra investigación.

Los distintos resultados de Å. Lima ([29]) y J. Lindenstrauss ([30]) sobre la extensión de operadores compactos definidos entre espacios de Banach y su relación con la hiperconvexidad, nos hizo plantearnos problemas similares en un contexto más puramente métrico. En este sentido obtuvimos algunas respuestas positivas con respecto a aplicaciones compactas definidas entre espacios métricos. Pensamos que tienen valor por sí mismas y así ha quedado reflejado en la Memoria que presentamos.

Los espacios $\aleph_0-$hiperconvexos se encuentran entre los métricamente convexos y los hiperconvexos. Estos espacios, en el caso lineal, son isométricos a subreticulos de $C(K)$, espacio de funciones continuas definidas en un compacto. La relación entre la $\aleph_0$-hiperconvexidad y el hecho de que se verifique una determinada relación entre el radio de un conjunto y su radio relativo a otro conjunto, nos ha permitido dar una caracterización de $C(K)$ y $C_0(K)$, espacio de las funciones de $C(K)$ que se anulan en un punto, como última aportación de esta Memoria cuya estructuración, contenidos y criterios seguidos en su redacción pasamos a comentar brevemente.

La Memoria está dividida en cuatro capítulos, los cuales se han subdividido en diferentes secciones.

Los conceptos y resultados no originales han sido agrupados, principalmente, en el primer capítulo. En algún caso, con la intención de hacer más fluida la lectura, se ha pospuesto la introducción de alguno de estos conceptos o resultados, siempre indicando la autoría y ofreciendo referencias adecuadas.

Como hemos indicado el Capítulo I es de carácter preliminar y en él recogemos toda la información que hemos estimado necesaria conocer para una lectura de la Memoria que permita su comprensión y la valoración de los resultados que se aportan. Hemos dividido el capítulo en seis secciones. Las dos primeras están dedicadas a introducir los espacios hiperconvexos, estudiar sus elementos más notables y enumerar sus principales propiedades. En la tercera sección se han recogido los resultados de punto fijo en espacios hiperconvexos que hemos considerado imprescindibles para esta Memoria. La cuarta sección está dedicada a revisar distintas posibilidades del concepto de convexidad generalizada que han aparecido en el marco de la Teoría del Punto Fijo y que servirán para situar en un contexto adecuado algunos de nuestros resultados. La sección quinta está dedicada al cierre hiperconvexo de Isbell que, como hemos señalado con anterioridad, es un concepto clave en nuestro trabajo. Finaliza este primer capítulo con una sección dedicada a las medidas de no compacidad y los operadores condensantes y últimamente compactos.

El Capítulo II está dedicado al estudio de las propiedades de los espacios hiperconvexos que han aparecido a lo largo de nuestro trabajo. Este segundo capítulo se ha dividido en cuatro secciones. Comenzamos con una sección en la que se prueba la existencia del cierre hiperconvexo para un subconjunto de un espacio hiperconvexo sin salirnos del propio espacio, propiedad ésta de fácil prueba pero crucial para el resto de la Memoria; en esta misma sección probamos un teorema de equivalencia entre los distintos cierres hiperconvexos de un mismo subconjunto. En la segunda sección se generaliza, en el caso no lineal, un resultado de Grothendiek y Lindenstrauss de extensión de operadores lineales compactos. En la sección tercera probamos diversas propiedades del cierre hiperconvexo de Isbell en relación con las medidas de no compacidad, entre ellas cabe destacar la que establece que dado un subconjunto de un espacio hiperconvexo su medida de no compacidad es igual a la de su cierre hiperconvexo. Por último cerramos el capítulo estudiando la relación de la hiperconvexidad con las estructuras de convexidad generalizada.

El Capítulo III recoge tres teoremas de punto fijo, a cada uno de los cuales hemos dedicado una sección. En la primera probamos un teorema de punto fijo bajo condiciones de frontera para aplicaciones compactas; un teorema análogo ha sido probado recientemente por W. A. Kirk y S. S. Shin en [26], para el caso de aplicaciones no expansivas. En la segunda sección comenzamos realizando una adaptación del concepto de aplicación últimamente compacta visto en el primer capítulo, para el caso en que dichas aplicaciones están definidas entre espacios hiperconvexos. Tal y como ocurría en el caso lineal, este tipo de aplicaciones puede ser visto como una generalización de las condensantes, pudiéndose probar, a partir de su definición, una gene- ralización del teorema de Darbo para aplicaciones últimamente compactas sustituyendo la hipótesis de convexidad lineal por la de hiperconvexidad. Finalizamos este capítulo estableciendo un teorema de localización de punto fijo motivado por un reciente trabajo de W. A. Kirk ([25]).

Para terminar, en el Capítulo IV, utilizando el concepto de espacio $\aleph_0-$hiperconvexo, se establece una caracterización de los espacios de Banach isométricos a los espacios de la forma $C(K)$ o $C_0(K)$. En este capítulo, dividido en tres secciones, hemos optado por dedicar la primera de ellas a plantear el problema, fijar la notación y recoger los conceptos y resultados que utilizaremos; pensamos que al considerar en este capítulo problemas de naturaleza distinta a los tratados en los anteriores era preferible situar estos preliminares aquí en lugar de en el Capítulo I. En la sección segunda se definen los espacios de Smith-Ward como aquellos espacios métricos M para los que se verifica

$$r_G(A) = r(A) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G)$$

para todo par de subconjuntos A y G de M, con A acotado y G no vacio, donde $r(A)$ es el radio de Chebyshev de A, $r_G(A)$ el radio de Chebyshev de A relativo a G y $E^\varepsilon(A)$ es el $\varepsilon-$ centro de Chebyshev de A (ver página 77 para las definiciones); el resultado central del capítulo es que un espacio de Banach es de Smith-Ward si, y sólo si, es isométrico a $C(K)$ y $C_0(K)$. En la prueba del anterior resultado se utiliza como herramienta básica el módulo geométrico $\kappa_M(d)$ introducido por A. Wiśnicki y J. Wośko en [40]. Concluimos nuestra Memoria con una sección dedicada a estudiar el comportamiento del módulo $\kappa_M(d)$ en relación con la igualdad anterior, cuando desaparece la hipótesis de completitud sobre el espacio.

Por último, señalar que las demostraciones y ejemplos no referenciados son originales, así como destacar la colaboración de Andrzej Wiśnicki y Jacek Wośko, ambos de la Universidad Maria Sklodowska de Lublin, Polonia, en la obtención de los resultados que forman el cuarto capítulo.

Capítulo1

Preliminares

El presente capítulo está dedicado a introducir los conceptos y resultados que pensamos son necesarios para una adecuada comprensión y valoración de la memoria que presentamos. Lo hemos dividido en seis secciones cuyos contenidos avanzamos a continuación.

En las primeras dos secciones se introducen las definiciones y propiedades más fundamentales y básicas para el conocimiento de los espacios hiperconvexos tomando como principal referencia el trabajo "*Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*" de N. Aronszajn y P. Panitchpakdi ([2]).

En la tercera tratamos con algunos de los resultados centrales en la Teoría del Punto Fijo para los espacios hiperconvexos.

Las siguientes dos secciones las dedicamos a discutir sobre conceptos tan básicos como intersecciones de conjuntos y otros relacionados con la convexidad lineal.

Por último, en la sexta sección introducimos el concepto de medida de no compacidad así como los operadores condensantes y últimamente compactos.

1.1 Espacios métricos hiperconvexos. Primeros conceptos

Aunque existen diferentes definiciones equivalentes de espacio hiperconvexo, la forma más usual de presentarlos es la que se basa en el concepto de convexidad métrica.

Definición 1.1.1. Un espacio métrico M se dice métricamente convexo si para todo par de puntos, denotados por x e y, en M y números reales positivos, α y β, de modo que $d(x,y) \leq \alpha + \beta$, se tiene que

$$B(x,\alpha) \cap B(y,\beta) \neq \emptyset,$$

donde $B(x,\alpha)$ y $B(y,\beta)$ son las bolas cerradas de M con centros en x e y, y radios α y β, respectivamente.

Si en esta definición sustituimos la acción de tomar un par de puntos por una colección cualquiera de puntos del espacio métrico considerado, nos encontramos de forma inmediata con el concepto de hiperconvexidad métrica tal y como fue introducido por N. Aronszajn y P. Panitchpakdi en [2].

Definición 1.1.2. Un espacio métrico M se dice hiperconvexo si

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset$$

para cualquier colección de bolas cerradas $\{B(x_\alpha, r_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ en M verificando la condición de que $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ para todo α y β en $\mathcal{A}$.

El ejemplo más simple de espacio métrico hiperconvexo es la recta real euclídea. Si aumentamos la dimensión de este espacio, se obtiene que un espacio de Banach finito dimensional dotado con la norma del supremo también es hiperconvexo. Por otra parte, resulta fácil ver que cualquier espacio de Banach estrictamente convexo con dimensión mayor o igual que dos, entre otros, no es hiperconvexo. De hecho más adelante veremos que los espacios de Banach hiperconvexos disfrutan de una geometría muy particular y restrictiva.

Destaquemos a continuación una primera e inmediata propiedad de los espacios hiperconvexos donde se establece que la hiperconvexidad es invariante bajo isometrías.

Lema 1.1.3. *Si dos espacios métricos son isométricos, entonces uno es hiperconvexo si, y sólo si, lo es el otro.*

Por la forma de presentar los espacios hiperconvexo parece bastante claro el uso del término hiperconvexidad para determinarlos, dada su relación con la convexidad métrica. Aún así, se puede plantear la cuestión de si habrá algún tipo de relación entre la hiperconvexidad de un subconjunto de un espacio lineal y su convexidad lineal. El siguiente ejemplo, que más adelante será complementado por otro (ver Ejemplo 1.4.6), muestra que hiperconvexidad no implica necesariamente convexidad lineal en los espacios lineales.

Ejemplo 1.1.4. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ dotado con la norma del supremo. Sea A el subconjunto de este espacio dado por

$$A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 2 - x) : 1 \leq x \leq 2\}.$$

Este conjunto A es isométrico con el intervalo $[0, 2]$ y, en virtud del lema anterior, hiperconvexo. Sin embargo no se trata de un conjunto linealmente convexo.

Una de las características más importantes de los espacios hiperconvexos es la estrecha relación existente entre los conceptos de hiperconvexidad y retracción no expansiva (los detalles de lo que exponemos a continuación pueden ser consultados en [2]). Para explicarla comencemos con la definición de retracción no expansiva.

Definición 1.1.5. Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M. Una aplicación $r : M \to A$ se llama retracción no expansiva si es no expansiva (es decir, si $d(r(x), r(y)) \leq d(x, y)$ para todo x e y en M) y $r(x) = x$ para todo $x \in A$.

En el caso de existir una tal aplicación de M a A, se dice que A es un retracto no expansivo de M.

En general se dice que A es un retracto continuo, o simplemente retracto, de M si sobre la aplicación r se supone continuidad en lugar de no expansividad.

En [2] se ofrece el siguiente resultado.

Teorema 1.1.6. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo, entonces un subconjunto suyo es hiperconvexo si, y sólo si, es retracto no expansivo del propio espacio hiperconvexo M.*

A partir de este resultado, M. A. Khamsi y S. Reich en [21] obtienen la siguiente caracterización de hiperconvexidad.

Lema 1.1.7. *Se tiene que un espacio métrico M es hiperconvexo si, y sólo si, es isométrico a un retracto no expansivo de $\ell_\infty(I)$, para algún conjunto de índices I.*

La caracterización de los espacios de Banach reales hiperconvexo fue, primero, conjeturada y probada parcialmente por L. Nachbin en [31]. Más tarde sería completamente probada por J. L. Kelley en [19]. Entre ambos finalmente consiguieron caracterizar los espacios de Banach hiperconvexos como el conjunto de los espacios de funciones reales continuas $C(H)$, con

H un espacio de Hausdorff compacto y extremadamente disconexo (ver [28] para más información). De este modo, encontramos como ejemplos más inmediatos de espacio de Banach hiperconvexo los espacios del tipo ℓ_∞ y L_∞, entre otros.

Acabaremos esta sección mostrando un par de propiedades topológicas, satisfechas por cualquier espacio hiperconvexo, que nos serán de gran utilidad. La primera de ellas se puede consultar en [2].

Lema 1.1.8. *Todo espacio métrico hiperconvexo es completo.*

Para la segunda necesitamos introducir la definición de espacio contractible.

Definición 1.1.9. Un espacio métrico M se dice contractible si es homotópico a un punto del espacio, esto es, si existe una aplicación continua, con respecto a la métrica producto en $M \times [0,1]$, H tal que

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow H$$

y verifica que $H(x,1) = x$ para todo $x \in M$ y $H(x,0) = x_0$ para un cierto $x_0 \in M$. En los casos en que conviene especificar, es habitual decir que M es contractible a x_0.

En [17], J. R. Isbell prueba el siguiente resultado.

Lema 1.1.10. *Todo espacio métrico hiperconvexo es contractible a cualquiera de sus puntos.*

1.2 Extensión de operadores

En [31], L. Nachbin buscaba caracterizar aquellos espacios de Banach reales que pudiesen sustituir a $\mathbb{R}$ en el clásico Teorema de Hahn-Banach. Como consecuencia acabó encontrando lo que aquí se ha dado en llamar espacios de Banach hiperconvexos, y que en la teoría lineal han sido llamados con diferentes nombres, como por ejemplo espacios inyectivos o $\mathcal{P}_1$-espacios. De hecho, L. Nachbin demostró que si X e Y son dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal y continuo, entonces es necesario y suficiente que Y sea hiperconvexo para que el operador T se admita una extensión $\tilde{T}$ de Z a X con igual norma que T, para cada Z espacio de Banach conteniendo a X. Algo más tarde, con el inicio del estudio métrico de los espacios hiperconvexos, N. Aronszajn y P. Panitchpakdi ([2]) profundizaron mucho más en la relación entre las propiedades puramente métricas de los espacios inyectivos y la extensión de operadores uniformemente continuos entre espacios métricos. A continuación enunciamos los principales resultados que obtienen relacionados con esta cuestión. Comencemos introduciendo el concepto de módulo de continuidad.

Definición 1.2.1. Por módulo de continuidad entenderemos cualquier función

$$\delta : (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty]$$

creciente y convergente a 0 cuando se hace tender la variable a 0.

Si T es una aplicación entre dos espacios métricos M y N, entonces $\delta(\cdot)$ es un módulo de continuidad para T si, para todo x e y en M tales que $d_M(x,y) \leq \varepsilon$, se tiene que

$$d_N(T(x), T(y)) \leq \delta(\varepsilon).$$

De entre los distintos módulos de continuidad, serán especialmente interesantes aquellos que verifiquen la siguiente condición de subaditividad.

Definición 1.2.2. Un módulo de continuidad, δ, se dirá subaditivo si verifica que

$$\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq \delta(\varepsilon_1) + \delta(\varepsilon_2),$$

para todo ε_1, $\varepsilon_2 \geq 0$.

Además, en el caso particular de los operadores uniformemente continuos siempre se tiene definido, de modo natural, el siguiente módulo de continuidad.

Definición 1.2.3. Dada T una aplicación uniformemente continua de un espacio métrico M a otro espacio métrico N, entenderemos por módulo natural de continuidad para dicha aplicación el dado por la siguiente ecuación

$$\delta_T(\varepsilon) = \sup \left\{ d_N\left(T(x), T(y)\right) : \ d_M(x,y) \leq \varepsilon \right\}.$$

Entendamos pues, a partir de ahora, que dada T una aplicación uniformemente continua entre dos espacios métricos, δ_T simboliza el módulo natural de continuidad para T. En el siguiente lema destacamos dos de sus principales propiedades.

Lema 1.2.4. *Si δ_T es el módulo natural de continuidad para T, siendo T una aplicación uniformemente continua, entonces se verifica que*

1. *δ_T es un módulo de continuidad para T.*

2. Dado cualquier otro módulo de continuidad δ de T, se tiene que

$$\delta_T(\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon)$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Los siguientes resultados establecen condiciones que garantizan la existencia de módulos de continuidad subaditivos que serán utilizadas en los sucesivos capítulos de esta memoria.

Lema 1.2.5. *Para que exista un módulo de continuidad subaditivo mayorando un módulo de continuidad dado $\delta(\varepsilon)$, es necesario y suficiente que dicho módulo verifique que*

$$\operatorname{limsup}_{\varepsilon\to\infty} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \infty.$$

Lema 1.2.6. *Si T es una aplicación uniformemente continua definida desde un espacio métrico métricamente convexo a otro espacio métrico, entonces su módulo natural de continuidad, δ_T, es subaditivo.*

El siguiente resultado, esencial en el conocimiento de los espacios hiperconvexos y cuya prueba puede ser consultada en [2], establece la fuerte relación existente entre la posibilidad de extender aplicaciones uniformemente continuas y los espacios métricos hiperconvexos.

Teorema 1.2.7. *Sea M un espacio métrico. Para que toda aplicación T uniformemente continua de cualquier espacio métrico D en M con módulo de continuidad $\delta(\varepsilon)$ subaditivo admita, para cualquier espacio métrico F conteniendo métricamente a D, una extensión*

$$\tilde{T}\colon F \longrightarrow M$$

conservando el mismo módulo de continuidad $\delta(\varepsilon)$ de T, es necesario y suficiente que M sea hiperconvexo.

De este teorema se obtiene el siguiente importante corolario.

Corolario 1.2.8. *Una condición necesaria y suficiente para que un espacio métrico M sea hiperconvexo es que sea retracto no expansivo de cualquier espacio métrico donde se pueda inyectar métricamente.*

A partir de este resultado se deducen muchas otras propiedades de los espacios hiperconvexos. La que destacamos a continuación hace referencia al carácter de absoluto retracto de la que disfrutan dichos espacios.

Definición 1.2.9. Un espacio métrico M se dice absoluto retracto si para todo espacio métrico D, donde M pueda ser incluido métricamente como un subespacio cerrado, M es retracto continuo de D.

Teorema 1.2.10. *Todo espacio métrico hiperconvexo es absoluto retracto.*

Recordemos ahora la siguiente generalización del Teorema de Schauder obtenida por J. Dugundji y A. Granas en [9].

Teorema 1.2.11. *Si M es un espacio métrico absoluto retracto y compacto, y*

$$T: M \longrightarrow M$$

es una aplicación continua, entonces existe $x \in M$ tal que $T(x) = x$. Un punto verificando esta última condición es lo que, más adelante (Definición 1.3.2), llamaremos punto fijo para T.

De un modo inmediato a partir de este teorema se tiene el siguiente corolario para espacios métricos hiperconvexos.

Corolario 1.2.12. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo compacto. Entonces, si $T : M \longrightarrow M$ es una aplicación continua, existe $x \in M$ tal que $T(x) = x$.*

Otro punto de contacto entre extensión de aplicaciones y espacios hiperconvexos lo encontramos cuando tratamos de extender operadores lineales compactos de forma que la extensión buscada sea igualmente lineal y compacta.

Definición 1.2.13. Una aplicación $T : M \longrightarrow N$, con M y N espacios métricos, se dice compacta si es continua y la imagen de todo subconjunto acotado de M por T es relativamente compacta en N.

En este sentido resultan significativos los estudios realizados por J. Lindenstrauss (ver [30]) con respecto a las óptimas propiedades de los espacios de Banach hiperconvexos cuando se trata de resolver la situación anteriormente planteada sobre operadores compactos, aunque dichos estudios se restringen al campo de los espacios de Banach y los operadores lineales y continuos. De entre todos los resultados que aparecen en el extenso trabajo de J. Lindenstrauss destacaremos el siguiente teorema, cuya autoría corresponde a Grothendiek y Lindenstrauss (para más ver [30], así como el trabajo de Å. Lima, [29]).

Teorema 1.2.14. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Entonces son equivalentes:*

1. *X^{**} (el bidual de X) es hiperconvexo.*

2. *Todo operador compacto $T\colon Y \longrightarrow X$ tiene, para todo $\varepsilon > 0$, una extensión compacta $\tilde{T}\colon Z \longrightarrow X$, para todo espacio de Banach Z conteniendo a Y, cumpliendo que*

$$\| \tilde{T} \| \leq (1+\varepsilon) \| T \| .$$

3. *Todo operador compacto $T\colon X \longrightarrow Y$ tiene una extensión compacta $\tilde{T}\colon Z \longrightarrow Y$, para todo espacio de Banach Z conteniendo a X, cumpliendo que*

$$\| \tilde{T} \| = \| T \| .$$

En la segunda sección del siguiente capítulo trataremos de aproximarnos a este problema desde un punto de vista más puramente métrico.

1.3 Espacios hiperconvexos y la PPF

Desde que en 1965 W. A. Kirk ([22]) dio una condición de tipo geométrico sobre espacios de Banach para garantizar la existencia de puntos fijos para aplicaciones no expansivas, se ha generado una inmensa literatura tratando de asegurar bajo qué diferentes condiciones de tipo geométrico se puede garantizar la existencia de punto fijo para este tipo aplicaciones. En conjunto todos estos estudios tratan lo que se ha dado en llamar "Propiedad del Punto Fijo para Aplicaciones no Expansivas", o más brevemente PPF, y que se encuentran englobados dentro de la Teoría del Punto Fijo. Pero además, a partir de estos resultados de punto fijo se han generado otros tipos de planteamientos para la búsqueda de puntos fijos, cambiando las aplicaciones consideradas, los espacios ambientes,... Esta sección la dedicaremos a introducir las definiciones y resultados más básicos y elementales de dicha teoría, así como su más inmediata relación con los espacios hiperconvexos.

Definición 1.3.1. Sean M y N dos espacios métricos. Diremos que una aplicación $T\colon M \longrightarrow N$ es no expansiva si no aumenta las distancias, es decir, si

$$d_N(T(x), T(y)) \leq d_M(x, y)$$

para todo x e y en M.

Definición 1.3.2. Una aplicación $F: M \longrightarrow N$ se dice que tiene punto fijo en M si existe algún elemento x de M tal que $F(x) = x$. El conjunto de todos los puntos de M verificando la relación anterior es llamado conjunto de puntos fijos de T.

Definición 1.3.3. Un espacio de Banach X se dice que tiene la propiedad del punto fijo (PPF) para aplicaciones no expansivas si toda aplicación no expansiva $T : M \to M$ tiene punto fijo, cuando M es un subconjunto acotado, convexo y cerrado de X.

Desde la aparición del trabajo anteriormente mencionado de W. A. Kirk, son muchos y muy diversos los avances en la búsqueda de condiciones de tipo geométrico de los espacios de Banach considerados para garantizar si poseen la PPF o no. Un ejemplo de estas condiciones es la convexidad uniforme o la estructura normal del espacio, sobre este problema en general se pueden consultar los trabajos [8, 12]. Sin embargo, muchas de las propiedades geométricas consideradas "buenas" para que un espacio de Banach disfrute de la PPF no son satisfechas por los espacios del tipo ℓ_∞ ó L_∞, siendo además propiedades que parecen apuntar en un sentido completamente opuesto a las características de este tipo de espacios. Sin embargo, tal y como veremos a continuación, se va a poder garantizar la existencia de punto fijo para ciertas aplicaciones en espacios del tipo L_∞ atendiendo a la naturaleza hiperconvexa de estos espacios.

El siguiente ejemplo, simple y conocido, sirve para probar que ℓ_∞ no posee la PPF , al menos en los términos en que acabamos de fijarla anteriormente.

Ejemplo 1.3.4. Sea c_0 el espacio de las sucesiones reales convergentes a cero dotado de su norma usual del supremo y, por tanto, visto como un subespacio de ℓ_∞. Sea M la bola unidad cerrada de c_0. Obviamente M es cerrado, acotado y convexo en c_0 y, en consecuencia, también en ℓ_∞. Definamos ahora la aplicación $T: c_0 \longrightarrow c_0$ como

$$T(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (1, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$

Resulta inmediato comprobar que T está bien definida, es no expansiva y carece de punto fijo. Por lo que ℓ_∞ no posee la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas. De este modo se tiene que en general los espacios de Banach hiperconvexos no poseen la PPF.

Sin embargo, en los trabajos de G. Soardi ([38]), R. Sine ([34]) y J. B. Baillon ([4]) se ha demostrado que los espacios métricos hiperconvexos poseen una propiedad de punto fijo muy similar a la anteriormente definida.

Estos resultados adaptados al caso de los espacios de Banach tienen el gran valor de que nos garantizan la existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas en algunos de los espacios de Banach, a saber, los hiperconvexos, para los que las herramientas más habitualmente utilizadas, como ya hemos señalado anteriormente, no resultan adecuadas. El resultado que se ofrece para los espacios métricos hiperconvexos se enuncia como sigue.

Teorema 1.3.5. *Si $T : M \longrightarrow M$ es una aplicación no expansiva con M un espacio métrico hiperconvexo acotado, entonces T tiene punto fijo.*

Como consecuencia de este teorema, J. B. Baillon muestra el siguiente corolario que podemos encontrar en [4].

Corolario 1.3.6. *Si $T\colon M \longrightarrow M$ es una aplicación no expansiva con M un espacio métrico hiperconvexo acotado, entonces su conjunto de puntos fijos es no vacío e hiperconvexo.*

Profundizando en el problema de la estructura de los conjuntos de puntos fijos de aplicaciones no expansivas en espacios hiperconvexos, R. Sine llegará algo más allá en [35] estudiando los "ε-puntos fijos" de las aplicaciones no expansivas.

Definición 1.3.7. Dado M un espacio métrico y $T : M \longrightarrow M$ una aplicación, entenderemos por el conjunto de ε-puntos fijos de T, y lo denotaremos por $F_\varepsilon(T)$, el conjunto dado por

$$F_\varepsilon(T) = \{x \in M : \; d(T(x), x) \leq \varepsilon\}.$$

Bajo esta definición, R. Sine nos ofrece el siguiente teorema.

Teorema 1.3.8. *Si $T\colon M \longrightarrow M$ es una aplicación no expansiva con M un espacio métrico hiperconvexo y acotado, entonces $F_\varepsilon(T)$ es hiperconvexo y no vacío para todo ε positivo.*

Nota 1.3.9. Puesto que cualquier bola cerrada de un hiperconvexo es, en sí misma, hiperconvexa, de estos teoremas se puede deducir, por ejemplo, que los espacios $\ell_\infty(I)$ poseen la llamada bola propiedad del punto fijo, para I cualquier conjunto de índices. Por bola propiedad del punto fijo se entiende que toda aplicación no expansiva de la bola unidad de un espacio de Banach en sí misma, tiene punto fijo. Para más información sobre este tipo de propiedades se puede consultar [18].

Otra de las ramas de la Teoría del Punto Fijo que un mayor desarrollo ha experimentado en los últimos años ha sido la correspondiente al Análisis Multivaluado. Nosotros no entraremos muy a fondo en esta parte de la teoría. Sin embargo sí conviene adelantar algunas definiciones y resultados tanto por el interés que tienen en sí mismos como porque nos serán necesarias a lo largo de esta memoria. Comencemos con la definición de aplicación multivaluada.

Definición 1.3.10. Dados dos espacios métricos M y N, entenderemos que T es una aplicación multivaluada de M en N si T toma como imágenes subconjuntos no vacíos de N. Es decir, si

$$T: M \longrightarrow \mathcal{P}(N).$$

Al tratar una aplicación de este tipo como una aplicación univaluada entre espacios métricos es posible hablar de su continuidad si se define una métrica en $\mathcal{P}(N)$. Lo más usual en este caso es considerar el subconjunto de $\mathcal{P}(N)$ dado por los subconjuntos cerrados de N y utilizar la conocida métrica de Hausdorff definida en partes de un espacio métrico, que pasamos a definir.

Comencemos fijando la notación. Consideremos dado un espacio métrico N y definamos por $H_\rho(D)$, donde $D \subseteq N$ y $\rho > 0$, el conjunto dado por

$$H_\rho(D) = \{z \in N : \operatorname{dist}(z, D) \leq \rho\},$$

donde

$$\operatorname{dist}(z, D) = \inf\{d(z, x) : x \in D\}.$$

Definición 1.3.11. Dado N un espacio métrico, se define la distancia de Hausdorff entre dos subconjuntos no vacíos A y B de M como

$$H(A, B) = \inf\{\rho \geq 0 : A \subseteq H_\rho(B) \text{ y } B \subseteq H_\rho(A)\}.$$

Una de las principales propiedades de esta distancia viene dada por el siguiente conocido lema, cuya prueba se puede encontrar en [27].

Lema 1.3.12. *Sea N un espacio métrico acotado. Entonces, si $\mathcal{C}(N)$ denota la colección de todos los subconjuntos cerrados de N, se tiene que $(\mathcal{C}(N), H(\cdot, \cdot))$ es un espacio métrico.*

Una vez definida la métrica de Hausdorff para las partes de un espacio métrico, ya estamos en situación de continuar enunciando resultados de punto fijo, esta vez para aplicaciones multivaluadas. En este sentido haremos especial mención del trabajo que R. Sine realiza en [36] sobre aplicaciones multivaluadas no expansivas en espacios hiperconvexos. Más concretamente el autor prueba el resultado que ofrecemos tras la siguiente definición.

Definición 1.3.13. Si T es una aplicación multivaluada definida de un espacio métrico M en otro espacio métrico N. Se dirá que $f\colon M \longrightarrow N$ es una selección de T si $f(x) \in T(x)$ para todo x de M.

