

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

### Modelado y control de un tilting quadrotor con 5 grados de libertad

Autor: María Palmero Monroy

Tutores: Antonio González Morgado

Guillermo Heredia Benot

**Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2023





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

# **Modelado y control de un tilting quadrotor con 5 grados de libertad**

Autor:

María Palmero Monroy

Tutores:

Antonio González Morgado

Doctorando

Guillermo Heredia Benot

Catedrático de Universidad

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Grado: Modelado y control de un tilting quadrotor con 5 grados de libertad

Autor: María Palmero Monroy  
Tutores: Antonio González Morgado  
Guillermo Heredia Benot

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



*"- Por los que miran las estrellas y piensan «ojalá... ojalá»"*  
*"- Por las estrellas que escuchan... y los sueños que se hacen realidad "*  
**Sarah J. Maas**





# Agradecimientos

---

A Antonio González, por haberme permitido hacer este trabajo a última hora, por sus ganas y su esfuerzo y por haberme atendido en cada momento que ha sido necesario con paciencia y atención, sin importar el día o la hora. El ser un buen profesor es algo que te da el tiempo pero nadie te da tener vocación.

A mis amigos, por haber creído en mí más de lo que yo he podido hacer, por haberme ayudado y animado en todo momento y por esas infinitas horas de biblioteca que hemos pasado juntos. Y a mi "ma<sup>2</sup>pa", simplemente por ser las mejores.

A mi familia, por haberme apoyado en mis decisiones y por esa ayuda brindada en los momentos más difíciles.

A mis abuelos, por quererme como nadie lo hace día a día, por escucharme y animarme siempre y por esos filetitos empanados que me han ayudado a cargarme de energía a lo largo de estos años.

A Andrés, quien mejor sabe lo que ha supuesto esta carrera, por todas esas lágrimas y éxitos compartidos, por tu compañía y cariño incondicional y por ser el mejor compañero de instituto, carrera o de lo que tenga que venir.

Y por último, pero no menos importante, a ti Haku.

*María Palmero Monroy  
Estudiante de Ingeniería Industrial*

*Sevilla, 2023*



# Resumen

---

El objetivo de este Trabajo de fin de carrera es el de estudiar las ecuaciones que permiten realizar tanto el control como el modelado de un vehículo aéreo no tripulado tipo tilting quadrotor que contará con dos servomotores, es decir, un dron de 4 hélices donde los rotores serán inclinables dos a dos.

Para ello, este documento se ha dividido en 3 partes fundamentales, referidas a cada uno de los pasos tomados en este estudio, que se han elaborado para obtener los resultados finales. En la primera de ellas, se realizará un estudio previo de las ecuaciones que modelarán tanto la dinámica como la cinemática del mismo. Además, se abordará la búsqueda de soluciones ante el problema de control que supone el incluir dos servomotores a la configuración.

Posteriormente, se continuará modificando un simulador de vuelo según los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Por último, se hará una descripción de los puntos singulares que presenta el modelo dándoles, a su vez, un porqué.

Para corroborar la veracidad y funcionalidad de todo lo anterior, se finalizará este trabajo llevando a cabo una serie de simulaciones que permitirán observar el comportamiento del dron frente a diferentes situaciones. A partir de los resultados, se elaborarán las conclusiones pertinentes.



# Abstract

---

The aim of this final degree report is to study the equations that lead to the development of the control and modeling of a tilting quadrotor which has the ability to rotate its motors in pairs.

To carry out this task, the document has been divided into three parts, related to each phases that that must be undertaken in order to reach the final objective and obtain results. Firstly, a preliminary study of the equations that models the kinematics and dynamics of the system has been done. Additionally, this part includes a search for solutions that allows the calculations of the new variables introduced by the servomotors, the orientations of the motors.

Secondly, the study continues with the modification of a flight simulator, which is adapted to incorporate the equations of the quadrotor.

Finally, a description of the singularities presented by the model will be provided, along with a rationale for each.

To verify the accuracy and functionality of the aforementioned work, this report will conclude with a series of simulations which allow making observations of the quadrotor's behavior facing different situations. These results lead to make conclusions.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract</i>	VII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo	3
1.2 Estructura	4
<b>2 Modelado del quadrotor</b>	<b>5</b>
2.1 Funcionamiento de los multirrotores	5
2.2 Descripción del tilting quadrotor	7
2.3 Sistema de referencia	9
2.4 Generación de fuerzas y momentos	11
2.5 Definición de las variables de control	14
2.5.1 Propuesta 1: Mixer estático	16
2.5.2 Propuesta 2: Problema de optimización	17
2.5.3 Propuesta 3: Ecuación para el cálculo de $\alpha$	19
2.6 Ecuaciones de movimiento	20
2.6.1 Dinámica de traslación	20
2.6.2 Dinámica de rotación	21
2.7 Resumen de las ecuaciones	22
<b>3 Implementación en simulador</b>	<b>25</b>
3.1 Controlador	26
3.1.1 Control en actitud y posición	26
3.1.2 Bloque intermedio	27
3.1.3 Multirotor Mixer Inverse	27
3.2 Dinámica	28
3.2.1 Motor block	28
3.2.2 Multirotor Mixer	29
3.2.3 Estado del dron	29
<b>4 Puntos singulares</b>	<b>31</b>
4.1 Puntos críticos	33
4.1.1 Simulación giro en Pitch	36
4.1.2 Simulación desplazamiento en eje Y	39
4.2 Zona crítica	42
4.2.1 Simulación: Motores saturados	42
4.3 Resumen	45
<b>5 Resultados</b>	<b>47</b>
5.1 Simulación 1:	47

5.2	Simulación 2:	51
5.3	Simulación 3:	55
5.4	Simulación 4:	59
5.5	Simulación 5:	63
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>67</b>
	<i>Bibliografía</i>	69



# 1 Introducción

---

Aunque pueda parecer que los vehículos no tripulados o drones, como se conocen comúnmente, son una idea actual, realmente se remonta a finales del siglo XXIX, cuando se usaban globos aerostáticos cargados con bombas como armas remotas o sistemas de espionaje en las guerras.

Con el auge de la tecnología, en lo que se conoce como revolución digital o tercera revolución industrial, el enfoque y el uso que se le ha dado a los mismos se ha ampliado, jugando hoy en día un papel muy importante en campos como el periodismo, la vigilancia, la logística e incluso en la búsqueda y rescate de personas.



**Figura 1.1** Dron dedicado a la fumigación.

Desde el punto de vista de la ingeniería, los vehículos no tripulados se han convertido en una herramienta que no solo facilita las labores y tareas de los operarios, sino que también mejora su seguridad, siendo capaces de operar tanto en situaciones como en lugares de difícil maniobrabilidad para la mano humana. Además, permite acelerar el proceso productivo.

Actualmente, existen numerosas configuraciones para construir drones. Dependiendo de su uso, se optará por la mejor opción para llevar a cabo la tarea para la que se quiere emplear.

De entre todos los criterios de clasificación que existen para agrupar a los vehículos aéreos no tripulados, una división que resulta de especial interés es:

- **Drones de ala fija:** como su propio nombre indica, son aquellos cuyas alas no presentan movimiento, es decir, que no rotan. Aprovechan las corrientes de aire para planear y así aumentar su tiempo de vuelo.

- **Drones multirrotor:** compuestos por un cuerpo central y varios rotores que hacen girar a unas hélices que permiten generar un empuje, perpendicular al plano de giro, para poder así elevarse.

Cada uno de estos modelos presenta ventajas e inconvenientes. De entre ellas cabe destacar por un lado, que los drones de ala fija presentan una mayor autonomía y una buena estabilidad gracias a que su estructura aerodinámica favorece la sustentación. Además, ante un caso de fallo o pérdida de potencia en el motor, permite realizar una recuperación más segura. Sin embargo, se necesita un espacio amplio para hacerlo despegar, incluyendo la ayuda de un operario o un riel lanzador, y para aterrizar, por lo que el área disponible es un factor limitante a la hora de realizar labores, no suelen poder mantenerse en vuelo estático suspendido y su precio es más elevado.

Por otro lado, los drones multirrotor presentan menor autonomía, debido a que la fuerza de empuje que deben generar debe ser igual o superior a su peso, son más ruidosos que un ala fija y su estructura no es aerodinámica lo que afecta a su estabilidad, sobre todo en condiciones ambientales desfavorables como pueden ser vientos fuertes. A su favor, el abanico de zonas a las que pueden acceder estos UAV es mucho más amplio. El aterrizaje y el despegue se realiza de forma vertical gracias al empuje generado por los rotores, por lo que no hay que reservar un área para esta tarea. Pueden mantenerse en vuelo suspendido y son más económicos.

Actualmente se está trabajando en un modelo híbrido que consiga incorporar las dos configuraciones anteriores en un solo vehículo de manera que se pueda alternar, según las condiciones, entre un funcionamiento y otro. De esta forma, se consiguen compensar los puntos fuertes y débiles de cada uno de los UAVs.



(a) Ala fija.



(b) Multirrotor.



(c) Modelo híbrido.

**Figura 1.2** Clasificación UAV.

La aeronavegación no tripulada es un campo que no deja de crecer a día de hoy, cada vez es mayor el interés que surge alrededor del tema. Sin embargo, al mismo tiempo que se amplía su estudio y nuevos posibles usos van surgiendo, aparecen nuevos problemas debido a las especificaciones que exige cada tarea. La mayor parte de las aplicaciones de los drones requieren algún tipo de interacción con el medio exterior que los rodea, por lo que, actualmente, no solo se limitan a ser una plataforma estática que vuela sino que también se requiere que posean una mayor capacidad de manipulación y movimiento.

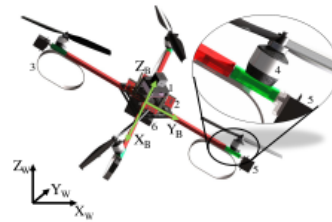
El diseño de los multirrotores coplanarios supuso, con respecto a los helicópteros de despegue vertical tradicionales, un avance en cuanto a estabilidad, robustez y seguridad gracias a que se conseguía evitar métodos de control complejo. No obstante, son plataformas subactuadas, es decir, para poder realizar un movimiento de avance, deben cambiar su actitud. La movilidad de estos vehículos está limitada por la dependencia que existe entre los movimientos de traslación y rotación. Como consecuencia, el dron es incapaz de seguir todas

las posiciones y orientaciones aleatorias, lo que dificulta las labores que requieren un alto nivel de precisión.

Para mejorar las capacidades de actuación de los drones convencionales, donde los movimientos de traslación y rotación se encuentran acoplados, surgen las plataformas *fully actuated*. Pueden clasificarse en: los *UAVs de rotores inclinados*, ver Figura 1.3a, y los *tiltrotors*, ver Figura 1.3b. Los primeros cuentan con diferentes rotores no coplanarios pero fijos. En los segundos, los rotores tendrán la capacidad de girar en vuelo, dotándoles de la capacidad de variar entre posiciones donde sean coplanarios a otras donde no. En ambos casos, se suple el problema de tener que inclinar el cuerpo del dron para producir fuerzas horizontales que deriven en un desplazamiento lateral. Sin embargo, en los de rotores inclinados fijos, al tener los rotores girados en planos específicos y fijos, existen interacciones entre los flujos de aire, lo que provoca un aumento del consumo y una pérdida de eficiencia, lo que a su vez reduce su autonomía. Algunas de estas características pueden encontrarse en los artículos como "*TiltDrone: A Fully-Actuated Tilting Quadrotor Platform*" [1], "*UAV fully-actuated: modelo, control y comparación con configuración coplanaria*" [2] donde se compara un hexarotor convencional con uno tipo fully actuated.



(a) Dron fully actuated.



(b) Tilting quadcopter [3].

En comparación, un *tiltrotor* consigue evitar parcial o completamente la ineficiencia provocada por estas fluctuaciones en detrimento de la sencillez del control y de otros parámetros como el peso, debido a la necesidad de incluir servomotores. Estos factores afectarán directamente a la eficiencia y la precisión.

Como puede deducirse, a día de hoy no existe un dron que reúna todas las características necesarias para que sea completamente eficiente, con una autonomía elevada y lo suficientemente preciso para abordar las tareas más exigentes. Por ello, es un campo muy estudiado actualmente y que genera bastante interés no solo en el campo de la ingeniería.

## 1.1 Objetivo

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es el de realizar el control y el modelado de un dron tipo tilting quadrotor con configuración tipo H y 5 grados de libertad. Presentará dos servomotores que permitirán cambiar la orientación de los rotores por parejas.



Figura 1.4 Tilting quadrotor estudiado en el trabajo.

A lo largo de este documento, se encontrarán las deducciones de las ecuaciones que gobiernan su comportamiento así como una búsqueda de soluciones que permitan realizar el control de la inclinación de los rotores. Además, se incluye una descripción de los puntos singulares donde el diseño elaborado no presenta un buen comportamiento. Todos los cálculos se han supuesto en un entorno ideal, donde tanto las fuerzas aerodinámicas como el efecto suelo han sido despreciadas y se supone que el dron es un sólido rígido.

Una vez el modelo del dron ha quedado definido y descrito, se procederá a realizar una serie de simulaciones, con la ayuda de un simulador de vuelo proporcionado por el Grupo de Robótica, Visión y Control. A partir de los resultados que se obtendrán, se extraerán las conclusiones pertinentes.

## 1.2 Estructura

Para llevar a cabo todas las tareas que supone el estudio de este tilting quadrotor, este trabajo se dividirá en 4 bloques:

- **Modelado y control del quadrotor:** Capítulo 2. Comenzando con una explicación del funcionamiento de los drones, en este capítulo se realizará el estudio y deducción de todas las ecuaciones que permitirán definir la dinámica y cinemática del UAV. Además, debido a que la inclusión de servomotores introducirá nuevas variables a controlar, se realizará un estudio de las diferentes opciones que se han abordado para tratar de encontrar una solución que permita definir las.
- **Implementación en simulador:** Capítulo 3. En esta sección se explicará el funcionamiento del simulador de vuelo empleado para este trabajo, así como las modificaciones que se le han realizado para que implemente las ecuaciones obtenidas en el apartado de "Modelado del quadrotor"
- **Análisis de puntos singulares:** Capítulo 4. Para terminar de definir el dron, se estudiarán las posiciones y orientaciones para las que el modelo elaborado hace que el UAV presente un comportamiento anómalo.
- **Resultados:** Capítulo 5. Por último, para probar el funcionamiento del dron, se realizarán una serie de simulaciones, con diferentes condiciones, y se analizará el comportamiento y la precisión que presenta el modelo elaborado.

## 2 Modelado del quadrotor

---

En este primer capítulo del trabajo se abordarán las cuestiones relacionadas con la búsqueda de ecuaciones del modelo. Se comenzará haciendo una definición de los sistemas de referencia donde se va a trabajar y se continuará con las deducciones de las ecuaciones que modelan la dinámica y cinemática del dron. Por último, se estudiarán las posibles opciones que permiten establecer las fórmulas para hallar los valores de las nuevas variables de control que introducen los servomotores, las orientaciones de los rotores.

### 2.1 Funcionamiento de los multirrotores

Antes de comenzar a acotar el problema para el caso específico que se estudiará en este Trabajo de Fin de Carrera, es conveniente exponer y comprender el funcionamiento y los principios que rigen el comportamiento y la física de los multirrotores. A pesar de que existen diferentes configuraciones, la teoría que se aplica es similar para todas ellas.

Los drones multirrotores, como su propio nombre indica, son vehículos aéreos no tripulados que presentan varios rotores, elementos rotatorios unidos a hélices que al girar producen un flujo de aire. Este flujo, permite generar una fuerza perpendicular al plano de giro, conocida como empuje. Además, en cada uno de los rotores se generará un par, un momento de fuerza que ejerce un motor sobre su eje de rotación. Por un lado, el valor del empuje resultante, es decir, la suma de las fuerzas generadas por cada rotor en el centro de masas del dron, será el que permita el desplazamiento. Por otro lado, el valor del momento resultante será el que produzca los movimientos de rotación. En la [Figura 2.1] se puede observar un esquema de las fuerzas generadas por un cuadricóptero.

