UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

---

# *ALGUNOS TEOREMAS MÉTRICOS DEL PUNTO FIJO DETERMINÍSTICOS Y ALEATORIOS*



*Memoria presentada por*
*Josefa Lorenzo Ramírez*
*para optar al grado de Doctor*
*en Matemáticas.*

Fdo. J. Lorenzo Ramírez

*Vº Bº del Director:*

Fdo. Dr. D. Tomás Domínguez Benavides
Catedrático Departamento de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla.



EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo. Genaro López Acedo

Sevilla, Mayo 2002

*A mis padres Claudio y Nena,*
*a mis hermanas Lola y Cinta*
*y a mis sobrinos Claudio y Manuel.*

# Índice General

# Introducción

## Generalidades

La Teoría Métrica del Punto Fijo parte del conocido Principio de Contracción de Banach, el cual afirma que "toda contracción de un espacio métrico completo en sí mismo tiene un único punto fijo". Durante muchos años la aportación de resultados a esta teoría estuvo limitada a pequeñas extensiones del teorema de Banach, hasta que en la década de los sesenta, recibe un nuevo impulso procedente de los teoremas de punto fijo establecidos por Browder, Göhde y Kirk para aplicaciones no-expansivas. *Una aplicación $T : C \to C$ con $C$ un subconjunto de un espacio de Banach $X$ es no-expansiva si $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$, para todo $x, y \in C$.*

En 1965, simultáneamente F. Browder y D. Göhde probaron que toda aplicación no-expansiva $T$ definida de un subconjunto $C$ convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach $X$ uniformemente convexo, con imagen en sí mismo, tiene un punto fijo. Este mismo año, W. Kirk [Ki1] observó que la presencia de una propiedad geométrica más débil, llamada estructura normal, garantizaba este mismo resultado en un espacio reflexivo. *Se dice que un espacio de Banach $X$ tiene estructura normal si cualquier subconjunto $A \subset X$ convexo, cerrado, acotado y diametral es unitario.*

A la luz de estos resultados se inicia la búsqueda de condiciones (de tipo geométrico) más generales para el espacio $X$ y para un subconjunto $C$ que aseguren la existencia de punto fijo. Como consecuencia natural surge la siguiente definición:*un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad del punto fijo (FPP) para aplicaciones no-*

*expansivas si cada aplicación no-expansiva $T$ definida en un subconjunto $C$ de $X$ convexo, cerrado y acotado, con imagen en $C$, tiene un punto fijo.*

El ejemplo dado por Kakutani de una aplicación no-expansiva de la bola unidad de $c_0$ en sí misma sin puntos fijos, pone de manifiesto que existen espacios de Banach sin la FPP. El fracaso de la FPP en el ejemplo de Kakutani es una consecuencia de la no compacidad de la bola unidad en la topología débil, pues es sabido que cada aplicación no-expansiva definida en un subconjunto convexo, débil compacto de $c_0$ con imagen en sí mismo tiene punto fijo. Estos hechos sugirieron el estudio de la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas definidas en dominios más restrictivos. *Se dice que un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad débil del punto fijo ($w$-FPP) para aplicaciones no-expansivas si cada aplicación no-expansiva $T$ definida en un subconjunto $C$ de $X$ convexo, débil compacto, con imagen en $C$, tiene un punto fijo.*

Si $X$ es un espacio de Banach dual, también puede considerarse en $X$ la topología débil estrella asociada a la dualidad. En este caso puede definirse la propiedad débil estrella del punto fijo ($w^*$-FPP) sustituyendo simplemente en la definición de la $w$-FPP la condición de compacidad débil por la de compacidad débil estrella.

La cuestión de si todo espacio de Banach tiene la $w$-FPP fue resuelta por Alspach probando que $L_1[0,1]$ no la cumple. Por otro lado, ejemplos sencillos demuestran que el espacio $l_1$ como dual de $c$ y la topología débil estrella $\sigma(l_1, c)$ no tiene la $w^*$-FPP, y sin embargo sí cumple la $w$-FPP como consecuencia de la propiedad de Schur.

Los ejemplos anteriores y la importancia de otras topologías definidas en espacios de Banach, han estimulado el estudio de la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas definidas en subconjuntos compactos con respecto a topologías distintas de la débil ó débil estrella.

Otro aspecto de interés en la teoría clásica de aplicaciones no-expansivas es la investigación de las propiedades de los conjuntos de puntos fijos de estas aplicaciones.

Su origen está en la observación de que si $T : C \to C$ es no-expansiva, donde $C$ es un subconjunto convexo, cerrado de un espacio de Banach $X$ estrictamente convexo, el conjunto de puntos fijos $Fix(T)$ es cerrado y convexo.

En 1969, R. E. Bruck [Br1] anuncia por primera vez la conexión entre los conjuntos de puntos fijos de aplicaciones no-expansivas y los retractos no-expansivos. Pero no es hasta 1973 [Br2] cuando obtiene, bajo hipótesis bastantes generales, la caracterización del conjunto de puntos fijos para tales aplicaciones como retractos no-expansivos. *Un subconjunto $K$ de $C$ es un retracto de $C$ si $K = \emptyset$ ó existe una aplicación continua $R : C \to K$ con $Fix(R) = K$. En este caso se dice que $R$ es una retracción de $C$ en $K$. Si $R$ es no-expansiva, entonces se dice que $K$ es un retracto no-expansivo de $C$.*

En particular prueba que si el espacio $X$ tiene la w-FPP entonces el conjunto de puntos de una aplicación $T : C \to C$ no-expansiva, con $C \subset X$ débilmente compacto y convexo, es un retracto no-expansivo de $C$. Una consecuencia directa de este hecho es la obtención de existencia de punto fijo común para una familia finita y conmutativa de aplicaciones no-expansivas definidas de $C$ en sí mismo y, la estructura de retracto no-expansivo para el conjunto de puntos fijos comunes a ellas. Continuando el estudio de las propiedades de los retractos no-expansivos , en 1974, Bruck [Br3] generaliza este resultado a una familia conmutativa arbitraria de aplicaciones no-expansivas, y de nuevo obtiene estructura de retracto no-expansivo para el conjunto de puntos fijos común.

## Motivación y objetivos

La generalización y extensión de resultados de la teoría de las aplicaciones no-expansivas a otra clase de operadores no lineales (que satisfacen restricciones métricas estrechamente relacionadas con la no-expansividad), han marchado paralelas al desarrollo de la misma. Los temas abordados en la presente Memoria apuntan en esta dirección.

- Siete años después de la publicación del famoso Teorema de Kirk, el propio autor junto con K. Goebel [GK1] introducen el concepto de aplicación asintóticamente no-expansiva: *si $C$ es un subconjunto de un espacio de Banach $X$, una aplicación $T : C \to C$ se denomina asintóticamente no-expansiva si existe una sucesión $\{k_n\}$ de números reales con $\lim_n k_n = 1$ tal que para cada $x, y \in C$ y para todo número natural $n$, $\|T^n(x) - T^n(y)\| \leq k_n \|x - y\|$.*

  Esta clase de aplicaciones, estrictamente más amplia que la de las no-expansivas, tiene interés puesto que tales aplicaciones podrían ser usadas para establecer los límites de la teoría de aplicaciones no-expansivas. Esta apreciación se entiende mejor si tenemos en cuenta que la propiedad débil del punto fijo para aplicaciones no-expansivas implica la misma propiedad para aplicaciones eventualmente no-expansivas, i.e., aplicaciones cuyas iteradas son no-expansivas a partir de una dada. En [GK1], además de encontrarnos con la extensión del resultado de Browder-Göhde a aplicaciones asintóticamente no-expansivas, también contamos con la primera referencia a la estructura de su conjunto de puntos fijos. Concretamente demuestran que el conjunto de puntos fijos es un conjunto cerrado y convexo.

La investigación de problemas relacionados con la existencia de punto fijo para una aplicación asintóticamente no-expansiva ha ido enriqueciéndose en la última década con la aportación de numerosos trabajos. Aunque no se conoce si la $w$-FPP para aplicaciones no-expansivas implica dicha propiedad para aplicaciones asintóticamente no-expansivas, en [KMS] los autores prueban esta implicación para aplicaciones asintóticamente no-expansivas con una iterada no-expansiva. Además resulta que, bajo aquellas condiciones geométricas sobre un espacio de Banach $X$ (estructura normal uniforme, casi convexidad uniforme, condición de Opial uniforme...) que garantizan la existencia de punto fijo para una aplicación $T : C \to C$ asintóticamente no-expansiva, $C \subset X$ convexo y débilmente compacto, se consigue algo más que punto fijo en $C$.

Una mirada detallada de las pruebas de tales resultados revela que, de hecho, se obtiene punto fijo en cada subconjunto $D$ convexo y débil cerrado $C$ verificando que $\omega_T(x) \subseteq D$ para todo $x \in D$, donde

$$\omega_T(x) = \{y \in C : y = w - \lim_k T^{n_k}(x) \text{ para } n_k \to \infty\}.$$

En oposición a los muchos trabajos aparecidos sobre la existencia de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas, no existen en la literatura sobre estas aplicaciones resultados relacionados con las propiedades de sus conjuntos de puntos fijos, más que el mencionado anteriormente en espacios uniformemente convexos. Este hecho y la cuestión planteada por R. Bruck [Br5] acerca de si los conjuntos de puntos fijos para una clase más general de aplicaciones que la de las no-expansivas son retractos, motivaron la idea de plantearnos el siguiente objetivo: bajo aquellas condiciones geométricas sobre un espacio de Banach que garantizan la existencia de punto fijo para una aplicación asintóticamente no-expansiva, probar que el conjunto de puntos fijos de tal aplicación es un retracto (no-expansivo ó no) del dominio de la aplicación. Ante una respuesta afirmativa a esta cuestión, el siguiente paso sería tratar de obtener punto fijo común de una familia conmutativa (arbitraria ó no) de aplicaciones asintóticamente no-expansivas. Estas cuestiones son tratadas en el Capítulo 2 de la Memoria.

- La Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones multivaluadas ha conocido un rápido desarrollo desde la extensión del Principio de Contracción de Banach a contracciones multivaluadas, establecida por S. B. Nadler en 1969 [N]. Algunos teoremas de existencia de punto fijo para aplicaciones no-expansivas univaluadas han sido parcialmente extendidos al caso multivaluado, aunque no existe una versión análoga del famoso Teorema de Kirk para aplicaciones no-expansivas multivaluadas. Si $X$ es un espacio de Banach denotemos por

$CB(X)$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados y acotados de $X$ y por $H$ a la métrica de Hausdorff definida sobre $CB(X)$. *Una aplicación multivaluada* $T : C \longrightarrow CB(X)$, *donde* $C$ *es un subconjunto de* $X$, *es llamada una contracción si existe una constante* $k \in [0, 1)$ *tal que para cada* $x, y \in C$, $H(Tx, Ty) \leq k\|x - y\|$, *y no-expansiva si se toma* $k = 1$ *en la desigualdad anterior. Decimos que* $x \in C$ *es un punto fijo de* $T$ *si* $x$ *pertenece a* $Tx$.

Un resultado básico de existencia de puntos fijos para este tipo de aplicaciones fue dado por T.C. Lim [Lm1], al probar la existencia de punto fijo para una aplicación $T$ no-expansiva definida en un subconjunto $C$ cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach uniformemente convexo, con imagen en los subconjuntos compactos de $C$.

Resultados similares a éste habían sido establecidos por J. Markin en 1968 [M] en el marco de un espacio de Hilbert y por F. Browder [Bd2] para un espacio con función de dualidad débilmente continua. En estos dos casos es supuesto que $T$ toma valores compactos y convexos.

Una versión anterior del Teorema de Lim fue obtenida por E. Lami Dozo en 1973 [La] en un espacio que satisface la condición de Opial.

La prueba original del Teorema de Lim combinaba el método de los centros asintóticos de Edelstein y la inducción transfinita. El estudio de ciertas propiedades del centro asintótico de sucesiones por parte de Goebel, Lim y Kirk llevaron a W. Kirk y a S. Massa en 1990 [KM] a la generalización del Teorema de Lim. El resultado de Kirk-Massa establece que para una aplicación $T$ no-expansiva definida en un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$ con imagen en los subconjuntos compactos y convexos de $C$, la compacidad del centro asintótico de una sucesión con respecto a $C$ implica que $T$ tiene punto fijo. Entre los espacios en los que se verifica que los centros asintóticos de sucesiones son compactos, están los $k$-uniformemente convexos (también los espacios reflexivos uniformemente convexos en cualquier dirección). La conclusión del Teorema de Kirk-Massa también es cierta cuando $C$ es un subconjunto débil* compacto y convexo de $\ell_1$, pues las sucesiones acotadas en $\ell_1$ tienen centros asintóticos compactos con respecto a conjuntos débil* compactos y convexos.

Un ejemplo dado por Kuczumov y Prus [KP] confirma que esta propiedad de los centros asintóticos no se satisface en un espacio casi uniformemente convexo. Así pues, una cuestión abierta durante algún tiempo es la siguiente, ¿ Es cierta la tesis del Teorema de Kirk-Massa en espacios casi uniformemente convexos?. El análisis de la importancia del centro asintótico en este teorema nos llevó al estudio de algunas conexiones entre los centros asintóticos y la geometría de ciertos espacios, incluidos los casi uniformemente convexos, para posteriormente responder parcialmente a esta pregunta y extender el Teorema de Kirk-Massa. La discusión de estos problemas es abordada en el Capítulo 3 de la Memoria.

- Un actual e interesante aspecto del Análisis Funcional No Lineal es el vinculado con el estudio de la existencia de punto fijo aleatorio para un operador estocástico. *Dado un espacio medible* $(\Omega, \Sigma)$ *y un subconjunto* $C$ *de un espacio de Banach* $X$*, diremos que* $T : \Omega \times M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *es un operador estocástico si, para cada elemento* $x \in M$*, el operador* $T(\cdot, x) : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *es medible; se dice que es continuo (contractivo, no-expansivo, uniformemente lipschitziano) si, para cada* $\omega \in \Omega$*, el operador* $T(\omega, \cdot) : M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *es continuo (contractivo, no-expansivo, uniformemente Lipschitziano). Diremos que la aplicación* $x : \Omega \to M$ *es un punto fijo aleatorio de* $T$ *si es medible y* $x(\omega) \in T(\omega, x(\omega))$ *para todo* $\omega \in \Omega$*.*

  En esta dirección, Xu plantea en [X2] si: dado un subconjunto $C$ débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach $X$ con la FPP para aplicaciones no-expansivas, se tiene que $C$ tiene la propiedad del punto fijo para operadores estocásticos no-expansivos RFPP, i.e. si todo operador estocástico no-expansivo $T : \Omega \times C \to C$ tiene punto fijo aleatorio. Cuando $(\Omega, \Sigma)$ es una familia de Suslin (ver definición en [W]), en particular si $(\Omega, \Sigma)$ admite una medida completa y $\sigma$-finita, Tan y Yuan prueban en [TY] que, a un teorema de punto fijo determinístico le corresponde un teorema de punto fijo aleatorio para operadores continuos. Sin embargo, en caso de no ser $(\Omega, \Sigma)$ una familia de Suslin la situación es diferente. De hecho, no se sabe si la FPP para aplicaciones no-expansivas implica la RFPP para operadores estocásticos no-expansivos.

El propósito del último Capítulo de la Memoria será establecer versiones estocásticas de teoremas de punto fijo para operadores uniformemente lipschitzianos así como de operadores asintóticamente no-expansivos, estos últimos no considerados hasta ahora en la teoría de punto fijo de operadores estocásticos.

## Contenidos

En el **Capítulo 1** de la Memoria se recogen los conceptos y resultados conocidos indispensables para la valoración y comprensión de los distintos aspectos de la Teoría Métrica del Punto Fijo que en ella se discuten. Asímismo intentamos dar referencias concretas de los resultados, y ocasionalmente algún ejemplo ó prueba que ilustre la exposición de éstos.

Comenzamos el **Capítulo 2** con la extensión de algunos de los resultados de existencia de punto fijo para aplicaciones de tipo asintóticamente no-expansivas, cuando se consideran dominios compactos relativos a una topología arbitraria. Un primer estudio en este sentido aparece en [Ja2]. El marco de trabajo está constituido por un espacio de Banach $X$ y una topología $\tau$ sobre $X$, Hausdorff de espacio vectorial topológico, tal que los conjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos. Como en las pruebas originales cuando $\tau$ es la topología débil, necesitamos que las funciones de tipo $\tau$-nulas sean secuencialmente semicontinuas inferiormente respecto de $\tau$. Una función de de tipo $\tau$-nula es de la forma $\Phi(x) = \limsup_n \|x_n - x\|$ para todo $x \in X$, donde $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en $X$ y $\tau$-convergente a cero. Los resultados probados son los siguientes:

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach dotado de una topología $\tau$ de e.v.t. tal que sus subconjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos y tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $C$ es un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva. Si $X$ es UCED y tiene la propiedad $\tau$-GGLD, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach separable y $\tau$ una topología de e.v.t. sobre $X$ tal que sus subconjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos y tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $C$ es un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Si $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Al igual que ocurría con la topología débil, bajo las condiciones sobre el espacio $X$ y la topología $\tau$ que garantizan la existencia de punto fijo para una aplicación $T : C \to C$ asintóticamente no-expansiva siendo $C$ un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto, se obtiene punto fijo en cada subconjunto $D$ convexo y $\tau$-secuencialmente cerrado de $C$ que verifica $(P)_\tau$, i.e., que para todo $x \in D$ $\omega_\tau(x) \subseteq D$, donde

$$\omega_\tau(x) = \{y \in C : y = \tau - \lim_k T^{n_k}(x) \text{ para } n_k \to \infty\}.$$

En conexión con este hecho definimos la $(P)_\tau$-propiedad del punto fijo para una aplicación. Se dice que *una aplicación $T : C \to C$ satisface la $(P)_\tau$-propiedad del* *punto fijo* ($(P)_\tau$*-fpp) si* $T$ *tiene un punto fijo en cada subconjunto* $D$ *no vacío,* $\tau$*-secuencialmente cerrado y convexo de* $C$ *que satisface* $(P)_\tau$. Esta propiedad va a ser relevante para probar la existencia de una retracción no-expansiva del dominio de una aplicación asintóticamente no-expansiva en su conjunto de puntos fijos. Así por ejemplo, para la topología débil obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema:**

*Sean* $X$ *un espacio de Banach,* $C$ *un subconjunto débilmente compacto y convexo de* $X$ *y* $T : C \longrightarrow C$ *una aplicación de tipo asintóticamente no-expansivo. Supongamos que una de las siguientes condiciones se satisface:*

*(1)* $X$ *es casi uniformemente convexo.*

*(2)* $X$ *satisface la condición de Opial uniforme y* $T$ *es asintóticamente no-expansiva.*

*(3)* $X$ *tiene estructura normal uniforme y* $T$ *es asintóticamente no-expansiva.*

*(4)* $X$ *es UCED y satisface la propiedad GGLD.*

*Entonces existe una retracción* $T$*-ergódica* $R$ *de* $C$ *en* $Fix(T)$.

Siguiendo la terminología introducida por Bruck [Br4], que $R$ sea una retracción $T$-ergódica significa que verifica:

(i) $R \circ T = R$,

(ii) todo subconjunto débilmente cerrado, convexo y $T$-invariante de $C$ es también $R$-invariante.

El resultado anterior va a ser consecuencia de otro más general en el que la obtención de la retracción $R$ se hará para una topología $\tau$ satisfaciendo las condiciones mencionadas al principio, más débil que la de la norma y para un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto y $\tau$-compacto de $X$ . De este modo, también concluiremos que el conjunto de puntos fijos de una aplicación asintóticamente no-expansiva definida en un subconjunto $C$ acotado, convexo y $clm$-compacto de $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$ con imagen en sí mismo, es un retracto no-expansivo de $C$.

Si a la aplicación $T$ le añadimos que sea asintóticamente regular, es decir, que para cada $x \in C$, $\lim_n \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0$, será suficiente que el espacio satisfaga la GGLD para obtener una retracción $T$-ergódica de $C$ en $Fix(T)$.

Demostrar la existencia de punto fijo común para una familia de aplicaciones asintóticamente no-expansivas va a ser, como en el caso no-expansivo, una consecuencia de las propiedades de la intersección de retractos no-expansivos. El resultado quedará recogido en el siguiente teorema:

**Teorema:**
*Sean $X$ un espacio de Banach y $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$. Supongamos que toda aplicación asintóticamente no-expansiva de $C$ en sí mismo satisface la $(P)_w$-fpp. Entonces para una familia arbitraria conmutativa $\mathcal{G}$ de aplicaciones asintóticamente no-expansivas de $C$ en sí mismo, el conjunto de puntos fijos común de $\mathcal{G}$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$.*

La misma conclusión del teorema se sigue para una familia conmutativa numerable cuando consideramos una topología $\tau$ en las hipótesis anteriores.

Mostrando la utilidad de la existencia de una retracción $T$-ergódica en resultados de convergencia de las iteradas de una aplicación $T$, concluiremos el Capítulo 2.

En el **Capítulo 3** se probarán teoremas de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no-expansivas con rangos contenidos ó no en sus dominios. Dada la importancia del método de los centros asintóticos en la consecución de puntos fijos para este tipo de aplicaciones, comenzaremos este capítulo con la obtención de importantes relaciones entre los centros asintóticos de sucesiones y de redes, y ciertos coeficientes geométricos conocidos.

El entorno de trabajo vendrá dado por un espacio de Banach $X$ y una topología $\tau$ de e.v.t. sobre $X$ tal que la función norma es $\tau$-slsc.

Asociados a las medidas de no compacidad de Hausdorff $\chi$ y de separación $\beta$ se consideran los coeficientes geométricos $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ y $\Delta_{X,\chi,\tau}(\cdot)$ que resultan de la generalización de los módulos de no compacidad definidos para estas medidas. En el caso de que $X$ sea reflexivo y $\tau$ la topología débil, dichos módulos coinciden con los módulos de convexidad no compacta. En el primer resultado del presente Capítulo se dará una caracterización para espacios de Banach que verifican la condición $\tau$-uniforme de Opial en términos del módulo $\Delta_{X,\chi,\tau}(\cdot)$, recogida en el siguiente teorema:

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología sobre $X$ tal que la función norma es $\tau$-slsc. Entonces, $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial si y sólo si* $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) = \lim_{\epsilon\to 1^-} \Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon) = 1.$

Posteriormente ofreceremos un teorema que resultará ser clave para las técnicas manejadas en las pruebas de nuestros resultados de punto fijo para aplicaciones multivaluadas no-expansivas. El enunciado de dicho teorema será el siguiente:

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Consideremos $C$ un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $C$ que es regular con respecto a $C$. Entonces*

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq (1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-))r(C,\{x_n\}).$$

*Además si $X$ satisface la condición de Opial no-estricta con respecto a $\tau$, se tiene que*

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq (1 - \Delta_{X,\chi,\tau}(1^-))r(C,\{x_n\}).$$

(Que la sucesión sea regular con respecto a $C$ significa que todas sus subsucesiones tienen el mismo radio asintótico.)

Como consecuencia, bastará unir los teoremas precedentes para inferir la unicidad del centro asintótico de una sucesión regular en un espacio de Banach que satisface la condición $\tau$-uniforme de Opial. Con un ejemplo justificamos que en el teorema anterior, la hipótesis sobre la regularidad asintótica de la sucesión no puede suprimirse. Continuando con el análisis de dicho teorema y sin olvidar que para una ultra red los radios asintóticos de todas sus subrredes respecto de un conjunto débilmente compacto y convexo coinciden, probaremos un resultado análogo al anterior en términos, esta vez, del módulo de convexidad no-compacta asociado a la medida de no compacidad de Kuratowski $\alpha$.

**Teorema:**
*Sea $C$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ reflexivo y $\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}$ una ultra red acotada en $C$, entonces*

$$r_C(A(C,\{x_\beta\})) \leq (1 - \Delta_{X,\alpha}(1^-))r(C,\{x_\beta\}).$$

La importancia del centro asintótico de una sucesión en la teoría de aplicaciones no-expansivas univaluadas parte del hecho siguiente: si $C$ es un subconjunto de un espacio de Banach $X$ y $\{x_n\} \subset C$ es una sucesión de puntos fijos aproximados de una aplicación $T : C \to C$ no-expansiva, entonces $A(C,\{x_n\})$ es invariante bajo $T$. El resultado que enunciamos a continuación puede ser interpretado como una adaptación de este hecho a aplicaciones no-expansivas multivaluadas, y de igual forma constituirá un punto de partida en las pruebas de nuestros resultados de puntos fijos para esta clase de aplicaciones.

**Proposición:** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, $\tau$-secuencialmente compacto y separable de $X$, $T : C \to K(C)$*

*una aplicación no-expansiva y* $\{x_n\}$ *una sucesión en* $C$ *tal que* $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. *Entonces, existe una subsucesión* $\{z_n\}$ *de* $\{x_n\}$ *de manera que*

$$Tx \cap A \neq \emptyset, \quad \forall x \in A := A(C, \{z_n\}).$$

Con los resultados precedentes ya estaremos en condiciones de demostrar el resultado principal del Capítulo 3:

**Teorema:**

*Sea* $X$ *un espacio de Banach y* $\tau$ *una topología de e.v.t. definida en* $X$*, tal que las funciones de tipo* $\tau$*-nulas son* $\tau$*-slsc. Supongamos que* $C$ *es un subconjunto cerrado, acotado, convexo,* $\tau$*-secuencialmente compacto y separable de* $X$. *Si* $\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-) > 0$ *y* $T : C \rightarrow KC(C)$ *es una aplicación no-expansiva y 1-*$\chi$*-contractiva, entonces* $T$ *tiene un punto fijo.*

*Si* $\tau$ *es la topología débil la condición de separabilidad de* $C$ *no es necesaria.*

En el supuesto de que $\tau$ sea la topología débil obtendremos el corolario siguiente:

**Corolario:**

*Sea* $X$ *un espacio de Banach tal que* $\epsilon_\beta(X) < 1$. *Supongamos que* $C$ *es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de* $X$ *y* $T : C \rightarrow KC(C)$ *es una aplicación no-expansiva y 1-*$\chi$*-contractiva. Entonces* $T$ *tiene un punto fijo.*

Haremos notar que la clase de de los espacios para la que es válido este corolario incluye a los espacios $X$ casi uniformemente convexos, cuya característica de convexidad no compacta $\epsilon_\beta(X)$ es igual a cero. Sin embargo, contrariamente a los resultados precedentes de existencia de punto fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas, necesitamos añadir la $\chi$-contractividad de la aplicación $T$ para obtener punto fijo. A continuación justificaremos que si imponemos a $X$ que además verifique la condición de Opial no-estricta, la $\chi$-contractividad de la aplicación está implícita en la no-expansividad. Este hecho traerá entre otras consecuencias, la descrita en el corolario siguiente:

**Corolario:**

*Sea $X$ un espacio de Banach separable y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $X$ cumple la condición de Opial no-estricta respecto a $\tau$ y $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) > 0$. Si $C$ es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no-expansiva, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Dejaremos claro mediante un ejemplo que el enunciado de este corolario para la topología débil, constituye una generalización del Teorema de Kirk-Massa, en el sentido que no exigimos la compacidad de los centros asintóticos de sucesiones.

Como últimos resultados de este Capítulo, extenderemos el corolario anterior a una aplicación multivaluada con imagen en un espacio más grande que el dominio de dicha aplicación. De nuevo, esto es posible vía la relación antes mencionada entre el centro asintótico de redes y el módulo de convexidad no-compacta $\Delta_{X,\alpha}(\cdot)$.

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\alpha(X) < 1$ y $C$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $X$. Si $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva que satisface*

$$Tx \subset I_C(x), \ \forall x \in C,$$

*entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Para finalizar, en el **Capítulo 4** se establecerán teoremas de punto fijo aleatorio de operadores uniformemente Lipschitzianos.

En la primera sección daremos la siguiente versión estocástica de un resultado de T. Domínguez [Do] para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas:

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach, $C$ un subconjunto cerrado , acotado, convexo y separable de $X$ y $T : \Omega \times C \to C$ un operador estocástico k-uniformemente Lipschitziano. Si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$k(\omega) \leq c < \frac{1 + \sqrt{1 + 4N(X)(\kappa_0(X) - 1)}}{2}$$

*para todo $\omega \in \Omega$, entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

Las constantes $\kappa_0(X)$ y $N(X)$ son respectivamente, la constante de Lifshitz y el coeficiente de estructura normal del espacio de Banach $X$. En un espacio de Hilbert el valor de ambas constantes coincide y es $\sqrt{2}$, deduciéndose que este teorema proporciona una cota para la existencia de punto fijo aleatorio de operadores uniformemente Lipschitzianos, mejor que la dada por la versión estocástica, probada por Xu [X4], del teorema de Casini-Maluta.

Nuestro teorema además es una versión estocástica del teorema de Lipschitz [Li] para espacios de Banach. Concluiremos la sección, considerando los espacios de James (isomorfos a $\ell_2$) para diferenciar el teorema anterior del resultado de [X4].

En la segunda y última sección daremos las versiones estocásticas de dos teoremas de punto fijo determinísticos para aplicaciones asintóticamente no-expansivas. En el primer resultado se demostrará existencia de punto fijo aleatorio para estas aplicaciones en espacios de Banach con característica de convexidad menor que uno.