Teorema 1.3.14. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo acotado. Entonces, si T es una aplicación definida de M en $\mathcal{P}(M)$ de tal modo que $T(x)$ es intersección de bolas cerradas de M para todo x, y además es no expansiva con respecto a la métrica de Hausdorff en $\mathcal{P}(M)$, se tiene que existe $f\colon M \longrightarrow M$ selección no expansiva de T.*

A partir de este interesante teorema se tiene inmediatamente un resultado de punto fijo para aplicaciones multivaluadas. En este nuevo contexto, tener un punto fijo queda determinado por la siguiente definición.

Definición 1.3.15. Dada T, aplicación multivaluada de un espacio métrico M en sí mismo, se dice que x es un punto fijo para T si

$$x \in T(x).$$

Uniendo el Teorema 1.3.5 al Teorema 1.3.14, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.3.16. *Si T y M están bajo las mismas hipótesis del Teorema 1.3.14, entonces T tiene un punto fijo como aplicación multivaluada.*

1.4 Convexidad, intersecciones y conjuntos admisibles

La presente sección estará dedicada a familiarizarnos con ciertos elementos esenciales para el conocimiento de los espacios métricos hiperconvexos. Comenzaremos destacando el hecho de que en el estudio de la existencia de punto fijo en el marco de los espacios hiperconvexos han aparecido generalizaciones de estructuras básicas muy familiares cuando se trata de trabajar con la convexidad lineal. Estas generalizaciones se han manifestado esenciales a la hora de estudiar nuevos tipos de espacios métricos en relación a la propiedad del punto fijo (ver, por ejemplo [8, 18]). Para describir dichas estructuras necesitaremos fijar algunas notaciones que facilitarán la lectura.

Definición 1.4.1. Sea M un espacio métrico y A un subconjunto acotado de M. Entonces escribiremos:

$$\begin{aligned} r_x(A) &= \sup\{d(x,y) : y \in A\} \text{ cuando } x \in M, \\ r(A) &= \inf\{r_x(A) : x \in M\}, \\ r_A(A) &= \inf\{r_x(A) : x \in A\}, \\ \delta(A) &= \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}. \end{aligned}$$

Donde los distintos elementos reciben los siguientes nombres: $r_x(A)$ es llamado radio respecto a x del conjunto A, $r(A)$ radio de A, $r_A(A)$ radio de A con respecto a sí mismo y, finalmente, $\delta(A)$ diámetro de A.

Dentro de un espacio hiperconvexo se pueden distinguir distintos tipos de conjuntos atendiendo a diferentes características de los mismos. Sin embargo entre todos ellos hay un tipo particular de conjuntos que ha destacado por ser especialmente ricos en propiedades, son los llamados conjuntos admisibles. Las siguientes definiciones los determinan.

Definición 1.4.2. Dado un espacio hiperconvexo M y un subconjunto A de M, se denotará por $co(A)$ a:

$$co(A) = \bigcap \{B : B \text{ es bola cerrada de } M \text{ conteniendo a } A\}.$$

Definición 1.4.3. Un subconjunto A de un espacio hiperconvexo M se dirá admisible si $co(A) = A$, es decir, si es intersección de bolas cerradas de M. El conjunto de todos los subconjuntos admisibles de M será denotado por $\mathcal{A}(M)$.

Estos conjuntos son bien merecedores de una página aparte en la teoría de los espacios métricos hiperconvexos. Sirviéndose de ellos se han demostrado propiedades muy interesantes de los espacios hiperconvexos (ver, por ejemplo [4, 35]), a la vez que se han obtenido un buen número de teoremas de los que todavía no ha podido ser sustituida la hipótesis de "conjunto admisible" por la de "hiperconvexo" (ver por ejemplo, [20, 25, 36]). Si volvemos la vista hacia el Teorema 1.3.14 podremos observar que la aplicación multivaluada T de dicho teorema toma valores dentro del conjunto de los subconjuntos admisibles de M. Y es que este tipo de hipótesis no será una excepción dentro de los resultados de punto fijo para espacios hiperconvexos, en parte debido a la gran analogía que a continuación describiremos entre estos conjuntos y los subconjuntos convexos de un espacio lineal y, como no, en parte debido también a las propiedades métricas de los conjuntos admisibles. Pasemos, por tanto, a definir lo que se entiende por estructuras generalizadas de convexidad y cómo es posible relacionarlas con los espacios hiperconvexos.

Definición 1.4.4. Dado M un espacio métrico diremos que una familia de subconjuntos Σ de M determina una estructura convexa en M si

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $M \in \Sigma$.
3. Σ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias.

Ahondando en la relación entre la estructura convexa de un espacio lineal y la Teoría del Punto Fijo se puede apreciar que una de las características de mayor utilidad que es posible distinguir en toda estructura convexa es la estructura normal (ver, por ejemplo, el trabajo de W. A. Kirk ([24])). Por tanto se hace necesario, si se quiere generalizar la idea de estructura convexa a ambientes donde no hay linealidad, disponer así mismo de una nueva idea que generalice el concepto de estructura normal. Este trabajo lo podemos encontrar desarrollado por G. Soardi en [38]:

Definición 1.4.5. Una estructura convexa Σ de un espacio métrico acotado M se dice uniformemente relativamente normal si existe un número $c \in (0,1)$ tal que para cada $D \in \Sigma$ existe un elemento en M, z_D de modo que

1. $D \subset B(z_D, c\text{diam}(D))$.
2. Si $D \subset B(y, c\text{diam}(D))$ para $y \in M$, entonces
$$d(z_D, y) \leq c\text{diam}(D).$$

Si ahora tenemos la intención de dotar a un espacio hiperconvexo dado de una estructura convexa uniformemente relativamente normal, nos bastará con tomar como Σ la familia anteriormente introducida de todos los conjuntos admisibles del propio espacio. Con esto no sólo tendremos una estructura convexa con la propiedad que acabamos de destacar sino que además se da la circunstancia, nada habitual incluso en los espacios lineales, de que el c de la definición anterior se puede tomar con el menor valor posible, es decir, en este caso se tiene que

$$c = \frac{1}{2} \text{ (ver Proposición 1.4.11).}$$

La principal propiedad de este tipo de estructuras hace referencia a la facultad de poder intersectar libremente sus elementos y obtener otro de la misma familia. Como veremos a continuación el conjunto de subconjuntos hiperconvexos de un espacio hiperconvexo no disfruta de esta propiedad, aunque sí su subconjunto de conjuntos admisibles. Por otra parte, donde hay una estructura convexa siempre hay una envolvente convexa. En la siguiente sección trataremos con más detalle el problema de qué entender por el análogo a envolvente convexa en el caso que nos ocupa, el hiperconvexo.

Volvamos por un momento a la relación entre convexidad lineal e hiperconvexidad allí donde ambos conceptos tienen sentido. Ya hemos visto que de la segunda no se puede deducir la primera. Pero además de la convexidad lineal tampoco se podrá deducir la hiperconvexidad dentro de un espacio lineal hiperconvexo.

Ejemplo 1.4.6. Consideremos el espacio hiperconvexo $\mathbb{R}^3$ con la norma del supremo y tratemos de encontrar dentro de él un conjunto convexo que no sea hiperconvexo. El conjunto que andamos buscando lo encontraremos a partir del conjunto A dado por

$$A = \{a_1 = (1,1,1),\ a_2 = (1,0,0),\ a_3 = (0,1,0)\}.$$

Es fácil ver que la intersección

$$\bigcap_{i=1}^{3} B\left(a_i, \frac{1}{2}\right)$$

coincide con el conjunto unitario

$$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Ocurriendo que, dicho punto, no se encuentra en la envolvente convexa de A. En consecuencia, el cierre convexo de A será un conjunto linealmente convexo, aunque no hiperconvexo.

Tampoco resultará "buena" la conducta de los subconjuntos hiperconvexos de un espacio hiperconvexo con respecto a la intersección.

Ejemplo 1.4.7. En $\mathbb{R}^2$ con la norma del máximo, consideremos los conjuntos

$$A = \{(x,x) :\ 0 \le x \le 1\} \cup \{(x, 2-x) :\ 1 \le x \le 2\}.$$

$$B = \left\{\left(x, \frac{1}{2}\right) :\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ambos conjuntos son hiperconvexos, mientras que su intersección

$$A \cap B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\},$$

no lo es al tratarse de dos puntos aislados.

Este ejemplo prueba que la intersección de conjuntos hiperconvexos no tiene por qué ser un nuevo hiperconvexo. Sin embargo sí que vamos a contar con un par de situaciones en las que se va a poder garantizar que la intersección de ciertos hiperconvexos va a ser hiperconvexa. La primera de ellas ha quedado ya anunciada al adelantar que los conjuntos admisibles determinan una estructura de convexidad sobre el espacio hiperconvexo correspondiente.

Lema 1.4.8. *Si M es un espacio hiperconvexo entonces se cumple que:*

1. *$\mathcal{A}(M)$ es cerrado para intersecciones arbitrarias.*
2. *Todo $A \in \mathcal{A}(M)$ es hiperconvexo en sí mismo.*

La segunda de las dos situaciones favorables resulta mucho menos trivial que la anterior y fue dada por J. B. Baillon en [4]. Nosotros la ofrecemos en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.9. *Sea $\{H_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia decreciente de espacios hiperconvexos no vacíos y acotados, entonces la intersección de los elementos de la familia es no vacía e hiperconvexa.*

A partir de este resultado, J. B. Baillon también apunta el siguiente corolario.

Corolario 1.4.10. *Sea $\{H_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia decreciente de espacios hiperconvexos no vacíos. Entonces la intersección de todos ellos, vacía o no, es hiperconvexa.*

Para acabar la sección, resumimos en la siguiente proposición algunas de las relaciones más notables entre los diámetros y radios de los subconjuntos de los espacios hiperconvexos (para pruebas ver [4]).

Proposición 1.4.11. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo y A un subconjunto acotado y no vacío de M. Entonces:*

1. *$co(A) = \bigcup_{x \in M} B(x, r_x(A))$.*

2. $r_x(co(A)) = r_x(A)$ *para todo* $x \in M$.

3. $r(A) = \frac{1}{2}\delta(A)$.

4. $r(co(A)) = r(A)$.

5. $\delta(co(A)) = \delta(A)$.

1.5 Cierres hiperconvexos

En la teoría métrica del punto fijo es muy habitual tomar el caso lineal como referencia y dar, a las diferentes situaciones que se puedan presentar en el caso métrico, un tratamiento lo más similar posible al lineal. Por ello se destacan elementos o estructuras que recuerdan al caso lineal. En esta sección veremos cómo es posible interpretar, en un contexto de hiperconvexidad, una acción tan natural y útil en el caso lineal como es la de tomar envolvente convexa. En este sentido nos encontramos con dos posibles opciones. La primera de la que hablaremos sostiene que tal "envolvente convexa" de un conjunto A en un espacio hiperconvexo M es el conjunto $co(A)$ definido en la sección anterior. Aunque esta opción se ha mostrado en muchas ocasiones muy conveniente (consultar, por ejemplo, [20, 25, 35, 36]), no reúne todas las buenas propiedades que debiera esperarse. Veremos que una de las principales dificultades que se plantean a la hora de trabajar con el concepto de esta envolvente hiperconvexa es que puede resultar "demasiado grande" en el sentido de la compacidad.

La segunda posibilidad que tenemos nos la ofreció J. R. Isbell en [17]. Aunque más técnica y menos inmediata que la anterior, para nosotros ha sido una herramienta esencial, tal y como se podrá apreciar a lo largo de esta memoria. Serán muchas y muy variadas las diferencias que se darán entre esta idea de cierre hiperconvexo y la de cierre convexo en un espacio lineal. Sin embargo, este segundo sentido de cierre hiperconvexo nos permitirá disfrutar de unas ciertas propiedades de los espacios hiperconvexos que mediante el concepto de envolvente hiperconvexa usando $co(A)$ hubiesen sido imposibles. De hecho, a partir del próximo capítulo entenderemos que si hablamos de cierre hiperconvexo nos referimos, por defecto, al dado por J. R. Isbell.

Sea M un espacio hiperconvexo y A un subconjunto de M. Denotemos simplemente por co la aplicación definida de $\mathcal{P}(M)$ en $\mathcal{A}(M)$ como:

$$\begin{aligned} co\colon \mathcal{P}(M) &\longrightarrow \mathcal{A}(M)\\ A\ &\longmapsto co(A) \end{aligned}$$

Esta aplicación tendrá propiedades por las que puede ser interpretada como una buena opción a la hora de definir una envolvente hiperconvexa. La siguiente propiedad nos da una condición de minimalidad muy similar a la de la envolvente convexa en el caso lineal.

Proposición 1.5.1. *Sea M un espacio hiperconvexo y $A \subset M$. Entonces, si $A \subseteq B \subseteq M$ y $B \in \mathcal{A}(M)$, se tiene que $B \supseteq co(A)$.*

Pero no será esta la única propiedad que nos haga recordar la envolvente convexa. Y es que resulta inmediato ver que la aplicación co es monótona, es decir, que si $B \supseteq A$ entonces $co(B) \supseteq co(A)$.

Sin embargo no todo serán buenas propiedades a la hora de hacer un absoluto paralelismo con el caso lineal. En el siguiente ejemplo vemos un caso en que siendo A un subconjunto hiperconvexo de un espacio hiperconvexo ocurre que no se dará la coincidencia entre $co(A)$ y A.

Ejemplo 1.5.2. Sea $\mathbb{R}^2$ dotado con la norma del supremo. Definimos el subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ como

$$A = \{(x,x) :\ 0 \le x \le 1\}.$$

Es un fácil ejercicio comprobar que

$$co(A) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le y \le 1\big\}.$$

Obteniéndose que A no coincide, en general, con $co(A)$.

Pero tal vez más trascendente que el hecho mostrado por este último ejemplo sea lo que indica el próximo ejemplo. En este nuevo ejemplo, inspirado en el anterior, veremos que la aplicación co puede aumentar en exceso los conjuntos.

Ejemplo 1.5.3. Consideremos ℓ_∞ con su norma habitual. Denotemos los elementos $x \in \ell_\infty$ como $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. Sea A el subconjunto de ℓ_∞ definido como

$$A = \{x \in \ell_\infty :\ 0 \le x_1 \le 1 \text{ y } x_i = x_1, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\ \}.$$

En este caso se tiene que

$$co(A) = \{x \in \ell_\infty :\ 0 \le x_i \le 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

Obteniendo que, mientras A es compacto, $co(A)$ no lo es.

Estas son, básicamente, las propiedades que $co(A)$ tiene para reconocerlo como cierre hiperconvexo de un conjunto A. Introduzcamos seguidamente el cierre hiperconvexo de Isbell ([17]). Veremos que, en cierto sentido, este cierre hiperconvexo complementa a co, de hecho se puede decir que donde mejor funciona uno peor lo hace el otro, y recíprocamente. Seguiremos el camino marcado por J. R. Isbell en [17] para la presentación de este nuevo concepto.

Definición 1.5.4. Sean X y M dos espacios métricos, y $e\colon X \longrightarrow M$ una aplicación. Diremos que e es un cierre hiperconvexo de X si M es hiperconvexo, e es una isometría inyectiva y ningún subespacio hiperconvexo propio de M contiene a $e(X)$.

A partir de esta definición parece claro que no tiene por qué darse unicidad en dicho cierre hiperconvexo. Es decir, puede que a un mismo espacio métrico se le asocien varios cierres hiperconvexos. La siguiente definición indica cómo identificar dichos cierres hiperconvexos. Más adelante se verá que dicha identificación es posible.

Definición 1.5.5. Dos cierres hiperconvexos de X, e y f con imagen, respectivamente los espacios métricos M y N se dirán equivalentes si existe una isometría $i\colon M \longrightarrow N$.

Nota 1.5.6. Aunque en la definición del cierre hiperconvexo de Isbell éste resulta ser una aplicación, nos resultará mucho más cómodo referirnos como cierre hiperconvexo al conjunto imagen de dicha aplicación en lugar de a la propia aplicación. Por tanto de aquí en adelante convendremos en entender como cierre hiperconvexo de Isbell el conjunto imagen de e en lugar de la propia aplicación e.

J. R. Isbell da el siguiente teorema para la existencia de dichos cierres.

Teorema 1.5.7. *Todo espacio métrico tiene un cierre hiperconvexo, y todos sus cierres hiperconvexos son equivalentes.*

De este teorema se deduce que, si bien podemos hablar del cierre hiperconvexo de cualquier espacio métrico, éste es único salvo isometría.

En la demostración del anterior teorema, J. R. Isbell, construye un cierre hiperconvexo natural para cualquier espacio métrico sobre el que establece la equivalencia de todos los cierres hiperconvexos posibles. Puesto que este cierre hiperconvexo natural resulta ser una herramienta muy útil, y así aparecerá en el presente trabajo, recordemos cómo lo construye el propio J. R. Isbell.

Definición 1.5.8. Sea X un espacio métrico. Diremos que una función $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función extremal de X si verifica que

$$f(x) + f(y) \geq d(x, y) \text{ para todo } x, y \in X$$

y es puntualmente minimal entre todas las funciones definidas de X en $\mathbb{R}$ verificando la misma propiedad. Es decir, si $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica lo mismo que f entonces

$$f(x) \leq g(x)$$

para todo elemento x de X.

A partir de aquí, J. R. Isbell denota por εX (notación que nosotros también asumiremos) el conjunto de todas las funciones extremales de X; probando las siguientes propiedades.

Lema 1.5.9. *Si X es un espacio métrico y εX es su conjunto de funciones extremales, entonces se tiene que:*

1. $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$ *y* $f \in \varepsilon X$.
2. *Si denotamos por d al diámetro de X, entonces* $f(X) \subseteq [0, d]$.
3. $(\varepsilon X, \|\cdot\|_{sup})$ *está bien definido como espacio métrico y es hiperconvexo.*
4. *X está isométricamente incluido en εX mediante la aplicación*

$$\begin{aligned} e\colon X &\longrightarrow \varepsilon X \\ x &\longmapsto e(x)(\cdot) = d(x, \cdot). \end{aligned}$$

5. *εX es un cierre hiperconvexo de X.*
6. *Si X es relativamente compacto, entonces εX es compacto.*

Son muchas las cosas que llaman la atención sobre este concepto de cierre hiperconvexo dado por J. R. Isbell. Tal vez lo primero que cabría destacar es el hecho de que todo espacio métrico posee dicho cierre hiperconvexo. Sin embargo nosotros nos centraremos en el caso en que el espacio ambiente es un espacio hiperconvexo. En este caso surgen algunas cuestiones naturales. Por ejemplo, ya sabemos que todo subconjunto del espacio hiperconvexo posee cierre hiperconvexo. Pero ¿podremos encontrar al menos uno de esos cierres hiperconvexos como un subconjunto del propio espacio ambiente? En tal caso, ¿contiene a nuestro conjunto o no? Además, ¿qué garantías de unicidad o monotonía nos ofrece? A todas estas cuestiones trataremos de dar respuesta en el siguiente capítulo para después ser utilizadas en diferentes pruebas de los resultados que aquí se exponen. Terminemos la presente sección con un apunte que nos ayudará a fijar ciertos términos.

Nota 1.5.10. Ya sabemos que un espacio métrico puede poseer diferentes cierres hiperconvexos según la definición dada por J. R. Isbell. Cuando tengamos que trabajar con este concepto normalmente necesitaremos un cierre hiperconvexo particular. En general, a la hora de fijar dicho cierre hiperconvexo, diremos que tomamos una realización del cierre hiperconvexo del conjunto considerado. De un modo particular, a tal realización se le llamará realización natural del cierre hiperconvexo si es que estamos hablando del espacio de funciones εX dado por J. R. Isbell.

1.6 Medidas de no compacidad

Uno de los conceptos de mayor presencia en el desarrollo de este trabajo será el de medida de no compacidad. Sobre esta materia existe una amplísima literatura, como se puede comprobar en [3] o [13]. Son muchas y muy distintas las aplicaciones que las medidas de no compacidad tienen en el Análisis Funcional y, en particular, en la Teoría del Punto Fijo. Aunque existe una teoría general y abstracta sobre dichas medidas, la naturaleza de los resultados que presentaremos en próximos capítulos nos obligará a restringirnos a dos de las medidas de no compacidad más intensamente estudiadas. Dichas medidas de no compacidad son las conocidas como medida de Kuratowski y medida de Hausdorff.

Definición 1.6.1. Sea M un espacio métrico y $\mathcal{B}$ la familia de los subconjuntos acotados de M. Para cada $B \in \mathcal{B}$ se definen las medidas de no compacidad de Kuratowski y de Hausdorff, que representaremos respectivamente por α y χ, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ & B \text{ puede ser recubierto por un número} \\ & \text{finito de conjuntos de diámetro} < \varepsilon\}. \\ \chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ & B \text{ puede ser recubierto por un número} \\ & \text{finito de bolas de radio} < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

En la siguiente proposición resumimos algunas de las propiedades más importantes de ambas medidas.

Proposición 1.6.2. *Denotemos indistintamente por ϕ a ambas medidas de no compacidad. Entonces las siguientes propiedades se verifican en cualquier espacio métrico completo X:*

1. $\phi(B) = 0$ *si y sólo si* B *es precompacto.*

2. $\phi(\bar{B}) = \phi(B)$.

3. $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$.

4. *Si* $B_1 \subseteq B_2$ *entonces* $\phi(B_1) \leq \phi(B_2)$.

5. $\phi(B_1 \cap B_2) \leq \min\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$.

6. *Si* B_n *es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, no vacíos y acotados de* X *verificando que*

$$\lim_{n \to \infty} \phi(B_n) = 0,$$

entonces

$$B_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

es no vacío y compacto.

Además, si X *es un espacio de Banach, se tiene, entre otras propiedades:*

7. *Si* $\mathrm{conv}(B)$ *representa el cierre convexo de* B *en* X, *entonces*

$$\phi\big(\mathrm{conv}(B)\big) = \phi(B).$$

Otras propiedades de estas medidas vienen dadas por los dos siguientes teoremas.

Teorema 1.6.3. *Sea* U *la bola unidad de un espacio de Banach* X. *Entonces* $\alpha(U) = \chi(U) = 0$ *si* X *es de dimensión finita. En otro caso se tiene que* $\alpha(U) = 2$ *y* $\chi(U) = 1$.

Teorema 1.6.4. *Las medidas de no compacidad de Hausdorff y Kuratowski están relacionadas mediante las siguientes desigualdades*

$$\chi(B) \leq \alpha(B) \leq 2\chi(B).$$

Las desigualdades de este último teorema resultan ser las mejores posibles en el contexto de los espacios de Banach (consultar por ejemplo [3]). Sin embargo, en el de los espacios hiperconvexos la relación va a ser mucho más rígida, tal y como veremos en el próximo capítulo (Lemas 2.3.1 y 2.3.2).

Para acabar con las generalidades sobre ambas medidas de no compacidad, hagamos notar la dependencia existente entre la medida de no compacidad de un conjunto y el espacio en el que se considera incluido. Es decir, si tenemos un mismo subconjunto D de dos espacios métricos distintos M y M', nos preguntamos si el valor de su medida de no compacidad depende de en cual de ambos espacios estamos considerando sumergido el subconjunto D. En los casos que nos ocupan, el de la medida de Hausdorff y el de la medida de Kuratowski, la situación difiere mucho dependiendo de en cual de ellos estamos. Así, por ejemplo, para la medida de Kuratowski encontramos una respuesta inmediata a partir de su propia definición. Enunciémoslo mediante el siguiente lema.

Lema 1.6.5. *Si D puede ser visto como subconjunto de dos espacios métricos distintos M y M', entonces la medida de no compacidad de Kuratowski de D en M coincide con la medida de Kuratowski de D en M'.*

En este sentido el caso de la medida de no compacidad de Hausdorff es completamente diferente. La justificación de este hecho la dejaremos para el próximo capítulo donde, con ayuda de la hiperconvexidad, se podrá justificar con un razonamiento muy sencillo (ver Nota 2.3.3).

Concluiremos la presente sección y, por tanto, el primer capítulo de esta memoria, mostrando algunos resultados generales sobre la relación entre las medidas de no compacidad y la Teoría del Punto Fijo. Es posible establecer esta relación debido principalmente a que las medidas de no compacidad nos permiten medir la no compacidad de un conjunto. Una de las consecuencias más inmediatas de este hecho será la aparición de nuevos tipos de aplicaciones que surgen como generalizaciones naturales de las aplicaciones compactas. A continuación pasamos a introducir dichas aplicaciones.

Definición 1.6.6. Sea X un espacio métrico y ϕ cualquiera de las dos medidas de no compacidad anteriormente definidas. Se dirá que una aplicación $T\colon D \subseteq X \longrightarrow X$ es $k-\phi-$condensante si es continua y verifica que, para todo $A \subseteq D$ acotado no precompacto,

$$\phi(T(A)) < k\phi(A).$$

Si $k = 1$ entonces simplemente se dice que T es $\phi-$condensante.

Destaquemos como primer resultado para este tipo de aplicaciones el conocido Teorema de Darbo-Sadovskii. Dicho teorema fue enunciado primero por G. Darbo ([7]) para aplicaciones $k - \phi-$condensantes con $k < 1$. Más tarde sería extendido por B. N. Sadovskii ([32]) para aplicaciones $\phi-$condensantes. Como es fácil apreciar el Teorema de Darbo-Sadovskii generaliza el clásico Teorema del Punto Fijo de Schauder.

Teorema 1.6.7. *Sea ϕ una de las medidas de no compacidad anteriores y X un espacio de Banach. Si $T : D \subseteq X \to D$ es $\phi-$condensante y D es un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de X, entonces el conjunto de los puntos fijos de T es no vacío.*

Finalmente introduzcamos los operadores conocidos como últimamente compactos (ver [1] ó [33] para más detalles). Previamente a su definición necesitaremos introducir algunos elementos que nos facilitarán la descripción de los mismos.

Definición 1.6.8. Sea D un subconjunto de un espacio de Banach X. Dada una aplicación $f\colon D \longrightarrow X$ se considera la sucesión transfinita de conjuntos $\{T_\alpha\}$ dada por la relación

$$\begin{aligned}
T_0 &= \overline{\text{conv}} f(D), \\
T_\alpha &= \overline{\text{conv}} f(D \cap T_{\alpha-1}), \text{ si } \alpha - 1 \text{ existe}, \\
T_\alpha &= \bigcap_{\beta<\alpha} T_\beta, \text{ si } \alpha - 1 \text{ no existe}.
\end{aligned}$$

A esta sucesión se le llama sucesión transfinita de f en D.

Aunque son muchas las propiedades destacables de una sucesión de conjuntos como la acabada de definir, el siguiente lema nos ofrece algunas de las que nos serán de un mayor interés.

Lema 1.6.9. *Dada $\{T_\alpha\}$ una sucesión transfinita de una aplicación f en un conjunto D como en la definición anterior, se tiene que :*

1. *Cada T_α es cerrado y convexo para todo α.*
2. *$f(D \cap T_\alpha) \subseteq T_{\alpha+1}$.*
3. *Si $\beta < \alpha$, entonces $T_\alpha \subseteq T_\beta$.*
4. *Se verifica que $f(D \cap T_\alpha) \subseteq T_\alpha$.*
5. *Hay un número ordinal η tal que $T_\alpha = T_\eta$ para todo $\alpha \geq \eta$.*

Definición 1.6.10. Llamaremos rango último de f sobre D, y será denotado como $f^\infty(D)$, al conjunto límite T_η de la sucesión transfinita de f en D. La aplicación f se dirá últimamente compacta si el conjunto

$$f\left((D \cap f^\infty(D))\right)$$

es relativamente compacto.

Algunas de las propiedades elementales del rango último de una aplicación y de las aplicaciones últimamente compactas están recogidas en el siguiente lema.

Lema 1.6.11. *Manteniendo la notación de la definición anterior, se tiene que:*

1. $f^\infty(D) = \overline{\text{conv}} f\,(D \cap f^\infty(D))$.
2. *Si* $D_1 \subseteq D$, *entonces* $f^\infty(D_1) \subseteq f^\infty(D)$.
3. *Si* f *es últimamente compacta sobre* D *y* D_1 *es un subconjunto de* D, *entonces* f *es últimamente compacta sobre* D_1.
4. *La aplicación* $f\colon D \longrightarrow X$ *es últimamente compacta si, y sólo si, su rango último es compacto.*

En el tercer capítulo de esta memoria volveremos a tratar las aplicaciones últimamente compactas. Parte del trabajo que realizaremos consistirá en adaptar el concepto de aplicación últimamente compacta al contexto de los espacios hiperconvexos, buscando que se mantengan las propiedades que hemos acabado de enunciar, así como el siguiente teorema donde nos encontramos relacionadas las aplicaciones últimamente compactas con las $\phi-$condensantes.

Teorema 1.6.12. *Sea* D *un subconjunto cerrado en un espacio de Banach* X, *y* $f\colon D \longrightarrow X$ *una aplicación* $\phi-$*condensante. Entonces* f *es últimamente compacta sobre* D.

Por último concluiremos este capítulo enunciando el resultado de punto fijo que aparece en [33] para las aplicaciones últimamente compactas. Con respecto al Teorema de Darbo-Sadovskii se aprecia una debilitación en los requerimientos de la aplicación, ya que en este caso (y en virtud del teorema que acabamos de enunciar) se le exige ser únicamente últimamente compacta, mientras que sobre el espacio se exigirá algo más, a saber, reflexividad. Aunque en [33] el resultado está enunciado en el contexto de los espacios vectoriales localmente convexos, nosotros aquí lo presentamos en el de los espacios de Banach.