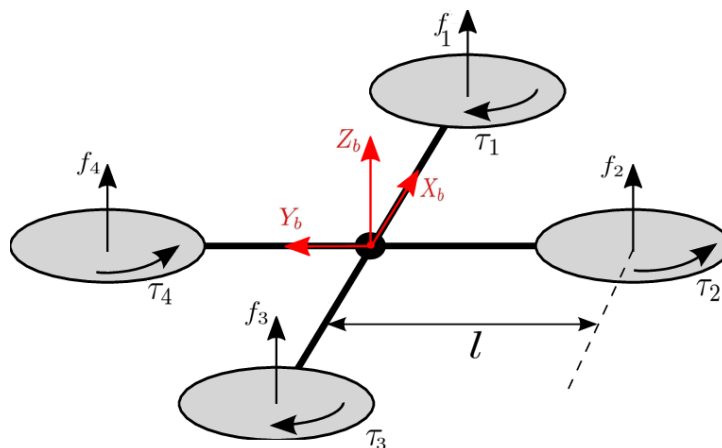


Figura 2.1 Fuerzas y momentos generados en un dron.

El primer aspecto a tener en consideración, según lo comentado en el párrafo anterior, es que si cada motor produce un par de fuerzas al girar, siempre existirá un momento distinto de cero en el centro del dron, por

lo que se encontraría permanentemente rotando. Para evitar que el quadrotor se desestabilice en el aire, se produzca un momento resultante distinto de cero en el eje vertical del cuerpo y comience a dar vueltas sobre sí mismo, dos de los rotores deberán girar en sentido antihorario, mientras que los otros dos lo harán en sentido horario. De esta forma, los momentos producidos se contrarrestan siempre que las fuerzas sean iguales.

El segundo aspecto a tener en cuenta, será el valor del sumatorio de las fuerzas generadas por cada rotor. Como se indicó anteriormente, la dirección que poseerán será la perpendicular al plano en el se encuentran los rotores. Si este plano permite generar fuerzas con componente  $\vec{i}$ , como ocurre en el caso de los drones tilting rotors y los fully actuated, entendiendo  $[\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}]$  como los vectores unitarios que tienen, respectivamente, la dirección del eje X, el eje Y y el eje Z con sentido positivo, el dron podrá desplazarse a lo largo del eje X sin rotar. En caso de que sean de tipo convencional, deberán trasladarse únicamente variando las fuerzas que se generan en los rotores que, al no ser iguales, producirán un momento distinto de cero en el centro de masas y por tanto rotará, proyectando el empuje en el plano horizontal y desplazándose lateralmente consecuentemente.

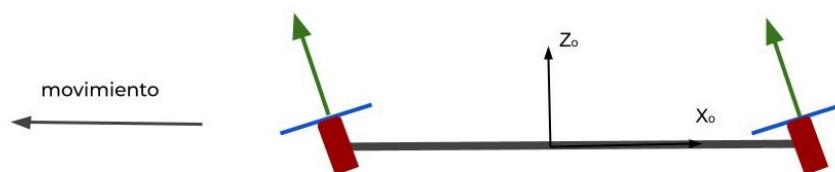


Figura 2.2 Movimiento en un dron tiltrotor.

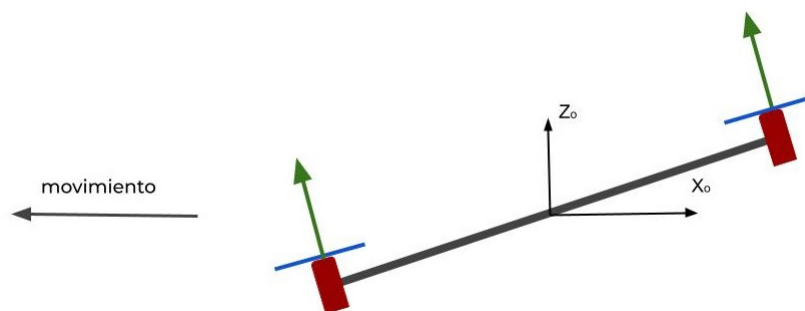


Figura 2.3 Movimiento en un dron convencional.

En resumen, dependiendo del valor y la dirección de la fuerza y el momento resultantes, el dron podrá adoptar distintas orientaciones y posiciones en el espacio. A continuación, una vez comprendido de qué depende el movimiento de los drones, se explicará más en detalle cómo deben actuar los rotores del dron para modificar su posición.

Un multirrotor puede realizar movimientos de traslación a través de los 3 ejes del espacio. Los distintos desplazamientos se pueden efectuar modificando las velocidades de giro de cada uno de los rotores, lo que afectará directamente a las fuerzas producidas al mantener una relación proporcional. Por ejemplo, para lograr que el dron avance hacia delante, habrá que aumentar las revoluciones de los motores traseros, a la vez que se disminuyen las de los delanteros. En el caso de que se desee un desplazamiento lateral, bastará con extrapolar el concepto anterior a los rotores alojados a la izquierda y a la derecha del cuerpo principal.

Por otro lado, además de la traslaciones, un dron puede girar en torno los diferentes ejes del espacio. Dependiendo de sobre qué eje este realizando esta rotación, el movimiento se conoce como cabeceo (eje transversal o lateral), alabeo (eje longitudinal) o guiñada (eje vertical) o como más comúnmente se denominan, haciendo uso de sus anglicismos, *Roll*, *Pitch* y *Yaw* [Ver Figura 2.5]. Para conseguir que el UAV rote en *roll*

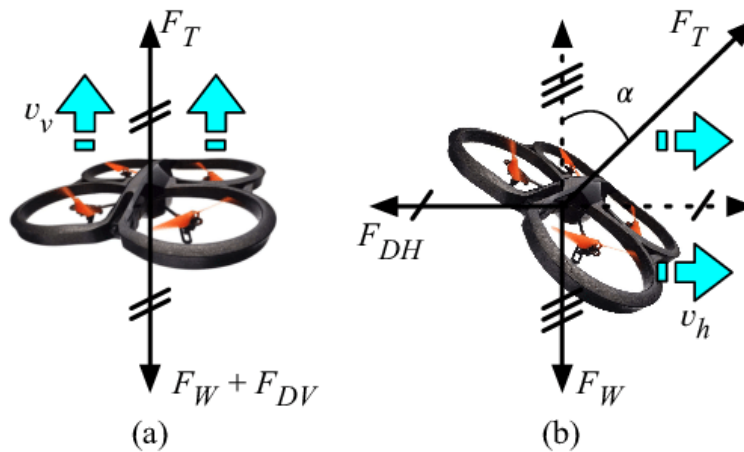


Figura 2.4 Movimientos del dron.

y *pitch*, se aplica la misma filosofía que se describió en el párrafo anterior. Para el caso del yaw, los rotores que habrá que acelerar o desacelerar serán los que se encuentran en posiciones diametralmente opuestas. Como puede deducirse, en los drones donde los rotores no estén girados o no tengan la capacidad de hacerlo, los movimientos de rotación estarán ligados a los de traslación.

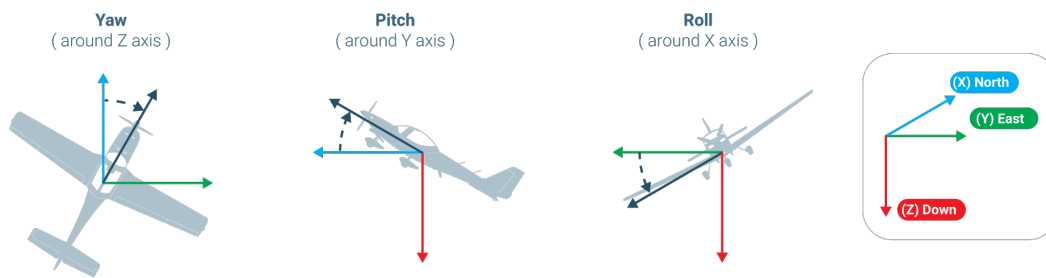


Figura 2.5 Movimientos de rotación.

Recapitulando lo que se comentó en los últimos párrafos del capítulo introductorio, cabe recordar antes de continuar, la diferencia que existía entre los drones convencionales y los de tipo *tiltrotor*. En el caso de los UAVs convencionales, donde la orientación de las hélices es fija y poseen rotores son coplanarios, el cuerpo del vehículo debería inclinarse para conseguir el desplazamiento dado que los movimientos de traslación están ligados a los de rotación. La ventaja que presenta uno tipo *tiltrotor*, es la capacidad trasladarse sin realizar este giro, ya que se consigue desacoplar traslaciones de rotaciones mediante la incorporación de servomotores. Para efectuar las traslaciones deberá, sin embargo, pivotar los rotores mediante el uso de los servos.

Una vez se han introducido todos los conceptos previos necesarios para comprender el funcionamiento de los multirrotores, se puede proceder a particularizar los parámetros que definen el tilting quadrotor objeto de este trabajo.

## 2.2 Descripción del tilting quadrotor

De entre todos los tipos de UAV que pueden encontrarse a día de hoy, el dron tomado como objeto de estudio para elaborar este Trabajo de Fin de Grado se trata de un *tilting rotor quadcopter* con configuración tipo H. Poseerá la capacidad de variar la inclinación del plano de las hélices gracias a la incorporación de 2 servomotores.

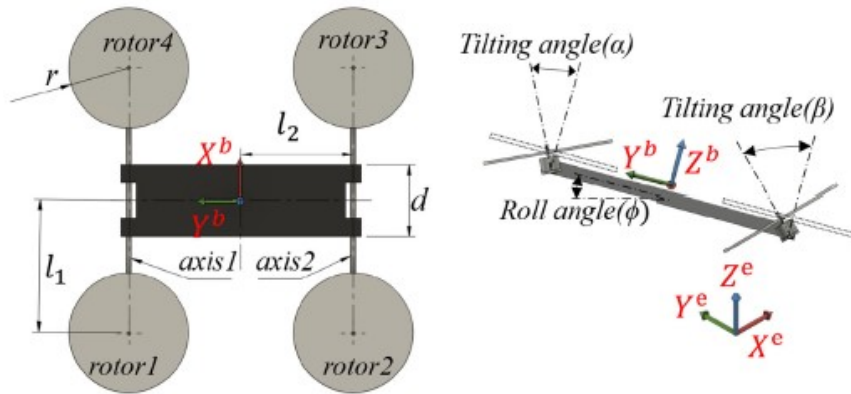


Figura 2.6 Fuerzas de un tiltrotor quadcopter [4].

El UAV contará con 5 grados de libertad. Podrá realizar de manera independiente, traslaciones a lo largo del eje vertical y longitudinal, ejes Z y X respectivamente, y 2 rotaciones, en Yaw y en Pitch. Sin embargo, debido a que cuenta con dos servos, cuyo movimiento se limita al plano XZ, el movimiento a lo largo del eje Y no estará desacoplado del giro en Roll, es decir, una inclinación en torno al eje X, implicará un desplazamiento a lo largo del eje lateral Y.

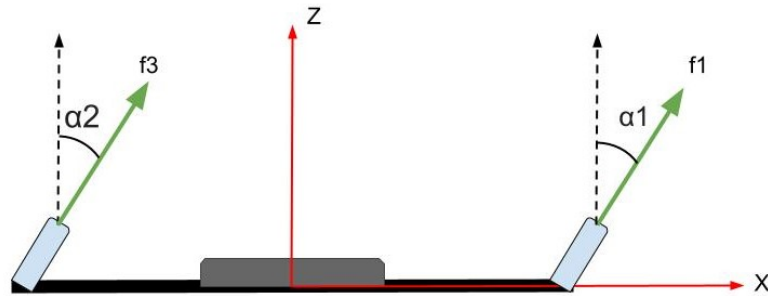


Figura 2.7 Esquema rotores inclinados.

Como puede observarse en la Figura 2.7, dotar al dron de la capacidad de cambiar la inclinación de sus rotores, le permite alternar entre posiciones donde los planos de giro son coplanarios a otras donde no mientras se encuentra en el aire. Además, como consecuencia, posibilita que las fuerzas propulsivas que generan puedan tener una componente horizontal, al contrario de lo que ocurría en la Figura 2.4, donde la fuerza podía tener únicamente componente vertical en el caso en el que el dron no se encontrase inclinado.

En los tiltrotor, es esta capacidad de pivotar sus rotores lo que permite desacoplar las rotaciones de las traslaciones, permitiendo así al dron, mantenerse fijo en un punto del espacio a la vez que permanece inclinado. Debido a que el UAV que se estudia en este trabajo posee 5 grados de libertad, solo se podrá efectuar un giro independiente de la traslación alrededor del eje Y, es decir, orientaciones en Pitch. Es por esto que, lo explicado en este párrafo, será posible únicamente para ángulos de Pitch, estando el giro en Roll aun vinculado a un movimiento a lo largo del eje Y.

A pesar de que existen multirrotores que permiten cambiar los planos de giro de todos los rotores de manera independiente, dado que el dron estudiado en este trabajo solo posee dos servomotores y no cuatro, podrá cambiar la orientación de sus rotores dos a dos, es decir, los rotores se inclinarán por parejas. Los rotores 1 y 2 poseerán el mismo giro entre ellos, así como el 3 y el 4.



El modelo del vehículo será similar al mostrado en la Figura 2.8. Esta disposición de los rotores se denomina tipo H. El esquema del dron estudiado se muestra en la Figura 2.11. El sentido de giro de los rotores 1 y 3 será horario, mientras que el de los rotores 2 y 4 será antihorario para conseguir que el momento total en el eje vertical sea nulo.



Figura 2.8 Tilting quadrotor.

Con vistas a realizar el control, la posibilidad de realizar cambios en la orientación de los servomotores incrementará en dos el número de variables, lo que aumentará la complejidad del mismo. Por tanto, este sistema estará conformado por 6 variables manipulables: 4 para las velocidades de giro de cada rotor y 2 para las inclinaciones.

## 2.3 Sistema de referencia

Antes de desarrollar las ecuaciones que gobernarán el modelo dinámico del UAV, es de vital importancia definir un sistema de referencia inercial que permita expresar cada una de las fuerzas y momentos a los que estará sometido el dron.

El sistema de referencia inercial estará ligado a la Tierra  $\mathcal{F}_w = O_w \{X_w, Y_w, Z_w\}$ . Además, el quadrotor como sólido rígido, tendrá un sistema de referencia ligado a él, cuyo origen coincide con su centro de masas  $\mathcal{F}_b = O_b \{X_b, Y_b, Z_b\}$ .

En resumen, se contará con dos sistemas de referencia, uno inercial ligado a la Tierra y otro no inercial ligado al dron, donde se expresarán todas las magnitudes del problema.

Para describir la posición del UAV con respecto a los ejes Tierra, será necesario definir ciertas matrices de transformación que permitan referenciar las coordenadas de un sistema a otro. Para llevar a cabo esta tarea, se emplearán los ángulos de Euler, que prueban que todo sistema puede ser descrito mediante tres ángulos, o lo que es lo mismo, tres rotaciones. Las matrices que recogen esta transformación para el caso tridimensional son:

- Rotación en X, ángulo  $\phi$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

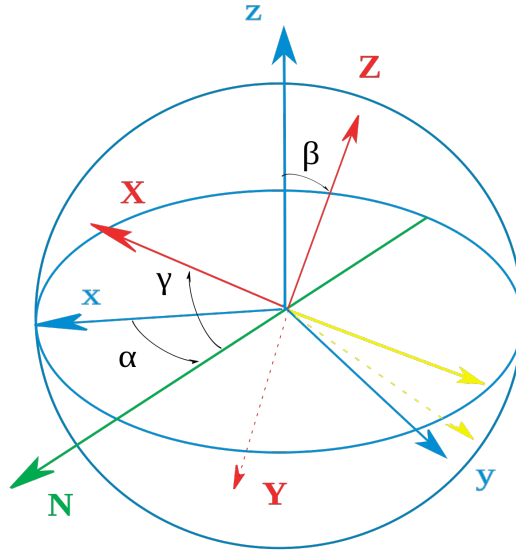


Figura 2.9 Ángulos de Euler.

