

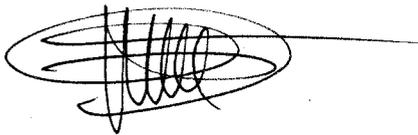
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

MÉTODOS CONSTRUCTIVOS EN ÁLGEBRAS DE OPERADORES DIFERENCIALES

Memoria presentada por Jose María Ucha Enríquez
para optar al grado de Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla.

V^o B^o del Director



Fdo. Francisco Jesús Castro Jiménez
Catedrático de Álgebra

El doctorando



Jose María Ucha Enríquez

Sevilla, Junio 1999

STANDARD OF THE WORLD

193 10

Alena Kaffli

*A mi padre, a mi madre,
a mis hermanos
y a Laura.*

Agradecimientos

Quisiera agradecer ante todo a Francisco Castro su labor de dirección. En las horas de trabajo junto a él, siempre me ha propuesto los problemas de la manera más adecuada, me ha corregido, me ha animado, me ha sugerido soluciones en los momentos difíciles y, sobre todo, me ha hecho disfrutar con los “cristales del Álgebra”.

Gracias a José Luis Vicente Córdoba, responsable directo de que haya dedicado mi vida a la Universidad y del que me reconozco deudor insolvente.

A Luis Nárvaez debo la idea de trabajar con las derivaciones logarítmicas, fundamentales en la primera parte de esta memoria. Y a Michel Granger, debo la elección del problema de la generalización del cálculo de las pendientes, que ocupa toda la segunda parte.

A Philippe Maisonobe, Michel Merle, Lê Dũng Tráng, David Mond y Francisco Calderón les agradezco la amabilidad con la que han escuchado algunas partes de mi trabajo. Sus sugerencias siempre resultaron ser provechosas.

Gracias a Juan Antonio Rivera por su amistad y porque, sin saberlo, me convenció para que estudiara Matemáticas.

Gracias a mi compañero inseparable Miguel Ángel Olalla por su ayuda especialísima. A Maribel Hartillo y José María Tornero por el fructífero seminario secreto. A Jesús Soto que me ayudó con el $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. A Félix Gudiel, Belén Güemes, Magdalena Fernández y a todo el Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla por crear un ambiente de trabajo inmejorable.

Gracias muy especiales a Josemaría, a Álvaro y a Isidoro, que cuidan de los míos con delicadeza cuando yo estoy lejos.

Mi más sincero agradecimiento, por último, a los miembros del tribunal por aceptar asistir a la lectura de mi tesis.

Índice

Resultados originales.	ix
Contenidos.	x
1 Preliminares	1
1.1 División y bases estándar con operadores diferenciales .	1
1.1.1 Los anillos $A_n(\mathbf{K})$, $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K})$ y $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$	1
1.1.2 Símbolo principal de un elemento.	2
1.1.3 Ideales (a izquierda) en \mathcal{R}	3
1.1.4 Exponentes y división	5
1.1.5 Bases estándar o de Gröbner.	7
1.2 La división en \mathcal{R}^N	8
1.2.1 Cálculo de bases estándar en \mathcal{R}^N	11
1.3 Construcción del módulo de las sicigias.	12
1.4 Resolución libre de un \mathcal{R} -módulo (a la izquierda).	16
1.5 Intersección de ideales y de submódulos	17
2 Cálculo de grupos Ext	21
2.1 Sobre un teorema de Mebkhout.	21
2.1.1 Cálculos para f	21
2.1.2 Cálculos para $x \cdot f$	26
2.2 El teorema de comparación logarítmica.	30
2.2.1 \tilde{M}^{\log} en el caso no casi homogéneo.	31
2.2.2 Un ejemplo en dimensión 3.	37
2.3 El problema del anulador en general.	39
2.3.1 Las curvas de Reiffen.	40

2.3.2	El $\text{Ann}(1/f)$ en el caso de f con singularidades no aisladas.	41
2.3.3	C-dimensión de $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\tilde{M}^{\log}, \mathcal{O})$	42
2.4	Apéndice: sucesiones regulares.	43
3	Homogeneización	45
3.1	L -exponentes privilegiados.	45
3.2	Homogeneización en \mathcal{A}	47
3.3	Homogeneización en \mathcal{A}^m	50
3.4	Teorema de división en $A_n[t]^m$	54
3.5	L -bases estándar	59
3.6	L -bases sin homogeneización.	62
4	Pendientes en \mathcal{D}-módulos libres	65
4.1	Pendientes en $A_n(\mathbf{K})$ y $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$	66
4.2	Pendientes de \mathcal{A}^p/N	68
4.2.1	Algunas generalidades sobre filtraciones en B^p	68
4.2.2	Lemas gemelos y finitud de las pendientes.	70
4.2.3	Cálculo del anulador	73
4.2.4	Algoritmo de cálculo de pendientes	75
4.3	Sobre los cálculos en \mathcal{D}	76
5	Cálculos explícitos.	83
5.1	Cálculo de una base de $\text{Der}(\log f)$ para las curvas de Reiffen.	83
5.2	Cálculo indirecto de la dimensión de grupos Ext	85
5.3	Ejemplo de comparación logarítmica en superficies.	88
5.4	Pendientes de $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{Der}(\log f)$ en el caso de la curva de Reiffen.	91
5.4.1	Un primer ejemplo: $q = 4, p = 5$	91
5.4.2	El caso general	93
5.5	Pendientes de $\mathcal{O}[1/f]/\mathcal{O}$	97
5.6	Pendientes en algunos módulos de sicigias (I).	98
5.7	Pendientes en algunos módulos de sicigias (II)	102

5.8	Pendientes en suma directa de ideales	103
5.8.1	Primer caso.	104
5.8.2	Segundo caso.	106
5.8.3	Tercer caso.	108
5.9	Apéndice: algunos órdenes utilizados en este capítulo. .	112

Introducción

Ex umbris et imaginibus in veritatem.

En este trabajo desarrollamos varios métodos constructivos para tratar problemas relacionados (desde puntos de vista diferentes) con la **irregularidad** de un \mathcal{D} -módulo. Tomaremos como soporte la teoría de las bases estándar o de Gröbner en álgebras de operadores diferenciales lineales y en módulos de tipo finito sobre ellas. Algunos antecedentes que han motivado esta memoria son:

- Dados \mathcal{M} un \mathcal{D} -módulo holónimo y Z una hipersuperficie, la demostración del teorema de Mebkhout sobre la perversidad del haz irregularidad de \mathcal{M} a lo largo de Z , $IR_Z(\mathcal{M})$, (ver 3.1.1 de [33]) tiene como obstrucción, en dimensión 2, demostrar que $Ext_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{M}(*Z), \mathcal{O}) = 0$. Para demostrarlo, utiliza, entre otras cosas, el teorema de positividad (sección 2 de [33]) y el concepto de imagen directa (ver [17], por ejemplo).
- Sea D, x un germen de una curva compleja plana. En [13], se demuestra que el complejo $\Omega^\bullet(\log D)_x$ calcula la cohomología del complemento de D, x si y sólo si D es casi homogénea. Es, parcialmente, un recíproco de un teorema de [12], que afirma que este complejo calcula la cohomología del complemento siempre que D sea localmente un divisor libre casi homogéneo.

- La noción de **pendiente algebraica** de un \mathcal{D} -módulo coherente \mathcal{M} , a lo largo de una hipersuperficie lisa Y fue introducida por Y. Laurent bajo el nombre de *índice crítico* en [26]. En el contexto general del anillo de los operadores microdiferenciales, se consideran dos filtraciones: la filtración F por el orden de los operadores y la filtración V de Malgrange-Kashiwara a lo largo de una hipersuperficie. A partir de ellas, se definen las filtraciones intermedias $L_r = pF + qV$ para cualquier número racional $r = p/q \geq 0$. Los índices críticos son los valores de r para los que la variedad característica de \mathcal{M} asociada a L_r no es bihomogénea respecto de las graduaciones inducidas por F y V . Usando operadores 2-microdiferenciales, Y. Laurent probó que sólo hay un número finito de índices críticos. C. Sabbah y F. Castro dieron otra prueba en [41], utilizando el concepto de platificador local de una deformación.

Z. Mebkhout introdujo en [35] la noción de *pendiente transcendente* de un módulo holónimo, a lo largo de una hipersuperficie Y como el salto en la filtración de Gevrey del haz de irregularidad. Si denotamos \mathcal{O} el anillo de las funciones holomorfas, el haz de irregularidad es el complejo de soluciones con valores en el cociente de la completación formal de \mathcal{O} (relativamente a Y) con \mathcal{O} . Es un haz perverso por [35]. Laurent y Mebkhout dan en [27] un teorema de comparación para las pendientes de un \mathcal{D} -módulo holónimo y prueban que las pendientes transcendentales coinciden con las algebraicas. En [27] definen precisamente el polígono de Newton de un \mathcal{D} -módulo holónimo.

En [2] se estudian por primera vez estas nociones desde un punto de vista efectivo: se prueba con métodos elementales que el número de pendientes es finito. Si $A_n(\mathbf{K})$ es el álgebra de Weyl de dimensión n , se da un algoritmo de cálculo de pendientes para $A_n(\mathbf{K})$ módulos del tipo $A_n(\mathbf{K})/I$, donde I es un ideal a la izquierda de $A_n(\mathbf{K})$. Gracias a los resultados de [27], el algoritmo

de cálculo de pendientes proporciona una manera de comprobar la regularidad de un \mathcal{D} -módulo holónimo a lo largo de una hipersuperficie lisa. El algoritmo utiliza el concepto de L_r -base estándar o de Gröbner que necesita en general un procedimiento de homogeneización para su cálculo efectivo. Dicha homogeneización aparece por primera vez en [16] y hace uso del álgebra de Rees.

Resultados originales.

Los resultados originales que consideramos de mayor interés son:

1. Con respecto al primer problema citado, y considerando $M = \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$, ofrecemos una prueba *constructiva* de la nulidad del $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{O}(*Z), \mathcal{O})$ para el caso de una curva Z casi homogénea. Para ello sólo hacemos uso del cálculo de bases estándar de \mathcal{D} -módulos y del cálculo de una resolución libre del \mathcal{D} -módulo $\mathcal{O}[*Z]$. Es fundamental para la prueba el hecho de que, en este caso, $\mathcal{O}[1/f] \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}\text{Ann}(1/f)$.
2. Si I^{\log} es el ideal generado por las derivaciones logarítmicas (ver [42]) y $M^{\log} = \mathcal{D}/I^{\log}$, demostramos que

$$\mathcal{O}[1/f] \simeq (M^{\log})^*,$$

para cualquier curva.

3. Como consecuencia del resultado anterior, se obtienen dos resultados:
 - Una nueva demostración del teorema de comparación logarítmica para curvas que se da en [13], usando los resultados de [33].

- Una demostración de que, si f no es una curva casi homogénea entonces los elementos de $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ que se obtienen a partir de las derivaciones logarítmicas forman un subconjunto propio del anulador.
4. Generalizamos [16] para submódulos de un \mathcal{D} -módulo libre. En particular damos un método para obtener una L -base estándar de un submódulo N a partir de unos generadores de N .
 5. Generalizamos [2] para \mathcal{D} -módulos del tipo \mathcal{D}^p/N , donde N es un submódulo de \mathcal{D}^p . En particular, damos una prueba constructiva de la finitud de las pendientes en este caso y un algoritmo de cálculo que, aunque es en principio global, sirve para obtener las pendientes en el caso local.

Contenidos.

En el capítulo “**Preliminares**” recordamos las nociones básicas de división y bases estándar para anillos $\mathcal{R} = A_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ de operadores diferenciales, así como para módulos de tipo \mathcal{R}^p . Se recuerdan también los métodos para calcular un módulo de sicigias y para obtener una resolución libre de un \mathcal{R} -módulo finitamente generado. Al final se incluye una breve sección que resume el procedimiento de cálculo conocido para obtener la intersección de submódulos en \mathcal{R}^p .

En el capítulo “**Cálculo de grupos Ext**” se obtiene de manera explícita (y para un orden en \mathcal{D}) una resolución libre del módulo $\mathcal{D}/\mathcal{D}\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f) \simeq \mathcal{O}[1/f]$, para f una curva compleja reducida y casi homogénea. Esto se obtiene a partir de una presentación bien conocida de $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ y de una fórmula general para este tipo de curvas.

A partir de la resolución, se obtiene una ecuación diferencial en derivadas parciales muy fácil de resolver y que demuestra la nulidad del $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{O}[1/f], \mathcal{O})$ en este caso. Gracias al isomorfismo antes citado

entre $(M^{\log})^*$ y $\mathcal{O}[1/f]$, se demuestra que la presentación del anulador en la situación casi homogénea no se puede utilizar en la situación general. Proporcionamos también una forma de medir lo “lejos” que está el anulador de $1/f$ del ideal generado a partir de las derivaciones logarítmicas, \tilde{I}^{\log} . Concretamente calculamos la dimensión de $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{D}/\mathcal{D}\tilde{I}^{\log}, \mathcal{O})$.

En el capítulo “**Homogeneización**”, se generalizan los resultados de [16] utilizando también el álgebra de Rees $A_n[t]$, esto es, definiendo el producto

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i + t^2,$$

que facilita luego los cálculos de bases de Gröbner. Se consideran en este capítulo filtraciones respecto de una forma lineal $L = pF + qV$ con p, q enteros no negativos y primos entre sí. Se definen de manera natural el concepto de L -base estándar o de Gröbner y la homogeneización de un elemento de $A_n(\mathbf{K})^p$. Se da un teorema de división en $A_n[t]^p$ y un algoritmo de cálculo de bases estándar en este módulo con respecto a un cierto orden total.

Se demuestra que para obtener una L -base de un submódulo $N \subset A_n(\mathbf{K})^p$, basta con calcular una base estándar en $A_n[t]^p$ de los homogeneizados de los generadores y deshomogeneizar.

En el capítulo “**Pendientes en \mathcal{D} -módulos libres**” se generalizan los resultados de [2]. Se ofrecen dos lemas que permiten encontrar, a partir de una pendiente, la *siguiente* posible pendiente, que siempre será racional. Por compacidad se prueba que el número de pendientes es finito. Se ofrece también un algoritmo de cálculo que sirve para realizar cálculos locales.

En el último capítulo, “**Cálculos explícitos**”, se ofrecen ejemplos de todas las técnicas constructivas que aparecen en esta memoria. Se calculan:

- Una base de $\text{Der}(\log f)$, siendo f cualquier curva de Reiffen.

- La dimensión de $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\tilde{M}^{\log}, \mathcal{O})$ para las curvas de Reiffen,

$$f = x^q + xy^{p-1} + y^p,$$

con $p \geq q + 1 \geq 5$, y la familia de curvas (ver [21])

$$f = (y^2 + x^q)^2 + x^k y = y^4 + x^{2q} + 2y^2 x^q + x^k y$$

con $k \geq 5$, $q \geq 3$ (e impar) y $3q < 2k$).

- Una comprobación de $(M^{\log})^* \simeq \mathcal{O}[1/f]$ en dimensión 3, para la superficie no casi homogénea (ver [10])

$$h = xy(x + y)(xz + y).$$

- Las pendientes de $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{ Der}(\log f)$ para f la curva de Reiffen. Aunque por los resultados del capítulo 2 (ver 2.2.3) se sabe que este módulo es regular, se obtienen pendientes algebraicas.
- Las pendientes de $\mathcal{O}[1/f]/\mathcal{O}$. Es importante señalar que precisamente son los casos de este tipo (en los que el \mathcal{D} -módulo holónimo viene presentado en la forma \mathcal{D}^p/N) los que dan interés al algoritmo de las pendientes.
- Pendientes de un módulo de sicigias a partir de un ideal que produce pendientes.
- Pendientes de módulos del tipo $\mathcal{D}^2/(I_1 \oplus I_2)$ donde I_1, I_2 son ideales que tienen pendientes. Se ofrecen diferentes situaciones sobre la “conservación” de estas pendientes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 División y bases estándar con operadores diferenciales

Comenzamos este capítulo definiendo los anillos base. Para una introducción general ver [6], [7], [8], [17], [22], [29], [40].

1.1.1 Los anillos $A_n(\mathbf{K})$, $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K})$ y $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$

Sea \mathbf{K} un cuerpo de característica cero. Consideramos los siguientes anillos:

- $A_n(\mathbf{K}) = \mathbf{K}[X][D] = \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n][\partial_1, \dots, \partial_n]$, el álgebra de Weyl, es la \mathbf{K} -álgebra de los operadores diferenciales lineales con coeficientes en $\mathbf{K}[X]$.
- $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K}) = \mathbf{K}[[X]][D] = \mathbf{K}[[x_1, \dots, x_n]][\partial_1, \dots, \partial_n]$, es la \mathbf{K} -álgebra de los operadores diferenciales lineales con coeficientes en el anillo $\mathbf{K}[[X]]$ de las series de potencias formales.
- $\mathcal{D}_n(\mathbf{K}) = \mathbf{K}\{X\}[D] = \mathbf{K}\{x_1, \dots, x_n\}[\partial_1, \dots, \partial_n]$, es la \mathbf{K} -álgebra de los operadores diferenciales lineales con coeficientes en el anillo $\mathbf{K}\{X\}$ de las series de potencias convergentes en un entorno del cero, si \mathbf{K} es \mathbf{R} ó \mathbf{C} .

En los conjuntos anteriores se define una suma natural y un producto a partir de la regla

$$\partial_i \cdot f = f \partial_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

para $f \in \mathbf{K}[X], \mathbf{K}[[X]]$ ó $\mathbf{K}\{X\}$ según sea el caso.

Dado un elemento $P \in A_n(\mathbf{K}), \widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K})$ ó $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$, lo escribiremos

$$P = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}} a_{\alpha, \beta} X^\alpha D^\beta = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} f_\beta D^\beta$$

donde $a_{\alpha, \beta} \in \mathbf{K}, f_\beta \in \mathbf{K}[X], \mathbf{K}[[X]]$ ó $\mathbf{K}\{X\}$, respectivamente. Escribiremos \mathcal{R} para denotar indistintamente los anillos $A_n(\mathbf{K}), \widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K})$ ó $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$.

Definición 1.1.1.— Dado el elemento $P \in \mathcal{R}$

$$P = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}} a_{\alpha, \beta} X^\alpha D^\beta$$

llamaremos diagrama de Newton de P , $\mathcal{N}(P)$ al subconjunto de \mathbf{N}^{2n}

$$\mathcal{N}(P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n} \mid a_{\alpha, \beta} \neq 0\}$$

1.1.2 Símbolo principal de un elemento.

Consideremos una forma lineal $L : \mathbf{Q}^{2n} \rightarrow \mathbf{Q}$ con coeficientes no negativos y cuya restricción L_2 a $0 \times \mathbf{Q}^n$ tiene coeficientes estrictamente positivos.

Definición 1.1.2.— Sea $P = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} f_\beta D^\beta \neq 0$ un elemento de \mathcal{R} . El L_2 -orden de P , que denotaremos $\text{ord}_{L_2}(P)$, es el máximo del conjunto $\{L_2(\beta) \mid f_\beta \neq 0\}$. El L_2 -orden del operador 0 es $-\infty$.

Es claro que $\text{ord}_{L_2}(PQ) = \text{ord}_{L_2}(P) + \text{ord}_{L_2}(Q)$ para cualquier par de operadores P y Q .

Para cada $k \in L_2(\mathbf{Q}^n)$ denotaremos $F_k^{L_2}$ al conjunto

$$F_k^{L_2}(\mathcal{R}) = \{P \in \mathcal{R} \mid \text{ord}_{L_2}(P) \leq k\}.$$

La familia $F_{\bullet}^{L_2}(\mathcal{R})$ es una filtración creciente del anillo \mathcal{R} pues

1. $F_{-\infty}^{L_2} = \{0\}$
2. $F_k^{L_2} \subset F_{k'}^{L_2}$, para todo $k, k' \in L_2(\mathbb{Q}^n)$ con $k < k'$,
3. $F_k^{L_2} \cdot F_{k'}^{L_2} \subseteq F_{k+k'}^{L_2}$, para todos los $k, k' \in L_2(\mathbb{Q}^n)$,
4. $\bigcup_{k \in L_2(\mathbb{Q}^n)} F_k^{L_2} = \mathcal{R}$.

Denotaremos $gr_k^{L_2}(\mathcal{R})$ al cociente $F_k^{L_2}(\mathcal{R})/F_{<k}^{L_2}(\mathcal{R})$ y por $gr^{L_2}(\mathcal{R})$ al anillo graduado asociado

$$gr^{L_2}(\mathcal{R}) = \bigoplus_{k \in L_2(\mathbb{Q}^n)} gr_k^{L_2}(\mathcal{R}).$$

Definición 1.1.3.— A la aplicación $\sigma_k^{L_2} : F_k^{L_2}(\mathcal{R}) \rightarrow gr_k^{L_2}(\mathcal{R})$ se le llama función símbolo de orden k relativamente a L_2 .

Dado un elemento $P \in F_k^{L_2}(\mathcal{R}) \setminus F_{<k}^{L_2}(\mathcal{R})$, el L_2 -símbolo principal de P es $\sigma_k^{L_2}(P)$. Lo escribiremos en general $\sigma^{L_2}(P)$.

El anillo $gr^{L_2}(\mathcal{R})$ es conmutativo e isomorfo a:

- $\mathbf{K}[X, \xi]$ en el caso de $A_n(\mathbf{K})$,
- $\mathbf{K}[[X]][[\xi]]$ en el caso de $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K})$,
- $\mathbf{K}\{X\}[\xi]$ en el caso de D ,

donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Esto es debido a la condición impuesta a los coeficientes de la forma lineal L_2 .

1.1.3 Ideales (a izquierda) en \mathcal{R} .

Dado I un ideal a izquierda de \mathcal{R} y una forma L como antes, notaremos

$$F_{L_2, \bullet}(I) = I \cap F_{\bullet}^{L_2}(\mathcal{R})$$

a la filtración sobre I inducida por ord^{L_2} y

$$\text{gr}^{L_2}(I) = \bigoplus_{k \in L_2(\mathbf{Q}^n)} F_k^{L_2}(I)/F_{<k}^{L_2}(I)$$

al graduado asociado. En esta situación se tienen los dos siguientes resultados:

Proposición 1.1.4.— $\text{gr}^{L_2}(I)$ es un ideal de $\text{gr}^{L_2}(\mathcal{R})$.

Proposición 1.1.5.— $\text{gr}^{L_2}(I) = \text{gr}^{L_2}(\mathcal{R}) \cdot \langle \sigma^{L_2}(P) \mid P \in I \rangle$

DEMOSTRACIÓN: La inclusión de izquierda a derecha es inmediata: los $\sigma^{L_2}(P)$ están en $\text{gr}^{L_2}(I)$ y éste es un ideal.

La otra inclusión es como sigue: si $p \in \text{gr}^{L_2}(I)$ entonces

$$p = p_1 + \cdots + p_r,$$

donde cada $p_i \in \text{gr}_{d_i}^{L_2}(I) = I \cap F_{d_i}^{L_2}/I \cap F_{<d_i}^{L_2}$. Entonces existen $P_i \in I$ cada uno de $\text{ord}^{L_2} = d_i$ y por tanto $p = \sigma(P_1) + \cdots + \sigma(P_r)$. \square

En el caso en el que trabajemos en $A_n(\mathbf{K})$, podemos tratar al mismo nivel las variables X y D . La siguiente definición de orden da lugar a la llamada *filtración de Bernstein*:

Definición 1.1.6.— Dado $P = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n}} a_{\alpha,\beta} X^\alpha D^\beta \in A_n(\mathbf{K})$, llamaremos L -orden de P , que denotaremos $\text{ord}_L(P)$, al racional

$$\text{ord}_L(P) = \max\{L(\alpha, \beta) \mid a_{\alpha,\beta} \neq 0\}$$

El L -símbolo principal de P es $\sigma^L(P) = \sum_{L(\alpha,\beta) = \text{ord}_L(P)} a_{\alpha,\beta} X^\alpha \xi^\beta$, donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Un objeto asociado a I y que utilizaremos más adelante es la L_2 -variedad característica (que también se puede definir respecto de la filtración de Bernstein).

Definición 1.1.7.— Dado un ideal de \mathcal{R} llamaremos L_2 -variedad característica del \mathcal{R} -módulo \mathcal{R}/I al conjunto

$$\text{Char}_{L_2}(\mathcal{R}/I) = \{(X, \xi) \in \mathbf{K}^{2n} \mid \sigma^{L_2}(P)(X, \xi) = 0 \text{ para todo } P \in I\}$$

1.1.4 Exponentes y división

Para definir la división fijaremos una forma lineal L con coeficientes no negativos cuya restricción L_2 a $\{0\} \times \mathbf{Q}^n$ tiene coeficientes estrictamente positivos. Dado un buen orden \prec en \mathbf{N}^{2n} compatible con el producto, definimos el siguiente orden $<_L$ para exponentes de elementos en $A_n(\mathbf{K})$:

$$(\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} L_2(\beta) < L_2(\beta') \\ \text{ó } L_2(\beta) = L_2(\beta') \text{ y } L(\alpha, \beta) < L(\alpha', \beta') \\ \text{ó } \begin{cases} L_2(\beta) = L_2(\beta'), L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta') \\ \text{y } (\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

La definición es ligeramente diferente en los casos de $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{K})$ y $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$:

$$(\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} L_2(\beta) < L_2(\beta') \\ \text{ó } L_2(\beta) = L_2(\beta') \text{ y } L(\alpha, \beta) > L(\alpha', \beta') \\ \text{ó } \begin{cases} L_2(\beta) = L_2(\beta'), L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta') \\ \text{y } (\alpha, \beta) \succ (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

También se puede definir un orden adecuado para dividir en $A_n(\mathbf{K})$ usando la filtración de Bernstein. La definición de dicho orden es:

$$(\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} L(\alpha, \beta) < L(\alpha', \beta') \\ \text{ó } L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta') \text{ y } (\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta') \end{cases},$$

que se puede entender como una generalización de los órdenes de división para polinomios.

Definición 1.1.8.— Sea $P \in \mathcal{R}$. Llamaremos L -exponente de P , $\exp_L(P)$, a la $2n$ -upla

$$\exp_L(P) = \max_{<_L} \{(\alpha, \beta) \mid a_{\alpha, \beta} \neq 0\}$$

Desde luego $\exp_L(P) = \exp_L(\sigma^{L_2}(P))$ con $\sigma^{L_2}(P) \in \mathbf{K}[X, \xi]$, $\mathbf{K}[[X]][[\xi]]$ ó $\mathbf{K}\{X\}[[\xi]]$ según corresponda. El exponente en estos anillos se define de la manera natural a partir de los órdenes para operadores (ver [14]).

Definición 1.1.9.— Dado $P \in \mathcal{R}$, llamaremos monomio principal o líder de P respecto de $<_L$, que denotaremos $mp_L(P)$, al monomio que da el exponente. Llamaremos coeficiente principal o líder de P respecto de $<_L$, que denotaremos $cp_L(P)$, al coeficiente del monomio principal.

Escribiremos simplemente $\exp(P)$, $mp(P)$ y $cp(P)$ si no hay confusión. El exponente definido cumple las propiedades usuales:

1. $\exp(PQ) = \exp(P) + \exp(Q)$.
2. Si $\exp(P) \neq \exp(Q)$, $\exp(P + Q) = \max\{\exp(P), \exp(Q)\}$.

Para cada ideal I distinto de cero queda determinado el conjunto $E_{<_L}(I) = \{\exp_L(P) \mid P \in I \setminus \{0\}\}$. Escribiremos también $E(I)$ cuando no haya confusión. El conjunto de exponentes verifica:

- $E(I) = E(I) + \mathbf{N}^{2n}$.
- Siempre existe un subconjunto finito G de $E(I)$ tal que $E(I) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in G} ((\alpha, \beta) + \mathbf{N}^{2n})$. ([24]).

Para dar un teorema de división sólo nos falta recordar el concepto de partición de \mathbf{N}^{2n} asociado a un vector de exponentes. Dado $((\alpha^1, \beta^1), \dots, (\alpha^m, \beta^m)) \in (\mathbf{N}^{2n})^m$, establecemos la siguiente partición¹ $\{\Delta^1, \dots, \Delta^m, \overline{\Delta}\}$ de \mathbf{N}^{2n} :

¹En sentido amplio: algún elemento de la partición puede ser el vacío. Obsérvese que el orden de los exponentes es importante.

$$\begin{aligned}\Delta^1 &= (\alpha^1, \beta^1) + \mathbb{N}^{2n}, \\ \Delta^{i+1} &= ((\alpha^{i+1}, \beta^{i+1}) + \mathbb{N}^{2n}) \setminus (\Delta^1 \cup \dots \cup \Delta^i) \text{ si } i \geq 1, \\ \bar{\Delta} &= \mathbb{N}^{2n} \setminus (\Delta^1 \cup \dots \cup \Delta^m)\end{aligned}$$

Supongamos fijado un cierto orden $<_L$.

Teorema 1.1.10.— Sean P_1, \dots, P_m elementos no nulos de \mathcal{R} , y sea $\Delta^1, \dots, \Delta^m, \bar{\Delta}$ la partición asociada al vector de L -exponentes de los P_i , $1 \leq i \leq m$. Entonces, para todo $P \in \mathcal{R}$, existen unos únicos elementos $Q_1, \dots, Q_m, R \in \mathcal{R}$ tales que:

1. $P = Q_1 P_1 + \dots + Q_m P_m + R$.
2. $\exp(P_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subset \Delta^i$, $i = 1, \dots, m$.
3. $\mathcal{N}(R) \subset \bar{\Delta}$.

DEMOSTRACIÓN: (ver [14]) La idea de la demostración es considerar la división de polinomios del símbolo de P entre los símbolos de P_1, \dots, P_m , todos elementos L_2 -homogéneos. Obtenidos los cocientes q_1, \dots, q_m y el resto r (también L_2 -homogéneos), se toman elementos Q_1, \dots, Q_m, R en \mathcal{R} cuyos símbolos sean q_1, \dots, q_m, r (se entiende aquí que, de todos los elementos que dan estos símbolos, se eligen concretamente los que se obtienen al cambiar cada ξ_i por ∂_i). Por último, se aplica la inducción a P' con

$$P' = P - \sum_{i=1}^m Q_i P_i - R$$

de L_2 -orden menor que P . \square

1.1.5 Bases estándar o de Gröbner.

Sea I un ideal no nulo de \mathcal{R} .

Definición 1.1.11.— Una familia de elementos P_1, \dots, P_m es una base estándar o de Gröbner de I (con respecto a un cierto orden $<_L$) si

$$E(I) = \bigcup_{i=1}^m (\exp_L(P_i) + \mathbf{N}^{2n})$$

Como consecuencia de la división se tiene el siguiente resultado de gran utilidad para manejar los ideales en \mathcal{R} :

Teorema 1.1.12.— Si $\{P_1, \dots, P_m\}$ es una base estándar (con respecto a un cierto orden $<_L$) de I , genera I . Además, un elemento P de \mathcal{R} está en I si y sólo si el resto de dividir P por P_1, \dots, P_m es cero.

El cálculo de estas bases se realiza con un algoritmo totalmente similar al de Buchberger ([9]). Daremos algunos detalles más en el caso de los \mathcal{R} -módulos libres.