Teorema 1.6.13. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $D \subseteq X$ un subconjunto convexo, acotado y no vacío. Si $T\colon D \longrightarrow D$ es una aplicación últimamente compacta en D, entonces su conjunto de puntos fijos en no vacío.*

Capítulo2

Propiedades generales de los espacios hiperconvexos

Una vez introducidos los resultados y definiciones necesarias para una más fácil lectura y exposición del trabajo, presentaremos en el presente capítulo algunos nuevos resultados y discusiones sobre espacios métricos hiperconvexos. Más concretamente, las distintas secciones tratarán los siguientes asuntos:

- Algunas propiedades generales del cierre de Isbell en espacios hiperconvexos.
- Extensión de operadores compactos entre espacios métricos.
- Medidas de no compacidad y el cierre hiperconvexo de Isbell.
- Conjuntos admisibles y estructuras generalizadas de convexidad.

2.1 Propiedades del cierre hiperconvexo de Isbell

Por lo visto en el capítulo anterior tenemos que para todo espacio métrico X es posible definir un cierre hiperconvexo natural, denotado por εX, aunque no único ya que hay tantos cierres hiperconvexos del mismo espacio métrico como copias isométricas haya de εX. Sin embargo, en general, no sabemos si al tener $A \subseteq M$ podremos encontrar una realización del cierre hiperconvexo de A sin salirnos del propio espacio M. Esto no será siempre posible, especialmente si el propio M no es un espacio hiperconvexo. En sentido contrario, el próximo lema nos dirá que en el caso en que M sea hiperconvexo sí se tiene dicha posibilidad. Es más, del propio resultado se deducirá que el cierre hiperconvexo de Isbell verifica una cierta relación de monotonía.

Lema 2.1.1. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo y A un subconjunto de M. Entonces existe un subconjunto de M, al que llamaremos $h(A)$, isométrico con εA y verificando que $A \subseteq h(A) \subseteq M$.*

Prueba. Consideremos Σ definido como

$$\Sigma = \{H \subseteq M : H \supseteq A \text{ y es hiperconvexo}\}.$$

Basta aplicar el Lema de Zorn y el Teorema 1.4.9 para justificar la existencia de un elemento $h(A) \in \Sigma$ minimal con respecto a la inclusión. Puesto que $A \subseteq h(A)$, podemos considerar la inclusión natural $i : A \to h(A)$ para, por la minimalidad de $h(A)$ y la Definición 1.5.4, obtener que $h(A)$ es un cierre hiperconvexo de A verificando lo que se exige en el enunciado del lema.

$\square$

De aquí obtenemos la siguiente relación de monotonía.

Corolario 2.1.2. *Sea M un espacio hiperconvexo y $A \subseteq B \subseteq M$. Entonces existen $h(A)$ y $h(B)$, realizaciones del cierre hiperconvexo de A y B respectivamente, de tal modo que*

$$h(A) \subseteq h(B) \subseteq M.$$

Prueba. Este corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior. Sólo hay que aplicar dicho lema primero a B con respecto a M y, posteriormente, a A con respecto al cierre hiperconvexo de B obtenido en el paso anterior. $\square$

Sin embargo, pese a este último resultado, el cierre de Isbell no disfrutará de una monotonía comparable a la de la convexidad lineal o la de los conjuntos admisibles vista en el capítulo anterior. Para apreciarlo, basta considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.3. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica del supremo tomamos los siguientes tres conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,x) : 0 \le x \le 1\} \cup \{(x, 2-x) : 1 \le x \le 2\}. \\ B &= \{(0,0),(2,0)\}. \\ C &= \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Una monotonía similar a la de la convexidad en el caso lineal, nos permitiría encontrar las realizaciones $h(A)$, $h(B)$ y $h(C)$ del cierre hiperconvexo de A, B y C, respectivamente, de modo que

$$A \subseteq h(A) \quad B \subseteq h(B) \quad C \subseteq h(C)$$

a la vez que

$$h(B) \subseteq h(A) \cap h(C).$$

Sin embargo, puesto que tanto A como C son hiperconvexos, las únicas realizaciones de sus cierres hiperconvexos conteniéndolos son ellos mismos. Es decir, $h(A) = A$ y $h(C) = C$. Por lo que $h(B)$ debería estar contenido en $A \cap C$, en cuyo caso $h(B)$ también coincidiría con B llegándose a contradicción con que dicho cierre debe ser hiperconvexo y B no lo es.

Como último resultado de esta sección presentaremos otra propiedad de carácter general del cierre hiperconvexo de Isbell que nos será de gran utilidad. Esta propiedad está muy relacionada con una indicación que realiza J. R. Isbell en [17]. En dicha indicación, que forma parte de la demostración de que el cierre hiperconvexo es único salvo isometría, el autor nos hace notar que si tenemos una aplicación no expansiva de εX en εX de tal modo que coincida con la identidad sobre X, entonces dicha aplicación debe ser la identidad sobre todo εX. El resultado que se ofrece a continuación, apoyado en el resultado anteriormente citado de J. B. Baillon en el que se asegura que el conjunto de puntos fijos de un operador no expansivo definido de un hiperconvexo acotado en sí mismo es hiperconvexo, puede ser interpretado como una generalización de esta observación de J. R. Isbell. Nosotros utilizaremos este resultado en la prueba del Teorema 3.3.9.

Lema 2.1.4. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo acotado y A un subconjunto de M. Si $h(A)$ y $\tilde{h}(A)$ son dos realizaciones del cierre hiperconvexo de A conteniendo ambas a A y contenidas, a su vez, en M, entonces existe $i\colon h(A) \longrightarrow \tilde{h}(A)$ isometría tal que su restricción sobre A coincide con la identidad.*

Prueba. Pretendemos encontrar una isometría que vaya desde uno de los cierres hiperconvexos anteriores al otro coincidiendo con la identidad sobre A. La propiedad de los cierres hiperconvexos que más utilizaremos para ello será la de que si entre el conjunto y su cierre hiperconvexo somos capaces de colocar otro hiperconvexo, entonces este debe coincidir con dicho cierre hiperconvexo.

Para comenzar consideremos $j\colon A \longrightarrow \tilde{h}(A)$ definida como la inclusión natural de A en $\tilde{h}(A)$. Obviamente se trata de una aplicación no expansiva.

Por tanto, puesto que $A \subseteq h(A)$ y $h(A)$ es hiperconvexo, podemos dar una extensión no expansiva r de dicha inclusión que vaya de todo $h(A)$ en $\tilde{h}(A)$. Por construcción el conjunto de puntos fijos de r contiene a A. De igual modo se puede considerar s aplicación no expansiva de $\tilde{h}(A)$ en $h(A)$ dejando fijos todos los elementos de A.

Definamos ahora $t = s \circ r$. Esta aplicación será una aplicación no expansiva de $h(A)$ en $h(A)$ tal que su conjunto de puntos fijos, llamémosle $\mathrm{Fix}(t)$, contiene a A. Utilizando el resultado de J. B. Baillon, Corolario 1.3.6, obtenemos que dicho conjunto es hiperconvexo. Puesto que, además, $h(A) \supseteq \mathrm{Fix}(t) \supseteq A$, se tiene que, $h(A) = \mathrm{Fix}(t)$ y, en consecuencia, t coincide con la identidad en $h(A)$. Análogamente $r \circ s$ es la identidad en $\tilde{h}(A)$. Por tanto r y s son biyectivas y, al ser no expansivas, también son isometrías. Concluyéndose de este modo con que r es la isometría buscada. □

2.2 Extensión de operadores compactos entre espacios métricos

En la Sección 1.2 pudimos ver la estrecha relación existente entre espacios de Banach hiperconvexos y la posibilidad de extender operadores lineales compactos de modo que las extensiones buscadas continuasen siendo compactas. En la presente sección estudiaremos si se puede decir algo similar en el caso métrico. Más concretamente nos plantearemos si es posible extender una aplicación compacta, definida entre dos espacios métricos, exigiendo ciertas condiciones de hiperconvexidad sobre alguno de los espacios.

En el Teorema 1.2.14 se establecía una caracterización de los espacios de Banach hiperconvexos en términos de extensión de operadores lineales compactos. En el caso métrico el resultado de caracterización ya viene dado por el Teorema 1.2.7. Ahora nos interesará ver si estas extensiones se pueden conseguir de modo que se conserve la compacidad de la aplicación.

Lo que haremos, siguiendo el Teorema 1.2.14, será plantearnos los siguientes dos problemas:

- Si M es un espacio hiperconvexo y $T\colon M \longrightarrow N$, con N espacio métrico, es una aplicación compacta, entonces ¿se podrá extender T a un operador $\tilde{T}\colon Z \longrightarrow N$ para cualquier espacio métrico Z conteniendo métricamente a M, de modo que la extensión continúe siendo compacta?

- Si N es un espacio hiperconvexo, M es métrico y $T\colon M \longrightarrow N$ uniformemente continuo y compacto, entonces ¿se podrá extender T a un operador $\tilde{T}: Z \longrightarrow N$ para cualquier espacio métrico Z conteniendo métricamente a M, de modo que la extensión continúe siendo compacta?

La primera de las cuestiones admitirá una rápida respuesta a partir de una de las propiedades más características e importantes de los espacios métricos hiperconvexos, según la cual, ver Corolario 1.2.8, un espacio hiperconvexo es retracto no expansivo de cualquier otro espacio métrico donde se sumerja métricamente.

Proposición 2.2.1. *Sea M un espacio hiperconvexo, N un espacio métrico y $T: M \longrightarrow N$ una aplicación compacta. Entonces, si Z es un espacio métrico conteniendo a M métricamente, existe*

$$\tilde{T}: Z \longrightarrow N$$

extensión compacta de T. Además, si T es uniformemente continua, entonces $\tilde{T}$ también lo será y tendrá el mismo módulo de continuidad que T.

Prueba. Puesto que $M \subseteq Z$ y M es hiperconvexo, sabemos que existe una retracción no expansiva

$$r: Z \longrightarrow M.$$

Ahora basta definir $\tilde{T}$ como la composición de T con r, esto es

$$\tilde{T} = T \circ r.$$

Obviamente, a partir de la condición de retracción de r, se tiene que si D es un subconjunto acotado de Z, entonces $r(D)$ también será acotado en M. Por tanto,

$$T \circ r(D) = T(r(D))$$

es relativamente compacto en N para todo subconjunto acotado D de M, y, en consecuencia, $T \circ r$ es una aplicación compacta. Por otra parte, a partir de la condición de no expansividad de la misma aplicación r, se sigue que T y $\tilde{T}$ han de compartir el mismo módulo de continuidad. □

Un poco de más dificultad tendrá resolver el segundo problema que nos hemos planteado. De hecho, para afrontarlo, necesitaremos hacer uso del cierre hiperconvexo de Isbell. Comencemos resolviendo un problema, de prueba bastante similar al caso anterior, producto de debilitar las hipótesis del problema que nos ocupa realmente. La diferencia entre ambos está en imponer la condición adicional de que el espacio del que parte la aplicación a extender sea acotado.

Lema 2.2.2. *Sea M un espacio métrico acotado, N un espacio hiperconvexo y $T: M \longrightarrow N$ una aplicación uniformemente continua y compacta. Si Z es un espacio métrico conteniendo a M métricamente, entonces podemos encontrar $\tilde{T}: Z \longrightarrow N$ extensión uniformemente continua y compacta de T.*

Prueba. Puesto que M es acotado y T es una aplicación compacta, se tiene inmediatamente que $T(M)$ es relativamente compacto en N.

Sea $h(T(M))$ una realización del cierre hiperconvexo de $T(M)$ en N. Atendiendo a la hiperconvexidad de dicho cierre, y en virtud del Teorema 1.2.7, podremos dar una extensión $\tilde{T}$ de T de modo que

$$\tilde{T}: Z \longrightarrow h(T(M)) \subseteq N$$

si es que T posee un módulo de continuidad subaditivo. Pero al ser M un espacio hiperconvexo, por el Lema 1.2.6, se tiene que su módulo natural de continuidad, δ_T, es subaditivo. Por tanto, tal extensión $\tilde{T}$ existe. Finalmente, puesto que $T(M)$ es relativamente compacto, por el Lema 1.5.9, $h(T(M))$ es compacto y, en consecuencia, $\tilde{T}$ es una aplicación compacta. □

Nota 2.2.3. Como consecuencia del Teorema 1.2.7 además se tiene que dada T se puede elegir $\tilde{T}$ de modo que compartan el mismo módulo natural de continuidad.

Pasemos, a continuación, a suprimir la hipótesis de que el espacio de partida sea acotado. Para conseguirlo necesitaremos acudir en repetidas ocasiones al lema que acabamos de demostrar a la vez que se utilizan distintas propiedades de los espacios hiperconvexos.

Teorema 2.2.4. *Sea M un espacio métrico , N un espacio hiperconvexo y $T: M \longrightarrow N$ una aplicación uniformemente continua y compacta. Si Z es un espacio métrico conteniendo a M métricamente, entonces podemos encontrar*

$$\tilde{T}: Z \longrightarrow N$$

extensión uniformemente continua y compacta de T.

Prueba. Comencemos la demostración considerando la siguiente sucesión de conjuntos definida a partir un punto x_0 de M. Sea (B_n) la sucesión de subconjuntos de N dada por

$$B_n = T(B(x_0, n)), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por la compacidad de T tenemos que la sucesión de los B_n es una sucesión de conjuntos relativamente compactos en N. Para cada $n \in \mathbb{N}$, según lo visto en la sección anterior, no hay problema en fijar $h(B_n)$ una realización del cierre hiperconvexo de B_n en N verificando que contiene al propio B_n.

Definamos por inducción la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\begin{aligned} H_1 &= h(B_1), \\ H_n &= h(h(B_n) \cup H_{n-1}), \text{ para todo } n \geq 2. \end{aligned}$$

Donde

$$h\left(h(B_n) \cup H_{n-1}\right)$$

vuelve a ser una realización del cierre hiperconvexo de $h(B_n) \cup H_{n-1}$ en N conteniendo al propio conjunto del que es cierre hiperconvexo, es decir, a $h(B_n) \cup H_{n-1}$. De este modo la sucesión dada por (H_n) es una sucesión creciente de conjuntos hiperconvexos y compactos en N verificando que $B_n \subseteq H_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea ahora Z el espacio métrico conteniendo métricamente a M. Dentro de él fijamos la siguiente sucesión de conjuntos (a partir de ahora distinguiremos las bolas de M de las de Z mediante la notación $B_M(\cdot, r)$, para las de M, y $B_Z(\cdot, r)$, para las de Z),

$$Z_n = B_Z(x_0, n).$$

Extenderemos T en diferentes etapas. Dichas etapas consistirán en ir extendiendo distintas restricciones de T a subconjuntos de M para, al final, recuperar T completamente y tener la extensión deseada.

Como primer paso extendemos

$$T\colon B_M(x_0, 2) \longrightarrow B_2 \subseteq H_2$$

mediante una aplicación compacta a la que llamaremos $\tilde{T}_1$ de forma que

$$\tilde{T}_1\colon B_M(x_0, 2) \cup Z_1 \longrightarrow H_2.$$

Para conseguir dicha extensión basta con remitirse al lema anterior, ya que nos encontramos en las mismas condiciones de dicho lema. Obeteniéndose, además, que la extensión tiene igual módulo de continuidad que la aplicación original.

Para seguir con la prueba, necesitaremos llevar dos extensiones en paralelo. Por un lado tendremos que agrandar $B_M(x_0, 2)$ hasta rellenar todo M para así recuperar la aplicación original T, mientras que por el otro deberemos agrandar Z_1 hasta rellenar todo Z buscando la extensión exigida por el enunciado.

El siguiente paso consiste en construir una nueva extensión

$$\tilde{T}_2\colon B_M(x_0,3)\cup Z_2 \longrightarrow H_3$$

de modo que extienda a

$$\tilde{T}_1\colon B_M(x_0,2)\cup Z_1 \longrightarrow H_2 \subseteq H_3$$

y que coincida con T en $B_M(x_0,3)$ además de compartir igual módulo de continuidad.

Esta coincidencia se tendrá inmediatamente sin más que exigirla, es decir, puesto que tenemos que extender una aplicación del espacio $B_M(x_0,2)\cup Z_1$ al espacio $B_M(x_0,3)\cup Z_2$, realizamos el paso a $B_M(x_0,3)$ definiendo $\tilde{T}_2(x)$ como $T(x)$ para todo x en $B_M(x_0,3)$. De este modo no habrá ningún problema de continuidad ya que los puntos de $B_M(x_0,3)\setminus B_M(x_0,2)$ están separados de los de Z_1 al menos con distancia uno. Además cae en H_3 ya que $B_3 \subseteq H_3$ y, por construcción, los puntos de $B_M(x_0,3)$ van a B_3 mediante T. En principio lo que parece perderse con esta elección es la equivalencia entre los módulos de continuidad a partir de $\varepsilon = 1$. Hasta este valor de ε los módulos de continuidad coinciden.

Para abarcar ahora todo Z_2 bastará con remitirnos, de nuevo, al lema anterior. Sin embargo, en esta ocasión, necesitamos garantizar que la extensión a $B_M(x_0,3)$ que acabamos de realizar posee un módulo de continuidad subaditivo. La existencia de dicho módulo se puede justificar haciendo uso, por ejemplo, del Lema 1.2.5. Según el cual nuestra aplicación posee un módulo de continuidad subaditivo si su módulo verifica que

$$\operatorname{limsup}_{\varepsilon\to\infty}\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \infty.$$

Ahora bien, si d es el diámetro del rango de $\tilde{T}_2$ entonces su módulo de continuidad verifica que

$$\delta(\varepsilon) \le d$$

para todo ε. En nuestro caso el rango de $\tilde{T}_2$ está contenido en un compacto y, por tanto, es acotado. En consecuencia, se dan todas las hipótesis del lema anterior y, por tanto, se puede conseguir

$$\tilde{T}_2\colon B_M(x_0,3)\cup Z_2 \longrightarrow H_3,$$

extensión compacta de

$$T\colon B_M(x_0,3) \longrightarrow B_3$$

verificando, además, que comparten igual módulo de continuidad para $\varepsilon \leq 1$.

Si seguimos con la inducción, obtenemos la sucesión de aplicaciones

$$\left(\tilde{T}_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

verificando que

$$\tilde{T}_n \colon B_M(x_0, n) \cup Z_{n-1} \longrightarrow H_n$$

es una extensión de

$$T \colon B_M(x_0, n-1) \longrightarrow B_{n-1}$$

con igual módulo de continuidad que T para $\varepsilon \leq 1$, y esto para todo $n \geq 2$.

Ahora basta con definir $\tilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty}\tilde{T}_n(x)$ para cada $x \in Z$. Esta aplicación así definida estará bien definida dado que las sucesiones

$$(\tilde{T}_n(x))$$

son constantes a partir de un cierto n para todo $x \in Z$. Además $\tilde{T}$ es compacta ya que si D es un subconjunto acotado de Z, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\tilde{T}$ coincide con $\tilde{T}_n$ en D. Por tanto $\tilde{T}(D)$ es relativamente compacto en N y, en consecuencia, T es compacta. □

Nota 2.2.5. En las primeras tentativas de la prueba que acabamos de ver la sucesión de conjuntos (H_n) no aparecía tal y como aquí la hemos ofrecido. En realidad pensamos que, al tratarse la sucesión de los B_n de una sucesión creciente de conjuntos en un hiperconvexo, se podrían fijar sus respectivos cierres hiperconvexos de modo que la nueva sucesión $(h(B_n))$ de hiperconvexo compactos fuese asimismo una sucesión de conjuntos creciente verificando, además, que $B_n \subseteq h(B_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, encontrar tales cierres se nos mostraba cada vez más difícil. Hasta el punto de que no sabemos si tal cosa es posible o no. Por el Corolario 2.1.2 es claro que si la colección de los conjuntos B_n es finita, entonces no hay ningún problema. Se podría construir la colección $(h(B_n))$ de una forma descendente. Sin embargo la situación parece cambiar bastante para el caso no finito. En este caso está claro que lo que se necesita es un argumento inductivo ascendente a partir de $n = 1$. En el momento de escribir estas líneas más bien pensamos que la respuesta debe ser no. El siguiente ejemplo justifica un poco esta idea al mostrar que, aunque fuese posible, el cierre hiperconvexo de un conjunto antecesor nunca podría ser escogido de un modo completamente ciego con respecto a quién es su conjunto sucesor en la sucesión.

Ejemplo 2.2.6. Sea $\mathbb{R}^2$ dotado con la norma del máximo y consideremos los siguientes dos conjuntos:

$$A_1 = \{(0,0),\ (2,0)\},$$
$$A_2 = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,0)\}.$$

Obviamente se tiene que

$$A_1 \subseteq A_2$$

y que, por tanto, podemos dar un cierre hiperconvexo para cada uno de modo que $h(A_1) \subseteq h(A_2)$. Sin embargo, si partimos de un cierre hiperconvexo para A_1 prefijado, $h(A_1)$, como por ejemplo

$$h(A_1) = \{(x,0) :\ 0 \leq x \leq 2\}.$$

entonces tenemos que, como sería fácil demostrar, no existe ningún $h(A_2)$, realización del cierre hiperconvexo de A_2 en $\mathbb{R}^2$, de modo que

$$h(A_1) \subseteq h(A_2).$$

Por tanto si queremos ofrecer dos cierres hiperconvexos, uno de A_1 y el otro de A_2, de modo que mantenga la monotonía de ambos conjuntos, deberemos fijar primero el correspondiente a A_2 y a partir de ahí buscar el de A_1. Razonamiento este que no es posible si partimos de una cantidad no finita de conjuntos que nos han sido dados ordenados de menor a mayor según la inclusión entre conjuntos.

Para finalizar nuestro estudio sobre la extensión de operadores uniformemente continuos entre espacios métricos mostraremos el siguiente corolario sobre los módulos de continuidad de las aplicaciones del último teorema.

Corolario 2.2.7. *En el teorema anterior, fijado $\eta > 0$, la extensión buscada además se puede dar de modo que tenga el mismo módulo de continuidad que T para todo $\varepsilon < \eta$.*

Prueba. La idea es repetir la prueba anterior nada más que sustituyendo los $T(B(x_0, n))$ por $T(B(x_0, n\eta))$. □

2.3 No compacidad y el cierre hiperconvexo de Isbell

En el primer capítulo fueron introducidas las medidas de no compacidad de Hausdorff y Kuratowski. En ese momento comentamos algunas de las propiedades generales más significativas de ambas medidas. Comenzaremos la presente sección particularizando alguna de aquellas propiedades para el caso de los espacios métricos hiperconvexos. Son varios los hechos a destacar con respecto a la relación entre estos espacios y las medidas de no compacidad de Hausdorff y Kuratowski.

Lo primero que haremos será estudiar cómo las relaciones dadas por el Teorema 1.6.4 entre las medidas de no compacidad de Hausdorff y Kuratowski se hacen mucho más rígidas cuando se trabaja con espacios hiperconvexos.

Lema 2.3.1. *Sea M un espacio métrico y B un subconjunto de M. Si se tiene que B con la métrica inducida por M es hiperconvexo, entonces* $\alpha(B) = 2\chi(B)$.

Prueba. Por el Teoremas 1.6.4 se cumple que $\alpha(B) \leq 2\chi(B)$. Veamos, por tanto, que además se tiene la desigualdad inversa, es decir, que $\alpha(B) \geq 2\chi(B)$.

Sea $\varepsilon > \alpha(B)$, entonces existe una cantidad finita de subconjuntos de M, $C_1, C_2, \cdots, C_n$, con diámetro menor o igual que ε cada uno de ellos y recubriendo a B. Consideremos los conjuntos $A_i = C_i \cap B$, para todo i natural entre 1 y n. Obviamente estos conjuntos A_i verifican lo mismo que los conjuntos C_i y, además, son subconjuntos de B. Para cada i, podemos considerar la intersección

$$\bigcap_{a \in A_i} B(a, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Por la hiperconvexidad de B estas intersecciones serán todas distintas del vacío. Si para cada i, a_i es un elemento cualquiera de la correspondiente intersección , entonces

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

De donde, $\chi(B) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. □

Aún se puede decir algo más sobre la relación entre ambas medidas. Acabamos de ver que una es el doble de la otra siempre que midamos la compacidad de espacios hiperconvexos. Sin embargo cabe plantearse qué ocurre si en vez de ser hiperconvexo el conjunto que medimos, lo es el espacio total en el que medimos. En este caso tenemos el siguiente lema cuya demostración omitiremos por ser análoga a la que acabamos de realizar.

Lema 2.3.2. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo. Entonces para todo subconjunto B de M se tiene que $\alpha(B) = 2\chi(B)$.*

Nota 2.3.3. Del capítulo anterior (ver sección sexta) teníamos pendiente justificar que la medida de Hausdorff de un conjunto dependía del espacio métrico donde se considerase sumergido. La justificación es inmediata a partir de este último lema. Y es que, en dicha sección, teníamos que entre ambas medidas existe la relación universal dada por

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A),$$

y que, además esta relación era la mejor posible en general. En las referencias [1, 3] se pueden encontrar ejemplos de subconjuntos de espacios métricos tales que, para ellos, la primera de las desigualdades anteriores es una igualdad. Sin embargo, como ya sabemos, todo espacio métrico puede ser visto como subconjunto de un espacio del tipo $\ell^\infty(I)$, para un cierto conjunto de índices I. Ahora bien, puesto que estos espacios son hiperconvexos, en virtud del último lema se tiene que la medida de Kuratowski del espacio métrico visto dentro de su correspondiente $\ell^\infty(I)$ es el doble de su medida de Hausdorff. Finalmente, dado el carácter invariante de la medida de no compacidad de Kuratowski comentada en el Lema 1.6.5, se tiene que la medida de Hausdorff de un conjunto depende, en general, del espacio ambiente donde dicho conjunto se considere sumergido.

Como consecuencia de esta nota resulta interesante destacar el siguiente corolario del Lema 2.3.1.

Corolario 2.3.4. *La medida de no compacidad de Hausdorff de un espacio métrico hiperconvexo sólo depende del propio espacio y de la métrica, no así del espacio ambiente donde se encuentre sumergido.*

Otras propiedades que se deducen de todo la anterior quedan expuestas en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.5. *Se cumple que:*

i) Si A puede ser visto como un subconjunto de dos espacios métricos hiperconvexos M y M' distintos, entonces la medida de no compacidad de Hausdorff de A en M coincide con la misma medida considerada en M'.

ii) Si $A \subseteq M$ y M es un espacio hiperconvexo, entonces

$$\chi_M(A) \leq \chi_{M'}(A)$$

para todo espacio métrico M' conteniendo métricamente a A.

Por otra parte, una de las propiedades más interesantes de las que puede disfrutar una medida de no compacidad definida sobre un espacio normado es que sea invariante con respecto al cierre convexo de un conjunto; es decir, que la medida de todo conjunto coincida con la de su envolvente convexa. Contar con esta propiedad se ha convertido en una herramienta esencial para el estudio y aplicación de las medidas de no compacidad tanto a la Teoría del Punto Fijo como en otros diferentes campos del Análisis Funcional. Una vez presentadas las propiedades particulares de las que disfrutan las dos medidas con las que tratamos en los espacios hiperconvexos, nuestro objetivo en la presente sección consiste en estudiar si dicha propiedad se tiene en este nuevo contexto, cuando lo que se toma, en lugar de cierre convexo, es el cierre hiperconvexo de Isbell. De hecho, inspirados por el resultado, establecido por J. R. Isbell (Lema 1.5.9), de que si un conjunto es relativamente compacto entonces su cierre es compacto, probaremos que la medida de no compacidad de un subconjunto de un espacio hiperconvexo coincide con la medida de no compacidad de cualquiera de las realizaciones de su cierre hiperconvexo (recordemos que al ser estas realizaciones nuevos espacios hiperconvexos, estos valores son absolutos y no dependen de ningún espacio externo en el que pudieran ser considerados).

Teorema 2.3.6. *Sea M un espacio hiperconvexo y A un subconjunto de M. Sea χ la medida de no compacidad Hausdorff definida sobre M. Entonces existe una realización del cierre hiperconvexo de A, que denotaremos por Z, tal que está contenida en M, contiene a A y verifica que $\chi(A) = \chi(Z)$.*

Prueba. Antes de comenzar con la prueba comentemos ciertos detalles con el fin de evitar confusiones. A lo largo de la misma necesitaremos salirnos de nuestro espacio ambiente M y considerar la medida de no compacidad sobre otros espacios ambientes distintos de M. De ahí que para referirnos a la medida de no compacidad sobre M utilicemos la notación $\chi_M(\cdot)$. Por otra parte sabemos que la medida de no compacidad de Hausdorff de un espacio hiperconvexo no depende de dónde se encuentre sumergido, por tanto, cuando se trate de un espacio hiperconvexo y no haya duda sobre este detalle, no especificaremos cuál es el espacio ambiente.

Lo primero que probaremos será que $\chi_M(A) = \chi(\varepsilon A)$. Recordemos que εA se definió en el capítulo anterior como la realización natural del cierre hiperconvexo de Isbell de un espacio métrico y que, en sí mismo, se trata de un espacio hiperconvexo.