- Rotación en Y, ángulo  $\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

- Rotación en Z, ángulo  $\psi$

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La matriz que engloba estas tres transformaciones se obtiene como el producto de las tres anteriores:

$$R_t = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \quad (2.4)$$

$$R_{wb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ 0 & \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$R_{wb} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) - \cos(\phi) \text{sen}(\psi) & \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \text{sen}(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) & \cos(\phi) \text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) - \cos(\psi) \text{sen}(\phi) \\ -\text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Esta matriz, permite transformar coordenadas expresadas en ejes cuerpo a coordenadas de ejes Tierra. Sin embargo, es importante conocer también la relación contraria. Haciendo uso de la propiedad de ortogonalidad de la matriz de transformación, se define su inversa como su traspuesta.

$$R^T R = I_n \quad (2.7)$$

Por tanto, la matriz que permite traducir las coordenadas de ejes Tierra a ejes cuerpo es:

$$R_{bw} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\theta) \text{sen}(\psi) & -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\psi) \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) - \cos(\phi) \text{sen}(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \text{sen}(\theta) & \cos(\phi) \text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) - \cos(\psi) \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Una vez han quedado definidas las matrices de transformación que permite expresar las magnitudes en ambos sistemas de referencia, el siguiente paso será obtener las relaciones entre las velocidades angulares de ambos.

Se comienza derivando, con respecto al tiempo, la ecuación (2.8):

$$\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0_n \quad (2.9)$$

Realizando un cambio de variable,  $S = R^T \dot{R}$ , el sistema anterior podría expresarse como:

$$S^T + S = 0_n \quad (2.10)$$

Despejando, se obtiene que esta nueva matriz S es antisimétrica, lo que quiere decir que su traspuesta es igual a su inversa. Añadido al hecho de que R es ortonormal, el sistema se puede reescribir como:

$$S = R^{-1} \dot{R} \quad (2.11)$$

$$\dot{R} = R \cdot S(\omega) \quad (2.12)$$

Donde  $\omega$  es un vector que recoge las velocidades angulares de los ejes ligados al dron,  $\omega = [p \ q \ r]^T$ , R es la matriz obtenida después de haber multiplicado las 3 matrices de rotación de los ángulos de Euler y  $\dot{R}$  su derivada temporal.

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Tras realizar las operaciones pertinentes, se toman 3 de las componentes de la matriz resultante:

$$\begin{cases} \dot{r}_{11} = r \cdot (\cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) - \cos(\phi) \operatorname{sen}(\psi)) - q \cdot (\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\theta)) \\ \dot{r}_{31} = r \cdot (\operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)) - q \cdot \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \dot{r}_{33} = q \cdot (-\operatorname{sen}(\theta)) - p \cdot (\operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)) \end{cases} \quad (2.15)$$

Derivando la matriz  $\mathbb{R}$  con respecto al tiempo para obtener las componentes  $\dot{r}_{11}$ ,  $\dot{r}_{31}$  y  $\dot{r}_{33}$  se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{r}_{11} = -\dot{\psi} \cdot (\operatorname{sen}(\psi) \cos(\theta)) - \dot{\theta} \cdot (\operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi)) \\ \dot{r}_{31} = -\dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ \dot{r}_{33} = -\dot{\phi} \cdot (\operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)) - \dot{\theta} (\operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi)) \end{cases} \quad (2.16)$$

Por último, despejando del sistema las variables correspondientes, se consigue la siguiente relación entre las velocidades angulares del sistema fijo al dron ( $[p \ q \ r]^T$ ) y el sistema de referencia inercial ligado a la Tierra  $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.4 Generación de fuerzas y momentos

En el apartado de "Funcionamiento de los multirrotores", al comienzo de este mismo capítulo, se dieron unas breves pinceladas sobre cómo se generaban las fuerzas y los momentos en un multirrotor. En este subcapítulo,

se pretende profundizar en el tema especificándolo, además, para el tilting quadcopter de 5 grados de libertad.

Antes de continuar definiendo las fuerzas y momentos que actúan sobre el dron, es importante destacar algunas suposiciones que se han tenido en cuenta para el desarrollo del problema:

- La estructura del dron es rígida.
- El centro de masas, o centro de gravedad, del UAV coincidirá con el origen de coordenadas de los ejes cuerpo.
- Tanto las fuerzas como los pares resistivos generados por el giro de las hélices serán proporcionales al cuadrado de la velocidad de giro.
- No se tendrá en cuenta el efecto suelo, ni las fuerzas de resistencia aerodinámica.

Cada rotor producirá, al girar, una fuerza y un momento. Esta fuerza será la de empuje de cada hélice, que producirá a su vez un momento en el centro de masas. Además, también se genera un momento debido al arrastre de las mismas. Pueden definirse como:

$$F_{thrust} = C_f \omega^2 \quad (2.18)$$

$$\tau_{drag} = C_d \omega^2 \quad (2.19)$$

Siendo  $\omega$  la velocidad de giro y  $C_d$  y  $C_f$  los factores de arrastre y empuje de las hélices respectivamente.

Todas las fuerzas y los momentos producido por cada uno de los cuatro rotores del dron, podrán simplificarse en una fuerza y un momento resultantes aplicados al centro de masas del quadcopter.

$$\left\{ \vec{F}_i \right\}_1^{N_F}, \quad \left\{ \vec{M}_i \right\}_1^{N_M} \rightarrow \left\{ \vec{F}_{CM}, \vec{M}_{CM} \right\} \quad (2.20)$$

Siendo:

$$\vec{F}_{CM} = \sum_{i=1}^{N_F} \vec{F}_i \quad (2.21)$$

$$\vec{M}_{CM} = \sum_{i=1}^{N_M} \vec{M}_i + \sum_{i=1}^{N_F} \overrightarrow{CM \cdot \vec{P}_i} \times \vec{F}_i \quad (2.22)$$

Los términos que pueden apreciarse en las ecuaciones, hacen referencia a:

- $F_i$  y  $M_i$  = Fuerzas y Momentos producidos por cada uno de los rotores que componen el dron.
- $F_{CM}$  y  $M_{CM}$  = Fuerza y Momento resultantes en el centro de masas del sistema.
- $N_F$  y  $N_M$  = Número de fuerzas y momentos.
- $\overrightarrow{CM \cdot \vec{P}_i}$  = Vector que une el centro de masas con el punto de aplicación de las fuerzas.

Se comenzará estudiando la fuerza resultante. Dado que la fuerza tendrá una dirección contenida en el plano XZ, la componente Y de la misma será nula para todos los instantes de tiempo.

En cuanto a las componentes X y Z, al ser  $\alpha$  el ángulo de orientación de los rotores, siendo el  $0^\circ$  el valor que tienen cuando se encuentran totalmente en vertical, bastará con proyectarla de la forma:

$$F_x = F_i \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (2.23)$$

$$F_z = F_i \cdot \text{cos}(\alpha) \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

Por tanto, tras aplicar el teorema de la cantidad de movimiento, la fuerza resultante en el centro de masas será:

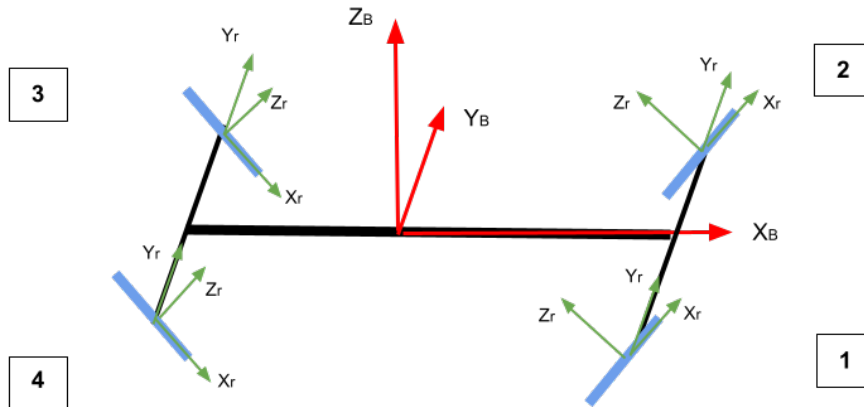


Figura 2.10 Esquema del dron con los rotores girados.

$$F_{CM} = \begin{pmatrix} F_1 s(\alpha_1) + F_2 s(\alpha_1) + F_3 s(\alpha_2) + F_4 s(\alpha_2) \\ 0 \\ F_1 c(\alpha_1) + F_2 c(\alpha_1) + F_3 c(\alpha_2) + F_4 c(\alpha_2) \end{pmatrix}_{B''} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Donde  $F_i$  son las fuerzas propulsivas generadas por los rotores,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son las orientaciones de las parejas de rotores 1-2 y 3-4 respectivamente,  $s$  es el seno y, por último,  $c$  el coseno.

Esta fuerza es la que sufre el centro de masas del dron referenciada en ejes cuerpo.

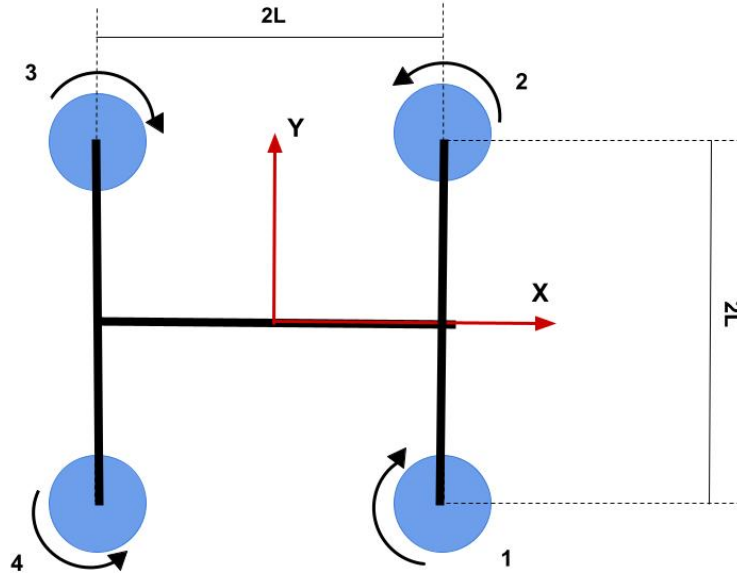


Figura 2.11 Esquema quadcopter.

Antes de definir el momento resultante, necesario concretar el sentido de giro de los rotores así como las distancias al centro de gravedad. Los rotores 1 y 3 girarán en sentido horario, mientras que el 2 y el 4 lo harán

en sentido horario, ver Figura 2.11. Por tanto, los momentos generados en el centro de masas por cada fuerza de empuje son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} F_1 (-L_y \cos(\alpha_1)) \\ F_1 (-L_x \cos(\alpha_1)) \\ F_1 (L_y \sin(\alpha_1)) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.27)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} F_2 L_y \cos(\alpha_1) \\ F_2 (-L_x \cos(\alpha_1)) \\ -F_2 (L_y \sin(\alpha_1)) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.28)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} F_3 (-L_y \cos(\alpha_2)) \\ F_3 L_x \cos(\alpha_2) \\ F_3 (-L_y \sin(\alpha_2)) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.29)$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} F_4 \cos(\alpha_2) \\ F_4 L_x \cos(\alpha_2) \\ F_4 - L_y \sin(\alpha_2) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.30)$$

Una vez definidos los momentos producidos por las fuerzas de empuje en el centro de masas, se procede a calcular los momentos de arrastre generados. Estos pares serán opuestos al sentido de giro del rotor donde se produzca.

$$M_{1d} = \begin{pmatrix} F_1 k \sin(\alpha_1) \\ 0 \\ F_1 \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.31)$$

$$M_{2d} = \begin{pmatrix} -F_2 \sin(\alpha_1) \\ 0 \\ -F_2 \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.32)$$

$$M_{3d} = \begin{pmatrix} F_3 \sin(\alpha_2) \\ 0 \\ F_3 \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.33)$$

$$M_{4d} = \begin{pmatrix} F_4 \sin(\alpha_2) \\ 0 \\ -F_4 \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.34)$$

Agrupándolos en una sola matriz, el momento resultante en el centro de masas queda:

$$M_{CM} = \begin{pmatrix} (F_1 - F_2)(k \sin(\alpha_1) - L_y \cos(\alpha_1)) + (F_3 - F_4)(k \sin(\alpha_2) - L_y \cos(\alpha_2)) \\ (F_1 + F_2)(-L_x \cos(\alpha_1)) + (F_3 + F_4)L_x \cos(\alpha_2) \\ (F_1 - F_2)(k \cos(\alpha_1) + L_y \sin(\alpha_1)) + (F_3 - F_4)(k \cos(\alpha_2) - L_y \sin(\alpha_2)) \end{pmatrix} \text{ "B"} \quad (2.35)$$

Siendo  $k = \frac{C_d}{C_f}$ .

## 2.5 Definición de las variables de control

Una vez se han definido las fuerzas y momentos a los que estará sometido el dron, se puede pasar a definir el problema de control como un sistema de ecuaciones.

El fin de esta sección es la de conseguir hallar un sistema que permita traducir las fuerzas y torques resultantes, que es necesario producir para que el dron describa la trayectoria que se desee, a parámetros de los rotores. Como estas son directamente proporcionales al cuadrado de la velocidad de giro, el objetivo consistirá en computar qué orientaciones y velocidades de giro será necesario aplicarle a cada uno de los rotores para que produzcan la fuerza y momento resultantes dados por los controladores.

El sistema presentará la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} F_{des} \\ M_{des} \end{bmatrix} = M(\alpha_1, \alpha_2)u \quad (2.36)$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = M(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

El vector de la izquierda,  $[f_x f_y f_z \tau_x \tau_y \tau_z]$ , recoge las fuerzas y torques resultantes que deben aplicarse en el centro de masas según su eje de aplicación. M será el mixer, una matriz que permite traducir el vector anterior a parámetros de los rotores, es decir, a velocidades de giro y orientaciones. Por último, el vector de la derecha,  $[\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4]$ , será el vector de incógnitas cuyas componentes serán las velocidades de giro de las hélices.

Si englobásemos las fuerzas y los torques calculados en el apartado anterior en una matriz, se obtendría:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 s(\alpha_1) + F_2 s(\alpha_1) + F_3 s(\alpha_2) + F_4 s(\alpha_2) \\ 0 \\ F_1 c(\alpha_1) + F_2 c(\alpha_1) + F_3 c(\alpha_2) + F_4 c(\alpha_2) \\ (F_1 - F_2)(k \text{sen}(\alpha_1) - L_y \text{cos}(\alpha_1)) + (F_3 - F_4)(k \text{sen}(\alpha_2) - L_y \text{cos}(\alpha_2)) \\ (F_1 + F_2)(-L_x \text{cos}(\alpha_1)) + (F_3 + F_4)L_x \text{cos}(\alpha_2) \\ (F_1 - F_2)(k \text{cos}(\alpha_1) + L_y \text{sen}(\alpha_1)) + (F_3 - F_4)(k \text{cos}(\alpha_2) - L_y \text{sen}(\alpha_2)) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Reescribiendo la matriz anterior como un sistema de ecuaciones, sacando fuera de ellas las incógnitas  $F_1, F_2, F_3$  y  $F_4$  el sistema podría reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f s(\alpha_1) & C_f s(\alpha_1) & C_f s(\alpha_2) & C_f s(\alpha_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_f c(\alpha_1) & C_f c(\alpha_1) & C_f c(\alpha_2) & C_f c(\alpha_2) \\ C_d s(\alpha_1) - L_y C_f c(\alpha_1) & L_y C_f c(\alpha_1) - C_d s(\alpha_1) & C_d s(\alpha_2) + L_y C_f c(\alpha_2) & -C_d s(\alpha_2) - L_y C_f c(\alpha_2) \\ -L_x C_f c(\alpha_1) & -L_x C_f c(\alpha_1) & L_x C_f c(\alpha_2) & L_x C_f c(\alpha_2) \\ C_d c(\alpha_1) + L_y C_f s(\alpha_1) & -C_d c(\alpha_1) - L_y C_f s(\alpha_1) & C_d c(\alpha_2) - L_y C_f s(\alpha_1) & L_y C_f s(\alpha_2) - C_d c(\alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

, siendo c el coseno y s el seno.