1.2 La división en \mathcal{R}^N .

El conjunto \mathcal{R}^N tiene una estructura natural de \mathcal{R} -módulo. Con la definición de exponente que damos en esta sección, se generaliza el teorema de división en \mathcal{R} . Una referencia general de toda esta sección es [14].

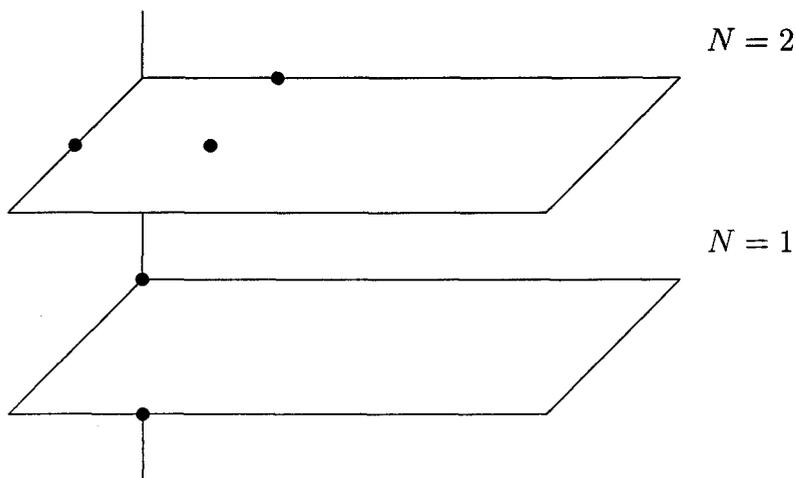
Definición 1.2.1.— Dado \mathbf{P} un elemento de \mathcal{R}^N ,

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_N), \quad P_i = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}} a_{\alpha, \beta}^i X^\alpha D^\beta \text{ con } a_{\alpha, \beta}^i \in \mathbf{K},$$

llamaremos diagrama de Newton de $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^N$, $\mathcal{N}(\mathbf{P})$, al subconjunto de $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, N\}$

$$\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \{(\alpha, \beta, i) \in \mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, N\} \mid a_{\alpha, \beta}^i \neq 0\}$$

Ejemplo 1.2.2.— El diagrama de Newton del elemento $(x^2 \partial_x + 1, x + \partial_x + x \partial_x)$ en $A_1(\mathbf{C})^2$ es



Generalizando el caso de los polinomios, definimos² el siguiente buen orden $<_L$ en $\mathbb{N}^{2n} \times \{1, \dots, N\}$:

Definición 1.2.3.—

$$(\alpha, \beta, i) <_L (\alpha', \beta', j) \iff \begin{cases} (\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \\ \text{ó } (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \text{ e } i < j \end{cases}$$

Por supuesto no es necesario que el orden entre las componentes sea el anterior: pueden definirse otros posibles órdenes. También podemos definir un orden que prime la posición antes que el monomio. En [1] ó [14] aparecen otros ejemplos de órdenes en \mathcal{R}^N .

Definición 1.2.4.— *El exponente de un elemento $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^N$, que notaremos $\exp_L(\mathbf{P})$, es*

$$\exp_L(\mathbf{P}) = \max_{<_L} \mathcal{N}(\mathbf{P}).$$

Escribiremos simplemente $\exp(\mathbf{P})$ cuando no haya confusión. Se definen igualmente monomio principal (ahora un monomio en una componente y todo lo demás cero) y coeficiente principal respecto de $<_L$. Utilizaremos la misma notación $mp_L(\mathbf{P})$, $cp_L(\mathbf{P})$ para $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^N$.

²Lo denotamos igual que en \mathcal{R} : para $N = 1$ coincide.

Ejemplo 1.2.5.— Dados la forma lineal $L = (1, 1)$ y el elemento $\mathbf{P} = (x^2\partial_x + 2, 3x + 4\partial_x + 5x\partial_x) \in A_1(\mathbf{C})^2$ se tiene $mp_L(\mathbf{P}) = (x^2\partial_x, 0)$, $cp_L(\mathbf{P}) = 1$.

Proposición 1.2.6.— Sean $P \in \mathcal{R}$, $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathcal{R}^N$. Se tiene que

1. $\exp_L(P\mathbf{Q}) = \exp_L(P) + \exp_L(\mathbf{Q})$.
2. Si $\exp_L(\mathbf{Q}) \neq \exp_L(\mathbf{R})$ entonces

$$\exp_L(\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \max_{<_L} \{\exp_L(\mathbf{Q}), \exp_L(\mathbf{R})\}.$$

En proposición anterior, en la que aparecen sumas de un exponente de \mathbf{N}^{2n} y otro de $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, N\}$ se entiende que

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta, i) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta, i).$$

La partición de $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, N\}$ asociada a un conjunto de r exponentes se define como en \mathbf{N}^{2n} entendiéndose que $(\alpha, \beta, i) + \mathbf{N}^{2n}$ es el cuadrante con vértice en (α, β) en la copia i -ésima de \mathbf{N}^{2n} , $i = 1, \dots, N$.

Supongamos fijado un orden $<_L$ en $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, N\}$.

Teorema 1.2.7.— Sea $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\}$ una familia de elementos no nulos de \mathcal{R}^N y sea $\{\Delta^1, \dots, \Delta^m, \bar{\Delta}\}$ la partición asociada a la familia de sus exponentes. Entonces, para todo $\mathbf{P} \in \mathcal{R}$ existe un único $(Q_1, \dots, Q_m, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^N$ tal que

- $\mathbf{P} = Q_1\mathbf{P}_1 + \dots + Q_m\mathbf{P}_m + \mathbf{R}$.
- $\exp(\mathbf{P}_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subset \Delta^i$, $1 \leq i \leq m$.
- $\mathcal{N}(\mathbf{R}) \in \bar{\Delta}$.

La familia $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ es la familia de cocientes y \mathbf{R} es el resto de la división de \mathbf{P} por $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\}$.

En la demostración del teorema de división en \mathcal{R}^N la inducción va reduciendo el exponente primero dentro de cada componente y después bajando a una componente “menor” (según el sentido que hayamos querido darle).

1.2.1 Cálculo de bases estándar en \mathcal{R}^N .

Como en el caso de los ideales en \mathcal{R} , en \mathcal{R}^N se define el conjunto de exponentes de un submódulo M asociado a un orden $<_L$:

$$E_{<_L}(M) = \{\exp_L(\mathbf{P}) \mid \mathbf{P} \in M\}.$$

que también verifica que $E_{<_L}(M) = E_{<_L}(M) + \mathbb{N}^{2n}$.

Definición 1.2.8.— Sea M un submódulo de \mathcal{R}^N . Una familia de elementos $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\} \subset M$ tales que $E_{<_L}(M) = \bigcup_{i=1}^m (\exp_L(\mathbf{P}_i) + \mathbb{N}^{2n})$ se denomina una base estándar o de Gröbner de M (respecto de $<_L$).

Como en el caso de los ideales, una base estándar de M genera M y un elemento está en M si y sólo si al dividirlo por la base se obtiene resto cero.

Definición 1.2.9.— Para elementos $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{R}^N$ con exponentes en la misma componente, la semicigia de \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 es el elemento

$$S(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = M_1\mathbf{P}_1 - M_2\mathbf{P}_2$$

donde $M_1, M_2 \in \mathcal{R}$ son los dos monomios de exponentes ν^1, ν^2 mínimos tales que

$$\nu^1 + \exp(\mathbf{P}_1) = \nu^2 + \exp(\mathbf{P}_2),$$

y con $cp(M_1)cp(\mathbf{P}_1) = cp(M_2)cp(\mathbf{P}_2)$. La semisicigia de dos elementos con exponentes en componentes distintas es $\mathbf{0} \in \mathcal{R}^N$.

De la eliminación de los monomios que dan el exponente se sigue que

$$\exp(S(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)) <_L \exp(M_1\mathbf{P}_1) = \exp(M_2\mathbf{P}_2).$$

Teorema 1.2.10.— ([14]) Sean $\mathcal{G} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\}$ un conjunto de generadores de un submódulo $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}^N$ tales que para cualquier par $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$ el resto de dividir $S(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j)$ por los elementos de \mathcal{G} es cero. Entonces \mathcal{G} es una base estándar de \mathcal{N} (respecto de $<_L$).

1.3 Construcción del módulo de las sicigias.

Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\}$ una familia de elementos de \mathcal{R}^N . Se define el conjunto de las sicigias de $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$ como

$$\text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m) = \{(Q_1, \dots, Q_m) \in \mathcal{R}^m \mid \sum_{i=1}^m Q_i \mathbf{P}_i = \mathbf{0}\}$$

que tiene, evidentemente, estructura de \mathcal{R} -módulo a izquierda. Veamos que es posible dar una familia de generadores de $\text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$ a partir de la obtención de una base estándar del módulo generado por los elementos de \mathcal{F} .

En una primera aproximación para obtener $\text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$ supondremos que esta familia forma una base estándar (respecto a un buen orden total $<_L$). También supondremos que son mónicos³.

Consideremos para cada par de elementos de \mathcal{F} distintos \mathbf{P}_i y \mathbf{P}_j el monomio de menor exponente —relativo al orden parcial usual en \mathbf{N}^{2n} — $X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)}$ que hace divisible $X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \cdot \mathbf{P}_j$ por \mathbf{P}_i . El elemento $X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \cdot \mathbf{P}_j$ está en el submódulo que genera \mathcal{F} y, si realizamos la división por \mathcal{F} resultará

$$X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \cdot \mathbf{P}_j = \sum_{k=1}^m Q_k^{(i,j)} \cdot \mathbf{P}_k$$

³Esto no supone pérdida de generalidad, teniendo en cuenta que si $(Q_1, \dots, Q_m) \in \text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$ entonces es trivial que, dadas $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{K}$ se tiene

$$(c_1 Q_1, \dots, c_m Q_m) \in \text{Syz}\left(\frac{1}{c_1} \mathbf{P}_1, \dots, \frac{1}{c_m} \mathbf{P}_m\right)$$

donde se cumple que

$$\exp(Q_k^{(i,j)} \cdot \mathbf{P}_k) <_L \exp(X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \cdot \mathbf{P}_j)$$

por ser lo anterior una división: los exponentes de cada $Q_k^{(i,j)} \cdot \mathbf{P}_k$ están en elementos distintos de una partición y no se podrían anular para conseguir el exponente de $X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \cdot \mathbf{P}_j$.

En estas circunstancias, definimos para cada par $(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j)$ de \mathcal{F} distintos, con $i < j$, el siguiente elemento de \mathcal{R}^m :

$$\mathbf{R}^{(i,j)} = (-Q_1^{(i,j)}, \dots, \overbrace{X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} - Q_j^{(i,j)}}^j, \dots, -Q_m^{(i,j)}).$$

Estos elementos están en $\text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$. Además son unos generadores:

Teorema 1.3.1.— *El conjunto $\{\mathbf{R}^{(i,j)} \text{ con } 1 \leq i < j \leq m\}$ es un conjunto de generadores de $\text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $M = \text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m) - M'$, donde M' es el submódulo generado por los $\{\mathbf{R}^{(i,j)}\}$. Supongamos que es no vacío y tomemos un elemento $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_m) \in M$ con las dos condiciones siguientes:

- El $\max\{\exp(H_k \mathbf{P}_k), 1 \leq k \leq m\}$ es mínimo. Sea (t, t', l) ese exponente mínimo.
- El cardinal del conjunto $J(\mathbf{H}) = \{k \mid \exp(H_k \mathbf{P}_k) = (t, t', l)\}$ es también mínimo.

Como $\mathbf{H} \in \text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$ se tiene que

$$H_1 \mathbf{P}_1 + \dots + H_m \mathbf{P}_m = \mathbf{0},$$

y en esta suma ha de ser cero en particular la suma de todos los monomios de exponente (t, t', l) . Por tanto, existen i, j (pongamos

$i < j$) con

$$(t, t', l) = \begin{cases} \exp(H_i \mathbf{P}_i) = (t_i, t'_i, l) = \exp(H_i) + \exp(\mathbf{P}_i) \\ \exp(H_j \mathbf{P}_j) = (t_j, t'_j, l) = \exp(H_j) + \exp(\mathbf{P}_j) \end{cases}$$

de donde $\exp(\mathbf{P}_i)$ y $\exp(\mathbf{P}_j)$ dividen a (t, t', l) . Como el exponente de $X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} = (s, s', l)$ es el mínimo que hace divisible al monomio principal de $X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \mathbf{P}_i$ por el de \mathbf{P}_j , existe un exponente (u, u') tal que $(t, t') = (s, s') + (u, u')$.

Si llamamos a_j al coeficiente del monomio que da el exponente en H_j , el elemento $\mathbf{G} = \mathbf{H} + a_j X^u D^{u'} \mathbf{R}^{(i,j)}$ es una nueva sicigia que está en M .

Pero $J(\mathbf{G})$ tiene menos elementos estrictamente que $J(\mathbf{H})$. En efecto:

- La expresión

$$X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} \cdot \mathbf{P}_j = \sum_{k=1}^m Q_k^{(i,j)} \cdot \mathbf{P}_k$$

es una división. Por tanto, $\exp(Q_k^{(i,j)} \cdot \mathbf{P}_k) <_L (s, s', l)$.

- En cada componente $k \neq j$ de \mathbf{G} tenemos

$$\begin{aligned} & \exp(a_j X^u D^{u'} Q_k^{(i,j)} \mathbf{P}_k) \\ &= (u, u') + \exp(Q_k^{(i,j)} \cdot \mathbf{P}_k) < (u, u') + (s, s', l) = (t, t', l) \end{aligned}$$

Así, en estas componentes, sólo se alcanza $\exp(G_k \mathbf{P}_k) = (t, t', l)$ si se alcanza en $(H_k \mathbf{P}_k)$.

- Si $k = j$, observemos la expresión

$$a_j X^u D^{u'} (X^{\alpha(i,j)} D^{\beta(i,j)} - Q_j^{(i,j)}),$$

que sumada a H_j es G_j . Al multiplicarla por \mathbf{P}_j , el exponente se alcanza en el producto $a_j X^u D^{u'} \mathbf{P}_j$ y es $(u, u') + (s, s', l) =$

(t, t', l) . Este exponente es el mismo que el de $H_j P_j$ y los monomios que dan este exponentes son iguales pero de signo opuesto: en $G_j P_j$ el exponente es $<_L(t, t', l)$.

El cardinal de $J(\mathbf{G})$ es menor que el mínimo posible !!

□

Tomemos ahora una familia $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\}$ cualquiera.

Si $\mathcal{G} = \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_t\}$ es una base estándar del módulo que genera \mathcal{F} , existen dos matrices $U \in \mathcal{M}(m \times t; \mathcal{R})$ y $T \in \mathcal{M}(t \times m; \mathcal{R})$ tales que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m \end{pmatrix}$$

donde U se obtiene dividiendo los elementos de \mathcal{F} por los de la base estándar. T se calcula a la vez que \mathcal{G} , guardando los cocientes que aparecen cada vez que se añade un elemento a la base. Si $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_s\}$ son unos generadores de $\text{Syz}(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_t)$ y $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_m\}$ es el conjunto de las filas de $I - UT$ (donde I es la matriz identidad de orden m), se tiene el siguiente

Teorema 1.3.2.— *La familia $\{\mathbf{R}_i \cdot T, 1 \leq i \leq t\} \cup \{\mathbf{F}_l, 1 \leq l \leq m\}$ forma un sistema de generadores de $\text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$.*

DEMOSTRACIÓN: (análoga al caso conmutativo. Ver [1] o [5])

Dado $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_m) \in \text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$ se tiene que

$$(S_1, \dots, S_m) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m \end{pmatrix} = 0 \implies (S_1, \dots, S_m) \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_t \end{pmatrix} = 0$$

Existen entonces unos ciertos $H_l \in \mathcal{R}$, $1 \leq l \leq s$ tales que

$$(S_1, \dots, S_m) \cdot U = \sum_{l=1}^s H_l \mathbf{R}_l.$$

De aquí $(S_1, \dots, S_m) \cdot UT = \sum_{l=1}^s H_l \mathbf{R}_l \cdot T$. Finalmente

$$\begin{aligned} (S_1, \dots, S_m) &= \\ &= ((S_1, \dots, S_m) - (S_1, \dots, S_m) \cdot UT) + (S_1, \dots, S_m) \cdot UT \end{aligned}$$

y, por tanto \mathbf{S} es combinación de las filas de $I - UT$ y de los elementos del conjunto $\{\mathbf{R}_1 \cdot T, \dots, \mathbf{R}_s \cdot T\}$

□

Con los teoremas anteriores tenemos un algoritmo que proporciona unos generadores del módulo $Syz(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$.

Es importante señalar que, en el caso en el que la base estándar \mathcal{G} contenga a la familia \mathcal{F} como primeros elementos, basta con los $\{\mathbf{R}_i \cdot T, 1 \leq i \leq t\}$ para generar $Syz(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m)$, pues UT es en ese caso la identidad. Usaremos esta propiedad para simplificar algunos cálculos de esta memoria.

1.4 Resolución libre de un \mathcal{R} -módulo (a la izquierda).

En esta sección se supondrá que M es un \mathcal{R} -módulo de finitamente generado. Por lo tanto se tendrá un isomorfismo

$$M \simeq \mathcal{R}^{s_0} / N_1$$

donde N_1 es un submódulo de \mathcal{R}^{s_0} . Denotemos $M = M_1$.

Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{m_1}\}$ una familia de generadores de N_1 . Los pasos a seguir para construir la resolución libre de M son:

1. Sea $i = 1$.
2. Se considera la sucesión exacta de \mathcal{R} -módulos (obtenida a partir de $M_i = \mathcal{R}^{s_{i-1}} / N_i$)

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi_i) \xrightarrow{j} \mathcal{R}^{s_i} \xrightarrow{\varphi_i} M_i \longrightarrow 0$$

donde

$$\varphi_1(Q_1, \dots, Q_{s_i}) = Q_1 \mathbf{P}_1 + \dots + Q_{s_i} \mathbf{P}_{s_i}.$$

3. Denotemos $\text{Ker}(\varphi_i) = M_{i+1}$. Conseguimos unos generadores de $M_{i+1} = \text{Syz}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{s_i})$.
4. Volver al paso 2 con $i = i + 1$.

De esta manera, obtenemos una familia de sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi_i) \longrightarrow \mathcal{R}^{s_i} \xrightarrow{\varphi_i} M_i \longrightarrow 0 \quad (i \geq 1),$$

donde $M_1 = M$ y $M_i = \text{Ker}(\varphi_{i-1})$ para $i \geq 2$. Reuniendo toda la información obtenemos una resolución libre de M :

$$\dots \longrightarrow \mathcal{R}^{s_k} \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{R}^{s_{k-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{R}^{s_1} \xrightarrow{\varphi_1} M \longrightarrow 0.$$

El resultado importante en esta situación es que la longitud de la sucesión anterior es finita:

Teorema 1.4.1.— *Consideremos la sucesión libre construida con el procedimiento citado. Entonces $\text{Ker}(\varphi_{2n-1})$ es un \mathcal{R} -módulo libre.*

La demostración de este teorema ([14]) utiliza de manera esencial la construcción de una resolución a partir de los graduados de los \mathcal{R} -módulos y de los morfismos φ_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$.

1.5 Intersección de ideales y de submódulos

Recordamos aquí los resultados necesarios para calcular la intersección de ideales de \mathcal{R} y de submódulos de un módulo libre \mathcal{R}^N .

Consideremos una partición $\{V, W\}$ del conjunto $\{1, \dots, 2n\}$. Sean \langle_V, \langle_W dos buenos órdenes compatibles con la suma de exponentes en cada uno de los dos subconjuntos.

Definición 1.5.1.— *Dados v_1, v_2 en V y w_1, w_2 en W el orden de eliminación $\prec_{\{VW\}}$ con V mayor que W , definido para exponentes en \mathbb{N}^{2n} , es el siguiente⁴:*

$$(v_1, w_1) \prec_{\{VW\}} (v_2, w_2) \iff \begin{cases} v_1 <_V v_2 \\ \text{ó} \\ v_1 = v_2 \text{ y } w_1 <_W w_2 \end{cases}$$

Un orden más general puede definirse para \mathcal{R}^p añadiendo simplemente alguna condición sobre el orden entre las componentes (como en 1.2.3). Es inmediato el siguiente

Lema 1.5.2.— *El orden $\prec_{\{VW\}}$ es un buen orden compatible con el producto. Es más, si w es un exponente con coordenadas no nulas sólo en W y v es un exponente con alguna coordenada no nula en V , entonces $w \prec v$.*

Con la notación anterior, y denotando \mathcal{R}_W el correspondiente anillo de operadores diferenciales con variables sólo en W , los dos resultados siguientes dan una forma de cálculo de la intersección de ideales. Las demostraciones son análogas al caso conmutativo (ver, por ejemplo, [1] ó [18]).

Proposición 1.5.3.— *Sea I un ideal de \mathcal{R} y sea $G = \{G_1, \dots, G_r\}$ una base estándar para el orden \prec . Entonces $G \cap \mathcal{R}_W$ es una base estándar para el ideal $I \cap \mathcal{R}_W$.*

DEMOSTRACIÓN: Desde luego, todos los elementos de G en \mathcal{R}_W están en $I \cap \mathcal{R}_W$.

Recíprocamente, dado un elemento no nulo $P \in I \cap \mathcal{R}_W$, como G es una base estándar, existe un i_0 tal que el exponente de G_{i_0} divide al de P . Esto significa, con el orden \prec de eliminación que hemos definido, que todos los monomios de G_{i_0} están en \mathcal{R}_W . \square

⁴Este orden es del mismo tipo que el que aparece, por ejemplo, en [15].

Sean I, J dos ideales en \mathcal{R} . Sea w una nueva indeterminada. Denotaremos I^e, J^e la extensión natural de los ideales I, J en $\mathcal{R}[w]$, donde w conmuta con todas las variables. Dado un elemento f de $\mathcal{R}[w]$ y un ideal I de \mathcal{R} , denotaremos fI^e al ideal producto de (f) e I^e en $\mathcal{R}[w]$.

Proposición 1.5.4.— *Sean I, J dos ideales de \mathcal{R} . Entonces*

$$\langle wI^e, (1-w)J^e \rangle \cap \mathcal{R} = I \cap J.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $P \in I \cap J$. Dado que

$$P = wP + (1-w)P,$$

la inclusión de izquierda a derecha es clara.

Si $P \in \langle wI^e, (1-w)J^e \rangle \cap \mathcal{R}$, entonces

$$P = wQ + (1-w)R,$$

con $Q \in I^e, R \in J^e$. Por estar P en \mathcal{R} , podemos dar a w el valor que queramos obteniendo en la expresión anterior siempre P . Para $w = 0$ y $w = 1$ se deduce que $P \in I \cap J$. \square

Para los submódulos de \mathcal{R}^N los resultados se demuestran de igual manera.

Capítulo 2

Cálculo de grupos Ext

2.1 Sobre un teorema de Mebkhout.

Dados M un \mathcal{D} -módulo holónimo¹ y Z una hipersuperficie, la demostración del teorema de Mebkhout sobre la perversidad del haz irregularidad de M a lo largo de Z , $IR_Z(M)$, (ver 3.1.1 de [33]) tiene como obstrucción, en dimensión 2, demostrar que $Ext_{\mathcal{D}}^2(M(*Z), \mathcal{O}) = 0$.

En el presente capítulo, considerando $M = \mathcal{O} = \mathbf{C}\{x, y\}$, se da una prueba *constructiva* de la nulidad del $Ext_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{O}(*Z), \mathcal{O})$ para el caso de una curva Z casi homogénea. Sólo se usan resultados elementales sobre bases estándar de \mathcal{D} -módulos.

2.1.1 Cálculos para f .

Consideremos $f \in \mathbf{C}[x, y]$ un polinomio casi homogéneo. Si denotamos por w_1 y w_2 los pesos de las variables (podemos suponer que $w_2 \geq w_1$) unos generadores de $Ann_{\mathcal{D}}[\frac{1}{f}]$ son (ver [30]):

- $P_1 = f'_y \partial_x - f'_x \partial_y$
- $P_2 = w_1 x \partial_x + w_2 y \partial_y + 1$

¹Un $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ -módulo se dice *holónimo* si la dimensión de su variedad característica (ver 1.1.7) es n .

Dado que la b -función² cumple $queb_f(i) \neq 0$, $i \leq -2$ ([45]) se tiene que

$$\mathcal{O}[1/f] \simeq \mathcal{D} \cdot 1/f \simeq \mathcal{D}/Ann_{\mathcal{D}}(1/f).$$

Distinguiremos dos casos según la curva casi homogénea reducida venga definida por una ecuación de tipo f ó xf con

$$f = y^p + c_1 x^q y^{p-p_1} + c_2 x^{2q} y^{p-2p_1} + \dots + c_k x^{kq} y^{p-kp_1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

siendo $q \geq p_1 \geq 1$, $p = 0$ ó $1 \pmod{p_1}$ y $w_2 = \frac{1}{p}$, $qw_1 = p_1 w_2$. Describiremos en la sección siguiente el caso en el que la curva viene definida por un polinomio del tipo xf y en esta sección haremos los cálculos para f . Tomaremos a partir de ahora como nuevo P_2 el anterior por pq . Así, para el primer caso obtenemos:

$$P_1 = py^{p-1}\partial_x + \sum_{l=1}^k c_l(p-lp_1)x^{lq}y^{p-lp_1-1}\partial_x - \sum_{l=1}^k c_l(lq)x^{lq-1}y^{p-lp_1}\partial_y$$

$$P_2 = p_1x\partial_x + qy\partial_y + qp.$$

Veamos que el ideal $\mathcal{D}(P_1, P_2)$ posee una base estándar con tres elementos. Todos los cálculos de esta sección se realizan con el orden diagonal³ con $y > x$.

Proposición 2.1.1.— $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base estándar de I , con $P_3 = \partial_y f$.

DEMOSTRACIÓN: Calculamos la primera semisicigia:

$$S(P_1, P_2) = p_1xP_1 - py^{p-1}P_2 =$$

$$p_1 \sum_{l=1}^k c_l(p-lp_1)x^{lq+1}y^{p-lp_1-1}\partial_x - qp_1 \sum_{l=1}^k c_l l x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y - qp y^p \partial_y - qp^2 y^{p-1}$$

²Puede encontrarse en [17] una definición de la b -función.

³Primero mira el que tenga mayor orden total en las ∂ , después el *menor* orden total. Finalmente el menor en el orden lexicográfico. Los órdenes que usaremos aparecen en 5.9.

Todos los exponentes del tipo $(p-lp_1-1, lq+1, 0, 1)$ con $l = 1 \dots k$ son divisibles por $(0, 1, 0, 1)$, el exponente de P_2 . En concreto, la división de $S(P_1, P_2)$ por $\{P_1, P_2\}$ queda

$$S(P_1, P_2) = \left(\sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \right) P_2 - \\ - qp \sum_{l=1}^k c_l x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y - qp \sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} - qpy^p \partial_y - qp^2 y^{p-1}$$

El resto obtenido es $-qp\partial_y f$. Añadimos a la base $P_3 = \partial_y f$.

$$P_3 = y^p \partial_y + \sum_{l=1}^k c_l x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y + py^{p-1} + \sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1}.$$

Veamos que $S(P_1, P_3)$ y $S(P_2, P_3)$ dan resto 0 al dividir por los tres operadores que ya tenemos. En efecto:

$$S(P_1, P_3) = y\partial_y P_1 - p\partial_x P_3 = \\ (p(p-1) - p^2) y^{p-1} \partial_x + \\ + \sum_{l=1}^k c_l ((p-lp_1)(p-lp_1-1) - (p-lp_1)) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \partial_x + \\ + \sum_{l=1}^k c_l ((p-lp_1) - p) x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_x \partial_y - \\ - \sum_{l=1}^k c_l lq x^{lq-1} y^{p-lp_1+1} \partial_y^2 - \sum_{l=1}^k c_l (lq(p-lp_1) - lqp) x^{lq-1} y^{p-lp_1} \partial_y - \\ - p \sum_{l=1}^k c_l lq (p-lp_1) x^{lq-1} y^{p-lp_1-1}.$$

En la expresión anterior, el exponente principal es $(p-1, 0, 0, 1)$, divisible por el exponente principal de P_1 , y los exponentes del tipo $(p-lp_1-1, lq, 0, 1)$, $(l = 1 \dots k)$ son divisibles por el exponente principal de P_2 . La división por $\{P_1, P_2, P_3\}$, que da resto 0, es:

$$S(P_1, P_3) = -P_1 - \partial_y \left(\sum_{l=1}^k c_l x^{lq-1} y^{p-lp_1} \right) P_2$$

Por último, obtenemos la división de $S(P_2, P_3)$:

$$\begin{aligned}
S(P_2, P_3) &= y^p \partial_y P_2 - p_1 x \partial_x P_3 = \\
&= qy^{p+1} \partial_y^2 + q(p+1)y^p \partial_y - p_1 \sum_{l=1}^k c_l x^{lq+1} y^{p-lp_1} \partial_x \partial_y - \\
&- p_1 \sum_{l=1}^k c_l l q x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y - p_1 \sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq+1} y^{p-lp_1-1} \partial_x \\
&- p_1 p x y^{p-1} \partial_x - p_1 \sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq+1} y^{p-lp_1-1} = \\
&= -p_1 x P_1 - \left(\sum_{l=1}^k c_l x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y \right) P_2 + (qy \partial_y - q(p-1)) P_3.
\end{aligned}$$

□

Además de obtener una base estándar, los cálculos anteriores proporcionan una matriz T

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{p_1}{qp} x & \frac{1}{q} y^{p-1} + \frac{1}{qp} \sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \end{pmatrix}$$

que cumple

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

y que necesitaremos para calcular el módulo de las sicigias.

Calculemos ahora $Syz(P_1, P_2)$. Necesitamos primero unos generadores de $Syz(P_1, P_2, P_3)$.

Lema 2.1.2.— *El módulo $Syz(P_1, P_2, P_3)$ está generado por $\{s_1, s_2\}$ siendo*

$$s_1 = \left(-p_1 x, p y^{p-1} + \sum_{l=1}^k c_l (p-lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1}, -qp \right)$$

$$s_2 = \left(y\partial_y + 1, \partial_y \left(\sum_{l=1}^k c_l x^{lq-1} y^{p-lp_1} \right), -p\partial_x \right)$$

DEMOSTRACIÓN: Siguiendo los resultados de la sección anterior, tomamos primero el par P_1, P_2 obteniendo

$$(py^{p-1})P_2 = p_1 x P_1 - \left(\sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \right) P_2 + qpP_3$$

de donde obtenemos s_1

$$s_1 = (-p_1 x, py^{p-1} + \sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1}, -qp)$$

Con el par P_1 y P_3 llegamos a s_2 :

$$(p\partial_x)P_3 = (y\partial_y + 1)P_1 + \left(\partial_y \sum_{l=1}^k c_l x^{lq-1} y^{p-lp_1} \right) P_2,$$

$$s_2 = \left(y\partial_y + 1, \partial_y \left(\sum_{l=1}^k c_l x^{lq-1} y^{p-lp_1} \right), -p\partial_x \right)$$

Por último, con el par P_2 y P_3 obtenemos un múltiplo de s_2 . Esto se deduce utilizando la expresión anterior, que es una división:

$$(p_1 x \partial_x)P_3 = \frac{p_1}{p} x (p\partial_x)P_3 =$$

$$\frac{p_1}{p} x \left((-y\partial_y - 1)P_1 - \partial_y \left(\sum_{l=1}^k c_l x^{lq-1} y^{p-lp_1} \right) P_2 \right)$$

De ella, obtenemos el elemento $(\frac{p_1}{p} x)s_2$ de $Syz(P_1, P_2, P_3)$, que no es necesario añadir. \square

Basta multiplicar s_1 y s_2 del lema anterior por la matriz T para obtener unos generadores de $Syz(P_1, P_2)$. Recordemos que esto es debido a que en la base estándar hemos incluido P_1 y P_2 .