**Teorema:**

*Sea $C$ un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de un espacio de Banach $X$ para el cual $\epsilon_0(X) < 1$, y $T : \Omega \times C \to C$ un operador estocástico asintóticamente no-expansivo. Entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

La prueba será de carácter constructivo y, amén de usar el correspondiente resultado determinista [Ki3] recurriremos al método de los centros asintóticos de localización de puntos fijos. Esto último es factible gracias a la relación existente entre el centro asintótico de una sucesión y la característica de convexidad de un espacio de Banach [GK2], expresada por la desigualdad: diam $A(C, \{x_n\}) \leq \epsilon_0(X) r(C, \{x_n\})$, donde $C$ es un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach $X$ y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $X$.

El último resultado de la Memoria se corresponde con la versión estocástica de un resultado de [KX], cuya prueba no precisará de la existencia de punto fijo determinístico para el operador estocástico.

**Teorema:**

*Sea $X$ un espacio de Banach UCED que satisface la propiedad GGLD. Sea $C$ un subconjunto no vacío, débilmente compacto, convexo y separable de $X$. Si $T : \Omega \times C \to C$ es un operador estocástico asintóticamente no-expansivo, entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

## Problemas abiertos

Durante el tiempo que hemos trabajado en las aportaciones que han permitido elaborar esta Memoria, han ido apareciendo diversos problemas relacionados estrechamente con los resultados obtenidos y que no hemos conseguido resolver hasta el momento. Finalizaremos esta introducción comentando brevemente algunos de estos problemas, sobre los que pretendemos seguir nuestra investigación.

- Sea $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach $X$ y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Como ya hemos comentado, de aquellas hipótesis sobre el espacio $X$ que aseguran la existencia de punto fijo para $T$ se deduce la $(P)_w$-fpp para $T$. Este hecho nos lleva a plantearnos la posible equivalencia entre que el espacio $X$ tenga la $w$-FPP (ó menos general que tenga estructura normal) con que cada aplicación $T$ no-expansiva definida como antes tenga la $(P)_w$-fpp.

- Un problema ya planteado por R. Bruck [Br5] es el estudio de la estructura del conjunto de puntos fijos de una aplicación $k$-uniformemente Lipschitziana. Si pudiera probarse que este conjunto es un retracto $k$-lipschitziano podríamos intentar aplicarlo para probar teoremas de puntos fijos comunes para operadores $k$-uniformemente Lipschitzianos conmutantes. La mayor dificultad que encierra la resolución de este problema está en el hecho de que la composición de dos operadores conmutantes $k$-uniformemente Lipschitzianos no es $k$-uniformemente Lipschitziano sino $k^2$-uniformemente Lipschitziano.

- Para dar una extensión completa del Teorema de Kirk-Massa sería conveniente eliminar la 1-$\chi$-contractividad de la aplicación en el Teorema 3.2.4 de la Memoria. Pensamos que hay dos caminos alternativos para conseguirlo. El primero sería probar que las aplicaciones multivaluadas no-expansivas son 1-$\chi$-contractivas (ó al menos 1-$\alpha$-contractivas). El segundo podría ser la obtención de sucesiones de puntos fijos aproximados a través de un teorema métrico (esto es, una posibler extensión del Teorema de Nadler al caso de aplicaciones cuyas imágenes no están en $2^C$) en lugar de un teorema de tipo topológico como es el Teorema 3.2.3 [D2] usado en nuestra demostración.

- Otra cuestión planteada es la obtención de teoremas de punto fijo aleatorio para aplicaciones no-expansivas en el marco de un espacio de Banach con característica de convexidad menor que uno (respecto de cualquiera de las medidas de no compacidad $\alpha$, $\beta$ y $\chi$), e igualmente dar la versión estocástica para aplicaciones asintóticamente no-expansivas del resultado de Xu [X3], en espacios casi uniformemente convexos. Hemos intentado la resolución de estos problemas usando el método de los centros asintóticos dadas las relaciones que establecemos en esta Memoria entre los centros asintóticos de sucesiones ó de redes y los espacios antes aludidos. El problema que encontramos en las demostraciones estocásticas es que no podemos considerar sucesiones regulares ni ultra redes, pues sus límites pueden ser no medibles.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este primer capítulo de la Memoria se recoge la información que consideramos necesaria para la valoración y comprensión de los distintos aspectos de la Teoría Métrica del Punto Fijo que en ella se discuten. En algunas secciones, paralelamente a la introducción de conceptos y resultados conocidos a los diferentes temas, haremos una revisión histórica del desarrollo de éstos. Ocasionalmente, recurriremos a ejemplos y pruebas sencillas de algunos resultados, que sirvan al lector como muestras aclaratorias de lo que aquí se expone.

Las dos primeras secciones contienen los resultados fundamentales sobre la estructura de retracto del conjunto de puntos fijos de una aplicación no-expansiva en espacios de Banach y sus interesantes consecuencias, usando como referencia principal el trabajo de R. Bruck ([Br3]) *"A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings"*.

En la tercera sección introducimos el concepto de aplicación asintóticamente no-expansiva y de aquellas condiciones geométricas sobre un espacio de Banach que garantizan la existencia de punto fijo para esta clase de aplicaciones.

La cuarta sección está dedicada a presentar las definiciones y propiedades de algunas medidas de no compacidad así como su utilidad en la definición de propiedades geométricas de espacios de Banach con aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo, tales como los módulos de convexidad no compacta.

Las nociones y resultados acerca del centro asintótico de sucesiones y de redes serán tratados en la quinta sección.

Para terminar, en la sección sexta se introducen las aplicaciones multivaluadas y se hace una breve exposición de los teoremas clásicos de punto fijo para la subclase de las aplicaciones multivaluadas no-expansivas.

## 1.1 Estructura del conjunto de puntos fijos de aplicaciones no-expansivas

Consideremos $X$ un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y $C$ un subconjunto de $X$.

**Definición 1.1.1.** *Una aplicación $T : C \to C$ se dice no-expansiva si*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|,$$

*para todo $x, y \in C$.*

El estudio de las aplicaciones no-expansivas en el marco de la Teoría Métrica del punto Fijo aborda, entre otras, la siguiente cuestión: dada una aplicación no-expansiva $T : C \to C$, si $Fix(T) := \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$, ¿cuál es la estructura de $Fix(T)$?.

Supongamos que $C$ es un conjunto cerrado y convexo. Puesto que una aplicación no-expansiva es continua, la primera información que obtenemos es que $Fix(T)$ es un conjunto cerrado.Si además $X$ es un espacio estrictamente convexo, i.e. la esfera unidad (o cualquier esfera ) de $X$ no contiene segmentos lineales, entonces no es difícil verificar que $Fix(T)$ es, además, un conjunto convexo (ver [GK2]). Aunque en espacios no estrictamente convexos, estos conjuntos no son necesariamente convexos, para una amplia gama de espacios de Banach son métricamente convexos (ver definición y más detalles en [GK2] y [Br2]).

Otra propiedad interesante del conjunto de puntos fijos involucra la noción de retracción.

**Definición 1.1.2.** *Un subconjunto $K$ de $C$ es un retracto de $C$ si $K = \emptyset$ ó existe una aplicación continua $R : C \to K$ con $Fix(R) = K$. En este caso se dice que $R$ es una retracción de $C$ en $K$. Si $R$ es no-expansiva, entonces se dice que $K$ es un retracto no-expansivo de $C$.*

En 1969, R.E. Bruck [Br1] anuncia por primera vez la conexión entre los conjuntos de puntos fijos de aplicaciones no-expansivas y los retractos no-expansivos. Pero no es hasta 1973 cuando obtiene, bajo hipótesis bastantes generales, la caracterización del conjunto de puntos fijos para tales aplicaciones como retractos no-expansivos.

**Definición 1.1.3.** *Se dice que $C$ tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas (FPP) si toda aplicación no-expansiva $T : C \to C$ tiene un punto fijo. El conjunto $C$ tiene la propiedad hereditaria del punto fijo (HFPP) para aplicaciones no-expansivas si toda aplicación no-expansiva $T : C \to C$ tiene un punto fijo en cada subconjunto no vacío cerrado, acotado, convexo y $T$-invariante de $C$.*

**Teorema 1.1.1.** ([Br2]) *Sea $C$ un subconjunto no vacío débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach $X$. Si $C$ tiene la (HFPP) y $T : C \to C$ es una aplicación no-expansiva, entonces $Fix(T)$ es un retracto (no vacío) no-expansivo de $C$.*

En particular, si el espacio $X$ tiene la w-FPP, esto es, si todos sus subconjuntos débilmente compactos y convexos tienen la (FPP), la conclusión de este teorema es válida.

Como consecuencia del Teorema 1.1.1, puede obtenerse de forma inmediata otro resultado de existencia de punto fijo.

**Corolario 1.1.1.** *Sea $C$ un subconjunto no vacío, débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach $X$. Supongamos que $C$ tiene la (HFPP) y $T, S : C \rightarrow C$ son dos aplicaciones no-expansivas que conmutan entre sí, entonces $Fix(T) \cap Fix(S) \neq \emptyset$.*

**Demostración:**

Observemos que si $x \in Fix(T)$, entonces $TSx = STx = Sx$, i.e. $S(Fix(T)) \subset Fix(T)$. En vista del Teorema 1.1.1, existe $R : C \rightarrow Fix(T)$ retracción no-expansiva, y puesto que $S \circ R$ es no-expansiva, por hipótesis $Fix(S \circ R) \neq \emptyset$. Si $x \in Fix(S \circ R)$, entonces $x \in Fix(T)$ y por tanto $Rx = x$. Luego $x = SRx = Sx$ y $x \in Fix(S)$. Así pues, $Fix(S \circ R) = Fix(T) \cap Fix(S)$. Esto prueba que $Fix(T) \cap Fix(S) \neq \emptyset$ (y también que es retracto no-expansivo de $C$). ∎

Obsérvese que la tesis del Corolario 1.1.1 sigue siendo válida para una familia finita conmutativa de aplicaciones no-expansivas, sin más que aplicar hipótesis de inducción.

El estudio de las propiedades de los retractos no-expansivos lleva a R.E. Bruck, en 1974, a dar con un profundo y relativamente definitivo resultado, que establece la existencia de punto fijo común para una familia conmutativa arbitraria de aplicaciones no-expansivas.

**Teorema 1.1.2.** ([Br3]) *Sea $C$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ y supongamos que $C$ es débilmente compacto ó acotado y* *separable. Supongamos también que $C$ tiene la (HFPP). Entonces para cualquier familia conmutativa $\mathcal{F}$ de aplicaciones no-expansivas de $C$ en sí mismo, el conjunto de puntos fijos común de $\mathcal{F}$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$.*

Quisiéramos destacar uno de los resultados esenciales del que se deriva el anterior Teorema de Bruck, y al que encontraremos aplicación en el Capítulo II.

**Lema 1.1.1.** *Sea $C$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ y supongamos que $C$ es débilmente compacto ó acotado y separable. Supongamos también que $C$ tiene la (HFPP). Entonces, para cualquier familia $\mathcal{F}$ de retractos no vacíos y no-expansivos de $C$, dirigida por la inclusión de conjuntos, $H = \bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$.*

Este hecho, para el caso separable, es una consecuencia inmediata de otro más sorprendente relacionado con las propiedades de los retractos.

**Lema 1.1.2.** *Supongamos que $C$ es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$ y $\{F_n\}$ una sucesión descendente de retractos no-expansivos no vacíos de $C$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es el conjunto de puntos fijos de alguna aplicación no-expansiva $r : C \to C$.*

Si bien el Teorema de Bruck es bastante general, la suposición (HFPP) limita su aplicación, incluso en el caso separable. En efecto, si $C$ es la bola unidad de $\ell_1$, el operador $T : C \to C$ definido por $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ es no-expansivo y $Fix(T) = \{0\}$ que es obviamente un retracto no-expansivo de $C$; sin embargo $T$ no tiene punto fijo en el siguiente subconjunto cerrado y convexo de $C$:

$$K = \{x = (x_1, x_2, ...) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}.$$

Aunque el conjunto de puntos fijos de una aplicación sea no vacío, no es necesariamente un retracto no-expansivo. Por ejemplo, si consideramos $B_{c_o}$ la bola unidad del espacio $c_o$ y $T : B_{c_o} \rightarrow B_{c_o}$ definida por $T(x_1, x_2, ...) = (x_1, 1 - |x_1|, x_2, ...)$ es no-expansiva y $Fix(T) = \{e_1, -e_1\}$ con $e_1 = (1, 0, ..)$ que no es retracto no-expansivo de $B_{c_o}$.

La aparición de estos trabajos de Bruck han conducido a varios autores al descubrimiento de otras conexiones entre aplicaciones no-expansivas y retractos no-expansivos (ver [B3] y [Ki4]), particularmente en el marco de espacios de Banach con propiedades del punto fijo para topologías distintas de la débil.

Una ligera modificación de la prueba del Teorema 1.1.1, permite a W.A. Kirk demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.3.** ([Ki4]) *Sea $C$ un subconjunto no vacío $\tau$-compacto de un espacio de Banach $X$ cuya bola unidad es $\tau$-cerrada relativa a una topología $\tau$ de Hausdorff lineal sobre $X$. Supongamos que $\mathcal{G}$ es una familia de aplicaciones no-expansivas de $C$ en sí mismo y que $A$ es el conjunto de puntos fijos común de $\mathcal{G}$. Si $A$ intersecta a todo subconjunto acotado, $\tau$-cerrado y $\mathcal{G}$-invariante de $C$, entonces $A$ es un retracto no-expansivo de $C$.*

El espacio $\ell_1$ tiene la propiedad débil estrella del punto fijo ($w^*$-FPP) cuando consideramos como predual el espacio $c_0$, es decir toda aplicación no-expansiva definida de un subconjunto débil estrella compacto y convexo, con imagen en sí mismo, tiene punto fijo. Este teorema concluye, además que su conjunto de puntos fijos es un retracto no-expansivo. En general decimos que $X$ tiene la $\tau$ propiedad del punto fijo ($\tau$-FPP) si para toda aplicación no-expansiva definida de un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto y convexo de $X$ en sí mismo existe un punto fijo. Puesto que $L_1(\mu)$ tiene la $\tau$-FPP cuando $\tau$ es la topología de la convergencia local en medida ( [Le]), otra vez obtenemos que en esta situación, el conjunto de puntos fijos de una aplicación no-expansiva $T : C \rightarrow C$ es un retracto no-expansivo de $C$,

siendo $C$ un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $L_1(\mu)$
.

## 1.2 Teoremas Ergódicos No Lineales

R. Bruck [Br5] llama al Teorema 1.1.1 un teorema ergódico no lineal. Para entender esta terminología vamos a recordar algunos teoremas de tipo ergódico. Comencemos con el Teorema de la Media Ergódica (MET) dado en 1941 por Yoshida y Kakutani [YK] para operadores lineales.

**Definición 1.2.1.** *Sea un espacio de Banach $X$ y $C$ un subconjunto de $X$. Una aplicación se denomina uniformemente Lipschitziana si existe una constante $k$ tal que*

$$|T^n| = \sup\Big\{\frac{\|T^n x - T^n y\|}{\|x-y\|} : x, y \in C, x \neq y\Big\} \leq k,$$

*para cada $n \in \mathbb{N}$.*

**Teorema 1.2.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal tal que $|T^n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cierta constante $k$. Si para cada $x \in X$ la sucesión de las medias de Cesaro $S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} T^k x$ contiene una subsucesión débilmente convergente ( en particular si $X$ es reflexivo y $T$ acotado ó $T(X)$ es débilmente compacto), entonces $S_n(x)$ converge en sentido fuerte para todo $x \in X$.*

Si para cada $x \in X$ denotamos por $P(x) = \lim_n S_n(x)$, se deduce fácilmente que $P$ es una proyección sobre $Fix(T)$, $|P| \leq k$ y $PT = TP = P$. En particular, $Fix(T)$ es un retracto $k$-lipschitziano de $X$.

Nos planteamos si algunas de las propiedades que verifica $P$ se mantendrá para $T$ no lineal, definida en un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$.

**Ejemplo 1.2.1.**

Sea $a \in (0,1)$ y consideremos el conjunto $C = C_1 \cup C_2$ donde

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad ax \leq y \leq 1\},$$

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, \quad -ax \leq y \leq 1\}.$$

Denotamos por $P_1$ la proyección vertical sobre la recta $y = ax$, por $P_2$ la proyección vertical sobre $y = -ax$ y por $S$ la simetría axial de eje el de ordenadas. Finalmente, definimos $Tx = SP_1x$ si $x \in C_1$ y $Tx = SP_2x$ si $x \in C_2$. Es claro que $Fix(T) = \{(0,0)\}$ y que la órbita de $T$ en $(1,a)$ (iteradas de $T$ en $(1,a)$) es el conjunto $\{(1,a),(-1,a)\}$. Si consideramos $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ es fácil comprobar que $T$ es $\sqrt{1+a^2}$-uniformemente lipschitziana. Así el MET no se cumple, pues las medias de Cesaro de $T$ en $x = (1,a)$ son $S_{2n}(x) = (0,a)$ y $S_{2n+1} = (\frac{1}{2n+1}, a)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ que convergen a $(0,a)$ y no al punto fijo de $T$. Por tanto, el MET no puede ser extendido a aplicaciones $k$-uniformemente lipschtziana para $k > 1$. ∎

Sin embargo, en un espacio de Hilbert, Baillon [B1] dio un Teorema de la Media Ergódica no Lineal para aplicaciones no-expansivas(NMET).

**Teorema 1.2.2.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $C \subseteq H$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces, para cualquier $x \in C$, $S_n(x)$ converge débilmente. Además*

$$R(x) := w - \lim_n S_n(x)$$

*es una retracción no-expansiva de $C$ sobre $Fix(T)$ que verifica $RT = TR = R$ y $R(x) \in \overline{co}(T^n x : n \geq 0)$.*

Este teorema fue extendido por el mismo autor [B2] a los espacios $L_p$ $(1 < p < \infty)$ y a espacios uniformemente convexos con norma Fréchet diferenciable por Bruck [Br4] y Reich [R2],[R4].

Notemos que un teorema del tipo anterior puede entenderse como un resultado de convergencia de iteradas. Por ejemplo, si $int(Fix(T)) \neq \emptyset$, bajo ciertas condiciones sobre el espacio $X$, por ejemplo que sea uniformemente convexo, se obtiene $\lim_n T^n x = p \in Fix(T)$. Luego si se verifica el NMET $w - \lim_n S_n(x) \in Fix(T)$ puede interpretarse como una casi-convergencia de las iteradas de $T$.

Para un espacio de Banach arbitrario no puede obtenerse una retracción que satisfaga las mismas propiedades que la obtenida en el NMET.

**Ejemplo 1.2.2.**

Si consideramos en $\mathbb{R}^2$ la norma del supremo la aplicación $T : C \to C$ del Ejemplo 1.2.1 es ahora no-expansiva. Tampoco el NMET es válido para este espacio. ∎

La demostración del Teorema 1.1.1 tal como aparece en [Br4] establece, sin embargo, que la retracción no-expansiva de $C$ en $Fix(T)$ cumple además:

(i) RT=R,

(ii) Todo subconjunto cerrado, convexo y $T$-invariante de $C$ es también $R$-invariante,

y acuerda en llamarla una "retracción $T$-ergódica".

## 1.3 Aplicaciones asintóticamente no-expansivas: Teoremas de punto fijo

El concepto de aplicación que consideraremos en esta Sección fue introducido por [GK1] como una generalización natural del concepto de aplicación no-expansiva.

**Definición 1.3.1.** *Sea $C$ un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $X$. Una aplicación $T : C \to C$ se dice que es asintóticamente no-expansiva si existe una sucesión $\{k_n\}$ de números reales con $\lim_n k_n = 1$ tal que*

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leq k_n \|x - y\| \quad \textit{para } x, y \in C \quad \textit{y} \quad n = 1, 2, ...$$

Veamos con un ejemplo que la clase de aplicaciones asintóticamente no-expansivas es más amplia que la de aplicaciones no-expansivas.

**Ejemplo 1.3.1.**

Consideremos $B$ la bola unidad del espacio $\ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ con su norma habitual. Sea $1 < k_1$ y $\{k_n\}$ una sucesión de números reales decreciente a 1. Sea $f : [-1,1] \to [-1,1]$ una aplicación lipschitziana de constante $k_1$ tal $\mid f(x) \mid \leq \mid x \mid$. Definimos la aplicación $T : B \to B$ como sigue:

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, f(x_1), \frac{k_2}{k_1}x_2, \frac{k_3}{k_2}x_3, ...).$$

Por inducción obtenemos que para cada $n \geq 1$

$$T^n(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, ..., 0, \frac{k_n}{k_1}f(x_1), \frac{k_{n+1}}{k_1}x_2, \frac{k_{n+2}}{k_2}x_3, ...),$$

donde el cero aparece $n$-veces en el lado de la izquierda. Sin dificultad se ve que $\|T^n(x) - T^n(y)\|_p \leq k_n\|x - y\|_p$ para cada $x, y \in B$ y entonces $T$ es asintóticamente no-expansiva. Evaluando $T$ en los vectores $(\frac{1}{k_1}, 0, 0, ...)$ y $(1, 0, 0, ...)$ se comprueba que $T$ no es no-expansiva. ■

En 1972, Goebel y Kirk [GK1] extienden el resultado de Browder-Göhde ([Bd1] y [Gh]) probando que si $C$ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$ uniformemente convexo, entonces toda aplicación asintóticamente no-expansiva $T : C \to C$ tiene punto fijo. Desde la publicación de este trabajo, muchos autores han contribuido al desarrollo de la teoría de aplicaciones asintóticamente no-expansivas como una extensión de la teoría de aplicaciones no-expansivas ([BKR], [KX], [Ki3], [KMS], [LTX], [X3]).

En 1965, W. A. Kirk [Ki1] había probado que si $C$ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$ reflexivo y con estructura normal, entonces toda aplicación no-expansiva $T$ definida en $C$, con imagen en sí mismo, tiene un punto fijo. Recordemos que un espacio de Banach $X$ tiene estructura normal si cualquier subconjunto $K \subset X$ cerrado, acotado y convexo, con más de un punto, contiene un punto no diametral, i.e. un $x \in K$ tal que $\sup\{\|x-y\| : y \in K\} < \sup\{\|u-v\| : u, v \in K\} = \operatorname{diam} K$. Tomando como punto de partida este resultado, son muchas las propiedades geométricas estudiadas que implican estructura normal.

Sería razonable, entonces, plantearse si la estructura normal, también implica la existencia de puntos fijos para aplicaciones asintóticamente no-expansivas en las condiciones del Teorema de Kirk. Aunque estamos ante una cuestión abierta, sí encontramos respuestas afirmativas para algunas clases de espacios de Banach en los que tal teorema es aplicable.

A continuación vamos a definir algunas condiciones de tipo geométrico sobre un espacio de Banach $X$, suficientes para obtener resultados de punto fijo de aplicaciones asintóticamente no-expansivas.

**Definición 1.3.2.** *Sea $X$ una espacio de Banach y $\tau$ una topología en $X$. Diremos que $X$ es uniformemente Kadec-Klee con respecto a $\tau$ ($\tau$-UKK), si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de $X$, $\tau$-convergente a un vector $x$ con $sep(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\} \geq \epsilon$, entonces $\|x\| < 1 - \delta$.*

En el supuesto que $\tau$ sea la topología débil , diremos que $X$ es uniformemente Kadec-Klee (UKK). Se dirá que el espacio $X$ es casi uniformemente convexo (NUC) si es reflexivo y UKK [Hu].

**Definición 1.3.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Se dice que $X$ es uniformemente convexo en cada dirección (UCED) si $\delta_z(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$ y $z \in X$ con $\|z\| = 1$, donde $\delta_z(\epsilon)$ es el módulo de convexidad de $X$ en la dirección $z$ definido por*

$$\delta_z(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x - y = \epsilon z\right\}.$$

**Definición 1.3.4.** *Un espacio de Banach $X$ tiene estructura normal uniforme si $N(X) > 1$, donde $N(X)$ es el coeficiente de estructura normal de $X$ definido por*

$$N(X) = \inf\left\{\frac{diamA}{r(A)} : A \subset X \text{ cerrado, acotado y convexo }, diamA > 0\right\}.$$

*($diamA$ es el diametro de $A$, i.e.* $\sup\{\|x-y\| : x, y \in A\}$ *y $r(A)$ es el radio de Chebyshev de $A$, i.e.* $\inf\{\sup\{\|x-y\| : y \in A\} : x \in A\}$*)*

**Definición 1.3.5.** *Sea un espacio de Banach $X$ y $\tau$ una topología sobre $X$. Diremos que $X$ tiene la propiedad $\tau$-GGLD si*

$$\liminf_n \|x_n\| < \limsup_m \limsup_n \|x_n - x_m\|,$$

*para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ convergente al vector nulo en la topología $\tau$ y tal que* $\liminf_n \|x_n\| \neq 0$.

Observemos que obtenemos una definición equivalente si sustituimos el límite inferior de la desigualdad por límite superior.

Cuando $\tau$ es la topología débil diremos que $X$ tiene la propiedad GGLD [Ji].

**Definición 1.3.6.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología arbitraria definida sobre $X$. Se dice que $X$ verifica la condición de Opial con respecto a $\tau$ si*

$$\liminf_n \|x_n\| < \liminf_n \|x_n + x\|,$$

*para todo $x \neq 0$ y toda sucesión acotada $\{x_n\}$ $\tau$-convergente al vector nulo. En caso de que la desigualdad estricta sea menor o igual, diremos que $X$ cumple la condición de Opial no-estricta con respecto a $\tau$.*

Asociado a la topología $\tau$ y a la condición de Opial se define el siguiente módulo:

$$r_{X,\tau}(c) = \inf\{\liminf_n \|x_n + x\| - 1\}, \qquad c \geq 0$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los vectores $x \in X$ con $\|x\| \geq c$ y todas las sucesiones $\tau$-convergentes a cero, tal que $\liminf_n \|x_n\| \geq 1$.

Se dice que $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial si $r_{X,\tau}(c) > 0$ para todo $c > 0$. Es claro que esta condición implica la condición de Opial con respecto a $\tau$. Cuando $\tau$ es la topología débil, se dice simplemente que $X$ verifica la condición de Opial, condición de Opial no-estricta o condición de Opial uniforme. Usando los mismos argumentos que para la topología débil, se prueba que $r_{X,\tau}(\cdot)$ es una función creciente y continua en $[0, +\infty)$. Además si $r_{X,\tau}(0) < 0$, entonces $r_{X,\tau}(\cdot)$ es constante en $[0, -r_{X,\tau}(0)]$.

El resultado de Goebel y Kirk [GK1], fue extendido por el segundo autor [Ki3] a espacios para los cuales $\epsilon_0(X) < 1$ y por Martínez-Yañez [Ma] y Xu [X1] a espacios $k$-uniformemente convexos (ver definición en [Su]).

Todos estos resultados fueron extendidos por Xu [X3], en 1991, a aplicaciones más generales que las asintóticamente no-expansivas.

**Definición 1.3.7.** ([Ki3]) *Sea $C$ un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $X$. Una aplicación $T : C \to C$ se denomina de tipo asintóticamente no-expansiva si $T^N$ es continua para algún entero $N \geq 1$ y, para cada $x \in C$, se tiene*

$$\limsup_n (\sup\{\|T^n(x) - T^n(y)\| - \|x - y\| : y \in C\}) \leq 0.$$

**Teorema 1.3.1.** ([X3]) *Sea $X$ un espacio de Banach NUC y $C$ un subconjunto no vacío cerrado, acotado y convexo de $X$. Si $T : C \to C$ es una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Obsérvese que un espacio $k$-uniformemente convexo debe ser NUC [Hu].

Posteriormente Lin, Tan y Xu [LTX] prueban el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.2.** *Supongamos que $X$ es un espacio de Banach con la propiedad de Opial uniforme y $C$ es un subconjunto no vacío débilmente compacto y convexo de $X$. Si $T : C \to C$ es una aplicación asintóticamente no-expansiva, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Por último enunciaremos los resultados obtenidos recientemente por Kim y Xu [KX] en otras clases de espacios.

**Teorema 1.3.3.** *Sean $X$ un espacio de Banach con estructura normal uniforme, $C$ un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de $X$ y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Entonces, $T$ tiene un punto fijo.*

**Teorema 1.3.4.** *Sean $X$ un espacio de Banach que es UCED y satisface la propiedad GGLD, $C$ un subconjunto no vacío, débilmente compacto y convexo de $X$ y $T : C \to C$ una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva. Entonces, $T$ tiene un punto fijo.*

## 1.4 Medidas de no compacidad y módulos de convexidad no compacta

Consideremos $X$ un espacio de Banach. Recordemos que para cada $A$ subconjunto no vacío y acotado de $X$, las medidas de no compacidad de Kuratowski, de Hausdorff y de separación de $A$ se definen, respectivamente como:

$$\alpha(A) = \inf\{d > 0 \ : A \text{ puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro } \leq d\},$$

$$\chi(A) = \inf\{\epsilon > 0 \ : A \text{ puede ser recubierto por un número finito de bolas de radio } \leq \epsilon\},$$

$$\beta(A) = \sup\{r > 0 : \text{existe una r-separación infinita en A}\},$$

donde se entiende por $r$-separación en $A$, un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\|x-y\| \geq r$ para todo $x, y \in B$, $x \neq y$.

Señalemos algunas propiedades de estas medidas.