Este sistema permitirá calcular las fuerzas y torques resultantes a partir de las velocidades de giro. Sin embargo, el problema del que se busca encontrar la solución es el opuesto ya que, tras la aplicación del control, lo que se obtendrá será el vector de actuación, o lo que es lo mismo, el vector que recoge las fuerzas que deben aplicarse en el dron, siendo las incógnitas las velocidades y las orientaciones de los rotores.

Para resolver el problema opuesto, el sistema deberá presentar la siguiente forma:

$$M(\alpha_1, \alpha_2)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F_{res} \\ M_{res} \end{bmatrix} = u \quad (2.40)$$

Siendo  $M^{-1}$  la inversa del mixer.

Al ser el mixer no invertible se usará la pseudo inversa de Moore-Penrose. Esta técnica permitirá calcular una aproximación de la inversa de M aplicando mínimos cuadrados.

El gran problema que presenta este sistema es que dos de las incógnitas que deben hallarse se encuentran definidas dentro del propio mixer, por lo que la matriz no puede ser invertida. Por ello, en los siguientes apartados se evaluarán la eficacia y funcionalidad de diferentes técnicas y métodos que permitan encontrar soluciones únicas para el sistema.

Se evaluarán 3 soluciones: en la primera de ellas se tratará de realizar un cambio de variable que permita transformar el mixer en una matriz estática independiente de las incógnitas, en la segunda, se tratará de efectuar un problema de optimización que minimice el consumo y por último, se propondrá una ecuación para calcular las orientaciones de los rotores.

### 2.5.1 Propuesta 1: Mixer estático

El problema de control se resume en encontrar las velocidades de los 4 rotores  $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$  así como sus posiciones angulares  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Sin embargo, esta búsqueda no resulta trivial. Por un lado se tienen 6 variables de entrada  $[f_x, f_y, f_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z]$  frente a 6 de salida  $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \alpha_1, \alpha_2]$ , sin embargo, las orientaciones se encuentran definidas en el mixer. Por otro lado, debido a cómo están definidas las orientaciones de los rotores, impiden que la matriz sea invertible.

La primera solución que se propuso para tratar de abordar este problema, está basada en la llevada a cabo en el artículo "*An Omnidirectional Hexacopter With Tiltable Rotors*" [5]. En este documento se intenta linealizar, realizando un cambio de variable, con el que consiguiese obtener un mixer independiente de la orientación de los rotores, es decir, de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

Este cambio consistía en descomponer las fuerzas generadas por cada uno de los rotores en sus componentes lateral y vertical según las siguientes ecuaciones, ver (2.41) y (2.42):

$$F_{l,i} = C_f \text{sen}(\alpha_i) \omega_i^2 \quad (2.41)$$

$$F_{v,i} = C_f \text{cos}(\alpha_i) \omega_i^2 \quad (2.42)$$

Reescribiendo el vector de fuerzas y el mixer, quedarían de la siguiente forma:

$$F_{rot} = [F_{l,1} \quad F_{v,1} \quad F_{l,2} \quad F_{v,2} \quad F_{l,3} \quad F_{v,3} \quad F_{l,4} \quad F_{v,4}] \quad (2.43)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & -L_y & -k & L_y & k & L_y & -k & L_y \\ 0 & -L_x & 0 & -L_x & 0 & L_x & 0 & L_x \\ L_y & k & -L_y & -k & -L_y & k & L_y & -k \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Siendo  $k = \frac{C_d}{C_f}$ .

Las ecuaciones que deshacen el cambio de variable son:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{C_f} \sqrt{F_{l,i}^2 + F_{v,i}^2} \quad (2.45)$$

$$\alpha_i = \text{tan}\left(\frac{F_{l,i}}{F_{v,i}}\right) \quad (2.46)$$

El nuevo sistema pasará a tener la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} F_{des} \\ M_{des} \end{bmatrix} = \hat{A}_{rot} F_{rot} \quad (2.47)$$

Por tanto, invirtiendo la expresión anterior, se obtiene el sistema que permite hallar las variables que controlan las fuerzas que deben aplicarse a cada rotor:

$$F_{rot} = \hat{A}_{est}^{-1} \begin{bmatrix} F_{res} \\ M_{res} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



Para invertir A, es decir, el nuevo mixer, se usará también la pseudo-inversa de Moore-Penrose debido a que no es invertible.

Al plantear esta solución, se obtenía un sistema sobredeterminado. El problema consistía en 8 ecuaciones, 2 por cada rotor, ver (2.43), para despejar 6 incógnitas, 4 velocidades de giro  $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$  y dos orientaciones  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Por tanto, las soluciones a las que se llegaban no eran únicas.

Esta idea tuvo que desecharse, ya que no se logró hallar una ecuación que permitiese eliminar las soluciones redundantes y que completase el sistema para que fuese realizable.

### 2.5.2 Propuesta 2: Problema de optimización

Debido al fracaso de la primera propuesta, se óptó por intentar realizar el problema de optimización que se propone en el artículo "A Tilting-Rotor Unmanned Aerial Vehicle for Enhanced Aerial Locomotion and Manipulation Capabilities: Design, Control, and Applications" [4], donde se trata de minimizar el consumo.

Se vuelve al problema inicial, donde el mixer no era estático y dependía de los valores de la orientación de los rotores:

$$\begin{bmatrix} F_{res} \\ M_{res} \end{bmatrix} = A(\alpha_1, \alpha_2) F_{rot} \quad (2.49)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(\alpha_1) & s(\alpha_1) & s(\alpha_2) & s(\alpha_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c(\alpha_1) & c(\alpha_1) & c(\alpha_2) & c(\alpha_2) \\ ks(\alpha_1) - L_y c(\alpha_1) & L_y c(\alpha_1) - ks(\alpha_1) & L_y c(\alpha_2) + ks(\alpha_2) & -L_y c(\alpha_2) - ks(\alpha_2) \\ -L_x c(\alpha_1) & -L_x c(\alpha_1) & L_x c(\alpha_2) & L_x c(\alpha_2) \\ kc(\alpha_1) + L_y s(\alpha_1) & -kc(\alpha_1) - L_y s(\alpha_1) & kc(\alpha_2) - L_y s(\alpha_2) & -kc(\alpha_2) + L_y s(\alpha_2) \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

El consumo se modelará como el sumatorio de las fuerzas de cada uno de los rotores dado que son proporcionales al cuadrado de la velocidad de giro:

$$Consumo \approx \sum_{i=1}^4 F_i \quad (2.51)$$

Por tanto, se buscan las fuerzas que cumplan:

$$\min_{F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha, \beta} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.52)$$

Sujetas a las siguientes restricciones:

$$F_x = \sin(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \sin(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \quad (2.53)$$

$$F_y = 0 \quad (2.54)$$

$$F_z = \cos(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \cos(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \quad (2.55)$$

$$\tau_x = (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_1) - L_y \cdot \cos(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)) \quad (2.56)$$

$$\tau_y = (F_1 + F_2) \cdot (-\cos(\alpha_1)) + (F_3 + F_4) \cdot \cos(\alpha_2) \quad (2.57)$$

$$\tau_z = (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_1) + L_y \cdot \sin(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_2) - L_y \cdot \sin(\alpha_2)) \quad (2.58)$$

$$F_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.59)$$

Siendo  $k = \frac{C_d}{C_f}$ .

Sin embargo, a pesar de la optimización, se vuelve a obtener un sistema cuyas soluciones no son únicas debido al comportamiento no lineal que exhibe. Para eliminar las redundancias, se propone usar la solución que plantean Lu Lu y Caiwu Ding en su artículo sobre el control de un tilting quadrotor. Estos autores, llegaron a la conclusión de que, usando el método de los multiplicadores de Lagrange, se puede encontrar una relación entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que consiguiese eliminar la redundancia.

Se define la función objetivo (2.52) que recoge las ecuaciones anteriores como:

$$f(F_1, F_2, F_3, F_4) \quad (2.60)$$

Y las restricciones de igualdad como:

$$g_i(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2) \text{ con } i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.61)$$

Por tanto, el problema de optimización con restricciones usando el método de Lagrange resulta:

$$L(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \dots, \lambda_5) = f(F_1, F_2, F_3, F_4) + \sum_{k=1}^5 \lambda_k g_k(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2) \quad (2.62)$$

Definiendo  $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$  como los multiplicadores de Lagrange. Se toman 5 restricciones en lugar de 6 ya que se elimina la correspondiente a  $\alpha_2$ .

En el punto de mínimo local, se deben satisfacer las siguientes igualdades de primer orden:

$$\nabla(F_1, \dots, F_4, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \dots, \lambda_5) L(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \dots, \lambda_5) = 0 \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} \nabla(F_1, \dots, F_4, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \dots, \lambda_5) + \sum_{k=1}^5 \lambda_k g_k(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \\ g_1(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2) = \dots = g_5(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2) \end{cases} \quad (2.64)$$

Resolviendo este sistema, se llega a la conclusión de que la relación entre las orientaciones de los rotores que permite satisfacer el problema anterior es :

$$S_{\alpha_1} = S_{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \text{ o } \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \quad (2.65)$$

Esto quiere decir que la solución óptima para los ángulos de inclinación de los rotores es o que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  sean iguales, o que sumen  $\pi$ . Se tomará la primera opción como ecuación complementaria para añadir al sistema. Finalmente, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del dron son:

$$F_x = \sin(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \sin(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \quad (2.66)$$

$$F_y = 0 \quad (2.67)$$

$$F_z = \cos(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \cos(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \quad (2.68)$$

$$\tau_x = (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_1) - L_y \cdot \cos(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)) \quad (2.69)$$

$$\tau_y = (F_1 + F_2) \cdot (-\cos(\alpha_1)) + (F_3 + F_4) \cdot \cos(\alpha_2) \quad (2.70)$$

$$\tau_z = (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_1) + L_y \cdot \sin(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_2) - L_y \cdot \sin(\alpha_2)) \quad (2.71)$$

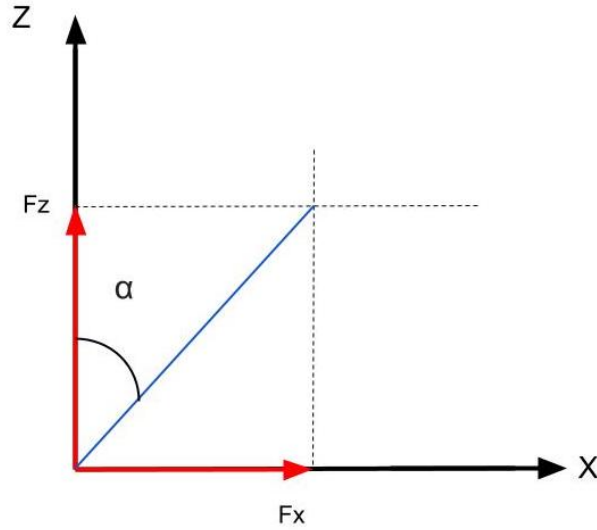
$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad (2.72)$$

$$F_1, F_2, F_3, F_4 > 0 \quad (2.73)$$

Para comprobar la eficacia de este problema, se trató de implementar el sistema en *Simulink*, entorno donde se realizarán las simulaciones de vuelo, haciendo uso de la instrucción que proporciona *Matlab* para este tipo de cuestiones, *optimproblem*, que le permite al usuario generar un problema de optimización. Sin embargo, este entorno no soportaba problemas de optimización. Finalmente, se optó por tomar la suposición de que las orientaciones de los servos debían coincidir y se trató de buscar otra forma de hallar su valor.

### 2.5.3 Propuesta 3: Ecuación para el cálculo de $\alpha$

Finalmente, se propuso como última solución tomar las ecuaciones del sistema del subapartado anterior con la diferencia de que se realizará el cálculo de  $\alpha_1$ , y por tanto  $\alpha_2$ , como la tangente de las fuerzas que se desean generar en cada uno de los ejes dron.



**Figura 2.12** Estimación de la orientación de los rotores.

Al ser  $F_y$  igual a cero para todos los instantes de tiempo,  $\alpha_1$  será el resultado de computar la arcotangente de la fuerza a generar en el eje X entre la que se quiere producir en el eje Z.

El sistema que gobernará finalmente el comportamiento del dron es:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \sin(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \sin(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \\
 F_y &= 0 \\
 F_z &= \cos(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \cos(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \\
 \tau_x &= (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_1) - L_y \cdot \cos(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)) \\
 \tau_y &= (F_1 + F_2) \cdot (-\cos(\alpha_1)) + (F_3 + F_4) \cdot \cos(\alpha_2) \\
 \tau_z &= (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_1) + L_y \cdot \sin(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_2) - L_y \cdot \sin(\alpha_2)) \\
 \alpha_1 &= \alpha_2 \\
 \alpha_1 &= \arctan\left(\frac{F_x}{F_z}\right)
 \end{aligned}$$

Se escoge esta ecuación ya que, para el caso que se está estudiando en este trabajo, el ángulo que forman las fuerzas que es necesario generar en las direcciones del eje X y Z, coincide con la orientación que deben adquirir los rotores. A pesar de que esta solución es factible, resultaría interesante ser capaces, en un futuro, de hallar otra ecuación que permita desacoplar las orientaciones de ambos servos, no dependiendo únicamente de la dirección del vector resultante de las fuerzas en el plano XZ.

De esta manera, quedan resueltas todas las incógnitas, eliminando cualquier redundancia que pudiese existir.

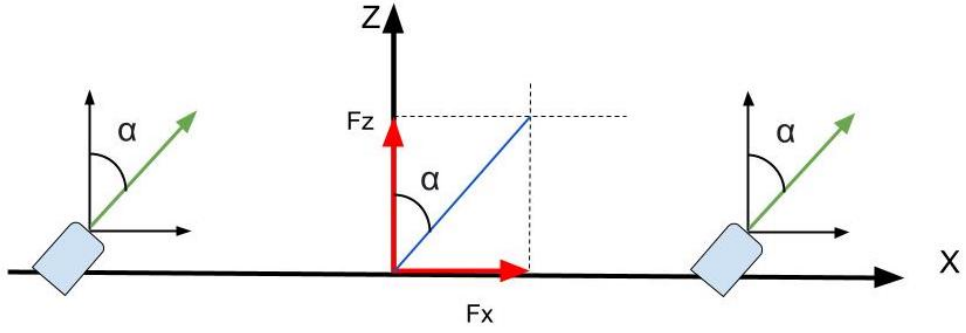


Figura 2.13 Vista del dron con rotores girados.

## 2.6 Ecuaciones de movimiento

Tras conocer las ecuaciones que gobernarán los parámetros de los rotores del quadrotor y que permitirán, por tanto, que describa una trayectoria predefinida, el siguiente paso para continuar desarrollando su modelo y su control es definir las ecuaciones que describirán su estado. En esta sección, se hallarán las fórmulas que permiten detallar la dinámica del dron.