Proposición 2.1.3.— $Syz(P_1, P_2)$ es un módulo libre.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, los productos s_1T y s_2T son

$$s_1T = (0, 0)$$

$$s_2T = \left(\frac{p_1}{q}x\partial_x + y\partial_y + \left(1 - \frac{p_1}{q}\right), \right.$$

$$\left. \partial_y \left(\sum_{l=1}^k l c_l x^{lq-1} y^{p-lp_1} \right) - \frac{p}{q} y^{p-1} \partial_x + \frac{1}{q} \partial_x \left(\sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \right) \right).$$

Denotaremos $s = s_2T$. \square

Hemos obtenido la siguiente resolución libre de $\mathcal{O}[1/f] = \mathcal{D}/\mathcal{D}(P_1, P_2)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}[1/f] \longrightarrow 0$$

donde π es la proyección natural y φ_1 y φ_2 son las aplicaciones de matrices $(P_1 \ P_2)$ y (s) , respectivamente.

Aplicando el functor $Hom_{\mathcal{D}}(-, \mathcal{O})$ obtenemos el complejo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathcal{O}^2 \xrightarrow{\varphi_2^*} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

donde los morfismos φ_1^* y φ_2^* actúan sobre \mathcal{O} y \mathcal{O}^2 de la manera natural.

Se tiene

$$Ext_{\mathcal{D}}^2(M, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/\text{Im}(\varphi_2^*).$$

2.1.2 Cálculos para $x \cdot f$

Ahora partimos de la curva $x \cdot f = 0$, con f como en el estudio anterior.

Aquí se tiene que:

$$P_1 = pxy^{p-1}\partial_x + \sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq+1} y^{p-lp_1-1} \partial_x - y^p \partial_y \\ - \sum_{l=1}^k c_l (lq) x^{lq-1} y^{p-lp_1} \partial_y$$

$$P_2 = p_1 x \partial_x + qy \partial_y + qp$$

Los resultados serán análogos a los que obtuvimos en el primer caso:

Proposición 2.1.4.— *El conjunto $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base estándar del ideal $\mathcal{D}(P_1, P_2)$, donde*

$$P_3 = (p_1 + pq)y^p \partial_y + p^2 q y^{p-1} + \\ + \sum_{l=1}^k c_l (pq + p_1) x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y + \sum_{l=1}^k c_l pq (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1}$$

DEMOSTRACIÓN: En este caso los exponentes principales de P_1 y P_2 son, respectivamente, $(p-1, 1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0, 1)$. La primera semisicigia, que al hacer la división nos dará P_3 es

$$S(P_1, P_2) = p_1 P_1 - p y^{p-1} P_2 = \\ \sum_{l=1}^k p_1 c_l (p - lp_1) x^{lq+1} y^{p-lp_1-1} \partial_x - p_1 y^p \partial_y \sum_{l=1}^k p_1 c_l (lq + 1) x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y \\ - pq y^p \partial_y - p^2 q y^{p-1}$$

Podemos dividir por P_2 para anular todos los exponentes de la forma $(p - lp_1 - 1, lq + 1, 0, 1)$, $l = 1 \dots k$. El resultado de la división es el siguiente:

$$S(P_1, P_2) = \left(\sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \right) P_2 - \\ - (p_1 + pq) y^p \partial_y - p^2 q y^{p-1} \\ - \sum_{l=1}^k c_l (pq + p_1) x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y - \sum_{l=1}^k c_l pq (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1}$$

El resto obtenido, cambiado de signo, es el que añadimos a la base. Las semisicigias $S(P_1, P_3)$ y $S(P_2, P_3)$ dan resto 0 al dividir por $\{P_1, P_2, P_3\}$. Escribiremos por orden las reducciones que se van haciendo para obtener la división. La división de la semisicigia de P_1 y P_3 es:

$$S(P_1, P_3) = (p_1 + pq) y \partial_y P_1 - p x \partial_x P_3 = \\ - y \partial_y P_3 - \left(\sum_{l=1}^k c_l l (p_1 + pq) x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y \right) P_2 +$$

$$+(p_1(p-1) - pq)P_1 - \left(\sum_{l=1}^k c_l l (p_1 + pq) (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1} \right) P_2 + \\ + \left(\frac{p^2q + p_1(p-1) - pq}{p_1 + pq} \right) P_3$$

Y en el caso de $S(P_2, P_3)$ obtenemos:

$$S(P_2, P_3) = (p_1 + pq)y^p \partial_y P_2 - p_1 x \partial_x P_3 = \\ qy \partial_y P_3 + \left(\sum_{l=1}^k c_l (pq + p_1) x^{lq} y^{p-lp_1} \partial_y \right) P_2 - \\ - p_1 pq P_1 - \left(\frac{q^2 p^2 + p_1 pq - q(p_1 + pq)}{p_1 + pq} \right) P_3$$

□

La matriz T que, en este caso, relaciona los generadores iniciales con la base obtenida es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -p_1 & py^{p-1} + \sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1} \end{pmatrix}$$

Construimos ahora el módulo de las sicigias:

Lema 2.1.5.— *El módulo $Syz(P_1, P_2, P_3)$ está generado por los elementos*

$$s_1 = (-p_1, py^{p-1} + \sum_{l=1}^k c_l (p - lp_1) x^{lq} y^{p-lp_1-1}, -1) \\ s_2 = (s_{21}, s_{22}, s_{23}),$$

donde

$$s_{21} = -(p_1 + pq)y \partial_y - p_1(p - pq) + pq, \\ s_{22} = -\partial_y \left(\sum_{l=1}^k c_l l (p_1 + pq) x^{lq} y^{p-lp_1} \right), \\ s_{23} = px \partial_x - y \partial_y - \left(\frac{p^2q + p_1(p-1) - pq}{p_1 + pq} \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Los dos elementos del enunciado son los que se obtienen con los pares (P_1, P_2) y (P_1, P_3) . Basta observar que el par (P_2, P_3) no aporta ningun elemento nuevo. \square

Dado que es trivial que $s_1 \cdot T = (0, 0)$ obtenemos el resultado esperado:

Proposición 2.1.6.— *El módulo $Syz(P_1, P_2)$ es libre.*

DEMOSTRACIÓN: El generador del módulo de las sicigias aparece en $s = s_2 \cdot T$, cuya primera componente es

$$-pqy\partial_y - p_1px\partial_x - p_1(p - pq) + pq - p + p_1 \left(\frac{p^2q + p_1(p - 1) - pq}{p_1 + pq} \right)$$

\square

Teorema 2.1.7.— *Si f es una curva reducida casi homogénea,*

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{O}[1/f], \mathcal{O}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Se trata de ver que todo elemento de \mathcal{O} está en la imagen de φ_2^* . Tenemos que encontrar h y h' en la ecuación en derivadas parciales

$$s \cdot \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} = f$$

para cualquier $f \in \mathcal{O}$. Veamos que siempre se puede obtener una solución con $h' = 0$. Escribiendo $f = \sum_{i,j \geq 0} f_{ij}x^i y^j$, $h = \sum_{i,j \geq 0} h_{ij}x^i y^j$ y $h' = 0$ la ecuación anterior queda

$$\left(\frac{p_1}{q}x\partial_x + y\partial_y + \left(1 - \frac{p_1}{q} \right) \right) \left(\sum_{i,j \geq 0} h_{ij}x^i y^j \right) = \sum_{i,j \geq 0} f_{ij}x^i y^j$$

Esto es,

$$\sum_{i,j \geq 0} \left(\frac{p_1}{q}i + j + \left(1 - \frac{p_1}{q} \right) \right) h_{ij}x^i y^j = \sum_{i,j \geq 0} f_{ij}x^i y^j$$

de donde podemos obtener la relación entre los coeficientes de las series, que asegura que si f converge también lo hace h que tiene coeficientes menores:

$$h_{ij} = \left(\frac{1}{\frac{p_1}{q}i + j + \left(1 - \frac{p_1}{q}\right)} \right) f_{ij}.$$

Análogamente se prueba para el caso xf . \square

2.2 El teorema de comparación logarítmica.

En toda esta sección $f \in \mathcal{O} = \mathbf{C}\{x, y\}$. En la primera parte los generadores de $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ se deducen de una base del \mathcal{O} -módulo de las derivaciones logarítmicas, $\text{Der}(\log f)$ con

$$\text{Der}(\log f) = \{\delta \text{ derivación de } \mathcal{O} \mid \delta(f) \in (f)\}.$$

Una base es un par de derivaciones $\delta_i = b_i\partial_x + c_i\partial_y$, $i = 1, 2$ tales que

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = uf,$$

donde u es una unidad. Para una introducción a las derivaciones logarítmicas ver [42].

En general, a partir de las derivaciones logarítmicas siempre se puede encontrar un ideal contenido en $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$: si $\delta(f) = af$ entonces $\delta + a \in \text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$. Este hecho sugiere una forma general de presentar el anulador para obtener la prueba de 2.1.7 para cualquier curva. De hecho, en el caso f casi homogéneo, $\delta_1 = w_1x\partial_x + w_2y\partial_y$, $\delta_2 = f_y\partial_x - f_x\partial_y$ son claramente una base de las derivaciones logarítmicas que proporcionan los generadores de $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ que utilizamos en 2.1.1.

Seguiremos la siguiente notación:

- $I^{\log} = \langle \text{Der}(\log f) \rangle$

- $\tilde{I}^{log} = \langle \{\delta + a \mid \delta(f) = af\} \rangle$
- $M^{log} = \mathcal{D}/I^{log}$
- $\tilde{M}^{log} = \mathcal{D}/\tilde{I}^{log}$.

Veremos en esta segunda parte que, en el caso de las curvas, $\tilde{I}^{log} = Ann_{\mathcal{D}}(1/f)$ si y sólo si la curva es casi homogénea. Esto es, obtendremos el siguiente resultado:

Teorema: $\tilde{M}^{log} \simeq \mathcal{O}[\frac{1}{f}]$ si y sólo si f es casi homogénea.

De este resultado se deducirá una prueba “diferencial” del teorema de comparación logarítmica de [13]. Terminaremos la sección con un ejemplo para superficies.

2.2.1 \tilde{M}^{log} en el caso no casi homogéneo.

Sea $\{\delta_1, \delta_2\}$ una base de $Der(\log f)$

$$\begin{cases} \delta_1 = b_1\partial_x + c_1\partial_y, \\ \delta_2 = b_2\partial_x + c_2\partial_y \end{cases}$$

que por ser una base podemos suponer que

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = f = b_1c_2 - b_2c_1$$

Utilizaremos varios resultados para cualquier curva (reducida) f :

- $\mathcal{O}[1/f] \simeq \mathcal{D}^{\frac{1}{f}} \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Ann(1/f)$ (ver [45]).
- Una base δ_1, δ_2 de $Der(\log f)$ verifica que

$$\langle \sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2) \rangle = gr^F(I^{log}) = gr^F(\tilde{I}^{log}),$$

además $\{\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2)\}$ es una sucesión regular (ver [10]), donde $gr^F(I^{log})$ es el graduado de I^{log} construido a partir de la filtración por el grado en D . Por tanto,

$$CCh(\tilde{M}^{log}) = CCh(M^{log}).$$

- Se tiene en general lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(M^{\log}) &\stackrel{q.i.}{\simeq} \Omega^*(\log f) \xrightarrow{\varphi} \\ &\xrightarrow{\varphi} \Omega^*[1/f] \simeq DR(\mathcal{O}[1/f]) = \text{Sol}(\mathcal{O}[1/f]^*) \end{aligned}$$

donde el primer casi isomorfismo es debido a un resultado de [11] y φ es el morfismo natural. El último casi isomorfismo se puede ver en [34], página 41.

Lema 2.2.1.— *Sea f es una curva (reducida) y δ_1, δ_2 una base de $\text{Der}(\log f)$ con $[\delta_1, \delta_2] = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2$ y $\delta_i(f) = a_i f$, $i = 1, 2$. Se tiene que*

$$\langle \delta_2^t + \alpha_1, \delta_1^t - \alpha_2 \rangle = \langle \delta_1 + a_1, \delta_2 + a_2 \rangle$$

donde δ_i^t denota el traspuesto de δ_i (ver [38], página 124).

DEMOSTRACIÓN: Encontramos una expresión de los α_i en función de los a_j, b_k, c_l :

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] &= \alpha_1(b_1\partial_x + c_1\partial_y) + \alpha_2(b_2\partial_x + c_2\partial_y) = \\ &= (\alpha_1b_1 + \alpha_2b_2)\partial_x + (\alpha_1c_1 + \alpha_2c_2)\partial_y = \\ &= b_1\partial_x(b_2)\partial_x - b_2\partial_x(b_1)\partial_x + b_1\partial_x(c_2)\partial_y - c_2\partial_y(b_1)\partial_x + \\ &+ c_1\partial_y(b_2)\partial_x - b_2\partial_x(c_1)\partial_y + c_1\partial_y(c_2)\partial_y - c_2\partial_y(c_1)\partial_y = \\ &= (c_1\partial_y(b_2) - b_2\partial_x(b_1) - c_2\partial_y(b_1) + c_1\partial_y(b_2))\partial_x + \\ &+ (b_1\partial_x(c_2) - b_2\partial_x(c_1) - c_2\partial_y(c_1) + c_1\partial_y(c_2))\partial_y. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$-\delta_1^t + \alpha_2 = \partial_x b_1 + \partial_y c_1 + \alpha_2 = \delta_1 + \alpha_2 + \partial_x(b_1) + \partial_y(c_1)$$

Para probar que $\alpha_2 + \partial_x(b_1) + \partial_y(c_1) = a_1$, veremos que que

$$\alpha_2 f = a_1 f - \partial_x(b_1)f - \partial_y(c_1)f$$

Por un lado,

$$a_1 f - \partial_x(b_1)f - \partial_y(c_1)f =$$

$$\begin{aligned}
&= (b_1 \partial_x + c_1 \partial_y) - \partial_x(b_1) - \partial_y(c_1))(b_1 c_2 - b_2 c_1) = \\
&= b_1(b_1 \partial_x(c_2) - c_1 \partial_x(b_2) - b_2 \partial_x(c_1)) + \\
&+ c_1(c_2 \partial_y(b_1) + b_1 \partial_y(c_2) - c_1 \partial_y(b_2)) + \\
&+ b_2 c_1 \partial_x(b_1) - b_1 c_2 \partial_y(c_1).
\end{aligned}$$

Como

$$(\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2),$$

donde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= c_1 \partial_y(b_2) - b_2 \partial_x(b_1) - c_2 \partial_y(b_1) + c_1 \partial_y(b_2), \\
\gamma_2 &= b_1 \partial_x(c_2) - b_2 \partial_x(c_1) - c_2 \partial_y(c_1) + c_1 \partial_y(c_2).
\end{aligned}$$

Multiplicando por la matriz adjunta traspuesta y por f

$$(\alpha_1 f, \alpha_2 f) = (\gamma_1, \gamma_2) \begin{pmatrix} c_2 & -c_1 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

de donde se sigue la igualdad.

Análogamente se consigue que $\delta_2^t + \alpha_1 = -\delta_2 - a_2$ obteniendo la igualdad de los ideales \square .

Lema 2.2.2.— *Una resolución libre de \tilde{M}^{\log} es*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{D} \longrightarrow \tilde{M}^{\log} \longrightarrow 0,$$

donde φ es la matriz

$$(-\delta_2 - a_2 - \alpha_1, \delta_1 + a_1 - \alpha_2),$$

$$y \phi \text{ es } \begin{pmatrix} \delta_1 + a_1 \\ \delta_2 + a_2 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para ver si el complejo anterior es exacto, basta con dotarlo de una filtración discreta y comprobar que el complejo graduado correspondiente es exacto (ver [6], capítulo 2, lema 3.13).

En [10] (teorema 2.3.2) se demuestra que el complejo de Spencer logarítmico es una resolución localmente libre de \mathcal{O}_X (como $\mathcal{V}_0^Y(\mathcal{D})$ -módulo a izquierda) utilizando este mismo argumento. Pero para $n = 2$ el complejo graduado que se demuestra exacto

$$0 \longrightarrow gr^F(\mathcal{D}) \xrightarrow{M_1} gr^F(\mathcal{D})[-2] \xrightarrow{M_2} gr^F(\mathcal{D})[-1] \longrightarrow gr^F(\mathcal{D}) \longrightarrow 0,$$

donde las matrices son

$$M_1 = (-\sigma^F(\delta_2), \sigma^F(\delta_1)), \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sigma^F(\delta_1) \\ \sigma^F(\delta_2) \end{pmatrix},$$

es el mismo que resulta de aplicar la filtración F por el grado en las ∂ a la resolución de \tilde{M}^{log} \square

Proposición 2.2.3.— Dada $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $\tilde{M}^{log} \simeq (M^{log})^*$. En particular M^{log} es un \mathcal{D} -módulo regular.

DEMOSTRACIÓN: Es conocido ([10]) que una resolución libre de M^{log} es

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\Psi} \mathcal{D} \longrightarrow M^{log} \longrightarrow 0$$

donde $\{\delta_1, \delta_2\}$ es una base del \mathcal{O} -módulo $\text{Der}(\log f)$, con

$$[\delta_1, \delta_2] = \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix},$$

y ϕ es la matriz de las relaciones

$$\phi = (-\delta_2 - \alpha_1, \delta_1 - \alpha_2).$$

Aplicando el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, \mathcal{D})$ para calcular el dual, obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\phi^*} \mathcal{D} \longrightarrow 0.$$

Se tiene $(M^{log})^* = \mathcal{D}/\langle \delta_2^t + \alpha_1, \delta_1^t - \alpha_2 \rangle$. Por el lema anterior $(M^{log})^* \simeq \tilde{M}^{log}$. \square

Proposición 2.2.4.— *Si f es una curva (reducida) no casi homogénea, entonces*

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\tilde{M}^{\log}, \mathcal{O}) \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN: La demostración de este resultado contiene como parte esencial una “relectura” de la demostración del teorema 3.7 de [13]. Incluimos aquí una parte de dicha prueba.

Por el lema 2.2.2, una resolución libre de \tilde{M}^{\log} es

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}^2 \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \tilde{M}^{\log} \longrightarrow 0,$$

donde φ es la matriz

$$(-\delta_2 - a_2 - \alpha_1, \delta_1 + a_1 - \alpha_2).$$

Se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\tilde{M}^{\log}, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}/\text{Im}\varphi^*$. Para ver que es un espacio vectorial de dimensión mayor que cero bastará con ver que no existen $h_1, h_2 \in \mathcal{O}$ tales que

$$(\delta_2 + a_2 - \alpha_1, -\delta_1 - a_1 - \alpha_2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1,$$

esto es, que $1 \notin \text{Im}\varphi^*$. Y para demostrar esto, basta ver que al aplicar φ^* nunca pueden aparecer constantes por cuestiones de grado.

Tomemos $\delta_1 = b_1\partial_x + c_1\partial_y$. Utilizando que $a_1 - \alpha_2 = \partial_x(b_1) + \partial_y(c_1)$, (ver lema 2.2.1) veremos que, o bien b_1, c_1 no llevan parte lineal, o que al derivar esa parte lineal sale 0.

Desde luego, f no tiene parte cuadrática: si la tuviera, por la clasificación de las singularidades en dos variables, es equivalente a una curva casi homogénea $x^2 + y^{k+1}$, para algún k . Podemos suponer que

$$f = f_n + f_{n+1} + \cdots = \sum_{k \geq n} h_k = \sum_{k \geq n} \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j,$$

donde $n \geq 3$ y $f_n \neq 0$.

Escribiremos

$$\delta_1 = b_1\partial_x + c_1\partial_y = \delta_0^1 + \delta_1^1 + \cdots = \sum_{k \geq 0} \sum_{i+j=k+1} (\beta_{ij}^1 x^i y^j \partial_x + \gamma_{ij}^1 x^i y^j \partial_y),$$

donde la parte lineal δ_0^1 es $(xy)A_0(\partial_x\partial_y)^t$, con A_0 una matriz 2×2 de coeficientes complejos.

Si $A_0 = 0$ ya hemos terminado. Si no lo es, las posibles formas de Jordan de A_0 son

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Como δ_1 no es un vector de Euler (por no ser f casi homogénea), se deduce en cada caso lo siguiente:

- Si tomamos la primera forma de Jordan, entonces (ver demostración citada de [13]) $f_n = x^p y^q$ y $\delta_0 = qx\partial_x - py\partial_y$. Después de una sucesión de cambios de coordenadas, se llega a que $f = x^p y^q$ con $p + q = n \geq 3$, que contradice el hecho de que f es reducida.
- Si tomamos la segunda forma de Jordan con $\lambda_1 \neq 0$ ha de ser $f_n = 0$, que contradice que f tiene su parte inicial de grado n .
- Si tomamos la segunda posibilidad con $\lambda_1 = 0$ entonces $\delta_0^1 = y\partial_x$. En esta situación la parte lineal de b_1 se reduce a y , a la que hay que aplicar precisamente ∂_x , anulándose.

Análogamente se hace con $a_2 + \alpha_1$ \square

Como, por [33], siempre $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{O}[1/f], \mathcal{O}) = 0$ son inmediatos los siguientes resultados:

Teorema 2.2.5.— *Si f es una curva (reducida) no casi homogénea,*

$$\tilde{M}^{\log} \not\cong \mathcal{O}[1/f].$$

Teorema 2.2.6.— *La aplicación φ*

$$\Omega^*(\log f) \xrightarrow{\varphi} \Omega^*[1/f]$$

es un isomorfismo si y sólo si f es casi homogénea.

DEMOSTRACIÓN: Usando 2.2.3 y los resultados de [34], se deduce que $\tilde{M}^{log} \simeq \mathcal{O}[1/f]$ si y sólo si sus complejos de De Rham son isomorfos mediante φ por ser holónomos y regulares. \square

2.2.2 Un ejemplo en dimensión 3.

Podemos construir ejemplos de manera sencilla para ilustrar la situación del teorema 2.2.6 en dimensión 3. Tomemos la superficie definida por $h = (x + y)(xz + y)^4$. Podemos afirmar que es libre (criterio de Saito, [42]): a partir de los elementos de $Syz(h, h_x, h_y, h_z)$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= (-2, x, y, 0) \\ \mathbf{d}_2 &= (0, -x, x, z - 1) \\ \mathbf{d}_3 &= (-z - 1, xz + y - x, -xz + 2x, 2z - 2), \end{aligned}$$

se puede tomar una base de $I^{log} = \text{Der}(\log h)$, $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ con

- $\delta_1 = x\partial_x + y\partial_y$,
- $\delta_2 = -x\partial_x + x\partial_y + (z - 1)\partial_z$
- $\delta_3 = (xz + y - x)\partial_x + (-xz + 2x)\partial_y + (2z - 2)\partial_z$.

Es necesario comprobar que los símbolos de los δ_i forman una sucesión regular (ver apéndice al final de este capítulo). Los símbolos son:

- $\sigma(\delta_1) = x\xi + y\eta$,
- $\delta_2 = -x\xi + x\eta + (z - 1)\zeta$
- $\delta_3 = (xz + y - x)\xi + (-xz + 2x)\eta + (2z - 2)\zeta$.

Comprobamos que:

1. $x\xi + y\eta \neq 0$.
2. Dado que $Syz(\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2)) = (-\sigma(\delta_2), \sigma(\delta_1))$, no existe s fuera de $\langle \sigma(\delta_1) \rangle$ tal que $s \cdot \sigma(\delta_2) \in \langle \sigma(\delta_1) \rangle$.

⁴Este ejemplo está inspirado en el ejemplo del Prof. Francisco Calderón en [13]

3. Por último, las sicigias entre $\sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2), \sigma(\delta_3)$ resultan estar generadas por

$$\begin{aligned} &(-z\zeta - x\eta + x\xi + \zeta, y\eta + x\xi, 0) \\ &(xz\eta - xz\xi - y\xi - x\xi, -2y\eta - 2x\xi, y\eta + x\xi) \\ &(xz\eta - xz\xi - 2z\zeta - y\xi - 2x\eta + x\xi + 2\zeta, z\zeta + x\eta - x\xi - \zeta) \end{aligned}$$

de donde se deduce que para que $s \cdot \sigma(\delta_3)$ esté en $\langle \sigma(\delta_1)\sigma(\delta_2) \rangle$ tiene que ser $s \in \langle \sigma(\delta_1)\sigma(\delta_2) \rangle$.

Calculemos una resolución libre de $M^{log} = \mathcal{D}/I^{log}$. Unos generadores de $Syz(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (-z\partial_z - x\partial_y + x\partial_x + \partial_z, y\partial_y + x\partial_x, 0) \\ \mathbf{s}_2 &= (xz\partial_y - xz\partial_x - y\partial_x - x\partial_x, -2y\partial_y - 2x\partial_x, y\partial_y + x\partial_x) \\ \mathbf{s}_3 &= (1, xz\partial_y - xz\partial_x - 2z\partial_z - y\partial_x - 2x\partial_y + x\partial_x + 2\partial_z + 2, \\ &\quad z\partial_z + x\partial_y - x\partial_x - \partial_z - 1), \end{aligned}$$

y el único generador de $Syz(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ es

$$\mathbf{r} = (xz\partial_y - xz\partial_x - y\partial_x - x\partial_x, z\partial_z + x\partial_y - x\partial_x - \partial_z - 1, -y\partial_y - x\partial_x).$$

La resolución libre queda pues,

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3)} \mathcal{D} \xrightarrow{(\delta_1 \delta_2 \delta_3)} M^{log} \longrightarrow 0.$$

Aplicando a la sucesión anterior $Hom_{\mathcal{D}}(-, \mathcal{D})$ observamos que para obtener $(M^{log})^*$ hay que calcular $(\mathcal{D}/Im\psi^*)^*$, donde ψ^* es el morfismo de matriz \mathbf{r}^t . Obtenemos unos generadores de $(M^{log})^*$:

- $Q_1 = -xz\partial_y + xz\partial_x + y\partial_x + x\partial_x + z + 1,$
- $Q_2 = -z\partial_z - x\partial_y + x\partial_x + \partial_z - 1,$
- $Q_3 = y\partial_y + x\partial_x + 2.$

Con los algoritmos de [37] comprobamos que $b_h = (s+1)^2$ (de donde podemos afirmar que $\mathcal{O} \left[\frac{1}{h} \right] \simeq \mathcal{D}/Ann_{\mathcal{D}}(1/h)$) y que $Ann_{\mathcal{D}}(1/h) = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ con

- $P_1 = -x\partial_x + x\partial_y + z\partial_z - \partial_z,$
- $P_2 = -x\partial_y - y\partial_y - z\partial_z + \partial_z - 2,$
- $P_3 = z^2\partial_z + y\partial_x - y\partial_y - z\partial_z + z - 1$
- $P_4 = xz\partial_z + y\partial_z + x.$

Dividiendo, es fácil ver que $P_4 \notin \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$ como ideal de $A_3(\mathbb{C})$. Pero localmente se tiene que $\mathcal{O}[1/h] \simeq (M^{\log})^*$: en el punto $(0, 0, 0) \in h$ la cuádrica de ecuación $xz + y = 0$ y el plano $x + y = 0$ no son tangentes. Por tanto es un cruzamiento normal y la situación local es la misma que en $xy = 0$.

2.3 El problema del anulador en general.

Para generalizar la demostración del resultado de las curvas casi homogéneas a cualquier tipo de curvas, la dificultad radica en no poseer una presentación en general de $\text{Ann}_{\mathcal{D}}\left(\frac{1}{f}\right)$.

Así, el método utilizado para las curvas casi homogéneas sólo serviría para *comprobar* el resultado en cada caso particular, utilizando el algoritmo de cálculo de $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ de [37]. Para algunos casos (como en las curvas de Reiffen que estudiaremos a continuación) es importante señalar que el programa [44] no obtiene la presentación del anulador, por aparecer cálculos inmanejables. Nos parece éste un caso de complejidad interesante y que revela que, en la práctica, puede no ser posible obtener el anulador de $1/f$.

Ofrecemos aquí dos aportaciones al problema, utilizando el resultado de [33] para cualquier curva, esto es $\text{Ext}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}[1/f], \mathcal{O}) = 0$:

- El cálculo de los Ext para comprobar si un conjunto de elementos de $\text{Ann}(1/f)$ generan el anulador.

- Describiremos una manera de calcular la dimensión de un grupo *Ext* de manera indirecta para “medir” la complejidad del cálculo del anulador.

2.3.1 Las curvas de Reiffen.

Hemos visto que siempre podemos hacer una aproximación del anulador de $1/f$ utilizando una base de los operadores logarítmicos, dado que si δ_1, δ_2 forman una base de $\text{Derlog}(f)$ se tiene que

$$\delta_1(f) = a_1 f, \quad \delta_2(f) = a_2 f$$

de donde los elementos $\Delta_1 = \delta_1 + a_1$ y $\Delta_2 = \delta_2 + a_2$ pertenecen a $\text{Ann}_{\mathcal{D}}\left(\frac{1}{f}\right)^5$. Veremos en esta sección un método para comprobar si unos elementos generan o no el ideal $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$, (aunque en el ejemplo a priori sepamos por 2.2.5 que no lo hacen).

Proposición 2.3.1.— Δ_1, Δ_2 no generan el anulador en el caso de las curvas de Reiffen,

$$f = x^q + xy^{p-1} + y^p$$

con $p \geq q + 1 \geq 5$.

DEMOSTRACIÓN: Utilizaremos el cálculo de una resolución libre de \tilde{M}^{\log} en el primer caso de la curva de Reiffen ($p = 4, q = 5$). De 5.1 se deducen unos generadores de \tilde{I}^{\log} :

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & x^2 \partial_y - \frac{5}{4} y x \partial_y + 25 y^2 \partial_y + \frac{125}{4} y x \partial_x \\ & - 3 y^3 \partial_y - 4 y^2 x \partial_x - y^3 \partial_x \\ & + 125 y - 16 y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & -3 y x \partial_y - 4 x^2 \partial_x - 4 y^2 \partial_y - 5 y x \partial_x \\ & - 16 x - 20 y. \end{aligned}$$

⁵Se trata de la idea del Prof. Luis Narváez ya utilizada en 2.2.