El caso $\chi_M(A) = \infty$ es trivial ya que siempre se tiene que A es un subconjunto de una copia isométrica de εA en M. Por tanto, basta considerar el caso $\chi_M(A) = \alpha < \infty$. Veamos que

$$\chi(\varepsilon A) \leq \alpha + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, de este modo tendríamos

$$\chi(\varepsilon A) \leq \chi_M(A).$$

Sea $\varepsilon > 0$ fijado, y sea $(B_i)_{i=1}^{i=n}$ una familia de n bolas de radio menor que $\alpha + \varepsilon$ y centradas en $x_i \in M$, respectivamente, recubriendo A.

Por el Lema 1.5.9, sabemos que para cada $f \in \varepsilon A$ se tiene que:

i) f es no expansiva.

ii) $f(M) \subseteq [0, \mathrm{diam}(A) = d]$.

Por el Teorema 1.2.7, estas dos propiedades de los elementos de εA y la hiperconvexidad de la recta real $\mathbb{R}$, se tiene que para cada $f \in \varepsilon A$ podemos dar una extensión no expansiva, $\tilde{f}$, de f tal que

$$\tilde{f} \colon A \bigcup \{x_i\}_{i=1}^{n} \longrightarrow [0, d].$$

Ahora recubrimos el segmento $[0, d]$ por bolas de la forma $B(c_j, \varepsilon)$, donde $c_j \in [0, d]$. Por la compacidad del intervalo $[0, d]$ podremos quedarnos con un cantidad finita de c_j. Consideremos, por tanto, fijados los puntos $c_j \in [0, d]$ para $j = 1, \cdots, m$ de modo que

$$[0, d] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(c_j, \varepsilon).$$

Denotemos por Φ el conjunto de todas las aplicaciones ψ que van de $\{1, 2, \cdots, n\}$ en $\{1, 2, \cdots, m\}$.

Para cada ψ en Φ fijamos el subconjunto de εA, posiblemente vacío, L_ψ como el conjunto de todas las $f \in \varepsilon A$ cuya extensión verifica que

$$\|\tilde{f}(x_i) - c_{\psi(i)}\| \leq \varepsilon,$$

para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Resulta inmediato ver que

$$\varepsilon A \subseteq \bigcup_{\psi \in \Phi} L_\psi.$$

Veamos a continuación que

$$\operatorname{diam}(L_\psi) \leq 2\alpha + 4\varepsilon$$

para todo $\psi \in \Phi$.

Sean f y g dos elementos cualesquiera de L_ψ. Para cada $x \in A$ fijamos un i tal que $x \in B(x_i, \alpha + \varepsilon)$. Por todo lo que acabamos de ver y exponer, podremos razonar del siguiente modo,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| = & \\
&= \|\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\| \\
&= \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_i) + \tilde{f}(x_i) - \tilde{g}(x_i) + \tilde{g}(x_i) - \tilde{g}(x)\| \\
&\leq \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_i)\| + \|\tilde{f}(x_i) - \tilde{g}(x_i)\| + \|\tilde{g}(x_i) - \tilde{g}(x)\|
\end{aligned}$$

por la no expansividad de $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ se tiene

$$\leq 2\alpha + 2\varepsilon + \|\tilde{f}(x_i) - \tilde{g}(x_i)\|$$

finalmente se tiene, puesto que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ están en L_ψ, que

$$\leq 2\alpha + 4\varepsilon.$$

Ahora bien, puesto que εA es hiperconvexo, para cada ψ existe un f_ψ en εA de modo que

$$L_\psi \subseteq B(f_\psi, \alpha + \varepsilon).$$

De donde

$$\chi(\varepsilon A) \leq \alpha + 2\varepsilon.$$

Y puesto que esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, obtenemos finalmente que

$$\chi(\varepsilon A) \leq \alpha.$$

Por el Lema 2.1.1, tenemos que existe un subconjunto Z de M tal que $A \subseteq Z$, Z es isométrico a εA y, por tanto, hiperconvexo. En consecuencia, tanto Z como εA tienen medida de no compacidad intrínseca a ellos mismo y, además, coinciden. Es decir, que $\chi(Z) = \chi(\varepsilon A)$.

De este modo tenemos que $\chi_M(A) \geq \chi(Z)$. Pero A es un subconjunto de Z, luego $\chi_M(A) \leq \chi_M(Z)$. Sin embargo, al ser Z hiperconvexo, $\chi_M(Z) = \chi(Z)$. Por lo que se tiene la doble desigualdad y el lema queda probado.

□

Una consecuencia inmediata a partir del lema anterior y el Lema 2.3.2, es el resultado análogo al anterior para la medida de no compacidad de Kuratowski.

Corolario 2.3.7. *El lema anterior es igualmente cierto sustituyendo la medida de no compacidad de Hausdorff por la de Kuratowski.*

Por último, parece lógico preguntarse si en ambos resultados precedentes se puede quitar la hipótesis de que M sea hiperconvexo, dado que el cierre hiperconvexo de Isbell tiene perfecto sentido para cualquier espacio métrico. La respuesta, en este caso, dependerá de sobre cuál de las dos medidas nos lo estemos preguntando. Para la medida de Hausdorff, por ejemplo, es fácil razonar que no, ya que, en caso contrario, los resultados anteriores nos estarían diciendo que la medida de no compacidad de Hausdorff no depende del espacio ambiente donde lo estemos considerando, lo cual ya sabemos que no es cierto.

Sin embargo para la medida de Kuratowski la situación es completamente distinta ya que, como también sabemos, la medida de Kuratowski de un conjunto es independiente de quién sea el espacio ambiente donde se encuentre dicho conjunto. De este modo podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 2.3.8. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico. Entonces se tiene que*

$$\alpha(A) = \alpha(h(A)),$$

para cualquier realización $h(A)$ del cierre hiperconvexo de A.

2.4 Conjuntos admisibles y estructuras convexas generalizadas

Como ya se hizo notar en el primer capítulo, los llamados conjuntos admisibles (Definición 1.4.3) de un espacio hiperconvexo han desempeñado un papel muy destacado dentro de la Teoría del Punto Fijo en espacios hiperconvexos. Especial importancia tiene la propiedad, ya remarcada anteriormente en el Lema 1.4.8, de que el conjunto de los subconjuntos admisibles de un espacio hiperconvexo es cerrado mediante intersecciones arbitrarias. Pero si además de esta propiedad contamos, como así ocurre, con que todo conjunto admisible es hiperconvexo, nos encontramos con una peculiar clase de conjuntos para la que se ha podido ofrecer un gran número de resultados, como ya hemos hecho notar a lo largo de esta memoria (consultar trabajos como [20, 25, 35, 36], entre otros).

Para mostrar con una mayor profundidad el buen comportamiento de los conjuntos admisibles, tomaremos como ejemplo el trabajo de R. Sine sobre aplicaciones multivaluadas que ya tratamos en el primer capítulo de esta memoria ([36]). Este es un trabajo en el que podemos encontrar no pocas proposiciones, lemas y teoremas con una fuerte presencia de los conjuntos admisibles dentro de sus hipótesis. Especialmente importante y singular es el Teorema 1 de dicho trabajo, que aquí aparece como Teorema 1.3.14.

Como el propio autor hace notar, resulta valioso señalar que un resultado análogo ni siquiera es cierto para los espacios de Hilbert utilizando hipótesis de convexidad. Aparte de este comentario, también plantea la pregunta de si el mismo resultado continúa siendo cierto al relajar la hipótesis de que la aplicación multivaluada tome como valores conjuntos admisibles por la de que los valores pasen a ser cualquier subconjunto hiperconvexo. Hasta donde nosotros sabemos, no se ha ofrecido ningún tipo de información nueva sobre esta cuestión en ningún sentido, ni positivo ni negativo.

Al igual que este resultado se pueden ofrecer otros diferentes ejemplos dentro de la Teoría del Punto Fijo o del Análisis Multivaluado en espacios hiperconvexos en que una cuestión similar continúa abierta. Por tanto debemos entender que este puede ser uno de los retos más importantes abiertos dentro de este campo.

Antes de continuar con esta discusión conviene pararse un poco en el siguiente resultado que enunciamos y cuya demostración sirve para apreciar con mayor detalle el porqué de que la clase los conjuntos admisibles se haya manifestado tan útil. Dicho resultado viene a repetirnos un poco el contenido del Teorema 1.3.14 pero diciendo un poco más y con prueba algo más simple.

Teorema 2.4.1. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo y $T\colon M \longrightarrow 2^M$ una aplicación multivaluada cuyos valores son conjuntos admisibles de M y uniformemente continua con respecto a la métrica de Hausdorff. Entonces T admite una selección univaluada f uniformemente continua. Además si $\delta_T(\varepsilon)$ representa el módulo natural de continuidad de T entonces f puede ser tomada de modo que su módulo natural de continuidad coincida con el de T.*

Prueba. Recordemos que el módulo natural de continuidad de una aplicación uniformemente continua fue definido en el primer capítulo como

$$\delta_T(\varepsilon) = \sup\{H(Tx, Ty) : \ d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Donde $d(\cdot,\cdot)$ es la distancia en M y $H(\cdot,\cdot)$ es la distancia de Hausdorff en 2^M. Además, recordemos que, puesto que M es métricamente convexo, este módulo es subaditivo.

Para encontrar la selección buscada haremos uso de la inducción transfinita en un sentido bastante usual dentro de los espacios hiperconvexos. Consideremos los puntos de M ordenados mediante el conjunto de índices I, o sea tenemos

$$\{x_i\}_{i\in I} = M,$$

con los elementos de I ordenados de menor a mayor.

Definimos como $f(x_0)$ cualquier elemento de $T(x_0)$. El siguiente paso consiste en definir una imagen para x_1 de modo que se vayan cumpliendo todas las condiciones que se le exige a la selección. Pues bien, para lograrlo lo que haremos será tomar como $f(x_1)$ cualquier elemento de la siguiente intersección

$$B(f(x_0), \delta_T(d(x_0, x_1))) \cap T(x_1). \tag{2.1}$$

Claro, que primero hay que ver si dicha intersección es vacía o no. A partir de

$$\delta_T\left(d(x_0, x_1)\right) \geq H\left(T(x_0), T(x_1)\right)$$

y junto con que

$$f(x_0) \in T(x_0)$$

se tiene que la intersección anterior es distinta del conjunto vacío debido a la definición de métrica de Hausdorff y a que $T(x_1)$ es un conjunto admisible de M. Fijamos $f(x_1)$ como cualquier elemento de (2.1). Es fácil comprobar que, con esta elección, no sólo estamos construyendo una selección sino que, además, se está haciendo de modo que se conserva el módulo de continuidad de T.

Continuemos con la inducción suponiendo que tenemos definida una selección f de T para todo x_i con $i < j$ cumpliendo las condiciones del enunciado. El siguiente paso consiste en poder añadir x_j al conjunto $\{x_i : i < j\}$. La idea, de nuevo, consiste en tomar $f(x_j)$ como cualquier punto de una cierta intersección y demostrar que dicha intersección es no vacía. En este caso, la intersección a considerar es

$$\bigcap_{i<j} B(f(x_i), \delta_T\left(d(x_i, x_j)\right)) \bigcap T(x_j).$$

Para ver que es distinta del conjunto vacío lo primero que conviene observar es que la intersección que nos preocupa es una intersección de bolas cerradas de un espacio hiperconvexo, ya que $T(x_j)$, por hipótesis, es una intersección de bolas. Por lo tanto, parece que el camino más rápido para comprobar que dicha intersección es no vacía es el de ver que la distancia entre los centros de todas las bolas que intervienen, tomados de dos en dos, es siempre menor o igual que la suma de los radios de las bolas de las que, respectivamente, son centro. Tomemos primero $i, h \in I$ verificando que ambos son menores que j y fijemos i como el menor de los dos. Entonces

$$d(f(x_i), f(x_h)) \leq$$

por hipótesis de inducción

$$\leq \delta_T(d(x_i, x_h))$$

por la monotonía de δ_T

$$\leq \delta_T(d(x_i, x_j) + d(x_j, x_h))$$

por la subaditividad de δ

$$\leq \delta_T(d(x_i, x_j)) + \delta_T(d(x_h, x_j)).$$

Por otra parte, como consecuencia de la definición de la métrica de Hausdorff, se tiene que

$$B(f(x_i), \delta_T(d(x_i, x_j)))$$

corta a

$$T(x_j),$$

para todo $i < j$.

Ahora basta recordar que $T(x_j)$ es una intersección de bolas de M para concluir que la intersección de todas las bolas anteriores es no vacía y, por tanto, que es posible definir $f(x_j)$ como cualquier elemento de la misma.

Completando la inducción de este modo, es fácil comprobar que la selección así construida verifica todo lo que se pide en el enunciado. □

¿Será posible prescindir de la hipótesis de ser admisible en este tipo de teoremas? En este sentido tal vez sea conveniente destacar el trabajo realizado por C. D. Horvath ([16]) en torno al estudio de lo que se ha dado en llamar "nuevas estructuras generalizadas de convexidad" (ver, por ejemplo, [15, 16]). Básicamente, lo que se pretende con estas estructuras es poder localizar ciertas clases de subconjuntos de espacios topológicos generales de modo que sean cerradas para intersecciones arbitrarias sumándole algún tipo de propiedad topológica clave en el estudio y aplicación de los conjuntos convexos en la teoría lineal. A una estructura de este tipo fue lo que él dio en llamar c-estructura y que otros autores, que han trabajado más recientemente sobre este tema, prefieren llamar H-estructuras (ver, por ejemplo, [6]). Pasemos a ofrecer las definiciones.

Definición 2.4.2. Dado Y un espacio topológico, una H-estructura sobre Y vendrá dada por una aplicación multivaluada $F\colon \langle Y\rangle \longrightarrow Y$, con $\langle Y\rangle$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Y, tal que:

1. Para todo $A \in \langle Y\rangle$, $F(A)$ es contractible y no vacío.
2. Para todo $A, B \in \langle Y\rangle$, si $A \subseteq B$ entonces $F(A) \subseteq F(B)$.

En estas condiciones se dice que (Y, F) es un H-espacio.

En un H-espacio los subconjuntos más destacados y que mayor presencia tendrán en los distintos teoremas, serán los llamados H-conjuntos. Definiéndose del siguiente modo.

Definición 2.4.3. Dado (Y, F) un H-espacio, se dirá que $Z \subseteq Y$ es un H-conjunto si para todo $A \in \langle Z\rangle$ se tiene que $F(A) \subseteq Z$.

Dentro del contexto de los espacios métricos se destaca una estructura con ciertas particularidades llevándonos al concepto de espacio métrico l.c.

Definición 2.4.4. Dado (Y, F) un H-espacio, diremos que es un espacio métrico l.c. si (Y, d) es un espacio métrico tal que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\{y \in Y : \operatorname{dist}(y, A) \leq \varepsilon\}$$

es un H-conjunto cuando A en un H-conjunto de Y y, además, las bolas abiertas son H-conjuntos.

No entraremos en detalle en estas definiciones y estructuras. Simplemente señalaremos que el carácter de contractibilidad de los $F(A)$, tal y como hace notar C. D. Horvath, tiene especial importancia sobre todo al permitirnos contar con el lema que pasamos a enunciar, tras la siguiente definición, del que dicho autor hace uso repetidamente en sus diversos resultados y trabajos.

Definición 2.4.5. Dado $N \in \mathbb{N}$, entenderemos por

$$\Delta_N = \mathrm{CO}\{e_0, \cdots, e_N\}$$

el símplice estándar N dimensional, donde $\{e_0, \cdots, e_N\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{N+1}$.

Lema 2.4.6. *Si Y es un espacio topológico contractible, entonces se tiene que toda función continua*

$$f \colon \partial\Delta_N \longrightarrow X$$

es la restricción a $\partial\Delta_N$ de una función continua

$$g \colon \Delta_N \longrightarrow Y$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

En este contexto, C. D. Horvath ofrece distintas versiones y/o generalizaciones de algunos resultados ya clásicos dentro del campo del Análisis Convexo. Resultados como el Teorema de selección de Michael, el teorema de Schauder, así como algunos de Ky Fan, entre otros (ver [5, 6, 15, 16]).

Siendo en [16] donde C. D. Horvath estudia el carácter de espacio métrico l.c. de los espacios hiperconvexos bajo una cierta H-estructura que de un modo natural, se puede definir sobre ellos. Para pasar a describirlos fijemos M como un espacio hiperconvexo. En M podemos dar la siguiente H-estructura. Para

$$A \in \langle M \rangle$$

definimos

$$F(A) = co(A).$$

Ya sabemos que $co(A)$ es hiperconvexo y, por tanto, contractible (Lema 1.1.10). En consecuencia (M, F) será una H-estructura. Más aún, C. D. Horvath probará que (M, F) es, en realidad, un espacio métrico l.c. y, en consecuencia, se le podrán aplicar muchos de los nuevos resultados sobre Análisis Multivaluado o Teoría del Punto Fijo desarrollados en los diferentes trabajos anteriormente citados. Aunque no lo explicaremos en detalle, tomemos como ejemplo el nuevo enunciado que C. D. Horvath ofrece para el Teorema de Selección de Michael.

Teorema 2.4.7. *Sea X un espacio topológico paracompacto, (Y, F) un espacio métrico l.c. y*

$$T \colon X \longrightarrow 2^Y$$

una aplicación semicontinua inferiormente tal que Tx es un H-conjunto para todo $x \in X$. Entonces T admite una selección continua univaluada.

De este modo estamos ante un teorema válido para espacios hiperconvexos donde no se está imponiendo la condición, al menos de un modo explícito, de que los conjuntos considerados deban ser admisibles. Pero, ¿supone la condición de que las imágenes sean H-conjuntos un avance sobre la condición de que sean conjuntos admisibles? Puesto que claramente todo conjunto admisible es un H-conjunto, parece que el resultado de C. D. Horvath podría servir para mejorar, al menos en algún sentido si no completamente, resultados como por ejemplo el Teorema 1.3.14. Sin embargo sobre si todo H-conjunto es un conjunto admisible o no, no parece haber nada escrito. De hecho esta será una cuestión en el que C. D. Horvath no entrará. Nosotros no hemos podido dar una respuesta al caso general, aunque sí hemos podido ver que bajo la hipótesis de compacidad no hay diferencia entre ambos conceptos cuando la H-estructura es la anteriormente descrita. Advirtamos que en la demostración que ofrecemos de este hecho denotamos la distancia entre conjuntos de Hausdorff como $D(\cdot, \cdot)$, a diferencia de como viene siendo habitual debido a que la letra H ya la estamos utilizando en otro sentido.

Lema 2.4.8. *Sea M un espacio hiperconvexo y A un H-conjunto compacto en M. Entonces A es un conjunto admisible.*

Prueba. Puesto que A es un H-conjunto sabemos que para toda colección finita de puntos $\{x_1, \cdots, x_n\}$ en A se tiene que

$$\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq A.$$

Veamos que A es intersección de bolas, es decir, que A es un conjunto admisible.

Como todo compacto es separable, podemos considerar fijada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión densa en A.

Por la compacidad de A existe una cantidad finita de elementos de la sucesión $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}\} = A_1$ de tal modo que $D(A, A_1) \leq 1$.

Razonando de igual modo para cada $\frac{1}{n}$ cuando $n \in \mathbb{N}$, podemos construir una colección de conjuntos A_n verificando

1. A_n está formado por una cantidad finita de elementos de la sucesión (x_n) para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $D(A, A_n) \leq \frac{1}{n}$.

Ahora bien, puesto que A es un H-conjunto se tendrá que

$$\operatorname{co}(A_n) \subset A$$

para todo n. Por tanto

$$\operatorname{co}(A_n) \subseteq A \subseteq \operatorname{co}(A_n) + \frac{1}{n},$$

entendiendo que

$$\operatorname{co}(A_n) + \frac{1}{n} = \bigcup_{x \in \operatorname{co}(A_n)} B(x, \frac{1}{n}).$$

Pero, por un resultado de R. Sine ([35]), se tiene que $\operatorname{co}(A_n) + \frac{1}{n}$ vuelve a ser un conjunto admisible, y, en consecuencia, podemos intercalar un nuevo elemento en la cadena de contenciones anterior, es decir, se tiene que

$$\operatorname{co}(A_n) \subseteq A \subseteq \operatorname{co}(A) \subseteq \operatorname{co}(A_n) + \frac{1}{n}.$$

Sin embargo,

$$D\left(\operatorname{co}(A_n), \operatorname{co}(A_n) + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

De donde, tomando límite, resulta que

$$D(A, \operatorname{co}(A)) = 0,$$

y puesto que ambos conjuntos son cerrados en M, se tiene que ambos deben coincidir. □

Por fin, concluiremos esta sección reconociendo que, aunque nosotros hemos intentado resolverlo en un sentido negativo, no sabemos si los estudios de las H-estructuras, y otras posibles que puedan surgir a partir de estas, pueden ofrecer algún tipo de información positiva sobre el problema de prescindir, en ciertos teoremas para espacios hiperconvexos, de la hipótesis de "conjuntos admisibles".

Capítulo3

Teoremas de punto fijo

Una vez introducidas las propiedades más generales de los espacios hiperconvexos pasaremos a presentar lo que básicamente serán tres resultados de punto fijo en espacios hiperconvexos, cada uno de ellos de muy distinta naturaleza: comenzaremos con un resultado con condición frontera, seguidamente nos preocupará la compacidad de las aplicaciones consideradas y, en tercer lugar, probaremos un resultado de localización de punto fijo.

El primero de ellos hace referencia a un reciente trabajo W. A. Kirk y S. S. Shin donde, entre otros resultados, se ofrece un teorema de punto fijo con condición frontera en espacios hiperconvexos para aplicaciones no expansivas (ver [26]).

Para presentar el segundo de los teoremas de punto fijo tendremos que volver a los operadores últimamente compactos. De hecho gran parte del trabajo que realizaremos consistirá en delimitar cómo debemos entender este tipo de operadores en el contexto de los espacios hiperconvexos. El resultado de punto fijo ofrecido será un resultado análogo al enunciado en el primer capítulo como Teorema 1.6.13 para el caso hiperconvexo y que vendrá a suponer una adaptación-extensión del Teorema de Darbo-Sadovskii para los espacios hiperconvexos.

Finalmente, en la obtención del tercer resultado enunciado necesitaremos volver a otro trabajo muy reciente de W. A. Kirk (ver [25]). En este trabajo W. A. Kirk ofrece un teorema de localización de punto fijo para aplicaciones continuas definidas sobre espacios hiperconvexos compactos. Tomando este resultado como referencia nos plantearemos el mismo problema pero utilizando la envolvente hiperconvexa de Isbell en vez de utilizar el concepto de conjuntos admisibles como cierres hiperconvexos. De este modo obtendremos conclusiones distintas a las obtenidas por W. A. Kirk. Destaquemos como una de las principales diferencias el hecho de que al haber utilizado el cierre hiperconvexo de Isbell, vamos a poder extender nuestro resultado al caso no compacto de una manera casi inmediata, mientras que con la técnica de los conjuntos admisibles parece difícil dar dicho paso si no es bajo la imposición de nuevas hipótesis.

3.1 Un resultado de punto fijo con condiciones de frontera

Como ya hemos anunciado en la introducción de este capítulo, W. A. Kirk y S. S. Shin han estudiado recientemente diferentes teoremas de punto fijo es espacios métricos hiperconvexos en [26]. Uno de los tipos de resultados que presentan es el referente a la imposición de ciertas condiciones, llamadas condiciones de fronteras. El teorema de dicho trabajo que más nos ocupará en la presente sección se enuncia como sigue:

Teorema 3.1.1. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo y $D \in \mathcal{A}(M)$ acotado con interior no vacío. Sea $T : D \rightarrow M$ una aplicación no expansiva con la condición de que $T(\partial D) \subseteq D$. Entonces T tiene un punto fijo.*

En referencia a dicho teorema cabe destacar que se trata de una versión que los autores realizan de un trabajo del propio W. A. Kirk, de principios de los años setenta (ver [23]), en el que nos podemos encontrar un enunciado similar al anterior pero en espacios lineales.

El resultado que ofreceremos en esta sección exigirá la misma condición de frontera que se exige en el teorema que acabamos de enunciar a la vez que se fortalecen las condiciones sobre el conjunto D y se debilitan las de la aplicación. Sin embargo, antes de poder demostrar este resultado necesitaremos algunos lemas. En estos lemas, básicamente, lo que se trata probar es que si M es un espacio hiperconvexo compacto y $D \in \mathcal{A}(M)$, entonces existe $r: M \longrightarrow D$ retracción no expansiva de modo que

$$r(M \setminus D) \subseteq \partial D.$$

Comencemos introduciendo el concepto de segmento métrico en un espacio métrico.

Definición 3.1.2. Sea X un espacio métrico. Entonces, dados dos puntos x e y de X, se dirá que un subconjunto A de X es un segmento métrico que une x a y si para todo t perteneciente al intervalo real $[0, 1]$ existe un único elemento x_t de A verificando que

$$d(x, x_t) = td(x, y) \quad \text{y} \quad d(x_t, y) = (1 - t)d(x, y).$$

El siguiente lema hace referencia a los segmentos métricos en los espacios hiperconvexos. Resulta claro, a partir de la hiperconvexidad, que entre dos puntos cualesquiera de un espacio hiperconvexo siempre existen segmentos métricos que los unen, sin embargo lo que buscamos con este lema es garantizar la existencia de un segmento métrico con una cierta propiedad común a todos los segmentos de los espacios lineales.

Lema 3.1.3. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo. Entonces se verifica que para todo $x, y \in M$ existe un segmento métrico, al que designamos por* $\text{seg}(x, y)$*, en M, uniendo ambos puntos de modo que si x_t es el elemento de dicho segmento métrico que dista $td(x, y)$ de x y $(1-t)d(x, y)$ de y, entonces*

$$d(x_t, x_{t'}) \leq (t' - t)d(x, y)$$

para todo $t, t' \in [0, 1]$.

Prueba. Por el resultado enunciado en el primer capítulo como Lema 1.1.7, sabemos que M es isométrico a un retracto no expansivo de $\ell_\infty(I)$, para un cierto conjunto de índices I. Denotemos igualmente como M dicho espacio isométrico. Sea

$$r \colon \ell^\infty(I) \longrightarrow M$$

una retracción no expansiva de $\ell^\infty(I)$ en M. Fijemos x_t como la imagen mediante r del punto del segmento lineal que une x a y en $\ell_\infty(I)$ distando $td(x, y)$ de x y $(1 - t)d(x, y)$ de y, es decir

$$x_t = r\big((1 - t)x + ty\big)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Ahora es fácil comprobar que el conjunto dado por $\{x_t : t \in [0, 1]\}$ es un segmento métrico uniendo x e y, y que, además, verifica las propiedades exigidas por el enunciado. ☐

El siguiente lema hace referencia a una propiedad muy general de las funciones continuas definidas sobre espacios métricos lineales separables, y que aquí la ofrecemos adaptada a espacios métricos hiperconvexos separables.

Lema 3.1.4. *Sea $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con M un espacio métrico hiperconvexo y separable. Entonces existe un subconjunto numerable A de $\mathbb{R}$ tal que*

$$\bigcup_{a \in A} f^{-1}(a)$$

es denso en M.

Prueba. Comencemos destacando el subconjunto S de $\mathbb{R}$ dado por:

$$S = \{a \in \mathbb{R} : \left(\mathrm{int} f^{-1}(a)\right) \neq \emptyset\},$$

donde $\mathrm{int} f^{-1}(a)$ denota el interior topológico de $f^{-1}(a)$ en M. Veamos que para probar el lema basta considerar la unión de dicho conjunto con el de los números racionales de $\mathbb{R}$. Tomemos, por tanto, $A = S \cup \mathbb{Q}$.

Por la manera en que ha sido definido S tenemos que cada uno de sus elementos define un abierto en M de tal forma que la familia formada por todos estos conjuntos abiertos es una familia de conjuntos disjuntos. De este modo, puesto que M es separable, se tiene que S es numerable. En consecuencia A también lo es y lo único que queda probar es que

$$\overline{\bigcup_{a \in A} f^{-1}(a)} = M.$$

Sean $x \in M \setminus \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a)$ y $r > 0$ dados. Habremos acabado si probamos que

$$B(x,r) \bigcap \left(\bigcup_{a \in A} f^{-1}(a) \right) \neq \emptyset.$$

Puesto que x no está en $f^{-1}(A)$, tenemos que f no es constante en $B(x,r)$. Tomemos $y \in B(x,r)$ de modo que $f(y) \neq f(x)$. Ahora podemos fijar un segmento métrico de x a y, llamémosle seg(x,y), como en el lema anterior, y consideremos la aplicación $h \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$t \in [0,1] \longmapsto x_t \in seg(x,y) \longmapsto f(x_t).$$

La función h así definida será continua por composición de aplicaciones continuas. Además, como $h(0) \neq h(1)$, tenemos que $h([0,1])$ es un intervalo con interior no vacío en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, puesto que A es denso en $\mathbb{R}$,

$$h([0,1]) \bigcap A \neq \emptyset.$$

De donde se tiene que existe un número t de $(0,1]$ tal que $h(t) = f(x_t) \in A$. Pero $x_t \in B(x,r)$, por tanto

$$f^{-1}(A) \bigcap B(x,r) \neq \emptyset$$

y el lema queda demostrado. □

A continuación pasaremos a dar una condición suficiente para la existencia de una retracción no expansiva sobre un subconjunto de un espacio métrico compacto dado.