- Para todo conjunto acotado $A \subset X$, se verifican las siguientes desigualdades:

$$\chi(A) \leq \beta(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A).$$

- Si $X$ es de dimensión infinita y $B_X$ es la bola unidad de $X$, entonces $\alpha(B_X) = 2$ y $\chi(B_X) = 1$.

  El valor de $\beta(B_X)$ depende del espacio $X$.

- Sea $A$ acotado contenido en $X$, $r > 0$ y $B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$. Entonces

$$\chi(B(A, r)) = \chi(A) + r.$$

- La medida $\beta$ de un conjunto puede definirse en términos de separaciones de sucesiones:

$$\beta(A) = \sup\{r > 0 : A \text{ contiene una sucesión con } sep(\{x_n\}) \geq r\}.$$

Un estudio detallado de tales medidas de no compacidad y de sus propiedades puede encontrarse en [ADL].

Para terminar con las consideraciones sobre estas medidas de no compacidad, hagamos notar la dependencia existente entre la medida de no compacidad de un conjunto y el espacio en el que lo consideramos incluido. A partir de su propia definición, es inmediato que la medida de Kuratowski de un conjunto es la misma en todos los espacios que lo contienen.

**Definición 1.4.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\phi = \alpha, \beta$, ó $\chi$. Se define el módulo de convexidad no compacta asociado a $\phi$ como:*

$$\Delta_{X,\phi}(\epsilon) = \inf\{1 - d(0, A) : A \subset B_X, A \textit{ es convexo }, \phi(A) \geq \epsilon\}.$$

*Se define también la característica de convexidad no-compacta asociada a la medida de no compacidad $\phi$ como:*

$$\epsilon_\phi(X) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \Delta_X, \phi(\epsilon) = 0\}.$$

Las siguientes relaciones entre los distintos módulos se obtienen fácilmente:

$$\Delta_{X,\alpha}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\beta}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\chi}(\epsilon),$$

y como consecuencia

$$\epsilon_\alpha(X) \geq \epsilon_\beta(X) \geq \epsilon_\chi(X).$$

Estos módulos caracterizan la propiedad NUC en el sentido de que un espacio $X$ es NUC si y sólo si $\epsilon_\phi(X) = 0$, para $\chi = \alpha, \beta$, ó $\chi$.

Recordemos también que si $\epsilon_\chi(X) < 1$, entonces $X$ es reflexivo.

Cuando $X$ es un espacio de Banach reflexivo, los módulos de convexidad no-compacta asociados a $\beta$ y $\chi$ pueden expresarse como sigue [ADL, Capítulo V],

$$\Delta_{X,\beta}(\epsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ w - \lim_n x_n = x,\ sep\{x_n\}) \geq \epsilon\},$$

$$\Delta_{X,\chi}(\epsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ w - \lim_n x_n = x,\ \chi(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

En [Ja1] las nuevas expresiones de estos módulos, han sido generalizadas para una topología $\tau$ de e.v.t sobre un espacio de Banach $X$.

**Definición 1.4.2.** ([Ja1]) *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología sobre $X$ tal que la función norma es $\tau$-slsc. Asociados a las medidas de no compacidad de Hausdorff y de separación se definen los siguientes módulos:*

a) $\Delta_{X,\beta,\tau} : [0, \beta(B_X)] \longrightarrow [0,1]$,

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \beta(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

b) $\Delta_{X,\chi,\tau} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$\Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ \chi(\{x_n\}) \geq \epsilon\}.$$

Observemos que ambas funciones son crecientes y que $\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) \leq \Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$.

Puede comprobarse sin dificultad que

$$\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) = \inf\{1 - \|x\| : \{x_n\} \subset B_X,\ \tau - \lim_n x_n = x,\ sep(\{x_n\}) \geq \epsilon\},$$

donde recordemos que $sep(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n, m \in N, n \neq m\}$.

Por tanto, un espacio es $\tau$-UKK si y sólo si $\Delta_{X,\beta,\tau}(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$.

Observemos que si $X$ es un espacio de Banach reflexivo y $\tau$ es la topología débil, estas definiciones coinciden con los módulos de convexidad no compacta $\Delta_{X,\chi}(\cdot)$ y $\Delta_{X,\beta}(\cdot)$.

**Ejemplo 1.4.1.**

El valor de cada uno de los módulos de convexidad no compacta en los espacios $\ell_p$, $1 < p < +\infty$ viene dado por las siguientes expresiones [ADL, Capítulo V]:

$$\Delta_{X,\alpha}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}^p\right)\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Delta_{X,\beta}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Delta_{X,\chi}(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $X = (L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ como en el Ejemplo 2.1.1 y $\tau$ es la topología de la convergencia local en medida, en [Ja1] es probado que:

$$\Delta_{X,\beta,clm}(\epsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Delta_{X,X,clm}(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^p)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$. ■

## 1.5 Centros asintóticos

El concepto de centro asintótico de sucesiones fue considerado por primera vez por Edelstein [E] y posteriormente extendido por Lim [Lm2] para redes.

Sea $C$ un subconjunto de un espacio de Banach $X$, $\mathcal{D}$ un conjunto dirigido y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una red acotada en $X$. Para cada $x \in C$, definimos

$$r(x, \{x_\alpha\}) = \inf\{\sup\{\|x_\beta - x\| : \beta \geq \alpha\} : \alpha \in \mathcal{D}\} := \limsup_\alpha \|x_\alpha - x\|;$$

$$r(C, \{x_\alpha\}) = \inf\{r(x, \{x_\alpha\}) : x \in C\};$$

$$A(C, \{x_\alpha\}) = \{x \in C : r(x, \{x_\alpha\}) = r(C, \{x_\alpha\})\}.$$

El número $r(C, \{x_\alpha\})$ y el conjunto $A(C, \{x_\alpha\})$ se definen, respectivamente como el radio asintótico y el centro asintótico de $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ en $C$.

Obviamente la convexidad de $C$ implica la convexidad de $A(C, \{x_\alpha\})$, aunque este conjunto puede ser vacío. Puesto que la función $\phi : C \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \limsup_\alpha \|x_\alpha - x\|$ es débilmente semicontinua inferiormente, se sigue que $A(C, \{x_\alpha\})$ es un conjunto no vacío y débilmente compacto si $C$ es débilmente compacto, ó $C$ es un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach reflexivo.

A continuación vamos a exponer algunos resultados relacionados con los centros asintóticos que van a mostrarse imprescindibles para el desarrollo de esta Memoria. La mayoría de ellos puede encontrarse en [KM].

**Definición 1.5.1.** *Una sucesión acotada (respectivamente una red) se dice que es regular con respecto a $C$ (resp. n-regular) si cada una de sus subsucesiones (resp. subredes) tienen el mismo radio asintótico en $C$; y se denomina asintóticamente uniforme con respecto a $C$ (resp. n-asintóticamente uniforme) si cada una de sus subsucesiones (resp. subredes) tienen el mismo centro asintótico en $C$.*

Observemos que si $\{x_{\alpha_\nu} : \nu \in \mathcal{I}\}$ es una subred de una red $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ entonces $r(C, \{x_{\alpha_\nu}\}) \leq r(C, \{x_\alpha\})$. Además si $r(C, \{x_{\alpha_\nu}\}) = r(C, \{x_\alpha\})$, claramente $A(C, \{x_\alpha\}) \subset A(C, \{x_{\alpha_\nu}\})$.

**Lema 1.5.1.** *Sea $C$ un subconjunto de un espacio de Banach $X$ y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $X$. Entonces*

*(i)* (Goebel [G], Lim [Lm1]) *siempre existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que es regular con respecto a $C$;*

*(ii)*(Kirk [Ki2]) *si $C$ es separable, entonces $\{x_n\}$ contiene una subsucesión que es asintóticamente uniforme con respecto a $C$.*

Es conocido que en un espacio reflexivo UCED, el centro asintótico de una sucesión en subconjuntos cerrados, acotados y convexos es único, luego toda sucesión regular respecto de estos conjuntos es asintóticamente uniforme.

En general, como muestra el lema, encontrar sucesiones que sean asintóticamente uniformes respecto de un conjunto sólo está garantizada si éste es separable. Sin embargo, podemos prescindir de la separabilidad si consideramos centros asintóticos de redes. Para ello se usa el concepto de ultra red ó red universal.

Recordemos que si $S$ es un conjunto y $H \subset S$, una red $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ en $S$ se dice que está eventualmente en $H$ si existe $\alpha_o \in \mathcal{D}$ tal que $x_\alpha \in H$ para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

**Definición 1.5.2.** *Una red* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *en un conjunto* $S$ *se dice que es una ultra red (ó red universal) si, dado un subconjunto* $G \subset S$*, ó bien* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *está eventualmente en* $G$ *ó está eventualmente en* $S \setminus G$.

Los siguientes hechos sobre redes puede encontrarse en [K, pág. 81]

- Toda red en un conjunto tiene una subred que es una ultra red.
- Sean $S_1$ y $S_2$ dos conjuntos y $f : S_1 \longrightarrow S_2$. Si $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una ultra red en $S_1$, entonces $\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una ultra red en $S_2$.
- Si $S$ es un compacto de un espacio topológico de Hausdorff y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una ultra red en $S$, entonces $\lim_\alpha x_\alpha$ existe.

Como consecuencia de estos hechos, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.5.1.** *Sea* $X$ *un espacio de Banach,* $C$ *un subconjunto débilmente compacto y convexo de* $X$ *y* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *una ultra red acotada en* $X$*, entonces* $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ *es* $n$*-asintóticamente uniforme con respecto a* $C$.

**Demostración:**

Puesto que $C$ es débilmente compacto, para cada $x \in C$, $\lim_\alpha \|x_\alpha - x\| = \phi(x)$ existe; y para cualquier subred $\{x_{\alpha_\nu}\}$ de $\{x_\alpha\}$, $\lim_\nu \|x_{\alpha_\nu} - x\| = \lim_\alpha \|x_\alpha - x\| = \phi(x)$. Consecuentemente $r := r(C, \{x_\alpha\}) = r(C, \{x_{\alpha_\nu}\})$ y $A(C, \{x_\alpha\}) = A(C, \{x_{\alpha_\nu}\}) = \{x \in C : \phi(x) = r\}$. ∎

Es inmediato que en las condiciones de la Proposición 1.5.1 toda red acotada en $X$ tiene una subred que es $n$-asintóticamente uniforme con respecto a $C$.

## 1.6 Aplicaciones no-expansivas multivaluadas

Sean $X$ un espacio de Banach y $C$ un subconjunto no vacío de $X$. Denotaremos por $CB(C)$ a la familia de todos los subconjuntos no vacíos cerrados y acotados de $C$ y por $K(C)$ (resp. $KC(C)$) la familia de todos los subconjuntos no vacíos y compactos (resp. compactos y convexos) de $C$. Sobre $CB(X)$ se tiene la métrica de Hausdorff $H$ dada por

$$H(A,B) := \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\Big\}, \quad A,B \in CB(X)$$

donde para $x \in X$ y $E \subset X$ $d(x,E) := \inf\{\|x-y\| : y \in E\}$ es la distancia del punto $x$ al conjunto $E$. Es bien conocido que $H$ cumple las propiedades de una distancia [I].

**Definición 1.6.1.** *Una aplicación multivaluada $T : C \to CB(X)$ es llamada una contracción si existe una constante $k \in [0,1)$ tal que*

$$H(Tx,Ty) \leq k\|x-y\|, \quad x,y \in C,$$

*y no-expansiva si*

$$H(Tx,Ty) \leq \|x-y\|, \quad x,y \in C.$$

Para una aplicación multivaluada $T : C \to CB(X)$ decimos que: $x \in C$ es un punto fijo de $T$ si $x$ pertenece a $Tx$.

Otros tipos de aplicaciones multivaluadas vienen definidos en términos de medidas de no-compacidad.

**Definición 1.6.2.** *Una aplicación $T : C \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ se denomina $\gamma$-condensante (resp. $k$-$\gamma$-contractiva, siendo $k$ una constante) donde $\gamma = \alpha(\cdot)$ ó $\chi(\cdot)$ si, para cada* *subconjunto acotado B de C con $\gamma(B) > 0$, se cumple*

$$\gamma(T(B)) < \gamma(B) \quad (resp. \quad \gamma(T(B)) \leq k\gamma(B)).$$

*Notemos que $T(B) = \cup_{x\in B} Tx$.*

Una aplicación multivaluada $T : C \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ se dice *semicontinua superiormente* en $C$ si $\{x \in C : Tx \subset V\}$ es abierto en $C$ siempre que $V \subset X$ sea abierto; $T$ se dice *semicontinua inferiormente* si $T^{-1}(V) := \{x \in C : Tx \cap V \neq \emptyset\}$ es abierto en $C$ siempre que $V \subset X$ sea abierto. Se dirá que $T$ es continua si es semicontinua superior e inferiormente. Otra definición de continuidad para un operador multivaluado es la siguiente: $T : X \to CB(X)$ es continuo en $X$ (con respecto a la métrica de Hausdorff H) si $H(Tx_n, Tx) \to 0$ siempre que $x_n \to x$. No es difícil comprobar (ver [AF] y [D1]) que ambas definiciones de continuidad son equivalentes si $Tx$ es compacto para todo $x \in X$.

La teoría del punto fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas ha resultado ser más complicada que la correspondiente teoría de aplicaciones no-expansivas univaluadas. Aunque algunos teoremas de existencia de punto fijo para aplicaciones no-expansivas univaluadas han sido parcialmente extendidos al caso multivaluado, hasta el presente, no existe una versión análoga del famoso Teorema de Kirk para aplicaciones no-expansivas multivaluadas.

Uno de los resultados básicos de existencia de punto fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas fue dado por T.C. Lim en 1974.

**Teorema 1.6.1.** ([Lm1]) *Sean $X$ un espacio de Banach uniformemente convexo, $C$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $X$ y $T : C \to K(C)$ una aplicación no-expansiva. Entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Resultados similares a éste habían sido establecidos por J. Markin en 1968 [M] en el marco de un espacio de Hilbert y por F. Browder [Bd2] para un espacio con función de dualidad débilmente continua. En estos dos casos es supuesto que $T$ toma valores compactos y convexos.

Una versión anterior del Teorema de Lim fue obtenida por E. Lami Dozo en 1973 [La] en un espacio que satisface la condición de Opial.

En las pruebas de todos estos teoremas se hace uso del Principio de Contracción de Banach extendido por Nadler a una contracción multivaluada. En el marco de un espacio de Banach tal resultado se enunciaría de la siguiente forma:

**Teorema 1.6.2.** ([N]) *Sean $C$ un subconjunto cerrado de un espacio de Banach $X$ y $T : C \to CB(C)$ una contracción. Entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Destaquemos que el Teorema de Lim es probado aplicando el método de los centros asintóticos debido a Edelstein e inducción transfinita. Independientemente, Goebel y Lim simplificaron la prueba original del Teorema de Lim usando los resultados sobre los centros asintóticos de sucesiones descritos en la Sección 1.5.

Estos hechos sobre los centros asintóticos permitieron a W.A. Kirk y S. Massa, en 1990, probar la siguiente generalización del Teorema de Lim (mencionemos que en una primera prueba combinan los centros asintóticos de sucesiones y de redes).

**Teorema 1.6.3.** (Kirk-Massa [KM])

*Sean $C$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$ y $T : C \to KC(C)$ una aplicación no-expansiva. Supongamos que el centro asintótico en $C$ de cada sucesión acotada de $X$ es no vacío y compacto. Entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Aunque los espacios o conjuntos en los que los centros asintóticos de sucesiones son compactos no están completamente caracterizados, algunos resultados parciales son conocidos. Entre los espacios en los que se verifica esta propiedad están los $k$-uniformemente convexos (también los espacios reflexivos uniformemente convexos en cualquier dirección). La conclusión del Teorema de Kirk-Massa también es cierta cuando $C$ es un subconjunto débil* compacto y convexo de $\ell_1$, pues las sucesiones acotadas en $\ell_1$ tienen centros asintóticos compactos con respecto a conjuntos débil* compactos y convexos.

# Capítulo 2

# Estructura del Conjunto de Puntos Fijos de Aplicaciones Asintóticamente No-expansivas

En este capítulo, que hemos dividido en tres secciones, probaremos que el conjunto de puntos fijos de una aplicación asintóticamente no-expansiva tiene estructura de retracto no-expansivo así como algunos resultados de existencia de punto fijo para estas aplicaciones derivados de este hecho.

En la primera sección extenderemos los resultados de existencia de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas, que aparecen como los Teoremas 1.3.2 y 1.3.4 en el capítulo de preliminares, cuando se consideran dominios compactos respecto de una topología arbitraria. Concretamente se considerará un espacio de Banach $X$ y sobre él una topología $\tau$ Hausdorff de espacio vectorial topológico, tal que los conjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos y las funciones de tipo $\tau$-nulas sean secuencialmente semicontinuas inferiormente respecto de $\tau$.

En la segunda sección obtendremos la existencia de una retracción $T$-ergódica de $C$ en el conjunto de puntos fijos de $T$, para una aplicación $T : C \to C$ asintóticamente no-expansiva y para $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach para el que $T$ tiene punto fijo. El resultado anterior va a ser consecuencia de otro más general en el que la obtención de la retracción se hará para una topología $\tau$ satisfaciendo las condiciones mencionadas anteriormente, más débil que la de la norma y para un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto y $\tau$-compacto de $X$ . De este modo, también concluiremos que el conjunto de puntos fijos de una aplicación asintóticamente no-expansiva definida en un subconjunto $C$ acotado, convexo y $clm$-compacto de $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$ con imagen en sí mismo, es un retracto no-expansivo de $C$.

Si a la aplicación $T$ le añadimos que sea asintóticamente regular será suficiente que el espacio $X$ satisfaga la GGLD para obtener una retracción $T$-ergódica de $C$ en el conjunto de puntos fijos de $T$.

Comenzamos la tercera sección demostrando, como consecuencia de las propiedades de la intersección de retractos no-expansivos, la existencia de punto fijo común para una familia arbitraria conmutativa de aplicaciones asintóticamente no-expansivas en las hipótesis habituales para la topología débil, y la estructura de retracto no-expansivo para el conjunto de puntos fijos comunes a ellas. Probaremos que la misma conclusión es cierta para una familia conmutativa numerable cuando consideramos una topología $\tau$ verificando las condiciones antes mencionadas. Para terminar, se darán resultados de convergencia de iteradas a un punto fijo como consecuencia de la existencia de una retracción $T$-ergódica.

## 2.1 Nuevos teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas

En esta Sección vamos a extender algunos de los resultados sobre existencia de puntos fijos para aplicaciones asintóticamente no-expansivas, a topologías más generales.

En lo que sigue consideraremos $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología Hausdorff de espacio vectorial topológico (e.v.t.) sobre $X$, tal que los conjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos. Como ejemplos básicos de topologías que cumplen esta condición están la topología débil y cualquier topología métrica. También si $X$ es un espacio de Banach separable, para cualquier topología $\tau$ de e.v.t. más débil que la inducida por la norma se verifica que los conjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos.

**Definición 2.1.1.** *Dado $(T, \tau)$ un espacio topológico, una función $f : T \to \mathbb{R}$ se dice que es $\tau$-semicontinua inferiormente si $f^{-1}((-\infty, a])$ es un conjunto $\tau$-cerrado para cada $a \in \mathbb{R}$.*

Una consecuencia inmediata de la definición es que si $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ es una red $\tau$-convergente de $T$ a un elemento $x \in T$, entonces $f(x) \leq \liminf_\alpha f(x_\alpha)$.

**Definición 2.1.2.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $X$ y $\tau$-convergente a cero. Se define la función tipo $\tau$-nula asociada a la sucesión $\{x_n\}$ como:*

$$\Phi(x) = \limsup_n \|x_n - x\|$$

*para todo $x \in X$.*

Para probar nuestros resultados también impondremos a $\tau$ que las funciones $\Phi$ de tipo $\tau$-nula sean secuencialmente semicontinua inferiormente respecto de $\tau$ ($\tau$-slsc), i.e., $\Phi(y) \leq \liminf_n \Phi(y_n)$ si $\tau - \lim_n y_n = y$. En particular, la aplicación $\|\cdot\|$ será también $\tau$-slsc sin más que considerar la función tipo $\tau$-nula asociada a la sucesión idénticamente nula. Mencionemos que esta hipótesis sobre la norma es equivalente a que las bolas cerradas de $X$ sean $\tau$-secuencialmente cerradas.

Sea $C$ un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to C$ una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva. Aplicando el lema de Zorn, podemos encontrar un subconjunto $K$ de $C$ que es minimal respecto de los conjuntos convexos y $\tau$-secuencialmente cerrados satisfaciendo la siguiente propiedad

$$(P)_\tau \qquad x \in K \Longrightarrow \omega_\tau(x) \subseteq K,$$

donde

$$\omega_\tau(x) = \{y \in C : y = \tau - \lim_k T^{n_k}(x) \text{ para } n_k \to \infty\}.$$

Este conjunto $K$ verifica el siguiente lema.

**Lema 2.1.1.** *Para cada $x \in K$, definimos el funcional*

$$\rho_x(y) = \limsup_n \|T^n x - y\|, y \in X.$$

*Entonces $\rho_x(\cdot)$ es constante en $K$ y esta constante no depende de $x$.*

En el caso de que $\tau$ sea la topología débil, este resultado probado por H.K. Xu [X3], constituye una herramienta básica en las pruebas de teoremas de existencia de puntos fijos de aplicaciones asintóticamente no-expansivas. De la misma manera el Lema 2.1.1 permite adaptar tales teoremas de existencia a topologías más generales (la demostración de este Lema puede hacerse usando los mismos argumentos que en [X3], por tal motivo preferimos no incluir su prueba). Un primer resultado en este sentido, aparece en [Ja2] como una extensión del Teorema 1.2.1.

**Teorema 2.1.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach dotado de una topología $\tau$ más débil que la de la norma y tal que sus subconjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos. Supongamos también que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva. Si $X$ es $\tau$-UKK, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Ejemplo 2.1.1.**

Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finita. Para $1 \leq p < +\infty$ consideremos el espacio de Banach separable $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ y $\tau$ la topología de la convergencia local en medida (*clm*) (ver [Le] y [HS]). Por definición, la topología *clm* es métrica y más débil que la de la norma.

Comentemos que el lema de Fatou junto con el hecho de que cada sucesión de funciones *clm*-convergente, tiene una subsucesión que converge en casi todo a la función límite, implica que la norma $\|\cdot\|_p$ es *clm*-slsc. El siguiente resultado es una consecuencia del que aparece en [BL]: si $\{f_n\}$ es una sucesión $\tau$-convergente al vector nulo en $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, y $f$ es una función en $L_p(\mu)$, entonces

$$\limsup_n \|f_n - f\|_p^p = \|f\|_p^p + \limsup_n \|f_n\|_p^p.$$

Con estas premisas es inmediato que las funciones de tipo *clm*-nulas son *clm*-slsc. Además el espacio $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ es *clm*-UKK ([Le]).

Como consecuencia $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$ con la topología *clm*, nos facilita un ejemplo de espacio al que podemos aplicar el teorema anterior y ninguno de los resultados de existencia de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas expuestos en la Sección 1.3. ■

Es nuestro propósito, en lo que resta de sección, generalizar los resultados de existencia de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas a espacios UCED con la propiedad $\tau$-GGLD y a espacios que verifican la condición $\tau$-uniforme de Opial.

Comencemos con unas consideraciones previas.

Dado $C$ un subconjunto de $X$ y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $X$, recordemos que el radio asintótico y el centro asintótico de $\{x_n\}$ en $C$ se definen, respectivamente como

$$r(C, \{x_n\}) = \inf\{\limsup_n \|x_n - x\| : x \in C\},$$

$$A(C, \{x_n\}) = \{x \in C : \limsup_n \|x_n - x\| = r(C, \{x_n\})\}.$$

Comprobemos que si $C$ es un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ para $\tau$ una topología de e.v.t., el centro asintótico es un conjunto no vacío.

Si llamamos $r = r(C, \{x_n\})$ y $A_m(C, \{x_n\}) = \{x \in C : \limsup_n \|x_n - x\| \leq r + \frac{1}{m}\}$, es claro que $A(C, \{x_n\}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(C, \{x_n\})$. Cada conjunto $A_m(C, \{x_n\})$ es no vacío y además $\tau$-secuencialmente compacto. En efecto, consideremos una sucesión $\{y_k\} \subset A_m(C, \{x_n\})$ $\tau$- convergente a un vector $y$. Evidentemente $y \in C$ y aplicando que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc, obtenemos que

$$\limsup_n \|x_n - y\| \leq \limsup_k \limsup_n \|x_n - y_k\| \leq r + \frac{1}{m},$$

deduciéndose que $y \in A_m(C, \{x_n\})$. Así pues, $A_m(C, \{x_n\})$ es un subconjunto $\tau$-secuencialmente cerrado de $C$ y por tanto, $\tau$-secuencialmente compacto. Como consecuencia $\{A_m(C, \{x_n\})\}_m$ constituye una familia numerable de conjuntos $\tau$-secuencialmente compactos con la propiedad de la intersección finita, y entonces $\bigcap_m A_m(C, \{x_n\}) \neq \emptyset$.

Con esta observación, no es difícil comprobar que si $C$ es un subconjunto convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de un espacio UCED, entonces $A(C, \{x_n\})$ es unitario.

Con estas premisas y sin más que seguir la prueba del Teorema 1.2.4 tal como aparece en [KX], obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach dotado de una topología $\tau$ de e.v.t. tal que sus subconjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos y tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $C$ es un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva. Si $X$ es UCED y tiene la propiedad $\tau$-GGLD, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Definición 2.1.3.** *Diremos que un espacio de Banach $X$ tiene estructura normal con respecto a una topología $\tau$ ($\tau$-NS) si para cada subconjunto $C$ convexo, acotado y $\tau$-secuencialmente compacto con diam $C > 0$, existe $x \in C$ no diametral, es decir, tal que*

$$\sup\{\|x-y\| : y \in C\} < diam\ C.$$

Relacionado con la $\tau$-NS , S. Prus demuestra en [Pr] el siguiente enunciado.

**Teorema 2.1.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach separable y $\tau$ una topología de e.v.t. sobre $X$. Si $X$ verifica la condición de Opial respecto a $\tau$, entonces $X$ tiene $\tau$-NS. Si $\tau$ es la topología débil la condición de separabilidad puede omitirse.*

Este resultado y un procedimiento análogo al seguido en la prueba Teorema 1.3.2 nos permiten establecer el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach separable y $\tau$ una topología de e.v.t. sobre $X$ tal que sus subconjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos y tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $C$ es un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Si $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Demostración:**

Consideremos $K$ como en el Lema 2.1.1 y llamemos $\rho = \rho_x(y) = \limsup_n \|T^n x - y\|$ para $x, y \in K$.

Fijemos $x \in K$ y sea $\{T^{i_n}x\}$ una subsucesión $\tau$-convergente de $\{T^n x\}$. Siguiendo el mismo argumento que en la correspondiente prueba del Teorema 1.2.2, suponemos que $\{T^{i_n+m}x\}$ es $\tau$-convergente a $z_m \in K$ para $m \geq 0$, y se tiene que $b_m = \limsup_n \|T^{i_n+m}x - z_m\|$ converge a $b = \inf\{b_m : m \geq 0\} \geq 0$. Por ser la norma $\tau$-scls se tiene que para $m, m' \geq 1$

$$\|z_m - z_{m'}\| \leq \limsup_n \|T^{i_n+m}x - z_{m'}\| \leq \rho.$$

Sea el conjunto $cov(z_m) := \cap_{b\in\mathcal{B}} B$, donde $\mathcal{B}$ denota la familia de bolas cerradas con centros en $K$ que contienen a la sucesión $\{z_m\}$. No es un ejercicio difícil, comprobar que diam $cov(z_m)$ = diam $\{z_m\}$ (ver [Kh, Parte III]]). Hagamos notar que $cov(z_m)$ es un subconjunto convexo y $\tau$-secuencialmente cerrado, pues las bolas cerradas son $\tau$-secuencialmente cerradas y convexas. Por tanto, si consideramos $D = K \cap cov(z_m)$ por la desigualdad anterior se tiene que

$$\text{diam} D \leq \text{diam} cov(z_m) \leq \rho.$$

De nuevo, como en la prueba del Teorema 1.2.1, se llega a que
(1) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists y \in K, \quad m' \geq 1$ y $\quad N \geq 1$ t.q.

$$\|T^n y - z_{n+m'}\| \leq \epsilon, \forall n > N.$$

Veamos que $\rho = 0$. Por el Lema 1.2.1 es suficiente probar que si $\rho \geq 0$, entonces existen $z_0, y \in K$ de manera que $\rho_y(z_0) = \limsup_n \|T^n y - z_0\| < \rho$.