Utilizando el orden total con $y > x$ (ver 5.9), obtenemos una base estándar de $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ añadiendo los dos siguientes elementos:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= y^4 \partial_x - y^4 \partial_y - x^3 \partial_y + \frac{1}{4} y x^2 \partial_y - \frac{5}{16} y^2 x \partial_y \\ &\quad - \frac{125}{64} y^3 \partial_x + \frac{25}{64} y^3 \partial_y + \frac{125}{64} x^2 \partial_y + \frac{15625}{256} y x \partial_x \\ &\quad - \frac{625}{256} y x \partial_y + \frac{3125}{64} y^2 \partial_y - 4y^3 + 15625y \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = y^4 x \partial_y - y^5 \partial_y - x^4 \partial_y - 4y^3 x - 5y^4$$

siendo la matriz que relaciona generadores y base

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x - y + \frac{125}{64} & y^2 - \frac{125}{16} y \\ -x^2 - \frac{5}{4} y x & y^2 x + \frac{1}{4} y^3 - \frac{125}{16} y x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}.$$

Con los métodos utilizados en secciones anteriores, se calcula el módulo $Syz(\Delta_1, \Delta_2)$ que resulta estar generado por un elemento $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ con

$$\begin{aligned} r_1 &= -x^2 \partial_x - \frac{5}{4} y x \partial_x - \frac{3}{4} y x \partial_y - y^2 \partial_y - \frac{11}{4} x - \frac{13}{4} y \\ r_2 &= y^2 x \partial_x + \frac{1}{4} y^3 \partial_x + \frac{3}{4} y^3 \partial_y - \frac{1}{4} x^2 \partial_y - \frac{125}{16} y x \partial_x + \\ &\quad + \frac{5}{16} y x \partial_y - \frac{25}{4} y^2 \partial_y + \frac{13}{4} y^2 + \frac{5}{16} x - \frac{325}{16} y \end{aligned}$$

Observando \mathbf{r} (que recordemos que produce la ecuación diferencial que define el $Ext_{\mathcal{D}}^2(M, \mathcal{O})$) se deduce que $1 \notin Im(\mathbf{r}^*)$ pues al aplicar \mathbf{r}^* todo lo que no es cero tiene grado total mayor o igual que uno: nunca se puede conseguir una constante. \square

2.3.2 El $Ann(1/f)$ en el caso de f con singularidades no aisladas.

Un pequeño cálculo revela que las condiciones casi homogénea y a singularidades aisladas son imprescindibles para poder afirmar que $Ann_{\mathcal{D}}(1/f)$ es el ideal (ver [30])

$$I = \langle \chi + 1, \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_{x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial_{x_i} \rangle.$$

Tomemos la superficie homogénea $f = 0$ con $f = y^3 - zx^2$. En concreto el elemento

$$2y\partial_y + 3x\partial_x + 6$$

está en $\text{Ann}(1/f)$ pero no pertenece al ideal I .

Señalemos, sin embargo, que aquí $\tilde{M}^{\log} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ pues en este caso $\text{Der}(\log f)$ está generado por (ver [10])

$$P_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + 3$$

$$P_2 = x\partial_x - 2z\partial_z$$

$$P_3 = 2xz\partial_y + 3y2\partial_x$$

$$P_4 = 3y^2\partial_z + x^2\partial_y.$$

2.3.3 C-dimensión de $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(\tilde{M}^{\log}, \mathcal{O})$.

Aprovecharemos otra vez que una base δ_1, δ_2 de $\text{Der}(\log f)$ proporciona unos elementos Δ_1, Δ_2 en el anulador: si $\delta_i(f) = a_i f$ se toma $\Delta_i = \delta_i + a_i$, $i = 1, 2$. Recordemos que $\tilde{I}^{\log} = (\Delta_1, \Delta_2)$ y $\tilde{M}^{\log} = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\Delta_1, \Delta_2)$. Se tiene una sucesión exacta de manera natural

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \tilde{M}^{\log} \longrightarrow \mathcal{O} \left[\frac{1}{f} \right] \longrightarrow 0$$

De esta sucesión se deduce, como K está concentrado en el cero, que

$$\text{mult}(T_{(0,0)}^* \mathbf{C}^2, \tilde{M}^{\log}) = \dim_{\mathbf{C}} \text{Ext}^2(K, \mathcal{O}) + (m - 1),$$

donde $m = \text{mult}_{(0,0)}(f)$ y

$$\text{mult}(T_{(0,0)}^* \mathbf{C}^2, K) = \dim_{\mathbf{C}} \text{Ext}^2(K, \mathcal{O})^6.$$

De la sucesión de los Ext (donde los Ext^n son iguales fuera del origen en \tilde{M}^{\log} y $\mathcal{O}[1/f]$ si $n = 0, 1$ (ver [34]).)

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O} \left[\frac{1}{f} \right], \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Ext}^2(\tilde{M}^{\log}, \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Ext}^2(K, \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

⁶En coordenadas locales (x, y, ξ, η) en $T^* \mathbf{C}^2$,

$$T_{(0,0)}^* = \{(0, 0, \xi, \eta) \mid \xi, \eta \in \mathbf{C}\}.$$

Ver [36].

utilizando ahora ([33]) que siempre se tiene $\text{Ext}^2(\mathcal{O}[\frac{1}{f}], \mathcal{O}) = 0$, las dimensiones de los dos últimos espacios vectoriales son iguales.

La dimensión de $\text{Ext}^2(K, \mathcal{O})$ así obtenida es, en cierta forma, una medida de lo lejos que están \tilde{I}^{\log} y el anulador de $1/f$. En el último capítulo, se incluyen algunos ejemplos.

2.4 Apéndice: sucesiones regulares.

Describimos en esta sección una manera de comprobar si unos elementos $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{R} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ forman una sucesión regular.

Recordemos que hay que comprobar que

- $f_1 \neq 0$ (en un anillo más general hay que ver si es divisor de cero).
- Para cada k , $2 \leq k \leq r$ hay que demostrar que no existe ningún $s \in \mathcal{R}$, $s \notin I_{k-1} = \langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$ que verifique $s \cdot f_k \in I_{k-1}$.

Se tiene el siguiente resultado inmediato:

Lema 2.4.1.— *Para $k = 2, \dots, r$, la existencia de $s \notin I_{k-1}$ tal que $s \cdot f_k \in I_{k-1}$ es equivalente a que $S_k \cap I_{k-1} \neq (0)$, donde S_k es el ideal formado por las últimas componentes del módulo $\text{Syz}(f_1, \dots, f_{k-1}, f_k)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe tal s se tendrá

$$sf_k = s_1 f_1 + \dots + s_{k-1} f_{k-1}$$

de donde

$$0 = s_1 f_1 + \dots + s_{k-1} f_{k-1} - sf_k.$$

Los posibles s están desde luego entre las últimas coordenadas de las sicigias y basta cortar este ideal con I_{k-1} para verificar la condición \square .

Para ver si los elementos f_1, \dots, f_r forman una sucesión regular en $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ el resultado y la demostración son idénticos, utilizando los ideales I_k^e, S_k^e en el anillo de series.

Lo interesante es que hacer la comprobación en los polinomios demuestra la condición para series:

Proposición 2.4.2.— Si f_1, \dots, f_r forman una sucesión regular en $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n][\xi_1, \dots, \xi_n]$, entonces también forman una sucesión regular en $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_l\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que forman una sucesión regular en $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n][\xi_1, \dots, \xi_n]$.

Si en $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_l\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ existe un $s \notin I_{i-1}^e$ tal que $s \cdot f_i \in I_{i-1}^e$ para algún i entre 1 y r , entonces

$$sf_i = s_1 f_1 + \dots + s_{i-1} f_{i-1},$$

donde $(s_1, \dots, s_{i-1}, -s)$ es un elemento de $\text{Syz}(f_1, \dots, f_{i-1}, f_i)$ que está en $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_l\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$.

Por planitud,

$$(s_1, \dots, s_{i-1}, -s) = \sum_{l \in L} \beta_l (\alpha_1^l, \dots, \alpha_{i-1}^l, \alpha_i^l),$$

con los $\beta_l \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_l\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, y cada $(\alpha_1^l, \dots, \alpha_i^l)$ entre las sicigias en el anillo de polinomios. Así

$$s = - \sum_{l \in L} \beta_l \alpha_i^l,$$

y por tanto pertenece a S_i^e . \square

Capítulo 3

Homogeneización

3.1 L -exponentes privilegiados.

Sea \prec un buen orden compatible con la suma en \mathbb{N}^{2n} (esto es, un buen orden tal que $(\alpha + \alpha'', \beta + \beta'') \prec (\alpha' + \alpha'', \beta' + \beta'')$ si y sólo si $(\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta')$).

Definición 3.1.1.— Sea $L : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ una forma lineal con coeficientes no negativos y primos entre sí. Definimos el orden total $<_L$ ¹ sobre \mathbb{N}^{2n} como

$$(\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) < L(|\beta'|, \beta'_1 - \alpha'_1), \\ \text{ó} \begin{cases} L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = L(|\beta'|, \beta'_1 - \alpha'_1) \\ \text{y } (\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

Para cualquier $d \in \mathbb{Z}$, la restricción del orden $<_L$ al conjunto

$$\{(\alpha, \beta) \mid L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = d\}$$

es un buen orden. Denotaremos F a la filtración asociada a $L = (1, 0)$ y V a la asociada a $L = (0, 1)$.

Generalizamos la definición anterior para ordenar exponentes en el conjunto $\mathbb{N}^{2n} \times \{1, \dots, m\}$:

¹**Atención:** usaremos parte de la notación del primer capítulo para conceptos distintos.

Definición 3.1.2.— Sea L una forma lineal con coeficientes no negativos. Definimos el orden total $<_L$ sobre $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, m\}$ como

$$(\alpha, \beta, i) <_L (\alpha', \beta', j) \iff \begin{cases} (\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \\ \text{ó } \{ (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \text{ e } i < j \end{cases}$$

Este orden, que generaliza el anterior, también es un buen orden restringido al conjunto de exponentes $\{(\alpha, \beta, i) \mid L(\alpha, \beta) = d\}$ para cualquier $d \in \mathbf{Z}$.

Sea $\mathcal{A}^m = A_n(\mathbf{K})^m$.

Definición 3.1.3.— El L -exponente privilegiado de $\mathbf{P} \in \mathcal{A}^m = A_n(\mathbf{K})^m$, que denotaremos \exp_L , es

$$\exp_L(\mathbf{P}) = \max_{<_L} \{\mathcal{N}(\mathbf{P})\}.$$

De la manera usual, hablaremos de orden, símbolo, exponente, monomio y coeficiente principal respecto de L de un elemento de \mathcal{A}^m .

Si M un submódulo de \mathcal{A}^m , el conjunto

$$E_L(M) = \{\exp_L(\mathbf{P}) \mid \mathbf{P} \in M\}$$

cumple que $E_L(M) + \mathbf{N}^{2n} = E_L(M)$.

Definición 3.1.4.— Sea M un submódulo de \mathcal{A}^m . Una familia $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^r$ se dice una L -base estándar de M si

$$E_L(M) = \bigcup_{i=1}^r (\exp_L(\mathbf{P}_i) + \mathbf{N}^{2n}).$$

Ejemplo 3.1.5.— Con las definiciones anteriores de exponente, es importante hacer notar que una L -base estándar no es necesariamente un sistema de generadores de M : si consideramos $M = A_n(\mathbf{K})$, y $L(i, j) = j$, se tiene que el elemento $P = 1 + x_1$ forma el sólo una base estándar de $A_n(\mathbf{K})$ pero evidentemente no genera $A_n(\mathbf{K})$.

Lema 3.1.6.— Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r\}$ un sistema generador de un submódulo $M \subset A_n(\mathbf{K})^m$. Si \mathcal{F} es una L -base estándar de M , entonces $\{\sigma^L(\mathbf{P}_1), \dots, \sigma^L(\mathbf{P}_r)\}$ es una familia de generadores de $gr^L(M)$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el submódulo \mathcal{N} generado por la familia $\{\sigma^L(\mathbf{P}_1), \dots, \sigma^L(\mathbf{P}_r)\}$.

Sean $c_i = c(\mathbf{P}_i)$. Veamos que $\mathcal{N} = gr^L(M)$. Definamos la siguiente sucesión de elementos $\mathbf{P}^{(s)}$ de M , para todo $s \geq 0$.

- $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}$,
- $\mathbf{P}^{(s+1)} = \mathbf{P}^{(s)} - \left(\frac{c(\mathbf{P}^{(s)})}{c_{i_s}}\right) X^{\alpha^s} D^{\beta^s} \mathbf{P}_{i_s}$, donde (α^s, β^s) es un elemento de \mathbf{N}^{2n} tal que $\exp(\mathbf{P}_{i_s}) + (\alpha^s, \beta^s) = \exp(\mathbf{P}^{(s)})$.

La construcción anterior asegura que

$$\text{ord}_L \mathbf{P}^{(s+1)} \leq \text{ord}_L(\mathbf{P}^{(s)}) \text{ y } \exp(\mathbf{P}^{(s+1)}) <_L \exp(\mathbf{P}^{(s)}).$$

Debido a que $<_L$ es un buen orden restringido a exponentes con igual orden, existe un s tal que $\text{ord}_L(\mathbf{P}^{(s+1)}) < \text{ord}_L(\mathbf{P}^{(s)})$. Tomando el menor s con esa propiedad conseguimos

$$\sigma^L(\mathbf{P}) = \sum_{j=0}^s \sigma^L \left(\frac{c(\mathbf{P}^{(j)})}{c_{i_j}} X^{\alpha^j} D^{\beta^j} \right) \sigma^L(\mathbf{P}_{i_j}).$$

□

3.2 Homogeneización en \mathcal{A}

El cálculo de L -bases estándar puede dar lugar a la aparición de series, por no ser $<_L$ un buen orden en general. En este capítulo describimos una técnica que resuelve este problema y que es una generalización de los resultados de [16] que pasamos a resumir.

Denotaremos por $A_n[t]$ el álgebra de Rees

$$A_n[t] = \mathbf{K}[t, X][D] = \mathbf{K}[t, x_1, \dots, x_n][\partial_1, \dots, \partial_n]$$

con las relaciones

$$[t, x_i] = [t, \partial_i] = [x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0, [\partial_i, x_j] = \delta_{ij}t^2.$$

El álgebra $A_n[t]$ es un álgebra graduada, siendo el grado del monomio $t^k X^\alpha D^\beta$ el grado total $k + |\alpha| + |\beta|$.

Dado $P = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{2n}} p_{\alpha, \beta} X^\alpha D^\beta \in A_n(\mathbf{K})$ denotaremos $\text{ord}^T(P)$ su orden total

$$\text{ord}^T(P) = \max\{|\alpha| + |\beta| \mid p_{\alpha, \beta} \neq 0\}.$$

Así:

- Se llama *homogeneización* de P al operador diferencial

$$h(P) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{2n+1}} p_{\alpha, \beta} t^{\text{ord}^T(P) - |\alpha| - |\beta|} X^\alpha D^\beta \in A_n[t]$$

- Si $H = \sum_{(k, \alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}} h_{k, \alpha, \beta} t^k X^\alpha D^\beta$ es un elemento de $A_n[t]$, denotaremos por $H|_{t=1}$ al elemento de A_n definido por

$$H|_{t=1} = \sum_{(k, \alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}} h_{k, \alpha, \beta} X^\alpha D^\beta$$

- Denotaremos por $\pi : \mathbf{N}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{N}^{2n}$ a la proyección natural definida por $\pi(k, \alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$.

Lema 3.2.1.— Para todo $P, Q \in A_n[t]$ y para todo $H \in A_n[t]$ homogéneo tenemos:

1. $h(PQ) = h(P)h(Q)$.
2. Existen $k, l, m \in \mathbf{N}$ tales que $t^k h(P + Q) = t^l h(P) + t^m h(Q)$.
3. Existe un $k \in \mathbf{N}$ tal que $t^k h(H|_{t=1}) = H$.

Fijados un buen orden monomial \prec en \mathbb{N}^{2n} y \prec_L el orden definido en la sección anterior, definimos en \mathbb{N}^{2n+1} el siguiente orden monomial \prec_L que es además un buen orden:

$$(k, \alpha, \beta) \prec_L (k', \alpha', \beta') \iff \begin{cases} k + |\alpha| + |\beta| < k' + |\alpha'| + |\beta'| \\ \text{ó} & \begin{cases} k + |\alpha| + |\beta| = k' + |\alpha'| + |\beta'| \\ \text{y } (\alpha, \beta) \prec_L (\alpha', \beta'). \end{cases} \end{cases}$$

De manera natural,

- Si $H = \sum_{k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2n+1}} h_{k, \alpha, \beta} t^k X^\alpha D^\beta \in A_n[t]$, denotaremos por $\mathcal{N}(H)$ al diagrama de Newton de H :

$$\mathcal{N}(H) = \{(k, \alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n+1} \mid h_{k, \alpha, \beta} \neq 0\}.$$

- Dado un elemento H no nulo de $A_n[t]$ se definen de la manera usual *exponente principal de H relativamente a \prec_L* , *monomio principal* y *coeficiente inicial* de H , que notaremos respectivamente $\exp_{\prec_L}(H)$, $mp_{\prec_L}(H)$, y $c_{\prec_L}(H)$. Si no hay lugar a confusión, escribiremos $\exp(H)$, $mp(H)$ y $c(H)$. Será útil la notación $\widehat{H} = H - mp(H)$.

Lema 3.2.2.— *Dados dos elementos $H, H' \in A_n[t]$ se tiene:*

1. $\exp(HH') = \exp(H) + \exp(H')$.
2. Si $\exp(H) \neq \exp(H')$ entonces

$$\exp(H + H') = \max_{\prec_L} \{\exp(H), \exp(H')\}.$$

3. Si $\exp(H) = \exp(H')$ y $c(H) + c(H') \neq 0$, entonces $\exp(H + H') = \exp(H)$ y $c(H + H') = c(H) + c(H')$.
4. Si $\exp(H) = \exp(H')$ y $c(H) + c(H') = 0$, entonces $\exp(H + H') \prec_L \exp(H)$.

3.3 Homogeneización en \mathcal{A}^m

Sea \mathbf{P} un elemento del \mathcal{A} -módulo libre \mathcal{A}^m ,

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_m), \quad P_i = \sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha, \beta}^{(i)} X^\alpha D^\beta.$$

Sea $\text{ord}^T(\mathbf{P}) = \max\{(|\alpha| + |\beta| \mid (\alpha, \beta, i) \in \mathcal{N}(\mathbf{P}))\}$. El símbolo de \mathbf{P} con respecto a este nuevo orden se define de la manera usual.

Supongamos que $\text{ord}^T(\mathbf{P}) = d$ y $\text{ord}^T(P_i) = d_i$.

Definición 3.3.1.— Llamaremos homogeneización de \mathbf{P} al elemento $h(\mathbf{P}) \in A_n[t]^m$

$$h(\mathbf{P}) = (t^{d-d_1}h(P_1), \dots, t^{d-d_m}h(P_m))$$

Si $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_m)$ es un elemento de $A_n[t]^m$, denotaremos por $\mathbf{H}|_{t=1}$ al elemento de $A_n(\mathbf{K})^m$

$$\mathbf{H}|_{t=1} = ((H_1)|_{t=1}, \dots, (H_m)|_{t=1})$$

En realidad hemos optado aquí por una de las infinitas posibles homogeneizaciones. Para elementos de \mathcal{A}^m ó \mathcal{D}^m se pueden definir órdenes asociados a las filtraciones que resultan de la definición de orden anterior pero trasladando (*shift*) cada componente con factores diferentes.

Lema 3.3.2.— Dados $P \in A_n[t]$, $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in A_n[t]^m$ se tiene:

1. $h(P\mathbf{Q}) = h(P)h(\mathbf{Q})$.
2. Existen $k, l, m \in \mathbf{N}$ tales que $t^k h(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = t^l h(\mathbf{Q}) + t^m h(\mathbf{Q}')$.
Además, para cualquier elemento homogéneo \mathbf{H} de $A_n[t]^m$, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $t^k h(\mathbf{H}|_{t=1}) = \mathbf{H}$

DEMOSTRACIÓN:

1. La única obstrucción de este punto está en los productos no conmutativos. Basta ver que

$$h(\partial_i x_i) = h(x_i \partial_i + 1) = x_i \partial_i + t^2 = \partial_i x_i = h(\partial_i)h(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Ya en general, si $\text{ord}^T(P) = b$, $\text{ord}^T(\mathbf{Q}) = d$ y $\text{ord}^T(Q_i) = d_i$ es evidente que $\text{ord}^T(P\mathbf{Q}) = b + d$, $\text{ord}^T(PQ_i) = b + d_i$. Así,

$$\begin{aligned} h(P\mathbf{Q}) &= (t^{b+d-(b+d_1)}h(PQ_1), \dots, t^{b+d-(b+d_m)}h(PQ_m)) = \\ &(t^{d-d_1}h(P)h(Q_1), \dots, t^{d-d_m}h(P)h(Q_m)) = h(P)h(\mathbf{Q}). \end{aligned}$$

2. Si denotamos

$$\begin{cases} \text{ord}^T(\mathbf{Q}) = b & \text{ord}^T(Q_i) = b_i \\ \text{ord}^T(\mathbf{Q}') = c & \text{ord}^T(Q'_i) = c_i \\ \text{ord}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = d & \text{ord}^T(Q_i + Q'_i) = d_i \\ e = \max\{b, c\} & e_i = \max\{b_i, c_i\} \end{cases}$$

Para cada i , $1 \leq i \leq m$, se tiene que

$$t^{e_i-d_i}h(Q_i + Q'_i) = t^{e_i-b_i}h(Q_i) + t^{e_i-c_i}h(Q'_i)$$

luego también

$$t^{e-d}h(Q_i + Q'_i) = t^{e-b_i}h(Q_i) + t^{e-c_i}h(Q'_i).$$

De lo anterior se puede concluir que

$$\begin{aligned} t^{e-d}h(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') &= t^{e-d}(t^{d-d_1}h(Q_1 + Q'_1), \dots, t^{d-d_m}h(Q_m + Q'_m)) = \\ &= (t^{e-d_1}h(Q_1 + Q'_1), \dots, t^{e-d_m}h(Q_m + Q'_m)) = \\ &= (t^{e-b_1}h(Q_1) + t^{e-c_1}h(Q'_1), \dots, (t^{e-b_m}h(Q_m) + t^{e-c_m}h(Q'_m))) = \\ &= t^{e-b}h(\mathbf{Q}) + t^{e-c}h(\mathbf{Q}'). \end{aligned}$$

Para terminar, hagamos notar que si \mathbf{H} tiene en alguna componente un monomio que no contiene a la variable t (esto es, si el grado de \mathbf{G} es igual $\text{ord}^T(\mathbf{G}|_{t=1})$), es inmediato ver que $h(\mathbf{H}|_{t=1}) = \mathbf{H}$. Si \mathbf{H} no

es de este tipo, sea $k \in \mathbb{N}$ el máximo valor tal que t^k divide a todas las componentes de \mathbf{H} . Entonces existe un elemento \mathbf{G} homogéneo en \mathcal{A}^m tal que $\mathbf{H} = t^k h(\mathbf{G})$ y

$$t^k h(\mathbf{H}_{|t=1}) = t^k h(\mathbf{G}_{|t=1}) = t^k \mathbf{G} = \mathbf{H}.$$

□

Dados un buen orden \prec en \mathbb{N}^{2n} y el orden \prec_L definido en \mathbb{N}^{2n+1} en la sección anterior, se define el siguiente buen orden total \prec_L sobre $\mathbb{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\}$ (que denotamos igual por ser para $m = 1$ el orden antes definido):

$$(k, \alpha, \beta, i) \prec_L (k', \alpha', \beta', j) \iff \begin{cases} (k, \alpha, \beta) \prec_L (k', \alpha', \beta') \\ \text{ó} \\ \begin{cases} (k, \alpha, \beta) = (k', \alpha', \beta') \\ \text{e } i < j \end{cases} \end{cases}$$

Definición 3.3.3.— Dado $\mathbf{H} \in A_n[t]^m$

$$\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_m), \quad H_i = \sum_{t, \alpha, \beta} h_{(k, \alpha, \beta)}^i t^k X^\alpha D^\beta$$

se define el diagrama de Newton de \mathbf{H} como

$$\mathcal{N}(\mathbf{H}) = \{(k, \alpha, \beta, i) \in \mathbb{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\} \mid h_{(k, \alpha, \beta)}^i \neq 0\}$$

y el exponente de \mathbf{H} , $\exp_{\prec_L}(\mathbf{H}) = \max_{\prec_L} \mathcal{N}(\mathbf{H})$.

Si M es un submódulo de $A_n[t]^m$, escribiremos

$$E_{\prec_L}(M) = \{\exp_{\prec_L}(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in M, \mathbf{H} \neq \mathbf{0}\}.$$

Se definen y denotan como siempre el monomio principal y coeficiente principal de un elemento de $A_n[t]^m$. El lema que sigue muestra que el cálculo en $A_n[t]$ es “natural” a partir del producto en $A_n(\mathbf{K})$.

Lema 3.3.4.— Sea $P = D^\beta X^\alpha \in A_n(\mathbf{K})$ y sea P' el mismo producto considerado en $A_n[t]$. Entonces $P' = h(P)$

DEMOSTRACIÓN: En efecto: $h(D^\beta X^\alpha) = h(D^\beta)h(X^\alpha) = D^\beta X^\alpha$, que considerado en $A_n[t]$ es P' . \square

Así por ejemplo, en $A_n[t]$ se tiene la siguiente fórmula que generaliza la análoga de $A_n(\mathbf{K})$ (ver, por ejemplo [40]) :

$$[\partial_x^j, x^k] =$$

$$\sum_{i \geq 0} c_{i,j,k} x^{k-i} \partial_x^{j-i} t^{i+j-(k-i)-(j-i)}$$

donde se entiende que las posibles potencias negativas son cero y

$$c_{i,j,k} = \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!}$$

Lema 3.3.5.— *En el producto $D^\beta X^\alpha$ en $A_n[t]$, el monomio principal de la expresión resultante es $X^\alpha D^\beta$.*

DEMOSTRACIÓN: De la fórmula de arriba, se deduce que $D^\beta X^\alpha$ produce un elemento homogéneo y que, por tanto, la ordenación de exponentes se realiza sin tener en cuenta el exponente de la variable t . Pero en los monomios $X^{\alpha'} D^{\beta'}$ distintos de $X^\alpha D^\beta$ que se producen siempre $\alpha' + \beta' < \alpha + \beta$ y $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, y por tanto al aplicar la forma lineal L seguro que en estos monomios se produce un exponente estrictamente más pequeño respecto del orden \prec_L . \square

Proposición 3.3.6.— *Dados $Q \in A_n[t]$ y $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in A_n[t]^m$, se tiene:*

1. $\exp(Q\mathbf{H}) = \exp(Q) + \exp(\mathbf{H})$.
2. Si $\exp(\mathbf{H}) \neq \exp(\mathbf{H}')$ entonces

$$\exp(\mathbf{H} + \mathbf{H}') = \max_{\prec_L} \{\exp(\mathbf{H}), \exp(\mathbf{H}')\}.$$

3. Si $\exp(\mathbf{H}) = \exp(\mathbf{H}')$ y $c(\mathbf{H}) + c(\mathbf{H}') \neq 0$, entonces $\exp(\mathbf{H} + \mathbf{H}') = \exp(\mathbf{H})$ y $c(\mathbf{H} + \mathbf{H}') = c(\mathbf{H}) + c(\mathbf{H}')$.

4. Si $\exp(\mathbf{H}) = \exp(\mathbf{H}')$ y $c(\mathbf{H}) + c(\mathbf{H}') = 0$, entonces $\exp(\mathbf{H} + \mathbf{H}') \prec_{\delta}^h \exp(\mathbf{H})$.

DEMOSTRACIÓN:

1. es inmediato con los dos lemas anteriores.
- 2., 3. y 4. se siguen de la definición de exponentes y de distinguir si se anulan al sumar los monomios principales o no. \square

De las propiedades de \exp_{\prec_L} y de (1) de la proposición anterior se deduce el siguiente resultado:

Lema 3.3.7.— Si $\mathbf{P} \in \mathcal{A}^m$, entonces $\pi(\exp(h(\mathbf{P}))) = \exp(\mathbf{P})$, donde $\pi : \mathbf{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, m\} \longrightarrow \mathbf{N}^{2n} \times \{1, \dots, m\}$ es la proyección natural. Más generalmente, si \mathbf{H} es un elemento homogéneo de $A_n[t]^m$ (con respecto a la graduación que induce \prec_L), entonces $\pi(\exp(\mathbf{H})) = \pi(\exp(h(\mathbf{H}|_{t=1}))) = \exp(\mathbf{H}|_{t=1})$.

3.4 Teorema de división en $A_n[t]^m$

Sean $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_r$ elementos de $A_n[t]^m$. Denotemos por

$$\Delta^1 := \exp(\mathbf{H}_1) + \mathbf{N}^{2n+1}$$

$$\Delta^i := \exp(\mathbf{H}_i) + \mathbf{N}^{2n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j, \quad i = 2, \dots, r$$

$$\bar{\Delta} := \mathbf{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\} \setminus \bigcup_{j=1}^r \Delta_j.$$

Teorema 3.4.1.— En esta situación para cualquier $\mathbf{H} \in A_n[t]^m$, existen unos únicos $Q_1, \dots, Q_r \in A_n[t]$, $\mathbf{R} \in A_n[t]^m$ tales que:

1. $\mathbf{H} = Q_1 \mathbf{H}_1 + \dots + Q_r \mathbf{H}_r + \mathbf{R}$.
2. $\exp(\mathbf{H}_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subseteq \Delta^i$ para $1 \leq i \leq r$
3. $\mathcal{N}(\mathbf{R}) \subseteq \bar{\Delta}$

DEMOSTRACIÓN: El hecho fundamental es que \prec_L es un buen orden en $\mathbb{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\}$.

Sobre la unicidad: Supongamos que tenemos dos expresiones

$$\mathbf{H} = Q_1 \mathbf{H}_1 + \dots + Q_r \mathbf{H}_r + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{H} = Q'_1 \mathbf{H}_1 + \dots + Q'_r \mathbf{H}_r + \mathbf{R}'$$

en las condiciones del teorema. Entonces

$$0 = (Q_1 - Q'_1) \mathbf{H}_1 + \dots + (Q_r - Q'_r) \mathbf{H}_r + (\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Como los exponentes de cada sumando están en elementos diferentes de una partición de $\mathbb{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\}$, no se pueden anular entre sí a no ser que cada uno sea cero.

Sobre la existencia: Haremos una demostración por recurrencia sobre $\text{ord}^T(\mathbf{H})$:

- Si el orden de \mathbf{H} es cero, $\mathbf{H} \in \mathbf{K}^m$. Supongamos que el orden de cada \mathbf{H}_i es $d_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$. El teorema de división (caso $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]^m$, ver [14]) aplicado a \mathbf{H} y a $\sigma(\mathbf{H}_1), \dots, \sigma(\mathbf{H}_r)$ asegura la existencia y unicidad de unos $q_1, \dots, q_r \in \mathbf{K}[t, X, \xi]$ y un $\mathbf{r} \in \mathbf{K}[t, X, \xi]^m$ tales que:

1. $\mathbf{H} = q_1 \sigma(\mathbf{H}_1) + \dots + q_r \sigma(\mathbf{H}_r) + \mathbf{r}$.
2. $\exp(\sigma(\mathbf{H}_i)) + \mathcal{N}(q_i) \subseteq \Delta^i$ para $1 \leq i \leq r$
3. $\mathcal{N}(\mathbf{r}) \subseteq \overline{\Delta}$

debido a que coinciden $\exp(\sigma(\mathbf{H}_i)) = \exp(\mathbf{H}_i)$, $1 \leq i \leq r$.

Usando el mismo teorema de división en lo que se refiere a elementos homogéneos, se puede asegurar que los q_i han de ser cero para los $\sigma(\mathbf{H}_i)$ con orden total mayor que 0. Por otra parte, los

$\sigma(\mathbf{H}_j)$ que tengan orden total 0, se tiene que $\sigma(\mathbf{H}_j) = \mathbf{H}_j$, y lo mismo para \mathbf{r} . Entonces,

$$\mathbf{H} = q_1 \mathbf{H}_1 + \cdots + q_r \mathbf{H}_r + \mathbf{r}$$

verifica las condiciones del teorema para $\text{ord}^T(\mathbf{H}) = 0$.