### 2.6.1 Dinámica de traslación

Se comenzarán calculando las ecuaciones que describirán la dinámica de traslación del dron. En primer lugar, se describen las fuerzas que van a actuar sobre el UAV. Estas son:

- Fuerza gravitatoria:

$$\vec{F}_g = [ 0 \quad 0 \quad -mg ]^T \quad (2.74)$$

- Fuerzas de resistencia aerodinámica:

$$\vec{F}_D = [ F_{Dx} \quad F_{Dy} \quad F_{Dz} ]^T \quad (2.75)$$

- Fuerzas propulsivas de los rotores:

$$\vec{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (2.76)$$

Por tanto, aplicando las ecuaciones de Newton-Euler para este caso:

$$\left( \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \right)_{,F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext} = [\vec{F}_g] + [\vec{F}_D] + R_B(\phi, \theta, \psi) \cdot [\vec{f}] \quad (2.77)$$

En este trabajo, como se indicó al comienzo del apartado 2, se despreciarán las fuerzas debido al rozamiento con el aire. Desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\sum \vec{F} = m\dot{\vec{V}} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R_B(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Siendo  $R_B$  la matriz de transformación obtenida tras multiplicar las matrices de rotación de los ángulos de Euler, que permite traducir coordenadas cuerpo a coordenadas del sistema de referencia fijo a la Tierra.

Sustituyendo  $R_B$  por sus valores reales y multiplicándola por el vector de fuerzas se obtiene:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c(\psi) c(\theta) & c(\psi) s(\phi) s(\theta) - c(\phi) s(\psi) & s(\phi) s(\psi) + c(\phi) c(\psi) s(\theta) \\ c(\theta) s(\psi) & c(\phi) c(\psi) + s(\phi) s(\psi) s(\theta) & c(\phi) s(\psi) s(\theta) - c(\psi) s(\phi) \\ -s(\theta) & s(\phi) c(\theta) & c(\phi) c(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Despejando las aceleraciones  $[\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}]^T$  se obtienen las ecuaciones que gobiernan la dinámica de traslación:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{f_x}{m}(c(\psi) c(\theta)) + \frac{f_y}{m}(c(\psi) s(\phi) s(\theta) - c(\phi) s(\psi)) + \frac{f_z}{m}(s(\phi) s(\psi) + c(\phi) c(\psi) s(\theta)) \\ \ddot{y} = \frac{f_x}{m}(c(\theta) s(\psi)) + \frac{f_y}{m}(c(\phi) c(\psi) + s(\phi) s(\psi) s(\theta)) + \frac{f_z}{m}(c(\phi) s(\psi) s(\theta) - c(\psi) s(\phi)) \\ \ddot{z} = -g + \frac{f_x}{m}(-s(\theta)) + \frac{f_y}{m}(s(\phi) c(\theta)) + \frac{f_z}{m}(c(\phi) c(\theta)) \end{cases} \quad (2.80)$$

### 2.6.2 Dinámica de rotación

Tras obtener las ecuaciones de la dinámica de traslación, se prosigue con las de la dinámica de rotación. Para ello, se usará la formulación de Newton-Euler aplicada a la dinámica de rotación.

$$\sum \vec{M}_B = I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega \quad (2.81)$$

Siendo

- $I$  la matriz de inercias del quadrotor
- $\Omega$  el vector de velocidades angulares  $[p \quad q \quad r]^T$
- $\sum M_B$  el sumatorio de momentos externos referenciados en ejes cuerpo

La matriz de inercias puede expresarse como:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Dado que el dron es simétrico respecto a sus tres ejes principales y por tanto también lo será su distribución de masas, este tensor puede diagonalizarse. El resultado es:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Sustituyendo los valores de  $I$ ,  $\Omega$  y  $\dot{\Omega} = [\dot{p} \quad \dot{q} \quad \dot{r}]^T$  en la ecuación (2.81), se obtiene:

$$\sum M_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ p & q & r \\ p \cdot I_{xx} & q \cdot I_{yy} & r \cdot I_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.84)$$

Por último, se sustituye  $M$  por los pares de actuación producidos por los rotores,  $\sum M_B$  por  $[\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi]^T$

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p} \\ I_{yy}\dot{q} \\ I_{zz}\dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Despejando los valores de las velocidades angulares,  $[\dot{p} \quad \dot{q} \quad \dot{r}]$ :

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} + qr \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} + pr \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} + pq \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \end{cases} \quad (2.86)$$

Siendo la relación entre las velocidades angulares del sistema fijo al dron ( $[ p \ q \ r ]^T$ ) y el sistema de referencia inercial ligado a la Tierra  $[ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} ]^T$  la calculada en la ecuación (2.17).

## 2.7 Resumen de las ecuaciones

Antes de continuar con el simulador del dron, se hará un resumen de todo lo elaborado a lo largo de este capítulo.

En primer lugar, se calcularon las ecuaciones a partir de las cuales se podrán computar las acciones de control de los rotores, orientaciones y velocidades de giro. A su vez, gracias a dotarles de esas características, permitirán generar las fuerzas y momentos resultantes necesarios para llevar a cabo las trayectorias deseadas. Estas ecuaciones son:

$$\begin{cases} F_x = \sin(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \sin(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \\ F_y = 0 \\ F_z = \cos(\alpha_1) \cdot (F_1 + F_2) + \cos(\alpha_2) \cdot (F_3 + F_4) \\ \tau_x = (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_1) - L_y \cdot \cos(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)) \\ \tau_y = (F_1 + F_2) \cdot (-\cos(\alpha_1)) + (F_3 + F_4) \cdot \cos(\alpha_2) \\ \tau_z = (F_1 - F_2) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_1) + L_y \cdot \sin(\alpha_1)) + (F_3 - F_4) \cdot (k \cdot \cos(\alpha_2) - L_y \cdot \sin(\alpha_2)) \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_1 = \arctan\left(\frac{F_x}{F_z}\right) \end{cases} \quad (2.87)$$

En segundo lugar, gracias a la formulación de Newton-Euler, se pudieron deducir las ecuaciones que gobiernan el modelo del dron, es decir, aquellas que definen su dinámica de traslación y rotación. Estas son:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{f_x}{m}(c(\psi)c(\theta)) + \frac{f_y}{m}(c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\phi)s(\psi)) + \frac{f_z}{m}(s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)) \\ \ddot{y} = \frac{f_x}{m}(c(\theta)s(\psi)) + \frac{f_y}{m}(c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)) + \frac{f_z}{m}(c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)) \\ \ddot{z} = -g + \frac{f_x}{m}(-s(\theta)) + \frac{f_y}{m}(s(\phi)c(\theta)) + \frac{f_z}{m}(c(\phi)c(\theta)) \\ \dot{\phi} = p + q \cdot (\sin \phi \tan \theta) + r \cdot (\cos \phi \tan \theta) \\ \dot{\theta} = q \cdot (\cos \phi) + r \cdot (-\sin \phi) \\ \dot{\psi} = q \cdot (\sin \phi \sec \theta) + r \cdot (\cos \phi \sec \theta) \\ \dot{p} = \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} + qr \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} + pr \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} + pq \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \end{cases} \quad (2.88)$$

A partir de las ecuaciones que se han definido a lo largo de este apartado se procederá al montaje de un simulador de vuelo. En él, se incluirán las ecuaciones que modelan tanto la dinámica como la cinemática de tilting quadrotor, además de aquellas relacionadas con las variables de actuación del mismo.





## 3 Implementación en simulador

Una vez obtenidas las ecuaciones que modelan al tilting quadrotor, se continuará haciendo uso de un simulador que permita implementarlas, para así poder comprobar su funcionamiento dentro de un entorno ideal, es decir, sin perturbaciones. En este capítulo, se explicará el controlador que lleva a cabo dicho simulador, así como las modificaciones que se le han aplicado para particularizar el sistema para el multirrotor en H.

Se usará el *GRVC-Simulator of multirotors* proporcionado por el Grupo de Robótica, Visión y Control de la Universidad de Sevilla [6], modificándolo para las especificaciones del dron que se está estudiando en este trabajo.

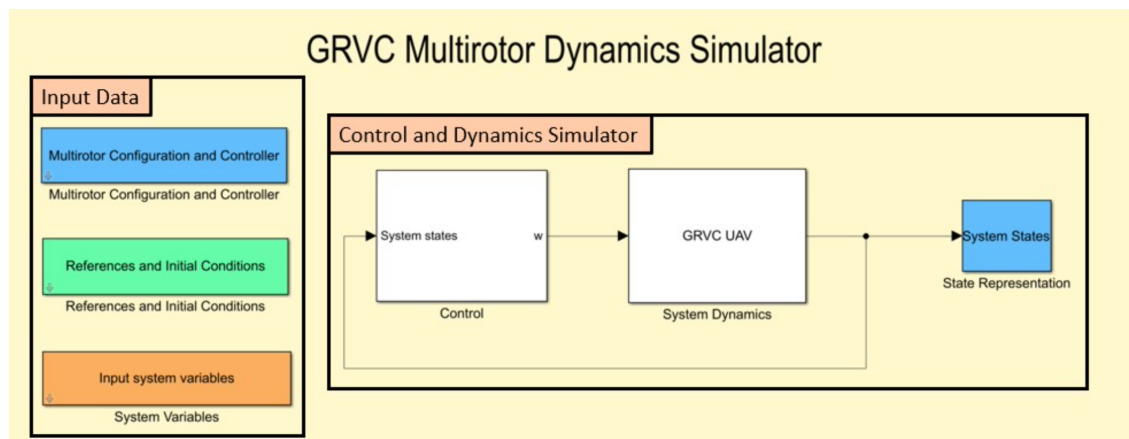


Figura 3.1 Simulador de Multirrotores [6].

El simulador puede dividirse en dos partes diferenciadas:

- **Datos de entrada:** Corresponde a los tres bloques, azul, verde y naranja, que se encuentran a la izquierda de la [Figura 3.1]. En ellos, se podrán definir tanto los datos específicos del dron (peso, momentos de inercia, velocidad máxima...), como la trayectoria que se desea que describa.
- **Bloques de control y dinámica:** Como su nombre indica, en estos bloques estará determinado el control que permitirá computar y determinar las fuerzas resultantes que deben ser generadas en cada uno de los ejes para que el dron describa la trayectoria definida en el bloque anterior, así como la transformación de estas fuerzas a parámetros del dron, velocidades y orientaciones. Además, se calculará el estado del mismo.

En caso del dron estudiado, al contar con 5 grados de libertad en lugar de 6, tendrá ciertos movimientos restringidos. En la caja color verde del bloque de datos de entrada "*References and initial conditions*", se podrán establecer como referencias puntos en el espacio tridimensional y ángulos en Pitch y en Yaw. Sin embargo, no será posible introducir una referencia en Roll ya que permanece ligado al desplazamiento en el eje Y y, por tanto, no podrá mantenerse inclinado sin que la rotación desencadene una traslación.

Los datos del multirroto tipo H objeto de estudio son:

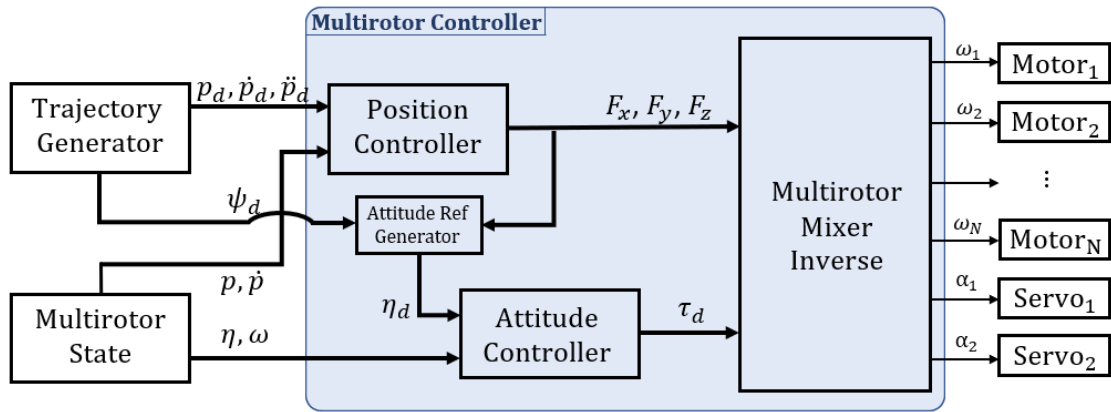
**Tabla 3.1** Datos dron.

Variable	Valor
Peso [kg]	1.787
Momento de inercia a lo largo de x [ $kg \cdot m^2$ ]	0.030
Momento de inercia a lo largo de y [ $kg \cdot m^2$ ]	0.029
Momento de inercia a lo largo de z [ $kg \cdot m^2$ ]	0.054
Factor de empuje [ $\frac{N}{(\frac{rad}{s})^2}$ ]	$3.146 \cdot 10^{-6}$
Factor de arrastre [ $\frac{Nm}{(\frac{rad}{s})^2}$ ]	$3.146 \cdot 10^{-7}$
Longitud de los rotores al centro de masas [m]	0.28
Radio de los rotores [m]	0.1143
Velocidad máxima de rotación de los rotores [rpm]	$960 \cdot 14.8$
Inercia de los rotores [ $kg \cdot m^2$ ]	0

Toda la información que se explica a continuación ha sido extraída del documento *GRVC Simulator of multirotors: design and application in classroom* de A. Gonzalez Morgado, G. Heredia, and A. Ollero [6].

### 3.1 Controlador

El primer paso para comprender el funcionamiento del simulador será explicar el bloque de control. Los diferentes subsistemas que se pueden encontrar en su interior, pueden nombrarse según el siguiente esquema:



**Figura 3.2** Esquema del bloque de control [6].

#### 3.1.1 Control en actitud y posición

La primera tarea que lleva a cabo este bloque es la de realizar un control en actitud y en posición. Los controladores encargados de este trabajo, permitirán calcular las fuerzas y momentos resultantes que el dron debe ser capaz de generar para poder describir la trayectoria deseada.

En su interior, se pueden encontrar un controlador PID en cascada. La ley del control en posición es:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_d = PID(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}) + \dot{\mathbf{p}}_d \\ \mathbf{a}_d = PID(\mathbf{v}_d - \dot{\mathbf{p}}) + \ddot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{g} \\ \mathbf{F}_d = m_s \mathbf{a}_d \end{cases} \quad (3.1)$$

Siendo  $p_d = [x_d \ y_d \ z_d]$  la trayectoria deseada,  $PID$  la función de control del PID,  $g$  el vector gravedad  $g = [0 \ 0 \ g]$  y  $m_s$  la masa del sistema.

La función del controlador PID:

$$u = PID(e) = K_P e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt} \quad (3.2)$$

Donde  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  son matrices diagonales que recogen los valores de las ganancias proporcional, integral y derivativa del PID.

Para el cálculo del control en actitud, o control de la orientación, el PID en cascada resulta:

$$\begin{cases} \omega_d = PID(\eta_d - \eta) + \dot{\eta}_d \\ \zeta_d = PID(\omega_d - \omega) + \dot{\omega}_d \\ \tau_d = J\zeta_d \end{cases} \quad (3.3)$$

Donde  $J$  es la matriz de inercias de la plataforma,  $\eta$  es la medida de los ángulos de Euler,  $\omega$  la velocidad angular y  $\eta_d$  la referencia en actitud, obtenida de la matriz de rotación  $R_d$ .

### 3.1.2 Bloque intermedio

Dado que el mixer se encuentra referenciado en ejes dron y los PIDs anteriores calculan las fuerzas y torques respecto al sistema de referencia inercial, existe un bloque intermedio que permite expresar las salidas de los controladores en ejes dron aplicando matrices de rotación.

Además, con respecto al simulador original, se han desacoplado los ángulos de Pitch y Yaw de las traslaciones en los ejes X y Z. En cambio, la orientación en Roll se ha estimado como una centésima parte de la fuerza que habría que aplicar en el eje Y.