Lema 3.1.5. *Sea M un espacio métrico compacto, N un subconjunto de M, (H_n) una sucesión de subconjuntos de M ordenados crecientemente respecto a la inclusión y (r_n) una sucesión de retracciones no expansivas de H_n en $N \subseteq M$. Entonces, si $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ es denso en M, existe $r\colon M \longrightarrow N$ retracción no expansiva de M sobre N.*

Prueba. Llamemos H a la unión de todos los H_n y consideremos fijada $\{x_n\}$ una sucesión densa en H. Por la densidad de H se tendrá que $\{x_n\}$ también es densa en M.

Consideremos la sucesión $\{r_n(x_1)\}$, que estará bien definida salvo, a lo más, para una cantidad finita de términos ya que, aunque x_1 no tiene por qué estar en el dominio de todas las retracciones r_n, dado el crecimiento de los conjuntos H_n, se tendrá que a partir de un cierto n_0, x_1 está en el dominio de todas las todas las retracciones r_n con $n \geq n_0$. Ahora, dada la compacidad de M, podemos considerar una subsucesión convergente $\{r_{n_k}(x_1)\}$ de $\{r_n(x_1)\}$. Fijemos dicha subsucesión.

Si aplicamos dicha subsucesión de (r_n) a x_2, podremos extraer otra subsucesión, que notaremos por

$$\{r^2_{n_k}(x_2)\},$$

convergente y tal que

$$d\big(r^2_{n_k}(x_2),\ r^2_{n_l}(x_2)\big) \leq \frac{1}{2}$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$.

De este modo podemos proseguir para cada $m \in \mathbb{N}$. Así para x_m extraemos una m-ésima subsucesión

$$\{r^m_{n_k}(x_m)\}$$

convergente y tal que

$$d(r^m_{n_k}(x_m), r^m_{n_l}(x_m)) \leq \frac{1}{2^m} \tag{3.1}$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$. Obteniéndose el siguiente diagrama de subsucesiones:

$$\begin{array}{ccccc}
r^1_{n_1}(x_1) & r^1_{n_2}(x_1) & \dots & r^1_{n_k}(x_1) & \dots \\
r^2_{n_1}(x_2) & r^2_{n_2}(x_2) & \dots & r^2_{n_k}(x_2) & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
r^m_{n_1}(x_m) & r^m_{n_2}(x_m) & \dots & r^m_{n_k}(x_m) & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Llamemos $\{s_n\}$ a la sucesión que surge de aplicar diagonalización en el diagrama anterior, es decir, $s_k = r^k_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dicha sucesión de retracciones verificará:

(a) $s_n(x_m)$ está bien definido siempre que $n \geq m$.

(b) $\big(s_n(x_m)\big)$ es convergente para todo número natural m fijo.

(c) $d\big(s_n(x_m), s_l(x_m)\big) \leq \dfrac{1}{2^m}$ siempre que n y l sean mayores o iguales que m.

Sean ahora $x \in M$ y (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n) convergente hacia x. Veamos que existe el límite siguiente

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x_{n_k})$$

y que, por tanto, tiene sentido definir una aplicación r como

$$r(x) = \lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x_{n_k}).$$

Una vez probado que estas sucesiones son convergentes también se tendrá que el valor de $r(x)$ es independiente de quién sea la subsucesión de los (x_n) escogida convergiendo a x, ya que dicha subsucesión ha sido elegida al azar entre todas las convergentes a x. Por tanto, veamos que existe el límite que define $r(x)$ para cada x. Para ello estudiamos la condición de Cauchy sobre dicha sucesión. Fijemos dos términos de ella, n_k y n_l con $n_k > n_l$, y estimemos la distancia entre $s_{n_l}(x_{n_l})$ y $s_{n_k}(x_{n_k})$.

$$d(s_{n_l}(x_{n_l}), s_{n_k}(x_{n_k})) \leq$$
$$\leq d(s_{n_l}(x_{n_l}), s_{n_k}(x_{n_l})) + d(s_{n_k}(x_{n_l}), s_{n_k}(x_{n_k}))$$

a partir de (3.1) y la no expansividad de s_{n_k}

$$\leq d(x_{n_l}, x_{n_k}) + \frac{1}{2^{n_l}}.$$

De donde, por la convergencia de (x_{n_k}) a x, se tiene el carácter de sucesión de Cauchy de $\{s_{n_k}(x_{n_k})\}$ y, efectivamente, $r(x)$ define un elemento de N.

Si ahora repetimos este proceso para cada $x \in M$ obtenemos

$$r\colon M \longrightarrow N$$

aplicación no expansiva. Para probar la no expansividad de r, fijemos x e y en M y dos sucesiones de la forma (x_{n_k}) y (x_{m_k}) convergiendo a x e y respectivamente. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar n_k y m_k (con, por ejemplo, $n_k > m_k$) tales que

$$d(r(x), r(y)) \leq d(s_{n_k}(x_{n_k}), s_{m_k}(x_{m_k})) + \varepsilon.$$

De aquí podemos proseguir con

$$\begin{aligned} d(r(x), r(y)) &\leq d(s_{n_k}(x_{n_k}), s_{m_k}(x_{m_k})) + \varepsilon \\ &\leq d(s_{m_k}(x_{m_k}), s_{n_k}(x_{m_k})) + d(s_{n_k}(x_{m_k}), s_{n_k}(x_{n_k})) + \varepsilon \\ &\leq d(x_{n_k}, x_{m_k}) + \frac{1}{2^{m_k}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde, puesto que (x_{n_k}) converge a x y (x_{m_k}) lo hace a y, se llega, tomando límite y fijado el ε tan pequeño como se quiera, a que $d(r(x), r(y)) \leq d(x, y)$. Con lo que el carácter no expansivo de r queda probado.

El carácter de retracción de r se deduce inmediatamente por la forma en que ha sido definida a partir de las retracciones s_k, ya que cada una de estas retracciones coincidía con la identidad al restringirlas a N. □

De este modo llegamos al lema del que se seguirá inmediatamente el resultado de punto fijo.

Lema 3.1.6. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo compacto, y D un subconjunto admisible de M con interior no vacío. Entonces existe una retracción no expansiva $r\colon M \longrightarrow D$ de modo que*

$$r(M \setminus D) \subset \partial D.$$

Prueba. La idea consiste en conseguir verificar las hipótesis del lema anterior para justificar la existencia de una retracción no expansiva que vaya de $M \setminus \operatorname{int}(D)$ en ∂D.

El modo natural para construir dicha retracción, teniendo en cuenta que estamos trabajando en espacios hiperconvexos, es la de tratar de extender la identidad sobre ∂D a todo M mediante inducción transfinita y sin aumentar el rango de dicha aplicación identidad. Para fijar notación llamemos

$$H = M \setminus \mathrm{int}(D).$$

Sea $x \in H \setminus \partial D$ y veamos si es posible extender $id\colon \partial D \longrightarrow \partial D$ a una aplicación

$$r\colon \{x\} \cup \partial D \longrightarrow \partial D$$

de modo no expansivo. Esto se puede conseguir sin más que verificar el conjunto

$$A(x) = \left(\bigcap_{z\in D} B(z, d(z,x))\right) \bigcap B(x, \mathrm{dist}(x,D)) \bigcap D, \tag{3.2}$$

es no vacío.

Pero se puede comprobar que $A(x)$ es no vacío sin más que recordar la condición de hiperconvexidad de M y la de conjunto admisible de D, ya que se satisface que la distancia entre los centros de las bolas es siempre menor o igual que la suma de los radios correspondientes tomados dos a dos. Por tanto, si definimos como $r(x)$ cualquier elemento de la intersección anterior, ya se tiene esta primera extensión no expansiva.

Para proseguir con la inducción, el siguiente paso consistiría en extender nuestra retracción r a

$$\partial D \cup \{x\} \cup \{y\}$$

con $y \in H \setminus \big(\partial D \cup \{x\}\big)$. Pero si en esta ocasión consideramos el conjunto análogo al anterior,

$$A(y) = \left(\bigcap_{z\in D} B(z, d(z,y))\right) \bigcap B\big(r(x), d(x,y)\big) \bigcap$$

$$\bigcap B\big(y, \mathrm{dist}(y,D)\big) \bigcap D,$$

nos encontramos con que, para garantizar que es distinto del vacío, no hay problema con la condición de hiperconvexidad sobre los centros y los radios de las bolas consideradas salvo al intentar cortar $B(r(x), d(x,y))$ con $B(y, \mathrm{dist}(y,D))$. En este caso bastaría imponer la siguiente condición para asegurar que ambas bolas se cortan,

$$\mathrm{dist}(x,D) \leq \mathrm{dist}(y,D). \tag{3.3}$$

Obviamente esta relación no tiene por qué ser cierta siempre. De hecho, esta relación entre los puntos de $H \setminus \partial D$ nos está imponiendo un orden sobre dicho conjunto. Dicho orden será, en realidad, la idea a seguir para la construcción de la retracción que buscamos.

Para simplificar la escritura, supongamos que

$$\sup\{\mathrm{dist}(x, D) : \; x \in H\} = 1.$$

Si definimos la aplicación de M en $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{dist}(x, D)$, entonces, por el Lema 3.1.4, existe un subconjunto numerable, al que denotaremos por la sucesión (d_n), y denso en $[0,1]$ de tal modo que el subconjunto de M dado por

$$\{x \in H : \; \mathrm{dist}(x, D) = d_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en H. Consideremos dicha sucesión fijada a partir de ahora.

Denotemos

$$H_n = \bigcup_{i=0}^{n} D_i,$$

donde

$$D_i = \{x \in H : \; \mathrm{dist}(x, D) = d_i\}, \text{ (entendiendo que } d_0 = 0).$$

Para poder aplicar el lema anterior construiremos una sucesión de retracciones no expansivas (r_n) que vayan de H_n en ∂D. Notar que $\partial D = D_0$.

Lo primero que haremos será definir un cierto orden dentro de H_n. En cada H_n entendemos por capas los distintos conjuntos D_i, a partir de los cuales han quedado definidos. Si tenemos dos elementos de H_n pero en distintos D_i, entenderemos que es menor el que se corresponda con el d_i menor. Dentro de una misma capa los ordenamos arbitrariamente. De este modo podemos escribir los elementos de H_n como $\{x_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ de forma que si $i \leq j$ entonces $x_i \leq x_j$. Con el fin de conseguir que si $x_i \leq x_j$ entonces

$$\mathrm{dist}(x_i, D) \leq \mathrm{dist}(x_j, D).$$

Ahora ya estamos en condiciones de definir la enésima retracción

$$r_n \colon H_n \longrightarrow \partial D$$

no expansiva. Si $x \in \partial D$ tomamos $r_n(x) = x$. De este modo todos los demás x de H_n estarán en una capa distinta de los valores ya fijados. Ahora empezamos a construir la retracción añadiendo los elementos de la capa de H_n con d_i inmediatamente mayor que cero y según el orden anterior.

Tomemos el x_j con el j más pequeño de la capa seleccionada. Podremos extender r_n a $\partial D \cap \{x_j\}$ sin más que considerar la intersección análoga a (3.2) para x_j, y definir $r_n(x_j)$ como cualquier elemento de esta intersección.

Supongamos ahora definida r_n en $\partial D \bigcup \left(\bigcup_{j<k}\{x_j\}\right)$, y tratemos de extenderla a

$$\partial D \bigcup \left(\bigcup_{j<k}\{x_j\}\right) \bigcup \{x_k\}.$$

Esto se podrá hacer si somos capaces de garantizar que la intersección

$$\left(\bigcap_{z\in D} B(z, d(x_k, z))\right) \bigcap B(x_k, \operatorname{dist}(x_k, D)) \bigcap$$

$$\bigcap \left(\bigcap_{j<k} B\left(r_n(x_j), d(x_j, x_k)\right)\right) \bigcap D$$

es no vacía. Lo cual será cierto sin más que comprobar la condición de hiperconvexidad sobre los centros y radios de las bolas consideradas junto con el hecho de que D es un conjunto admisible de M y que $\operatorname{dist}(x_j, D) \leq \operatorname{dist}(x_k, D)$, para todo $j < k$. Teniéndose que, por construcción, esta aplicación r_n así definida es una retracción no expansiva de H_n a ∂D.

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $r_n \colon H_n \longrightarrow \partial D$ retracción no expansiva. Puesto que la sucesión de conjuntos (H_n) es creciente con respecto a la inclusión y su unión es densa en M, podemos aplicar el lema anterior y deducir inmediatamente que existe $r \colon H \to \partial D$ retracción no expansiva. Si a esta retracción la extendemos por la identidad dentro de D, obtenemos finalmente

$$r \colon M \longrightarrow D$$

retracción no expansiva de M en D tal que

$$r\big(M \setminus \operatorname{int}(D)\big) \subset \partial D.$$

□

Como consecuencia de estos lemas llegamos al resultado de punto fijo anunciado.

Teorema 3.1.7. *Sean M un espacio hiperconvexo compacto, $D \in \mathcal{A}(M)$ y $T \colon D \longrightarrow M$ aplicación continua y tal que $T(\partial D) \subseteq D$. Entonces T tiene punto fijo.*

Prueba. Sea r la retracción de M en D dada por el lema anterior. Entonces tenemos

$$T \circ r \colon M \longrightarrow M$$

aplicación continua, donde M es un espacio hiperconvexo compacto. En consecuencia, por el Corolario 1.2.12 (versión hiperconvexa del Teorema de Schauder), tenemos que existe $x \in M$ tal que $T\big(r(x)\big) = x$. Veamos que x debe estar en D.

Si $x \in M \backslash \mathrm{int}(D)$, se tiene que $r(x) \in \partial D$ y, dado que T manda la frontera de D en D, también se tiene que $T(r(x)) \in D$. Pero como $T(r(x)) = x$, podemos concluir que $x \in D$. Además $r(x) = x$ para todo $x \in D$, por lo que x ha de ser un punto fijo para T.

En caso de que $x \in D$ se tiene que $r(x) = x$ y, por tanto, x también sería un punto fijo para T.

Luego, en cualquier caso se tiene que x es un punto fijo para T y el teorema queda probado. $\square$

Por último, se puede mejorar un poco el teorema anterior sin más que cambiar la hipótesis de que M sea compacto por la de que únicamente lo sea el propio conjunto admisible D.

Corolario 3.1.8. *Sean M un espacio hiperconvexo, D un conjunto admisible y compacto de M y $T \colon D \longrightarrow M$ una aplicación continua tal que $T(\partial D) \subseteq D$. Entonces T tiene un punto fijo en D.*

Prueba. Este resultado se puede reducir muy fácilmente al anterior. Para ello basta considerar que, puesto que D es compacto y T es continua, el conjunto $D \cup T(D)$ también será compacto. Ahora basta tomar M' como cualquier realización del cierre hiperconvexo de Isbell de $D \cup T(D)$ en M de tal modo que contenga al propio conjunto $D \cup T(D)$. Esta realización del cierre hiperconvexo es compacta y T irá de D en M', estando, ahora sí, en las mismas condiciones del teorema anterior. $\square$

3.2 Operadores últimamente compactos en espacios hiperconvexos

Nuestro objetivo en la presente sección será el de ver cómo es posible entender el concepto de aplicaciones últimamente compactas para espacios hiperconvexos, a la vez que se ofrece un resultado de punto fijo para dichas aplicaciones, que viene a ser una extensión-adaptación del Teorema de Darbo-Sadovskii al contexto hiperconvexo. En principio nos encontramos con ciertas dificultades técnicas ya que los operadores últimamente compactos definidos en el capítulo anterior necesitaban muy fuertemente de una estructura lineal. Más concretamente, si recordamos las Definiciones 1.6.8 y 1.6.10, se definen a partir de cierres convexos de ciertos conjuntos y resultan esenciales algunas de las propiedades básicas de estos cierres para el desarrollo de las propiedades que hacen útiles dichos operadores. Para sustituir el papel jugado por los cierres convexos nosotros acudiremos, una vez más, al cierre hiperconvexo de Isbell. La idea es introducir una clase de operadores que, por sus similitudes a los últimamente compactos, puedan verse como una adaptación natural de este concepto al contexto hiperconvexo.

El primer paso para definir los operadores últimamente compactos nos vino dado por la Definición 1.6.8. En esta definición se introducía una sucesión decreciente de conjuntos determinada a partir de una cierta aplicación f. La unicidad del cierre convexo de un subconjunto de un espacio lineal hacía que esta sucesión fuese única una vez fijados la aplicación f y el dominio de la misma. Aquí será donde nos encontraremos con la mayor diferencia entre los operadores últimamente compactos ya definidos y los que definiremos nosotros. Dichas diferencias se deberán, esencialmente, a que el cierre hiperconvexo de Isbell es único salvo isometría. Por lo que podrán darse distintas sucesiones transfinitas para una misma aplicación f. Definamos, por tanto, dichas sucesiones del siguiente modo:

Definición 3.2.1. Sea D un subconjunto de un espacio hiperconvexo M. Dada una aplicación $f\colon D \longrightarrow M$ diremos que (T_α) es una sucesión transfinita de conjuntos asociada a f en D si es de la forma

$$\begin{aligned} T_0 &= h\big(f(D)\big), \\ T_\alpha &= h\big(f(D \cap T_{\alpha-1})\big), \text{ si } \alpha - 1 \text{ existe}, \\ T_\alpha &= \bigcap_{\beta<\alpha} T_\beta, \text{ si } \alpha - 1 \text{ no existe}, \end{aligned}$$

verificando que los T_α son siempre cierres hiperconvexos de los conjuntos $f(D)$ ó $f(D \cap T_{\alpha-1})$, según sea el caso, escogidos bajo las condiciones de que la sucesión (T_α) sea decreciente, que T_α contenga a $f(D)$, si $\alpha = 0$, ó $f(D \cap T_{\alpha-1})$ si α tiene antecesor y que estén contenidos en M.

Para que esta definición tenga sentido es necesario ver que efectivamente la sucesión (T_α) se puede tomar de modo decreciente.

Lema 3.2.2. *Dados D, M y f como en la definición anterior, siempre existe una sucesión transfinita (T_α) asociada a f en D.*

Prueba. Para comenzar fijamos $T_0 = h(f(D))$ como cualquier envolvente hiperconvexa de $f(D)$ de modo que $f(D) \subseteq T_0 \subseteq M$, lo que se puede hacer sin ningún problema por el Lema 2.1.1.

Inmediatamente se tiene que $f(D \cap T_0) \subseteq f(D)$. Por lo que $f(D \cap T_0) \subseteq T_0$ y, por tanto, podemos fijar el cierre hiperconvexo T_1 de modo que $f(D \cap T_0) \subseteq T_1 \subseteq T_0$ tal y como se hizo con T_0.

Para terminar la prueba del lema basta con realizar un razonamiento de inducción transfinita.

Si α tiene antecesor entonces tenemos

$$T_\alpha = h\big(f(D \cap T_{\alpha-1})\big).$$

Pero por hipótesis de inducción, $f(D \cap T_{\alpha-1}) \subseteq T_{\alpha-1}$. En cualquier caso $T_{\alpha-1}$ es hiperconvexo, ya que si tiene antecesor lo es por definición y si no por ser intersección de conjuntos hiperconvexos decrecientes (Corolario 1.4.10). Por lo que podemos tomar T_α tal que $f(D \cap T_{\alpha-1}) \subseteq T_\alpha \subseteq T_{\alpha-1}$.

En el caso en que α no tiene antecesor

$$T_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} T_\beta$$

y tanto el decrecimiento como la hiperconvexidad se tienen inmediatamente.

□

Veamos ahora que con esta definición se siguen dando las propiedades descritas por el Lema 1.6.9 sobre las sucesiones transfinitas.

Lema 3.2.3. *Si (T_α) es una sucesión transfinita asociada a una aplicación f según la definición anterior, entonces se verifica que:*

1. *Cada T_α es cerrado.*
2. $f(D \cap T_\alpha) \subseteq T_{\alpha+1}$.
3. *Si $\beta < \alpha$, entonces $T_\alpha \subseteq T_\beta$.*
4. $f(D \cap T_\alpha) \subseteq T_\alpha$.
5. *Hay un número ordinal η tal que $T_\alpha = T_\eta$ para todo $\alpha \geq \eta$.*

Prueba. 1. Se deduce de que T_α es hiperconvexo para todo α. Como ya se ha dicho antes, si α tiene antecesor lo es por definición, y si no por mediación del Corolario 1.4.10 que garantiza que la intersección de una familia decreciente de conjuntos hiperconvexos es hiperconvexa.

2. Por definición.

3. Visto en el lema anterior.

4. Es consecuencia del decrecimiento de (T_α) y (2).

5. Para probar la estabilidad de la sucesión transfinita a partir de un cierto ordinal, consideremos δ como un ordinal mayor que el número de subconjuntos de M. De este modo debe ocurrir que en $\{T_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \delta\}$ se den repeticiones. Puesto que la sucesión es decreciente dichas repeticiones se deben dar entre conjuntos consecutivos. Sea, por tanto, α y $\alpha + 1$ de modo que

$$T_\alpha = T_{\alpha+1}.$$

Al ser $\alpha + 1$ un número sucesor lo que tenemos es que T_α es una realización del cierre hiperconvexo de $f(D \cap T_\alpha)$ y, por tanto, que la única elección posible para $T_{\alpha+1}$ es tomarlo como el propio T_α. A partir de este momento la situación se repetiría indefinidamente, encontrándonos con que si $\beta \geq \alpha$ entonces

$$T_\beta = T_\alpha.$$

□

Corolario 3.2.4. *Si (T_α) en una sucesión transfinita asociada a f en M, es decir, estamos en el caso $f\colon M \longrightarrow M$, con M acotado, entonces el conjunto T_η dado por el lema anterior es distinto del vacío.*

Prueba. Probemos, por inducción transfinita, que T_α es distinto del vacío para todo α.

Para $\alpha = 0$, $T_0 \neq \emptyset$ de un modo trivial.

Si α tiene antecesor, entonces, por hipótesis de inducción, $T_{\alpha-1}$ es distinto del vacío y está contenido en M. Por tanto, $T_\alpha = h(f(M \cap T_{\alpha-1}))$ es no vacío.

Si α no tiene antecesor, entonces T_α es intersección de conjuntos hiperconvexos decrecientes y acotados. En consecuencia, por el Teorema 1.4.9, es no vacío. □

Definición 3.2.5. Diremos que $f^\infty(D)$ es un rango último de f sobre D si se puede obtener como conjunto límite T_η de una sucesión transfinita de f en D. La aplicación f se dirá últimamente compacta si existe un rango último $f^\infty(D)$ de f tal que $f(D \cap f^\infty(D))$ es relativamente compacto en M.

Nota 3.2.6. A partir del Corolario 3.2.4 sabemos que si $D = M$ entonces cualquier rango último de f es no vacío. Esto es algo que en el caso lineal no tenía por qué ocurrir.

Comprobemos que este rango último disfruta de propiedades similares a las vista en el Lema 1.6.11 para el caso lineal.

Lema 3.2.7. *Sea $f : D \to M$, con M hiperconvexo, y $f^\infty(D)$ un rango último de f, entonces se tiene:*

1. $f^\infty(D) = h\big(f(D \cap f^\infty(D))\big)$.
2. *Si $D_1 \subseteq D$, entonces $f : D_1 \to M$ tiene un rango último $f^\infty(D_1)$ contenido en $f^\infty(D)$.*
3. *Si f es últimamente compacta sobre D y $D_1 \subseteq D$, entonces también lo es sobre D_1.*
4. *La aplicación $f : D \to M$ es últimamente compacta si, y sólo si, tiene un rango último compacto.*

Prueba. 1. Se tiene de la propia definición de rango último.

2. Probemos que para cada sucesión transfinita de f en D, (T_α), podemos encontrar otra sucesión transfinita de f en D_1, a la que denotaremos por (T'_α) tal que $T'_\alpha \subseteq T_\alpha$ para todo α. Supongamos fijada la sucesión transfinita de f en D como (T_α).

   Para $\alpha = 0$, tenemos $f(D_1) \subseteq f(D) \subseteq T_0$. Puesto que T_0 es hiperconvexo podremos encontrar un cierre hiperconvexo de $f(D_1)$ contenido en T_0 (Lema 2.1.1), a este cierre hiperconvexo es al que llamamos T'_0.

   Para los demás casos en que el α tenga antecesor se razona de un modo similar. Para un α ordinal límite se tendrá el resultado de un modo inmediato sin más que aplicar hipótesis de inducción.

3. Se deduce del anterior.

4. Sea $f^\infty(D)$ un rango último de f compacto, entonces, por definición, se tiene que $f(D \cap f^\infty(D)) \subseteq f^\infty(D)$. Con lo que $f(D \cap f^\infty(D))$ es relativamente compacto.

   Recíprocamente, si f es últimamente compacto entonces tiene un rango último $f^\infty(D)$ tal que $f(D \cap f^\infty(D))$ es relativamente compacto. Pero, en este caso,
   $$f^\infty(D) = h(f(D \cap f^\infty(D))$$

teniéndose, por la conservación de la compacidad al tomar cierre hiperconvexo, que $f^{\infty}(D)$ es compacto.

□

El teorema que a continuación mostramos viene a decirnos que un resultado análogo al dado por el Teorema 1.6.13, continúa siendo cierto en este nuevo contexto.

Teorema 3.2.8. *Sea M un espacio hiperconvexo y D un subconjunto cerrado de M. Si $f\colon D \longrightarrow M$ es una aplicación $\phi-$condensante (con ϕ la medida de Hausdorff o Kuratowski), entonces f es últimamente compacta sobre D.*

Prueba. Sea $f^{\infty}(D)$ un rango último cualquiera para f. Por el lema anterior se tiene que

$$h\big(f(D \cap f^{\infty}(D))\big) = f^{\infty}(D).$$

De donde,

$$h\big(f(D \cap f^{\infty}(D))\big) \supseteq D \cap f^{\infty}(D).$$

Si ahora consideramos la monotonía de ϕ, obtenemos

$$\phi\big(h(f(D \cap f^{\infty}(D))\big) \geq \phi(D \cap f^{\infty}(D)).$$

Pero, por el Teorema 2.3.6,

$$\phi\big(h(f(D \cap f^{\infty}(D))\big) = \phi(f(D \cap f^{\infty}(D))).$$

Y por tanto se obtiene

$$\phi\big(f(D \cap f^{\infty}(D))\big) \geq \phi(D \cap f^{\infty}(D)).$$

Si ahora tenemos en cuenta la monotonía de ϕ y el carácter condensante de f, podemos concluir con que $D \cap f^{\infty}(D)$ es relativamente compacto. Además, como $f^{\infty}(D)$ es cerrado por ser hiperconvexo y D lo es por hipótesis, ocurre que

$$D \cap f^{\infty}(D)$$

no sólo es relativamente compacto sino que es compacto. Finalmente, basta recordar que f es continua para afirmar que f es últimamente compacta sobre D. □

El resultado de punto fijo que vamos a mostrar a continuación guarda una estrecha relación con dos teoremas citados en esta memoria como los Teoremas 1.6.7 (Teorema de Darbo-Sadovskii) y 1.6.13. Por el último teorema visto sabemos que si una aplicación es condensante con respecto a las métricas de Hausdorff o Kuratowski en un espacio métrico entonces también es últimamente compacta. En este sentido será en el que el siguiente resultado extenderá al Teorema de Darbo-Sadovskii. En definitiva el resultado que nos ocupa se enuncia como sigue:

Teorema 3.2.9. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo acotado. Si T es una aplicación de M en M últimamente compacta y continua, entonces su conjunto de puntos fijos es no vacío.*

Prueba. Puesto que T es últimamente compacta, por el Lema 3.2.7, sabemos que tiene un rango último, denotémosle por $f^{\infty}(M)$, compacto. Además, según la Nota 3.2.6, dicho rango último es no vacío aparte de hiperconvexo. De nuevo por el Lema 3.2.7 se tiene que todo rango último de T es $T-$invariante, en particular el nuestro.

Por tanto tenemos

$$T\colon f^{\infty}(M) \longrightarrow f^{\infty}(M)$$

aplicación continua con $f^{\infty}(M)$ compacto. Si ahora recordamos la adaptación del Teorema de Schauder al caso hiperconvexo ofrecida en el Corolario 1.2.12, se puede concluir con la existencia de punto fijo de T en $f^{\infty}(M)$ y, en particular, en M. □

Uniendo el teorema anterior con el Teorema 3.2.8, obtenemos como corolario la formulación clásica del Teorema de Darbo-Sadovskii para el caso hiperconvexo.

Corolario 3.2.10. *Sea ϕ la medida de no compacidad de Hausdorff o Kuratowski indistintamente, y M un espacio métrico hiperconvexo acotado. Entonces, si $T\colon M \longrightarrow M$ es una aplicación $\phi-$condensante y continua, existe un punto fijo para T en M.*

3.3 Aplicaciones continuas y espacios hiperconvexos compactos

En la presente sección, como ya se ha avanzado en el preámbulo de este capítulo, vamos a trabajar a partir de un artículo recientemente publicado por W. A. Kirk ([25]). En este trabajo el autor muestra un resultado de localización de punto fijo para una aplicación continua definida de un espacio hiperconvexo compacto en sí mismo, a la vez que obtiene, como límite de una cierta sucesión definida de modo recurrente, un punto fijo para otra aplicación asociada a la anterior y definida del conjunto de los subconjuntos admisibles del espacio hiperconvexo en sí mismo. Como el propio autor hace notar, su trabajo constituye una abstracción del siguiente conocido ejemplo (Capítulo 11, [41]), que pasamos a exponer.