- Supongamos la existencia demostrada para todo elemento de orden menor que $d \in \mathbf{N}$ y sea \mathbf{H} un elemento de $A_n[t]^m$ de orden d . Usando la hipótesis de inducción, se puede suponer que

$$\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_m), \quad H_i = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d} h_{k,\alpha,\beta}^i t^k X^\alpha D^\beta$$

Luego se tiene que

$$\sigma(\mathbf{H}) = (\sigma(H_1), \dots, \sigma(H_m)), \quad \sigma(H_i) = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d} h_{k,\alpha,\beta}^i t^k X^\alpha \xi^\beta$$

Aplicando a $\sigma(\mathbf{H}), \sigma(\mathbf{H}_1), \dots, \sigma(\mathbf{H}_r)$ (elementos de $\mathbf{K}[t, X, \xi]^m$) el teorema de división obtenemos unos $q_1, \dots, q_r \in \mathbf{K}[t, X, \xi]$ y un resto $\mathbf{r} \in \mathbf{K}[t, X, \xi]^m$ tales que:

1. $\mathbf{H} = q_1 \sigma(\mathbf{H}_1) + \dots + \sigma(q_r \mathbf{H}_r) + \mathbf{r}$.
2. $\exp(\sigma(\mathbf{H}_i)) + \mathcal{N}(q_i) \subseteq \Delta^i$ para $1 \leq i \leq r$
3. $\mathcal{N}(\mathbf{r}) \subseteq \overline{\Delta}$

Podemos escribir, de nuevo usando el teorema en lo referente a elementos homogéneos, que

$$q_j = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d-d_j} q_{k\alpha\beta}^j t^k X^\alpha \xi^\beta$$

$$\mathbf{r} = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d} r_{k\alpha\beta} t^k X^\alpha \xi^\beta$$

Construimos, a partir de los anteriores, elementos en $A_n[t]$ y $A_n[t]^m$:

$$Q_j = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d-d_j} q_{k\alpha\beta}^j t^k X^\alpha D^\beta$$

$$\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m); \quad R_i = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d} r_{k\alpha\beta}^{(i)} t^k X^\alpha D^\beta.$$

y escribimos

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^* + \widehat{\mathbf{H}}_j,$$

donde \mathbf{H}_j^* tiene en cada una de sus componentes exactamente los monomios de orden d_j . El resto de los monomios están en $\widehat{\mathbf{H}}_j$.

Para cada j , $1 \leq j \leq r$,

$$Q_j \mathbf{H}_j^* = \left(\sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d-d_j} q_{k\alpha\beta}^j t^k X^\alpha D^\beta \right) \mathbf{H}_j^*$$

donde este elemento de $A_n[t]^m$ tiene en cada componente una expresión del tipo

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k+|\alpha|+|\beta|=d-d_j} q_{k\alpha\beta}^j t^k X^\alpha D^\beta \right) \left(\sum_{k'+|\alpha'|+|\beta'|=d} h_{k',\alpha',\beta'}^{(i,j)} t^{k'} X^{\alpha'} D^{\beta'} \right) = \\ & = \left(\sum_{\substack{k+|\alpha|+|\beta|=d-d_j \\ k'+|\alpha'|+|\beta'|=d}} q_{k\alpha\beta}^j h_{k',\alpha',\beta'}^{(i,j)} t^{k+k'} X^{\alpha+\alpha'} D^{\beta+\beta'} \right) + \tilde{G}^i \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^r Q_j \mathbf{H}_j + \mathbf{R} = \\ & = \sum_{j=1}^r Q_j \mathbf{H}_j^* + \sum_{j=1}^r Q_j \widehat{\mathbf{H}}_j + \mathbf{R} = \\ & = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{\substack{k+|\alpha|+|\beta|=d-d_j \\ k'+|\alpha'|+|\beta'|=d}} q_{k\alpha\beta}^j h_{k',\alpha',\beta'}^{(i,j)} t^{k+k'} X^{\alpha+\alpha'} D^{\beta+\beta'} \right) + \\ & \quad + \mathbf{R} + \mathbf{G}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{G} = (\tilde{G}^1, \dots, \tilde{G}^m) + \sum_{j=1}^r Q_j \widehat{\mathbf{H}}_j.$$

Hemos conseguido escribir

$$\sum_{j=1}^r Q_j \mathbf{H}_j + \mathbf{R} = \mathbf{H} + \mathbf{G}$$

donde el $\text{ord}^T(\mathbf{G}) < d$ por su construcción. Basta aplicar la hipótesis de inducción a \mathbf{G} para obtener la expresión completa de \mathbf{H} .

□

Lema 3.4.2.— Sea M un submódulo de \mathcal{A}^m . Sea $h(M)$ el submódulo de $A_n[t]^m$ generado por el conjunto $\{h(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in M\}$. Entonces:

1. $\pi(E_L(h(M))) = E_L(M)$.
2. Si $\{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_r\}$ son unos generadores de M , y \tilde{M} es el submódulo de $A_n[t]^m$ generado por $\{h(\mathbf{H})_1, \dots, h(\mathbf{H})_r\}$, entonces $\pi(E_L(\tilde{M})) = E_L(M)$.

DEMOSTRACIÓN: 1. Sea \mathbf{H} un elemento (no nulo) de M . La igualdad $\exp_L(\mathbf{H}) = \pi(\exp_L(h(\mathbf{H})))$ implica que $E_L(M) \subseteq \pi(E_L(h(M)))$.

Sea ahora \mathbf{H} un elemento (no nulo) del submódulo homogéneo $h(M)$. Podemos suponer que \mathbf{H} es homogéneo. Como podemos asegurar la existencia de unos $B_1, \dots, B_r \in A_n[t]$ tales que

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^r B_i h(\mathbf{H}_i),$$

entonces

$$\mathbf{H}|_{t=1} = \sum_{i=1}^r B_i|_{t=1} \mathbf{H}_i$$

es un elemento de M . Por el lema 3.3.7, se tiene entonces la inclusión $\pi(E_L(h(M))) \subseteq E_L(M)$.

2. Escribamos $\mathbf{H} = \sum_i C_i \mathbf{H}_i$, donde los $C_i \in A_n[t]$. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $t^k h(\mathbf{H}) \in \tilde{M}$. La igualdad $\exp_L(\mathbf{H}) = \pi(\exp_L(t^k h(\mathbf{H})))$ muestra que $E_L(M) \subseteq E_L(\tilde{M})$.

Finalmente $\tilde{M} \subseteq h(M)$ implica que $E_L(\tilde{M}) \subseteq E_L(h(M))$ y que, por tanto

$$\pi(E_L(\tilde{M})) \subseteq \pi(E_L(h(M))) = E_L(M).$$

□

3.5 *L*-bases estándar

Sean \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 dos elementos de $A_n[t]^m$. Denotemos $\mu^i = \exp_{\prec_L}(\mathbf{G}_i) = (k^i, \alpha^i, \beta^i, l^i)$ y $\mu = \text{mcm}(\mu^1, \mu^2)$, con $\mu = \nu^1 + \mu^1 = \nu^2 + \mu^2$.

Definición 3.5.1.— En las condiciones anteriores, llamaremos semisicigia relativa a \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 al elemento de $A_n[t]^m$

$$S(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = M_1 \mathbf{G}_1 - M_2 \mathbf{G}_2$$

donde $M_i \in A_n[t]$ es el monomio de exponente ν^i y coeficiente $1/c(\mathbf{G}_i)$ si $l^1 = l^2$. En caso contrario la semisicigia es el elemento cero.

De la definición, es claro que

$$\exp_{\prec_L}(S(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)) \prec_L \mu$$

Proposición 3.5.2.— Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r\}$ una familia de generadores de un submódulo $M \subset A_n(\mathbf{K})^m$ tal que, para todo (i, j) , $1 \leq i < j \leq r$ el resto de dividir $S(h(\mathbf{P}_i), h(\mathbf{P}_j))$ por $h(\mathbf{P}_1), \dots, h(\mathbf{P}_r)$ es cero. Entonces \mathcal{F} es una *L*-base estándar de M .

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Delta = \bigcup_{i=1}^r (\exp(\mathbf{P}_i) + \mathbf{N}^{2n+1} \times \{1, \dots, m\})$. Basta probar que $E_L(M) \subset \Delta$.

Sea $\mathbf{P} \in M$, $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^r Q_i \mathbf{P}_i$. Sean

- $d_i = \text{ord}^T(Q_i \mathbf{P}_i)$, $d = \max_{i=1, \dots, r} \{d_i\}$, $\delta = \text{ord}^T(\mathbf{P}) \leq d$,
- $\mu^i = \exp_{\prec_L}(h(\mathbf{P}_i))$, $\nu^i = \exp_{\prec_L}(h(Q_i)h(\mathbf{P}_i))$,
- $(\alpha, \beta, j) = \max_{i=1, \dots, r} \{\exp_L(Q_i \mathbf{P}_i)\}$.

Consideremos el conjunto $\{i_0, \dots, i_s\}$ de índices donde se alcanza el exponente (α, β, j) . Si $s = 0$, entonces $\exp(\mathbf{P}) = \exp(Q_{i_0}\mathbf{P}_{i_0}) \in \Delta$.

Podemos suponer entonces que $s \geq 1$. Se tiene que

$$t^{d-\delta}h(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r t^{d-d_i}h(Q_i)h(\mathbf{P}_i).$$

De la expresión anterior se puede deducir que:

- $\exp_{\prec_L}(t^{d-d_i}h(Q_i)h(\mathbf{P}_i)) = (d - |\alpha| - |\beta|, \alpha, \beta, j)$ para $i = i_0, \dots, i_s$,
- $\exp_{\prec_L}(t^{d-d_i}h(Q_i)h(\mathbf{P}_i)) \prec_L (d - |\alpha| - |\beta|, \alpha, \beta, j)$ si $i \notin \{i_0, \dots, i_s\}$.

Sea $\mu = \text{mcm}(\mu^{i_0}, \mu^{i_1})$, con $\mu = \rho^{i_0} + \mu^{i_0} = \rho^{i_1} + \mu^{i_1}$. Por hipótesis, podremos escribir la semisicigia $\mathbf{S} = S(h(\mathbf{P}_{i_0}), h(\mathbf{P}_{i_1}))$ como

$$\mathbf{S} = M_{i_0}h(\mathbf{P}_{i_0}) - M_{i_1}h(\mathbf{P}_{i_1}) = \sum_{i=1}^r S_i h(\mathbf{P}_i),$$

donde M_{i_k} es un monomio en $A_n[t]$ tal que

- $\exp(M_{i_k}) = \rho^{i_k}$, $k = 0, 1$
- $\exp(S(h(\mathbf{P}_{i_0}), h(\mathbf{P}_{i_1}))) \prec_L \mu$

Sea $d' = d - |\alpha| - |\beta|$. Tenemos $(d', \alpha, \beta, j) = \exp(t^{d-d_i}h(Q_i)\mathbf{P}_{i_l})$ para $l = 0, \dots, s$, y por tanto $(d', \alpha, \beta, j) = \mu + \nu$ para algún $\nu \in \mathbb{N}^{2n+1}$. Así $\exp(t^{d-d_i}h(Q_i)) = \exp(MM_{i_k}) = \nu + \rho^{i_k}$ para $k = 0, 1$. Llamando c_k a los únicos escalares tales que

$$mp_{\prec_L}(t^{d-d_i}h(Q_i)) = mp_{\prec_L}(c_k MM_{i_k}),$$

para $k = 0, 1$, entonces

$$\begin{aligned}
t^{d-\delta} &= (c_0 M M_{i_0} - c_0 M \widehat{M}_{i_0} + t^{d-d_{i_0}} h(\widehat{Q}_{i_0})) h(\mathbf{P}_{i_0}) \\
&\quad + \sum_{i \neq i_0} t^{d-d_i} h(Q_i) h(\mathbf{P}_i) \\
&= c_0 M (\mathbf{S} + M_{i_1} h(\mathbf{P}_{i_1})) + t^{d-d_{i_0}} h(\widehat{Q}_{i_0}) - c_0 M \widehat{M}_{i_0} h(\mathbf{P}_{i_0}) \\
&\quad + \sum_{i \neq i_0} t^{d-d_i} h(Q_i) h(\mathbf{P}_i) \\
&= c_0 M (\sum_{i=1}^r S_i h(\mathbf{P}_i)) + c_0 M M_{i_1} h(\mathbf{P}_{i_1}) \\
&\quad + t^{d-d_{i_0}} h(\widehat{Q}_{i_0}) - c_0 M \widehat{M}_{i_0} h(\mathbf{P}_{i_0}) \\
&\quad + \sum_{i \neq i_0} t^{d-d_i} h(Q_i) h(\mathbf{P}_i).
\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$t^{d-\delta} h(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r H_i h(\mathbf{P}_i),$$

siendo

- $H_{i_0} = c_0 M S_{i_0} + t^{d-d_{i_0}} h(\widehat{Q}_{i_0}) - c_0 M \widehat{M}_{i_0}$,
- $H_{i_1} = c_0 M S_{i_1} + c_0 M M_{i_1} t^{d-d_{i_1}} h(Q_{i_1})$,
- $H_i = c_0 M S_i + t^{d-d_i} h(Q_i)$ para $i \neq i_0, i_1$.

con

- $\exp(H_{i_0}) \prec_L \exp(t^{d-d_{i_0}} h(Q_{i_0}))$,
- $\exp(H_{i_1}) \preceq_L \exp(t^{d-d_{i_1}} h(Q_{i_1}))$,
- $\exp(H_i) = \exp(t^{d-d_i} h(Q_i))$, para $i \neq i_0, i_1$.

Por tanto, si tomamos $Q'_i = (H_i)|_{t=1}$, tenemos

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^r Q'_i \mathbf{P}_i$$

con $\max_{<L} \{\exp_L(Q'_i \mathbf{P}_i \mid i = 1, \dots, r)\} \leq_L (\alpha, \beta, j)$ y $\exp_L(Q'_{i_0} \mathbf{P}_{i_0}) <_L (\alpha, \beta, j)$.

La inducción sobre s y (α, β) , dado que $\text{ord}^T(Q'_i \mathbf{P}_i)$ permanece acotado por d , termina la prueba. \square

3.6 L -bases sin homogeneización.

En esta sección ofrecemos un resultado que nos proporcionará, en algunos casos, una manera de calcular base estándar de un ideal de $A_n(\mathbf{K})$ con respecto a un orden que *no es un buen orden*: si aplicamos el algoritmo de Buchberger con un L orden y no salen series, el resultado es una L -base. Esto evitará la homogeneización en muchos casos.

La clave es que el orden $<_L$ está dotado de la propiedad siguiente: dados $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{2n}$ el conjunto

$$C = \{\gamma \mid \alpha <_L \gamma <_L \beta\}$$

es finito.

Proposición 3.6.1.— *Sea $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_r\}$ una familia de elementos de $A_n(\mathbf{K})$ tal que las respectivas semisicigias $S(P_i, P_j)$ dan resto cero al dividir por \mathcal{F} . Entonces*

$$E_{<_L}(\langle P_1, \dots, P_r \rangle) = \bigcup_{i=1}^r (\exp_{<_L}(P_i) + \mathbf{N}^{2n})$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $P = Q_1P_1 + \dots + Q_rP_r$. Sean

- $\delta^i = \exp_{<_L}(Q_iP_i)$, $\delta = \exp_{<_L}(P) \leq \max\{\delta^i\}$
- $\mu^i = \exp_{<_L}(P_i)$
- $\alpha = \max\{\exp_{<_L}(Q_iP_i)\}$

Si el conjunto de subíndices en los que se alcanza α es $\{i_0, \dots, i_s\}$, el caso en el que $s = 0$ implica que

$$\delta = \exp_{<_L}(P) = \exp_{<_L}(Q_{i_0}P_{i_0}) \in \Delta$$

Si por el contrario $s \geq 1$, tomemos los dos primeros subíndices i_0 e i_1 . Si $\mu = \text{mcm}(\mu^{i_0}, \mu^{i_1})$ entonces

$$\mu = \mu^{i_0} + \rho^{i_0} = \mu^{i_1} + \rho^{i_1}$$

Recordemos que si S es la semisicigia de P_{i_0} y P_{i_1} , se puede obtener una división $S = S_1P_1 + \dots + S_rP_r$. Por otra parte

$$S = M_{i_0}P_{i_0} - M_{i_1}P_{i_1}$$

donde los monomios M_{i_0} y M_{i_1} tienen exponentes ρ^{i_0} y ρ^{i_1} respectivamente y $\exp_{\prec_L}(S) < \mu$, pues se eligen estos monomios para eliminar el mayor exponente. Como $\alpha = \exp_{\prec_L}(Q_{i_l}P_{i_l})$, $l = 0, \dots, s$, α es un múltiplo de μ , digamos $\alpha = \nu + \mu$.

Considerando el monomio M de coeficiente 1 y exponente igual a ν , se tiene que

$$\exp_{\prec_L}(Q_{i_k}) = \exp_{\prec_L}(MM_{i_k}) = \nu + \rho_{i_k}$$

luego la forma inicial de los Q_{i_k} tiene exactamente este exponente y podemos escribir $Q_{i_0}P_{i_0} = c_0MM_{i_0} - c_0\widehat{MM}_{i_0} + \widehat{Q}_{i_0}P_{i_0}$.

Entonces

$$\begin{aligned} P &= c_0MM_{i_0} - c_0\widehat{MM}_{i_0} + \widehat{Q}_{i_0}P_{i_0} + \\ &\quad + \sum_{i \neq i_0} Q_iP_i \\ &= c_0M(S + M_{i_1}P_{i_1}) + (\widehat{Q}_{i_0} - c_0\widehat{MM}_{i_0})P_{i_0} + \\ &\quad + \sum_{i \neq i_0} Q_iP_i \\ &= c_0M(S_1P_1 + \dots + S_rP_r) + c_0MM_{i_1}P_{i_1} + \\ &\quad + (\widehat{Q}_{i_0} - c_0\widehat{MM}_{i_0})P_{i_0} + \\ &\quad + \sum_{i \neq i_0} Q_iP_i \end{aligned}$$

Hemos expresado P de una nueva forma $P = H_1P_1 + \dots + H_rP_r$ donde

- $H_{i_0} = c_0MS_{i_0} + \widehat{Q}_{i_0} - c_0\widehat{MM}_{i_0}$,
- $H_{i_1} = c_0MS_{i_1} + c_0MM_{i_1} + Q_{i_1}$,
- $H_i = c_0MS_i + Q_i$ si $i \neq i_0, i_1$.

Con

- $\exp_{\prec_L}(H_{i_0}) \prec_L \exp_{\prec_L}(Q_{i_0})$ (por la definición de M y por participar S_{i_0} en una división).
- $\exp_{\prec_L}(H_{i_1}) \preceq \exp_{\prec_L}(Q_{i_1})$,

y el resto de los exponentes iguales.

Hemos logrado disminuir al menos en una unidad s , el número de elementos en los que se alcanza α . Este hecho, unido a que siempre

$$\alpha \preceq \exp_{\prec_L}(Q_{i_1}) + \exp_{\prec_L}(Q_i P_i) \preceq \exp_{\prec_L}(Q_{i_1}) + \max\{\delta^i\}$$

permite asegurar que este proceso es finito y que, por tanto, $\alpha \in \Delta$ en general. \square

La generalización a $A_n(\mathbf{K})^m$ es inmediata.

Capítulo 4

Pendientes en \mathcal{D} -módulos libres

Dado un operador $P(x, \partial_x) = \sum_{i=0}^m a_i(x) \partial_x^i \in \mathbf{C}\{x\}[\partial_x] = \mathcal{D}$ (con $a_m \neq 0$), podemos asociarle la aplicación lineal

$$\tilde{P} : \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O},$$

que lleva $\bar{u} \in \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ en $\tilde{P}(\bar{u})$. Se tiene que

Teorema 4.0.2.— (ver [31]) $P(u) = 0$ tiene un punto singular regular (es decir, sus soluciones tienen crecimiento moderado) si y sólo si $\text{Ker}(\tilde{P}) = 0$

Teorema 4.0.3.— (ver [25], sección 15.3) $P(u) = 0$ tiene un punto singular regular en 0 si y sólo si $\max\{j - \text{val}(a_j)\} = m - \text{val}(a_m)$.

El objeto combinatorio $\mathcal{P}(P)$ (ver 4.1.2) de P

$$\mathcal{P}(P) = \Gamma\left(\bigcup_{j=0}^m [(j - \text{val}(a_j)) + (-\mathbf{N}^2)]\right)$$

“delata” que en el caso de $P = x^2 \partial_x + 1$ que la ecuación $P(u) = 0$ tiene una solución $u = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1} \in \hat{\mathcal{O}} - \mathcal{O}$.

4.1 Pendientes en $A_n(\mathbf{K})$ y $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$.

Reproducimos en esta sección un breve resumen de [2].

El módulo $gr^L(A_n(\mathbf{K}))$ tiene, en general, una graduación con respecto a F y otra con respecto a V .¹

Sea $\mathcal{R} = A_n(\mathbf{K})$ ó $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$.

Definición 4.1.1.— Sea I un ideal de \mathcal{R} y sea $L(a, b) = pa + qb$ (con p y q no negativos, primos entre sí) una forma lineal, $L \neq F, V$.

Diremos que L es una pendiente de $M = \mathcal{R}/I$ si

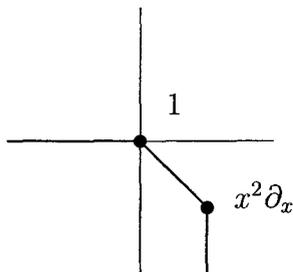
$$\sqrt{gr^L(I)} = \sqrt{Ann_{gr^L(\mathcal{R})}(gr^L(M))}$$

no es un ideal bihomogéneo respecto de las graduaciones F y V .

Definición 4.1.2.— Sea P un elemento de \mathcal{R} . Llamaremos polígono de Newton de P , que notaremos $\mathcal{P}(P)$, al cierre convexo del conjunto

$$\bigcup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(P)} ((|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) + (-N)^2).$$

Ejemplo 4.1.3.— El polígono de Newton de $x^2\partial_x + 1$ es

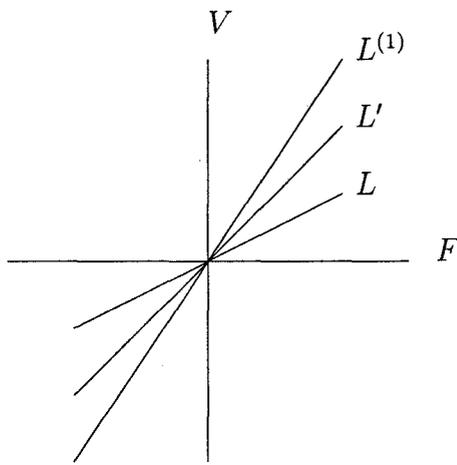


Los dos lemas que siguen son fundamentales para demostrar la finitud de las pendientes en [2]. La notación $L < L'$ significará que la forma lineal L tiene menor pendiente que L' .

Lema 4.1.4.— Sea I un ideal de \mathcal{R} , $L \neq V$. Existe una forma lineal $L^{(1)}$, $L^{(1)} > L$ tal que, para toda L' , $L^{(1)} > L' > L$, se tiene que $gr^{L'}(I) = gr^V(gr^L(I))$.

¹También $gr^L(\mathcal{D})$ si $L \neq F, V$.

En la figura siguiente aparece tres pendientes en la situación del lema anterior:



Lema 4.1.5.— Sea I un ideal de \mathcal{R} , $L \neq F$. Existe una forma lineal $L^{(2)}$, $L^{(2)} > L$ tal que, para toda L'' , $L^{(2)} < L'' < L$, se tiene que $\text{gr}^{L''}(I) = \text{gr}^F(\text{gr}^L(I))$.

De los dos lemas se deduce la finitud de las pendientes:

Teorema 4.1.6.— Sea I un ideal de \mathcal{R} . El número de pendientes de \mathcal{R}/I es finito.

En [2] se da también una manera de ir cambiando el sistema de generadores del ideal “quitando” las pendientes que ya están estudiadas.

Para terminar esta sección, diremos que en [15] se ofrecen ejemplos en los que la existencia o no de pendientes se deduce sin utilizar directamente el algoritmo. Con una estrategia similar, en 5.4 ofrecemos una prueba para ver que $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{ Der}(\log f)$ no tiene pendientes, siendo f la curva de Reiffen (2.3.1).

4.2 Pendientes de \mathcal{A}^p/N

Consideremos el algebra de Weyl $\mathcal{A} = A_n(\mathbf{K})$, el \mathcal{A} -módulo libre \mathcal{A}^p y un submódulo $N \subset \mathcal{A}^p$. Sea M el \mathcal{A} -módulo $M = \mathcal{A}^p/N$. Para el estudio de las pendientes utilizaremos, de manera análoga a las secciones anteriores, el $gr_L(\mathcal{A})$ -módulo $gr_L(M)$. Notaremos A_M^L el ideal

$$A_M^L = Ann_{gr_L(\mathcal{A})}(gr_L(M)) = \{P \in gr_L(\mathcal{A}) \mid P \cdot gr_L(M) = 0\}.$$

Distinguiremos en la práctica dos tipos de pendientes:

Definición 4.2.1.— Diremos que L es una pendiente geométrica de M si el ideal $\sqrt{A_M^L}$ no es bihomogéneo.

Definición 4.2.2.— Diremos que L es una pendiente algebraica o idealística de M si A_M^L no es bihomogéneo.

En el caso $p = 1$, si J es un ideal de \mathcal{A} entonces $A_M^L = gr^L(J)$. El estudio de las pendientes de \mathcal{A}^p/N necesita del cálculo en general del objeto A_M^L .

Definición 4.2.3.— Llamaremos L -variedad característica de M a la variedad definida por el ideal $\sqrt{A_M^L}$.

4.2.1 Algunas generalidades sobre filtraciones en B^p .

Dado $M = \mathcal{A}^p/N$, trabajaremos con $gr_L(M)$ donde

$$gr_L(M) = \bigoplus_{m \geq 0} gr_L^{(m)}(M) \simeq \frac{gr_L(\mathcal{A}^p)}{gr_L(N)},$$

con

$$gr_L^{(m)}(M) = \frac{F_m(M)}{F_{m-1}(M)} \quad F_m(M) = \frac{F_m(\mathcal{A}^p)}{N \cap F_m(\mathcal{A}^p)} \simeq \frac{F_m(\mathcal{A}^p) + N}{N},$$

En general, dado un anillo B graduado, $B = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} B_k$ puede graduarse de distintas maneras aplicando simplemente una traslación de los subíndices. Dado $k_1 \in \mathbf{Z}$, seguiremos la notación:

$$B[k_1] = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} B_{k-k_1},$$

que es naturalmente isomorfo a B con un isomorfismo graduado de grado k_1 . Si consideramos B^2 , por ejemplo, es obvio que podemos también graduar de muchas maneras con estas traslaciones. Por ejemplo:

- $B^2 = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (B_i \oplus B_i)$.
- $B^2[k_1, k_2] = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (B_{i-k_1} \oplus B_{i-k_2})$.

Definición 4.2.4.— Dado el módulo libre B^p , llamaremos graduación de B^p con respecto a $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{Z}^p$ a

$$B^p[k_1, \dots, k_p] = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (B_{i-k_1} \oplus \dots \oplus B_{i-k_p}).$$

Abusando de la notación, escribiremos simplemente B^p refiriéndonos a $B^p[0, \dots, 0]$.

Nota 4.2.5.— No tendremos en general un isomorfismo graduado entre $B^p[k_1, \dots, k_p]$ y $B^p[k'_1, \dots, k'_p]$. Basta tomar $p = 2$, $k_1 = k_2 = 0$ y $k'_1 \neq k'_2$.

En efecto: si φ es el isomorfismo y $\varphi(1, 0) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\varphi(0, 1) = (\beta_1, \beta_2)$, se tendría que $(1, 0) = a(\alpha_1, \alpha_2) + b(\beta_1, \beta_2)$ para algunos $a, b \in B$. Por ser un isomorfismo graduado $\alpha_1, \beta_1 \in B_{i-k'_1}$ para algún $i \in \mathbf{Z}$. De la igualdad entre elementos homogéneos

$$1 = a\alpha_1 + b\beta_1$$

se deduce que α_1 y β_1 son de grado 0. Análogamente α_2, β_2 . Pero entonces $k'_1 = k'_2$.

De manera natural

$$B^2[k_1, k_2] \simeq B[k_1] \oplus B[k_2],$$

donde la última graduación es $B_k \oplus B_k = B_{k-k_1} \oplus B_{k-k_2}$.

Nota 4.2.6.— El objeto A_M^L depende de la L -filtración elegida: cuando trabajamos en \mathcal{A}^p podemos aplicar traslaciones a cada una de las componentes y obtener diferentes L -símbolos y diferentes L -bases (lo veremos en el ejemplo 5.6).

La variedad característica es un objeto más estable (ver [26]) : no depende de la buena filtración elegida. Y las L -filtraciones que surgen de trasladar las componentes son buenas filtraciones (ver [14]).

4.2.2 Lemas gemelos y finitud de las pendientes.

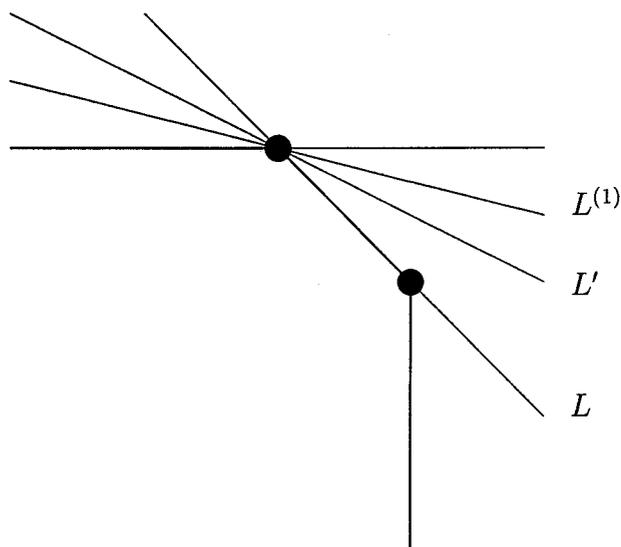
En el caso de $\mathcal{A}^p = A_n(\mathbf{K})^p$ también se pueden obtener, de manera análoga al caso $p = 1$, dos lemas “gemelos” claves para la finitud de las pendientes. La demostración es absolutamente fiel a [2].

Lema 4.2.7.— *Sea N un submódulo de \mathcal{A}^p , $L \neq V$. Existe una forma lineal $L^{(1)}, L^{(1)} > L$ tal que, para toda $L', L^{(1)} > L' > L$, se tiene que $\text{gr}^{L'}(N) = \text{gr}^V(\text{gr}^L(N))$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r\}$ una familia de generadores de N tales que sus L -símbolos forman una V -base estándar de $\text{gr}^L(N)$, esto es

$$E_V(\text{gr}^L(N)) = \bigcup_{i=1}^r (\exp_V(\sigma^L(\mathbf{P}_i)) + \mathbf{N}^{2n})$$

Sea $L^{(1)}$ una forma lineal tal que $L^{(1)} > L$ y tal que $\sigma^{L^{(1)}}(\mathbf{P}_i) = \sigma^V(\sigma^L(\mathbf{P}_i))$ para $i = 1, \dots, r$. En particular, para cualquier L' con $L^{(1)} > L' > L$ tenemos también que $\sigma^{L'}(\mathbf{P}_i) = \sigma^V(\sigma^L(\mathbf{P}_i))$.