Para ello, distinguiremos dos casos:

**Caso 1.-** diam$D = \rho' < \rho$. Aplicando (1), existen $y \in K, m', N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^n y - z_{n+m'}\| \leq \frac{\rho - \rho'}{2}, \quad \forall n > N.$$

Luego,

$$\|z_N - T^n y\| \leq \|z_N - z_{n+m'}\| + \|z_{n+m'} - T^n y\| \leq \frac{\rho' + \rho}{2} < \rho.$$

**Caso 2.-** diam$D = \rho$. En virtud del Teorema 2.1.3, puesto que $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial y de aquí la condición de Opial respecto a $\tau$ y $D$ es un subconjunto convexo y $\tau$-secuencialmente compacto, existe $z_0 \in D$ tal que

$$\rho' = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|z_0 - z_m\| < \text{diam} D = \rho.$$

De nuevo, (1) nos lleva a que existen $y \in K, m', N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^n y - z_{n+m'}\| \leq \frac{\rho - \rho'}{2}, \quad \forall n > N.$$

Luego,

$$\|z_0 - T^n y\| \leq \|z_0 - z_{n+m'}\| + \|z_{n+m'} - T^n y\| \leq \frac{\rho' + \rho}{2} < \rho.$$

Consecuentemente $K = \{x\}$ y $\limsup_n \|T^n x - x\| = 0$. De la continuidad de $T$ se concluye que $Tx = x$ q.e.d. ■

**Ejemplo 2.1.2.**

Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finita. Fijemos una partición $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\Omega$ de manera que $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$. Sea $\lambda > 1$ y consideremos $X = (L_2(\mu), \|\cdot\|)$ donde

$$\|f\| = \max\Big\{\lambda \frac{\int_{\Omega_1} |f|\, d\mu}{(\mu(\Omega_1))^{\frac{1}{2}}},\ \|f\|_2\Big\},$$

para $f \in L_2(\mu)$.

No es difícil deducir que

$$\|f\|_2 \leq \|f\| \leq \lambda \|f\|_2,$$

y por tanto que $X$ es isomorfo a $(L_2(\mu), \|\cdot\|_2)$.

Consideremos en $X$ la topología de la convergencia local en medida. Puesto que $L_2(\mu)$ es reflexivo, una sucesión acotada *clm*-convergente es débilmente convergente ([HS], pag. 207), luego esta misma propiedad es cierta para $X$. Esta propiedad junto con el hecho de que las funciones de tipo $w$-nulas son $w$-slsc, permite probar que las funciones de tipo *clm*-nulas son *clm*-slsc.

Probemos que $X$ verifica la condición *clm*-uniforme de Opial. En efecto, sean $\{f_n\}$ una sucesión acotada en $X$, *clm*-convergente al vector nulo tal que $\liminf_n \|f_n\| \geq 1$ y $f \in X$ con $\|f\| \geq c$, para $c > 0$.

Como $\{f_n\}$ es débilmente convergente se sigue que $\int_{\Omega_1} |f_n|\, d\mu \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego $\liminf_n \|f_n\|_2 = \liminf_n \|f_n\| \geq 1$ y $\|f\|_2 \geq \frac{c}{\lambda}$. Ahora bien, $L_2(\mu)$ verifica la condición *clm*-uniforme de Opial por lo que existe un $r > 0$ tal que $\liminf_n \|f_n + f\|_2 \geq 1 + r$ y por tanto

$$\liminf_n \|f_n + f\| \geq \liminf_n \|f_n + f\|_2 \geq 1 + r.$$

Sin embargo, $X$ no es $clm$-UKK para $\lambda \geq \sqrt{2}$. Tomemos la sucesión de funciones $g_n = \frac{1}{\lambda}\frac{\chi_{\Omega_1}}{(\mu(\Omega_1))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\chi_{\Omega_n}}{(\mu(\Omega_n))^{\frac{1}{2}}}$ para $n \geq 2$. Trivialmente se comprueba que $\|g_n\| = 1$ y $\|g_n - g_m\| = 1$ para todo $n \neq m$. Sin embargo, $g_n$ es $clm$-convergente a la función $g = \frac{1}{\lambda}\frac{\chi_{\Omega_1}}{(\mu(\Omega_1))^{\frac{1}{2}}}$ y $\|g\| = 1$.

Como conclusión tenemos que para este espacio la tesis del Teorema 2.1.4 es válida, pero no podemos aplicarle el Teorema 2.1.1. ■

## 2.2 El conjunto de puntos fijos como retracto no-expansivo

En lo que sigue $X$ denotará un espacio de Banach y $\tau$ una topología arbitraria sobre $X$. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$.

Bajo aquellas condiciones geométricas sobre el espacio $X$ y la topología $\tau$, que garantizan la existencia de punto fijo para una aplicación $T : C \to C$ asintóticamente no-expansiva (Secciones 1.3 y 2.1), se consigue algo más que punto fijo en $C$. Una mirada detallada de las pruebas de tales resultados revela que, de hecho, se obtiene punto fijo en cada subconjunto $D$ convexo y $\tau$-secuencialmente cerrado de $C$ que verifica $(P)_\tau$, i.e., que para todo $x \in D$ $\omega_\tau(x) \subseteq D$, donde

$$\omega_\tau(x) = \{y \in C : y = \tau - \lim_k T^{n_k}(x) \text{ para } n_k \to \infty\}.$$

En conexión con este hecho, damos la siguiente definición:

**Definición 2.2.1.** *Una aplicación $T : C \to C$ se dice que satisface la $(P)_\tau$-propiedad del punto fijo ($(P)_\tau$-fpp) si $T$ tiene un punto fijo en cada subconjunto $D$ no vacío, $\tau$-secuencialmente cerrado y convexo de $C$ que satisface $(P)_\tau$.*

Así pues, podemos establecer los resultados de la Sección 1.2 del Capítulo 1 y de Sección 2.1 del presente Capítulo de esta otra forma:

**Teorema 2.2.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach dotado de una topología más débil que la de la norma y tal que sus subconjuntos $\tau$-secuencialmente compactos son $\tau$-compactos. Supongamos también que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto y $T : C \longrightarrow C$ una aplicación. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:*

a) *$T : C \longrightarrow C$ es de tipo asintóticamente no-expansiva y ó bien $X$ es $\tau$-UKK ó $X$ es UCED y satisface la propiedad $\tau$-GGLD,*

b) *$T : C \longrightarrow C$ es asintóticamente no-expansiva y $X$ es separable y satisface la condición $\tau$-uniforme de Opial.*

c) *$T : C \longrightarrow C$ es asintóticamente no-expansiva, $X$ tiene estructura normal uniforme y $\tau$ es la topología débil.*

*Entonces $T$ satisface la $(P)_\tau$-fpp.*

**Observación 2.2.1.**

La hipótesis de que la topología $\tau$ se más débil que la inducida por la norma sólo es necesaria en el supuesto de que $X$ es $\tau$-UKK. Por otro lado, si $\tau$ es la topología débil, la separabilidad de $X$ puede obviarse en (b). ∎

En el resultado principal de esta sección usaremos otra definición de aplicación "asintóticamente no-expansiva".

**Definición 2.2.2.** *$T : C \longrightarrow C$ se dice que es débilmente asintóticamente no-expansiva si satisface la siguiente condición:*

$$\limsup_n \|T^n(x) - T^n(y)\| \leq \|x - y\| \qquad \text{para cada } x, y \in C.$$

Aunque esta definición puede tener poco interés desde el punto de vista de la Teoría del Punto Fijo (Tingley [T] ha construido un ejemplo de un subconjunto cerrado, acotado y convexo $C$ de un espacio de Hilbert y una aplicación continua $T : C \longrightarrow C$ sin punto fijo que satisface $\limsup_n \|T^n(x) - T^n(y)\| = 0$), probaremos algunos de nuestros resultados para este tipo de aplicaciones. De esta forma, quedan incluidos los otros tipos de aplicaciones asintóticamente no-expansivas definidos anteriormente.

El teorema que presentamos a continuación puede considerarse el resultado principal de este Capítulo. Su relevancia, como se verá en las secciones posteriores, radica en la afirmación de que el conjunto de puntos fijos de una aplicación asintóticamente no-expansiva es necesariamente el rango de una retracción no-expansiva.

**Teorema 2.2.2.** *Sean $X$ un espacio de Banach dotado de una topología $\tau$ de e.v.t. más débil que la inducida por la norma y tal que la norma sea $\tau$-semicontinua inferiormente. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, convexo, $\tau$-secuencialmente compacto y $\tau$-compacto de $X$ y $T : C \longrightarrow C$ una aplicación débilmente asintóticamente no-expansiva satisfaciendo la $(P)_\tau$-fpp. Entonces, existe una retracción no-expansiva $R$ de $C$ en $Fix(T)$ que satisface:*

*(i) $R \circ T = R$,*

*(ii) todo subconjunto $\tau$-secuencialmente cerrado, convexo y $T$-invariante de $C$ es también $R$-invariante.*

**Demostración:**

Consideremos $C^C$ con la topología producto inducida por la topología $\tau$ en $C$ (i.e. una red $f_\lambda \longrightarrow f$ en esta topología si $\tau - \lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ para todo $x \in C$). Entonces, por el Teorema de Tychonoff, $C^C$ es compacto en esta topología.

Identificando una aplicación con su grafo, definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} := \{f \in C^C : \ & f \text{ nonexpansiva}, f \circ T = f, \text{y todo subconjunto } \tau-\text{sec. cerrado} \\ & \text{y convexo } T-\text{invariante de } C \text{ es también } f-\text{ invariante}\}. \end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{N}$ es un subconjunto convexo de $C^C$ y usando la $\tau$-semicontinuidad inferior de la norma, se deduce fácilmente que $\mathcal{N}$ es cerrado en $C^C$. Luego $\mathcal{N}$ es un conjunto compacto. Inspirándonos en la prueba de Bruck [Br2], demostraremos los siguientes asertos:

(1) $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

(2) Existe $R \in \mathcal{N}$ tal que si

$$\text{si } f \in \mathcal{N} \text{ y } \|f(x) - f(y)\| \leq \|R(x) - R(y)\| \qquad \forall x, y \in C,$$

$$\text{entonces} \quad \|f(x) - f(y)\| = \|R(x) - R(y)\|.$$

Es decir, $f$ actúa como una isometría sobre el rango de $R$.

(3)Existe $h \in \mathcal{N}$ tal que $T(h(R(x))) = h(R(x))$.

(4)$R$ es un retracto no-expansivo de $Fix(T)$.

(1) Consideremos las aplicaciones de las medias de las iteradas de $T$,

$$S_n = \frac{I + T + ... + T^{n-1}}{n}.$$

Puesto que $T$ es acotada, se tiene

$$\begin{aligned} S_n \circ T(x) - S_n(x) &= \frac{T(x) + ... + T^n(x)}{n} - \frac{x + T(x) + ... + T^{n-1}(x)}{n} \\ &= \frac{T^n(x) - x}{n} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

para cada $x \in C$. Así, la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ satisface $S_n \circ T - S_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ en $C^C$ y, por ser $C^C$ compacto tiene una ultra red convergente $\{S_{n(\eta)}\}_\eta$. Definimos, pues, para cada $x \in C$

$$S(x) = \tau - \lim_\eta S_{n(\eta)}(x).$$

Comprobemos que $S \in \mathcal{N}$. Fijemos $x, y \in C$ y sea $\epsilon$ un número positivo arbitrario. Puesto que $T$ es débilmente asintóticamente no-expansiva, podemos encontrar un entero $k_0 \geq 1$ (dependiente de $x$ e $y$) tal que

$$\|T^k(x) - T^k(y)\| \leq (1+\epsilon)\|x-y\| \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Para este $k_0$, existe $n_0(k_0) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\|T^k(x) - T^k(y)\|}{n} \leq \epsilon\|x-y\| \qquad \forall n \geq n_0(k_0).$$

Por tanto,

$$\|S_n(x) - S_n(y)\| \leq (1+2\epsilon)\|x-y\| \qquad \forall n \geq n_0(k_0),$$

y entonces $\limsup_n \|S_n(x) - S_n(y)\| \leq \|x-y\|$.

De aquí, usando la $\tau$-semicontinuidad inferior de la norma deducimos que $S$ es no-expansiva. En efecto, si $x, y \in C$

$$\begin{aligned}\|S(x) - S(y)\| &\leq \liminf_{\eta} \|S_{n(\eta)}(x) - S_{n(\eta)}(y)\| \\ &\leq \limsup_{\eta} \|S_{n(\eta)}(x) - S_{n(\eta)}(y)\| \\ &\leq \limsup_{n} \|S_n(x) - S_n(y)\| \leq \|x-y\|.\end{aligned}$$

Además, $S(T(x)) = \tau - \lim_{\eta} S_{n(\eta)}(T(x)) = \tau - \lim_{\eta} S_{n(\eta)}(x) = S(x)$, pues $S_n \circ T - S_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ en $C$ y $\tau$ es más débil que la topología de la norma. Finalmente, si $D$ es un subconjunto $\tau$-sec. cerrado, convexo y $T$-invariante de $C$, por convexidad es claro que $D$ es $S_n$-invariante y por tanto $S$-invariante. Luego $S \in \mathcal{N}$.

(2) Consideremos en $\mathcal{N}$ la relación de equivalencia dada por $f \sim g$ si $\|f(x) - f(y)\| = \|g(x) - g(y)\|$ para todo $x, y \in C$. En el espacio cociente $\mathcal{N}/\sim$, definimos un orden parcial de la siguiente forma:

$$[f] \leq [g] \text{ si } \|f(x) - f(y)\| \leq \|g(x) - g(y)\|$$

para todo $x, y \in C$. Escribiremos $f \preceq g$ si $[f] \leq [g]$ (aunque $\preceq$ no es un orden parcial en $\mathcal{N}$).

Sea $\{[f_\lambda] : \lambda \in \Lambda\}$ un conjunto linealmente ordenado en $\mathcal{N}/\sim$. Los conjuntos $I_\lambda = \{f \in \mathcal{N} : f \leq f_\lambda\}$ están linealmente ordenados por la inclusión de conjuntos y son cerrados en $\mathcal{N}$. En efecto, si una red $f_\nu \in I_\lambda$ converge a $f$, se tiene

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \liminf_\nu \|f_\nu(x) - f_\nu(y)\| \leq \|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)\|$$

para todo $x, y \in C$.

Por tanto, $f \leq f_\lambda$ y $f \in I_\lambda$. Puesto que $\mathcal{N}$ es compacto, $I_\lambda$ es compacto y $\cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \neq \emptyset$. Por otro lado, si $f \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ por definición de $I_\lambda$, tenemos que $[f] \leq [f_\lambda]$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego podemos aplicar el lema de Zorn para asegurar que existe un elemento $[R] \in \mathcal{N}/\sim$ que es minimal, i.e.,

$$\text{si } f \in \mathcal{N} \text{ y } f \leq R, \text{ entonces } [f] = [R],$$

o lo que es lo mismo

$$\|f(x) - f(y)\| = \|R(x) - R(y)\| \qquad \forall x, y \in C.$$

(3) Dado $x \in C$, consideramos el conjunto $\mathcal{S}(R(x)) = \{f(R(x)) : f \in \mathcal{N}\}$. Obviamente $\mathcal{S}(R(x))$ es no vacío y convexo pues $\mathcal{N}$ lo es. Veamos que $\mathcal{S}(R(x))$ es un subconjunto $\tau$-cerrado y por tanto $\tau$-secuencialmente cerrado. Sea $\{f_\lambda(R(x))\}$ una red en $\mathcal{S}(R(x))$ $\tau$-convergente a $z$, con $f_\lambda \in \mathcal{N}$ . Por ser $\mathcal{N}$ un conjunto compacto, existe una subred $\{f_{\lambda_\mu}\}$ de $\{f_\lambda\}$ convergente a $f \in \mathcal{N}$. Por tanto $\tau - \lim_\mu f_{\lambda_\mu}(R(x)) = f(R(x)) = z$ y $z \in \mathcal{S}(R(x))$.

Demostremos que $\mathcal{S}(R(x))$ satisface la propiedad $(P)_\tau$. Tomemos $y \in \mathcal{S}(R(x))$ y $z \in C$ tales que $z = \tau - \lim_k T^{n_k}(y)$ para $n_k \to \infty$ y $f \in \mathcal{N}$ de forma que $y = f(R(x))$. Consideremos una subred $\{T^{n_{k(\eta)}}\}$ de $\{T^{n_k}\}$ tal que $s(x) = \tau - \lim_\eta T^{n_{k(\eta)}}(x)$ existe para todo $x \in C$. Así pues, $z = s(f(R(x)))$. Puesto que $s$ es no-expansiva, $f \in \mathcal{N}$ y $s \circ f \circ T = s \circ f$, se sigue que $s \circ f \in \mathcal{N}$ y entonces $z \in \mathcal{S}(R(x))$. Por tanto, $\mathcal{S}(R(x))$ satisface $(P)_\tau$ y $T$ tiene un punto fijo en $\mathcal{S}(R(x))$, i.e. existe $h \in \mathcal{N}$ cumpliendo $T(h(R(x))) = h(R(x))$.

(4) Dado que $R \in \mathcal{N}$, y que un punto fijo $p$ de $T$ es trivialmente un conjunto $\tau$-cerrado, convexo y $T$-invariante sabemos que $R(p) = p$. Para terminar, es suficiente demostrar que $R(p) \in Fix(T)$ para cada $p \in C$.

Sean $p \in C$ y $h \in \mathcal{N}$ tal que $T(h(R(p))) = h(R(p))$. Puesto que $h \circ R \in \mathcal{N}$ por el aserto (2)

$$\|h(R(x)) - h(R(y))\| = \|R(x) - R(y)\| \qquad \forall x, y \in C.$$

Entonces si $y = h(R(p))$ se tendrá:

$$\|h(R(p)) - h(R(y))\| = \|R(p) - R(y)\|.$$

Como $y \in Fix(T)$ tenemos $h(R(y)) = h(y) = y$. Así $y = h(R(y)) = h(R(p))$, luego $R(p) = R(y) = y \in Fix(T)$. Claramente $R$ es una retracción no-expansiva de $C$ en $Fix(T)$ y satisface (i) y (ii) por definición de $\mathcal{N}$. ■

**Observación 2.2.2.**

En algún sentido puede ser sorprendente la no-expansividad de la retracción obtenida en el Teorema 2.2.2, pues $T$ no satisface necesariamente dicha propiedad. De hecho, podemos encontrar aplicaciones $k$-uniformemente lipschitzianas con constantes de Lipschitz $k$ tan próximas a uno como se quiera, que carecen de retracción no-expansiva de su dominio en su conjunto de puntos fijos. El sencillo ejemplo siguiente corrobora lo dicho.

Sea $a \in (0, 1)$ y consideremos el conjunto $C = C_1 \cup C_2$ como en el Ejemplo 1.2.1. Definimos la aplicación $T$ como $Tx = P_1x$ si $x \in C_1$ y $Tx = P_2x$ si $x \in C_2$. Notemos que $Fix(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad y = ax\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, \quad y = -ax\}$. Entonces, es fácil comprobar que $T$ es $\sqrt{1 + a^2}$-uniformemente lipschitziana para $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ y que no existe una retracción no-expansiva $R$ de $C$ en $Fix(T)$, pues tal retracción debería verificar

$$\|R(0, a) - R(1, a)\| = \|R(0, a) - (1, a)\| \leq 1$$

y

$$\|R(0,a) - R(-1,a)\| = \|R(0,a) - (-1,a)\| \leq 1,$$

lo cual es imposible pues el único punto de $C$ que dista 1 de $(1,a)$ y $(-1,a)$ es $(0,a)$, que no pertenece a Fix(T). ■

Como comentamos en la Sección 1.2 del Capítulo I, , haremos referencia a una retracción no-expansiva de $C$ en $Fix(T)$ que satisface (i) y (ii) como una retracción $T$-ergódica.

**Corolario 2.2.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach, $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$ y $T : C \rightarrow C$ una aplicación de tipo asintóticamente no-expansivo. Supongamos que una de las siguientes condiciones se satisface:*

*(1) $X$ es casi uniformemente convexo.*

*(2) $X$ satisface la condición de Opial uniforme y $T$ es asintóticamente no-expansiva.*

*(3) $X$ tiene estructura normal uniforme y $T$ es asintóticamente no-expansiva.*

*(4) $X$ es UCED y satisface la propiedad GGLD.*

*Entonces existe una retracción $T$-ergódica $R$ de $C$ en $Fix(T)$.*

**Observación 2.2.3.**

Si, además $T$ es débilmente asintóticamente regular, (2) en el Corolario 2.2.1 se deriva del Teorema 2 de [BKR]. ■

En virtud del Teorema 2.1.1, el siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 2.2.2.

**Corolario 2.2.2.** *Sea $X$ el espacio $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$ con la topología clm y $C$ un subconjunto acotado, convexo y clm-secuencialmente compacto de $X$. Si $T : C \rightarrow C$ es una aplicación de tipo asintóticamente no-expansiva, entonces existe una retracción $T$-ergódica $R$ de $C$ en $Fix(T)$.*

Como caso particular, si $\mu$ es la medida cardinal en $\mathbb{N}$, obtenemos el espacio de sucesiones $\ell_1$ en el que la *clm* convergencia es equivalente a la convergencia débil estrella $\sigma(c_0, \ell_1)$ para las sucesiones acotadas de $\ell_1$.

En el siguiente teorema veremos que se puede obtener una retracción $T$-ergódica bajo otras hipótesis sobre $X$ y $T$.

**Definición 2.2.3.** *Una aplicación $T : C \to C$ se denomina asintóticamente regular (respectivamente débilmente asintóticamente regular) si*

$$\lim_n \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| = 0$$

*para todo $x \in C$ (resp. $w - \lim_n (T^n(x) - T^{n+1}(x)) = 0$).*

**Teorema 2.2.3.** *Sean $X$ un espacio de Banach satisfaciendo la propiedad GGLD y $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$. Supongamos que $T : C \to C$ es una aplicación satisfaciendo una de las siguientes condiciones*

a) *$T$ es asintóticamente regular (no necesariamente continua) y $\liminf_n \mid T^n \mid = 1$.*

b) *$T$ es débilmente asintóticamente regular y de tipo asintóticamente no-expansivo.*

*Entonces $Fix(T)$ es no vacío y existe una retracción $T$-ergódica de $C$ en $Fix(T)$.*

**Demostración:**

**Caso (a):** Elijamos una subsucesión $n_k$ de enteros positivos tales que $\lim_k \mid T^{n_k} \mid = 1$. Ahora, sea $\{T^{n_k(\eta)}\}$ una ultra red de $\{T^{n_k}\}$, y definimos para cada $x \in C$

$$f(x) = w - \lim_\eta T^{n_k(\eta)}(x).$$

Esta aplicación es no-expansiva por la débil semicontinuidad inferior de la norma. Además $f$ satisface:

$$f(T(x)) = w - \liminf_{\eta} T^{n_{k(\eta)}}(Tx) = w - \liminf_{\eta} T^{n_{k(\eta)}}(x) = f(x) \qquad \forall x \in C,$$

pues $T^n(x) - T^{n+1}(x) \rightarrow 0$ (notemos que sólo necesitamos que $T^n(x) - T^{n+1}(x) \rightharpoonup 0$). Por tanto $f \circ T = f$. Puesto que $X$ tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas (ver [Ji]), existe una retracción $f$-ergódica $R$ de $C$ en $Fix(f)$. Vamos a probar que $Fix(f) = Fix(T)$.

Sea $x \in Fix(f)$. Por definición de $f$, $f(x) = x$ es un punto de acumulación de $\{T^{n_k}(x)\}$ en la topología débil. Entonces existe una subsucesión $n_{k_j} \rightarrow \infty$ de $\{n_k\}$ tal que $T^{n_{k_j}}(x) \rightharpoonup x$. Demostremos que $T^{n_{k_j}}(x) \rightarrow x$. Si suponemos lo contrario, por la propiedad GGLD obtenemos :

$$\begin{aligned} \limsup_j \|T^{n_{k_j}}(x) - x\| &< \limsup_i \limsup_j \|T^{n_{k_i}}(x) - T^{n_{k_j}}(x)\| \\ &\leq \limsup_i \limsup_j \mid T^{n_{k_i}} \mid \|x - T^{n_{k_j} - n_{k_i}}(x)\|. \end{aligned}$$

Por otro lado la regularidad asintótica de $T$ implica

$$\limsup_j \|x - T^{n_{k_j} - n_{k_i}}(x)\| = \limsup_j \|x - T^{n_{k_j}}(x)\|.$$

Luego,

$$\limsup_j \|T^{n_{k_j}}(x) - x\| < \limsup_j \|x - T^{n_{k_j}}(x)\|$$

y esta contradicción implica $T^{n_{k_j}}(x) \rightarrow x$.

Para terminar probemos que $Tx = x$. En efecto, usando la continuidad de $T^{n_l}$, tenemos $T^{n_{k_j} + n_l}(x) \rightarrow T^{n_l}(x)$ cuando $n_{k_j} \rightarrow \infty$. Además, la regularidad asintótica de $T$ lleva a que esta sucesión también converge a $x$ . Por inducción podemos deducir que $T^{n_l s}(x) = x$ para $s = 1, 2....$ Por tanto

$$\|T(x) - x\| = \|T^{n_l s + 1}(x) - T^{n_l s}(x)\| \rightarrow 0, \qquad \text{cuando } s \rightarrow \infty.$$

Se concluye pues que $x$ es un punto fijo para $T$ en $C$.

Hemos probado que $Fix(f) \subseteq Fix(T)$. Es claro que $Fix(T) \subseteq Fix(f)$, implicando que $R$ es una retracción no-expansiva de $C$ en $Fix(T)$. Puesto que $f \circ T = f$, tenemos $R \circ T = R \circ f \circ T = R \circ f = R$. Para completar la prueba, quedaría comprobar que $R$ satisface (ii); pero la definición de $f$ implica que cada subconjunto cerrado, convexo y $T$-invariante de $C$ es $f$-invariante y entonces $R$-invariante (recordemos que $R$ es una $f$-retracción).

**Caso (b)**: En este caso usamos toda la sucesión $\{T^n\}$ y procedemos exactamente igual que en el caso anterior para obtener una $f$-ergódica retracción $R$ de $C$ en $Fix(f)$. De nuevo se demuestra que $Fix(f) \subseteq Fix(T)$. Si $x \in Fix(f)$ tomamos una subsucesión $\{T^{n_k}(x)\}$ de $\{T^n(x)\}$ tal que $T^{n_k}(x) \rightharpoonup x$. Haciendo uso de la propiedad GGLD, si $T^{n_k}(x) \not\rightarrow x$, obtenemos

$$B = \limsup_j \|T^{n_j}(x) - x\| < \limsup_i \limsup_j \|T^{n_i}(x) - T^{n_j}(x)\|.$$

Elijamos $\epsilon > 0$ tal que

$$B + \epsilon < \limsup_i \limsup_j \|T^{n_i}(x) - T^{n_j}(x)\|.$$

Puesto que $T$ es de tipo asintóticamente no-expansivo, podemos encontrar $n_0$ de manera que

$$(\spadesuit) \qquad \|T^n(x) - T^n(y)\| \leq \|x - y\| + \frac{\epsilon}{4},$$

para todo $n \geq n_0$ y todo $y \in C$.

Seleccionamos $n_{i_0} > n_0$ y una sucesión $n_{i_0} + n_0 < n_{j_1} < n_{j_2} < \ldots$ tal que

$$B + \epsilon \leq \|T^{n_{i_0}}(x) - T^{n_{j_l}}(x)\| = \|T^{n_{i_0}}(x) - T^{n_{i_0} + n_{j_l} - n_{i_0}}(x)\|.$$

Tomando $y = T^{n_{j_l} - n_{i_0}}(x)$ y $n = n_{i_0}$ en $(\spadesuit)$ se tiene

$$B + \epsilon \leq \|x - T^{n_{j_l} - n_{i_0}}(x)\| + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{para } l = 1, 2, \ldots$$

Si fijamos un número natual $l$, la regularidad asintótica de $T$ asegura que $T^{n_{j_l}-n_{i_0}+n_k}(x) \rightarrow x$ cuando $n_k \rightarrow \infty$ y entonces:

$$\begin{aligned} B+\epsilon &\leq \|x - T^{n_{j_l}-n_{i_0}}(x)\| + \tfrac{\epsilon}{4} \\ &\leq \limsup_k \|T^{n_{j_l}-n_{i_0}+n_k}(x) - T^{n_{j_l}-n_{i_0}}(x)\| + \tfrac{\epsilon}{4} \\ &\leq \limsup_k \|T^{n_k}(x) - x\| + \tfrac{\epsilon}{2} = B + \tfrac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Luego $T^{n_k}(x) \rightarrow x$. Puesto que $T^N$ es continua y $T$ es débilmente asintóticamente regular se sigue que $T^N(x) = x$. Como consecuencia $T^{Nm}(x) = x$, para todo $m$ y de nuevo la regularidad asintótica de $T$ implica que $T(x) = x$. ■

**Observación 2.2.4.**

Es conocido que $X$ satisface la propiedad GGLD si $X$ es UKK ó $X$ satisface la condición de Opial uniforme. Bajo estas hipótesis, el Teorema 2.2.3 es una consecuencia de los resultados de [BKR] y [Ln].

## 2.3 Punto fijo común para una familia conmutativa y convergencia de iteradas

La caracterización del conjunto de puntos fijos de aplicaciones asintóticamente no-expansivas como retractos no-expansivos, permiten demostrar la existencia de punto fijo común para familias de aplicaciones asintóticamente no-expansivas a través de las propiedades de la intersección de retractos no-expansivos.

**Teorema 2.3.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$. Supongamos que toda aplicación asintóticamente no-*

*expansiva de $C$ en sí mismo satisface la $(P)_w$-fpp. Entonces para una familia arbitraria conmutativa $\mathcal{G}$ de aplicaciones asintóticamente no-expansivas de $C$ en sí mismo, el conjunto de puntos fijos común de $\mathcal{G}$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$.*

*En particular, el resultado es válido para las hipótesis sobre el espacio $X$ del Corolario 2.2.1.*

**Demostración:**

En primer lugar demostraremos que si card $\mathcal{G} = n$, $n = 1, 2...$, el conjunto de puntos fijos común de $\mathcal{G}$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$. La prueba la haremos por inducción en $n$.