### 3.1.3 Multirotor Mixer Inverse

Por último, una vez se ha calculado el vector compuesto por las fuerzas y los torques resultantes que deben generarse en el dron, referenciado en ejes cuerpo, se introduce como dato de entrada en el "*Multirotor Mixer Inverse*".

Será en este último bloque donde entren en juego las ecuaciones determinadas en el [subcapítulo 2.5.3], que permitirán la traducción de las fuerzas y momentos a generar en velocidades de giro y orientación de los rotores. Con respecto al simulador inicial, se añadió un bloque de función de Matlab donde poder realizar el cálculo de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . La fórmula que permite su cálculo, cabe recordar, es la arcotangente de la fuerza que debe generarse en el eje X entre la que debe ejercerse en Z.

```
function alphas=fnc(Fx,Fz)
angulo=atan2(Fx,Fz);
alphas(1,1)=angulo;
alphas(2,1)=alphas(1,1);
```

Siendo  $\text{atan2}$  la arcotangente inversa en cuatro cuadrantes, una función que evita que se produzcan discontinuidades en valores como  $90^\circ$ .

La salida de este bloque,  $\alpha_1$ , será incorporada como dato de entrada, junto a las fuerzas y los torques obtenidos en los controladores, a la función donde se describe el mixer.

Dentro de esta función, se encontrará la matriz del mixer que se calculó previamente. Se aplicará el problema del mixer inverso, ya que las incógnitas serán las velocidades y los datos las fuerzas y torques resultantes:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = M(\alpha_1, \alpha_2)^{-1} \begin{bmatrix} F_{res} \\ M_{res} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Siendo  $\omega$  el vector de velocidades, al que más tarde se le añadirá la orientación, A la matriz del mixer y  $[F_{res}, M_{res}]$  las fuerzas y momentos resultantes.

Dado que el mixer no es una matriz invertible, se hará uso de la pseudo-inversa de Moore-Penrose, mediante la instrucción *pinv* de *matlab*. La salida que se obtiene finalmente es el siguiente vector, que se aplicará como entrada en el bloque de la dinámica:

$$(F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha_1, \alpha_2) \quad (3.5)$$

Previo a obtener el resultado final de las velocidades de giro, dado que los motores no pueden producir fuerzas infinitas ni negativas, se saturarán. Si las velocidades requeridas fuesen negativas, los motores tendrán velocidad cero. En el caso de que el controlador le exija producir una fuerza de una magnitud elevada, se saturarán a su velocidad máxima.

En resumen, las entradas de este sistema serán las referencias definidas en los bloques de "Datos de entrada" así como el estado del dron, conformado por las velocidades, posiciones y orientaciones que posea en cada instante de tiempo. Estas variables serán utilizadas por un conjunto de bloques que llevarán a cabo un control en posición y actitud mediante el empleo de PID's en cascada. Tras su aplicación, se obtendrán las fuerzas y torques resultantes que deberá ser capaz de generar el UAV. A continuación, se introducirán en un bloque que aplicará el mixer calculado en la sección anterior y tras haber aplicado las transformaciones pertinentes, se obtendrán las velocidades que deben aplicarse a los rotores del dron, proporcionales a las fuerzas que deben ser capaces de generar, así como la orientación de los mismos.

## 3.2 Dinámica

Este segundo bloque, está enfocado en simular el comportamiento del multirroto, generando el nuevo estado del sistema. Como datos de entrada, se le aportarán los datos calculados en el bloque de control, es decir, el vector 3.5. Como salida, se obtendrá el estado del multirroto, su posición, orientación y velocidad (tanto lineal como angular) para cada instante de tiempo.

Los subsistemas que se podrán encontrar en su interior quedan representados en el siguiente esquema:

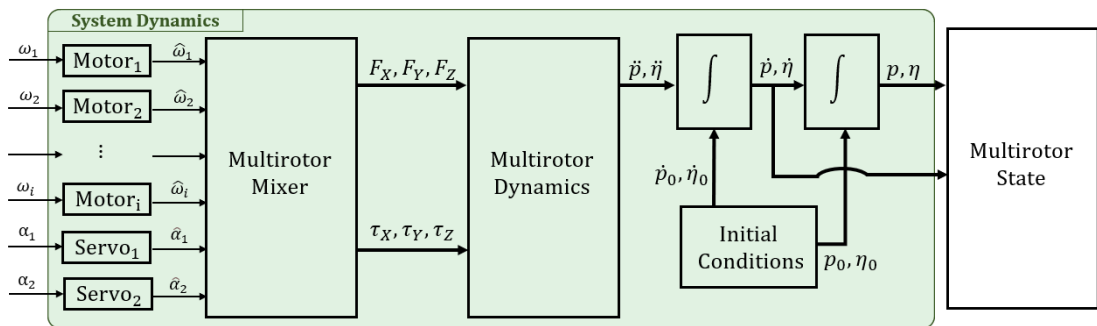


Figura 3.3 Esquema del bloque de la dinámica [6].

### 3.2.1 Motor block

Este primer bloque modela la dinámica que presentan los motores al sufrir un cambio de velocidad. Cuando el controlador le indica a los rotores que deben girar a unas ciertas revoluciones, estos no lo hacen de manera

inmediata, sino que lo realizan de manera transitoria. Lo mismo ocurre para los cambios de orientación en los servos.

Esta relación entre la velocidad demandada y la real se ha definido mediante un modelo de primer orden donde  $B(s)$  representará la función de transferencia y  $\tau_m$  la constante de tiempo de los motores:

$$B(s) = \frac{1}{\tau_M s + 1} \quad (3.6)$$

Para modelar la dinámica de los motores se ha tomado 0.1 segundos como valor de  $\tau_m$ . Sin embargo, para el caso de los servomotores, este valor es de 0.15 segundos. Este aumento de la constante de tiempo es debido a que la dinámica de los servomotores es más lenta que la de los motores.

### 3.2.2 Multirotor Mixer

En este bloque, se lleva a cabo la acción inversa de la que se realizaba en el bloque "*Multirotor Mixer Inversa*" del bloque de control. En esta ocasión, los datos serán las velocidades de giro y la orientación de los rotores y las incógnitas las fuerzas y torques resultantes.

$$\begin{bmatrix} F_{des} \\ M_{des} \end{bmatrix} = A(\alpha_1, \alpha_2) \omega_{rot} \quad (3.7)$$

Este cambio se realiza ya que, tras la aplicación de la dinámica de los motores, las fuerzas reales no coinciden con las deseadas. El estado del dron se calculará con estas fuerzas y no con las halladas en el bloque de control.

### 3.2.3 Estado del dron

Por último, haciendo referencia a la zona izquierda del bloque coloreado en verde de la Figura 3.3, se llevará a cabo el cálculo de las variables que definirán el estado del dron:

$$[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi] \quad (3.8)$$

Su cómputo se realiza integrando las ecuaciones halladas en el apartado 2, ver (2.88).

En resumen, a este bloque se le proporcionará como dato de entrada el vector que recoge los datos de los rotores, velocidades de giro y orientación de los mismos. Tras aplicarle la dinámica típica de los motores, se recalculan las fuerzas y momentos resultantes generados y, mediante la integración de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del dron halladas en el capítulo anterior, se estima el estado del dron. Este estado se utiliza como dato de entrada para el bloque de control en el siguiente instante.



## 4 Puntos singulares

---

A pesar de que el dron presenta un buen comportamiento para la mayor parte de las posiciones y orientaciones, existen ciertos puntos críticos donde el UAV falla y, por tanto, no es válido. Esto es debido principalmente a que su rango de movimiento está limitado a 5 grados de libertad, que sus rotores solo admiten inclinaciones en el plano XZ y que ambos servos comparten la misma orientación. El objetivo de este capítulo es el de definir estas posiciones críticas dándoles una explicación.

Para entender el porqué del comportamiento anómalo del dron, es necesario comprender cómo se generan los torques en el UAV, además de su funcionalidad.

Un torque, o momento de fuerzas respecto a un eje, es una magnitud que se obtiene como el producto vectorial del vector de posición, que une perpendicularmente el vector de la fuerza con el eje al cual se quiere calcular el momento ( $\mathbf{r}$ ), multiplicado por el vector fuerza ( $\mathbf{F}$ ). Estas magnitudes dan a conocer en qué medida una fuerza puede cambiar el estado de rotación del cuerpo alrededor de un eje. Por tanto, será la existencia y la magnitud de los momentos lo que permita que el dron gire

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{b} \times \mathbf{F} \quad (4.1)$$

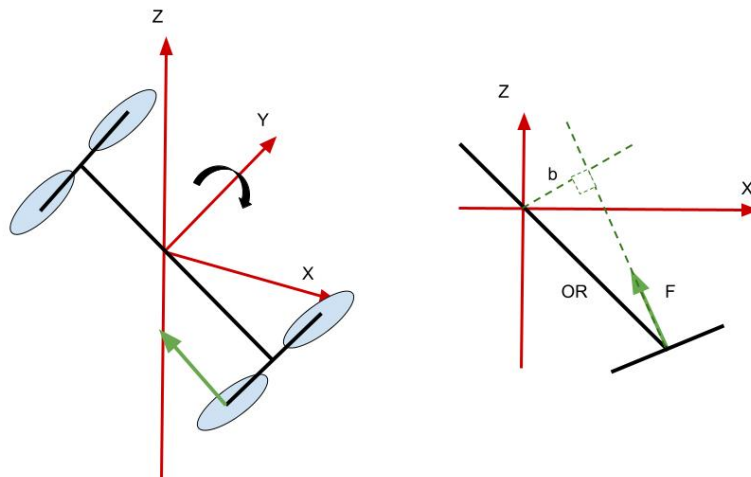
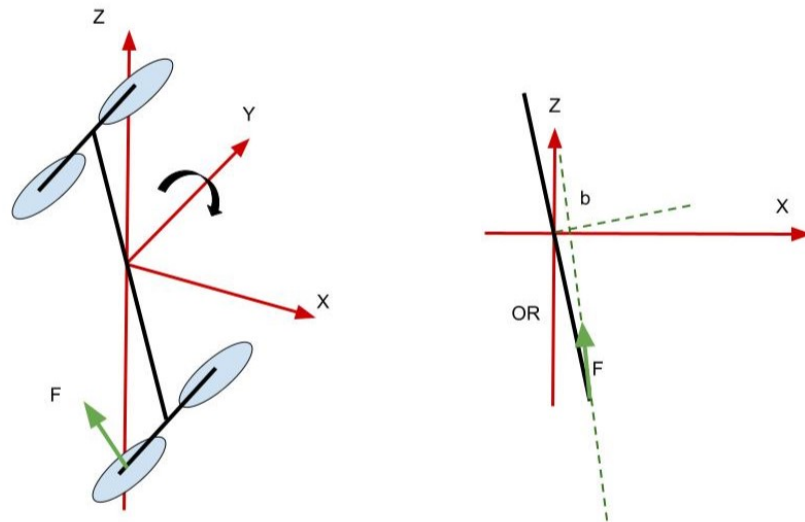


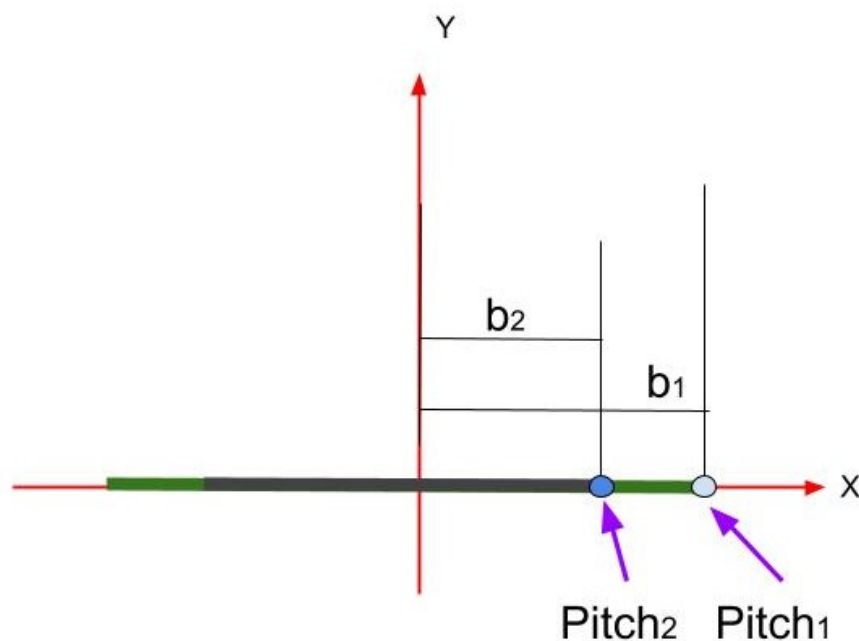
Figura 4.1 Cálculo del torque para un Pitch de 135°.



**Figura 4.2** Cálculo del torque para un Pitch de  $170^\circ$ .

Si se observan las Figuras 4.1 y 4.2, puede comprobarse como la distancia ( $r$ ) varía según lo hace la dirección de la fuerza y la orientación del dron. Mientras menor sea uno de los dos factores del producto, mayor deberá ser el otro para producir el mismo momento.

Cuando el quadrotor se aproxime a posiciones verticales, o lo que es igual, cuando el dron tenga una orientación en Pitch cercana a  $90^\circ$  o  $270^\circ$ , la capacidad del mismo para producir torque en el eje Y, se verá drásticamente reducida debido a la disminución que existe en la distancia entre el eje con respecto al cual se desea calcular el momento y el vector de la fuerza  $[b_1, b_2]$  como puede observarse en la Figura 4.3.



**Figura 4.3** Esquema para el cálculo de momentos, plano XZ.

Al realizar la aproximación a la verticalidad, el dron tratará de compensar esta disminución en la distancia acelerando los motores para producir una fuerza mayor, estando limitada por las propias características de los mismos.



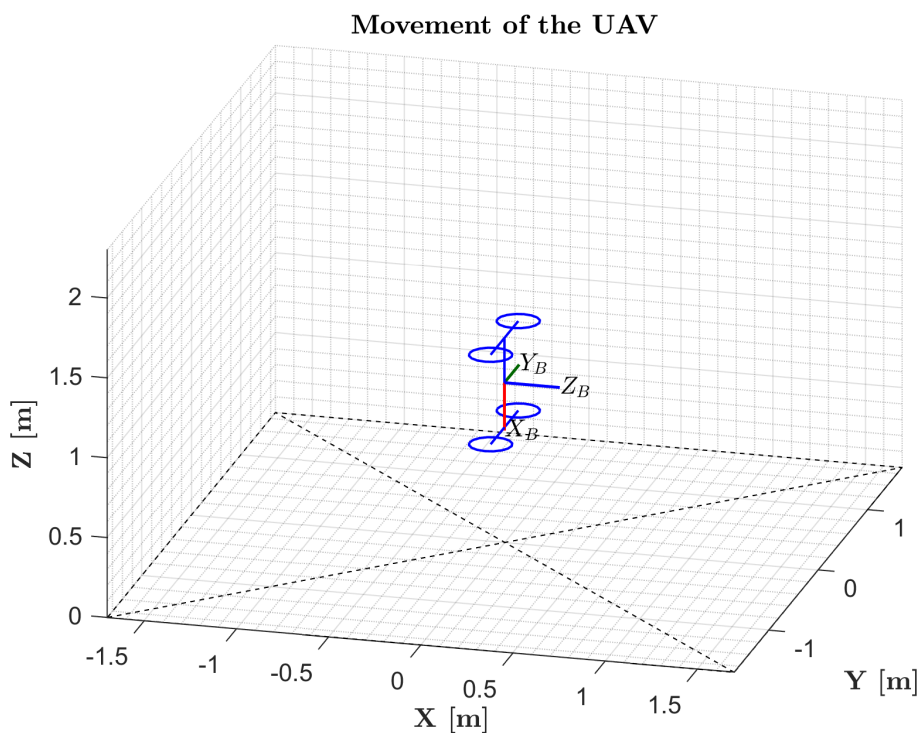
Una vez comprendidos estos conceptos se puede continuar concretando cuáles son estas posiciones críticas.