Por el lema 3.1.6 se sigue que $gr^{L'}(N) \supset gr^V(gr^L(N))$.

Para la otra inclusión supondremos que la familia $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r\}$ cumple que $\{h(\mathbf{P}_1), \dots, h(\mathbf{P}_r)\}$ (ver 3.3) es una base estándar en $A_n[t]^p$ del submódulo homogéneo que generan con respecto al orden $\prec_{L'}$ (eventualmente será necesario añadir más elementos).

Sea $\mathbf{P} \in N$. Se tiene que

$$\sigma^L(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma^L(\mathbf{P}_i)$$

con $\text{ord}_{L'}(\lambda_i \sigma^L(\mathbf{P}_i)) \leq \text{ord}_{L'}(\sigma^L(\mathbf{P}))$ por ser una división con respecto a $\prec_{L'}$. Consideramos el elemento

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P} - \sum_{i=1}^r \Lambda_i \mathbf{P}_i$$

donde $\Lambda_i \in A_n$ es la preimagen natural de λ_i . Hemos conseguido

- $\text{ord}_L(\mathbf{P}^{(1)}) < \text{ord}_L(\mathbf{P})$.
- $\text{ord}_{L'}(\mathbf{P}) \geq \text{ord}_{L'}(\Lambda_i \mathbf{P}_i)$.

Si $\text{ord}_{L'}(\mathbf{P}^{(1)}) < \text{ord}_{L'}(\mathbf{P})$ entonces

$$\sigma^{L'}(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r \sigma_{d-d_i}^{L'}(\Lambda_i) \sigma^{L'}(\mathbf{P}_i),$$

donde $d = \text{ord}_{L'}(\mathbf{P})$, $d_i = \text{ord}_{L'}(\mathbf{P}_i)$. Si $\text{ord}_{L'}(\mathbf{P}^{(1)}) = \text{ord}_{L'}(\mathbf{P})$ repetimos el proceso anterior a $\mathbf{P}^{(1)}$. En cualquier caso obtenemos una sucesión $\mathbf{P}^{(s)}$, $s \geq 1$, tal que

- $\mathbf{P}^{(s+1)} = \mathbf{P}^{(s)} - \sum_{i=1}^r \Lambda_i^s \mathbf{P}_i$,
- $\text{ord}_L(\mathbf{P}^{(s+1)}) < \text{ord}_L(\mathbf{P}^{(s)})$,
- $\text{ord}_{L'}(\mathbf{P}) \geq \text{ord}_{L'}(\Lambda_i^s \mathbf{P}^{(s)})$.

Si L es irracional como la sucesión $\text{ord}_L(\mathbf{P}^{(s)})$ es estrictamente decreciente, existe un entero s tal que $\text{ord}_{L'}(\mathbf{P}^{(s+1)}) < \text{ord}_{L'}(\mathbf{P}^{(s)})$ y por tanto

$$\sigma^{L'}(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r \sigma_{d-d_i}^{L'}(\Lambda_i^s) \sigma^{L'}(\mathbf{P}_i).$$

Sea $(\alpha^i, \beta^i, j) = \exp_L(\mathbf{P})$, $\mathbf{P}_i = (P_{i1}, \dots, P_{ip})$. En este caso, el único punto de $\mathcal{P}(P_{ij})$ que cae sobre las rectas $L(a, b) = L(|\beta^i|, \beta_1^i - \alpha_1^i)$ y $L'(a, b) = L'(|\beta^i|, \beta_1^i - \alpha_1^i)$ es el propio $(|\beta^i|, \beta_1^i - \alpha_1^i)$. De esta forma, $\mathcal{P}(P_{ij})$ sin su vértice está incluido en el sector

$$\{L(a, b) < L(|\beta^i|, \beta_1^i - \alpha_1^i)\} \cap \{L'(a, b) < L'(|\beta^i|, \beta_1^i - \alpha_1^i)\}.$$

Esto prueba que es suficiente tratar un número finito de puntos del conjunto de los $\mathcal{P}(P_{ij})$ para conseguir que $\text{ord}_{L'}(\mathbf{P}^{(s+1)}) < \text{ord}_{L'}(\mathbf{P}^{(s)})$ también en el caso irracional. \square

Lema 4.2.8.— *Sea M un submódulo de \mathcal{A}^p , $L \neq F$. Existe una forma lineal $L^{(2)}$, $L^{(2)} > L$ tal que, para toda L' , $L^{(2)} < L' < L$, se tiene que $\text{gr}^{L'}(M) = \text{gr}^L(\text{gr}^F(M))$.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es análoga a la del lema anterior con F en vez de V . \square

El resultado principal de esta sección es:

Teorema 4.2.9.— *Sea N un submódulo de \mathcal{A}^p . Entonces el número de pendientes de \mathcal{A}^p/N es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Dado que cada forma lineal L está en un conjunto abierto donde a lo sumo hay una pendiente (esto se sigue de los dos lemas anteriores), por la compacidad del cuadrante de F a V se concluye la prueba. \square

La proposición siguiente aporta la última clave para un algoritmo: entre qué pendientes hay que buscar. La respuesta generaliza el caso de los ideales, pues exige buscar en las pendientes aparentes que aparezcan en cada componente de cada elemento de una base.

Proposición 4.2.10.— *Sea $\mathcal{S}^p = \mathbf{C}[X, \xi]^p$, bigraduado respecto de dos graduaciones de tipo F y V . Sea W un submódulo de \mathcal{S}^p . Si W es bihomogéneo entonces $\text{Ann}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}^p/W)$ es bihomogéneo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f = f_s + \dots + f_t \in \mathcal{S}$ (con cada f_i una componente homogénea, $s \leq i \leq t$) tal que $f(\mathcal{S}^p) \subset W$. En particular, $(f, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, f)$ están en W y por tanto todas sus componentes homogéneas $(f_i, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, f_i)$ también. Se sigue que, por tanto, todas las f_i están en el anulador. \square

Digamos por último, que si un ideal es bihomogéneo también lo es su radical. Puede verse un ejemplo de que el recíproco no es cierto en 5.4.

4.2.3 Cálculo del anulador

Una vez obtenidas las posibles pendientes se calculará para cada L el objeto A_M^L . Supongamos que $M = \mathcal{A}^p/N$ y $\tilde{M} = \text{gr}_L(\mathcal{A}^p)/\text{gr}_L(N)$, con

$$N = \langle \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_t \rangle.$$

Supongamos que los \mathbf{P}_i son una L -base estándar (3.1.4) para una cierta forma lineal L . Denotemos sus L -símbolos por $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_t$ donde cada $\mathbf{Q}_i = (Q_{i,1}, \dots, Q_{i,p})$ para $1 \leq i \leq t$. Recordemos que entonces

(3.1.6)

$$gr^L(N) = \langle \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_t \rangle.$$

Denotaremos

$$A_j^L = Ann_{gr^L(\mathcal{A})}(\bar{\mathbf{e}}_j), \quad 1 \leq j \leq p,$$

para cada $\bar{\mathbf{e}}_j = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^l, 0, \dots, 0)$, $1 \leq l \leq p$. Desde luego,

$$Ann_{gr^L(\mathcal{A})}(\tilde{M}) = \bigcap_{1 \leq j \leq p} A_j^L.$$

Basta entonces calcular cada A_j^L . Tengamos en cuenta:

- Si $a_1 \mathbf{Q}_1 + \dots + a_t \mathbf{Q}_t = (b, 0, \dots, 0)$, por ejemplo, se deduce que (a_1, \dots, a_t) pertenece a las sicigias entre los conjuntos de segundas, terceras, ..., p -ésimas coordenadas. Además b procede de multiplicar esta sicigia por las primeras coordenadas.
- En general, sea $\mathcal{S}_k = \text{Syz}(Q_{1,k}, \dots, Q_{t,k})$ y $\widehat{\mathcal{S}}_k = \bigcap_{j \neq k} \mathcal{S}_j$, para $1 \leq k \leq p$. Con cada $(a_1, \dots, a_t) \in \widehat{\mathcal{S}}_k$ se obtiene un elemento a en A_k^L , pues

$$a_1 \mathbf{Q}_1 + \dots + a_t \mathbf{Q}_t = (0, \dots, 0, \overbrace{a}^k, 0, \dots, 0),$$

debido a que (a_1, \dots, a_t) está en las sicigias de cada conjunto de coordenadas i -ésimas con $i \neq k$.

- Por tanto, si denotamos

$$C_k = \left\{ (a_1, \dots, a_t) \cdot \begin{pmatrix} Q_{1,k} \\ \vdots \\ Q_{t,k} \end{pmatrix} \mid (a_1, \dots, a_t) \in \widehat{\mathcal{S}}_k \right\}$$

se tiene que

$$A_k^L = \{a \in gr^L(\mathcal{A}) \mid (0, \dots, 0, \overbrace{a}^k, 0, \dots, 0) \in gr^L(N)\} = C_k.$$

En resumen, para calcular A_M^L será necesario calcular:

1. Las sicigias $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p$ entre cada juego de coordenadas desde las primeras hasta las últimas.
2. Las intersecciones $\widehat{\mathcal{S}}_k$ entre todos los módulos anteriores salvo el k -ésimo.
3. Los ideales $\mathcal{C}_k = A_k^L$ generados por los productos de cada $\widehat{\mathcal{S}}_k$ por las k -ésimas componentes.
4. La intersección de todos los $\mathcal{C}_k = A_k^L$. Este ideal intersección es A_M^L .
5. El último paso es calcular el radical de A_M^L (ver [19]).

4.2.4 Algoritmo de cálculo de pendientes

Para calcular todas las pendientes L de M se procede como sigue:

Algoritmo:

INPUT: Una familia de generadores de N .

OUTPUT: $\{L_1, \dots, L_r\}$ pendientes de M ó \emptyset si no hay pendientes.

1. Calcular una familia $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_s\}$ de elementos en N tales que
 - Sean una F -base estándar de N .
 - $\{\sigma^F(\mathbf{P}_1), \dots, \sigma^F(\mathbf{P}_s)\}$ sean una V -base estándar de $gr^F(N)$.

Llamaremos a una de estas bases una FV -base.

2. Sea L la menor² forma lineal tal que $\sigma^L(\mathbf{P}_i)$ no es bihomogéneo para algún \mathbf{P}_i , $1 \leq i \leq s$. Si no existe tal L , M no tiene pendientes: $gr^L(N) = gr^V(gr^F(N))$ para toda $L \neq F, V$ pues la

²Si $L(a, b) = pa + qb$, la menor es la de menor $\frac{-p}{q}$.

$L^{(1)}$ que postula el lema 4.2.7 es en este caso $L^{(1)} = V \cdot gr^L(N)$ es por tanto bihomogéneo y también $\sqrt{A_M^L}$.

Si existe L , se calcula el ideal A_M^L

$$A_M^L = Ann_{gr^L(\mathcal{A})}(gr^L(M)).$$

como se ha visto en 4.2.3.

3. Se tiene

$$L \text{ es pendiente} \iff \sqrt{A_M^L} \text{ no es bihomogéneo.}$$

4. Volver al paso 1 cambiando F por L .

En el apéndice final ofrecemos varios ejemplos de cálculo de pendientes:

- En 5.5, estudiamos las pendientes de módulos $\mathcal{O}[1/f]/\mathcal{O}$ presentados como propone [37].
- En 5.6 y 5.7 estudiamos las pendientes en algunos módulos de sicias.
- En 5.8 buscamos pendientes en módulos del tipo $I_1 \oplus I_2$. Los ideales I_1, I_2 dan lugar a módulos \mathcal{D}/I_i con pendientes.

4.3 Sobre los cálculos en \mathcal{D} .

Sean $\mathcal{A} = A_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n(\mathbf{K})$. Dados

$$\begin{aligned} N &= \langle \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r \rangle \subset \mathcal{A}^p, \\ N^e &= \langle \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r \rangle \subset \mathcal{D}^p, \end{aligned}$$

es necesario explicitar la relación que existe entre los cálculos que realizaremos sobre \mathcal{A} y su validez como cálculos en \mathcal{D} . En concreto, demostraremos que unos generadores de $Ann_{gr^L(\mathcal{A})}(\mathcal{A}^p/N)$ lo son de $Ann_{gr^L(\mathcal{D})}(\mathcal{D}^p/N^e)$ en el anillo de las series.

Utilizaremos algunos resultados que son, desde luego, más generales:

Lema 4.3.1.— *Sea $A \subset B$, B plano sobre A . Sea M un A -módulo y N un submódulo de M . Denotemos $L_B = L \otimes_A B$ para un A -módulo L en general. Se tiene que*

$$\frac{M_B}{N_B} = \left(\frac{M}{N}\right)_B = \left(\frac{M}{N}\right) \otimes_A B.$$

DEMOSTRACIÓN: Es evidente de la exactitud de

$$0 \longrightarrow N_B \longrightarrow M_B \longrightarrow \left(\frac{M}{N}\right) \otimes_A B \longrightarrow 0.$$

□

Recordemos (ver [32]) que en la situación $A \subset B$, B plano sobre A , con la notación que estamos usando, se tiene

$$(I_1 \cap I_2)_B = (I_1)_B \cap (I_2)_B.$$

La demostración de este resultado inspira la del siguiente lema.

Lema 4.3.2.— *Sea $A \subset B$, B plano sobre A . Sean N_1, N_2 submódulos de A^p , y sean $(N_1)_B, (N_2)_B$ sus extendidos en B^p . Entonces se tiene*

$$(N_1 \cap N_2)_B = (N_1)_B \cap (N_2)_B.$$

DEMOSTRACIÓN: Desde luego, $(A^p) \otimes_A \simeq (A \otimes_A B)^p \simeq B^p$. Tomando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \longrightarrow A^p \longrightarrow \frac{A^p}{N_1} \oplus \frac{A^p}{N_2} \longrightarrow 0$$

y tensorizando, obtenemos

$$0 \longrightarrow (N_1 \cap N_2)_B \longrightarrow B^p \longrightarrow \frac{B^p}{(N_1)_B} \oplus \frac{B^p}{(N_2)_B} \longrightarrow 0$$

de donde se sigue el resultado. □

El resultado anunciado al principio de esta sección es

Proposición 4.3.3.— Sea $A \subset B$, B plano sobre A . Sean

$$M = \frac{A^p}{N}, \quad M_B = \frac{B^p}{N_B},$$

donde N es un submódulo de A^p generado por $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_s$. Entonces

$$(\text{Ann}_A(M))_B = \text{Ann}_B(M_B).$$

DEMOSTRACIÓN: Partimos de que,

$$\text{Ann}_A(M) = \{a \mid (a, 0, \dots, 0), (0, a, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, a) \in N\},$$

$$\text{Ann}_B(M_B) = \{b \mid (b, 0, \dots, 0), (0, b, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, b) \in N_B\}.$$

En particular, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ con

$$(b, 0, \dots, 0) = \lambda_1 \mathbf{G}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{G}_s,$$

de donde $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ está en el módulo de las sicigias de las componentes k -ésimas de los \mathbf{G}_i , $i = 1, \dots, s$, $k = 2, \dots, p$.

Debido a la planitud, se tendrá para $k = 2$ que

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \sum_{l_2=1}^{L_2} \beta_l(\mu_1^{l_2}, \dots, \mu_s^{l_2}),$$

para unos ciertos $\beta_l \in B$, $l_2 = 1, \dots, L_2$, y unos $(\mu_1^{l_2}, \dots, \mu_s^{l_2}) \in A^s$, que también son sicigias de las segundas componentes para $1 \leq l \leq L_2$. Análogamente, $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ será una combinación con coeficientes en B de sicigias en A entre las componentes k -ésimas para $k = 3, \dots, p$:

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \sum_{l_k=1}^{L_k} \beta_l(\mu_1^{l_k}, \dots, \mu_s^{l_k}), \quad k = 3,$$

Por el lema anterior, $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ se podrá poner como combinación de elementos de B por elementos de la intersección de las sicigias entre las k -ésimas componentes, para $k = 2, \dots, p$, digamos

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \sum_{j=1}^J \delta_j(\alpha_1^j, \dots, \alpha_s^j),$$

Aseguramos entonces que se puede conseguir b extendiendo $\text{Ann}_A(M)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} (b, 0, \dots, 0) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_s \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^J \delta_j \left((\alpha_1^j, \dots, \alpha_s^j), \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_s \end{pmatrix} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^J \delta_j (a_j, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

donde cada $(a_j, 0, \dots, 0)$ está en N , para $1 \leq j \leq J$.

Análogamente se consiguen $(0, b, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, b)$ como combinación de elementos $(0, a_{j_2}^{(2)}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, a_{j_k}^{(p)})$ en N .

Por último, dado que los conjuntos

$$I_k = \{a \in A \mid (0, \dots, \overbrace{a}^k, \dots, 0) \in N\},$$

$$J_k = \{b \in b \mid (0, \dots, \overbrace{b}^k, \dots, 0) \in N^e\},$$

son ideales, por el lema de [32] arriba citado

$$\begin{aligned} \text{Ann}_B(M_B) &= J_1 \cap \dots \cap J_p = \\ &= (I_1)_B \cap \dots \cap (I_p)_B = (I_1 \cap \dots \cap I_p)_B = (\text{Ann}_A(M))_B. \end{aligned}$$

□

Por último (y de manera absolutamente análoga a [2]) se tiene el siguiente resultado que asegura la validez de los cálculos en \mathcal{A} para hallar las pendientes en \mathcal{D} .

Proposición 4.3.4.— *Sea N un submódulo de A^p y sea N' el submódulo \mathcal{D}^N . Sea L una forma lineal. Entonces $\text{gr}^L(N') = \text{gr}^L(\mathcal{D})\text{gr}^L(N)$. Más precisamente, si $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r\}$ es una L -base estándar de N (y por tanto $\{\sigma^L(\mathbf{P}_1), \dots, \sigma^L(\mathbf{P}_r)\}$ generan $\text{gr}^L(N)$), entonces también es una L -base estándar de $\text{gr}^L(N')$.*

DEMOSTRACIÓN: Denotemos $\widehat{N} = gr^L(\mathcal{D})gr^L(N)$. Desde luego, siempre existen los generadores $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^r$ por noetherianidad. Sea $\mathbf{P} \in N'$ escribámoslo

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^r Q_i \mathbf{P}_i + \mathbf{P}',$$

donde $Q_i \in \mathcal{D}$, $\mathbf{P}' \in N'$ y $\text{ord}(\mathbf{P}') < \text{ord}(\mathbf{P})$ o $\mathbf{P}' = 0$.

Sean $d = \max_i \{\text{ord}(Q_i \mathbf{P}_i)\}$, $\delta = \text{ord}(\mathbf{P})$ y $d_i = \text{ord}(\mathbf{P}_i)$ para $1 \leq i \leq r$. Tomaremos d mínimo.

Si $\delta = d$, entonces

$$\sigma(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r \sigma_{d-d_i}(Q_i) \sigma(\mathbf{P}_i),$$

de donde $\sigma(\mathbf{P})$ es un elemento de \widehat{N} ³. Si $\delta < d$ hemos obtenido una relación $0 = \sum_{i=1}^r \sigma_{d-d_i}(Q_i) \sigma(\mathbf{P}_i)$. Debido a la planitud de $gr^L(\mathcal{D})$ sobre $gr^L(\mathcal{A})$, se podrá escribir

$$(\sigma_{d-d_1}(Q_1), \dots, \sigma_{d-d_r}(Q_r)) = \sum_{j=1}^m \Lambda_j \mathbf{F}_j,$$

donde cada $\mathbf{F}_j = (F_{j,1}, \dots, F_{j,r})$ es una relación, en $gr^L(\mathcal{A})$ de los $\sigma(\mathbf{P}_i)$, y donde los Λ_j son elementos de $gr^L(\mathcal{D})$.

Si denotamos $\overline{\Lambda}_j, \overline{\mathbf{F}}_j$ unas preimágenes (en \mathcal{D} y $A_n(\mathbf{K})^p$ respectivamente) de los Λ_j, \mathbf{F}_j , $1 \leq j \leq m$, y tomamos un elemento

$$\mathbf{G}_j = \sum_{i=1}^r \overline{\mathbf{F}}_{j,i} \mathbf{P}_i \in N,$$

por construcción $\text{ord}(\mathbf{G}_j) < d - \text{ord}(\Lambda_j)$. Dado que los símbolos de los \mathbf{P}_i generan $gr^L(N)$ podremos escribir

$$\mathbf{G}_j = \sum_{i=1}^r \overline{\mathbf{F}}_{j,i} \mathbf{P}_i = \sum_{l=1}^r R_{j,l} \mathbf{P}_l + \mathbf{G}'_j,$$

donde los $R_{j,l}$ están en \mathcal{A} , $\mathbf{G}'_j \in N$ y sus respectivos órdenes verifican $\text{ord}(R_{j,l}) < d - d_l - \text{ord}(\Lambda_j)$, $\text{ord}(\mathbf{G}'_j) < \delta - \text{ord}(\Lambda_j)$. Pero entonces

³Recordemos que $\sigma_{d-d_i}(Q_i) = \sigma(Q_i)$ si $\text{ord}(Q_i) = d - d_i$ ó $\sigma(Q_i) = 0$ en caso contrario.

$\mathbf{G}'_j = \sum_{i=1}^r (\bar{F}_{j,i} - R_{j,i})\mathbf{P}_i$ y

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \sum_{j=1}^m \bar{\Lambda}_j \mathbf{G}'_j + \sum_{i=1}^r \left(Q_i - \sum_{j=1}^m \bar{\Lambda}_j (\bar{F}_{j,i} - R_{j,i}) \right) \mathbf{P}_i.$$

Si denotamos $Q'_i = Q_i - \sum_{j=1}^m \bar{\Lambda}_j (\bar{F}_{j,i} - R_{j,i})$, hemos obtenido una nueva expresión de \mathbf{P} con $\max_i \{\text{ord}(Q'_i \mathbf{P}_i)\}$ estrictamente menor que d , lo cual contradice la elección de d . \square

Para acabar esta sección, recopilamos los resultados necesarios para asegurar que unos generadores del radical de un ideal $I = \langle P_1, \dots, P_r \rangle$, $I \subset \mathbf{C}[X]$, son también generadores de $\sqrt{I^e} \subset \mathbf{C}\{X\}$

Proposición 4.3.5.— *Dado I ideal de $\mathbf{C}[X]$ y I^e el ideal extendido correspondiente en $\mathbf{C}\{X\}$. Se tiene que*

$$(\sqrt{I})^e = \sqrt{I^e}.$$

DEMOSTRACIÓN:

- Podemos suponer que I es radical. En efecto, dado un ideal cualquiera J , si $\sqrt{J} = H$ y H cumple que $\sqrt{H^e} = H^e$. Entonces

$$\sqrt{J^e} \subset \sqrt{(\sqrt{J})^e} = (\sqrt{J})^e,$$

y siempre $(\sqrt{J})^e \subset \sqrt{J^e}$.

- Por la relación entre la descomposición primaria de un ideal en $\mathbf{C}[X]$ y su extendido en el localizado $\mathbf{C}[X]_{(X)}$ (ver [39], 7.13, por ejemplo) se sigue que $I \subset \mathbf{C}[X]$ radical $\implies I^e \subset \mathbf{C}[X]_{(X)}$ radical.
- Por un resultado de [43] que, si I es un ideal radical de $\mathbf{C}[X]_{(X)}$, se tiene que $\sqrt{(I^e)} = I^e$ en $\mathbf{C}\{X\}$.

Capítulo 5

Cálculos explícitos.

5.1 Cálculo de una base de $\text{Der}(\log f)$ para las curvas de Reiffen.

En [42] se puede encontrar el método que usamos para calcular la base de $\text{Der}(\log f)$. En el caso de la curva de Reiffen partimos de los polinomios

- $f = x^q + xy^{p-1} + y^p$, con $p \geq q + 1 \geq 5$
- $f_x = qx^{q-1} + y^{p-1}$
- $f_y = (p-1)xy^{p-2} + py^{p-1}$.

Utilizaremos el orden diagonal (ver 5.9) con $y > x$ para calcular la base estándar del ideal generado por f, f_x y f_y :

1. La semisicigia $S(f, f_x)$ produce la división

$$S(f, f_x) = x \cdot f_x = q \cdot f - \frac{1-q}{p-1}y \cdot f_y + r$$

donde

$$r = \frac{q-p}{p-1}y^p$$

es un resto no nulo que aporta un nuevo elemento a la base. Denotaremos por g a dicho resto.

2. Todas las demás semisicigias producen divisiones con resto nulo y, por tanto, una base del ideal es $\{f, f_x, f_y, g\}$.

La relación matricial (llamaremos T a la matriz) obtenida entre generadores y base es

$$\begin{pmatrix} f \\ f_x \\ f_y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -q & x & \frac{q-1}{p-1}y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

3. No describiremos todas las relaciones entre los elementos de la base. Para obtener la base de los operadores logarítmicos bastará con dar los elementos

$$s_1 = \left(0, 0, \frac{p-q}{(p-1)^2}y^2, x + \frac{p}{p+1}y\right)$$

$$s_2 = \left(0, \frac{1-p}{q}y^{p-2}, \sum_{i=0}^{q-2} (-1)^i \left(\frac{p}{p-1}\right)^i y^i x^{q-2-i}, \alpha y^{q-3} + \beta y^{p-3}\right)$$

donde

$$\alpha = (-1)^{q-2} \frac{p^{q-1}}{(p-1)^{q-3}(q-p)}, \quad \beta = \frac{(p-1)^2}{q(q-p)}$$

Estos dos elementos pertenecen a la base de las sicigias de f, f_x, f_y y g . Al multiplicar por la matriz T se consiguen dos sicigias entre los generadores que sirven para nuestro objetivo:

$$\begin{aligned} s'_1 &= s_1 \cdot T = (s'_{11}, s'_{12}, s'_{13}) \\ &= \left(-qx - \frac{pq}{p-1}yx, x^2 + \frac{p}{p-1}yx, \frac{q}{p-1}y^2 + \left(\frac{q-1}{p-1}\right)yx\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s'_2 &= s_2 \cdot T = (s'_{21}, s'_{22}, s'_{23}) = \\ &= \left(\alpha y^{q-3} + \beta y^{p-3}, \frac{1-p}{q}y^{p-2} + \alpha y^{q-3}x + \beta y^{p-3}x, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=0}^{q-2} (-1)^i \left(\frac{p}{p-1}\right)^i y^i x^{q-2-i} + \alpha \left(\frac{q-2}{p-1}\right) y^{q-2} + \beta \left(\frac{q-1}{p-1}\right) y^{p-2}\right) \end{aligned}$$

4. Formando el determinante 2×2 con las dos últimas componentes de s'_1 y s'_2 se comprueba que estas dos sicigias sirven para obtener una base de $\text{Der}(\log f)$ pues

$$\begin{vmatrix} s'_{12} & s'_{13} \\ s'_{22} & s'_{23} \end{vmatrix} = -f.$$

5.2 Cálculo indirecto de la dimensión de grupos *Ext*.

Aplicamos el método de la sección 2.3.3 para medir la dimensión de algunos grupos *Ext*.

Ejemplo 5.2.1.— En esta sección se hace el cálculo que hemos explicado para la curva $f = 0$ (ver [21]) con

$$f = y^4 + x^6 + 2y^2x^3 + yx^5.$$

Obtendremos primero la aproximación al $\text{Ann}(1/f)$ con una base de los operadores logarítmicos. Con el método usual, usando el orden $<_B$ con $y > x$ (ver 5.9) se obtienen dos sicigias de f, f_x, f_y que proporcionan los dos elementos del anulador:

$$\Delta_1 = 6x^3 + 32xy\partial_x + 10x^2y\partial_y + 4x^3\partial_y + 52y^2\partial_y + 40x^2 + 208y$$

$$\Delta_2 = 6x^4\partial_x + \frac{4}{5}x^2y\partial_x - \frac{416}{25}x^3\partial_x - \frac{104}{25}y^3\partial_x + \frac{4992}{25}xy\partial_x + 10x^3y\partial_y + 4x^4\partial_y - \frac{312}{25}x^2y\partial_y + \frac{624}{25}x^3\partial_y + \frac{8112}{25}y^2\partial_y + 40x^3 - \frac{1872}{25}x^2 + \frac{32448}{25}y$$

Se puede saber si tenemos o no el anulador calculando una resolución de $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\Delta_1, \Delta_2)$. El módulo $Syz(\Delta_1, \Delta_2)$ resulta ser libre y

generado por el elemento $s = (s_1, s_2)$:

$$\begin{aligned}
 s_1 = & -\frac{156}{25}yx\partial_x + \frac{13}{100}y^2\partial_x - \frac{507}{50}y^2\partial_y + \frac{13}{25}x^3\partial_x - \\
 & -\frac{39}{50}x^3\partial_y - \frac{1}{40}yx^2\partial_x + \frac{39}{100}yx^2\partial_y - \frac{3}{16}x^4\partial_x - \\
 & -\frac{1}{8}x^4\partial_y - \frac{5}{16}yx^3\partial_y - \frac{663}{25}y + \frac{39}{20}x^2 \\
 & -\frac{1}{20}yx + \frac{17}{16}x^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_2 = & yx\partial_x + \frac{13}{8}y^2\partial_y + \frac{3}{16}x^3\partial_x + \frac{1}{8}x^3\partial_y + \frac{5}{16}yx^2\partial_y + \\
 & + \frac{17}{4}y + \frac{7}{4}x^2
 \end{aligned}$$

La resolución libre obtenida es completamente análoga a la que detallamos en el estudio de las curvas casi homogéneas. Para ver si $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(M, \mathcal{O}) = 0$ basta de nuevo con ver si, dada cualquier $\varphi \in \mathcal{O}$, existen $(h, g) \in \mathcal{O}^2$ tales que

$$s \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \varphi.$$

Sólo observando las componentes de s se deduce que, por ejemplo, cualquier $\varphi = \alpha + \beta x$ no puede obtenerse si $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$. Esto además implica que 1 y x son elementos linealmente independientes y que $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Ext}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})) \geq 2$.