Si card $\mathcal{G} = 1$, el resultado se sigue del Teorema 2.2.2.

Supongamos ahora que la conclusión es cierta para card $\mathcal{G} = n - 1$ y sea $\mathcal{G} = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ una familia conmutativa de aplicaciones asintóticamente no-expansivas de $C$ en sí mismo. Consideremos la familia $\{T_1 \circ T_i : i = 2, ...n\}$. Puesto que tenemos una familia conmutativa de $n - 1$ aplicaciones asintóticamente no-expansivas, la hipótesis de inducción implica que existe una retracción no-expansiva $R$ de $C$ en $\bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i)$. Además, $\bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i)$ es un conjunto no vacío y $T_1$-invariante. En efecto, si $T_1 \circ T_i(x) = x$ para $i = 2, ...n$ se tiene $T_1(x) \in \bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i)$, pues $T_1 \circ T_i(T_1(x)) = T_1 \circ T_1 \circ T_i(x) = T_1(x)$. Por otro lado $T_1 \circ R : C \rightarrow \bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i)$ es una aplicación no-expansiva. En efecto,

$$T_1 \circ R = T_1 \circ (T_1 \circ T_2)^k \circ R = T_1^{k+1} \circ T_2^k \circ R,$$

y para todos $x, y \in C$ tenemos

$$\|T_1 \circ R(x) - T_1 \circ R(y)\| \leq |T_1^{k+1}||T_2^k|\|x - y\|.$$

Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos que $T_1 \circ R$ es no-expansiva. Por el

Teorema 2.2.2, $Fix(T_1 \circ R)$ es un retracto no vacío de $C$. Si $x \in Fix(T_1 \circ R)$ tenemos que $x \in \bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i)$ y por tanto $R(x) = x$. Como consecuencia $x = T_1 \circ R(x) = T_1(x)$ y $x \in Fix(T_1)$. Así $Fix(T_1 \circ R) \subseteq \bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i) \cap Fix(T_1)$, lo cual claramente implica que $Fix(T_1 \circ R) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Fix(T_i)$.

Por otro lado $\bigcap_{i=1}^{n} Fix(T_i) \subseteq Fix(T_1 \circ R)$. Efectivamente, si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} Fix(T_i)$, se tiene $x \in \bigcap_{i=2}^{n} Fix(T_1 \circ T_i)$. Luego $R(x) = x$ y $x \in Fix(T_1 \circ R)$. Por tanto $Fix(T_1 \circ R) = \bigcap_{i=1}^{n} Fix(T_i)$ lo que completa la prueba para el caso finito.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de conjuntos resultantes de la intersección del conjunto de puntos fijos común de un número finito de aplicaciones de la familia $\mathcal{G}$. Acabamos de probar que $\mathcal{F}$ es una familia de retractos no-expansivos de $C$ y claramente esta familia está dirigida por la inclusión de conjuntos. Puesto que $C$ tiene la FPP y la CFPP el resultado es una consecuencia inmediata del Lema 1.1.1. ■

**Observación 2.3.1.**

Observemos que en la demostración de este teorema, la obtención de punto común para una familia finita se deriva casi directamente de que sus conjuntos de puntos fijos sean retractos no-expansivos. Como tal hecho es cierto en el marco de trabajo del Teorema 2.2.2 podemos recurrir al Lema 1.1.2 para enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.2.** *Sean $X$ un espacio de Banach dotado de una topología $\tau$ de e.v.t. más débil que la inducida por la norma y tal que la norma sea $\tau$-semicontinua inferiormente. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, convexo, $\tau$-secuencialmente compacto y $\tau$-compacto de $X$, tal que toda aplicación asintóticamente no-expansiva* *de $C$ en sí mismo satisface la $(P)_\tau$-fpp. Entonces para una familia numerable conmutativa $\mathcal{G}$ de aplicaciones asintóticamente no-expansivas de $C$ en sí mismo, el conjunto de puntos fijos común de $\mathcal{G}$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$.*

Gracias al Corolario 2.2.2 las hipótesis de este teorema incluyen el caso en que $X$ sea el espacio $L_1(\mu)$ con la *clm* topología.

Como ya comentamos en el Capítulo I, no es conocido si el Lema 1.1.1 es válido para topologías distintas de la débil y por tanto, si el Teorema 2.3.1 puede extenderse a topologías arbitrarias $\tau$. ■

Otra consecuencia de las propiedades de la intersección de retractos es la siguiente.

**Corolario 2.3.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$. Supongamos que toda aplicación asintóticamente no-expansiva de $C$ en sí mismo satisface la $(P)_w$-fpp. Si $T : C \to C$ es una aplicación eventualmente asintóticamente no-expansiva (i.e. existe un entero $N \geq 1$ tal que*

$$\|T^i(x) - T^i(y)\| \leq k_i\|x - y\| \quad i \geq N,$$

*donde $\{k_i\}$ es una sucesión de números reales con $\lim_i k_i = 1$), entonces $T$ tiene un punto fijo. Además, $Fix(T)$ es un retracto no-expansivo de $C$.*

**Demostración:**

Es fácil comprobar que para una aplicación $f$ definida de $C$ en sí mismo se tiene $Fix(f) = Fix(f^n) \cap Fix(f^{n+1})$. Bajo las hipótesis del Corolario 2.3.1 $Fix(T^N)$ y $Fix(T^{N+1})$ son conjuntos no vacíos. Como $T^N$ y $T^{N+1}$ son asintóticamente no-expansivas, $Fix(T) = Fix(T^N) \cap Fix(T^{N+1})$ es un retracto no vacío y no-expansivo de $C$. ■

Como consecuencia de la existencia de una retracción $T$-ergódica para una aplicación $T : C \to C$, pueden obtenerse resultados de convergencia de las iteradas de $T$.

**Proposición 2.3.1.** *Sean $C$ un subconjunto débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach $X$, $T : C \to C$ una aplicación con $Fix(T) \neq \emptyset$ y supongamos que $dist(T^n(x), Fix(T)) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si existe una retracción no-expansiva $R : C \to Fix(T)$ satisfaciendo $RT = R$, entonces $T^n(x)$ converge a $R(x)$.*

**Demostración:**

Para un número $\epsilon > 0$ podemos encontrar un entero $N \geq 1$ tal que

$$dist(T^n(x), Fix(T)) < \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Elijamos $p_n \in Fix(T)$ para cada $n \geq N$ tal que $\|T^n(x) - p_n\| < \epsilon$. Entonces

$$\|R(x) - T^n(x)\| \leq \|R(x) - p_n\| + \|p_n - T^n(x)\|.$$

Además

$$\|R(x) - p_n\| = \|R(T^n(x)) - R(p_n)\| \leq \|T^n(x) - p_n\|,$$

lo cual implica que $\|R(x) - T^n(x)\| \leq 2\|T^n(x) - p_n\| < 2\epsilon$ y esto concluye la prueba.

■

**Corolario 2.3.2.** *Sean $X$,$C$ y $T$ como en el Teorema 2.2.3 a). Si existe una constante $c > 0$ de forma que para cada $x \in C$, $\|x - T(x)\| \geq c \quad dist(x, Fix(T))$, entonces $T^n(x)$ converge a $R(x)$.*

**Demostración:**

Por hipótesis

$$c \quad dist(T^n(x), Fix(T)) \leq \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| \qquad \forall n \geq 1.$$

Luego, $dist(T^n(x), Fix(T)) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y la conclusión se sigue de la Proposición 2.3.1. ■

Observemos que este corolario puede verse como un recíproco de un resultado de tipo ergódico.

# Capítulo 3

# Teoremas de Punto Fijo para Aplicaciones No-expansivas Multivaluadas

En el presente capítulo presentaremos resultados de existencia de puntos fijos para aplicaciones multivaluadas no-expansivas con rangos contenidos ó no en sus dominios; principalmente encaminados a extender y generalizar el Teorema de Kirk-Massa (Teorema 1.6.3) a espacios, cuyas geometrías vienen descritas en términos de los módulos de no compacidad asociados a las distintas medidas de no compacidad $\alpha$,$\beta$ y $\chi$.

El marco de trabajo del Capítulo 3 vendrá dado, en general, por un espacio de Banach $X$ y una topología $\tau$ de e.v.t. sobre $X$ tal que la función norma es $\tau$-slsc.

Comenzamos la primera sección probando que un espacio de Banach $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial si y sólo si $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) = 1$. A continuación obtendremos el teorema principal de esta sección que por un lado relaciona el centro asintótico de una sucesión regular respecto de un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto del espacio de Banach $X$ con su módulo de compacidad $\Delta_{X,\beta}(\cdot)$, y por otro con el módulo de compacidad $\Delta_{X,\chi}(\cdot)$ si además $X$ satisface condición de Opial no-estricta respecto a $\tau$. Como consecuencia de los resultados precedentes se obtendrá la unicidad del centro asintótico de una sucesión regular respecto de un conjunto $\tau$-secuencialmente compacto si el espacio $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial. Veremos con un ejemplo que no podemos debilitar la hipótesis sobre la regularidad de la sucesión. Ahora bien, puesto que para una ultra red los radios asintóticos de todas sus subrredes respecto de un conjunto débilmente compacto y convexo coinciden, probaremos un resultado análogo al anterior para centros asintóticos de redes en términos, esta vez, del módulo de convexidad no-compacta asociado a la medida de no compacidad de Kuratowski $\alpha$.

Como hicimos notar en el Capítulo 1, el método de los centros asintóticos así como ciertas propiedades de estos conjuntos son claves en la obtención de puntos fijos para aplicaciones multivaluadas no-expansivas. De igual forma, los resultados precedentes sobre los centros asintóticos serán definitivos para la localización de puntos fijos de este tipo de aplicaciones, en los teoremas de la segunda y última sección del presente capítulo.

Probaremos un resultado de existencia de punto fijo para una aplicación multivaluada no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva definida en un subconjunto cerrado acotado y convexo $C$ de un espacio de Banach $X$, con imagen en los subconjuntos compactos y convexos de $C$, si el espacio $X$ tiene característica de convexidad no compacta $\epsilon_\beta(X)$ menor que uno (en particular si $X$ es casi uniformemente convexo). Merece la pena destacar que el hecho de que la imagen de la aplicación caiga en su dominio permite suponer que $C$ es separable y así podemos trabajar con los centros asintóticos de sucesiones. Este resultado será consecuencia de otro más general formulado para una topología $\tau$ en las hipótesis antes mencionadas. Si, además el espacio ambiente $X$ verifica la condición de Opial no-estricta se probará, usando algunas propiedades de conjuntos $\chi$-minimales, que la $\chi$-contractividad puede evitarse. Un ejemplo confirmará que este resultado generaliza el Teorema de Kirk-Massa.

Los últimos teoremas del Capítulo 3 van a ser extensiones de los resultados anteriores a una aplicación multivaluada no-expansiva con imagen en un espacio más grande que el de partida. En ellos necesitamos trabajar con centros asintóticos de redes pues no puede suponerse la separabilidad del dominio de la aplicación, lo que nos obliga a utilizar la relación antes mencionada entre el centro asintótico de redes y el modulo de convexidad no compacta $\Delta_{X,\alpha}(\cdot)$.

## 3.1 Módulos de no compacidad y centros asintóticos

En esta sección vamos a estudiar relaciones entre ciertas propiedades geométricas de un espacio de Banach $X$ y los módulos de no compacidad definidos en la Sección 1.4.

Sean $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. sobre $X$. Para comenzar vamos a establecer una relación entre la condición $\tau$-uniforme de Opial de un espacio $X$ y el módulo $\Delta_{X,X,\tau}(\cdot)$. Con este fin haremos uso del siguiente lema:

**Lema 3.1.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. sobre $X$ tal que $X$ cumple la condición de Opial no-estricta respecto a $\tau$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada $\tau$-convergente a un vector $x$, entonces*

$$\chi(\{x_n\}) = \limsup_n \|x_n - x\|.$$

**Demostración:**

Por definición de límite superior, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \limsup_n \|x_n - x\| + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, y de aquí $\chi(\{x_n : n \in N\}) \leq \limsup_n \|x_n - x\|$.

Para demostrar la desigualdad contraria, supongamos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ puede ser finitamente recubierto por bolas de radio $r < \limsup_n \|x_n - x\|$. Consideremos una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ de manera que $\lim_n \|y_n - x\| = \limsup_n \|x_n - x\|$. Entonces, debe existir una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ contenida en una bola $B(y,r)$ para algún $y \in X$. Por tanto, obtenemos

$$\liminf_k \|y_{n_k} - y\| \le r < \limsup_n \|x_n - x\| = \lim_n \|y_n - x\| = \liminf_k \|y_{n_k} - x\|,$$

lo cual contradice el hecho de que $X$ verifica la condición de Opial no-estricta, pues $\{y_{n_k}\}$ es $\tau$-convergente a $x$. ∎

**Teorema 3.1.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología sobre $X$ tal que la función norma es $\tau$-slsc. Entonces, $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial si y sólo si* $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) = \lim_{\epsilon\to 1^-} \Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon) = 1$.

**Demostración:**

Supongamos que $X$ verifica la condición $\tau$-uniforme de Opial. Sea cualquier número positivo $\epsilon < 1$. Por definición de $\Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon)$, dado $\eta > 0$ podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ en $B_X$ tal que $\chi(\{x_n\}) \ge \epsilon$, $\tau - \lim_n x_n = w$ y $\|w\| \ge 1 - \eta - \Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon)$.

Tomemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\limsup_n \|x_n - w\| = \lim_k \|x_{n_k} - w\|$. Por el lema anterior se tiene que $\chi(\{x_{n_k}\}) = \lim_k \|x_{n_k} - w\| = \limsup_n \|x_n - w\| = \chi(\{x_n\}) \ge \epsilon$.

Sea $y_{n_k} = x_{n_k} - w$. Teniendo en cuenta que $\chi(\{y_{n_k}\}) = \chi(\{x_{n_k}\})$ y que $r_{X,\tau}(\cdot)$ es una función creciente, deducimos

$$\frac{1}{\epsilon} \ge \frac{\liminf_k \|x_{n_k}\|}{\epsilon} = \frac{\liminf_k \|y_{n_k} + w\|}{\epsilon} \ge 1 + r_{X,\tau}\Big(\frac{\|w\|}{\epsilon}\Big) \ge$$
$$1 + r_{X,\tau}\Big(\frac{1-\eta-\Delta_{X,\chi,\tau}(\epsilon)}{\epsilon}\Big).$$

Si $1-\eta-\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-)$ fuese un número positivo, usando la continuidad de $r_{X,\tau}(\cdot)$ y haciendo tender $\epsilon \to 1^-$ en la desigualdad anterior, obtendríamos que $r_{X,\tau}(1-\eta-\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-)) \le 0$, lo que contradice la condición $\tau$-uniforme de Opial. Resulta pues que $1-\eta-\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) \le 0$, y como $\eta$ ha sido elegido arbitrariamente , $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) = 1$.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{\epsilon \to 1^-} \Delta_{X,X,\tau}(\epsilon) = 1$. Sea $c > 0$. Atendiendo a la definición de $r_{X,\tau}(c)$, dado $\eta > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ $\tau$-convergente al vector nulo con $\liminf_n \|x_n\| \geq 1$, y un vector $x \in X$, $\|x\| \geq c$ tales que

$$\liminf_n \|x_n + x\| < 1 + r_{X,\tau}(c) + \eta.$$

Por otro lado, la definición de $r_{X,\tau}(0)$ implica que $\liminf_n \|x_n + x\| \geq 1 + r_{X,\tau}(0)$ para todo $y \in X$. Como consecuencia

$$\chi(\{x + x_n\}) = \chi(\{x_n\}) \geq 1 + r_{X,\tau}(0),$$

siendo esto cierto también para cualquier subsucesión de $\{x_n\}$.

Sea $y_n = \dfrac{x_n + x}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta}$. Para cierta subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ se tendrá que $\|y_{n_k}\| \leq 1$, y además

$$\chi(\{y_{n_k}\}) \geq \frac{1 + r_{X,\tau}(0)}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta}.$$

Puesto que $\tau - \lim_k y_{n_k} = \dfrac{x}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta}$ obtenemos:

$$\frac{c}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta} \leq \frac{\|x\|}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta} \leq 1 - \Delta_{X,X,\tau}\Big(\frac{1 + r_{X,\tau}(0)}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta}\Big).$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario concluimos

$$\frac{c}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta} \leq 1 - \Delta_{X,X,\tau}\Big(\Big(\frac{1 + r_{X,\tau}(0)}{1 + r_{X,\tau}(c) + \eta}\Big)^-\Big).$$

De aquí y sin olvidar que $\lim_{\epsilon \to 1^-} \Delta_{X,X,\tau}(\epsilon) = 1$, se sique que $r_{X,\tau}(c) > r_{X,\tau}(0)$, para todo $c > 0$. Esto nos lleva a que $r_{X,\tau}(0) = 0$, pues de lo contrario $r_{X,\tau}(\cdot)$ sería constante en $[0, -r_{X,\tau}(0)]$. Luego, $r_{X,\tau}(c) > 0$ para todo $c > 0$, lo que equivale a que $X$ verifique la condición $\tau$-uniforme de Opial. ∎

Este resultado constituye una generalización, para una topología arbitraria, de la caracterización en términos del módulo de convexidad no compacta dada por [Pr], de un espacio reflexivo que verifica la condición de Opial uniforme.

Antes de proseguir con nuestros resultados daremos un último detalle de notación.

**Definición 3.1.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $D$ un subconjunto acotado de $X$ y $C$ un subconjunto cualquiera de $X$. Se define el radio de Chebyshev de $D$ relativo a $C$ como:*

$$r_C(D) := \inf\{\sup\{\|x-y\| : y \in D\} : x \in C\}.$$

El siguiente teorema establece una conexión entre el centro asintótico de una sucesión y los módulos $\Delta_{X,\beta,\tau}(\cdot)$ y $\Delta_{X,X,\tau}(\cdot)$ y, jugará un importante papel en las demostraciones de los resultados obtenidos en todo el Capítulo en curso.

**Teorema 3.1.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Consideremos $C$ un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $C$ que es regular con respecto a $C$. Entonces*

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq (1-\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-))r(C,\{x_n\}).$$

*Además si $X$ satisface la condición de Opial no-estricta con respecto a $\tau$, se tiene que*

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq (1-\Delta_{X,X,\tau}(1^-))r(C,\{x_n\}).$$

**Demostración:**

Denotemos por $r = r(C,\{x_n\})$ y por $A = A(C,\{x_n\})$. Como vimos en la Sección 2.1, la $\tau$ compacidad secuencial de $C$ garantiza que $A \neq \emptyset$.

Consideremos $\{y_n\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$ $\tau$-convergente a un elemento $z \in C$ y tal que existe el límite $\lim\limits_{n\neq m}\|y_n - y_m\|$. Por ser $\{x_n\}$ regular relativa a $C$ (ver Definición 1.4.3) $r = r(C,\{y_n\})$ y, puesto que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc, se tiene que

$$r \leq \limsup_n \|y_n - z\| \leq \liminf_m \limsup_n \|y_n - y_m\| = \lim_{n \neq m} \|y_n - y_m\|.$$

Luego $\beta(\{y_n\}) \geq r$.

Por otra parte, si $X$ satisface la condición de Opial no-estricta respecto de $\tau$, el Lema 3.1.1 nos dice que

$$\chi(\{y_n\}) = \limsup_n \|y_n - z\| \geq r.$$

Sea cualquier $x \in A$, entonces $x \in A(C, \{y_n\})$ con lo que $r = \limsup_n \|y_n - x\|$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ , $\|y_n - x\| < r + \epsilon$ para $n$ natural mayor o igual que un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión

$$\left\{\frac{y_n - x}{r + \epsilon}\right\}_{n \geq n_0}$$

está contenida en la bola unidad de $X$, es $\tau$-convergente a $\dfrac{z - x}{r + \epsilon}$ y $\beta\Big(\Big\{\frac{y_n - x}{r+\epsilon}\Big\}\Big) \geq \frac{r}{r+\epsilon}$.

Para $X$ en el segundo supuesto se tiene además que $\chi\Big(\Big\{\frac{y_n - x}{r+\epsilon}\Big\}\Big) \geq \frac{r}{r+\epsilon}$. Deduciéndose que

$$\|x - z\| \leq \Big(1 - \Delta_{X,\beta,\tau}\Big(\frac{r}{r + \epsilon}\Big)\Big)(r + \epsilon),$$

y

$$\|x - z\| \leq \Big(1 - \Delta_{X,\chi,\tau}\Big(\frac{r}{r + \epsilon}\Big)\Big)(r + \epsilon),$$

si $X$ satisface la condición de Opial no-estricta respecto de $\tau$.

Ahora tomando límite cuando $\epsilon$ tiende a cero, y puesto que estas desigualdades son ciertas para todo $x \in A$ la prueba queda completada. ■

Como sabemos el centro asintótico de una sucesión en un espacio UCED es vacío ó está constituido por un único punto. Si unimos el resultado anterior al Teorema 3.1.1, obtenemos esta propiedad del centro asintótico bajo otras hipótesis.

**Corolario 3.1.1.** *Sean $X$, $\tau$, $C$ y $\{x_n\}$ como en el Teorema 3.1.2. Si $X$ satisface la condición $\tau$-uniforme de Opial, entonces $A(C, \{x_n\})$ es unitario.*

De paso también deducimos que en espacios con la condición $\tau$-uniforme de Opial, la relación del Teorema 3.2.1 es la mejor posible. En el Ejemplo 3.2.1 se dará un ejemplo no trivial en el que este hecho también es cierto.

Observemos que si $\tau$ es la topología débil, la prueba del Teorema 3.1.2 puede adaptarse al supuesto de que $C$ sea un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach reflexivo. En este marco, si atendemos a la relación existente entre los módulos de convexidad no compacta asociados a $\alpha$ y $\beta$, podemos enunciar el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.2.** *Sea $C$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach reflexivo y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $C$ que es regular con respecto a $C$. Entonces*

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \leq (1 - \Delta_{X,\alpha}(1^-))r(C,\{x_n\}).$$

En vista de los resultados precedentes, nos pareció interesante intentar suprimir la hipótesis de regularidad de la sucesión; tal posibilidad nos llevaría, por ejemplo, a que los espacios con la condición de Opial uniforme tendrían centros asintóticos unitarios. Desafortunadamente, la respueta es negativa como justificamos con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.1.**

Sea $\ell_2^\infty := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ y consideremos $X$ el espacio producto $\ell_2^\infty \times \ell_2$ con la norma

$$\|(x,y)\| = \left(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \ell_2^\infty,\ y \in \ell_2.$$

Comencemos probando que

$$\Delta_{X,\alpha}(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Al estar $\ell_2$ isométricamente contenido en $X$, es casi evidente que

$$\Delta_{X,\alpha}(\epsilon) \leq \Delta_{\ell_2,\alpha}(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Pasemos a estudiar la desigualdad contraria. La relación entre las medidas de no compacidad de Kuratowski y de Hausdorff (ver Sección 1.4) permiten establecer de forma inmediata que

$$\Delta_{X,\alpha}(\epsilon) \geq \Delta_{X,\chi}\Big(\frac{\epsilon}{2}\Big),$$

para todo $\epsilon > 0$. Estimemos el valor de $\Delta_{X,\chi}(\frac{\epsilon}{2})$. Puesto que $X$ es un espacio reflexivo, este módulo puede expresar como

$$\Delta_{X,\chi}\Big(\frac{\epsilon}{2}\Big) = \inf\{1 - \|z\| : w - \lim_n z_n = z,\ \|z_n\| \leq 1,\ \chi(\{z_n\}) \geq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Sea $\{(x_n, y_n)\}$ una sucesión en $X$ débilmente convergente a un vector $(x_o, y_o) \in X$ tal que $\|(x_n, y_n)\| \leq 1$ y $\chi(\{(x_n, y_n)\}) \geq \frac{\epsilon}{2}$.

De ser $w - \lim_n (x_n, y_n) = (x_o, y_o)$ se sigue que $\lim_n x_n = x_o$ y que $\{y_n\}$ converge débilmente a $y_o$ en $\ell_2$. Pasando a subsucesiones si fuese necesario podemos suponer que existen los límites $\lim_n \|y_n - y_o\|_2$ y $\lim_n \|y_n\|_2$, y entonces

$$\lim_n \|y_n\|_2^2 = \|y_o\|_2^2 + \lim_n \|y_n - y_o\|_2^2,$$

(ver [ADL, Capítulo V]).

Por otro lado, no es difícil probar que $X$ satisface la condición de Opial uniforme con módulo de Opial igual al de $\ell_2$, luego aplicando Lema 3.1.1 se tiene

$$\chi(\{(x_n, y_n)\}) = \limsup_n \|(x_n, y_n) - (x_o, y_o)\| = \lim_n \|y_n - y_o\|_2 \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 \geq \lim_n \|(x_n, y_n)\|^2 &= \lim_n \|x_n\|_\infty^2 + \|y_n\|_2^2 \\ &= \|x_o\|_\infty^2 + \|y_o\|_2^2 + \lim_n \|y_n - y_o\|_2^2 \\ &= \|(x_o, y_o)\|^2 + \lim_n \|y_n - y_o\|_2^2 \\ &\geq \|(x_o, y_o)\|^2 + \tfrac{\epsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

Con lo cual $\|(x_o, y_o)\| \leq \sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}$. Por tanto,

$$\Delta_{X,X}(\frac{\epsilon}{2}) \geq 1 - \sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}},$$

deduciéndose, como queríamos demostrar que

$$\Delta_{X,\alpha}(\epsilon) = 1 - \sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}.$$

( Observemos que $\Delta_{X,X}(\epsilon) \leq \Delta_{\ell_2,X}(\epsilon) = 1-\sqrt{1-\epsilon^2}$, y entonces $\Delta_{X,X}(\epsilon) = 1 - \sqrt{1-\epsilon^2}$).

Consideremos ahora la sucesión $\{z_n\} \in X$ dada por $z_n = (x_n, 0)$ donde $x_n \in \mathbb{R}^2$ es la sucesión $x_{2n-1} = (-1, 0)$ y $x_{2n} = (1, 0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $B$ es la bola unidad de $\ell_2^\infty$, sea $C = B \times \{0\}$. Claramente $C$ es un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$ y contiene a la sucesión $\{z_n\}$. Es un ejercicio sencillo probar que $r(C, \{z_n\}) = 1$ y que $A(C, \{z_n\}) = \{((0, y), 0) : y \in [-1, 1]\}$. Luego $r_C(A(C, \{z_n\})) = 1$ y sin embargo $1 - \Delta_{X,\alpha}(1^-) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, que no es mayor que 1.

De otro lado, $1 - \Delta_{X,X}(1^-) = 0$ pues $X$ satisface la condición de Opial uniforme y sin embargo, $A(C, \{z_n\})$ no es un conjunto unitario. ■

El hecho de que una ultra red es $n$-regular respecto de un conjunto débilmente compacto y convexo, nos hizo plantear si podríamos conseguir un resultado análogo al Teorema 3.1.2 en términos de redes. La respuesta afirmativa la encontramos en el próximo teorema. Pero antes precisamos del siguiente lema preliminar.

**Lema 3.1.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ una red débilmente convergente a $x \in X$. Entonces*

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{D}} A_\alpha = \{x\},$$

*donde $A_\alpha = \overline{co}(\{x_\beta : \beta \geq \alpha\})$.*

**Demostración:**

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Por hipótesis, 0 es adherente a $\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in \mathcal{D}$, luego está en $A_\alpha$ (pues es convexo),y entonces $0 \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{D}} A_\alpha$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $a \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{D}} A_\alpha$, $a \neq 0$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que $f(a) = \|a\|$ y $\|f\| = 1$. Puesto que $0 = w - \lim_\alpha x_\alpha$, dado $\epsilon = \frac{\|a\|}{3}$ existe $\alpha_o \in \mathcal{D}$ de manera que $| f(x_\alpha) | < \epsilon$ si $\alpha \geq \alpha_o$.

Ahora bien, como $a \in A_{\alpha_o}$ existe $b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{\beta_i}$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\beta_i \geq \alpha_o$ tal que $\|a - b\| < \epsilon$. Entonces se tiene

$$\|a\| = f(a) = f(a-b) + f(b) \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_{\beta_i}) < 2\epsilon < \|a\|,$$

que es una contradicción. ■

**Teorema 3.1.3.** *Sea $C$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ reflexivo y $\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}$ una ultra red acotada en $C$, entonces*

$$r_C(A(C, \{x_\beta\})) \leq (1 - \Delta_{X,\alpha}(1^-)) r(C, \{x_\beta\}).$$

**Demostración:**

Denotemos por $r = r(C, \{x_\beta\})$ y por $A = A(C, \{x_\beta\})$, que es un conjunto no vacío ( Sección 1.4). Dado que $\overline{co}(\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}) \subset C$ es un conjunto débilmente compacto, la ultra red $\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}$ converge débilmente a un elemento $z \in C$. Además para cada $x \in C$ existe $\lim_\beta \|x_\beta - x\|$.

Vamos a empezar demostrando que $\alpha(\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}) \geq r$.

En efecto, sea $d > \alpha(\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\})$, entonces existe una cantidad finita de subconjuntos de $C$, $B_1, B_2, ..., B_n$ (que podemos suponer disjuntos) cuyos diámetros son menor ó igual que $d$ que recubren $\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}$.