Ejemplo 3.3.1. Sea $[a,b]$ un intervalo en la recta real y sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua. Denotemos por $M(a,b)$ el conjunto de todos los subintervalos cerrados no vacíos de $[a,b]$. La métrica de Hausdorff H se puede definir sobre este conjunto del siguiente modo

$$H([x,y],[u.v]) = \max\{|x-u|,\ |y-v|\}.$$

A f le podemos asociar de un modo natural la aplicación

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon M(a,b) &\longrightarrow M(a,b) \\ J &\longmapsto f(J) \end{aligned}$$

Entonces se verifica que $\overline{f}$ tiene un punto fijo maximal (con respecto a la inclusión) $J \in M(a,b)$ cumpliéndose, además, que

$$J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \text{ y } J = \lim_{n\to\infty} J_n,$$

(límite tomado con respecto a la métrica de Hausdorff), donde $J_0 = [a,b]$ y $J_n = \overline{f}^n(J_0)$. Notar, además, que los puntos fijos de f se encuentran en el intervalo límite J.

Como abstracción de este ejemplo al caso hiperconvexo, W. A. Kirk ofrece el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo y compacto, y sea $f\colon M \longrightarrow M$ una aplicación continua. A f le asociamos la aplicación*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \mathcal{A}(M) &\longrightarrow \mathcal{A}(M) \\ D &\longmapsto co(f(D)) \end{aligned}$$

Sea $D_0 = M$, $D_n = \overline{f}(D_{n-1}) = \overline{f}^n(M)$ y llamemos $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Entonces

$$\overline{f}(D) = D \neq \emptyset \text{ y } D = \lim_{n\to\infty} D_n,$$

límite tomado respecto a la métrica de Hausdorff en $\mathcal{A}(M)$. Además en este conjunto D encontramos localizados todos los puntos fijos de f.

La analogía entre ambos resultados es fácilmente observable. Como también será clara de observar la analogía con nuestro resultado. Esencialmente nuestro trabajo viene motivado por la preocupación que W. A. Kirk muestra al tratar de extender el teorema anterior al caso no compacto. Como solución inmediata a esta cuestión, aprecia que basta exigir que la aplicación f sea compacta, lo que realmente no supone mucha más información sobre lo ya enunciado. Como otra alternativa a la hipótesis de compacidad propone el hecho de que M sea un espacio hiperconvexo con la propiedad adicional de que $co(A)$ sea compacto para todo subconjunto compacto A de M. Como ya vimos en el Ejemplo 1.5.3 esta condición no tiene por qué cumplirse en general. Por tanto, y al apreciarse que las dificultades para extender este resultado al caso no compacto vienen dadas, principalmente, por las propias características de la acción de tomar $co(A)$ sobre un conjunto A, decidimos trabajar con el cierre hiperconvexo de Isbell, mucho más adecuado, como ya hemos visto en repetidas ocasiones, para conservar la compacidad. Lo que aquí haremos será dar una nueva abstracción del ejemplo anterior pero en términos del cierre hiperconvexo de Isbell.

Antes de enunciar y demostrar dicho resultado deberemos introducir una notación adecuada y lemas auxiliares que nos serán de gran utilidad en la prueba del mismo. Hemos decidido no incluir las pruebas de algunos de estos lemas dado el carácter elemental de los mismos.

La medida de Hausdorff entre los subconjuntos de un mismo espacio métrico ya fue introducida en el primer capítulo de esta memoria del modo que recordamos a continuación.

Fijado M espacio métrico hiperconvexo. Denotamos por $N_\rho(D)$, donde $D \subseteq M$ y $\rho \geq 0$, a

$$N_\rho(D) = \{z \in M : \operatorname{dist}(z, D) \leq \rho\}.$$

Atendiendo a esta notación, la distancia de Hausdorff entre dos subconjuntos A y B de M, se puede escribir como:

$$H(A,B) = \inf\{\rho \geq 0 : \ A \subseteq N_\rho(B) \text{ y } B \subseteq N_\rho(A)\}.$$

Notar, además, que si suponemos compacidad sobre M y exigimos que D sea un subconjunto cerrado de M, entonces

$$N_\rho(D) = \bigcup_{x \in D} B(x, \rho).$$

A continuación ofrecemos los lemas anunciados anteriormente. El primero de ellos es posible encontrarlo en [25].

Lema 3.3.3. *Sea (D_n) una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico compacto M tal que $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots \supseteq D_n \supseteq \cdots$. Entonces se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n,$$

donde el límite está tomado con respecto a la métrica de Hausdorff definida sobre los cerrados de M.

Lema 3.3.4. *Sean M un espacio métrico compacto y (D_n) una sucesión de conjuntos cerrados de M convergente, con respecto a la métrica de Hausdorff, a un cierto conjunto cerrado D. Entonces, si $f : M \to M$ es una aplicación continua, se tiene que la sucesión $\big(f(D_n)\big)$ converge, con respecto a la métrica de Hausdorff, a $f(D)$.*

Del siguiente lema sí desarrollaremos la prueba dado que nos habla de una propiedad más particular de los espacios hiperconvexos.

Lema 3.3.5. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo compacto y A un subconjunto hiperconvexo de M. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A(\varepsilon)$ hiperconvexo en M tal que*

$$N_\varepsilon(A) \subseteq A(\varepsilon) \subseteq N_{2\varepsilon}(A).$$

Prueba. Como veremos, este resultado se deducirá a partir del resultado de R. Sine que aquí hemos presentado como Teorema 1.3.8.

Puesto que A es un conjunto hiperconvexo sabemos que existe

$$r\colon M \longrightarrow A$$

retracción no expansiva. Considerémosla fijada a partir de ahora.

Tomemos el conjunto $A(\varepsilon)$ como el conjunto de los 2ε−puntos fijos de r (Definición 1.3.7). Por el resultado de R. Sine anteriormente referido, se tiene que $A(\varepsilon)$ es un conjunto hiperconvexo. Veamos que es el que buscamos, es decir, veamos que verifica

$$N_\varepsilon(A) \subseteq A(\varepsilon) \subseteq N_{2\varepsilon}(A).$$

La segunda contención es inmediata. Para la primera tomemos x perteneciente a $N_\varepsilon(A)$. Puesto que A es compacto, existe $y \in A$ tal que

$$d(x,y) = \operatorname{dist}(x,A) \leq \varepsilon.$$

Si ahora recordamos que $r(y) = y$, podremos razonar del siguiente modo

$$d\,(x, r(x)) \leq$$
$$\leq d(x,y) + d\,(y, r(x))$$

por el carácter de retracción de r

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon + d\,(r(y), r(x)) \\ &\leq \varepsilon + d(y,x) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo que se deduce la primera contención. □

Nota 3.3.6. En este lema es posible quitar la hipótesis de compacidad sobre M. La demostración en este nuevo caso sólo se diferenciaría de la que acabamos de ofrecer, en que el elemento y tendría que ser escogido dependiendo de un nuevo parámetro que podríamos hacer tan pequeño como quisiéramos y llegar, de este modo, a una conclusión similar a la anterior pero sin utilizar compacidad.

Por fin, un último detalle de notación.

Definición 3.3.7. Sea M un espacio métrico hiperconvexo y $f\colon M \longrightarrow M$ una aplicación. Entonces diremos que una sucesión de subconjuntos de M, (D_n), es una sucesión propia de cierres hiperconvexos de M definidos a partir de f, si (D_n) es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} D_0 &= M, \\ D_n &= h\,(f(D_{n-1}))\,. \end{aligned}$$

donde $h\,(f(D_{n-1}))$ es una realización del cierre hiperconvexo de $f(D_{n-1})$ contenida en D_{n-1} y conteniendo a $f(D_{n-1})$.

El siguiente lema, cuya prueba no incluiremos dado que se apoya en un simple razonamiento de inducción, sirve para probar que siempre existen tales sucesiones de conjuntos.

Lema 3.3.8. *Dado un espacio hiperconvexo M y una aplicación f de M en M, siempre existe una sucesión propia de cierres hiperconvexos de f en M según la definición anterior.*

Pasemos a continuación a probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.9. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo compacto y $f : M \to M$ una aplicación continua. Si (D_n) es una sucesión propia de cierres hiperconvexos de f en M, se tiene que si*

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n,$$

entonces

$$D = \lim_{n \to \infty} D_n$$

con respecto a la métrica de Hausdorff en los subconjuntos cerrados de M, y, además, D es una realización del cierre hiperconvexo de $f(D)$.

Antes de pasar a su demostración hagamos el siguiente comentario.

Nota 3.3.10. Este teorema admite diferentes enunciados y, tal vez, el que hemos dado no es el que lo haga más parecido al resultado de W. A. Kirk. Si lo queremos hacer parecido podríamos haberlo enunciado como que dado un espacio hiperconvexo M y una aplicación continua f de M en M, para todo subconjunto A de M se puede fijar un cierre hiperconvexo mediante una aplicación

$$\begin{aligned} h\colon \mathcal{P}(M) &\longrightarrow \mathcal{P}(M) \\ A &\longmapsto h(A) \end{aligned}$$

pudiéndosele asociar a f la aplicación

$$\overline{f} : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$$

tal que

$$\overline{f}(A) = h\left(f(A)\right)$$

verificándose que si (D_n) es una sucesión definida a semejanza de como se hizo en el resultado dado por W. A. Kirk, entonces $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \lim_{n \to \infty} D_n$ y $D = \overline{f}(D)$.

Notar, además, que si x es un punto fijo de f entonces $x \in D$. Por lo que, tal y como ocurría en el Teorema 3.3.2, este conjunto límite localiza, en cierto sentido, dónde se encuentran los puntos fijos de f.

Prueba del teorema. Puesto que la sucesión (D_n) es una sucesión decreciente de conjuntos en un espacio métrico compacto, por el Lema 3.3.3, se tiene inmediatamente que

$$D = \lim_{n \to \infty} D_n.$$

Demostremos que D es isométrico al cierre hiperconvexo de $f(D)$. Es decir, que para una cierta elección de $h(f(D))$, se tiene que $D = h(f(D))$. Una inclusión se puede conseguir de modo inmediato ya que D es hiperconvexo por ser intersección de una familia decreciente de hiperconvexos, y por la propia definición de los D_n, se tiene que $D \supseteq f(D)$. Por tanto, existe una realización del cierre hiperconvexo de $f(D)$ en M de modo que $D \supseteq h(f(D))$. Supongamos fijada a partir de ahora $h(f(D))$como una realización del cierre hiperconvexo de $f(D)$ verificando que

$$D \supseteq h(f(D)) \supseteq f(D).$$

Falta ver que, en este caso, la primera inclusión es, en realidad, una igualdad.

Para probarlo lo primero que haremos será probar que $h(f(D))$ puede ser visto como límite, siempre según la métrica de Hausdorff en los cerrados de M, de una cierta sucesión de conjuntos isométricos a los $h(f(D_n))$ y, por tanto cierres hiperconvexos, asimismo, de los conjuntos $f(D_n)$, que nosotros denotaremos por $\tilde{h}(f(D_n))$.

Comencemos razonando del siguiente modo. Sabemos que $f(D)$ está contenido en $f(D_0)$, por tanto y puesto que $f(D)$ también lo está en $h\big(f(D)\big)$, se tendrá que

$$\varepsilon_0 = \inf\{\delta \geq 0 : f(D_0) \subseteq N_\delta(h(f(D)))\} \leq H(f(D_0), f(D))$$

además de que

$$f(D_0) \subseteq \bigcap_{\delta > \varepsilon_0} N_\delta(h(f(D))) = N_{\varepsilon_0}(h(f(D))).$$

Por el Lema 3.3.5 sabemos que existe un conjunto $A(\varepsilon_0)$ hiperconvexo tal que

$$N_{\varepsilon_0}(h(f(D))) \subseteq A(\varepsilon_0) \subseteq N_{2\varepsilon_0}(h(f(D))).$$

Por lo tanto podremos fijar un cierre hiperconvexo de $f(D_0)$ contenido en $A(\varepsilon_0)$. Sea pues

$$\tilde{h}(f(D_0)) \subseteq A_{\varepsilon_0} \subseteq N_{2\varepsilon_0}(h(f(D)))$$

dicho cierre hiperconvexo. Obviamente $h(f(D_0))$ y $\tilde{h}(f(D_0))$ son isométricos por tratarse de dos realizaciones, tal vez distintas, del cierre hiperconvexo de un mismo conjunto.

Razonando de igual modo para todo n obtenemos la sucesión $(\tilde{h}(f(D_n)))$ de cierres hiperconvexos de $(f(D_n))$ cumpliendo que

$$\tilde{h}(f(D_n)) \subseteq N_{2\varepsilon_n}(h(f(D))),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y donde

$$\varepsilon_n \leq H(f(D_n), f(D)).$$

Ahora bien, puesto que (D_n) converge en la métrica de Hausdorff a D, por el Lema 3.3.4, también se tendrá que $(f(D_n))$ converge a $f(D)$ y, por tanto, que la sucesión (ε_n) converge a cero cuando n tiende a infinito. Esto será utilizado más adelante en el sentido de que si (x_n) es una sucesión convergente de elementos de M tales que, para todo n, $x_n \in \tilde{h}(f(D_n))$, entonces su límite debe estar en $h(f(D))$.

Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ la isometría

$$i_n : h(f(D_n)) \to \tilde{h}(f(D_n))$$

que existe entre ambos conjuntos en virtud del Lema 2.1.4 coincidiendo con la identidad en $f(D_n)$ y, en particular, en $f(D)$.

Sea (x_m) una sucesión densa en D. Para $m = 1$ se puede considerar la sucesión $(i_n(x_1))$, de la que se puede extraer una subsucesión convergente. Si esta subsucesión se la aplicamos a x_2 podríamos extraer otra subsucesión convergente y así proseguir sucesivamente.

Aplicando el clásico razonamiento de diagonalización, sobre el conjunto de todas las subsucesiones anteriores, obtenemos una cierta subsucesión de índices naturales. Consideremos la subsucesión de isometrías asociadas a estos índices, a la que volveremos a llamar (i_n). Por construcción se tendrá que cada sucesión en n de la forma

$$\{i_n(x_m)\}_{n=1}^{\infty}$$

es convergente cuando n tiende a infinito.

De este modo tenemos definida

$$\begin{aligned} i\colon \{x_m\}_{m=1}^{\infty} &\longrightarrow h(f(D)) \\ x_m &\longmapsto \lim_{n\to\infty} i_n(x_m) \end{aligned}$$

que, tal y como antes se indicó, no sólo todos los límites considerados existen sino que, además, están en $h(f(D))$ ya que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$i_n(x_m) \in \tilde{h}(f(D_n)).$$

Por otra parte, dada la construcción realizada de i, se tendrá que es una isometría sobre su imagen. En consecuencia si la extendemos por densidad a todo D obtenemos

$$i\colon D \longrightarrow h(f(D))$$

inclusión isométrica tal que restringida a $f(D)$ coincide con la identidad. Lo cual, como explicamos a continuación, sirve para concluir la demostración.

Sea, por un lado, la inclusión isométrica dada por i y, por el otro, la inclusión natural de $h(f(D))$ en D, por ser el primero subconjunto del segundo, y que representaremos por j. Consideremos $i \circ j$ y $H = \text{img}(i \circ j)$. Se tiene que

$$i \circ j \colon h(f(D)) \longrightarrow H \subseteq h(f(D))$$

es una isometría.

Pero H contendrá a $f(D)$ ya que tanto i como j son la identidad en $f(D)$. Además H es hiperconvexo por ser isométrico a $h(f(D))$. Luego está entre $f(D)$ y su cierre hiperconvexo, siendo él mismo hiperconvexo. Por lo que $H = h(f(D))$, lo que nos lleva a que la imagen de i es todo $h(f(D))$. Lo cual concluye la demostración. □

Como corolario a este teorema tenemos la siguiente adaptación al caso no compacto.

Corolario 3.3.11. *Sea M un espacio hiperconvexo acotado y $f : M \to M$ una aplicación $k - \phi-$condensante y continua con k menor que uno y ϕ la medida de no compacidad de Hausdorff o Kuratowski indistintamente. Entonces, si (D_n) es la sucesión del teorema, se tiene que si $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ entonces $D = \lim_{n\to\infty} D_n$, D es hiperconvexo y compacto, y D es un cierre hiperconvexo de $f(D)$.*

Prueba. D es hiperconvexo por ser intersección de una familia decreciente de hiperconvexos. Además, por el Lema 2.3.6, es fácil comprobar que $\phi(D_n) \leq k^n\phi(M)$. De donde se deduce por un resultado clásico de la teoría de las medidas de no compacidad que D debe ser compacto.

La demostración de que $D = \lim_{n\to\infty} D_n$ con respecto a la métrica de Hausdorff supone simplemente un pequeño cambio con respecto al caso compacto. Puesto que $D \subseteq D_n$ para todo n, la única posibilidad para que D no sea límite de la sucesión es que para todo $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ exista un elemento x_n de D tal que x_n no esté en $N_\varepsilon(D)$. Puesto que $\phi(D_n)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, se tiene que dicha sucesión debe ser precompacta y, por tanto, tener alguna subsucesión convergente. Aquí es donde surgiría la contradicción, ya que dicho punto límite no podría estar en D.

Por lo demás la demostración del teorema se puede copiar, prácticamente sin ninguna alteración, para demostrar el corolario con la salvedad de que hay que repetir el razonamiento que acabamos de realizar en el párrafo anterior varias veces. □

Nota 3.3.12. Notar que el conjunto D dado por el corolario está en la misma situación con respecto a f que el conjunto M del teorema. Por tanto si volvemos a realizar el mismo proceso sobre D podríamos llegar a un conjunto posiblemente más pequeño que D donde se encuentran localizados los puntos fijos de f.

Capítulo4

Sobre los espacios de funciones continuas

Concluiremos esta memoria con un capítulo dedicado al estudio de ciertas propiedades geométricas en los espacios de funciones continuas. Más concretamente estableceremos una caracterización de los espacios de Banach isométricos a $C(K)$ y $C_0(K)$, el espacio de las funciones continuas definidas sobre un conjunto compacto K y el subespacio de todas aquellas funciones que se anulan en un mismo punto de K, respectivamente, como aquellos espacios para los que se verifica la identidad

$$r_G(A) = r(A) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G),$$

donde $r(A)$, $r_G(A)$ y E^ε representan algunos de los elementos de Chebyshev que introducimos al comienzo de la próxima sección, y A y G son subconjuntos no vacíos del espacio considerado.

El origen de este estudio se encuentra en los trabajos de P. W. Smith y J. D. Ward, y de C. Franchetti y E. W. Cheney que aquí referenciamos como [37] y [10], respectivamente. Inmediatamente anterior e intrínsecamente básico a nuestro trabajo se puede considerar el módulo geométrico introducido por A. Wiśnicki y J. Wośko en [40], así como el concepto de $\aleph_0-$hiperconvexidad. La idea de $\aleph_0-$hiperconvexidad, como veremos más adelante, nos ofrece un nivel intermedio entre la convexidad métrica vista en el primer capítulo y la hiperconvexidad.

Este es un capítulo en el que, como ya anunciamos en la introducción de esta Memoria, debido a la diferente naturaleza de lo que se desarrolla en comparación con lo ya expuesto, necesitará de una sección específica de resultados y definiciones preliminares. Esta será la primera de las tres secciones en que lo hemos dividido. La sección segunda es la central y en ella se recoge el teorema de caracterización para los espacios de funciones continuas. Por último, en vista de que todo lo desarrollado en la sección anterior es válido para espacios de Banach, dedicaremos una tercera sección a estudiar qué ocurre cuando se prescinde de la hipótesis de completitud.

4.1 Notaciones, terminología y resultados previos

Empecemos introduciendo la notación que utilizaremos para referirnos a los Elementos de Chebyshev. Fijemos A y G dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico M, con A acotado. Entonces:

Llamaremos radio de Chebyshev de A, y lo denotaremos como $r(A)$, a

$$r(A) = \inf_{x \in M} \sup_{y \in A} d(x, y).$$

Llamaremos radio de Chebyshev de A con respecto a G, y lo denotaremos como $r_G(A)$, a

$$r_G(A) = \inf_{x \in G} \sup_{y \in A} d(x, y).$$

Llamaremos centro de Chebyshev de A, y lo denotaremos por $E^0(A)$, a

$$E^0(A) = \{x \in M : r_{\{x\}}(A) = r(A)\}.$$

Finalmente, llamaremos ε-centro de Chebyshev de A, y lo denotaremos por $E^\varepsilon(A)$, a

$$E^\varepsilon(A) = \{x \in M : r_{\{x\}}(A) \leq r(A) + \varepsilon\}.$$

Destaquemos el hecho de que, como es bien sabido, puede ocurrir que el centro de Chebyshev de un conjunto sea vacío. Determinar en qué espacios estos centros son no vacíos ha sido objeto de numerosos estudios. Especialmente extensa es la información de la que se dispone para el caso de los espacios de Banach. Así, por ejemplo, sabemos que estos conjuntos no son vacío cuando el espacio es reflexivo. Si el espacio es estrictamente convexo (ver, por ejemplo, [12]) los centros de Chebyshev siempre son conjuntos unitarios. En este mismo sentido pero mucho menos inmediatos, cabe destacar algunos de los resultados dados en las referencias [10, 11, 14]. Particularmente importante para nosotros resultan los que tratan los espacios de funciones continuas.

Teorema 4.1.1. *Sea K un espacio topológico de Hausdorff compacto, y sea $C(K)$ el conjunto de todas las funciones reales y continuas definidas sobre*

K dotado con la norma del máximo. Entonces el centro de Chebyshev de cualquier subconjunto acotado de $C(K)$ es no vacío.

La naturaleza de los resultados que se van a ofrecer en este capítulo exigirá, para una mejor exposición y comprensión de los mismos, familiarizarnos con algunas de las nociones y herramientas más habituales de la Teoría de los Retículos de Banach. Nosotros nos limitaremos a tomar de esta teoría lo estrictamente necesario, siendo muchos los detalles, referentes a una interpretación más puramente reticular del contenido de este capítulo, que no desarrollamos. La referencia que hemos tomado como básica en todo lo relativo a estos conceptos es el tratado " *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*" del autor H. E. Lacey ([28]), en ella se pueden encontrar expuestos con detalle y rigor las definiciones y resultados que pasamos a introducir.

Supongamos que tenemos X un espacio vectorial y $(\leq)$ un una relación de orden parcial vectorial para X (ver [28] para la definición). Dado D un subconjunto no vacío de M se dice que es acotado superiormente (inferiormente) si existe un $x \in X$ tal que $y \leq x$ $(y \geq x)$ para todo y en D. De existir la más pequeña de las cotas superiores (la mayor de la cotas inferiores) se dice que D posee supremo (ínfimo). Cuando D está formado por dos elementos x e y, de existir el supremo (ínfimo) de D, éste se denota como $x \vee y$ $(x \wedge y)$.

Definición 4.1.2. Un espacio vectorial se llama retículo vectorial si está dotado de un orden parcial vectorial tal que $x \wedge y$ existe para todo par de vectores x e y en el espacio vectorial.

Notemos que es obtiene una definición equivalente si, en lugar de exigir que $x \wedge y$ esté en el espacio vectorial, exigimos que sea $x \vee y$ quien esté. Además se denota como $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = (-x) \vee 0$. A partir de estos elementos, se define $|x| = x^+ + x^-$. Si $|x| \wedge |y| = 0$, se dice que x e y son disjuntos.

Definición 4.1.3. Un espacio normado que a la vez es un retículo vectorial se dice retículo de Banach si $||x|| \leq ||y||$ siempre que $|x| \leq |y|$.

Son muchos los distintos tipos de retículos de Banach atendiendo a diferentes vías de clasificación, sin embargo nosotros nos limitaremos a los llamados M espacios y L_1 espacios.

Definición 4.1.4. Un retículo de Banach se llama M espacio (o M espacio abstracto) si $||x + y|| = \max\{||x||, ||y||\}$ siempre que x e y son disjuntos.

Un retículo de Banach se llama L_1 espacio (o L_1 espacio abstracto) si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ siempre que x e y son disjuntos.

Ambos tipos de espacios quedan relacionados por el siguiente teorema.

Teorema 4.1.5. *Sea X un retículo de Banach. Entonces:*

1. *X es un M espacio si, y sólo si, $X^\star$ (su dual topológico) es un L_1 espacio.*

2. *X es un L_1 espacio si, y sólo si, $X^\star$ es un M espacio.*

Los retículos de Banach con los que trabajaremos serán los espacios de funciones continuas y sus subretículos. Por espacio de funciones continuas entenderemos toda colección formada por todas las funciones continuas definidas sobre un espacio de Hausdorff compacto K dotado con la norma del máximo, habitualmente denotado como $C(K)$. Entre sus subretículos, el que más insistentemente trataremos será el de las funciones de $C(K)$ que se anulan en un mismo punto $t_0 \in K$, habitualmente denotado como $C_0(K)$. Por subretículo se entiende cualquier subespacio de un retículo de Banach que, a su vez, es cerrado para la acción de tomar ínfimos de familias finitas de elementos. Un subconjunto D de $C(K)$ se dice que separa puntos si para todo t_1 y t_2, puntos distintos de K, existe un elemento $f \in D$ tal que $f(t_1) \neq f(t_2)$. Antes de continuar, señalemos que un teorema análogo al Teorema 4.1.1 también se verificará para los subretículos del tipo $C_0(K)$.

Los espacios de funciones continuas y los M espacios están relacionados por el siguiente teorema.

Teorema 4.1.6. *Un retículo de Banach es un M espacio si, y sólo si, es isométrico a un subretículo cerrado de $C(K)$ para algún espacio de Hausdorff compacto K. Además, dicho subretículo puede ser escogido de modo que separe los puntos de K.*

Como ya se ha anunciado con anterioridad, el fin último de este capítulo será el de dar un resultado de caracterización de los espacios de funciones continuas. Los siguientes dos teoremas debidos a Kakutani (consultar [28], para más información), sobre la caracterización de los espacios de funciones continuas y sus subretículos, serán una herramienta fundamental.

Teorema 4.1.7. *Si un subretículo cerrado de un espacio de funciones continuas $C(K)$ es tal que separa los puntos de K y contiene la función constante igual a 1, entonces coincide con $C(K)$.*

Teorema 4.1.8. *Sea Y un subespacio lineal cerrado del espacio de funciones continuas dado por $C(K)$. Fijemos como $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las tripletas (t_1, t_2, α) tales que t_1 y t_2 son puntos de K y α es un número positivo verificando que $f(t_1) = \alpha f(t_2)$, para todo $f \in Y$. Entonces Y es un subretículo de $C(K)$ si, y sólo si, Y contiene el conjunto de todas las funciones f de $C(K)$ de tal modo que $f(t_1) = \alpha f(t_2)$ para todas las tripletas (t_1, t_2, α) de $\mathcal{F}$.*

De este teorema destaquemos, a modo de corolario, la consiguiente caracterización de los espacios del tipo $C_0(K)$.

Corolario 4.1.9. *Dado el espacio de funciones continuas $C(K)$, se tendrá que un subretículo suyo es del tipo $C_0(K)$ si, y sólo si, su familia de tripleta asociada coincide con las tripletas de la forma $(t, t, 1)$ para todo $t \in K$ unión con las de la forma (t_0, t_0, α) para un cierto t_0 de K y α un número real positivo cualquiera.*

Prueba. Inmediata a partir del teorema anterior. □

De este modo queda completada la información sobre retículos de Banach necesaria para continuar. En la siguiente definición se da un nuevo concepto de medir distancias entre conjuntos que nada tiene que ver con la que hemos utilizado hasta el momento, esto es, con la métrica de Hausdorff.

Definición 4.1.10. Si M es un espacio métrico y, A y G dos subconjuntos cualquiera del mismo distintos del vacío, denotaremos por $\operatorname{dist}(A, G)$ al ínfimo de todas las distancias entre los puntos de A y G, es decir,

$$\operatorname{dist}(A, G) = \inf_{x \in A} \inf_{y \in G} d(x, y).$$

Mucho de lo que haremos a lo largo de este capítulo tendrá que ver con la cuestión de cuándo la desigualdad ofrecida por el siguiente lema, de inmediata demostración, puede transformarse en igualdad (para más información sobre la misma, consultar [40]).

Lema 4.1.11. *Si A y G son dos subconjuntos no vacíos de un mismo espacio métrico, con A acotado, entonces se tiene que*

$$r_G(A) \leq r(A) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G).$$

Siguiendo los estudios realizados por N. Aronszajn y P. Panitchpakdi en [2], la hiperconvexidad de un espacio métrico se puede graduar del siguiente modo:

Definición 4.1.12. Sean M un espacio métrico y $\aleph$ un número cardinal, entonces se dirá que M es un espacio $\aleph-$hiperconvexo si verifica la propiedad de que para todo subconjunto A de M con cardinal menor que $\aleph$ se tiene que

$$\bigcap_{x\in A} B(x, r_x) \neq \emptyset,$$

siempre que se cumpla la condición de que $r_x + r_y \geq d(x, y)$ para todo par de elementos x e y en A.

Particularmente interesante se ha mostrado en la literatura el caso en que $\aleph$ representa el cardinal de los números naturales, caso que denotaremos por $\aleph_0$. Nos gustaría destacar los magníficos trabajos realizados por Å. Lima ([29]) y J. Lindenstrauss ([30]) en torno al estudio de los espacios normados que disfrutan de algún grado de hiperconvexidad según la definición anterior y otros tipos de propiedades relacionadas con la intersección de bolas. De algunas de ellas haremos uso más adelante.