Para calcular exactamente la dimensión, calculamos la variedad característica de M . Calculamos una base estándar (orden diagonal (ver 5.9) con $y > x$) del ideal generado por $\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Hay que añadir tres

elementos más, P_3, P_4, P_5 , cuyos símbolos son

$$\begin{aligned}\sigma(P_3) = & -104/25y^2\xi - 1352/25x^3\xi - 1872/25yx^2\eta - 13/10y^2x\eta + \\ & + 117/20x^4\xi + 39/10x^4\partial_y + 39/4yx^3\eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(P_4) = & 169/25y^3\eta - 1352/35x^4\xi - 1859/25yx^3\eta - 507/400y^2x^2\eta + \\ & + 4563/800x^5\xi + 1521/400x^5\eta + 1521/160yx^4\eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(P_5) = & -1352/25x^4\xi^2 + 3549/25y^2x^2\eta^2 + 4563/800x^5\xi^2 + \\ & + 169/5x^5\eta\xi + 507/25x^5\eta^2 + 11323/200yx^4\eta^2 - \\ & - 9633y^2x^3\eta^2 - 4563/1280x^6\eta\xi - 1512x^6\eta^2 - \\ & - 1521/256yx^5\eta^2\end{aligned}$$

Si utilizamos por último un orden $<_B$ (ver 5.9) con $x > y > \xi > \eta$, los exponentes de los polinomios que forman una base del ideal generado por $\{\sigma(\Delta_1), \sigma(\Delta_2), \sigma(P_3), \sigma(P_4), \sigma(P_5)\}$ son

$$(2, 1, 0, 1)$$

$$(1, 2, 0, 1)$$

$$(4, 0, 0, 1)$$

$$(4, 1, 1, 0)$$

$$(0, 4, 0, 2)$$

Se puede encontrar un 0 en cualquier coordenada de los exponentes. Pero no se encuentra ninguno con, por ejemplo, la primera y segunda coordenadas iguales a cero. De aquí, la dimensión de la variedad característica es $4-2 = 2$.

Hemos seguido el método explicado en [14] para el cálculo de la dimensión.

Ejemplo 5.2.2.— La curva estudiada más arriba es un caso particular de la familia que aparece en [21]

$$f = (y^2 + x^q)^2 + x^k y = y^4 + x^{2q} + 2y^2 x^q + x^k y$$

con $k \geq 5$, $q \geq 3$ (e impar) y $3q < 2k$). Utilizando los siguientes elementos de $Syz(f, f_x, f_y)$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \left(-4y - \frac{2k}{2k+q}x^{k-q}, \frac{8}{2k+q}yx + \frac{3}{4k+2q}x^{k-q+1}, \right. \\ &\quad \left. y^2 + \frac{k}{4k+2q}yx^{k-q} + \frac{2k-3q}{2k+q}x^q \right), \\ \mathbf{s}_2 &= \left(\frac{4k^2}{q(2k-3q)}yx^{k-q-1} + \frac{8k+4q}{2k-3q}x^{q-1}, -\frac{2}{q}y^2 - \frac{3k}{q(2k-3q)}yx^{k-q}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{k^2}{q(2k-3q)}y^2x^{k-q-1} - \frac{4q}{2k-3q}yx^{q-1} \right) \end{aligned}$$

De estos elementos se obtiene una base de $\text{Der}(\log f)$ pues

$$\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix} = \frac{2}{q}f.$$

Y unos generadores del ideal $I^{\log} \subset \text{Ann}(1/f)$ son

- $\Delta_1 = s_{12}\partial_x + s_{13}\partial_y - s_{11}$
- $\Delta_2 = s_{22}\partial_x + s_{23}\partial_y - s_{21}$.

En el caso general, se tiene que los exponentes de una base para calcular la multiplicidad de f en el cero son:

$$(3, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, q+1, 0, 2), (2, 0, 0, 1).$$

de donde se deduce que la multiplicidad es

$$q+7 = (q+2) + 4 + 1$$

de los conjuntos sigma $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{3, 4\}$ que se corresponden a los lugares que en los exponentes de la base nunca son cero a la vez (otra vez usamos el método de [14] para el cálculo de la dimensión).

5.3 Ejemplo de comparación logarítmica en superficies.

Ilustramos en esta sección un ejemplo en dimensión 3 de la situación que presenta el teorema 2.2 para curvas. Es el mismo ejemplo que

aparece en [13]; aquí lo estudiamos desde un punto de vista efectivo. Su interés está en que la superficie no es localmente casi homogénea.

Consideremos la superficie (recordemos que de [10]) de ecuación $h = 0$ con

$$h = xy(x + y)(xz + y),$$

Una base de $\text{Der}(\log h)$ está formada por

- $\delta_1 = x\partial_x + y\partial_y,$
- $\delta_2 = xz\partial_z + y\partial_z,$
- $\delta_3 = x^2\partial_x - y^2\partial_y - xz\partial_z - yz\partial_z,$

donde

$$\delta_1(h) = 4h, \quad \delta_2(h) = xh, \quad \delta_3(h) = (2x - 3y)h.$$

Un múltiplo de la b -función en \mathcal{D} de h es

$$b(s) = (4s + 5)(2s + 1)(4s + 3)(s + 1)^3,$$

polinomio sin raíces enteras menores que -1 . Entonces podemos asegurar que

$$\mathcal{O}[*h] \simeq \mathcal{D} \frac{1}{h}.$$

En este caso coincide $\text{Ann}_{\mathcal{D}}(1/f)$ con $I^{\tilde{\log}}$. Los cálculos de la b -función y del anulador de f^s se han realizado siguiendo los algoritmos de [37], implementados en [44].

Calculamos una resolución libre del módulo \mathcal{D}/I^{\log} donde $I^{\log} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Del cálculo de $[\delta_i, \delta_j]$ con $i \neq j$ se deducen unos elementos de $\text{Syz}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ que resultan ser generadores.

- $[\delta_1, \delta_2] = \delta_2,$
- $[\delta_1, \delta_3] = \delta_3,$
- $[\delta_2, \delta_3] = -x\delta_2.$

Podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \text{Syz}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \\ &= (-\delta_2, \delta_1 - 1, 0), (-\delta_3, 0, \delta_1 - 1), (0, -\delta_3 + x, \delta_2, 0), \end{aligned}$$

Las sicigias del módulo anterior se generan con un sólo elemento $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$:

- $s_1 = -y^2\partial_y + x^2\partial_x - zy\partial_z - xz\partial_z - x,$
- $s_2 = -y\partial_z - xz\partial_z,$
- $s_3 = y\partial_y + x\partial_x - 2.$

Nos basta calcular s_1^t, s_2^t, s_3^t ¹ y comprobar que generan $I^{\tilde{\log}}$. De aquí

$$(\mathcal{D}/\text{Der}(\log(f)))^* \simeq \mathcal{D}/I^{\tilde{\log}}.$$

Nota 5.3.1.— El generador de las segundas sicigias es

$$\begin{aligned} &(-xy\partial_y + xy\partial_x - xz\partial_z + zxy\partial_y + zx^2\partial_x + z^2x\partial_x + y - 2x + 5xz, \\ &\quad -y\partial_z - xz\partial_z - x, y\partial_y + x\partial_x + 2) \end{aligned}$$

y tiene una última componente que hace muy sencilla la resolución de la ecuación que permite calcular el grupo $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^3(\mathcal{D}/\text{Der}(\log(f)), \mathcal{O})$. Es sencillo ver que es 0 usando la misma estrategia que se usó en la prueba de 2.1.7.

¹Las reglas para calcular P^t son (ver [38])

- $f^t = f$ si $f \in \mathcal{O}$.
- $(PQ)^t = Q^t P^t$.
- $\partial_i^t = -\partial_i$.

5.4 Pendientes de $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{ Der}(\log f)$ en el caso de la curva de Reiffen.

Aplicamos los resultados anteriores para obtener las pendientes de un módulo \mathcal{D}/I . Es importante señalar que en algunos casos como éste no es necesario aplicar tal cual el algoritmo propuesto en [2] para demostrar que no hay pendientes.

Trabajaremos con las derivaciones logarítmicas en el caso de la curva de Reiffen

$$f = x^q + xy^{p-1} + y^p$$

con $p \geq q+1 \geq 5$. Ya obtuvimos una base δ_1, δ_2 de dichas derivaciones en 5.1.

5.4.1 Un primer ejemplo: $q = 4, p = 5$.

Calculemos las posibles pendientes con $q = 4, p = 5$ y respecto a $y = 0$. Partimos en este caso del ideal I de generadores

$$\delta_1 = x^2\partial_y - \frac{5}{4}yx\partial_y + 25y^2\partial_y + \frac{125}{4}yx\partial_x - 3y^3\partial_y - 4y^2x\partial_x - y^3\partial_x$$

$$\delta_2 = -3yx\partial_y - 4x^2\partial_x - 4y^2\partial_y - 5yx\partial_x.$$

Usaremos un orden que mire primero el orden F , y luego el orden V , con $y > x^2$. Obtenemos una F -base estándar (cuyos símbolos F son

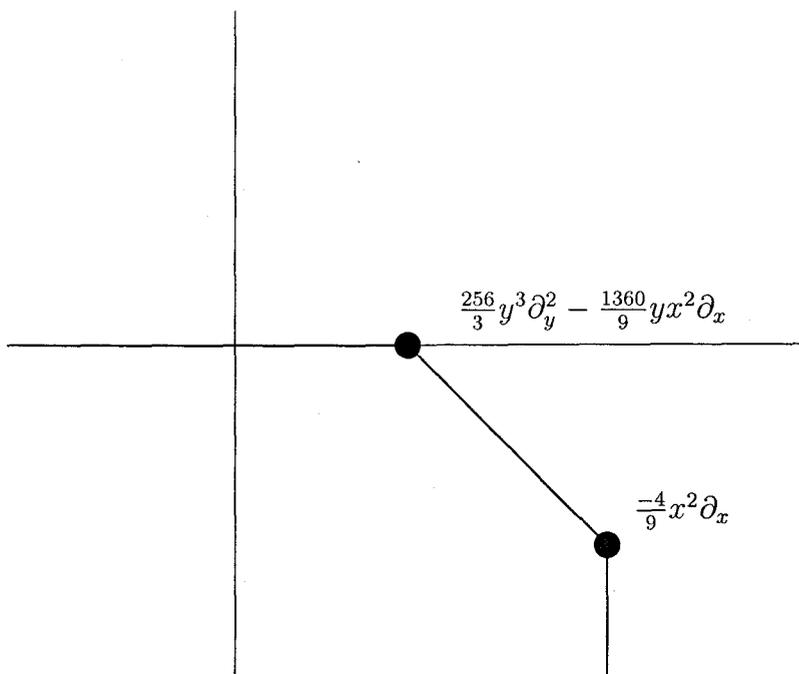
²Es interesante señalar que, después de F y V , primamos el monomio con más ∂_y . En este ejemplo este orden acelera notablemente el cálculo.

una V -base de $gr^F(I)$ añadiendo

$$\delta_3 = -4x^3\partial_x + \frac{16}{3}yx^2\partial_x + \frac{256}{3}y^3\partial_y + \frac{320}{3}y^2x\partial_x - 9y^4\partial_y\partial_x + \frac{112}{3}y^3x\partial_x^2 + \frac{1}{3}y^4\partial_x^2$$

$$\begin{aligned} \delta_4 = & \frac{256}{3}y^3\partial_y^2 - \frac{1360}{9}yx^2\partial_x^2 - 9y^4\partial_y^2 \\ & - \frac{2560}{9}y^3\partial_y\partial_x + 16y^2x^2\partial_x^2 - \frac{3200}{9}y^2x\partial_x^2 \\ & + 30y^4\partial_y\partial_x + \frac{112}{3}y^3x\partial_x^2 + \frac{1}{3}y^4\partial_x^2 \\ & - \frac{4}{9}x^2\partial_x - \frac{1408}{9}y^2\partial_y - \frac{4240}{9}yx\partial_x + 12y^2\partial_y \\ & + 44y^2x\partial_x - \frac{3200}{9}y^2\partial_x + \frac{112}{3}y^3\partial_x. \end{aligned}$$

Los polígonos de Newton de δ_1, δ_2 y δ_3 son cuadrantes y por tanto no producen posibles pendientes. El de δ_4 es



que produce la posible pendiente -1 .

Sin embargo, llamando L a la posible pendiente, se observa que

$$gr^L(I) =$$

5.4. Pendientes de $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{ Der}(\log f)$ en el caso de la curva de Reiffen.93

$$\langle x^2\eta, 3yx\eta + 4x^2\xi, x^3\xi, \frac{256}{3}y^3\eta^2 - \frac{1360}{9}yx^2\xi^2 - \frac{4}{9}x^2\xi \rangle$$

de donde

$$\sqrt{\text{gr}^L(I)} \supset \{x\eta, x\xi, y\eta\}$$

y por tanto su variedad característica esta incluida en 4 planos en dimensión: por tanto es bihomogénea.

L sí es una pendiente idealística: $\text{gr}^L(I)$ no es bihomogéneo. Esto es porque $x^2\xi \notin \text{gr}^L(I)$ siendo una componente homogénea.

Esta situación se repite para casos concretos de p y q mayores: no aparecen pendientes geométricas. Demostramos este hecho para cualquier p y q .

5.4.2 El caso general

La idea es la siguiente: conseguir elementos en I tales que sus símbolos L para cualquier forma lineal L nos permitan –como en el ejemplo– asegurar que $x\eta, x\xi$ e $y\eta$ están en $\sqrt{\text{gr}^L(I)}$ y que por tanto, con el mismo argumento que el utilizado en el ejemplo, no hay pendientes.

Tan sólo será necesario utilizar de partida dos elementos que se sabe que están en $\text{gr}^F(I)$, siendo $I = \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$, en concreto

- $E = yx\eta + \left(\frac{p-1}{q-1}\right)x^2\xi + \left(\frac{q}{q-1}y^2\eta\right) + \left(\frac{p}{q-1}yx\xi\right),$
- $E' = x^q\eta + y^{p-1}x\eta + y^p\eta.$

El primero es el F -símbolo de δ_2 . El segundo es el F -símbolo del operador $x^q\partial_y + y^{p-1}x\partial_y + y^p\partial_y$ que está en $\text{Der}(\log f)$ porque aplicado a f da un múltiplo de f . Obtendremos una sucesión de elementos en $\text{gr}^F(I)$ que contendrá con seguridad un elemento G tal que $\sigma^V(G) = y^a\eta^b$ para algún par de valores a, b enteros mayores que cero.

Usaremos un orden que primero mira el grado en V y después el orden en y . La idea es obtener un nuevo elemento que, a diferencia de E' tenga en su primer monomio menos exponente en x y más en y .

Lema 5.4.1.— *En el ideal generado por E y E' , existe un elemento cuyo monomio líder es $x^r y^s \xi^2$ con $r + s = q + 1$ y $s > 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Mostraremos una sucesión que produce el resultado. Calculamos primera la semisicigia entre E y E' , obtenemos

$$S(E', E) = yE' - x^{q-1}E = \\ - \left(\frac{p-1}{q-1} \right) x^{q+1}\xi - \left(\frac{q}{q-1} \right) y^2 x^{q-1}\eta - \left(\frac{p}{q-1} \right) yx^q\xi + y^p x\eta + y^{p+1}\eta$$

Si a este elemento le sumamos $\frac{q}{q-1}yx^{q-2}S$ se obtiene

$$- \left(\frac{p-1}{q-1} \right) x^{q+1}\xi + \left(\frac{p-q}{(q-1)^2} \right) yx^q\xi + \\ + \left(\frac{q^2}{(q-1)^2} \right) y^3 x^{q-2}\eta + \left(\frac{pq}{(q-1)^2} \right) y^2 x^{q-1}\xi + y^p x\eta + y^{p+1}\eta.$$

Teniendo en cuenta que todos los monomios que contienen $yx\eta$ se pueden reducir por E , y que cada reducción hace aparecer un nuevo monomio de este tipo (salvo cuando x está ya elevado a 1), obtenemos

$$E_0 = S(E', E) + \left(\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+1} \left(\frac{q}{q-1} \right)^i y^i x^{q-i+1} \right) E = \\ = - \left(\frac{p-1}{q-1} \right) x^{q+1}\xi + \\ + \left(\sum_{i=2}^q (-1)^i \left(\frac{q^{i-2}(p-q)}{(q-1)^i} \right) y^{i-1} x^{q-i+2}\xi \right) + \\ + (-1)^q \left(\frac{q^{q-1}}{(q-1)^q} \right) y^{q+1}\eta + \\ + (-1)^q \left(\frac{q^{q-1}p}{(q-1)^q} \right) y^q x\xi + \\ + y^p x\eta + y^{p+1}\eta$$

(convertimos en mónico a E_0 para simplificar ligeramente la notación).

5.4. Pendientes de $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{ Der}(\log f)$ en el caso de la curva de Reiffen.95

El siguiente elemento de la sucesión se consigue con $S(E_0, E) = y\eta E_0 - x^q \xi E$, que escribiremos

$$(E_0, E) = y\eta E_0 - x^q \xi E = -x^{q+2} \xi^2 + \sum_{i=2}^q f_i^{(1)} y^i x^{q-i+2} \xi \eta + y^{q+2} \eta^2 + \dots$$

Reduciremos este elemento primero con $x\xi S_0$, otra vez con E y después (cuando el líder es, salvo constante, $yx^{q+1}\xi^2$) con ξS_0 . Ya no podemos seguir reduciendo con E_0 .

A partir de ahora reducimos todos los exponentes que contengan $yx\eta$ con E . En concreto, y con unas constantes adecuadas, se sumará $(a_1^{(1)}yx^{q-1}\xi + \dots + a_{q-1}^{(1)}y^{q-1}x\xi)E$. Dado que cada monomio anterior por E produce monomios que ya teníamos, eventualmente pueden anularse algunos coeficientes. Pero con toda seguridad se obtiene un elemento E_2 cuyo monomio líder es $x^r y^s \xi^2$ con $r + s = q + 1$ y $s > 1$ (en la situación más extrema el monomio $x^2 y^q \xi^2$ seguro que no se anula). \square Cada vez que obtengamos un nuevo E_i

$$E_i = x^{s_i} y^{r_i} \eta^{t_i} + \dots + y^{r_i + s_i} \eta^{t_i} + \dots$$

repetiremos los pasos anteriores: calcularemos $S(E_i, E)$ y la reduciremos con E y con los E_j anteriores hasta llegar a un monomio líder $x^{s_{i+1}} y^{r_{i+1}} \eta^{t_i}$ con $s_{i+1} < s_i$ y $r_{i+1} > r_i$. Esto último está asegurado por poder utilizar los E_j y el propio E_i para reducir.

Lema 5.4.2.— *Dados los elementos*

$$\begin{aligned} E_1 &= yx\eta + a_1 x^2 \xi + a_2 y^2 \eta + a_3 yx\xi \\ \tilde{E} &= y^s x^r \xi^t + \sum_{i=1}^{r-1} b_i y^{s+i} x^{r-i} \xi^t + b_{r+s} y^{s+r} \eta^t + \tilde{E}' \end{aligned}$$

(donde F' tiene ord_V menor que los exponentes que aparecen en \tilde{E} y $t \geq 1$), si $E \in \text{gr}^F(I)$, entonces podemos asegurar que en $\langle E_1, \tilde{E} \rangle$ hay un elemento G que cumple alguna de las condiciones siguientes:

1. Su monomio líder es, salvo constante, $y^{r+s+1} \eta^t$.

$$2. G = y^{s'} x^{r'} \eta^{t+1} + \sum_{i=1}^{r'-1} b'_i y^{s'+i} x^{r'-i} \xi^{t+1} + b'_{r'+s'} y^{s'+r'} \eta^{t+1} + G'$$

(donde G' tiene ord_V menor que los exponentes que aparecen en G), con $s' > s$ y $r' < r$.

DEMOSTRACIÓN: Desde luego, en $\langle E_1, \tilde{E} \rangle$ tenemos el elemento

$$\begin{aligned} y\eta\tilde{E} - y^s x^{r-1} \xi^t E_1 = \\ -a_1 x^{r+1} y^s \xi^{t+1} - a_2 x^{r-1} y^{s+2} \eta \xi^t - a_3 y^{s+1} x^r \xi^{t+1} + \\ + \sum_{i=1}^{r-1} b_i y^{s+i+1} x^{r-i} \eta \xi^t + b_{r+s} y^{s+r+1} \eta^{t+1} + \dots \end{aligned}$$

donde el monomio líder es $-a_1 x^{r+1} y^s \xi^{t+1}$, de grado $-s$ en V . Eventualmente, ha podido anularse el coeficiente del monomio $x^{r-1} y^{s+2} \eta \xi^t$.

A este elemento le aplicaremos las siguientes transformaciones:

- Haremos desaparecer, reduciendo sucesivamente con E_1 , todos los monomios divisibles por $yx\eta$.
- Haremos desaparecer los monomios reducibles con \tilde{E} .

En general no distinguiremos si los coeficientes que van apareciendo son nulos o no: esto producirá que a veces una reducción sea en realidad sumar cero. En concreto, empezamos reduciendo con \tilde{E} , sumando $a_1 x \xi \tilde{E}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} (b_1 - a_2) x^{r-1} y^{s+2} \eta \xi^t + (a_1 b_1 - a_3) y^{s+1} x^r \xi^{t+1} + \\ + \sum_{i=2}^{r-1} b_i y^{s+i+1} x^{r-i} \eta \xi^t + a_1 \sum_{i=2}^{r-1} b_i y^{s+i} x^{r-i+1} \xi^{t+1} \\ + b_{r+s} y^{s+r+1} \eta^{t+1} + \dots \end{aligned}$$

Sumamos ahora $-(b_1 - a_2) y^{s+1} x^{r-2} \xi^t E_1$. El monomio líder es ahora (si no es cero su coeficiente) $y^{s+1} x^r \xi^{t+1}$. Si es necesario, reducimos con \tilde{E} por última vez.

Nos queda un elemento de la forma

$$\sum_{i=2}^{r-1} c_i(y^{s+i+1}x^{r-i}\xi^t\eta) + d_i(y^{s+i}x^{r-i+1}\xi^{t+1}) + \\ + b_{r+s}y^{r+s+1}\eta^{t+1} + \dots$$

Si $t - r - s > -s - 2$ ya hemos terminado. El monomio líder es el último que hemos escrito en la expresión anterior.

Si no es así, hemos de tener en cuenta que cada vez que hagamos una reducción de un monomio $y^\delta x^\epsilon \eta \xi^t$ (uno de los primeros elementos de cada sumando para un cierto i) obtenemos tres monomios que afectan al otro elemento para el mismo i y a los dos para el sumando $i + 1$. Puede ocurrir:

- Si en algún paso el segundo sumando no se anula hemos terminado también: el resto de las operaciones ya no le afectarán y tenemos un monomio líder $y^{s'}x^{r'}\xi^{t+1}$ con $s' > s, r' > r$.
- Que ya sólo nos queden monomios con grado V menor que $t - r - s$. El líder vuelve a ser $b_{r+s}y^{r+s+1}\eta^{t+1}$.

Si al llegar a la última reducción posible con E_1 aún no hemos terminado es porque todo se ha ido anulando antes. En este caso la reducción producirá monomios $y^{s+r}\xi^{t+1}, y^{r+s+2}\eta\xi^t, y^{r+s+1}x\xi^{t+1}$ todos con seguridad de grado V menor que $b_{r+s}y^{r+s+1}\eta^{t+1}$. \square

5.5 Pendientes de $\mathcal{O}[1/f]/\mathcal{O}$.

En [37] se da un método para presentar $\mathcal{O}[\frac{1}{f}]/\mathcal{O}$ como un módulo del tipo \mathcal{D}^p/N .

Dada la superficie $f = 0$ con $f = x^n + y^n + z^n$, si -2 es un cero de la b -función³, unos generadores de N serían

- $\mathbf{P}_1 = (x^n + y^n + z^n, 0)$,

³Atención: Esta condición no es cierta para todo n .

- $P_2 = (-1, x^n + y^n + z^n),$
- $P_3 = (\partial_x, nx^{n-1}),$
- $P_4 = (\partial_y, ny^{n-1}),$
- $P_5 = (\partial_z, nz^{n-1}),$
- $P_6 = (x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + n, 0),$
- $P_7 = (0, x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + 2n),$
- $P_8 = (x^{n-1}\partial_y - y^{n-1}\partial_x, 0),$
- $P_9 = (0, x^{n-1}\partial_y - y^{n-1}\partial_x),$
- $P_{10} = (x^{n-1}\partial_z - z^{n-1}\partial_x, 0),$
- $P_{11} = (0, x^{n-1}\partial_z - z^{n-1}\partial_x),$
- $P_{12} = (y^{n-1}\partial_z - z^{n-1}\partial_y, 0),$
- $P_{13} = (0, y^{n-1}\partial_z - z^{n-1}\partial_y).$

Una base estándar de N con respecto al orden $<_{FV,inv}$ (ver 5.9) está formada precisamente por los 13 elementos anteriores. Como todas las componentes tienen cuadrantes como polígonos de Newton, obtenemos de manera elemental que $\mathcal{O}[\frac{1}{T}]/\mathcal{O}$ no tiene pendientes.

Además, por simetría se tiene también que no hay pendientes respecto de $y = 0$ y respecto de $z = 0$.

5.6 Pendientes en algunos módulos de sicigias (I).

Trabajaremos con el ideal I generado por los operadores⁴

⁴Ver [15] para una motivación de este ejemplo.

- $P_1 = 2x^n y \partial_x + x^n \partial_y + 1$
- $P_2 = y^2 - x$
- $P_3 = 2x^{n+1} \partial_x + x^n y \partial_y + y + 2x^n$.

que son una F -base estándar cuyos F -símbolos generan una V -base estándar de $gr^F(I)$ (respecto de $x = 0$)⁵. A partir de las semisicigias

$$S(P_1, P_2) = yP_1 - (2x^n \partial_x)P_2 = P_3$$

$$S(P_1, P_3) = xP_1 - yP_3 = (-x^n \partial_y + 1)P_2$$

$$S(P_2, P_3) = (-2x^{n+1} \partial_x)P_2 + y^2 P_3 = (x^n y \partial_y + y)P_2 + xP_3$$

obtenemos directamente los generadores s_1, s_2, s_3 de $Syz(P_1, P_2, P_3)$:

$$s_1 = (y, -2x^n \partial_x, -1)$$

$$s_2 = (x, x^n \partial_y + 1, -y)$$

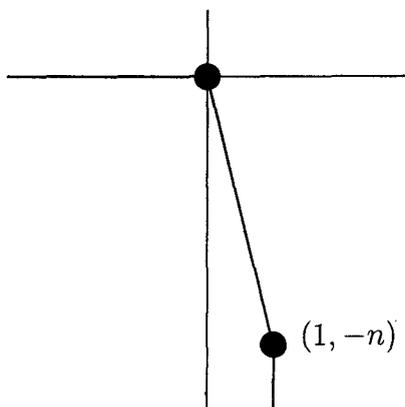
$$s_3 = (0, -2x^{n+1} \partial_x - x^n y \partial_y - y, y^2 - x).$$

Si consideramos un orden que primero mira F y luego V , una base del módulo anterior necesita un nuevo elemento para constituir una FV -base:

$$s_4 = (x \partial_x + \frac{1}{2} y \partial_y + \frac{3}{2}, nx^{n-1} \partial_y + \partial_x, -y \partial_x - \frac{1}{2} \partial_y)$$

(con $s_4 = \frac{1}{2} \partial_y s_1 + \partial_x s_2$). De todas las componentes de los generadores hay polígonos de Newton que aportan una posible pendiente $-n$ en s_2 y s_3 .

⁵Se utilizó un orden que mira primero F y después V con $\partial_x > \partial_y > y > x$



Es fácil comprobar que los símbolos de estos cuatro elementos forman una L -base estándar⁶ para dicha $L = -n$. Por tanto, sus símbolos generan $gr^L(N)$.

Los calculamos evaluando la forma lineal $L = nF + V$ en cada monomio y tomando en cada elemento todos los monomios de todas las componentes que tengan L -orden igual a ese máximo.

$$\sigma^L(\mathbf{s}_1) = (0, -2x^n\xi, 0)$$

$$\sigma^L(\mathbf{s}_2) = (0, x^n\eta + 1, -y)$$

$$\sigma^L(\mathbf{s}_3) = (0, -2x^{n+1}\xi - x^n y\eta - y, y^2)$$

$$\sigma^L(\mathbf{s}_4) = (0, \xi, -y\xi)$$

El cálculo del anulador se facilita en este caso por la existencia de una componente siempre nula: cualquier elemento $(b, 0, 0) \in gr^L(N)$ ha de cumplir $b = 0$. Y el ideal (0) es trivialmente bihomogéneo.

Ilustremos en este ejemplo qué ocurre al trasladar alguna componente. Sumando 1 al orden L (denotaremos \tilde{L} al nuevo orden) de

⁶Tomando concretamente como L -orden uno que considere primero el orden L , luego $|\alpha| + |\beta|$ y por último el orden lexicográfico de (α, β) . Los exponentes con este orden son los mismos que con el anterior orden FV .

la primera componente de cada vector, da como resultado⁷ la misma L -base pero unos generadores distintos de $gr^L(N)$:

$$\sigma^{\tilde{L}}(\mathbf{s}_1) = (y, -2x^n\xi, 0)$$

$$\sigma^{\tilde{L}}(\mathbf{s}_2) = (x, x^n\eta + 1, -y)$$

$$\sigma^{\tilde{L}}(\mathbf{s}_3) = (0, -2x^{n+1}\xi - x^n y\eta - y, y^2)$$

$$\sigma^{\tilde{L}}(\mathbf{s}_4) = (\frac{1}{2}y\eta + x\xi, \xi, -y\xi)$$

Obtenemos el anulador con los siguientes cálculos:

1. Los módulos de sicigias entre cada conjunto de componentes:

- $\mathcal{S}_1 = Syz(y, x, 0, \frac{1}{2}y\eta + x\xi)$.

$$\mathcal{S}_1 = \langle (0, 0, 1, 0), (-x, y, 0, 0), (-\frac{1}{2}\eta, -\xi, 0, 1) \rangle.$$

- $\mathcal{S}_2 = Syz(-2x^n\xi, x^n + 1, -x^n y\eta - y, \xi)$.

$$\mathcal{S}_2 = \langle (\frac{1}{2}\eta, \xi, 0, -1), (0, y, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 0, x^n + 1) \rangle.$$

- $\mathcal{S}_3 = Syz(0, -y, y^2, -y\xi)$.

$$\mathcal{S}_3 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, y, 1, 0), (0, -\xi, 0, 1) \rangle.$$

2. Las intersecciones dos a dos de los módulos anteriores se calculan con el método usual de introducir una variable nueva y un orden de eliminación adecuado:

- $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \hat{\mathcal{S}}_3 =$
 $\langle (\eta, -2\xi, 0, 2), (-xy, x^ny^2\eta + 2x^{n+1}y\xi + y^2\eta + 2xy\xi + y^2,$
 $x^ny\eta + 2x^{n+1}\xi + y\eta + 2x\xi + y, -2x^{n+1}y - 2xy) \rangle.$

⁷Aquí se utiliza un orden que primero mira L , después ∂_x y después el lexicográfico.

- $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3 = \widehat{\mathcal{S}}_2 = \langle (-x, y, 1, 0), (\eta, 2\xi, 0, 2) \rangle$.
- $\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 = \widehat{\mathcal{S}}_1 = \langle (\eta, 2\xi, 0, -2), (0, y, 1, 0) \rangle$.

3. Los productos de las intersecciones anteriores por las componentes no utilizadas: dado que los elementos de $\widehat{\mathcal{S}}_2$ son todos sicigias de las segundas componentes, se tiene que $\mathcal{C}_2 = (0)$ y que

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = (0)$$

4. Por tanto, el anulador y su raíz son cero, como ya sabíamos de los cálculos con la otra primera componente sin trasladar.

5.7 Pendientes en algunos módulos de sicigias (II)

En este ejemplo consideraremos la hipersuperficie de \mathbb{C}^3 definida por $f = 0$ con $f = xy(x+y)(tx+y)$. Una base de $\text{Der}(\log f)$ es ([10]):

$$\begin{aligned}\delta_1 &= x\partial_x + y\partial_y \\ \delta_2 &= (xt+y)\partial_t \\ \delta_3 &= x^2\partial_x - y^2\partial_y - t(x+y)\partial_t.\end{aligned}$$

calculada con el mismo criterio que usamos en 5.1. Calcularemos las pendientes con respecto a $t = 0$ de $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{ Der}(\log f)$ usando el ideal I generado por δ_1, δ_2 y δ_3 .