Debido a la definición de ultra red se tiene que $\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}$ está eventualmente en $B_1$ ó está eventualmente en $\bigcup_{i=2}^{n} B_i$. Supongamos en primer lugar que está eventualmente en $B_1$, entonces $\{x_\beta : \beta \geq \beta_o\} \subset B_1$, para cierto $\beta_o \in \mathcal{D}$. Luego para cualquier punto $x$ de $B_1$, se tiene que

$$\|x_\beta - x\| \leq d, \quad \text{para todo } \beta \geq \beta_o.$$

Así pues

$$r \leq \lim_{\beta \geq \beta_o} \|x_\beta - x\| \leq d,$$

y como consecuencia $\alpha(\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}) \geq r$.

En el segundo supuesto existirá $\beta_o \in \mathcal{D}$ tal que $\{x_\beta : \beta \geq \beta_o\} \subset \bigcup_{i=2}^{n} B_i$. Como esta subred es de nuevo una ultra red, razonamos como hicimos antes con toda la red, y entonces $\{x_\beta : \beta \geq \beta_o\}$ está eventualmente en $B_2$ ó eventualmente en $\bigcup_{i=3}^{n} B_i$. En el primer supuesto obtendríamos de nuevo que $\alpha(\{x_\beta : \beta \in \mathcal{D}\}) \geq r$. Siguiendo este procedimiento finito llegamos al resultado deseado.

Observemos que este mismo argumento es válido cualquiera que sea la subred $\{x_\gamma : \gamma \geq \beta\}$, $\beta \in \mathcal{D}$.

Sea $x \in A$. Como $\lim_{\beta} \|x_\beta - x\| = r$, cualquiera que sea $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\beta_o \in \mathcal{D}$ de manera que $\|x_\beta - x\| < r + \epsilon$ para todo $\beta \geq \beta_o$.

Entonces si llamamos $A_\beta = \overline{co}(\{x_\gamma - x\}_{\gamma \geq \beta})$, se tiene que $A_\beta \subset B(0, r + \epsilon)$ y $\alpha(A_\beta) = \alpha(\{x_\gamma - x\}_{\gamma \geq \beta}) \geq r$, para cada $\beta \geq \beta_o$.

De la definición de $\Delta_{X,\alpha}(\cdot)$ se desprende la desigualdad

$$\inf_{y \in A_\beta} \|y\| = d(0, A_\beta) \leq \Big(1 - \Delta_{X,\alpha}\Big(\frac{r}{r+\epsilon}\Big)\Big)(r + \epsilon),$$

para $\beta \geq \beta_o$.

Por ser $A_\beta$ un conjunto débilmente compacto resulta que $\inf_{y \in A_\beta} \|y\| = \|y_\beta\|$ para cierto $y_\beta \in A_\beta$ . Dado que los conjuntos $A_\beta$ están dirigidos por inclusión, la red $\{y_\beta : \beta \geq \beta_o\}$ está contenida en $A_{\beta_o}$. Luego tendrá una subred convergente a un punto, que obviamente es adherente a $A_{\beta_o}$. Como consecuencia este punto es adherente a cada $A_\beta$ para $\beta \geq \beta_o$. En virtud del Lema 3.1.2, el único punto que puede ser adherente a todos estos conjuntos es $z - x$, luego $z - x = w - \lim_\beta z_\beta$..

De este modo, sin más que aplicar la débil semicontinuidad de la norma obtenemos que

$$\|z - x\| \leq \Big(1 - \Delta_{X,\alpha}\Big(\frac{r}{r+\epsilon}\Big)\Big)(r + \epsilon),$$

y haciendo tender $\epsilon$ a cero

$$\|z - x\| \leq \Big(1 - \Delta_{X,\alpha}(1^-)\Big)r.$$

Como esta relación es cierta para todo $x \in A(C, \{x_\beta\})$, de forma inmediata conseguimos la desigualdad deseada. ■

## 3.2 Teoremas de Punto Fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas

El Teorema de Kirk-Massa para aplicaciones no-expansivas multivaluadas, no puede ser aplicado a espacios casi uniformemente convexos; pues en tales espacios, el centro asintótico de una sucesión acotada en un subconjunto cerrado, acotado y convexo, no es necesariamente compacto. El siguiente ejemplo debido a S. Prus [Pr] ilustra este hecho.

**Ejemplo 3.2.1.**

Sea $a$ un número real $0 < a < 1$ y $X_a$ el espacio $\ell_2$ renormado como sigue. Para $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ ( $\{e_k\}$ denota la base estándar de $\ell_2$) definimos su norma

$$|x|_a = \sup_n \left( x_n^2 + a \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sin dificultad se prueba que $|\cdot|_a$ es equivalente a la norma usual de $\ell_2$. En [Pr] es probado que $X_a$ es casi uniformemente convexo para cada $a$.

Consideremos $\{x_n\}$ una sucesión en $X_a$ tal que $w - \lim_n x_n = 0$ en $X_a$, $x \in X_a$ y supongamos que existe $\lim_n |x_n - x|_a$ . Puesto que $\ell_2$ y $X_a$ son isomorfos se tiene que $w - \lim_n x_n = 0$ en $\ell_2$. Usando un argumento habitual para espacios con base incondicional, podemos encontrar una subsucesión de $\{x_n\}$ que, sin pérdida de generalidad seguiremos llamando $\{x_n\}$, y una sucesión $\{y_n\}$ de soportes disjuntos tal que

$$\lim_n \|x_n - y_n\|_2 = 0.$$

De nuevo por la equivalencia de las normas se tiene que $\lim_n |x_n - y_n|_a = 0$. No es difícil demostrar que en estas condiciones existe $z_n \in X_a$ de manera que $y_n$ y $z_n$ tienen soportes disjuntos y $\lim_n |y_n - x|_a = \lim_n |y_n - z_n|_a$. Luego $\lim_n |x_n - x|_a = \lim_n |y_n - z_n|_a$. Tenemos pues que

$$\begin{aligned}
&\lim_n |x_n - x|_a = \lim_n |y_n - z_n|_a \\
&= \lim_n \sup_k \left( (y_n(k) - z_n(k))^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} (y_n(j) - z_n(j))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_n \sup_k \left( y_n(k)^2 + z_n(k)^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} y_n(j)^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} z_n(j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \lim_n \sup \sup_k \left( y_n(k)^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} y_n(j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_n \sup |y_n|_a = \lim_n \sup |x_n|_a.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $X_a$ satisface la condición de Opial no-estricta.

De esta condición obtenemos que para cada $x \in X_m$

$$\limsup_n |x - e_n|_a \geq 1,$$

mientras que para todos $k, n$ with $k < n$

$$|\sqrt{1-a}e_k - e_n|_a = 1.$$

Por tanto, se concluye que

$$A(B_{X_a}, \{e_n\}) \supseteq \sqrt{1-a} \quad \overline{co}\{e_n\}$$

y, en particular $A(B_{X_a}, \{e_n\})$ no es compacto.

Estos espacios sirven de ejemplo para afirmar que la relación resultante en el Teorema 3.1.2 es la mejor posible. En efecto, si denotamos por $A = A(B_{X_a}, \{e_n\})$, vamos a probar que

$$r_{B_{X_a}}(A) = (1 - \Delta_{X_a,\chi}(1^-))r(B_{X_a}, \{e_n\}) = \sqrt{1-a}$$

.

Como $\{\sqrt{1-a}e_n\} \subset A$ es fácil ver que $r_{B_{X_a}}(A) \geq \sqrt{1-a}$ (de hecho es una igualdad). Evidentemente $r(B_{X_a}, \{e_n\}) = 1$ y $\{e_n\}$ es regular respecto de $B_{X_a}$. Bastaría probar que $1 - \Delta_{X_a,\chi}(1^-) \leq \sqrt{1-a}$ para obtener la desigualdad deseada.

Sea $\epsilon < 1$ fijado. Por definición de $\Delta_{X_a,\chi}(\epsilon)$, dado $\eta > 0$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset B_{X_a}$ débilmente convergente a cierto $x \in X_a$ con $\chi(\{x_n\}) \geq \epsilon$ de manera que

$$|x|_a \geq 1 - \Delta_{X_a,\chi}(\epsilon) - \eta.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $\lim_n |x_n - x|_a$ y, puesto que $x_n - x \rightharpoonup 0$, razonando como antes podemos suponer también que $x_n - x$ y $x$ tienen soportes disjuntos. Por otro lado como $X_a$ satisface la condición de Opial no-estricta tenemos que $\chi(\{x_n\}) = \lim_n |x_n - x|_a \geq \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}
1 \geq \; & \limsup_n |x_n|_a^2 = \limsup_n \sup_k \left( x_n(k)^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} x_n(j)^2 \right) \\
& = \limsup_n \sup_k \left( (x_n(k) - x(k))^2 + x(k)^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} (x_n(j) - x(j))^2 + a \sum_{j=k+1}^{\infty} x(j)^2 \right) \\
& \geq a \lim_n \|x_n - x\|_2^{\,2} + |x|_a^2 \geq a \lim_n |x_n - x|_a^{\,2} + |x|_a^2 \geq a\epsilon^2 + |x|_a^2.
\end{aligned}$$

De aquí

$$1 - \Delta_{X_a,X}(\epsilon) \leq |x|_a + \eta \leq \sqrt{1 - a\epsilon^2} + \eta.$$

Como consecuencia de la elección arbitraria de $\eta$ y haciendo tender $\epsilon$ a 1, obtenemos $1 - \Delta_{X_a,X}(1^-) \leq \sqrt{1-a}$. ■

Observemos que en este ejemplo tampoco podemos aplicar el teorema de Lami-Dozo [La] para obtener punto fijo, puesto que $X_a$ no satisface la condición de Opial en sentido estricto.

El objetivo fundamental de esta sección es proporcionar resultados de existencia de punto fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas en espacios que incluyen, entre otros, a los casi uniformemente convexos. Previamente, expondremos algunos hechos auxiliares que nos permitirán hacer una presentación más directa y simplificada de las pruebas de dichos resultados.

La importancia del centro asintótico de una sucesión en la teoría de aplicaciones no-expansivas univaluadas parte del hecho siguiente: si $C$ es un subconjunto de un espacio de Banach $X$ y $\{x_n\} \subset C$ es una sucesión de puntos fijos aproximados de una aplicación $T : C \to C$ no-expansiva, entonces $A(C, \{x_n\})$ es invariante bajo $T$. El resultado que exponemos a continuación puede ser interpretado como una adaptación de este hecho a aplicaciones no-expansivas multivaluadas, y de igual forma constituye un punto de partida en la obtención de puntos fijos para esta clase de aplicaciones.

En lo que sigue consideraremos $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Consideremos $C$ un subconjunto acotado, $\tau$-secuencialmente compacto y separable de $X$, $T : C \to K(C)$ una aplicación no-expansiva y $\{x_n\}$ una sucesión en $C$ tal que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$.*

*Entonces, existe una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ de manera que*

$$Tx \cap A \neq \emptyset, \quad \forall x \in A := A(C, \{z_n\}).$$

**Demostración:**

La separabilidad de $C$ permite aplicar el Lema 1.4.1 para encontrar una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ que sea regular y asintóticamente uniforme respecto de $C$. Denotemos por $r := r(C, \{z_n\})$. Para cada $n \geq 1$ la compacidad de $Tz_n$ garantiza que existe $u_n \in Tz_n$ tal que

$$\|z_n - u_n\| = d(z_n, Tz_n).$$

Tomemos $x \in A$. Como $Tx$ es compacto, podemos encontrar $v_n \in Tx$ satisfaciendo

$$\|u_n - v_n\| = d(u_n, Tx) \leq H(Tz_n, Tx) \leq \|z_n - x\|,$$

y por el mismo razonamiento podemos suponer que $\{v_n\}$ converge a un punto $\tilde{x} \in Tx$. De donde se sigue que

$$\limsup_n \|z_n - \tilde{x}\| = \limsup_n \|u_n - v_n\| \leq \limsup_n \|z_n - x\| = r.$$

Esto demuestra que $\tilde{x} \in A$, y entonces $Tx \cap A \neq \emptyset$. ■

Cuando $\tau$ es la topología débil, la Proposición 3.2.1 es probada a lo largo de la demostración del teorema de Kirk-Massa tal como aparece en [X5].

Como primera aplicación de la relación entre los módulos de no compacidad y los centros asintóticos expresada por el Teorema 3.1.2, obtenemos el siguiente teorema de punto fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas.

**Teorema 3.2.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $X$ satisface la condición $\tau$-uniforme de Opial. Entonces si $C$ es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to K(C)$ una aplicación no-expansiva, $T$ tiene un punto fijo.*

**Demostración:**

Fijado un elemento $x_0 \in C$ y un entero arbitrario $n \geq 1$, la aplicación $T_n : C \to KC(C)$ definida por

$$T_n x := \frac{1}{n}x_0 + (1 - \frac{1}{n})Tx, \quad x \in C,$$

es una contracción multivaluada. En virtud del Principio de Contracción de Banach (Teorema 1.4.2) $T_n$ tiene un punto fijo $x_n \in C$, y de forma inmediata se obtiene que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{x_n\}$ es regular respecto de $C$. Del Corolario 3.1.1 se sigue $A(C, \{x_n\}) = \{x\}$ para cierto $x \in C$, lo que obviamente implica que $\{x_n\}$ es asintóticamente uniforme respecto de $C$. Con estos supuestos, no hay más que seguir la prueba de la Proposición 3.2.1 para llegar a que

$$Tx \cap A(C, \{x_n\}) \neq \emptyset.$$

Conluyéndose que $x \in Tx$. ∎

Aunque este resultado está implícito en el que enunciamos a continuación, hemos decidido incluir una prueba alternativa.

**Teorema 3.2.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida sobre $X$ respecto de la cual $X$ verifica la condición de Opial. Supongamos que $C$ es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to K(C)$ es una aplicación no-expansiva, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Este teorema generaliza el teorema de E. Lami Dozo [La] para aplicaciones no-expansivas multivaluadas, probado para la topología débil. Como la demostración del Teorema 3.2.2 es similar a la dada en [La] preferimos omitirla.

**Observación 3.2.1.**

- En los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 estamos suponiendo que el espacio $X$ tiene sucesiones $\tau$-convergentes que no lo son en norma. De lo contrario, dado que $C$ es un subconjunto $\tau$-secuencialmente compacto y que siempre encontramos una sucesión de puntos fijos aproximados en $C$, i.e., una sucesión $\{x_n\}$ para la cual $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$, puede suponerse que $\{x_n\}$ es $\tau$-convergente en $C$. Entonces $x = \tau - \lim_n x_n$ es necesariamente un punto fijo de $T$.

- Si $\tau$ es la topología débil y $C$ es un subconjunto acotado, convexo y $w$-secuencialmente compacto, $C$ también es cerrado en norma. Por tanto esta hipótesis sobre $C$ no sería necesaria en los teoremas precedentes. Observemos que tal hipótesis es usada para obtener una sucesión $\{x_n\}$ en $C$ tal que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. Probemos que para una topología arbitraria $\tau$ también podemos encontrar una sucesión de este tipo sin exigir que $C$ sea cerrado en norma.

  Sea $T : C \to K(C)$ no-expansiva y $C$ acotado, convexo. Dado $z \in \overline{C}^{\|\cdot\|}$, existe $\{z_n\} \subset C$ de manera que $\lim_n z_n = z$. La continuidad de $T$ respecto de la métrica de Hausdorff, implica que la sucesión $\{Tz_n\}$ es de Cauchy en el espacio métrico completo $K(\overline{C}^{\|\cdot\|})$ (ver [I, pág. 297]) y por tanto $\limsup_n Tz_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} Tz_k \in K(\overline{C}^{\|\cdot\|})$. Definimos $\overline{T}z = \limsup_n Tz_n$. Entonces se prueba sin dificultad que la aplicación $\overline{T} : \overline{C}^{\|\cdot\|} \to K(\overline{C}^{\|\cdot\|})$ extiende $T$ de forma no-expansiva. Aproximando una sucesión de puntos fijos para $\overline{T}$ por puntos de $C$ obtenemos una sucesión de puntos fijos aproximados en $C$.

■

Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc.

Supongamos que $C \subset X$ es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto. También supondremos que $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva, con $T(C)$ acotado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $C$ tal que $T$ satisface la condición

$$Tx \cap A \neq \emptyset, \quad \forall x \in A := A(C, \{x_n\}).$$

Fijado $x_0 \in A$ y para un número arbitrario $\mu \in (0, 1]$ consideremos la contracción $T_\mu : A \to KC(X)$ definida por

$$T_\mu x = \mu x_0 + (1 - \mu)Tx, \quad x \in A.$$

Sea $B$ un subconjunto acotado y no precompacto de $C$. Puesto que $T$ es 1-$\chi$-contractiva y $T_\mu(B) = \mu x_0 + (1 - \mu)T(B)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(T_\mu(B)) &= \chi(\mu x_0 + (1 - \mu)T(B)) = \chi((1 - \mu)T(B)) \\ &= (1 - \mu)\chi(T(B)) \leq (1 - \mu)\chi(B) < \chi(B). \end{aligned}$$

Por tanto, $T_\mu$ es $\chi$-condensante. Ahora bien, de ser $A$ convexo se sigue que $T_\mu$ satisface la misma condición (de contorno) que $T$ i.e.

$$T_\mu x \cap A \neq \emptyset, \quad \forall x \in A.$$

En estas condiciones el siguiente Teorema de Deimling [D2, Teorema 11.5] asegura que $T_\mu$ tiene un punto fijo $z_\mu \in A$. Como consecuencia, podemos encontrar una sucesión $\{z_n\}$ en $A$ satisfaciendo $\lim_n d(z_n, Tz_n) = 0$.

**Teorema 3.2.3.** ([D2]) *Sean $X$ un espacio de Banach y $\emptyset \neq D \subset X$ cerrado, acotado y convexo. Sea $F : D \to 2^X \backslash \{\emptyset\}$ una aplicación semicontinua superiormente y $\gamma$-condensante con valores cerrados y convexos, donde $\gamma(\cdot) = \alpha(\cdot)$ ó $\chi(\cdot)$. Si $Fx \cap \overline{I_D(x)} \neq \emptyset$ en $D$ entonces $Fix(F) \neq \emptyset$. ($I_D(x)$ es el conjunto "hacia dentro" de $x$ con respecto a $D$ definido por $I_D(x) := \{x + \lambda(y - x) : \lambda \geq 0, y \in D\}$).*

Con estos preliminares estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.2.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $C$ es un subconjunto cerrado, acotado, convexo, $\tau$-secuencialmente compacto y separable de $X$. Si $\Delta_{X,\beta,\tau}(1^-) > 0$ y $T : C \to KC(C)$ es una aplicación no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

*Si $\tau$ es la topología débil la condición de separabilidad de $C$ no es necesaria.*

**Demostración:**

En el caso de que $C$ sea débilmente compacto y convexo, puesto que $T$ es una aplicación de $C$ cuyas imágenes son compactos de $C$, puede construirse un subconjunto cerrado y convexo de $C$ que sea separable e invariante bajo $T$ (ver [GK2]). Supongamos pues, que $C$ es separable.

Usando los mismos argumentos que en el Teorema 3.2.1, encontramos una sucesión $\{x_n\} \subset C$, que es regular respecto de $C$ y tal que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. Bajo estas condiciones podemos, por un lado, aplicar la Proposicion 3.2.1 para suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$Tx \cap A \neq \emptyset, \quad \forall x \in A := A(C, \{x_n\}).$$

y por otro, el Teorema 3.1.2 para obtener la siguiente desigualdad

$$r_C(A) \leq \lambda r(C, \{x_n\}),$$

donde $\lambda := 1 - \Delta_{X,\beta,\tau}(1^-) < 1$.

De acuerdo con la observación hecha antes del teorema, está garantizado que existe una sucesión $\{x_n^1\}$ en $A$ satisfaciendo $\lim_n d(x_n^1, Tx_n^1) = 0$. De nuevo podemos suponer que $\{x_n\}$ es regular respecto de $C$, además de que

$$Tx \cap A^1 \neq \emptyset, \quad \forall x \in A^1 := A(C, \{x_n^1\}).$$

Si ahora aplicamos el Teorema 3.1.2 a la sucesión $\{x_n^1\}$, se tendrá que

$$r_C(A^1) \leq \lambda r(C, \{x_n^1\}).$$

Puesto que $\{x_n^1\} \subset A$ se verifica trivialmente que

$$r(C, \{x_n^1\}) \leq r_C(A)$$

y por tanto

$$r_C(A^1) \leq \lambda r_C(A).$$

Siguiendo este razonamiento inductivo, para cada número natural $m \geq 1$ construimos el conjunto $A^m$ y la sucesión $\{x_n^m\}_n$ donde $A^m = A(C, \{x_n^m\})$, $\{x_n^m\}_n \subset A^{m-1}$ tal que $\lim_n d(x_n^m, Tx_n^m) = 0$ y de modo que se tiene la siguiente relación

$$r_C(A^m) \leq \lambda^m r_C(A).$$

Veamos que si eligimos un punto $x_m \in A^m$, la sucesión $\{x_m\}_m$ es de Cauchy. En efecto, para cada $m \geq 1$ se tiene para todo entero positivo $n$:

$$\begin{aligned} \|x_{m-1} - x_m\| &\leq \|x_{m-1} - x_n^m\| + \|x_n^m - x_m\| \\ &\leq \mathrm{diam} A^{m-1} + \|x_n^m - x_m\|. \end{aligned}$$

Luego si tomamos límite superior cuando $n \to \infty$ resulta:

$$\begin{aligned} \|x_{m-1} - x_m\| &\leq \mathrm{diam} A^{m-1} + \limsup_n \|x_n^m - x_m\| = \mathrm{diam} A^{m-1} + r(C, \{x_n^m\}) \\ &\leq \mathrm{diam} A^{m-1} + r_C(A^{m-1}) \leq 2r_C(A^{m-1}) + r_C(A^{m-1}) \\ &= 3r_C(A^{m-1}) \leq 3\lambda^{m-1} r_C(A). \end{aligned}$$

Puesto que $\lambda < 1$, deducimos que existe $x \in C$ tal que $x_m$ converge a $x$. Para finalizar con la demostración, bastaría probar que $x$ es un punto fijo de $T$. En efecto, para cada $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_m, Tx_m) &\leq \|x_m - x_n^m\| + d(x_n^m, Tx_n^m) + H(Tx_n^m, Tx_m) \\ &\leq 2\|x_m - x_n^m\| + d(x_n^m, Tx_n^m). \end{aligned}$$

En primer lugar, tomemos límite superior cuando $n \to \infty$ para obtener:

$$d(x_m, Tx_m) \leq 2 \limsup_n \|x_m - x_n^m\| \leq 2\lambda^{m-1} r_C(A),$$

y ahora hacemos tender $m$ a infinito en ambos lados de la desigualdad para concluir que $\lim_m d(x_m, Tx_m) = 0$. Entonces la continuidad de $T$ implica que $d(x, Tx) = 0$ i.e. $x \in Tx$. ∎

**Observación 3.2.2.**

En el supuesto que $X$ satisfaga la condición de Opial no-estricta respecto de $\tau$ podemos recurrir al Teorema 3.2.1 para obtener este mismo resultado, suponiendo que $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) > 0$. ∎

**Corolario 3.2.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\beta(X) < 1$. Supongamos que $C$ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $X$ y $T : C \to KC(C)$ es una aplicación no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva. Entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Demostración:**

En la Sección 1.4 observamos que la condición $\epsilon_\beta(X) < 1$ implica la reflexividad del espacio $X$, y claramente que $\Delta_{X,\beta}(1^-) > 0$. Basta pues adaptar el Teorema 3.2.3 al caso de la topología débil. ∎

Por la observación anterior, si $X$ satisface la condición de Opial no-estricta, la tesis del Corolario 3.2.1 sigue siendo cierta si $\epsilon_\chi(X) < 1$. Más adelante se verá (Corolario 3.2.3) que bajo estas hipótesis sobre el espacio $X$ podemos prescindir de la $\chi$-contractividad de la aplicación.

Es interesante hacer notar que la clase de de los espacios para la que es válido este corolario incluye a los espacios $X$ casi uniformemente convexos, cuya característica de convexidad no compacta $\epsilon_\beta(X)$ es igual a cero (ver Sección 1.4). Sin embargo, contrariamente a los resultados precedentes de existencia de punto fijo para aplicaciones no-expansivas multivaluadas, necesitamos añadir la $\chi$-contractividad de la aplicación $T$ para obtener punto fijo.

**Observación 3.2.3.**

Si obviamos la hipótesis de ser $T$ no-expansiva, la conclusión del teorema no es cierta. Efectivamente, si $B_2$ es la bola unidad cerrada de $\ell_2$ y $T : B_2 \longrightarrow B_2$ está definida como sigue

$$T(x) = T(x_1, x_2, ...) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, ...),$$

es fácil comprobar que $T$ es una 1-$\chi$-contracción sin punto fijo. ∎

En principio, no sabemos si la condición de $\chi$-contractividad puede evitarse. De hecho, es un problema abierto si toda aplicación $T : C \longrightarrow K(X)$ no-expansiva es 1-$\chi$-contractiva, incluso para aplicaciones univaluadas. Sin embargo, veamos que si $T : C \longrightarrow K(X)$ es no-expansiva con $T(C)$ acotado, y $B$ es un subconjunto acotado y no precompacto de $C$ obtenemos que

$$\chi(T(B)) \leq \chi_C(B),$$

donde $\chi_C(B)$ se determina tomando, en la definición de la medida de no compacidad $\chi$, recubrimientos de $B$ por un número finito de bolas con centro en $C$. En efecto, si $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r)$ con $x_i \in C$, entonces

$$T(B) \subset \bigcup_{i=1}^{m} T(x_i) + rB(0,1).$$

Puesto que $T$ toma valores compactos, las propiedades de las medidas de no compacidad nos lleva a concluir que

$$\chi(T(B)) \leq r,$$

y entonces $\chi(T(B)) \leq \chi_C(B)$.

Esta observación, nos induce a buscar espacios en los que la medida de Hausdorff de un conjunto no dependa del espacio ambiente donde dicho conjunto se considere sumergido. De esta forma $T$ sería 1-$\chi$-contractiva. Tal hecho es cierto si el espacio

$X$ es separable o reflexivo (o más general si $X$ ó $X^*$ son débilmente compactamente generados [ADL]) y satisface la condición de Opial no-estricta.

**Teorema 3.2.5.** *Si $X$ es un espacio de Banach separable o reflexivo, $\tau$ una topología de e.v.t. sobre $X$ tal que $X$ cumple la condición de Opial no-estricta respecto a $\tau$. Supongamos que $C$ es un subconjunto acotado y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \to K(C)$ es una aplicación no-expansiva, entonces $T$ es 1-$\chi$-contractiva.*

*En el supuesto de que $X$ sea un espacio de Banach reflexivo y $\tau$ sea la topología débil, si $T : C \to K(X)$ es una aplicación no-expansiva y $T(C)$ acotado, entonces $T$ es 1-$\chi$-contractiva.*

**Demostración:**

Consideremos $B$ un subconjunto infinito de $C$. En ambos supuestos sobre $T$, se tiene que $T(B)$ es un conjunto infinito y acotado. Por tanto existe una sucesión $\{y_n\} \subset T(B)$ que es $\chi$-minimal (mirar [ADL, Capítulo III]) para definiciones y propiedades relativas a la $\chi$-minimalidad).

Por hipótesis sobre el espacio $X$, la medida de no compacidad $\chi$ es estrictamente minimalizable, y entonces podemos suponer que

$$\chi(\{y_n : n \in \mathbb{N}\}) = \chi(T(B)).$$

El conjunto $C$ es $\tau$-secuencialmente compacto, luego existe una subsucesión de $\{y_n\}$ que es $\tau$-convergente a un elemento $y \in C$. En el segundo supuesto, se sigue de la reflexividad de $X$ que $\{y_n\}$ es débilmente convergente a un elemento $y \in X$.

Tomando una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que $\tau - \lim_n y_n = y$ y $\lim_n \|y_n - y\|$ existe. Luego $\chi(\{y_n : n \in \mathbb{N}\}) = \lim_n \|y_n - y\|$ en virtud del Lema 3.1.1.

Ahora elijamos $x_n \in B$ tal que $y_n \in Tx_n$. Tomando una subsucesión si fuera necesario y siguiendo un argumento análogo al anterior, suponemos que $\tau - \lim_n x_n = u \in C$, $\lim_n \|x_n - u\|$ existe y $\chi(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \lim_n \|x_n - u\|$.

Por otro lado, puesto que $T$ toma valores compactos, tomamos $u_n \in Tu$ verificando

$$\|y_n - u_n\| = d(y_n, Tu) \leq H(Tx_n, Tu) \leq \|x_n - u\|, \quad n \geq 1.$$

Por la compacidad de $Tu$ y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{u_n\}$ converge en sentido fuerte a un punto $v \in Tu$. Se sigue pues que,

$$\begin{aligned}\chi(T(B)) &= \lim_n \|y_n - y\| \leq \limsup_n \|y_n - v\| = \limsup_n \|y_n - u_n\| \\ &\leq \lim_n \|x_n - u\| = \chi(\{x_n\}) \leq \chi(B)\end{aligned}$$

y $T$ es 1-$\chi$-contractiva. ■

Remitiéndonos a la Observación 3.2.2, deducimos del Teorema 3.2.5 los siguientes enunciados.