Otras definiciones relacionadas con la hiperconvexidad de un espacio son:

Definición 4.1.13. Un espacio métrico M se dice $R - \aleph-$hiperconvexo si para cualquier subconjunto suyo A con cardinal menor que $\aleph$, se tiene que

$$\bigcap_{x\in A} B(x, r) \neq \emptyset,$$

siempre que se cumpla la condición de que $2r \geq d(x, y)$ para todo par de puntos x e y en A.

Definición 4.1.14. Un espacio métrico M se dice casi $\aleph-$hiperconvexo o casi $R - \aleph-$hiperconvexo si se verifica que

$$\bigcap_{x\in A} B(x, r_x + \varepsilon) \neq \emptyset,$$

para todo ε positivo en las respectivas definiciones de $\aleph-$hiperconvexidad o $R - \aleph-$hiperconvexidad.

A continuación enunciamos algunos teoremas relacionados con las intersecciones de bolas en los espacios de Banach cuyas pruebas, así como otros resultados relacionados de gran interés y belleza, pueden ser consultadas en las referencias [2, 28, 29, 30, 39].

Teorema 4.1.15. *Un espacio de Banach X es $\aleph_0-$hiperconvexo si, y sólo si, su espacio dual X^* es un L^1 espacio.*

A partir de aquí y lo visto sobre representación de retículos de Banach, es posible relacionar los espacios $\aleph_0$−hiperconvexos con los espacios de funciones continuas mediante el siguiente corolario.

Corolario 4.1.16. *Si X es un espacio de Banach $\aleph_0$−hiperconvexo, entonces es isométrico a un subretículo Y de un espacio de funciones continuas $C(K)$. Además, se puede suponer que dicho subretículo separa los puntos de K.*

Los siguientes resultados garantizan situaciones bajo las cuales se puede concluir que un cierto espacio de Banach es $\aleph_0$−hiperconvexo.

Teorema 4.1.17. *Si un espacio de Banach X es casi $\aleph_0$−hiperconvexo entonces también es $\aleph_0$−hiperconvexo.*

Teorema 4.1.18. *Si un espacio de Banach X es $R-\aleph_0$−hiperconvexo entonces también es $\aleph_0$−hiperconvexo.*

Como una consecuencia de ambos resultados, se tiene

Corolario 4.1.19. *Si un espacio de Banach X es casi $R-\aleph_0$−hiperconvexo entonces también es $\aleph_0$−hiperconvexo.*

El siguiente teorema se puede encontrar en [30].

Teorema 4.1.20. *Si un espacio de Banach es 5-hiperconvexo entonces es $\aleph_0$−hiperconvexo.*

Para finalizar con esta exposición de resultados previos presentaremos los que guardan una relación más inmediata con todo lo que vamos a realizar en sucesivas secciones. Es decir, presentemos los resultados introducidos por A. Wiśnicki y J. Wośko en [40], a partir de los cuales se plantearon las cuestiones que llevaron a desarrollar el presente capítulo.

Definición 4.1.21. Dado M un espacio métrico, se define el módulo $\tilde{\kappa}_M$, como aquella función tal que a cada d, número real positivo, le asocia el supremo de todos los números positivos k tales que existe un número $\alpha \in (0,1)$ verificando que para todo par de puntos x e y en M y para todo número r mayor que cero, existe un punto z de M cumpliendo que $d(z,y) \leq \alpha dr$ y que

$$B(x,r) \cap B(y,kr) \subseteq B(z,r).$$

Una descripción más detallada del módulo, así como su estimación en diferentes espacios, puede ser consultadas en [40]. De momento nosotros sólo destacaremos dos de sus propiedades más inmediatas.

Lema 4.1.22. *Dado un espacio métrico M, se verifica que*

i) $\max\{1, d-1\} \leq \tilde{\kappa}_M(d) \leq d+1$ *para todo d positivo.*

ii) $\tilde{\kappa}_M$ *es una función creciente con respecto a su variable.*

El resultado central de [40] es el siguiente teorema sobre el que volveremos en repetidas ocasiones.

Teorema 4.1.23. *Sean A y G dos subconjuntos no vacíos de un espacio normado X con A acotado. Entonces se verifica que:*

$$r_G(A) \geq r(A)\, \tilde{\kappa}_X \left(\frac{d_r(A)}{r(A)} \right) \qquad \textit{si } r(A) \neq 0,$$

donde

$$d_r(A) = \begin{cases} \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right), & \text{si } E^0(A) \neq \emptyset \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}\left(E^\varepsilon(A), G\right), & \text{si } E^0(A) = \emptyset. \end{cases}$$

A partir de este resultado es fácil regresar a la desigualdad dada por el Lema 4.1.11 para hacerla igualdad, y así aproximarnos a lo que será el problema principal que trataremos de resolver en el este capítulo, a la vez que se muestra la relación existente entre dicha desigualdad y el módulo anteriormente definido.

Corolario 4.1.24. *Sea X un espacio normado tal que $\tilde{\kappa}(d) = d+1$ para todo d positivo. Entonces, si A y G son subconjuntos de X con A acotado y G no vacío, se verifica que*

$$r_G(A) = r(A) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}\left(E^\varepsilon(A), G\right).$$

De nuevo este corolario nos devuelve a los espacios de funciones continuas, ya que según se probó en [40] se verifica que

$$\tilde{\kappa}_{C(K)}(d) = d+1$$

para todo espacio de funciones continuas y $d \in \mathbb{R}^+$. Uniendo este hecho con el corolario anterior se obtienen, como consecuencia, algunos de los resultados ofrecidos por P. W. Smith y J. D. Ward en [37] que, a su vez, también fueron estudiados por C. Franchetti y E. W. Cheney en [10], según los cuales se cumple:

Teorema 4.1.25. *Sea K un espacio topológico de Hausdorff compacto y $C(K)$ el espacio de todas las funciones continuas definidas sobre K dotado de la norma del máximo. Entonces, para todo par de subconjunto A y G de $C(K)$ con A acotado y G no vacío, se tiene que*

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right). \tag{4.1}$$

En principio ambos resultados difieren en cuanto que, según el Corolario 4.1.24, sería necesario tomar un cierto límite. Sin embargo, según el Teorema 4.1.1, en este caso $E^0(A)$ no es vacío, y, por tanto, en el Teorema 4.1.23 vale la expresión

$$r_G(A) \geq r(A)\,\tilde{\kappa}_X\left(\frac{\operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right)}{r(A)}\right),$$

de donde, junto al Lema 4.1.11 y que

$$\operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right) \geq \operatorname{dist}\left(E^\varepsilon(A), G\right)$$

para todo $\varepsilon > 0$, se obtiene que este último teorema es una consecuencia del Teorema 4.1.23. El mismo corolario puede ser reescrito para espacios donde los centros de Chebyshev no son vacíos.

Corolario 4.1.26. *Sea X un espacio normado tal que $\tilde{\kappa}_X(d) = d + 1$ para todo d positivo y los centros de Chebyshev de sus conjuntos acotados son no vacíos. Entonces, si A y G son subconjuntos de X con A acotado y G no vacío, se verifica que*

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right).$$

Concluyamos esta sección anticipando que el objetivo central de lo que nos queda por hacer en esta memoria es caracterizar cuáles son exactamente los espacios de Banach que verifican esta igualdad. Así como estudiar la relación existente entre verificar dicha igualdad, el hecho de que $\tilde{\kappa}$ sea maximal y que el espacio sea del tipo $C(K)$.

4.2 Caracterizando los espacios de funciones continuas

Advirtamos que algunos de los resultados que desarrollaremos en esta sección son susceptibles de ser enunciados en un contexto más puramente reticular. Nosotros buscamos un resultado de caracterización en términos de isometrías, sin embargo también se podría hablar de isometrías lineales y reticulares. De hecho, los resultados de representabilidad que hemos incluido en la sección anterior admiten ser enunciados en términos de isometrías reticulares. No entraremos en este tipo de cuestiones con el fin de centrarnos más en el carácter métrico de todo lo que contamos. Para estudiar las otras diferentes opciones se pueden consultar los trabajos [28, 30].

Una vez hechas estas matizaciones adelantemos lo que será el resultado final de esta sección.

Teorema. *Sean A y G dos subconjuntos no vacíos de un espacio de Banach X, entonces se verifica*

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right),$$

si, y sólo si

$$r_G(A) = r(A) + \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{dist}\left(E^\varepsilon(A), G\right),$$

si, y sólo si, X es isométrico a $C(K)$ ó $C_0(K)$, para algún espacio topológico K de Hausdorff compacto.

Lo primero que haremos será dar una definición equivalente de $\tilde{\kappa}$, válida para espacios normados, algo más simple de usar que la original.

Lema 4.2.1. *Sea X un espacio normado. Entonces para todo d positivo se tiene que $\tilde{\kappa}_X(d)$ coincide con el supremo de todos los números positivos k tales que existe un número $\alpha \in (0,1)$ verificando que para todo par de puntos x e y en X y para todo número r mayor que cero tal que $\|x-y\| \leq dr$, existe un punto z de X cumpliendo que $\|z-y\| \leq \alpha dr$ y que*

$$B(x,r) \cap B(y,kr) \subseteq B(z,r).$$

Prueba. De modo inmediato, al reducir esta nueva definición las posibles parejas de x e y a tomar, tenemos el valor dado por este lema de $\tilde{\kappa}$ es mayor o igual que el ya conocido. Por tanto sólo necesitamos estudiar si también es menor o igual. Para ello fijamos un número $d > 0$ y supongamos que $k > 0$ y $\alpha \in (0,1)$ son tales que para todo x e y puntos de X y $r > 0$ con

$$\|x - y\| \leq dr$$

se tiene que existe un punto z en X tal que $\|z - y\| \leq \alpha dr$ y

$$B(x,r) \cap B(y,kr) \subset B(z,r).$$

Para probar el lema bastará con ver que

$$k \leq \tilde{\kappa}_X(d).$$

Fijemos por tanto x e y en X y $r > 0$ tales que $\|x - y\| > dr$ y veamos que es posible encontrar un elemento z de X tal que $\|z - y\| \leq \alpha dr$ y que

$$B(x,r) \cap B(y,kr) \subset B(z,r).$$

Esto lo conseguiremos mediante un procedimiento inductivo finito. El primer paso de dicho procedimiento consiste en tomar y_1 como un elemento del segmento lineal que une x con y verificando que

$$\|x - y_1\| = dr.$$

Por nuestras hipótesis, se tiene que existe un punto z_1 en X de tal modo que $\|z_1 - y_1\| \leq \alpha dr$ y

$$B(x,r) \cap B(y_1,kr) \subset B(z_1,r).$$

En caso de que y_1 verifique que

$$\|y - y_1\| \leq (1 - \alpha)\, dr,$$

tomamos $y_2 = y$ como último paso del proceso inductivo. En otro caso nos aproximamos a y tomando un nuevo punto y_2 en la recta determinada por los puntos y_1 e y de tal manera que

$$\|y_1 - y_2\| = (1 - \alpha)\, dr.$$

Con esta elección tendríamos que

$$\|z_1 - y_2\| \leq \|z_1 - y_1\| + \|y_1 - y_2\| \leq dr$$

y, por tanto,

$$B(x,r) \cap B(y_2,kr) \subset B(z_1,r) \cap B(y_2,kr) \subset B(z_2,r)$$

para un cierto punto z_2 con $\|z_2 - y_2\| \leq \alpha dr$. Continuando de este modo, y en un número finito de pasos, obtenemos un par de puntos y_n y z_n en X, para un cierto $n \in \mathbb{N}$, verificando que

$$B(x,r) \cap B(y_n,kr) \subset B(z_n,r),$$
$$\|z_n - y_n\| \leq \alpha dr,$$

y que

$$\|y - y_n\| \leq (1 - \alpha)\, dr.$$

Por tanto, tomando $z_n = z$ (con $n = 2$ si es que hubiésemos estado en el primero de los casos considerado), finalizamos la prueba ya que $\|z - y\| \leq \alpha dr$ y

$$B(x, r) \cap B(y, kr) \subset B(z_n, r) \cap B(y, kr) \subset B(z, r).$$

$\square$

Notar, además, que es posible sustituir el parámetro r por la constante 1 de manera completamente inmediata en el lema anterior, aprovechando la linealidad de los espacios normados.

Con el fin de facilitar la nomenclatura en lo que resta de trabajo, introduciremos la siguiente definición.

Definición 4.2.2. Diremos que un espacio métrico M es un espacio de Smith-Ward si verifica

$$r_G(A) = r(A) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G).$$

para todo par de subconjuntos A y G de no vacíos de M, con A acotado.

Nota 4.2.3. Notar que, según el Corolario 4.1.26, la igualdad anterior se transforma en

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right),$$

siempre que $E^0(A)$ sea no vacío y M sea un espacio normado.

Básicamente la única incursión que, en el presente capítulo, realizaremos en el campo de los espacios métricos es el siguiente lema, donde se ve que los espacios métricos hiperconvexos son espacios de Smith-Ward.

Lema 4.2.4. *Sea M un espacio métrico hiperconvexo. Entonces*

$$\tilde{\kappa}_M(d) = d + 1$$

para todo d positivo. Como consecuencia se tiene que

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right),$$

para todo A y G en las condiciones habituales y, por tanto, los espacios métricos hiperconvexos son espacios de Smith-Ward.

Prueba. Para estimar el valor del módulo fijemos d un número real positivo. Debemos probar que para todo $k < d+1$ existe un número $\alpha < 1$ tal que para cada par de puntos x e y de M y $r \in \mathbb{R}$ positivo, es posible encontrar un tercer punto z tal que $d(z,y) \leq \alpha dr$ y que

$$B(x,r) \cap B(y,kr) \subseteq B(z,r).$$

Dado $k < d+1$, fijamos $\alpha < 1$ y tal que $\alpha d + 1 \geq k$. De este modo garantizamos que para todo $v \in B(x,r) \cap B(y,kr)$ se cumple que $d(v,y) \leq \alpha dr + r$ y, por hiperconvexidad, que

$$\left(\bigcap_{v \in B(x,r) \cap B(y,kr)} B(v,r) \right) \bigcap B(y,\alpha dr) \neq \emptyset.$$

Ahora basta tomar z como cualquier elemento de esta intersección para verificar que el módulo es maximal.

Como una primera consecuencia de esto se obtiene, a partir del Teorema 4.1.23, que los espacios de Banach hiperconvexos son de Smith-Ward. Resultado por otra parte ya conocido puesto que estos espacios son espacios de funciones continuas, tal y como se dijo en el primer capítulo. Para poder extender este mismo resultado a los espacios métricos hiperconvexos lo que haremos será inyectar dicho espacio en un ℓ^∞ (Lema 1.1.7). Al considerarlo dentro de este espacio se obtienen las siguientes relaciones entre los centros de Chebyshev cuando $A \subseteq M$:

$$E^{\varepsilon}_{\ell^\infty}(A) \supseteq E^{\varepsilon}_{M}(A),$$

entendiendo que el primero se toma con respecto a ℓ^∞ y es segundo con respecto a M. Para acabar con la demostración de este lema, dado que $r(A)$ es independiente de si vemos A dentro de M o de ℓ^∞ (ver Proposición 1.4.14), probaremos que si $G \subseteq M$ no vacío entonces

$$\operatorname{dist}(E^{\varepsilon}_{\infty}(A), G) = \operatorname{dist}(E^{\varepsilon}_{M}(A), G).$$

Por la inclusión anterior se tiene que

$$\operatorname{dist}(E^{\varepsilon}_{\infty}(A), G) \leq \operatorname{dist}(E^{\varepsilon}_{M}(A), G).$$

Para ver la desigualdad contraria tomemos ρ número real positivo y $x \in G$ de tal modo que

$$E^{\varepsilon}_{\infty}(A) \cap B(x,\rho) \neq \emptyset \tag{4.2}$$

y veamos que la intersección continúa siendo no vacía si escribimos $E^{\varepsilon}_{M}(A)$ en lugar de $E^{\varepsilon}_{\infty}(A)$.

A partir de que (4.2) es no vacío, se tiene que

$$B(x,\rho) \cap B(y, r(A) + \varepsilon) \neq \emptyset$$

en ℓ^{∞} para todo $y \in A$. De donde se obtiene la condición necesaria sobre los radios de las distintas bolas para que la hiperconvexidad de M nos garantice que el conjunto dado por

$$B(x,\rho) \bigcap \left(\bigcap_{y \in A} B(y, r(A) + \varepsilon) \right) \bigcap M$$

es no vacío. Y, por tanto,

$$\operatorname{dist}(E^{\varepsilon}_{\infty}(A), G) \geq \operatorname{dist}(E^{\varepsilon}_{M}(A), G).$$

Por último, el hecho de que los centros de Chebyshev siempre existan en cualquier espacio hiperconvexo nos lleva a garantizar que

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right),$$

para todo A y G en las condiciones habituales. □

Este lema, aparte de ser una fácil aplicación del módulo $\tilde{\kappa}$ al caso hiperconvexo, sirve para establecer una primera relación entre los conceptos de que un espacio sea de Smith-Ward y que disfrute de un cierto grado de hiperconvexidad. De hecho, en el trabajo realizado por A. Wiśnicki y J. Wośko [40], podemos encontrar distintos ejemplos de espacios normados $\aleph_0-$hiperconvexos que son espacios de Smith-Ward. Una relación directa entre ambos conceptos la encontraremos en un teorema que veremos posteriormente. Ahora vamos a estudiar este problema de un modo escalonado, es decir, veremos qué se puede decir en función del grado de hiperconvexidad del que disfruta el espacio. Ya sabemos que si un espacio de Banach es $5-$hiperconvexo entonces es $\aleph_0-$hiperconvexo. Esto nos reduce el problema a estudiar tres casos, a saber: los espacios $3-$hiperconvexos, los $4-$hiperconvexos y los $\aleph_0-$hiperconvexos. Que de $3-$hiperconvexidad no se puede deducir que el espacio sea de Smith-Ward es algo inmediato ya que ser $3-$hiperconvexo es equivalente a ser métricamente convexo y, en consecuencia, todo espacio de Banach es $3-$hiperconvexo. En realidad veremos que si un espacio es de Smith-Ward entonces debe ser $\aleph_0-$hiperconvexo, lo cual nos resuelve el caso de los espacios 4−hiperconvexos, algo menos inmediato que el anterior. Sin embargo no vamos a esperar a tal teorema para verlo, ya que el siguiente ejemplo nos prueba que los espacios 4−hiperconvexos no son, en general, de Smith-Ward.

Ejemplo 4.2.5. Consideremos el espacio $X = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$, que tal y como se ve en [30] este espacio es 4−hiperconvexo pero no $\aleph_0$−hiperconvexo, y sus siguientes dos subconjuntos:

$$A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

y

$$G = \{(1,1,1)\}.$$

Es un ejercicio fácil comprobar que $r(A) = 1$ y que $E^0(A) = \{(0,0,0)\}$. De donde se tiene

$$\begin{aligned} 4 = r(A) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G) > r_G(A) = \\ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G) - r(A) = 3 - 1 = 2, \end{aligned}$$

concluyéndose que un espacio 4−hiperconvexo no $\aleph_0$−hiperconvexo, no es, necesariamente, un espacio de Smith-Ward. Además, haciendo uso de los puntos de A y de G, se puede ver, un tanto sorprendentemente, que el valor de $\tilde{\kappa}_X(d)$ es el menor posible cuando $d \geq 3$, es decir, que en este espacio se cumple que $\tilde{\kappa}_X(d) = d - 1$ cuando $d \geq 3$. Comentemos, para terminar este ejemplo, que no hemos podido resolver si este espacio, así como en general los espacios 4−hiperconvexos no $\aleph_0$−hiperconvexos, verifica que el módulo es minimal también para $d < 3$.

A continuación se ofrece el anunciado teorema que cierra parte de la cuestión estableciendo que todos los espacios de Banach que son de Smith-Ward también son $\aleph_0$−hiperconvexos.

Teorema 4.2.6. *Sea X es un espacio de Banach. Si es de Smith-Ward, entonces es $\aleph_0$−hiperconvexo.*

Prueba. Probemos que X es casi $R - \aleph_0$−hiperconvexo y, en virtud del Corolario 4.1.19, tendremos el resultado buscado. Sea $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una colección de n puntos cualesquiera de X. Considerémoslos ordenados de tal modo que

$$R = \max\{\|x_i - x_j\| \, : 1 \leq i,j \leq n\} = \|x_1 - x_2\|.$$

Llamemos $r = \frac{R}{2}$. Se cumple que r es inferior o igual al radio de Chebyshev de $\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$ para todo $i \in \{3, \cdots, n\}$. Si ahora tomamos $A = \{x_1, x_2\}$ y $G = \{x_3\}$, se obtiene, puesto que X es de Smith-Ward, que

$$r_{\{x_3\}}(\{x_1, x_2\}) = r(\{x_1, x_2\}) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{dist}(E^{\varepsilon}(\{x_1, x_2\}), \{x_3\}).$$

En consecuencia

$$2r \geq r + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{dist}(E^{\varepsilon}(\{x_1, x_2\}), \{x_3\})$$

y, por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{dist}(E^{\varepsilon}(\{x_1, x_2\}), \{x_3\}) \leq r.$$

De donde se deduce que

$$B(x_1, r+\varepsilon) \cap B(x_2, r+\varepsilon) \cap B(x_3, r+\varepsilon) \neq \emptyset$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por lo que

$$r(\{x_1, x_2, x_3\}) = r.$$

Tomemos como siguiente paso $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $G = \{x_4\}$, obteniéndose que

$$B(x_1, r+\varepsilon) \cap B(x_2, r+\varepsilon) \cap B(x_3, r+\varepsilon) \neq \emptyset,$$

para todo ε positivo.

Siguiendo con este proceso, al llegar alpaso enésimo y último, se conseguiría que

$$B(x_1, r+\varepsilon) \cap \cdots \cap B(x_n, r+\varepsilon) \neq \emptyset,$$

para todo ε positivo.

Por tanto, X es casi $R - \aleph_0-$hiperconvexo y, en consecuencia, también $\aleph_0-$hiperconvexo. □

Pasemos ahora a estudiar qué condiciones hay que exigirle a un espacio de Banach $\aleph_0-$hiperconvexo para que sea de Smith-Ward. La siguiente definición resultará esencial para el desarrollo de los teoremas centrales de esta sección.

Definición 4.2.7. Dado Y un subretículo de un espacio $C(K)$, denotaremos por Ω_Y al conjunto formado por aquellos elementos t de K para los cuales existe una función f en Y tal que $f(t) > 0$ y, además, ninguna función de Y alcanza su norma en t.

Dicho conjunto será denotado simplemente por Ω cuando no haya lugar a confusión.

Definición 4.2.8. Dado X un espacio de Banach isométrico a un subretículo de un espacio $C(K)$, diremos que Y es una representación propia débil de X en $C(K)$ si es un subretículo de $C(K)$ isométrico a X y, además, el interior (topológico) de Ω_Y coincide con el conjunto vacío.

El siguiente lema nos garantiza que tales representaciones siempre existen.

Lema 4.2.9. *Si X es un espacio de Banach isométrico a un subretículo de un cierto espacio de funciones continuas $C(K)$, entonces es posible determinar otro espacio de funciones continuas donde poder encontrar una representación propia débil de X.*

Prueba. Sea Y un subretículo de $C(K)$ isométrico a X. Denotemos por $\text{int}(\Omega_Y)$ el interior topológico de Ω_Y en K. Dado que K es compacto, $K\setminus \text{int}(\Omega_Y)$ también es compacto. Definamos la aplicación i como

$$\begin{aligned} i : Y \subset C(K) &\longmapsto C(K \setminus \text{int}(\Omega_Y)) \\ f \quad &\longmapsto f_{|K\setminus \text{int}(\Omega_Y)} \end{aligned}$$

donde $f_{|K\setminus \text{int}(\Omega_Y)}$ denota la restricción de f a $K \setminus \text{int}(\Omega_Y)$.

Por definición la aplicación i es lineal. Pero además será una isometría inyectiva cuando la restringimos al subretículo Y, ya que, por la definición de Ω_Y, se tiene que cada elemento de Y alcanza su norma en $K \setminus \text{int}(\Omega_Y)$. Por tanto, basta fijar K' como $K \setminus \text{int}(\Omega_Y)$ para obtener un espacio de Hausdorff compacto tal que $i(Y)$ es una representación propia débil de X en $C(K')$. $\square$

La siguiente definición nos ayudará a ofrecer una más simple exposición de los resultados.

Definición 4.2.10. Dado X un espacio de Banach isométrico a un subretículo de un espacio $C(K)$, diremos que Y es una representación propia fuerte (o simplemente, representación propia) de X en $C(K)$ si es un subretículo de $C(K)$ isométrico a X tal que separa puntos de K, el interior de Ω_Y en K es vacío y si t_0 es un elemento de K tal que $f(t_0) = 0$ para todo f de Y, entonces el conjunto unitario dado por $\{t_0\}$ no puede ser abierto en K.

Con esta definición pretendemos esencialmente evitar ciertas casuísticas no esenciales que pudiesen presentarse en discusiones posteriores. En general no hay ningún problema en suponer que un subretículo de un espacios de funciones continuas verifica la tercera de las imposiciones para ser una representación propia. En caso contrario podemos inyectarlo dentro del espacio $C(K')$, tomando K' como $K \setminus \{t_0\}$.

El siguiente teorema nos da una primera caracterización de los espacios de Banach que son de Smith-Ward, a la vez que sienta las bases de lo que será el resultado central del capítulo.

Teorema 4.2.11. *En todo espacio de Banach X con dimensión mayor o igual que dos, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\tilde{\kappa}_X(d) = d + 1$ *para todo d positivo.*

(b) *X es un espacio de Smith-Ward.*

(c) *X es un espacio $\aleph_0-$hiperconvexo tal que si Y es una representación propia de X entonces la función $x \wedge k$ pertenece a Y para cualquier elemento positivo x de Y (es decir, $x(t) \geq 0$ para todo t en el dominio de x) y para cualquier número real k verificando*

$$k \in \left(\max\{\|x\| - 1, \min_{t \in K} x(t)\}, \|x\| \right).$$

(d) *Si Y es una representación propia de X, entonces Ω_Y coincide con el conjunto vacío.*

(e) *Si Y es una representación propia de X, entonces la función $x \wedge k$ pertenece a Y para cualquier elemento positivo x de Y y k número real positivo.*

Prueba. (a)$\Longrightarrow$ (b): Esta implicación ya fue probada en el Corolario 4.1.24.

(b)$\Longrightarrow$ (c): Puesto que X es un espacio de Banach y de Smith-Ward, por el Teorema 4.2.6, tenemos que X es un espacio $\aleph_0-$hiperconvexo. Por tanto existe Y un subretículo de un cierto $C(K)$ que separa puntos, isométrico a X (Teorema 4.1.6). Además no hay ningún problema en suponer que Y es una representación propia de X. Denotemos el conjunto Ω_Y simplemente como Ω. Por ser Y una representación propia, Ω tiene interior vacío en K.

Sea x un elemento positivo de Y. No hay ningún problema en suponer que x no es una función constante, ya que, en caso contrario, (c) se tendría de manera inmediata a partir del carácter de espacio vectorial de Y. Destaquemos el subconjunto K_0 de K como el conjunto de todos los $t \in K$ para los cuales existe un elemento $y \in Y$ de modo que $y(t) \neq 0$.

Probemos que toda función definida como $k \wedge x$ está en Y cuando

$$k \in (\max\{d-1, \min_{t \in K} x(t)\}, d),$$

y x es una función positiva de Y no constante.

Sea k un número fijo del intervalo anterior, y consideremos los conjuntos A y G definidos en función de x y k como

$$A = B(x,1) \cap B(0,k+1) \cap Y \quad \text{y} \quad G = \{0\},$$

donde 0 denota la función idénticamente igual a cero.

Para poder aplicar adecuadamente el apartado (b) primero probaremos que $r(A) = 1$ y que $r_G(A) = k+1$.

Lo primero que haremos será probar que para cada

$$t \in (K_0 \setminus \Omega) \cap \{t \in K : x(t) \leq k\}$$

es posible encontrar dos aplicaciones, p_t y q_t, en A de modo que $p_t(t) = x(t) + 1$ y que $q_t(t) = x(t) - 1$.

Veamos que $\big(K_0 \setminus \Omega\big) \cap \{t \in K : x(t) \leq k\}$ es no vacío. El conjunto $K_0 \setminus \Omega$ coincide con K menos la unión de Ω con todos los elementos de K para los que toda función de Y se anula. Puesto que Y es una representación propia de X, por separar los puntos de K, este último conjunto debe ser unitario. Es decir, este último conjunto se reduce a un único punto $\{t_0\}$, no pudiendo ser entorno abierto de sí mismo por la tercera de las propiedades impuestas sobre las representaciones propias. Por otra parte, Ω tiene interior vacío. Por tanto, puesto que K es un espacio topológico de Hausdorff, $\Omega \cup \{t_0\}$ tiene interior vacío. Para finalizar el razonamiento, basta recordar que $\{t \in K : x(t) \leq k\}$ es un conjunto con interior no vacío ya que $k > \min_{t \in K} x(t)$.

Sea $t \in (K_0 \setminus \Omega) \cap \{t \in K : x(t) \leq k\}$. Por estar en $K_0 \setminus \Omega$, existe una función v de Y, con norma uno, tal que $v(t) = 1$. Definimos las funciones $p = v + x$, $q = x - v$ y $w = (k+1)v$.