Así, una base⁸ del ideal I ($t > x > y$) está formada por los generadores y los elementos

- $P_4 = -xy\partial_y - tx\partial_t - y^2\partial_y + t^2x\partial_t$
- $P_5 = y^2\partial_y^2 - y^2\partial_x\partial_y - t^2x\partial_t\partial_y + t^3x\partial_t\partial_y - 2t\partial_t + 2t^2\partial_t$
- $P_6 = -tx\partial_t^2 + tx^2\partial_t\partial_y + t^2x\partial_t^2 - t^2x^2\partial_t\partial_y$

⁸Con respecto a un FV -orden, después prima el exponente de ∂_t y finalmente un orden $<_B$.

$$\bullet P_7 = -2t\partial_t^2 + 2tx\partial_t\partial_y + 2t^2\partial_t^2 - 2t^2x\partial_t\partial_y.$$

Dado que todos los polígonos de Newton de los elementos de esta base son cuadrantes, no hay pendientes.

El módulo $\mathcal{D}^3/Syz(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ tampoco tiene pendientes. En efecto, unos generadores de las sicigias son

- $s_1 = (y\partial_t - tx\partial_t, x\partial_y + y\partial_y - 1, 0),$
- $s_2 = (-xy\partial_t - tx^2\partial_t, xy\partial_y + tx\partial_t + y^2\partial_y + ty\partial_t, y\partial_t + tx\partial_t),$
- $s_3 = (-x^2\partial_x + tx\partial_t + y^2\partial_y - t^2x\partial_t, tx\partial_t + ty\partial_y - 1, x\partial_x + y\partial_y - 1).$

El único elemento que hay que añadir a los anteriores para tener una base es (con un orden que prima el mayor L -exponente frente al orden de las componentes)

$$s_4 = (0, -x^2\partial_x + tx\partial_t + y^2\partial_y + ty\partial_t + x, y\partial_t + tx\partial_t)$$

Todas las componentes de todos los elementos dan cuadrantes en sus polígonos de Newton. No hay pendientes.

5.8 Pendientes en suma directa de ideales

Este ejemplo aprovecha unos cálculos ya realizados en [15] sobre pendientes relativas a una hipersuperficie tangente al soporte de la imagen directa de $\mathcal{D}e^{\frac{1}{v^k}}$ por una inmersión en \mathbf{C}^2 , y sobre las pendientes del \mathcal{D} -módulo generado por $e^{\frac{1}{y^p-x^q}}$. Estudiaremos submódulos que sean suma directa de ideales que daban lugar a posibles pendientes.

Hacemos notar que el estudio las pendientes a partir de submódulos $N = I_1 \oplus I_2$ con I_1, I_2 ideales, nos parece interesante debido al caso de I_i ideales principales: aparecen las pendientes de la intersección que resultan ser la unión de las pendientes de I_1 y las pendientes de I_2 .

En general pueden “perdersse” pendientes: es elemental comprobarlo en el caso $I_1 = \langle x^2\partial_x + 1, y \rangle$, $I_2 = \langle y \rangle$. Para $L = -1$,

$$\text{Ann}_{\text{gr}_L(\mathcal{D})}(\mathcal{D}^2/I_1 \oplus I_2) = \langle y \rangle,$$

trivialmente bihomogéneo. Sin embargo, \mathcal{D}/I_1 tiene a L como pendiente.

5.8.1 Primer caso.

Tomemos primero el módulo $M = \mathcal{D}^2/N$ donde N es el submódulo de generado por

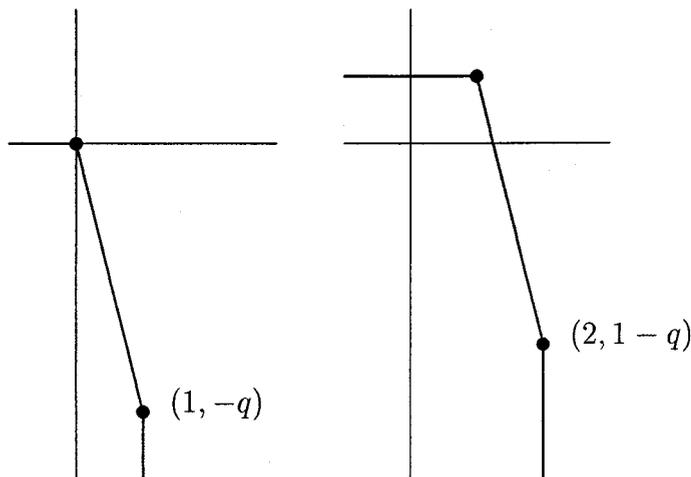
- $\mathbf{p}_1 = (mx^{q+1}\partial_x + x^qy\partial_y + mx^q + 1, 0)$,
- $\mathbf{p}_2 = (y^m - x, 0)$,
- $\mathbf{p}_3 = (0, py^{p-1}\partial_x + qx^{q-1}\partial_y)$,
- $\mathbf{p}_4 = (0, qy^{p+1}\partial_y - px^{q+1}\partial_x - 2qx^qy\partial_y + pq)$.

con $2 \leq p < q$ y $m \in \mathbf{C}$. Las primeras y segundas componentes forman respectivamente dos ideales para los que aparece, respecto $x = 0$, la pendiente común $-q$.

Primero calculamos una FV -base. Eligiendo un orden que primero mira F , después V (respecto de la variable x) y después ∂_x , hay que añadir un solo elemento a la base $\mathbf{p}_5 = (0, p_{5,2})$ con

$$\begin{aligned} p_{5,2} &= \\ &= p^2x^{q+1}\partial_x^2 + 2pqx^qy\partial_x\partial_y + q^2x^{q-1}y^2\partial_y^2 + \\ &+ p^2(q+1)x^q\partial_x + q^2(p+1)x^{q-1}y\partial_y - p^2q\partial_x. \end{aligned}$$

Los polígonos de Newton de \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 y \mathbf{p}_4 son cuadrantes. Sin embargo, los otros proporcionan ambos la única pendiente a estudiar: $L = -q$.



Los L -símbolos de los elementos de la base resultan ser una L -base estándar: si elegimos un orden que primero mira el L -orden y luego ∂_x los exponentes son los mismos que para el cálculo de la FV -base y por tanto se produce la misma base. Unos generadores de $gr^L(N)$ son los símbolos

- $\sigma^L(\mathbf{p}_1) = (mx^{q+1}\xi + x^qy\eta + 1, 0)$,
- $\sigma^L(\mathbf{p}_2) = (y^m, 0)$,
- $\sigma^L(\mathbf{p}_3) = (0, py^{p-1}\xi)$,
- $\sigma^L(\mathbf{p}_4) = (0, qy^{p+1}\eta)$,
- $\sigma^L(\mathbf{p}_5) = (0, p^2qx^{q+1}\xi^2 + 2pqx^qy\xi\eta + q^2x^{q-1}y^2\eta^2 - p^2q\eta)$.

Calcular los $b \in gr^L(D)$ tales que $(b, 0), (0, b) \in gr^L(N)$ es especialmente sencillo en estos submódulos. Es inmediato que, siguiendo el algoritmo de cálculo del anulador, en estos casos $A_M^L = C_1 \cap C_2$ donde C_i es el ideal de las componentes i -ésimas. Así $\sqrt{A_M^L} = \sqrt{C_1} \cap \sqrt{C_2}$

En este caso

$$\sqrt{C_1} = (mx^{q+1}\xi + 1, y)$$

$$\sqrt{C_2} = (y\xi, y\eta, x^{q+1}\xi^2 - \xi)$$

La intersección es el ideal $(y\xi, y\eta, mx^{2q+2}\xi^3 + (1-m)x^{q+1}\xi^2 - \xi)$ y se observa que la componente $\xi \notin \sqrt{A_M^L}$. L es una verdadera pendiente.

5.8.2 Segundo caso.

Construyamos ahora M con el submódulo \mathcal{N} de \mathcal{D}^2 generado por

- $\mathbf{p}_1 = (mx^{p+1}\partial_x + x^p y \partial_y + mx^p + 1, 0)$
- $\mathbf{p}_2 = (y^m - x, 0)$
- $\mathbf{p}_3 = (0, py^{p-1}\partial_x + qx^{q-1}\partial_y)$
- $\mathbf{p}_4 = (0, qy^{p+1}\partial_y - px^{q+1}\partial_x - 2qx^q y \partial_y + pq),$

con $2 \leq p < q$ y $m \in \mathbf{C}$. En este caso cada ideal produce pendientes distintas.

De nuevo, una F -base tal que sus símbolos F son una V -base de $gr^F(\mathcal{N})$, está formada por los cuatro elementos anteriores y

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_5 = & (0, p^2 x^{q+1} \partial_x^2 + 2pqx^q y \partial_x \partial_y + \\ & + q^2 x^{q-1} y^2 \partial_y^2 + p^2 (q+1) x^q \partial_x + \\ & + q^2 (p+1) x^{q-1} y \partial_y - p^2 q \partial_x). \end{aligned}$$

de donde se sigue que hay dos posibles pendientes $L_1(a, b) = a - qb$ y $L_2(a, b) = a - pb$.

- **Pendiente L_1 :** La base calculada también es una L_1 -base estándar (si tomamos un orden que primero mira ord_{L_1} y luego $\partial_x > \partial_y > y > x$, los exponentes son los de antes). Unos generadores de $gr^{L_1}(\mathcal{N})$ son entonces

- $\sigma^{L_1}(\mathbf{p}_1) = (mx^{p+1}\xi + x^p y \eta, 0)$
- $\sigma^{L_1}(\mathbf{p}_2) = (y^m, 0)$
- $\sigma^{L_1}(\mathbf{p}_3) = (0, py^{p-1}\xi)$

- $\sigma^{L_1}(\mathbf{p}_4) = (0, qy^{p+1}\eta)$
- $\sigma^{L_1}(\mathbf{p}_5) = (0, p^2x^{q+1}\xi^2 + 2pqx^qy\xi\eta - p^2q\xi).$

Como ya hicimos notar, los siguientes pasos necesarios para calcular el anulador se resumen en este tipo de ejemplos a calcular $C_1 \cap C_2$ (recordemos: C_i ideal de las i -ésimas componentes de los elementos de N .)

$$\sqrt{A_M^{L_1}} = \sqrt{C_1 \cap C_2} = \sqrt{C_1} \cap \sqrt{C_2} =$$

$$\langle x\xi, y \rangle \cap \langle y\xi, y\eta, x^{q+1}\xi^2 - q\xi \rangle = \langle y\xi, y\eta, x^{q+2}\xi^2 + qx\xi \rangle.$$

Es elemental que la componente $x\xi \notin \sqrt{A_M^{L_1}}$ y que no tenemos un ideal bihomogéneo: L_1 es pendiente.

• **Pendiente L_2 :** Los símbolos ahora son:

- $\sigma^{L_2}(\mathbf{p}_1) = (mx^{p+1}\xi + x^p y\eta + 1, 0)$
- $\sigma^{L_2}(\mathbf{p}_2) = (y^m, 0)$
- $\sigma^{L_2}(\mathbf{p}_3) = (0, py^{p-1}\xi)$
- $\sigma^{L_2}(\mathbf{p}_4) = (0, qy^{p+1}\eta)$
- $\sigma^{L_2}(\mathbf{p}_5) = (0, -p^2q\xi).$

De la intersección de los respectivos radicales de cada ideal de primeras y segundas componentes se obtiene otra vez la raíz del anulador:

- $\sqrt{C_1} = (mx^{p+1}\xi + 1, y)$
- $\sqrt{C_2} = (\xi, y\eta)$
- $\sqrt{C_1} \cap \sqrt{C_2} = (mx^{p+1}\xi^2 + \xi, y\eta).$

De nuevo $\xi \notin \sqrt{A_M^{L_2}}$ sirve para demostrar que se “conserva” también la pendiente L_2

5.8.3 Tercer caso.

También del mismo [15] para algunos valores de m, p y q se obtienen otras familias de operadores que dan lugar a un submódulo de \mathcal{D}^2 con tres pendientes aparentes. En este ejemplo estudiamos exhaustivamente uno de esos casos.

Partimos del submódulo \mathcal{N} de \mathcal{D}^2 generado por los elementos

- $\mathbf{p}_1 = (y^4\partial_y + 4y^7\partial_x + 1, 0)$
- $\mathbf{p}_2 = (y^4 - x, 0)$
- $\mathbf{p}_3 = (0, 3y^2\partial_x + 2x\partial_y)$
- $\mathbf{p}_4 = (0, 2y^4\partial_y - 3x^3\partial_x - 4x^2y\partial_y + 6).$

Para tener una base estándar con respecto al orden \langle_{FV, ∂_x} (ver 5.9) con $x > y$, es necesario añadir 11 elementos nuevos:

- $\mathbf{p}_5 = (0, -\frac{4}{3}xy^2\partial_y^2 - 4x^2y\partial_x\partial_y - 3x^3\partial_x^2 + 6\partial_x - \frac{16}{3}xy\partial_y - 9x^2\partial_x)$
- $\mathbf{p}_6 = (-\frac{1}{4}xy\partial_y - x^2\partial_x - \frac{1}{4}y - x, 0)$
- $\mathbf{p}_7 = (0, -4x^2y\partial_x^2\partial_y - 3x^3\partial_x^3 + \frac{8}{9}x^2\partial_y^3 + 6\partial_x^2 - \frac{4}{3}y^2\partial_y^2 - 8xy\partial_x\partial_y - 18x^2\partial_x^2 - \frac{16}{3}y\partial_y - \frac{46}{3}x\partial_x)$
- $\mathbf{p}_8 = (-x^3y^2\partial_x^2 + \frac{1}{16}x^2\partial_y^2 - \frac{5}{4}x^2y^2\partial_x + \frac{1}{8}x\partial_y + \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{16}, 0)$
- $\mathbf{p}_9 = (-x^2y^2\partial_x^2 + \frac{1}{16}x\partial_y^2 - \frac{1}{4}y^3\partial_x - \frac{1}{4}y^3\partial_y - \frac{9}{4}xy^2\partial_x + \frac{1}{16}\partial_y - y^2, 0)$
- $\mathbf{p}_{10} = (0, -3x^3y\partial_x^3 + \frac{8}{9}x^2y\partial_y^3 + \frac{8}{3}x^3\partial_x\partial_y^2 + 6y\partial_x^2 - \frac{4}{3}y^3\partial_y^2 - 10x^2y\partial_x^2 + 8x^2\partial_y^2 - \frac{16}{3}y^2\partial_y + \frac{2}{3}xy\partial_x)$
- $\mathbf{p}_{11} = (0, \frac{9}{4}x^4\partial_x^4 + \frac{8}{9}x^2y\partial_y^4 + 2x^3\partial_x\partial_y^3 + 6\partial_x^2\partial_y - \frac{9}{2}x\partial_x^3 - \frac{9}{2}x\partial_x^3 - \frac{4}{3}y^3\partial_y^3 + \frac{63}{4}x^3\partial_x^3 + \frac{22}{3}x^2\partial_y^3 + 9\partial_x^2 - 10y^2\partial_y^2 + \frac{8}{3}xy\partial_x\partial_y + \frac{39}{2}x^2\partial_x^2 - \frac{40}{3}y\partial_y + \frac{5}{2}x\partial_x)$
- $\mathbf{p}_{12} = (4x^4y\partial_x^3 + \frac{1}{16}x^2\partial_y^3 + 15x^3y\partial_x^2 + \frac{3}{16}x\partial_y^2 - \frac{1}{4}y^3\partial_x - 3xy^2\partial_x + \frac{1}{8}\partial_y + \frac{15}{2}x^2y\partial_x + \frac{1}{2}y^2, 0)$

- $\mathbf{p}_{13} = (4x^3y\partial_x^3 + \frac{1}{16}x\partial_y^3 - \frac{1}{4}y^3\partial_x\partial_y + xy^2\partial_x^2 - \frac{1}{4}y^3\partial_y^2 + 19x^2y\partial_x^2 + \frac{1}{16}\partial_y^2 - \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}y^2\partial_x - \frac{3}{2}y^2\partial_y + \frac{29}{2}xy\partial_x - y, 0)$
- $\mathbf{p}_{14} = (-16x^5\partial_x^4 + \frac{1}{16}x^2\partial_y^4 - 120x^4\partial_x^3 + \frac{1}{4}x\partial_y^3 - \frac{1}{2}y^3\partial_x\partial_y + xy^2\partial_x^2 - \frac{1}{4}y^3\partial_y^3 + 28x^2y\partial_x^2 + \frac{3}{16}\partial_y^2 - 195x^3\partial_x^2 + \frac{7}{4}y^2\partial_x + 2y^2\partial_y + 43xy\partial_x - \frac{105}{2}x^2\partial_x + \frac{27}{2}y, 0)$
- $\mathbf{p}_{15} = (-16x^4\partial_x^4 + \frac{1}{16}x\partial_y^4 - \frac{1}{4}y^3\partial_x\partial_y^2 - 8x^2y\partial_x^3 - \frac{1}{4}y^3\partial_y^3 - 136x^3\partial_x^3 + \frac{1}{16}\partial_y^3 - y^2\partial_x^2 - \frac{13}{4}y^2\partial_x\partial_y - 25xy\partial_x^2 - \frac{9}{4}y^2\partial_y^2 - 267x^2\partial_x^2 - \frac{35}{2}y\partial_x - \frac{9}{2}y\partial_y - \frac{207}{2}x\partial_x - 3, 0)$

Aparecen tres posibles pendientes: -2 , -1 y $-1/2$:

- **Pendiente $L_1 = -2$:** En los tres posibles casos de pendientes, el cálculo de $gr^L(\mathcal{N})$ se simplifica. Con respecto a los órdenes L los exponentes de los generadores son los mismos que con respecto al orden antes utilizado y la base anterior es una L -base para cualquiera de las L posibles.⁹ Así, unos generadores de una L_1 -base son los L_1 -símbolos de los elementos $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{15}$:

$$\begin{aligned}
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_1) &= (4y^7\xi, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_2) &= (y^4, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_3) &= (0, 3y^2\xi) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_4) &= (0, 2y^4\eta) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_5) &= (0, -\frac{4}{3}xy^2\eta^2 - 4x^2y\xi\eta - 3x^3\xi^2 + 6\xi) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_6) &= (-\frac{1}{4}xy\eta - x^2\xi, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_7) &= (0, -4x^2y\xi^2\eta - 3x^3\xi^3 + 6\xi^2) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_8) &= (-x^3y^2\xi^2, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_9) &= (-x^2y^2\xi^2, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_{10}) &= (0, -3x^3y\xi^3 + 6y\xi^2)
\end{aligned}$$

⁹Esto es debido a que en el vértice de los diagramas de Newton sólo hay un monomio.

$$\begin{aligned}
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_{11}) &= (0, \frac{9}{4}x^4\xi^4 + 6y\xi^2\eta - \frac{9}{2}x\xi^3) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_{12}) &= (4x^4y\xi^3, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_{13}) &= (4x^3y\xi^3, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_{14}) &= (-16x^4\xi^4, 0) \\
- \sigma^{L_1}(\mathbf{p}_{15}) &= (-16x^4\xi^4, 0).
\end{aligned}$$

El siguiente paso es calcular las sicigias del conjunto de las primeras componentes y las sicigias del conjunto de las segundas componentes. Dado que las primeras componentes son cero cuando no lo son las segundas y viceversa, los elementos b tal que $(b, 0), (0, b) \in gr^{L_1}(\mathcal{N})$ serán exactamente la intersección de los ideales generados por dichas componentes no nulas. Siguiendo la notación del caso general

$$\begin{aligned}
& C_1 \cap C_2 = \\
& = \langle -xy^3\xi, 3y^4\xi, 3x^2y^2\xi^2, y^4\eta, xy^3\xi\eta^2, xy^3\xi\eta, \\
& \quad -\frac{1216}{25}x^4y\xi^3\eta - \frac{768}{25}x^5\xi^4 + \frac{384}{25}xy\xi^2\eta + \frac{1536}{25}x^2\xi^3, \\
& \quad -\frac{192}{25}x^5y\xi^3 + \frac{96}{25}xy^2\xi\eta + \frac{384}{25}x^2y\xi^2, \\
& \quad -\frac{4}{3}x^2y^3\eta^3 - \frac{28}{3}x^3y^2\xi\eta^2 - 19x^4y\xi^2\eta - 15x^5\xi^3 + \\
& \quad + 6xy\xi\eta + 24x^2\xi^2 \rangle.
\end{aligned}$$

El radical de $C_1 \cap C_2$ se puede calcular con el algoritmo de Eisenbud-Huneke-Vasconcelos (ver [19]). Un conjunto de generadores es

$$\{y\eta, y\xi, x^4\xi^2 - 2x\xi\}.$$

Como la F -componente $x\xi$ homogénea de grado 1 no está en el radical, éste no es homogéneo con respecto a F . L_1 es una pendiente del submódulo. F .

- **Pendiente $L_2 = -1$:** Siguiendo los pasos anteriores, con la segunda pendiente se observa que el ideal de las segundas componentes es $(\xi, y^4\eta)$. De aquí, obtenemos una vez más el anulador cortando con C_1 . En este caso

$$C_1 \cap C_2 =$$

$$\begin{aligned}
= & \langle xy^3\xi, xy\xi\eta + 4x^2\xi^2 + y\xi, x^2y^2\xi^2 + \frac{1}{4}y^3\xi, \\
& , x^3y\xi^2 - \frac{1}{16}y^3\xi\eta + \frac{1}{4}xy^2\xi^2, \\
& x^4\xi^4 + \frac{1}{64}y^3\xi\eta^2 + \frac{1}{2}x^2y\xi^3 + \frac{1}{16}y^2\xi^2, \\
& , y^4\eta, y^4\xi \rangle.
\end{aligned}$$

y coincide $C_1 \cap C_2$ con el anulador de $gr^{L_2}(\mathcal{D}^2/\mathcal{N})$. La raíz contiene a $\{y\xi, y\eta, x\xi\}$ y es por tanto un ideal bihomogéneo.

- **Pendiente** $L_3 = -\frac{1}{2}$: Para esta pendiente, el único símbolo que tiene una componente no monomio es

$$\sigma^{L_3}(\mathbf{p}_8) = (0, -x^3y^2\xi^2 + \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{16}).$$

Con el mismo argumento para calcular el anulador que en las secciones anteriores, se observa que, como y (del símbolo de \mathbf{p}_6) está en el ideal C_1 , el ideal C_1 es el total. Basta calcular C_2 obteniendo

$$C_2 = (\xi, y^4\eta), \quad \sqrt{C_2} = (\xi, y\eta)$$

un ideal monomial y, por tanto, trivialmente bihomogéneo: L_3 no es pendiente.

5.9 Apéndice: algunos órdenes utilizados en este capítulo.

En los ejemplos hemos utilizado los siguientes órdenes para exponentes en \mathbb{N}^{2n}

- Orden $<_B$:

$$(\alpha, \beta) <_B (\alpha' \beta') \iff \begin{cases} |\alpha| + |\beta| < |\alpha'| + |\beta'| \\ \text{ó} \begin{cases} |\alpha| + |\beta| = |\alpha'| + |\beta'| \\ (\alpha, \beta) <_{lex} (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

donde $<_{lex}$ es un orden lexicográfico fijo para exponentes de \mathbb{N}^{2n} .

- Orden diagonal, $<_{diag}$:

$$(\alpha, \beta) <_{diag} (\alpha' \beta') \iff \begin{cases} |\beta| < |\beta'| \\ \text{ó} \begin{cases} |\beta| = |\beta'| \\ (\alpha, \beta) <_{mult} (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

donde $<_{mult}$ es un orden compatible con el orden de series:

$$(\alpha, \beta) <_{mult} (\alpha' \beta') \iff \begin{cases} |\alpha| + |\beta| > |\alpha'| + |\beta'| \\ \text{ó} \begin{cases} |\alpha| + |\beta| = |\alpha'| + |\beta'| \\ (\alpha, \beta) <_{lex} (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

donde $<_{lex}$ es un orden lexicográfico fijo para exponentes de \mathbb{N}^{2n} .

- Orden $<_{FV, \partial_x}$. Este orden primero mira F , luego V (respecto a una variable prefijada). Después prima ∂_x y, finalmente, ordena los exponentes según un orden lexicográfico total.
- Orden $<_{FV, inv}$. Este orden primero mira F , luego V (respecto a una variable prefijada). Finalmente, ordena los exponentes según un orden lexicográfico inverso.

Bibliografía

- [1] Adams, W.W. and P. Loustau. *An introduction to Gröbner Bases*. Graduate Studies in Mathematics, AMS 1994.
- [2] Assi A., F.J. Castro-Jiménez and J.M. Granger. *How to calculate the slopes of a \mathcal{D} -module*. *Compositio Mathematica* 104:107-123, 1996.
- [3] Bayer, D. and M. Stillman. **Macaulay**: *a System for Computation in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Source and object code available via anonymous ftp ('zarisiki.harvard.edu').
- [4] Bayer, D. and M. Stillman. *On the complexity of computing syzygies*. *J. Symb. Comp.* 6:135-147, 1988.
- [5] Becker, T. and V. Weipsfenning. *Gröbner Bases. A computational approach to Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 141, Springer-Verlag 1993.
- [6] Björk, J-E. *Rings of Differential Operators*. North-Holland, Amsterdam 1979.
- [7] Björk, J-E. *Analytic \mathcal{D} -modules and Applications*. Kluwer, Amsterdam 1979.
- [8] Borel, A. et al. *Algebraic \mathcal{D} -modules*. Perspectives in Math., volume 2. Academic Press, Boston 1987.

- [9] Buchberger, B. *Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines Algebraischen Gleichungssystems*. Aequationes Math., 4:374-383, 1970.
- [10] Calderón-Moreno, F.J. *Operadores diferenciales logarítmicos con respecto a un divisor libre*. Tesis doctoral. Junio 1997.
- [11] Calderón-Moreno, F.J. *Logarithmic Differential Operators and Logarithmic De Rham Complexes relative to a Free Divisor*. Ann. Sci. E.N.S. To appear.
- [12] Castro-Jiménez, F.J., D. Mond and L. Narváez-Macarro. *Cohomology of the complement of a free divisor*. Transactions of the A.M.S., 348:3037-3049 (1996).
- [13] Calderón-Moreno F.J., D. Mond, L. Narváez-Macarro and F.J. Castro-Jiménez. *Logarithmic Cohomology of the Complement of a Plane Curve*. Preprint de la Universidad de Warwick 3/1999.
- [14] Castro Jiménez, F.J. *Thèse de 3ème cycle*. Université Paris VII, 1984.
- [15] Castro Jiménez, F.J. and J.M. Granger. *Explicit calculations in rings of differential operators*. Prepublicaciones de la Universidad de Sevilla, 35. Junio 1997.
- [16] Castro-Jiménez, F.J. and L. Narváez-Macarro. *Homogenising differential operators*. Prepublicaciones de la Universidad de Sevilla, 36. Junio 1997.
- [17] Coutinho, S.C. *A primer on \mathcal{D} -modules*. Student Texts 33, London Mathematical Society. Cambridge University Press 1995.
- [18] Cox, D., J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer, New York 1991.
- [19] Eisenbud, D., C. Huneke and W. Vasconcelos. *Direct methods for Primary Decomposition*. Invent. Math. 110:207-235, 1992.

- [20] Giusti M. and J. Heintz. *Algorithmes —disons rapides— pour la décomposition d'une variété algébrique en composants irréductibles et équidimensionnelles*. Progress in Mathematics 94:167-194. Birkhäuser, 1991.
- [21] González-Ramírez, J.A. *Contribución al estudio de las deformaciones de singularidades reales*. Tesis doctoral. Diciembre, 1996.
- [22] Granger, J.M. and P. Maisonobe. *A basic course on differential modules*. Travaux en Cours 45, Hermann. Paris 1993.
- [23] Grigor'ev, D.Y. *Complexity of solving systems of linear equations over the rings of differential operators*. Progress in Mathematics 94:195-202. Birkhäuser, 1991.
- [24] Janet, M. *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*. Journal de Math. 8^e série, tome III:65-151, 1920.
- [25] Ince, E.L. *Ordinary Differential Equations*. Reprinted paperback edition. Dover Publications, New York.
- [26] Laurent, Y. *Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série, 20:391-441, (1987).
- [27] Laurent, Y. and Z. Mebkhout. *Le polygone de Newton d'un \mathcal{D}_X -module*. To appear.
- [28] Lazard, D. *Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations*. Proc. of Eurocal 83, Lecture Notes in Computer Science, 162:146-156.
- [29] Lejeune M. and B. Malgrange. *Séminaire Opérateurs Différentiels*. Prépublication Institut Fourier, Grenoble 1975.
- [30] Malgrange, B. *Le polyôme de Bernstein d'une singularité isolée*. Lecture Notes in Math. 459:98-119. Springer-Verlag, 1975.

- [31] Malgrange, B. *Sur les points singuliers des équations différentielles*. L'Enseignement Mathématique XX, 12:147:176, 1974.
- [32] Matsumura, H. *Commutative Algebra (Second edition)*. Benjamin-Cummings Publ. Co., New York 1980.
- [33] Mebkhout, Z. *Le théorème de comparaison entre cohomologies de De Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann*. Publications Mathématiques 69, 1989.
- [34] Mebkhout, Z. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents*. Travaux en cours, volume 35. Hermann, Paris 1989.
- [35] Mebkhout, Z. *Le théorème de positivité de l'irregularité pour les \mathcal{D} -modules*. Grothendieck Festschrift III, Progress in Math. 88:84-131, 1996.
- [36] Merle, M. *On some points of Local Analytic Geometry*. Travaux en Cours 45, Hermann. Paris 1993
- [37] Oaku, T. *Algorithms for the b-function and \mathcal{D} -modules associated with a polynomial*. Journal of Pure and Applied Algebra, 117 & 118:495-518, 1997.
- [38] Pham, F. *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*. Progress in Mathematics 2, Birkhauser 1979.
- [39] Reid, M. *Undergraduate Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 29. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [40] Sabbah, C. *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*. Travaux en Cours 45, Hermann. Paris 1993
- [41] Sabbah, C. *Proximité évanescence I. La structure polaire d'un \mathcal{D} -module. Appendice en collaboration avec F. Castro*. Compositio Mathematica 62:283-328, 1987.

-
- [42] Saito, K. *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*. J. Fac Sci. Univ. Tokyo 27:256-291, 1980.
- [43] Serre, J-P. *Geométrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier 6:1-42. Grenoble, 1955-56.
- [44] Takayama, N. **Kan**: *a system for computation in Algebraic Analysis*. Source code available for Unix computers from 'ftp.math.kobe-u.ac.jp', 1991.
- [45] Varchenko, A.N. *Asymptotic mixed Hodge structure in vanishing cohomologies*. Math. USSR Izvestija 18:3, (1982) 469-512.

José María y de la Cruz
Metodos constructivos en el área de Operaciones
diferenciales

Universidad
88

Sobresaliente cum laude
Septiembre 99

Alfonso

Jose

Alfonso

José Vicente

Alfonso

Alfonso

FMA C 043/349

* 5 0 1 3 2 6 2 4 3 *