**Corolario 3.2.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach separable y $\tau$ una topología de e.v.t. definida en $X$, tal que las funciones de tipo $\tau$-nulas son $\tau$-slsc. Supongamos que $X$ cumple la condición de Opial no-estricta respecto a $\tau$ y $\Delta_{X,\chi,\tau}(1^-) > 0$. Si $C$ es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y $\tau$-secuencialmente compacto de $X$ y $T : C \longrightarrow KC(C)$ una aplicación no-expansiva, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Corolario 3.2.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\chi(X) < 1$, satisfaciendo la condición de Opial no-estricta. Supongamos que $C$ es un subconjunto débilmente compacto y convexo de $X$ y $T : C \longrightarrow KC(C)$ es una aplicación no-expansiva. Entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Este corolario extiende el Teorema de Kirk-Massa en el sentido de que no exigimos la compacidad de los centros asintóticos de sucesiones. En particular, el espacio $X_a$ considerado en el Ejemplo 3.2.1, proporciona un espacio para el que este corolario es válido y el Teorema de Kirk-Massa no lo es.

Como últimos resultados de este capítulo, vamos a extender los Corolarios 3.2.1 y 3.2.2, a una aplicación multivaluada con imagen en un espacio más grande que el dominio de dicha aplicación. Para ello contaremos con el siguiente resultado auxiliar.

**Teorema 3.2.6.** ([R3]) *Sea $D$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ y $F : C \to K(X)$ una contracción. Si $Fx \subset \overline{I_C(x)}$ para todo $x \in C$, entonces $F$ tiene un punto fijo*

**Teorema 3.2.7.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\alpha(X) < 1$ y $C$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $X$. Si $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva que satisface*

$$Tx \subset I_C(x), \ \ \forall x \in C,$$

*entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Demostración:**

Fijado $x_0 \in C$, para cada $n \geq 1$ consideremos la contracción $T_n : C \to KC(X)$ definida por

$$T_n x := \frac{1}{n} x_0 + (1 - \frac{1}{n}) Tx, \quad x \in C.$$

Teniendo en cuenta que para cada $x \in C$, el conjunto $I_C(x)$ es convexo y contiene a $C$, es inmediato ver que $T_n x \subset I_C(x)$ para todo $x \in C$. Entonces podemos acudir al teorema anterior para encontrar un punto fijo $x_n \in C$ para $T_n$. De esta forma obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ en $C$ tal que $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$. Sea $\{n_\alpha\}$ una ultra red de la sucesión de números naturales $\{n\}$.

La demostración de este resultado la haremos mediante un procedimiento inductivo análogo al seguido en el Teorema 3.2.4. El primer paso que daremos será probar que si denotamos por $A = A(C, \{x_{n_\alpha}\})$, se verifica que $Tx \cap I_A \neq \emptyset, \quad \forall x \in A$.

En efecto, la compacidad de $Tx_{n_\alpha}$ implica que para cada $n_\alpha$, existe $y_{n_\alpha} \in Tx_{n_\alpha}$ tal que

$$\|x_{n_\alpha} - y_{n_\alpha}\| = d(x_{n_\alpha}, Tx_{n_\alpha}).$$

Sea $x \in A$, como $Tx$ es compacto podemos encontrar $z_{n_\alpha} \in Tx$ de modo que

$$\|y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha}\| = d(y_{n_\alpha}, Tx) \leq H(Tx_{n_\alpha}, Tx) \leq \|x_{n_\alpha} - x\|.$$

También por compacidad $z = \lim_\alpha z_{n_\alpha} \in Tx$. Luego, bastaría probar que $z \in I_A(x)$. Si $r = r(C, \{x_{n_\alpha}\})$, por un lado tenemos que

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| = \lim_\alpha \|y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha}\| \leq \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| = r.$$

y por otro, puesto que $z \in Tx \subset I_C(x)$, existe $\lambda \geq 0$ tal que $z = x + \lambda(v - x)$ para cierto $v \in C$. Para $\lambda \leq 1$ es claro que $z \in C$ y por la desigualdad anterior $z \in A \subset I_A(x)$. Supongamos que $\lambda > 1$ y pongamos

$$v = \mu z + (1 - \mu)x, \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \in (0, 1).$$

Entonces

$$\lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - v\| \leq \mu \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - z\| + (1 - \mu) \lim_\alpha \|x_{n_\alpha} - x\| \leq r,$$

de donde se sigue que $v \in A$ y entonces $z \in I_A(x)$.

Así pues, tenemos que la aplicación $T : A \to KC(X)$ es no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva y verifica

$$Tx \cap I_A(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in A.$$

Además, en virtud del Teorema 3.1.3 se verifica

$$r_C(A) \leq \lambda r(C, \{x_n\}),$$

donde $\lambda := 1 - \Delta_{X,\alpha}(1^-) < 1$.

Fijemos $x_1 \in A$ y para un número arbitrario $\mu \in (0, 1]$ consideremos la contracción $T_\mu : A \to KC(X)$ definida por

$$T_\mu x = \mu x_1 + (1 - \mu)Tx, \quad x \in A.$$

Razonando como en la observación previa al Teorema 3.2.4, llegamos a que $T_\mu$ es $\chi$-condensante y de ser $I_A(x)$ convexo a que

$$T_\mu x \dot{\cap} I_A(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in A.$$

Luego aplicando el Teorema 3.2.3, $T_\mu$ tiene un punto fijo. Por tanto, podemos encontrar una sucesión $\{x_n^1\}$ en $A$ satisfaciendo $\lim_n d(x_n^1, Tx_n^1) = 0$. Ahora, no hay más que repetir el argumento anterior para llegar a que

$$Tx \cap I_{A^1} \neq \emptyset, \quad \forall x \in A^1 := A(C, \{x_{n_\alpha}^1\}),$$

y que

$$r_C(A^1) \leq \lambda r(C, \{x_{n_\alpha}^1\}) \leq \lambda r_C(A).$$

Por inducción, para cada número natural $m \geq 1$ tomamos una sucesión $\{x_n^m\}_n \subset A^{m-1}$ tal que $\lim_n d(x_n^m, Tx_n^m) = 0$ y, considerando la red $\{x_{n_\alpha}^m\}_\alpha$ construimos el conjunto $A^m = A(C, \{x_{n_\alpha}^m\})$, de manera que se tiene la siguiente relación

$$r_C(A^m) \leq \lambda^m r_C(A).$$

De este modo si tomamos la sucesión $\{x_m\}$ con $x_m$ un punto arbitrario de $A^m$, se prueba, de forma similar a como se hizo en el Teorema 3.2.4, su convergencia a un $x \in C$ que resulta ser un punto fijo para $T$. ■

Si unimos el Teorema 3.2.5 al resultado anterior obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\alpha(X) < 1$ satisfaciendo la condición de Opial no-estricta, y $C$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $X$. Si $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no-expansiva tal que $T(C)$ es acotado y que satisface*

$$Tx \subset I_C(x), \ \forall x \in C,$$

*entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Como puede observarse, en la prueba del Teorema 3.2.7 trabajamos con centros asintóticos de redes, de forma similar a como lo hacíamos en el Teorema 3.2.4 con centros asintóticos de sucesiones. La razón por la cual reemplazamos las sucesiones por redes viene inducida por el hecho de que el rango de la aplicación $T$ no está contenido en su dominio, y por tanto no puede suponerse que $C$ es separable (mirar el comienzo de la prueba del Teorema 3.2.4).

Si asumimos que $C$ es separable, y nos centramos en el primer paso del proceso de inducción empleado en el Teorema 3.2.7, podemos tomar una sucesion de puntos fijos aproximados para $T$ en $C$ que sea regular y asintóticamente uniforme respecto de $C$. En esta situación, no hay más que considerar una subsucesión adecuada $\{x_n\}$ de esta sucesión de manera que

$$Tx \subset I_A(x), \ \ \forall x \in A,$$

siendo $A = A(C, \{x_n\})$. Esta condición de contorno que verifica $T$ permite adaptar la prueba del Teorema 3.2.7 a los módulos de convexidad no compacta $\beta$ y $\chi$. En consecuencia, podemos añadir los siguientes enunciados:

**Teorema 3.2.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\beta(X) < 1$ y $C$ un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de $X$. Si $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no-expansiva y 1-$\chi$-contractiva que satisface*

$$Tx \subset I_C(x), \ \ \forall x \in C,$$

*entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Teorema 3.2.9.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $\epsilon_\chi(X) < 1$ satisfaciendo la condición de Opial no-estricta, y $C$ un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de $X$. Si $T : C \to KC(X)$ es una aplicación no-expansiva con $T(C)$ acotado, que satisface*

$$Tx \subset I_C(x), \ \ \forall x \in C,$$

*entonces $T$ tiene un punto fijo.*

# Capítulo 4

# Aplicaciones Estocásticas. Teoremas de Punto Fijo Aleatorio

En este último Capítulo de la Memoria estableceremos teoremas de punto fijo aleatorio de operadores estocásticos uniformemente Lipschitziano y, en particular, asintóticamente no-expansivos.

Dedicaremos la primera sección a la introducción de los operadores estocásticos y de algunos teoremas estocásticos análogos a teoremas de punto fijo deterministas. Asimismo incluimos una serie de resultados preliminares sobre la medibilidad de ciertas funciones, a los que recurriremos en repetidas ocasiones en las secciones posteriores.

En la segunda sección daremos una versión estocástica del siguiente teorema, que basado en la constante de Lifshitz de un espacio de Banach fue dado por T. Domínguez en [Do]:

*Sea $X$ un espacio de Banach, $C$ un subconjunto cerrado , acotado y convexo de $X$ y $T : C \to C$ una aplicación $k$-uniformemente Lipschitziana. Si*

$$k < \frac{1+\sqrt{1+4N(X)(\kappa_0(X)-1)}}{2},$$

*entonces $T$ tiene un punto fijo.* Se verá que para espacios de Hilbert, nuestro teorema mejora la versión estocástica dada por Xu [X4], del Teorema de Casini-Maluta [CM]. Por otro lado, los espacios de James nos servirán de ejemplos para diferenciar ambos resultados.

Concluimos el Capítulo con la prueba de la existencia de punto fijo aleatorio para un operador estocástico asintóticamente no-expansivo cuando el espacio de Banach tiene caracteristica de convexidad menor que uno ó es uniformemente convexo en cualquier dirección y satisface la propiedad GGLD. Estos resultados son obtenidos bajo las mismas hipótesis impuestas en los casos determinísticos (véase [Ki3] y [KX]).

## 4.1 Introducción y preliminares

A lo largo de todo el Capítulo consideraremos un espacio medible $(\Omega, \Sigma)$ (siendo $\Sigma$ una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$) y un espacio de Banach $X$. La siguiente definición es debida a Himmelberg [Hi].

**Definición 4.1.1.** *Un operador multivaluado $T : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ se denomina $(\Sigma)$-medible si, para cualquier subconjunto abierto $B$ de $X$, el siguiente conjunto*

$$T^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \cap B \neq \emptyset\}$$

*pertenece a $\Sigma$.*

Aunque Himmelberg llame a estos operadores débilmente medibles, dado que en esta Memoria sólo necesitamos este tipo de medibilidad, omitiremos el término "débilmente" por simplicidad.

**Definición 4.1.2.** *Dado un operador medible $T : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$, una aplicación $x : \Omega \to X$ es un selector medible de $T$ si $x(\cdot)$ es medible y $x(\omega) \in T(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Sea $M$ un subconjunto no vacío y cerrado de $X$.

**Definición 4.1.3.** *Diremos que un operador* $T : \Omega \times M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *es*

*(i) un operador estocástico si, para cada elemento* $x \in M$*, el operador* $T(\cdot, x) : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *es medible.*

*(ii) continuo (resp. contractivo, no-expansivo) si, para cada* $\omega \in \Omega$*, el operador* $T(\omega, \cdot) : M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *es continuo (resp. contractivo, no-expansivo).*

**Definición 4.1.4.** *Dado* $T : \Omega \times M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *un operador estocástico, diremos que la aplicación* $x : \Omega \to M$ *es un punto fijo aleatorio de* $T$ *si es medible y* $x(\omega) \in T(\omega, x(\omega))$ *para todo* $\omega \in \Omega$.

Es claro que si $T : \Omega \times M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ tiene un punto fijo aleatorio, entonces, para cada $\omega \in \Omega$, $T(\omega, \cdot)$ tiene un punto fijo (determinístico).

Para un operador estocástico $T : \Omega \times M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$, denotaremos por $F(\omega)$ al conjunto de puntos fijos de $T(\omega, \cdot)$ i.e.,

$$F(\omega) := \{x \in M : x \in T(\omega, x)\}.$$

Notemos que si no suponemos la existencia de punto fijo para la aplicación determinística $T(\omega, \cdot) : M \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$, el conjunto $F(\omega)$ puede ser vacío y, que un punto fijo aleatorio de $T$ no es más que un selector medible de $F$.

Si el conjunto de puntos fijos $F : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ es medible, ciertas hipótesis sobre el operador $T$ (por ejemplo la continuidad) aseguran que $F(\omega)$ es cerrado para todo $\omega \in \Omega$, y entonces la existencia de punto fijo aleatorio para $T$ se sigue del siguiente teorema de selección.

**Teorema 4.1.1.** (Teorema de selección [W])

*Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico completo, separable y* $F : \Omega \to 2^X$ *una aplicación medible con valores cerrados. Entonces* $F$ *tiene un selector medible.*

Sin embargo, parece más difícil probar la medibilidad de $F$ que demostrar la existencia de punto fijo aleatorio. De hecho, existen operadores estocásticos multivaluados que tienen puntos fijos aleatorios y cuya función de puntos fijos no es medible (ver ejemplo en [X5]).

Una de las áreas de investigación de la Teoría de Operadores Estocásticos es la relativa al estudio de existencia de puntos fijos aleatorios. Desde que Špaček [S] y Hanš [H] dieron los primeros teoremas de punto fijo para contracciones estocásticas en espacios polacos (espacios métricos completos y separables), han aparecido numerosos trabajos enfocados a probar versiones estocásticas de teoremas (clásicos) de punto fijo determinísticos (tanto de aplicaciones univaluadas como multivaluadas); ver por ejemplo [Bh], [DLX], [I1], [I2], [Lm4], [P], [TY], [X2], [X4], [X5] y referencias en estos artículos.

En esta dirección, Xu plantea en [X2] si: dado un subconjunto $C$ débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach $X$ con la FPP para aplicaciones no-expansivas, se tiene que $C$ tiene la propiedad del punto fijo para operadores estocásticos no-expansivos RFPP, i.e. si todo operador estocástico no-expansivo $T : \Omega \times C \to C$ tiene punto fijo aleatorio. Cuando $(\Omega, \Sigma)$ es una familia de Suslin (ver definición en [W]), en particular si $(\Omega, \Sigma)$ admite una medida completa y $\sigma$-finita, Tan y Yuan prueban en [TY] que, a un teorema de punto fijo determinístico le corresponde un teorema de punto fijo aleatorio para operadores continuos. Sin embargo, en caso de no ser $(\Omega, \Sigma)$ una familia de Suslin la situación es diferente. De hecho, no se sabe si la FPP para aplicaciones no-expansivas implica la RFPP para operadores estocásticos no-expansivos.

Pasemos a destacar algunos teoremas de punto fijo aleatorio que se tienen bajo las mismas hipótesis sobre la geometría del espacio de Banach $X$ que el caso determinístico.

En el marco de operadores estocásticos no-expansivos, en 1979 Itoh [I2] probó el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.2.** *Sea $C$ un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de un espacio de Banach $X$ uniformemente convexo, y $T : \Omega \times C \to C$ un operador estocástico no-expansivo. Entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

Para operadores más generales que los no-expansivos resaltemos la versión estocástica del Teorema de Casini-Maluta [CM] obtenida por Xu en 1996.

**Definición 4.1.5.** *Supongamos que $C$ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$. Un operador estocástico $T : \Omega \times C \to C$ se denomina uniformemente Lipschitziano si existe una función $k : \Omega \to [0, \infty)$ tal que*

$$\|T^n(\omega, x) - T^n(\omega, y)\| \leq k(\omega)\|x - y\|,$$

*para todo $x, y \in C$ y para cada número natural $n$. Aquí $T^n(\omega, x)$ es el valor en $x$ de la $n$-ésima iterada de la aplicación $T(\omega, \cdot)$.*

**Teorema 4.1.3.** ([X4]) *Sea $X$ un espacio de Banach con estructura normal uniforme, $C$ un subconjunto cerrado , acotado, convexo y separable de $X$ y $T : \Omega \times C \to C$ un operador estocástico uniformemente Lipschitziano tal que $k(\omega) < N(X)^{\frac{1}{2}}$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

Puesto que $N(X) > 1$ si $X$ es uniformemente convexo, este teorema generaliza el Teorema 4.1.2.

El objetivo principal de este Capítulo es probar algunos teoremas de punto fijo aleatorio para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas. Particularmente, incluiremos versiones estocásticas de teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas.

**Definición 4.1.6.** *Supongamos que $C$ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$. Un operador estocástico $T : \Omega \times C \to C$ se dice que es asintóticamente no-expansivo si existe una sucesión de funciones $k_n : \Omega \to [1, \infty)$ tal que para cada $\omega \in \Omega$, $\lim_n k_n(\omega) = 1$ y*

$$\|T^n(\omega, x) - T^n(\omega, y)\| \leq k_n(\omega)\|x - y\|,$$

*para todo $x, y \in C$.*

Antes de presentar nuestros teoremas, conviene mostrar varios resultados sobre la medibilidad de ciertas funciones que serán frecuentemente utilizados en sus pruebas.

**Teorema 4.1.4.** ([TY]) *Sean $X$ un espacio métrico separable e $Y$ un espacio métrico. Si $f : \Omega \times X \to Y$ es medible en $\omega \in \Omega$ y continua en $x \in X$, y si $x : \Omega \to X$ es medible, entonces $f(\cdot, x(\cdot)) : \Omega \to Y$ es medible.*

El teorema que enunciamos a continuación es una consecuencia inmediata de un resultado de Itoh que aparece en [I1].

**Teorema 4.1.5.** *Sea $C$ un subconjunto cerrado separable de un espacio de Banach $X$, $T : \Omega \times C \to K(X)$ un operador estocástico continuo y $F : \Omega \to 2^C$ un operador medible con valores cerrados. Entonces para cada $s > 0$, el operador $G : \Omega \to 2^C$ dado por:*

$$G(\omega) = \{x \in F(\omega) : d(x, T(\omega, x)) < s\}, \ \omega \in \Omega,$$

*es medible, así como el operador $cl\{G(\omega)\}$ de la clausura de $G(\omega)$.*

De este mismo artículo de Itoh también necesitaremos el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.6.** *Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores medibles $T_n : \Omega \to CB(X)$, y $T : \Omega \to CB(X)$ un operador tal que para cada $\omega \in \Omega$, $\lim_n H(T_n(\omega), T(\omega)) = 0$, entonces $T$ es medible.*

**Proposición 4.1.1.** ([X4]) *Sea $M$ un espacio métrico separable y $f : \Omega \times M \to \mathbb{R}$ una aplicación Carathéodory, i.e., para cada $x \in M$, $f(\cdot, x) : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible y para cada $\omega \in \Omega$, $f(\omega, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ es continua. Entonces para cada $s \in R$ la aplicación $F_s : \Omega \to M$ definida por*

$$F_s(\omega) = \{x \in M : f(\omega, x) < s\},\ \omega \in \Omega$$

*es medible.*

Destaquemos un teorema incluido en [DLX], en el que se garantiza la medibilidad de funciones marginales. Este teorema puede considerarse una extensión del dado en [AF, Capítulo VIII], cuyas hipótesis exigen trabajar en un espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \mu)$ completo y $\sigma$-finito.

**Teorema 4.1.7.** *Supongamos que $C$ es un subconjunto débilmente cerrado y separable de un espacio de Banach $X$, $F : \Omega \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ un operador medible con valores débilmente compactos y $f : \Omega \times C \to \mathbb{R}$ una función medible, continua y débilmente semicontinua inferiormente. Entonces la función marginal $r : \Omega \to \mathbb{R}$ definida*

$$r(\omega) := \inf_{x \in F(\omega)} f(\omega, x)$$

*y la aplicación $R : \Omega \to X$ definida por*

$$R(\omega) := \{x \in F(\omega) : f(\omega, x) = r(\omega)\}$$

*son medibles.*

## 4.2 Punto fijo aleatorio y aplicaciones uniformemente lipschitzianas

Comencemos la sección recordando la conexión que se tiene entre, la existencia de punto fijo para aplicaciones uniformemente Lipschitziana y la característica de Lifshitz.

**Definición 4.2.1.** *Sea $(M,\rho)$ un espacio métrico. Se define la característica de Lifshitz $\kappa(M)$ como:*

$$\kappa(M)=\sup\{b>0:\ \exists a>1 \text{ tal que } \forall x,y\in M, \forall r>0, \rho(x,y)>r, \\ \exists z\in M \text{ con } B(x,br)\cap B(y,ar)\subset B(z,r)\}.$$

Evidentemente $\kappa(M)\geq 1$. En [Li] se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.1.** *Si $(M,\rho)$ es un espacio métrico, acotado, completo y $T: M\to M$ es uniformemente Lipschitziana con constante $k<\kappa(M)$, entonces $T$ tiene un punto fijo.*

Cuando $M$ es un espacio de Banach $X$ se define la constante de Lifshitz como

$$\kappa_0(X)=\inf\{\kappa(M): M\subset X \text{ convexo, cerrado, acotado}\}.$$

Como consecuencia, si $C$ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $X$ y $T: C\to C$ una aplicación uniformemente Lipschitziana con constante $k<\kappa_0(X)$, entonces $T$ tiene punto fijo.

Entre las diversas relaciones existentes entre el coeficiente $\kappa_0(X)$ y otros coeficientes geométricos destaquemos que $\kappa_0(X)\leq N(X)$ (ver [Z]) y la dada en [DwT], donde se prueba que $\kappa_0(X)>1$ si y sólo si $\epsilon_0(X)<1$.

A continuación, como ya adelantamos en la introducción de este Capítulo, enunciaremos la versión estocástica del resultado de T. Domínguez [Do] para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas.

**Teorema 4.2.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $C$ un subconjunto cerrado , acotado, convexo y separable de $X$ y $T:\Omega\times C\to C$ un operador estocástico $k$-uniformemente Lipschitziano. Si existe una constante $c\in\mathbb{R}$ tal que*

$$k(\omega)\leq c<\frac{1+\sqrt{1+4N(X)(\kappa_0(X)-1)}}{2}$$

*para todo $\omega\in\Omega$, entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

**Demostración:**

Denotemos por $N = N(X)$ y por $\kappa_0 = \kappa_0(X)$. Observemos que, en virtud de la versión estocástica del Principio de Contracción de Banach ([Bh]), sólo necesitamos probar el resultado si $(1 + \sqrt{1 + 4N(X)(\kappa_0(X) - 1)}/2) > 1$. Luego podemos suponer que $c > 1$. Además la condición $\kappa_0 \leq N$ implica que

$$(1 + \sqrt{1 + 4N(X)(\kappa_0(X) - 1)})/2 \leq N.$$

De aquí $c < N$. Por otro lado, la condición $c < (1 + \sqrt{1 + 4N(X)(\kappa_0(X) - 1)})/2$ es equivalente a esta otra $\frac{c}{N} < \frac{\kappa_0 - 1}{c-1}$. Elijamos $b < \kappa_0$ de forma que:

$$\frac{c}{N} < \frac{b-1}{c-1}.$$

Sea $a > 1$ el número correspondiente a $b$ en la definición de $\kappa(C)$. Podemos suponer que

$$\frac{c}{N} < \frac{\frac{b}{a} - 1}{c-1},$$

Por último, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\dfrac{1+2\epsilon}{a} = \alpha < 1$.

Consideremos fijado un elemento $x_0 \in C$, y para cada $\omega \in \Omega$ definamos

$$R(\omega, x_0) = \inf\{\limsup_n \|T^n(\omega, y) - x_0\| : y \in C\}.$$

Comencemos probando que $R(\cdot, x_0)$ es una función medible. Si llamamos $g(\omega, y) = \limsup_n \|T^n(\omega, y) - x_0\|$, podemos aplicar el Teorema 4.1.4 para deducir que $g(\cdot, y)$ es medible para todo $y \in C$. Supongamos que $\{y_n\}$ es un subconjunto denso de $C$, entonces para cada $\omega \in \Omega$

$$R(\omega, x_0) = \inf_{n \geq 1} g(\omega, y_n),$$

de donde se sigue que $R(\cdot, y)$ es medible.

Sea $G(\omega) = \{y \in C : g(\omega, y) < R(\omega, x_0)(1 + \epsilon)\}$. Obviamente $G(\omega)$ es un subconjunto no vacío de $C$ y, puesto que $g(\omega, \cdot)$ es continua en $C$ se deduce de la

Proposición 4.1.1 que $G(\cdot)$ es medible. Así, vía el Teorema de selección, podemos encontrar un selector medible $y(\omega)$ de $G(\cdot)$, que obviamente verifica

$$\limsup_n \|T^n(\omega, y(\omega)) - x_0\| < R(\omega, x_0)(1+\epsilon).$$

Consideremos en $\Omega$ la partición dada por los conjuntos:

$$\Omega_1 := \Big\{\omega \in \Omega : \sup_n \|x_0 - T^n(\omega, x_0)\| \leq \frac{NR(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{ca}\Big\}$$

y

$$\Omega_2 := \Big\{\omega \in \Omega : \sup_n \|x_0 - T^n(\omega, x_0)\| > \frac{NR(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{ca}\Big\}.$$

Sin dificultad se prueba que ambos conjuntos son medibles.

Supongamos que $\Omega_1 \neq \emptyset$ y sea $\omega \in \Omega_1$. Puesto que

$$\|T^n(\omega, x_0) - T^m(\omega, x_0)\| \leq k(\omega)\|T^{n-m}(\omega, x_0) - x_0\|$$

si $m < n$, se tiene que

$$\operatorname{diam}_a(T^n(\omega, x_0) \leq \frac{NR(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{a}.$$

(Recordemos que $\operatorname{diam}_a\{x_n\} = \limsup_k\{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}$).

De aquí, dado que $\operatorname{diam}_a(T^n(\omega, x_0) \geq r(C, \{T^n(\omega, x_0)\})N$ (ver [Lm3]) obtenemos

$$r(C, \{T^n(\omega, x_0)\}) \leq \frac{R(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{a}.$$

Como la condición $N > 1$ implica reflexividad, $C$ es un conjunto débilmente compacto, luego por el Teorema 4.1.7 la función marginal $r : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ definida por $r(\omega) = r(C, \{T^n(\omega, x_0)\})$ y la aplicación $E : \Omega_1 \to 2^C$ definida por

$$E(\omega) =: \{z \in C : \limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - z\| = r(\omega)\},$$

son medibles en $\Omega_1$. Tomemos $z_1 : \Omega_1 \to C$ un selector medible de $E(\cdot)$. Entonces para cada $\omega \in \Omega_1$

$$\limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - z_1\| = r(\omega) < \frac{R(\omega, x_0)(1+2\epsilon)}{a} = \alpha R(\omega, x_0),$$

de donde

$$R(\omega, z_1(\omega)) < \alpha R(\omega, x_0).$$

De otra parte, $\|z_1(\omega) - x_0\| \leq \|z_1(\omega) - T^n(\omega, x_0)\| + \|T^n(\omega, x_0) - x_0\|$ lo que implica que

$$\begin{aligned} \|z_1(\omega) - x_0\| &\leq \limsup_n \|z_1(\omega) - T^n(\omega, x_0)\| + \limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - x_0\| \\ &< \alpha R(\omega, x_0) + \frac{NR(\omega, x_0)(1+2\epsilon)}{ca} = \alpha(1 + \frac{N}{c})R(\omega, x_0). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\Omega_2 \neq \emptyset$. En este supuesto si $\omega \in \Omega_2$, existe $i \in \mathbb{N}$ (dependiente de $\omega$) tal que $\|x_0 - T^i(\omega, x_0)\| > \dfrac{NR(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{ca}$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_0 - T^n(\omega, y(\omega))\| < R(\omega, x_0)(1+\epsilon)$ si $n \geq j$.