## 4.1 Puntos críticos

Dada la construcción del dron y el funcionamiento y configuración del simulador, habrá determinadas posiciones en las que el tilting quadrotor se quede anclado. Existen dos posiciones concretas en las que el dron es incapaz de generar un torque que le permita moverse, estas son :

- Pitch =  $90^\circ$
- Pitch =  $270^\circ$

En estas situaciones, el dron se encuentra posicionado verticalmente, es decir, el eje X del cuerpo se encuentra paralelo al eje Z del sistema de referencia ligado a la Tierra.



**Figura 4.4** Dron cuando Pitch =  $90^\circ$ .

Parámetro	Valor
Factor de arrastre $\left(\frac{N}{(\text{rad/s})^2}\right)$	$0.146 \times 10^{-7}$
Factor de empuje $\left(\frac{N}{(\text{rad/s})^2}\right)$	$3.146 \times 10^{-6}$
$\frac{km}{c_f}$	0.1
$L_y$ [m]	0.28
$L_x$ [m]	0.28
$\alpha$ [rad]	$\pi/2$

El problema que presentan estas posiciones esta ligado a 3 aspectos:

- Contrucción del mixer.
- El valor de  $\alpha_2$  coincide con el de  $\alpha_1$ .
- Movimiento de los servos limitados al plano xz.

Posicionado en estos puntos, el dron presenta dos comportamientos anómalos relacionados entre sí y causados por el mismo fenómeno. El primero de estos comportamientos será la imposibilidad de realizar una traslación a lo largo del eje Y, mientras que el segundo, será la incapacidad de cambiar de orientación girando alrededor de dicho eje. Ambos problemas se dan debido a que el UAV es incapaz de variar las fuerzas que generan los rotores.

Si se fuerza al dron a comenzar en la posición donde Pitch tiene un valor de  $90^\circ$  y posteriormente, se desea que continúe girando, se debería generar un torque alrededor del eje Y. En primer lugar, para comprender porqué en estas dos orientaciones el dron presenta un comportamiento anómalo es necesario analizar cómo trabaja el mixer y cómo esta construido el control del simulador de vuelo.

Por un lado, la matriz del mixer está elaborada de tal forma que cuando el dron se encuentre en posición vertical ( Pitch =  $90^\circ$ ), donde la única fuerza que se requerirá será la necesaria para mantenerse en hover equilibrando su peso, ciertos términos se anularán. En esta posición, la dirección que tendrá esta fuerza será paralela al eje X del sistema del cuerpo. Por tanto, alpha será igual a  $90^\circ$ , es decir, los motores se encontrarán posicionados horizontalmente y boca arriba. En esta situación, a pesar de que el controlador demande generar torque, el mixer no variará la velocidad que deben generar los motores ya que, al invertir la matriz, los términos encargados de esta tarea tendrán un valor nulo. En la ecuación (4.1), puede observarse el resultado de invertir la matriz para los siguientes valores:

$$M = \begin{bmatrix} s(\alpha_1) & s(\alpha_1) & s(\alpha_2) & s(\alpha_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c(\alpha_1) & c(\alpha_1) & c(\alpha_2) & c(\alpha_2) \\ ks(\alpha_1) - L_y c(\alpha_1) & L_y c(\alpha_1) - ks(\alpha_1) & L_y c(\alpha_2) + ks(\alpha_2) & -L_y c(\alpha_2) - ks(\alpha_2) \\ -L_x c(\alpha_1) & -L_x c(\alpha_1) & L_x c(\alpha_2) & L_x c(\alpha_1) \\ kc(\alpha_1) + L_y s(\alpha_1) & -kc(\alpha_1) - L_y s(\alpha_1) & kc(\alpha_2) - L_y s(\alpha_2) & -kc(\alpha_2) + L_y s(\alpha_2) \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.0000 & 0.0000 & 2.5000 & 0.0000 & 2.5254 \\ 0.2500 & -0.0000 & 0.0000 & -2.5000 & -0.0000 & -2.5254 \\ 0.2500 & -0.0000 & 0.0000 & 2.5000 & 0.0000 & -2.5254 \\ 0.2500 & 0.0000 & -0.0000 & -2.5000 & -0.0000 & 2.5254 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, en la situación descrita, los controladores no le exigirán al mixer un cambio en las fuerzas sino en el torque. Esto es debido a que las fuerzas calculadas se generan a partir de la referencia en posición. Sin embargo, el dron no realiza un cambio en sus coordenadas sino en su orientación.

En resumen, en esta situación ni la actuación del mixer derivará en un cambio en las fuerzas frente a la exigencia de un torque ni tampoco lo harán los controladores frente a una variación en la referencia de su orientación en Pitch. Por tanto, el dron quedará lastrado en esta posición ya que no tiene la capacidad de

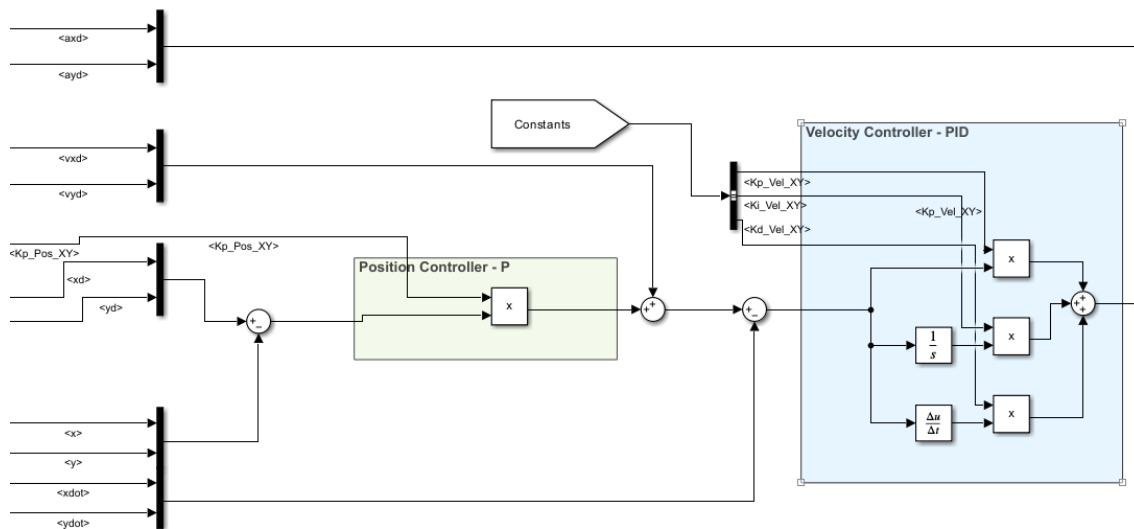


Figura 4.5 Control en posición para X e Y.

variar las fuerzas.

En segundo, el quadrotor también podría generar cambios en su fuerza resultante para producir torque modificando la orientación de sus rotores. Sin embargo, la ecuación que permite el cálculo de  $\alpha_1$ , al igual que  $\alpha_2$ , también depende del valor de las fuerzas. Este inconveniente podría resolverse si se desacoplasen ambas orientaciones y se encontrase una ecuación que no dependiese únicamente de los valores de las mismas, dado que de esta forma, cada pareja de rotores podría generar fuerzas con diferentes componentes. Pese a ello, debido a que actualmente no se han encontrado soluciones que permitan el cómputo de ambas variables por separado, esta opción no será viable.

Por último, dado que los servomotores no pueden generar fuerzas con componente  $\vec{j}$  debido a que no pueden girar fuera del plano XZ, el dron no podrá desplazarse a lo largo del eje Y y, por tanto, tampoco podrá girar en Roll.

A pesar de todo ello, el dron podrá seguir desplazándose a lo largo tanto del eje X como del eje Z.

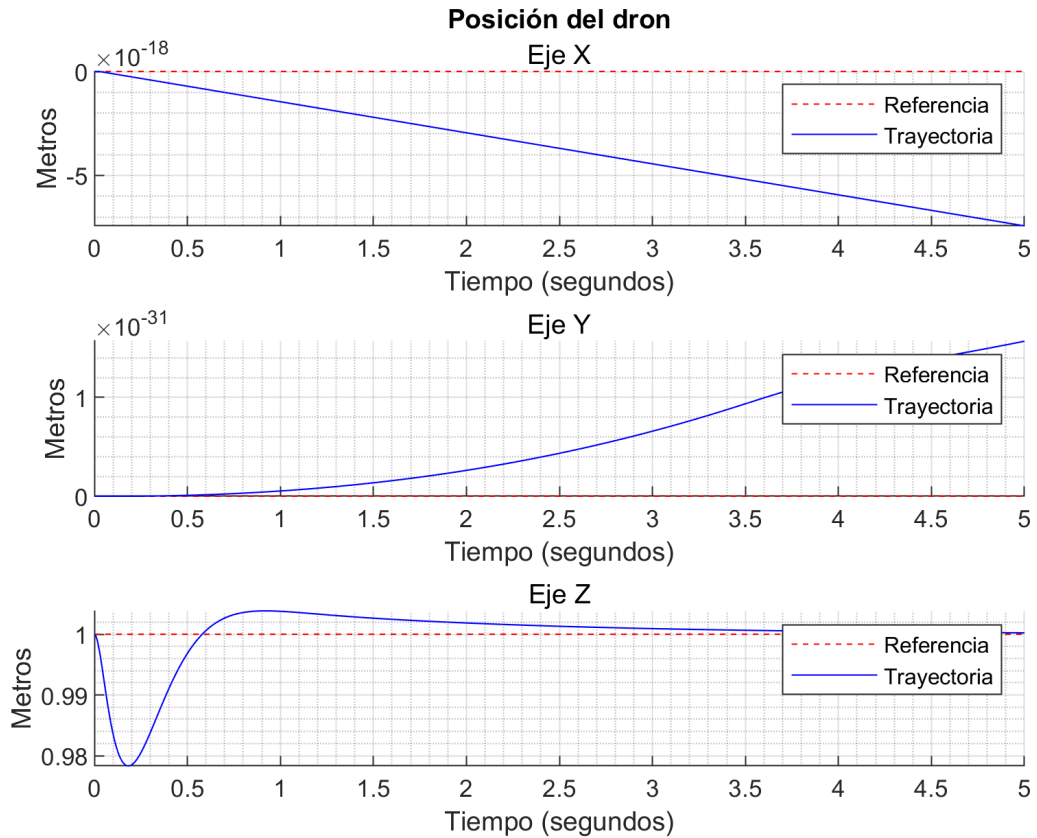
### 4.1.1 Simulación giro en Pitch

A continuación, se mostrarán los resultados obtenidos tras haber realizado una simulación para probar las anomalías que presenta cuando se encuentra orientado con un Pitch de 90°. Los parámetros que se le han introducido como entradas al simulador son:

**Tabla 4.1** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3	Segundo 5
Posiciones [x y z] [m]	[0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0	0
Orientación en Pitch [grados]	90	120	60

Como puede interpretarse, el dron comenzará en la posición [0 0 1] metros con una orientación de 90° en Pitch, es decir, estará a cierta altura con respecto al suelo y el eje X del cuerpo se encontrará paralelo y con sentido contrario al eje Z de los ejes Tierra. Manteniéndose en esta posición, deberá girar en torno al eje Y 30° en sentido horario y después 60° en sentido antihorario. Para que el dron comience orientado en 90°, se ha eliminado la dinámica de los rotores.



**Figura 4.6** Simulación de la posición cuando Pitch=90° .

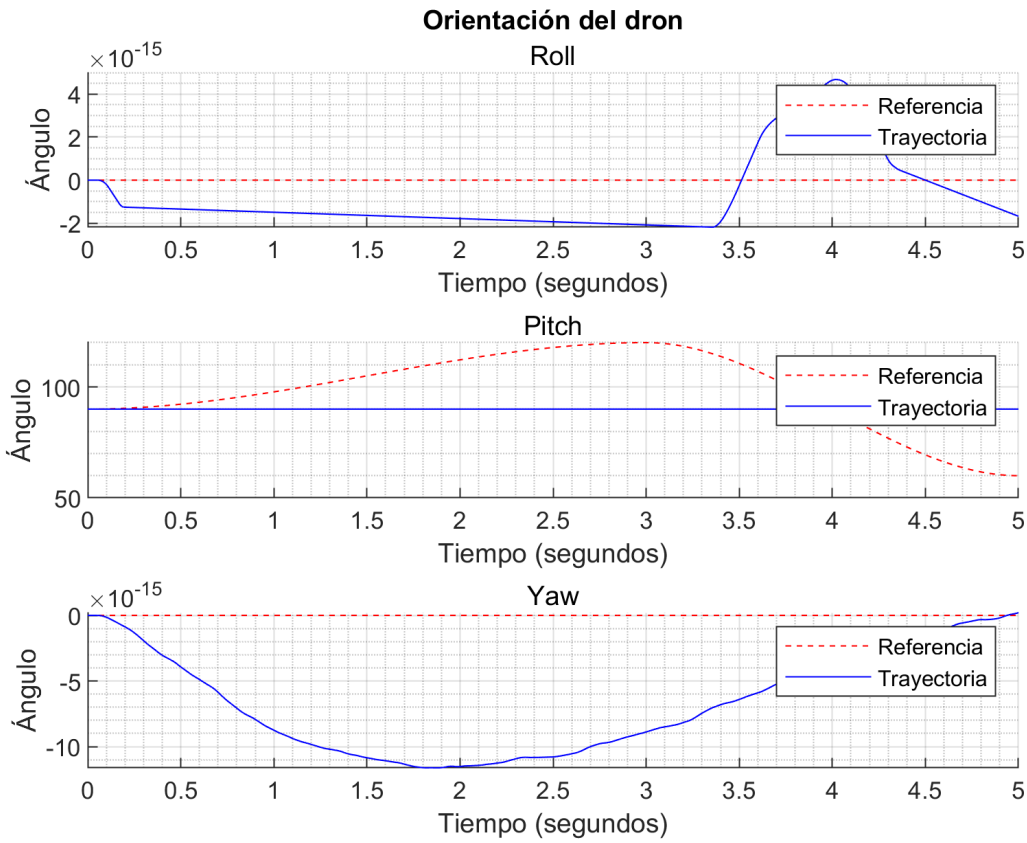


Figura 4.7 Simulación de la orientación cuando Pitch=90° .

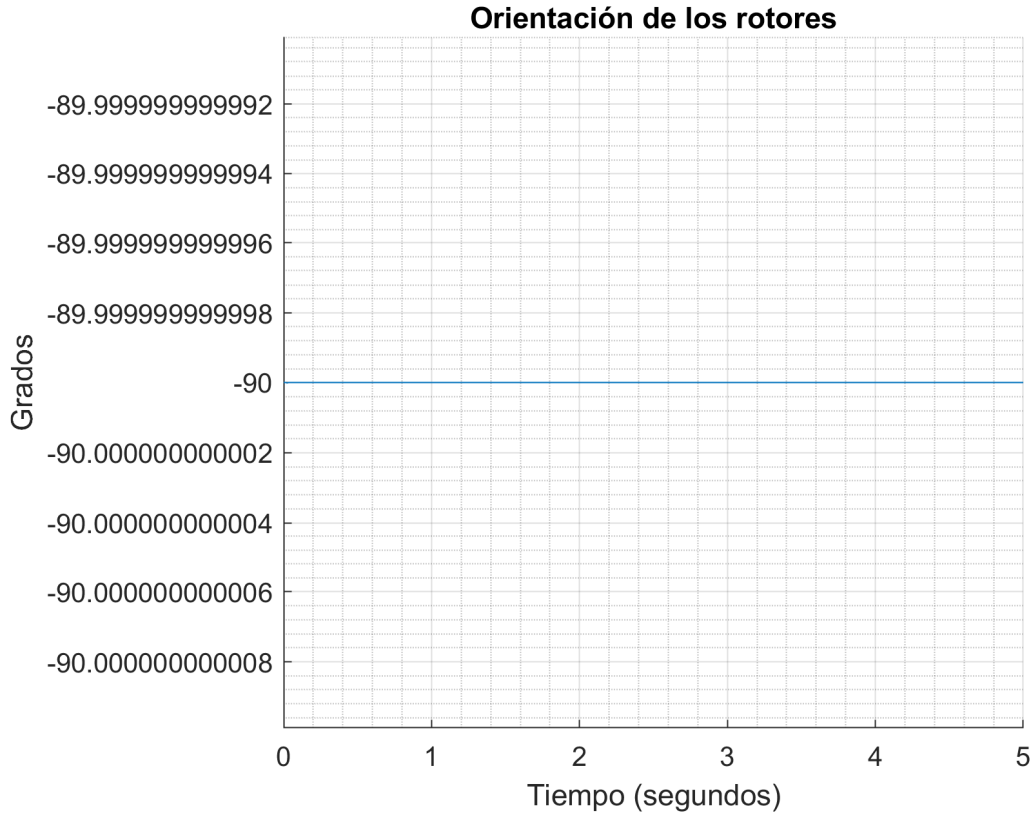


Figura 4.8 Simulación de la orientación de los rotores cuando Pitch=90° .