Consideremos ahora la función p_1 definida como

$$p_1 = p \wedge w,$$

por la relación existente entre la norma de x y k, se tiene que $p_1 \in B(0, k+1) \cap Y$. Si ahora definimos

$$p_2 = p_1 \vee x, \tag{4.3}$$

esta función continúa estando en $B(0, k+1)$, pero ahora, además, también está en $B(x, 1)$. Si recordamos que $t \in \{t \in K : x(t) \leq k\}$ obtenemos que $p_2(t) = x(t) + 1$. Resultando que p_2 es la función que buscamos. Llamemos, por tanto, $p_t = p_2$.

Como q_t basta tomar $q_t = 2x - p_t$. Esta función así definida verifica que $q_t(t) = x(t) - 1$. Falta ver que $q_t \in A$. Para ello debe verificar que $\|q_t - x\| \leq 1$ y $\|q_t\| \leq k+1$. La primera condición se verifica inmediatamente ya que $\|q_t - x\| = \|p_t - x\|$. Falta ver que $\|q_t\| \leq k+1$. Por (4.3), $x - p_t \leq 0$, luego

$$q_t = x + (x - p_t) \leq x.$$

Si además tenemos en cuenta que x es una función positiva y que $x - p_t$ tiene norma uno, podemos concluir que

$$\|q_t\| \leq \max\{1, \|x\|\} \leq k+1,$$

dada la relación existente entre k y la norma de x.

Aunque esta información volverá a ser utilizada más adelante, de momento nos sirve para garantizar que $r(A) = 1$ ya que al menos existe un $t \in K$ y dos funciones, p_t y q_t, en A de modo que $|p_t(t) - q_t(t)| = 2$.

Para calcular el valor de $r_G(A)$ realizaremos un razonamiento parecido justificando que es posible encontrar una función, u_t en A, para cada t del conjunto

$$(K_0 \setminus \Omega) \cap \{t \in K : x(t) \geq k\},$$

tal que $u_t(t) = k+1$.

Por razones análogas a las anteriores, este nuevo conjunto también es no vacío. Sea t fijo en este conjunto. Para determinar u_t tomamos u una función de Y con norma $k+1$ y tal que $u(t) = k+1$. Además fijamos p función de Y en la bola de centro x y radio uno tal que $p(t) = x(t) + 1$.

Sea ahora $u_1 = p \wedge u$, y tomemos $u_2 = u_1 \vee x$. Esta función u_2 verifica estar en A y que $u_2(t) = k+1$. Por tanto basta fijar $u_t = u_2$.

Puesto que al menos existe una función u_t, se tiene que

$$r_G(A) = k+1.$$

Aplicando ahora el apartado (b), tenemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G) = k. \tag{4.4}$$

Para acabar la demostración hagamos $K = K^+ \cup K^-$, donde

$$K^- = \{t \in K : x(t) \leq k\} \quad \text{y} \quad K^+ = \{t \in K : x(t) \geq k\}.$$

Puesto que para todo $t \in (K^- \setminus \Omega) \cap K_0$ existen dos funciones p_t y q_t como antes, se tiene, aprovechando la densidad de $(K^- \setminus \Omega) \cap K_0$ en K^-, que si $z \in E^\varepsilon(A)$ entonces

$$|z(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

para todo $t \in K^-$.

A su vez también sabemos que para cada $t \in (K^+ \setminus \Omega) \cap K_0$ existe una función u_t en A tal que $u_t(t) = k + 1$. Por tanto, haciendo uso de nuevo de la densidad de $(K^+ \setminus \Omega) \cap K_0$ en K^+, obtenemos que si $z \in B(0,k) \cap E^\varepsilon(A)$ entonces $k - z(t) \leq \varepsilon$ para todo $t \in K^+$.

Uniendo ambas informaciones, si $z \in B(0,k) \cap E^\varepsilon(A)$ entonces

$$\|z - \min\{x, k\}\| \leq \varepsilon.$$

Pero, por (4.4), tenemos que para todo ε positivo existe $z \in B(0,k) \cap E^\varepsilon(A)$. De donde, dado la completitud de Y y la arbitrariedad de ε, se deduce (c)

(c)$\Longrightarrow$(d): Debemos probar que $\Omega = \emptyset$. Para ello supongamos que t_0 es un punto de Ω. Veamos en primer lugar que para toda

$$p \in B_Y^+ = \{x \in Y : \|x\| \leq 1 \quad \text{y} \quad x > 0\},$$

se verifica que $p(t_0) = \min_{t \in K} p(t)$. En otro caso podríamos tomar la función w definida como la función mínimo de p y la constante $p(t_0)$, es decir, $w = p \wedge p(t_0)$, llegando así a contradicción con (c) ya que, al alcanzar w su norma en t_0, punto de Ω, esta función no podría estar en Y.

Sea ahora p un elemento de B_Y^+ tal que $p(t_0) > 0$. Puesto que la dimensión de X es mayor o igual que dos, podemos encontrar otro elemento $q \in Y$ linealmente independiente con p. Por la independencia lineal podemos fijar un múltiplo de q, al que también llamaremos q, de modo que existe $t_1 \in K$ tal que $p(t_1) = q(t_1)$ y, sin embargo, $p(t_0) \neq q(t_0)$. Puesto que la función $|p - q|$ es positiva y está en Y, podemos definir w como su múltiplo de modo que $w \in B_Y^+$. Pero w verifica que $w(t_0) > \min_{t \in K} w(t) = 0$, llegándose a contradicción con que existe un $t_0 \in \Omega$ tal que $p(t_0) > 0$. Ahora sólo basta recordar la definición de Ω (Definición 4.2.7) para concluir que es el conjunto vacío.

(d)$\Longrightarrow$(e): Claramente podemos obviar el caso en que $k \geq \|x\|$, ya que tendríamos $x \wedge k = x$. Fijemos, por tanto, x como un elemento positivo de Y y k un elemento cualquiera del intervalo $(0, \|x\|)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ y consideremos $t \in K$.

Si $x(t) = 0$ entonces, por la continuidad de x, existe un entorno de t tal que $x(s) < \varepsilon$ para todo s en dicho entorno.

Si $x(t) > 0$ entonces existe un elemento y_t de Y alcanzando su norma en t y con norma k. En consecuencia, podemos encontrar un entorno de t tal que

$$0 < k - y_t(s) < \varepsilon$$

para todo s en dicho entorno.

De este modo tenemos un recubrimiento de K por entornos abiertos. De dicho recubrimiento extraemos un subrecubrimiento finito. Denotemos por t_i los distintos t asociados a los entornos del subrecubrimiento y definamos la función y como

$$y = x \bigwedge (y_{t_1} \vee \cdots \vee y_{t_k}).$$

Esta función y verifica que $\|y - \min\{x, k\}\| < \varepsilon$ ya que dado cualquier punto s de K, puesto que los y_{t_i} son siempre menores o iguales que k, $y(s) \leq k$. Luego sólo cabe la posibilidad de que $y(s)$ o bien sea igual a $x(s)$, en cuyo caso ya se tendría, o bien que $y(s)$ coincida con el máximo de los $y_{t_i}(s)$, en cuyo caso $0 \leq k - y(s) \leq \varepsilon$ ya que al menos existe un t_j tal que $0 \leq k - x_{t_j}(s) \leq \varepsilon$. Finalmente, (e) se obtiene sin más que considerar la completitud de Y.

(e)$\Longrightarrow$(a): En esta ocasión lo que debemos probar es que $\tilde{\kappa}_X(d) = d + 1$, para todo d positivo.

El caso $d = 0$ se resuelve inmediatamente a partir de la propia definición del módulo. Por tanto, fijemos $d > 0$ y veamos que $\tilde{\kappa}_X(d) \geq d + 1$. Para ello basta tomar k tal que $1 < k < d + 1$, y probar que $\tilde{\kappa}_X(d) \geq k$. Puesto que dicho módulo es invariante por isometrías y resulta mucho más fácil calcular $\tilde{\kappa}_Y$ en lugar de $\tilde{\kappa}_X$, lo que haremos será calcular el valor del módulo en Y.

Consideremos, por tanto, x e y dos elementos de Y. Por estar en un espacio normado no hay ningún problema en fijar y como el elemento nulo de Y, en caso contrario bastaría aplicar una traslación y todo continuaría comportándose igual. Con respecto a x, consideraremos las funciones x^+ $(= x \vee 0)$ y x^- $(= -x \vee 0)$. Definimos z_x como

$$z_x = (k-1) \wedge x^+ - \big((k-1) \wedge x^-\big).$$

La función z_x está en el subretículo Y puesto que se cumple (e). Pero, además, por la construcción realizada este elemento z_x verifica que

$$\|z_x - 0\| \leq k - 1,$$

y

$$B(x, 1) \cap B(0, k) \subset B(z_x, 1).$$

La demostración estará finalizada si somos capaces de encontrar un número $\alpha \in (0,1)$ de tal modo que, sea quien sea x en Y, $\|z_x - 0\|$ sea menor o igual que αd. Pero puesto que este z_x así construido siempre verifica que $\|z_x - 0\| \leq k-1$, basta tomar $\alpha = \dfrac{k-1}{d}$ que, por la relación entre d y k, es menor que uno. $\square$

De este modo pasamos a enunciar el teorema central de este capítulo que viene a cerrar los estudios realizados previamente por C. Franchetti y E. W. Cheney en [10], P. W. Smith y J. D. Ward en [37] o A. Wiśnicki y J. Wośko en [40], y que, aunque consecuencia del Teorema 4.2.11, contrasta con el mismo por tener un enunciado mucho más simple y descriptivo.

Teorema 4.2.12. *Un espacio de Banach X es un espacio de Smith-Ward si, y sólo si, es isométrico a un espacio del tipo $C(K)$ o $C_0(K)$, para algún espacio K de Hausdorff compacto.*

Prueba. La implicación recíproca es una fácil consecuencia del teorema anterior, ya que es inmediato comprobar que ambos espacios verifican el apartado (e) del mismo.

Sin embargo, obtener la implicación directa resultará algo más dificultoso. Supongamos, por tanto, que X es un espacio de Smith-Ward, y consideremos fijada Y la representación propia de X dada por el teorema anterior. Nuestra intención será la de probar que efectivamente Y coincide o bien con todo un espacio de funciones continuas o bien con un subespacio del tipo $C_0(K)$. Fijemos, además, K como el compacto tal que Y es un subretículo de $C(K)$.

Para comenzar a analizar el problema distinguiremos los casos de si existe un punto t_0 en K tal que todas las funciones de Y se anulan en él, o bien si este conjunto es el conjunto vacío. Recordemos que, por ser Y una representación propia de X, de existir un tal t_0 éste es único.

Supongamos que el conjunto de puntos donde se anulan todas las funciones de Y es el vacío. Nuestro propósito en este caso es ver que Y coincide con todo el espacio de funciones continuas. Según el Teorema 4.1.7, basta encontrar una función constante no nula dentro de Y para garantizar que Y es $C(K)$. Para tal finalidad comencemos recordando que el conjunto Ω asociado a Y es vacío. En consecuencia, para cada t de K existe un elemento x_t en el subretículo Y, de tal modo que

$$x_t(t) = \|x_t\| = 1.$$

A partir de aquí, mediante un razonamiento similar ya realizado en el caso (d) implica (e) del teorema anterior, podemos seleccionar una cantidad finita de t_i con unos entornos abiertos asociados recubriendo K de tal modo que tienen asociadas una funciones x_{t_i} verificando que

$$x_{t_i}(s) \geq \frac{1}{2}$$

para todo s en el correspondiente entorno de t_i. Si a partir de estas funciones definimos

$$z = \bigvee_{1\leq i\leq n} x_{t_i},$$

se verificará que

$$z(t) \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } t \in K.$$

Por tanto, y en virtud del teorema anterior, se tiene que la función constantemente igual a $\frac{1}{2}$ está en Y. De donde se deduce que el subretículo Y verifica las hipótesis del Teorema 4.1.7, y esta primera parte de la prueba queda finalizada.

Para concluir la demostración supongamos que existe un elemento t_0 de K tal que $x(t_0) = 0$ para todo x de Y. Denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las tripletas asociadas a Y según el Teorema 4.1.8. Veamos que este conjunto coincide con conjunto de tripletas dadas en el Corolario 4.1.9, es decir, veamos que Y debe ser un espacio del tipo $C_0(K)$. Claramente, se tiene que

$$\mathcal{F} \supseteq \{(t,t,1) : t \in K\} \cup \{(t_0,t_0,\alpha) : \alpha \geq 0\}.$$

Finalizaremos la prueba si vemos que no hay otras tripletas en $\mathcal{F}$ aparte de las ya indicadas.

Supongamos, por tanto, que (t_1,t_2,α) es una tripleta con $t_1 \neq t_2$ y fijemos x como un elemento de Y de tal modo que $x(t_1) > 0$ y $x(t_2) \geq 0$, por las propiedades de subretículo de Y no hay problema en hacer esta suposición. Notemos, además, que , por separar Y los puntos de K, α debe ser distinto de 1. Sea ahora z definido como:

$$z = x \bigwedge \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2}.$$

De nuevo, por el teorema anterior, z está en Y. Resulta una simple comprobación verificar que si la tripleta (t_1,t_2,α) está en $\mathcal{F}$, entonces z verifica que

$$z(t_1) \neq \alpha z(t_2).$$

Llegándose a contradicción con el hecho de que z está en Y. Por tanto tal tripleta no puede estar en $\mathcal{F}$ y, en consecuencia, el subretículo Y debe ser $C_0(K)$. □

Finalizamos esta sección con el siguiente corolario.

Corolario 4.2.13. *Un espacio de Banach X verifica que*

$$r_G(A) = r(A) + \operatorname{dist}\left(E^0(A), G\right),$$

para todo par de subconjuntos suyos A y G en las condiciones habituales, si, y sólo si, es de Smith-Ward.

Prueba. Este corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior y del hecho de que los espacios de Banach de Smith-Ward, a saber, los $C(K)$ y $C_0(K)$, tienen la propiedad, como ya se hizo notar en la primera sección de este capítulo, de que los centros de Chebyshev de sus subconjuntos son no vacíos. Como consecuencia del Corolario 4.1.26 se concluye la prueba del corolario. □

4.3 Estudio del caso normado

En la sección que acabamos de exponer hemos vistos diversos tipos de resultados. Algunos de ellos eran válidos, de un modo natural, para cualquier espacio normado. Si embargo, los más destacados exigían que los espacios considerados fuesen espacios de Banach. En la presente sección nos ocuparemos de estudiar qué ocurre al sustituir la condición de espacio normado por la de Banach en estos resultados. Denotemos, por tanto, X como un espacio de Banach e Y un subespacio lineal del mismo, entendiendo que $\overline{Y}$ denota el cierre topológico de Y en X. Trivialmente se verifica el siguiente lema:

Lema 4.3.1. *Un subespacio Y de un espacio de Banach es de Smith-Ward si, y sólo si, su cierre topológico lo es.*

Resulta claro que la razón por la que este lema es cierto viene dada por la densidad de Y en su cierre, es decir, porque la propiedad de Smith-Ward es invariante por densidad. Más adelante veremos que esto no es algo común a todos los elementos tratados en la sección anterior.

Si ahora recordamos el Teorema 4.2.11, el lema anterior nos permite relacionar la propiedad de Smith-Ward con el módulo $\tilde{\kappa}$ en Y del siguiente modo:

Lema 4.3.2. *Si Y es un subespacio lineal de un espacio de Banach, entonces son equivalentes:*

(a) *Y es un espacio de Smith-Ward.*

(b) $\tilde{\kappa}_{\overline{Y}}(d) = d + 1$, *para todo d positivo.*

Tal vez sorprenda el hecho de que en el apartado (b) de este lema se haya considerado el módulo con respecto a la clausura topológica del espacio y no con respecto al propio espacio. Resolver esta cuestión se reduce a ver si dicho módulo es invariante por densidad, como de hecho ocurre con la propiedad de Smith-Ward. Sin embargo, el siguiente lema muestra que $\tilde{\kappa}$ no es invariante por densidad.

Lema 4.3.3. *En c_0, el espacio de las sucesiones reales convergentes a cero dotado con la norma del supremo, sea el subespacio Y definido como*

$$Y = \left\{ x \in \ell_1 : x_1 = \sum_{i=2}^{+\infty} x_i \right\}.$$

Entonces se cumple que:

(a) *Y es un subespacio denso de c_0. En consecuencia, puesto que c_0 verifica el apartado (e) del Teorema 4.2.11, Y es un espacio de Smith-Ward.*

(b) *Y es un espacio $\aleph_0$−hiperconvexo.*

(c) $\tilde{\kappa}_Y(d) = \max\{1, d-1\}$ *para todo d positivo.*

Prueba. (a): Sea $x \in c_0$, veamos que para cada ε positivo existe $y \in Y$ tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Fijemos n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $|x_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Para $i > n_0$ vamos fijando sucesivamente y_i como un elemento del intervalo $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ hasta que se alcance un momento n_1 para el que

$$\sum_{i=2}^{n_0} x_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} y_i = x_1.$$

Finalmente basta definir y como

$$y = \begin{cases} x_i, & \text{si } 1 \leq i \leq n_0, \\ y_i, & \text{si } n_0 < i \leq n_1, \\ 0, & \text{si } i > n_1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Esta sucesión y es el elemento buscado.

(b): La idea para probar este segundo apartado es similar a la utilizada en (a). Sean $x^1, \cdots, x^n$, n sucesiones en Y, y $r_1, \cdots, r_n$, n números positivos tales que $\|x^i - x^j\| \leq r_i + r_j$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Debemos probar que

$$\bigcap_{i=1}^{n} B(x^i, r_i) \neq \emptyset$$

en Y. Puesto que c_0 es $\aleph_0$−hiperconvexo, podemos fijar $x \in c_0$ en la intersección anterior. A partir de esta sucesión x basta construir otra sucesión y como en el apartado (a) pero fijando, en esta ocasión, n_0 como aquel número natural para el cual se cumple que

$$|x_j^i| \leq \frac{r_{i_0}}{2}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \geq n_0$, donde $r_{i_0} = \min\{r_i : 1 \leq i \leq n\}$.

(c): Fijemos $d \in \mathbb{R}^+$ y $k > \max\{d - 1, 1\}$. Veamos que es posible encontrar un par de sucesiones en Y de tal modo que si z es tal que

$$B(y, k) \cap B(x, 1) \subset B(z, 1),$$

entonces $z = x$. Esto, en particular, conduce a que $\tilde{\kappa}_Y(d) = \max\{1, d - 1\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{d}{n} \leq k - 1$. Tomemos

$$x = \left(d, \frac{d}{n}, (n \text{ veces}), \frac{d}{n}, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$$

e y la sucesión idénticamente igual a cero.

Supongamos que z es una sucesión de Y verificando

$$B(0, k) \cap B(x, 1) \subset B(z, 1).$$

Por las elecciones hechas se cumple que

$$(-k, k) \supseteq (x_i - 1, x_i + 1).$$

para todo $i \geq 2$.

Dado $i \geq 2$ podemos encontrar una sucesión v de Y en $B(y, k) \cap B(x, 1)$ de modo que $v_i = x_i + 1$. Sólo hay que definirlo así en la coordenada i−ésima y completarlo a semejanza de como se hizo en los apartados anteriores para que esté en dicha intersección. De aquí tenemos que z_i debe ser mayor o igual que x_i. Realizando el mismo razonamiento con w tal que $w_i = x_i - 1$, se obtiene que $z_i = x_i$ para todo $i \geq 2$. Finalmente, puesto que z está en Y, z_1 coincide con x_1 y, por tanto, ambas sucesiones son iguales. Por lo que (c) queda probado. □

A partir de este lema se obtiene como corolario el resultada anunciado.

Corolario 4.3.4. *El módulo $\tilde{\kappa}$ no es invariante por densidad.*

Sin embargo, este problema quedará resuelto al redefinir $\tilde{\kappa}_Y$ para cuando Y sea normado no completo, del siguiente modo.

Definición 4.3.5. Sea X un espacio lineal normado, entonces definimos $\tilde{\kappa}'_X(d)$, para d un número positivo, como el supremo de todos los números $k > 0$ de tal modo que existe un número $\alpha \in (0,1)$ tal que para todo $r > 0$, $\varepsilon > 0$ y par de puntos x e y en X, existe un elemento z de X verificando que $\|z - y\| \leq \alpha d r$ y que

$$B(y, kr) \cap B(x, r) \subset B(z, (1 + \varepsilon) r).$$

Nota 4.3.6. Observar que en esta definición el principal cambio introducido con respecto a la Definición 4.1.21 es que $B(y, k) \cap B(x, 1)$ debe estar contenido en $B(z, 1 + \varepsilon)$, y no en $B(z, 1)$ tal y como ocurría en la definición original.

Destaquemos la siguiente relación, inmediata a partir de la definición, de este nuevo módulo con respecto al anterior.

Lema 4.3.7. *En todo espacio normado X se cumple que*

$$\max\{1, d - 1\} \leq \tilde{\kappa}_X(d) \leq \tilde{\kappa}'_X(d) \leq d + 1$$

para todo d positivo.

De modo completamente análogo a como aparece originalmente el Teorema 4.1.23 en [40], se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.3.8. *Sean A y G dos subconjuntos de un espacio normado X, con A acotado y G no vacío. Entonces se cumple que*

$$r_G(A) \geq r(A) \tilde{\kappa}'_X\left(\frac{d'_r(A)}{r(A)}\right), \qquad si \;\; r(A) \neq 0,$$

donde

$$d'_r(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}(E^\varepsilon(A), G)$$

Prueba. Sean A y G los subconjuntos de X dados por el enunciado, y llamemos $r_G(A) = k$. Puesto que X es un espacio normado no hay problema en suponer $r(A) = 1$.

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que

$$k < \tilde{\kappa}'_X \left(d'_r(A)\right).$$

Dado $\eta > 0$ tomamos $0 < \delta \leq \eta$ tal que

$$\operatorname{dist}(E^{2\delta}(A), G) \geq d'_r(A)(1-\eta). \tag{4.6}$$

Puesto que $r_G(A) = k$, podemos fijar $y \in G$ tal que $A \subseteq B(y,(1+\delta)k)$, y $x \in E^{\delta}(A)$. Tomando el r y el ε de la definición de $\tilde{\kappa}'_X$ como $(1+\delta)$ y como $\dfrac{\delta}{1+\delta}$ respectivamente, tenemos que existe un $\alpha \in (0,1)$, independiente de δ, x e y, tal que existe $z \in X$ verificando

$$B(x,1+\delta) \cap B(y,(1+\delta)k) \subseteq B\left(z,(1+\delta)\left(1+\frac{\delta}{1+\delta}\right)\right)$$

y

$$\|z-y\| \leq \alpha d'_r(A)(1+\delta) \leq \alpha d'_r(A)(1+\eta). \tag{4.7}$$

Puesto que $x \in E^{\delta}(A)$, se tiene que

$$A \subseteq B\left(z,(1+\delta)\left(1+\frac{\delta}{1+\delta}\right)\right) = B(z,1+2\delta),$$

por lo que $z \in E^{2\delta}(A)$. Si ahora contrastamos (4.6) y (4.7) llegamos a contradicción ya que el η que aparece en ambas ecuaciones es arbitrario y α es un número fijo menor que uno. □

Aunque, como ya hemos dicho, la demostración de este resultado es análoga a la del Teorema 4.1.23, sin embargo la diferencia a la hora de definir d'_r sí resulta ser esencial, tal y como se puede apreciar en la siguiente nota.

Nota 4.3.9. Retomemos el espacio Y del Lema 4.3.3 para ver que el teorema anterior no sería cierto si hubiésemos tomado d_r tal y como en el Teorema 4.1.23 en vez de d'_r. Dentro de Y, consideremos el par de puntos x e y dados por $x = (3,1,1,1,0,0,\cdots)$ e y el elemento nulo de Y. A partir de estos dos puntos tomamos los conjuntos

$$A = B(x,1) \cap B(y,2)$$

y

$$G = \{y\},$$

Con estas elecciones se puede comprobar, razonando de un modo similar a como se hizo en el Lema 4.3.3, que $E^0(A) = \{x\}$. Por otro lado, a partir de las propiedades señaladas en el Lema 4.3.3 y el teorema que mostramos a continuación, Teorema 4.3.10, tenemos que $\tilde{\kappa}'_Y$ es maximal, y, por tanto, se verifica

$$r_G(A) = 2 < r(A)\tilde{\kappa}'_Y\left(\frac{\operatorname{dist}(E^0(A),G)}{r(A)}\right) = 1 \cdot \tilde{\kappa}'_Y\big(\operatorname{dist}(E^0(A),G)\big) = 4.$$

Para finalizar esta memoria añadamos un par de resultados más referentes al nuevo módulo.

Lema 4.3.10. *La igualdad dada por*

$$\tilde{\kappa}'_Y(d) = \tilde{\kappa}'_{\overline{Y}}(d)$$

es cierta para cualquier espacio normado Y.

Prueba. Esta prueba es inmediata a partir de la definición de $\tilde{\kappa}'$ y la densidad de Y en $\overline{Y}$. $\square$

Teorema 4.3.11. *En todo espacio normado* Y *los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) Y *es un espacio de Smith-Ward.*

(b) *Se verifica que* $\tilde{\kappa}'_Y(d) = d + 1$ *para todo* d *positivo.*

Prueba. (b)$\Longrightarrow$ (a): Esta implicación se resuelve como una consecuencia inmediata del Teorema 4.3.8 y el Lema 4.1.11.

(a)$\Longrightarrow$ (b): Por ser Y un espacio de Smith-Ward, $\overline{Y}$ es un espacio de Banach de Smith-Ward. Por tanto, Y es isométrico a $C(K)$ o $C_0(K)$, para un cierto espacio K de Hausdorff compacto. Luego $\tilde{\kappa}_{\overline{Y}}(d) = d+1$ para todo d positivo. Haciendo uso del Lema 4.3.7 se tiene que $\tilde{\kappa}'_{\overline{Y}}(d) = d + 1$ para todo d positivo. Ahora sólo basta aplicar el Lema 4.3.10 para obtener que (a) implica (b). $\square$

Bibliografía

[1] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potatov, A. E. Rodkina y B. N. Sadovskii, *Mesures of Noncompactness and Condensing Operators*, Operator Theory: Advences and Applivations, **vol. 55**, Birkhäuser Verlag, 1992.

[2] N. Aronszajn y P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 405–439.

[3] J. M. Ayerbe, T. Domínguez y G. López, *Compactness Conditions in Metric Fixed Point Theory*, Operator Theory: Advences and Applivations, **vol. 99**, Birkhäuser Verlag, Basilea 1997.

[4] J. B. Baillon, *Nonexpansive mappings and hyperconvex spaces*, Contemp. Math. **72** (1988), 11–19.

[5] H. Ben-El-Mechaiekh, S. Chebbi y M. Florenzano, *A Leray-Schauder type theorem for approximable maps: a simple proof*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 105–109.

[6] H. Ben-El-Mechaiekh, S. Chebbi, M. Florenzano y J. V. Llinares, *Abstract convexity and fixed points*, Preprint.

[7] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a codomio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Uni. Padova, **24** (1955), 84–92.

[8] T. Domínguez (edit.), *Recent Advances on Metric Fixed Point Theory*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 1996.

[9] J. Dugundji y A. Granas, *Fixed Point Theory*, Polish Scientific Publisher, Warszawa, 1982.

[10] C. Franchetti y E. W. Cheney, *Simultaneous approximation and restricted Chebyshev centers in function spaces*, en Approximation Theory and Applications, 84–92, Academic Press, New York, 1981.

[11] A. Garvaki, *The best possible net and the best possible cross-section of set in a normed space*, Traducido en Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, **39** (1964).

[12] K. Goebel y W. A. Kirk, *Topics on Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambrigde, 1990.

[13] K. Goebel y S. Reich, *Uniformly Convexity, Nonexpansive Mappings, Hyperbolic Geometry*, Marcel Dekker, New York, 1984.

[14] R. B. Holmes, *A Course on Optimization and Best Approximation*, Lecture Notes in Mathematics, **257**, Springer Verlag, New York, 1972.

[15] C. Horvath, *Contractibility and generalized convexity*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), 341–357.

[16] C. Horvath, *Extension and selection theorems in topological spaces with generalized convexity structure*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **2, num. 2** (1993), 251–269.

[17] J. R. Isbell, *Six theorems about injective metric spaces*, Comment. Math. Helvetic, **39** (1964), 439–447.

[18] J. Jaworowski, W. A. Kirk y S. Park, *Antipodal Points and Fixed Points*, Notes of the Series of lectures held at the Seoul National Univesity, 1995.

[19] J. L. Kelley, *Banach sapaces with the extension property*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 323–326.

[20] M. A. Khamsi, *KKM and Ky Fan Theorems in hyperconvex metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **204** (1996), 298–306.

[21] M. A. Khamsi y S. Reich, *Nonexpansive mappings and semigroups in hyperconvex spaces*, Math. Japonica, **3** (1990), 467–471.

[22] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Montly, **72** (1965), 1004–1006.

[23] W. A. Kirk, *Fixed points theorems for nonexpansive mappings satisfying certain boundary conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 143–149.

[40] A. Wiśnicki y J. Wośko, *On relative Hausdorff mesures of noncompactness and relative Chebyshev radii in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2465–2474.

[41] E. Zedler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidlberg, Tokyo, 1986.

RAFAEL ESPÍNOLA GARCÍA
"ESPACIOS HIPERCONVEXOS Y TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO".

APTO CUM LAUDE

POR UNANIMIDAD

6 MARZO 98.

S Pérez

R. Espínola