Para $n \geq j$ es claro que

$$\|T^i(\omega, x_0) - T^{i+n}(\omega, y(\omega))\| \leq k(\omega)R(\omega, x_0)(1+\epsilon).$$

Elijamos $\lambda$ tal que $\frac{c}{N} < \lambda < \frac{\frac{b}{a}-1}{c-1}$. Entonces para $n \geq i + j$ tenemos

$$\begin{aligned} &\|T^n(\omega, y(\omega)) - (\lambda T^i(\omega, x_0) + (1-\lambda)x_0)\| \\ &\leq \lambda \|T^n(\omega, y(\omega)) - T^i(\omega, x_0)\| + (1-\lambda)\|T^n(\omega, y(\omega)) - x_0\| \\ &\leq \lambda k(\omega)R(\omega, x_0)(1+\epsilon) + (1-\lambda)R(\omega, x_0)(1+\epsilon) \\ &= (\lambda(k(\omega) - 1) + 1)R(\omega, x_0)(1+\epsilon) \\ &\leq \tfrac{b}{a}R(\omega, x_0)(1+\epsilon). \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}\|x_0 - (\lambda T^i(\omega, x_0) + (1-\lambda)x_0)\| &= \lambda\|T^i(\omega, x_0) - x_0\| \\ &\geq \frac{\lambda N R(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{ca} > \frac{R(\omega, x_0)(1+\epsilon)}{a}.\end{aligned}$$

Luego por definición de $b$, existe $z(\omega) \in C$ tal que

$$\|T^n(\omega, y(\omega)) - z(\omega)\| \leq R(\omega, x_0)(1+\epsilon) < \alpha R(\omega, x_0),$$

si $n \geq i + j$. Como consecuencia, si $\omega \in \Omega_2$ se tiene que

$$R(\omega, z(\omega)) \leq \limsup_n \|T^n(\omega, y(\omega)) - z(\omega)\| < \alpha R(\omega, x_0).$$

Así pues la aplicación $F : \Omega_2 \to 2^C$ dada por

$$F(\omega) = \{z \in C : \limsup_n \|T^n(\omega, y(\omega)) - z\| < \alpha R(\omega, x_0)\},$$

está bien definida y es medible por la Proposición 4.1.1. Por tanto admite un selector medible $z_2 : \Omega_2 \to C$ el cual verifica

$$R(\omega, z_2(\omega)) < \alpha R(\omega, x_0)$$

y

$$\begin{aligned}\|x_0 - z_2(\omega)\| &\leq \limsup_n \|x_0 - T^n(\omega, y(\omega))\| + \limsup_n \|T^n(\omega, y(\omega)) - z_2(\omega)\| \\ &< (1+\epsilon)R(\omega, x_0) + \alpha R(\omega, x_0) = (1+\epsilon+\alpha)R(\omega, x_0).\end{aligned}$$

Consideremos $z : \Omega \to C$ la aplicación definida por $z(\omega) = z_1(\omega)$ si $\omega \in \Omega_1$ y por $z(\omega) = z_2(\omega)$ si $\omega \in \Omega_2$, que es evidentemente medible.

Partiendo de $x_0(\omega) \equiv x_0$ con $x_0 \in C$ arbitrario, definimos $x_1(\omega) = z(\omega)$ como antes y por inducción, construido $x_{m-1}(\omega)$, definimos $x_m(\omega)$ mediante la construcción anterior reemplazando $x_0$ por $x_{m-1}(\omega)$. Cada $x_m : \Omega \to C$ es una función medible y por el proceso de inducción se tiene que

$$R(\omega, x_m(\omega)) \leq \alpha R(\omega, x_{m-1}(\omega)) \leq \ldots \leq \alpha^m R(\omega, x_0).$$

Demostremos que para cada $\omega \in \Omega$, $\{x_m(\omega)\}_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $C$. En efecto si $M = \max\{1 + \epsilon + \alpha,\ \alpha(1 + \frac{N}{c})\}$, se tiene que

$$\|x_m(\omega) - x_{m-1}(\omega)\| \leq MR(\omega, x_{m-1}(\omega)) \leq \ldots \leq M\alpha^{m-1}R(\omega, x_0),$$

luego $\{x_m(\omega)\}$ converge a un cierto $x(\omega) \in C$. La función $x : \Omega \to C$ es el límite puntual de una sucesión de funcione medibles, y por tanto es medible. Para terminar probemos que $x(\omega)$ es un punto fijo de $T(\omega, \cdot)$.

Sea $\epsilon$ un número positivo arbitrario, entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $R(\omega, x_{m_0}(\omega)) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|x_{m_0}(\omega) - x(\omega)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Por definición de $R(\omega, x_{m_0}(\omega))$ podemos encontrar $y(\omega) \in C$ tal que

$$\limsup_n \|T^n(\omega, y(\omega)) - x_{m_0}(\omega)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

de donde $\limsup_n \|T^n(\omega, y(\omega)) - x(\omega)\| < \epsilon$.

Entonces

$$\begin{aligned}
&\|x(\omega) - T(\omega, x(\omega))\| \\
&\leq \limsup_n \|x(\omega) - T^n(\omega, y(\omega))\| + k(\omega)\limsup_n \|T^{n-1}(\omega, y(\omega)) - x(\omega)\| \\
&\leq (1 + k(\omega))\epsilon,
\end{aligned}$$

deduciéndose que $x(\omega) = T(\omega, x(\omega))$. ■

**Observación 4.2.1.**

- Es conocido que si $H$ es un espacio de Hilbert $\kappa_0(H) = N(H) = \sqrt{2}$, de donde la constante $c$ del teorema precedente puede tomarse $1 < c < \sqrt{2}$. Por tanto, $c$ proporciona una cota para la existencia de punto fijo aleatorio de aplicaciones uniformemente Lipschitzianas, mayor que $\sqrt[4]{2}$, dada por el Teorema 4.1.3.

- Como ya hemos comentado $\kappa_0(X) \leq N(X)$, deduciéndose de aquí que

$$\kappa_0(X) \leq \frac{1+\sqrt{1+4N(X)(\kappa_0(X)-1)}}{2} \leq N(X).$$

Notemos que la primera igualdad sólo se tiene si $\kappa_0(X) = 1$ ó $\kappa_0(X) = N(X)$. Como consecuencia, para aquellos espacios en los que $1 < \kappa_0(X) < N(X)$ nuestro resultado incluiría la versión estocástica del Teorema de Lipschitz para espacios de Banach.

**Ejemplo 4.2.1.**

Sea $E_\lambda$ el espacio $\ell_2$ con la norma equivalente

$$|x| = \max\{\|x\|_2, \lambda\|x\|_\infty\}$$

para $\lambda \geq 1$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma Euclídea y $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo.

Para estos espacios la constante de Lifshitz está completamente determinada (ver [Do] y [Z]), siendo

$$\kappa_0(E_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \left(1+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}\sqrt{\lambda^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } 1 < \lambda \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

■

Los espacios $E_\lambda$ van a servirnos de ejemplos para diferenciar nuestro teorema del Teorema 4.1.3. En primer lugar, puesto que $N(E_\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$ ([CM])se tiene que $\kappa(E_\lambda) < N(E_\lambda)$ si $\lambda > 1$. Luego si $\frac{\sqrt{5}}{2} \leq \lambda < \sqrt{2}$, el Teorema 4.1.3 asegura la existencia de punto fijo aleatorio para una aplicación estocástica uniformemente Lipschitziana si $k(\omega) < (\frac{\sqrt{2}}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$, mientras que el Teorema 4.2.3 no puede ser usado. Por el contrario, como $\frac{1+\sqrt{1+4N(E_\lambda)(\kappa_0(E_\lambda)-1)}}{2}$ converge a $\sqrt{2}$ cuando $\lambda \to 1$, para valores de $\lambda$ cercanos a 1 el valor que podemos tomar para la constante $c$ en nuestro teorema es estrictamente mas grande que $\sqrt{N(E_\lambda)}$, la ofrecida por el Teorema 4.1.3.

■

## 4.3 Punto fijo aleatorio y aplicaciones asintóticamente no-expansivas

El objetivo de esta sección es exponer algunas versiones estocásticas de teoremas de punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas.

En el primer resultado de esta sección demostraremos la existencia de punto fijo aleatorio para aplicaciones estocásticas asintóticamente no-expansivas en el marco de espacios de Banach con característica de convexidad menor que 1. Para la prueba, de carácter constructivo, usaremos como herramientas el correspondiente resultado determinista (ver [Ki3]), así como la relación existente entre el centro asintótico de una sucesión y la característica de convexidad de un espacio.

**Definición 4.3.1.** *La característica de convexidad de un espacio de Banach $X$ es la constante asociada al espacio dada por*

$$\epsilon_0(X)\sup\{\epsilon \geq 0 : \delta_X(\epsilon) = 0\},$$

*donde*

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\Big\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| \geq \epsilon\Big\}.$$

**Teorema 4.3.1.** ([GK2]) *Sea $C$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$, y sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $X$. Entonces*

$$diam\ A(C, \{x_n\}) \leq \epsilon_0(X) r(C, \{x_n\}).$$

**Teorema 4.3.2.** *Sea $C$ un subconjunto cerrado, acotado, convexo y separable de un espacio de Banach $X$ para el cual $\epsilon_0(X) < 1$, y $T : \Omega \times C \to C$ un operador estocástico asintóticamente no-expansivo. Entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

**Demostración:**

Para cada $\omega \in \Omega$, sea

$$F(\omega) = \{x \in C : x = T(\omega, x)\},$$

y para cada $n \geq 1$,

$$F_n(\omega) = cl - \{x \in C : \|x - T(\omega, x)\| < \frac{1}{n}\}.$$

Obviamente $F(\omega) \subset F_n(\omega)$, $F(\omega)$ es no vacío pues $T(\omega, \cdot) : C \to C$ tiene un punto fijo determinístico (ver [Ki3]) y $F_n(\omega)$ es cerrado. Además por el Teorema 4.1.5, cada $F_n$ es medible. Se sigue del Teorema de selección que $F_n$ admite un selector medible $x_n(\omega)$ y además $x_n(\omega) - T(\omega, x_n(\omega)) \to 0$ si $n \to +\infty$.

Consideremos la función $f_1 : \Omega \times C \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f_1(\omega, x) = \limsup_n \|x_n(\omega) - x\|, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Aplicando el Teorema 4.1.4, no es difícil ver que $f_1$ es medible en $\omega \in \Omega$. También, puesto que $f_1$ es continua en $x \in C$ y convexa, es débilmente semicontinua inferiormente. Por otro lado, la condición $\epsilon_0(X) < 1$ implica la reflexividad de $X$, luego $C$ es realmente un conjunto débilmente compacto. En estas condiciones, el Teorema 4.1.7 asegura que las funciones marginales

$$r_1(\omega) := \inf_{x \in C} f_1(\omega, x)$$

y

$$R_1(\omega) := \{x \in C : f_1(\omega, x) = r_1(\omega)\}$$

son medibles.

Observemos que $R_1(\omega) = A(C, \{T^n(\omega, x_0)\})$ y $r_1(\omega) = r(C, \{T^n(\omega, x_0)\})$, por tanto podemos aplicar el Teorema 4.3.1 para obtener la siguiente desigualdad

$$\text{diam } R_1(\omega) \leq \epsilon_0(X) r_1(\omega).$$

Es claro que $R_1(\omega)$ es un subconjunto débilmente compacto y convexo de $C$. Veamos que satisface para cada $\omega$ la propiedad $(P)_w$ definida en la Sección 2.1. En efecto, tomemos $x(\omega) \in R_1(\omega)$ e $y(\omega) \in C$ tal que $T^{n_i}(\omega, x(\omega)) \rightharpoonup y(\omega)$ para una subsucesión $\{n_i\}$ de $\{n\}$. Entonces, aplicando la débil semicontinuidad inferior de $f_1(\omega, \cdot)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_n \|x_n(\omega) - y(\omega)\| &\leq \limsup_i \limsup_n \|x_n(\omega) - T^{n_i}(\omega, x(\omega))\| \\
&\leq \limsup_m \limsup_n \|x_n(\omega) - T^m(\omega, x(\omega))\| \\
&\leq \limsup_m \limsup_n \|T^m(\omega, x_n(\omega)) - T^m(\omega, x(\omega))\| \\
&\leq \limsup_n \|x_n(\omega) - x(\omega)\| = r_1(\omega).
\end{aligned}$$

Luego $y(\omega) \in R_1(\omega)$, con lo que $R_1(\omega)$ verifica la propiedad $(P)_w$.

Del Teorema 2.2.1 deducimos que $T(\omega, \cdot)$ tiene un punto fijo determinístico en $R_1(\omega)$, i.e. $F(\omega) \cap R_1(\omega) \neq \emptyset$. Luego $F_n^1(\omega) = cl - \{x \in R_1(\omega) : \|x - T(\omega, x)\| < \frac{1}{n}\} \neq \emptyset$ para cada $n \geq 1$ y es medible por el Teorema 4.1.5. Usando el Teorema de selección podemos elegir un selector medible $x_n^1$ de $F_n^1$ que cumple $x_n^1(\omega) \in R_1(\omega)$ y $x_n^1(\omega) - T(\omega, x_n^1(\omega)) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Consideramos ahora $f_2 : \Omega \times C \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f_2(\omega, x) = \limsup_n \|x_n^1(\omega) - x\|, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Razonando como antes, las funciones marginales

$$r_2(\omega) := \inf_{x \in R_1(\omega)} f_2(\omega, x)$$

y

$$R_2(\omega) := \{x \in R_1(\omega) : f_2(\omega, x) = r_2(\omega)\}$$

son medibles. Como $R_2(\omega) = A(R_1(\omega), \{x_n^1(\omega)\})$ y $r_2(\omega) = r(R_1(\omega), \{x_n^1(\omega)\})$ aplicamos de nuevo el Teorema 4.3.1 para obtener

$$\operatorname{diam} R_2(\omega) \leq \epsilon_0(X) r_2(\omega).$$

Puesto que $\{x_n^1(\omega)\} \subset R_1(\omega)$, se tendrá que

$$r_2(\omega) \leq \text{diam } R_1(\omega)$$

y entonces

$$\text{diam } R_2(\omega) \leq \epsilon_0(X)^2 r_1(\omega).$$

De nuevo $R_2(\omega)$ satisface para cada $\omega$ la propiedad $(P)_w$. En efecto, tomemos $x(\omega) \in R_2(\omega)$ e $y(\omega) \in C$ tal que $T^{n_i}(\omega, x(\omega)) \rightharpoonup y(\omega)$ para una subsucesión $\{n_i\}$ de $\{n\}$. Teniendo en cuenta que $R_2(\omega) \subset R_1(\omega)$ y que $R_1(\omega)$ verifica la propiedad $(P)_w$, deducimos que $y(\omega) \in R_1(\omega)$ e igual que antes se llega a que $y(\omega) \in R_2(\omega)$ pues

$$\limsup_n \|x_n^1(\omega) - y(\omega)\| \leq \limsup_n \|x_n^1(\omega) - x(\omega)\| = r_2(\omega).$$

Siguiendo un procedimiento inductivo, para cada $m \geq 1$ construimos $R_m(\omega)$, $r_m(\omega)$ y $\{x_n^m(\omega)\}_n$ donde $x_n^m(\omega) \in R_m(\omega)$ tal que $x_n^m(\omega) - T(\omega, x_n^m(\omega)) \to 0$ cuando $n \to +\infty$ y

$$\text{diam } R_m(\omega) \leq \epsilon_0(X) r_m(\omega) \leq \epsilon_0(X)^m r_1(\omega).$$

Por hipótesis $\epsilon_0(X) < 1$, luego $\lim_m \text{diam } R_m(\omega) = 0$.

Como para cada $\omega \in \Omega$ los conjuntos $R_m(\omega)$ constituyen una sucesión decreciente de subconjuntos débilmente compactos de $C$, se tiene $\bigcap_m R_m(\omega) = \{z(\omega)\}$ para cierto $z(\omega) \in C$. El Teorema 4.1.6 nos lleva a que $z(\omega)$ es medible pues

$$H(R_m(\omega), \{z(\omega)\}) = \sup\{\|z(\omega) - x\| : x \in R_m(\omega)\} \leq \text{diam } R_m(\omega),$$

tiende a cero cuando $m \to +\infty$.

Para terminar demostremos que $x(\omega)$ es un punto fijo de $T$. Para cada $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|z(\omega) - T(\omega, z(\omega))\| &\leq \|z(\omega) - x_n^m(\omega)\| + \|x_n^m(\omega) - T(\omega, x_n^m(\omega))\| \\
&\quad + \|T(\omega, x_n^m(\omega)) - T(\omega, z(\omega))\| \\
&\leq (1 + k_1(\omega))\|z(\omega) - x_n^m(\omega)\| + \|x_n^m(\omega) - T(\omega, x_n^m(\omega))\| \\
&\leq (1 + k_1(\omega))\text{diam } R_m(\omega) + \|x_n^m(\omega) - T(\omega, x_n^m(\omega))\|.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\{x_n^m(\omega)\}_n$ es una sucesión de puntos fijos aproximados para $T(\omega,\cdot)$, tomamos primero límite cuando $n \to +\infty$ y después límite superior cuando $m \to +\infty$ para obtener el resultado deseado. ■

**Observación 4.3.1.**

Como la condición $\epsilon_0(X) < 1$ implica estructura normal uniforme ([GK2]), una consecuencia del Teorema 4.1.3 es, que si y $T : \Omega \times C \to C$ es un operador estocástico asintóticamente no-expansivo con $C$ un subconjunto débilmente compacto, convexo y separable de $X$, entonces una iterada de $T$ tiene punto fijo aleatorio. La misma conclusión se deriva del Teorema 4.2.2 pues $\epsilon_0(X) < 1$ si y sólo si $\kappa_0(X) > 1$. Sin embargo, el Teorema 4.3.2 no se deriva de los Teoremas 4.1.3 y 4.2.2. ■

Como puede apreciarse, la clave de la prueba de este resultado está en que los centros asintóticos de sucesiones adecuadamente elegidos determinan una sucesión de conjuntos de diámetros tan pequeños como se desee. Puesto que el centro asintótico de una sucesión en un espacio UCED es único, cabría esperar un resultado de existencia de punto fijo aleatorio para aplicaciones asintóticamente no-expansivas en estos espacios.

**Teorema 4.3.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach UCED que satisface la propiedad GGLD. Sea $C$ un subconjunto no vacío, débilmente compacto, convexo y separable de $X$. Si $T : \Omega \times C \to C$ es un operador estocástico asintóticamente no-expansivo, entonces $T$ tiene un punto fijo aleatorio.*

**Demostración:**

Consideramos la función $f : \Omega \times C \to C$ definida por

$$f(\omega, x) = \limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - x\|, \ \forall \omega \in \Omega$$

para un elemento $x_0 \in C$. Puesto que $X$ es UCED, para cada $\omega \in \Omega$ existe exactamente un punto $x(\omega) \in C$ tal que $f(\omega, x(\omega)) = \inf_{x \in C} f(\omega, x) = r(\omega)$ (notemos que

$x(\omega)$ es el centro asintótico de $\{T^n(\omega, x_0)\}$ respecto a $C$). Por el Teorema 3.2.3 $x(\omega)$ es medible. Demostremos que $x(\omega)$ es un punto fijo aleatorio de $T$.

Fijemos $\omega \in \Omega$ y sea $\{T^{n_i}(\omega, x(\omega))\}$ una subsucesión de $\{T^n(\omega, x(\omega))\}$ débilmente convergente a $y(\omega) \in C$ cuando $n_i \to +\infty$. Por la débil semicontinuidad inferior de $f(\omega, \cdot)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - y(\omega)\| &\leq \limsup_i \limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - T^{n_i}(\omega, x(\omega)\| \\
&\leq \limsup_m \limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - T^m(\omega, x(\omega))\| \\
&\leq \limsup_m \limsup_n k_m(\omega)\|T^{n-m}(\omega, x_0) - x(\omega)\| \\
&= \limsup_n \|T^n(\omega, x_0) - x(\omega)\| = r(\omega).
\end{aligned}$$

De aquí deducimos que $y(\omega) = x(\omega)$. Entonces $T^n(\omega, x(\omega)) \rightharpoonup x(\omega)$ cuando $n \to +\infty$. Como en la prueba del correspondiente teorema determinístico (ver [KX]), la propiedad GGLD implica que para cada $\omega \in \Omega$, $T^n(\omega, x(\omega)) \to x(\omega)$ y por tanto $x(\omega) = T(\omega, x(\omega))$. ■

Para finalizar este Capítulo, comentemos que a diferencia del Teorema 4.3.2, tanto en la demostración del teorema anterior como en la del Teorema 4.2.2 no se usa el hecho de que el operador estocástico tenga punto fijo determinístico.

# Bibliografía


[AF] J.P. Aubin, H. Frankowska, Set-valued Analysis, Birkhäuser, Boston (1990).

[ADL] J.M. Ayerbe, T. Domínguez Benavides, G. López Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 99, Birkäuser, Basel, 1997.

[B1] J.B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 280 (1975), A1511-A1514.

[B2] J.B. Baillon, *Comportement asymptotique des itérés de contractions non linéaires dans les espaces $L_p$*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 286 (1978), A157-A159.

[B3] J.B. Baillon, *Nonexpansive mappings and hyperconvex space*, Contemp. Math. 72 (1988), 11-19.

[Bh] A.T. Bharucha-Reid, *Fixed point theorems in probabilistic analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 641-645.

[BL] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486-490.

[Bd1] F.E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1965), 1272-1276.

[Bd2] F.E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Symp. Pure Math., vol 18 pt2, American Mathematical Society, Providence, 1976.

[Br1] R.E. Bruck, *Nonexpansive retracts of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 384-386.

[Br2] R.E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), 251-262.

[Br3] R.E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 53 (1974), 59-71.

[Br4] R.E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. 32 (1979), 107-116.

[Br5] R.E. Bruck, *Asymptotic behavior of nonexpansive mappings*, Contemp. Math. 18 (1983), 1-47.

[BKR] R.E. Bruck, T. Kuczumow, S. Reich, *Convergence of iterates of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces with the uniform Opial property*, Colloq. Math. 65 (1993), 169-179.

[CM] E. Casini, E. Maluta, *Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings in spaces with uniformly normal structure*, Nonlinear Anal. 9 (1985), 103-106.

[D1] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg , 1974.

[D2] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1992.

[Do] T. Domínguez Benavides, *Fixed point theorems for uniformly Lipschitzian mappings mappings and asymptotically regular mappings*, Nonlinear Anal. 32 (1996), no. 1, 15-27.

[DLX] T. Domínguez Benavides, G. López Acedo, H.-K. Xu, *Random fixed points of set-valued operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 831-838.

[DwT] P. N. Downing, B. Turett, *Some properties of the characteristic of convexity relating to the fixed point theory*, Pacific J. Math. 104 (1983), 343-350.

[E] M. Edelstein, *The construction of asymptotic center with a fixed point property*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 206-208.

[G] K. Goebel, *On a fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings*, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska 29 (1975), 70-72.

[GK1] K. Goebel, W.A. Kirk, *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 171-174.

[GK2] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, 1990.

[GKT] K. Goebel, W.A. Kirk, R.L. Thele, *Uniformly lipschitzian families of transformations in Banach spaces*, Canad. J. Math. 26 (1974), 1245-1256.

[GS] K. Goebel, T. Sękowski, *The modulus of noncompact convexity*, Annal. Univ. Mariae Curie-Sklodowska 38 (1984), 41-48.

[Gh] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach. 30 (1965), 57-63.

[H] O. Hanš, *Reduzierende zufällige Transformationen* , Czechoslovak Math. J. 7 (1957), 154-158.

[HS] E. Hewitt, K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, 1965.

[Hi] C.J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87 (1975), 53-72.

[Hu] R. Huff, *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math. 4 (1980), 743-749.

[I] V.I. Istrăţescu, Fixed Point Theory, Reidel Pub. Cn, 1981.

[I1] Ṡ. Itoh, *A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping*, Pacific J. Math. 68 (1977), 85-90.

[I2] S. Itoh, *Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), 261-273.

[Ja1] M. A. Japón Pineda, *Estabilidad de la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1998).

[Ja2] M. A. Japón Pineda, *Existence of fixed points for mappings of asymptotically nonexpansive type on L-embedded Banach spaces*, Nonlinear Anal. 47 (2001), 2779-2786.

[Ji] A. Jimenez-Melado, *Stability of weak normal structure in James quasi reflexive space*, Bull. Austral. Math. Soc. 46 (1992), 367-372.

[K] J.L. Kelly, General Topology, van Nostrand, Princeton, NJ, 1955.

[Kh] M.A. Khamsi, *Étude de la propriété du point fixe dans les éspaces de Banach et les éspaces métriques*, Thèse de Doctorate de L'Université Paris VI, 1987.

[KX] T.-H. Kim, H.-K. Xu, *Remarks on asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. 41 (2000), 405-415.

[Ki1] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.

[Ki2] W. A. Kirk, *Nonexpansive mappings in product spaces, set-valued mappings, and k-uniform rotundity*, Nonlinear Functional Analysis and its Aplications (F.E., ed.), Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. 45 pt2 (1986), 51-64.

[Ki3] W. A. Kirk, *Fixed point theorems for non-lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type*, Israel J. Math. 17 (1974), 339-345.

[Ki4] W. A. Kirk, *Common fixed points and nonexpansive retracts*, Optimization and Nonlinear Analysis (A. Ioffa, M. Marcus and S. Reich, eds.), Longman Scientific and Techical, Essex, 1992, 155-168.

[KMS] W. A. Kirk, C. Martínez Yañez, S.S. Shin *Asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. 33 (1998), no. 1, 1-12.

[KM] W. A. Kirk, S. Massa, *Remarks on asymptotic and Chebyshev centers*, Houston J. Math. 16 (1990), no. 3, 357-364.

[KS] W.A. Kirk, S.S. Shin, *Fixed point theorems in hyperconvex spaces*, Houston J. Math. 23 (1997), 175-188.

[KP] T. Kuczumow, S. Prus, *Compact asymptotic centers and fixed points of multivalued nonexpansive mappings*, Houston J. Math. 16 (1990) 465-468.

[La] E. Lami Dozo, *Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 286-292.

[Le] C. Lennard, *A new convexity property that implies a fixed point property for* $L_1$, Studia Math. 100 (1991), no. 2, 95-108.

[Lm1] T.C. Lim, *A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 1123-1126.

[Lm2] T.C. Lim, *Characterizations of normal structure*, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 313-319.

[Lm3] T.C. Lim, *On the normal structure coefficient and the bounded sequence coefficient*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 2, 262-264.

[Lm4] T. C. Lim, *Random approximations and random fixed point theorems for non-self-maps*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 1129-1135.

[Li] E. A. Lifshitz, *Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces*, Voronez. Gos. Univ. Trudy Mat. Fak. 16 (1975), 23-28. (En ruso).

[Ln] P.-K. Lin, *Asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. 26 (1996), 1137-1141.

[LTX] P.-K. Lin, K.-K. Tan, H.-K. Xu, *Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis 24 (1995), 929-946.

[M] J. Markin, *A fixed point theorem for set valued mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 639-640.

[Ma] C. Martínez Yañez, *A fixed point theorem on $k$-uniformly rotund spaces*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 857-861.

[N] S.B. Nadler, *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969), 475-488.

[P] N. S. Papageorgiou, *Random fixed point theorems for measurable multifunctions in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 507-514.

[Pr] S. Prus, *Banach spaces with the uniform Opial property*, Nonlinear Anal. (1992), 697-704.

[Pr] S. Prus, Handbook of Metric Fixed Point Theory, W. A. Kirk y B. Sims (eds.), 93-132, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001.

[R1] S. Reich, *Fixed points in locally convex spaces*, Math. Z. 125 (1972), 17-31.

[R2] S. Reich, *Almost convergence and nonlinear ergodic theorems*, J. Approximation Theory 24 (1978), 269-272.

[R3] S. Reich, *Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets*, J. Math. Anal. Appl. 62 (1978), 104-113.

[R4] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), 274-276.

[R5] S. Reich, *Some problems and results in fixed point theory*, Contemporary Math. 21 (1983), 179-187.

[S] A. Špaček, *Zufällige Gleichungen*, Czechoslovak Math. J. 5 (1955), 462-466.

[Su] F. Sullivan, *A generalization of uniformly rotund Banach spaces*, Can. J. Math. 31 (1979), 628-636.

[TY] K.-K. Tan, X.Z. Yuan, *Some random fixed point theorems*, Fixed Point Theory and Applications (Edited by K.-K. Tan), World Scientific, Singapore (1992) 334-345.

[T] D. Tingley, *An asymptotically nonexpansive commutative semigroup with no fixed points*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 107-113.

[W] D.-H. Wagner, *Survey of measurable selection theorems*, SIAM J. Control Optim. 15 (1977), 859-903.

[X1] H.-K. Xu, Existence and iterative convergence for fixed points of nonlinear mappings, *Ph.D. Thesis*, (1988), Xi'an Jiaotong University.(In Chinese).

[X2] H.-K. Xu, *Some random fixed point theorems for condensing and nonexpansive operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 395-400.

[X3] H.-K. Xu, *Existence and convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type*, Nonlinear Anal. 16 (1991), 1139-1146.

[X4] H.-K. Xu, *Random fixed point theorems for nonlinear uniformly lipschitzian mappings*, Nonlinear Anal. 26 (1996), 1301-1311.

[X5] H.-K. Xu, Metric Fixed Point Theory for Multivalued Mappings,, Dissertationes Math.(Rozprawy Mat.) 389 (2000).

[YD] X.T. Yu, X. Dai, *A fixed point theorem of asymptotically nonexpansive mappings*, J. Math. (PRC) 6 (1986), 255-262.

[YK] K. Yosida, S. Kakutani, *Operator theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem*, Annal. of Math. 42 (1941), no. 2, 188-228.

[Z] W. Zhao, *Geometrical coefficients and measures of noncompactness*, Ph. D. Dissertation, University of Glasgow (1992).

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D.ª JOSEFA LORENZO RAMÍREZ.

titulada ALGUNOS TEOREMAS MÉTRICOS DE PUNTO FIJO. DETERMINISTAS Y ALEATORIOS.

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE POR UNANIMIDAD

Sevilla, 19 de SEPTIEMBRE 2002

El Vocal,

Jesús García Falset.

El Vocal,

Antonio Jiménez Melado

El Vocal,

Genaro López Acedo

El Secretario,

Mª Angeles Japón Pineda

El Doctorado,

JOSEFA LORENZO RAMÍREZ

El Presidente

Simeón Reich