Haciendo una interpretación de las gráficas, puede comprobarse como la posición se ha mantenido con éxito a lo largo de la simulación, sufriendo desviaciones del orden de  $10^{-18}$  m para las coordenadas X e Y, valores que carecen de sentido físico para sensores reales. Sin embargo, observando esta vez la **[Figura 4.7]**, en específico la referida al Pitch, se comprueba como, a pesar de que la referencia varía según los datos de entrada, la orientación permanece inalterable y fija en  $90^\circ$ . Por último, en la última gráfica, se comprueba como los rotores tampoco varían su orientación.

Esto puede traducirse en que el quadrotor no ha variado su orientación en ningún momento de la simulación. Ha quedado lastrado en esta posición siendo incapaz de varias las fuerzas que genera para producir movimiento.

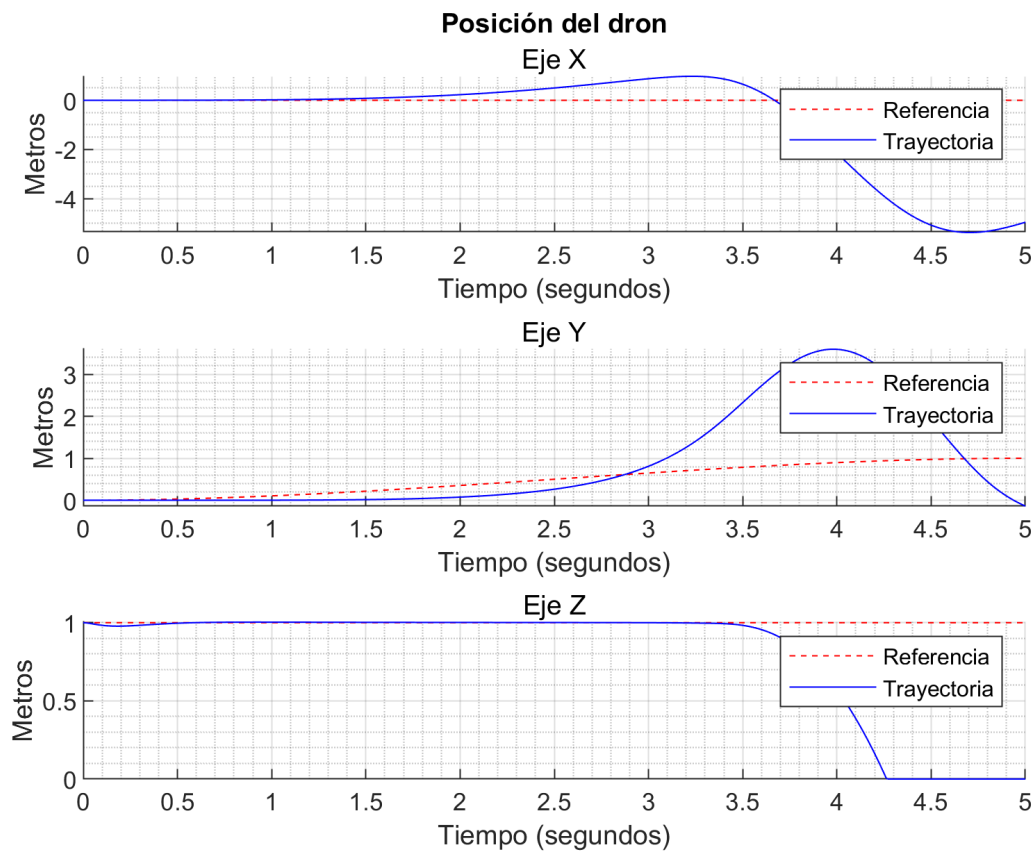
#### 4.1.2 Simulación desplazamiento en eje Y

Para finalizar, se mostrarán la demostración de la incapacidad del dron para desplazarse a lo largo del eje Y mientras se mantiene orientado en un ángulo de  $90^\circ$  en Pitch. Los parámetros que se le han introducido como entradas al simulador son:

**Tabla 4.2** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3
Posiciones [x y z]	[0 0 1]	[0 1 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0
Orientación en Pitch [grados]	90	90

El dron comenzará con un valor de Pitch de  $90^\circ$  y tratará de desplazarse 1 metro a lo largo del eje Y en posición vertical. Para que el dron comience orientado en  $90^\circ$ , se ha eliminado la dinámica de los rotores.



**Figura 4.9** Simulación de la posición para desplazamiento en Y.

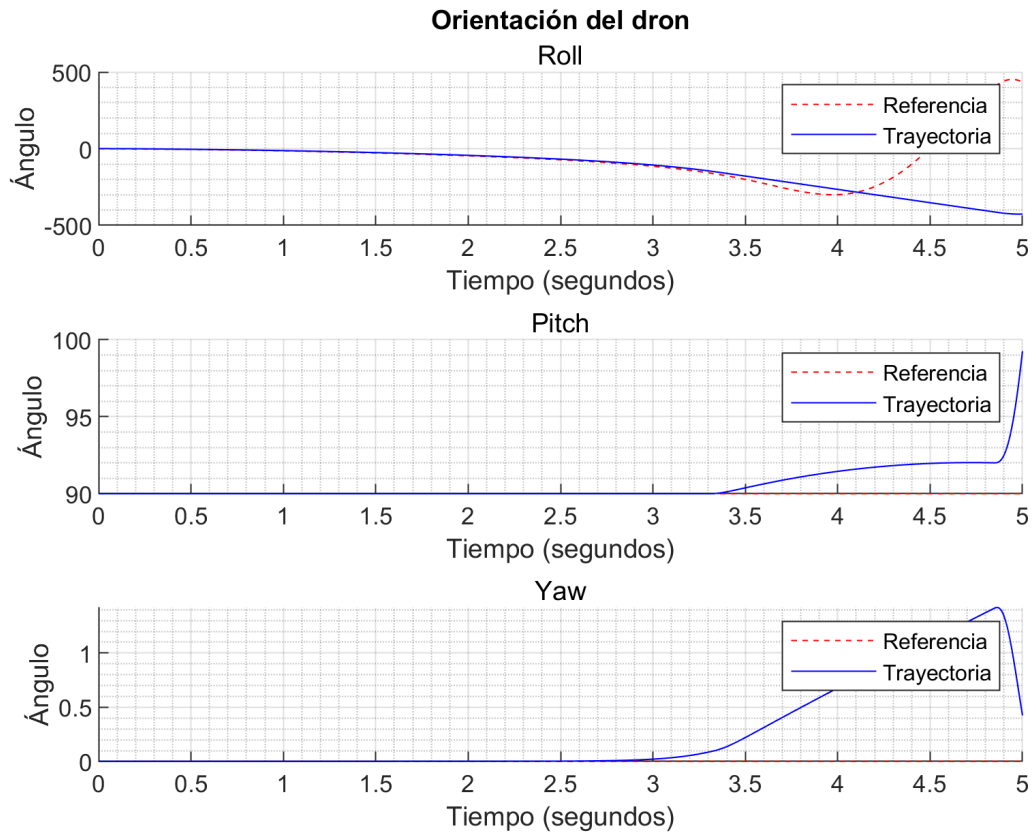


Figura 4.10 Simulación de la orientación para desplazamiento en Y .

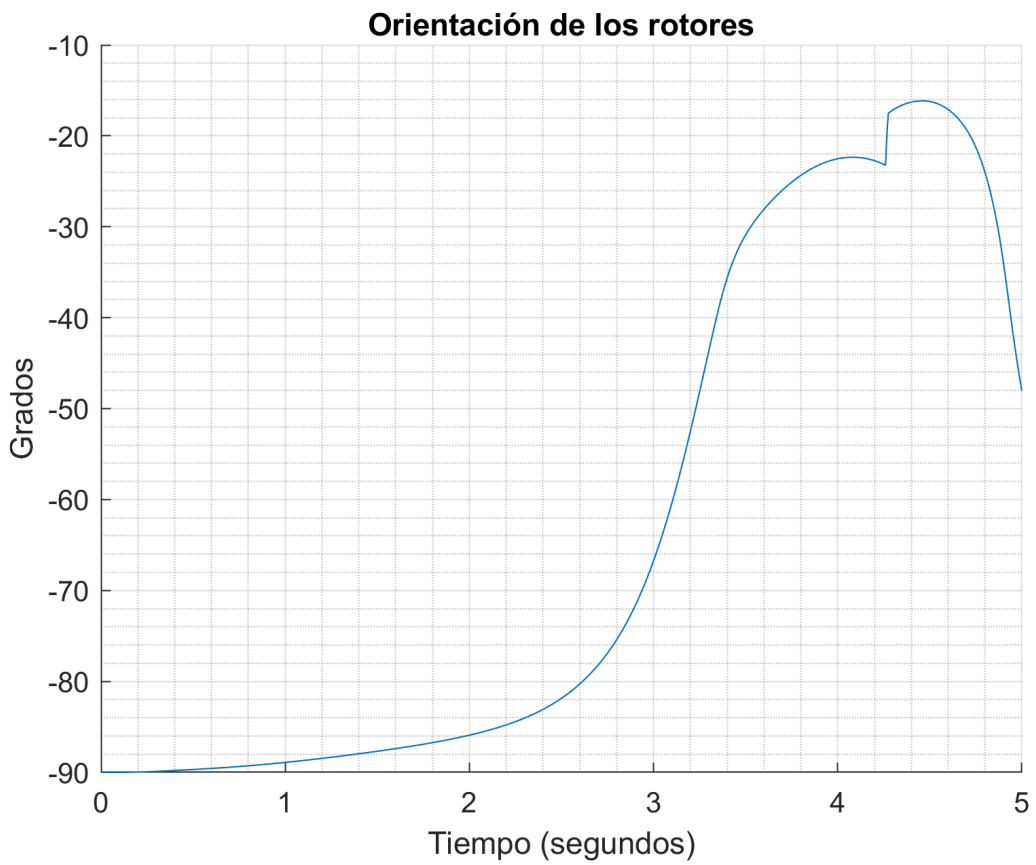


Figura 4.11 Simulación de la orientación de los rotores para desplazamiento en Y .



Observando los resultados en la Figura 4.9 se puede comprobar como la posición en Y no sigue a la referencia. El dron trata de desplazarse girando en Roll (ya que esto implicaría una traslación en el eje deseado), ver Figura 4.10, sin éxito ya que termina por descontrolarse y caer.

De esta forma, queda demostrado como para una posición de  $90^\circ$  en Pitch el dron es incapaz tanto de seguir girando alrededor del eje Y como de desplazarse a través del mismo. Se trata de una posición donde el UAV queda lastrado.

## 4.2 Zona crítica

Además de los puntos singulares que se acaban de definir, existen ciertas zonas donde el comportamiento del dron tampoco es el adecuado.

El problema surge cuando se desea que el vehículo genere un momento alrededor del eje Y en zonas cercanas a  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . La actuación que exigirá el controlador para que el dron produzca el torque necesario para que pueda girar o desplazarse, deberá compensar la reducción de la distancia perpendicular entre el punto de aplicación y el eje Y producida por el acercamiento del dron a la posición vertical. Por tanto, la fuerza requerida será muy alta dado que la distancia del brazo será muy baja. Esto producirá una saturación en los motores al no poder generar fuerzas infinitas. La velocidad de giro estará limitada por las características de los mismos.

A continuación, a modo de demostración, se simulará el caso en el que se desea que el dron se aproxime a los  $90^\circ$  tomando como posición inicial  $0^\circ$  en Pitch. En la simulación, se saturarán los motores según las características de los mismos.

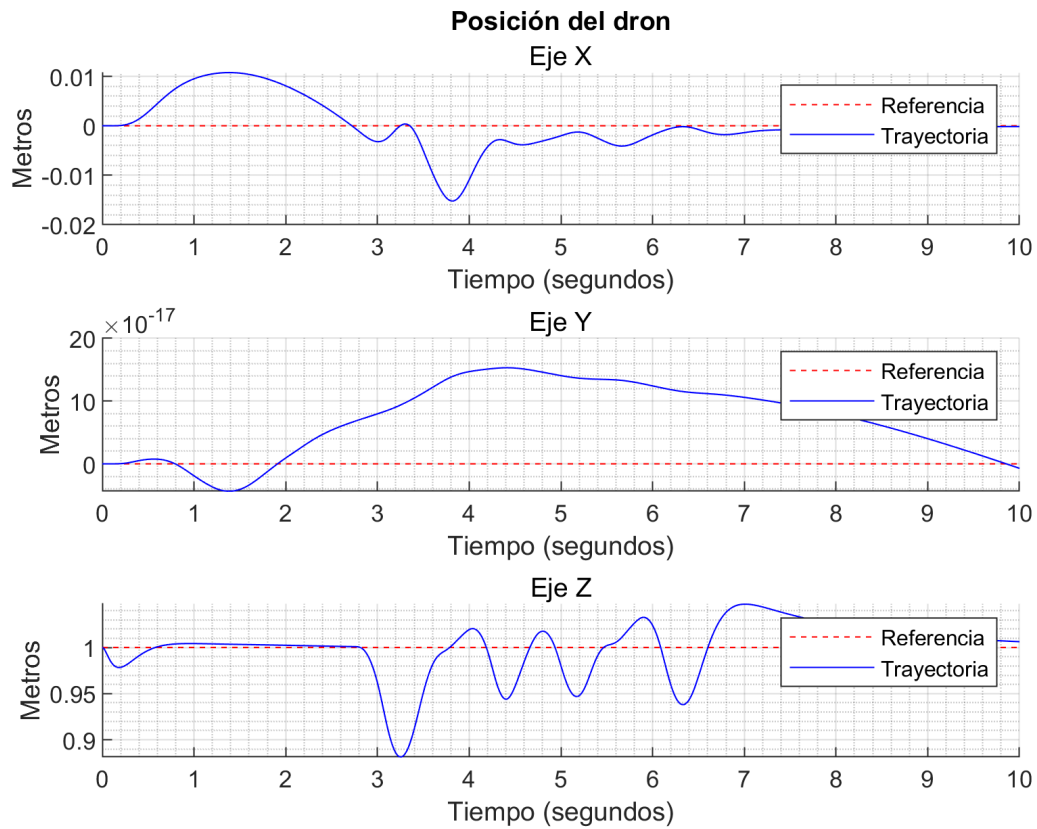
### 4.2.1 Simulación: Motores saturados

Se comenzará realizando la simulación en la que los motores se saturarán, limitando su velocidad de giro a la velocidad máxima a la que pueden girar los motores según su hoja de características. Los datos de entrada empleados para ambas simulaciones serán:

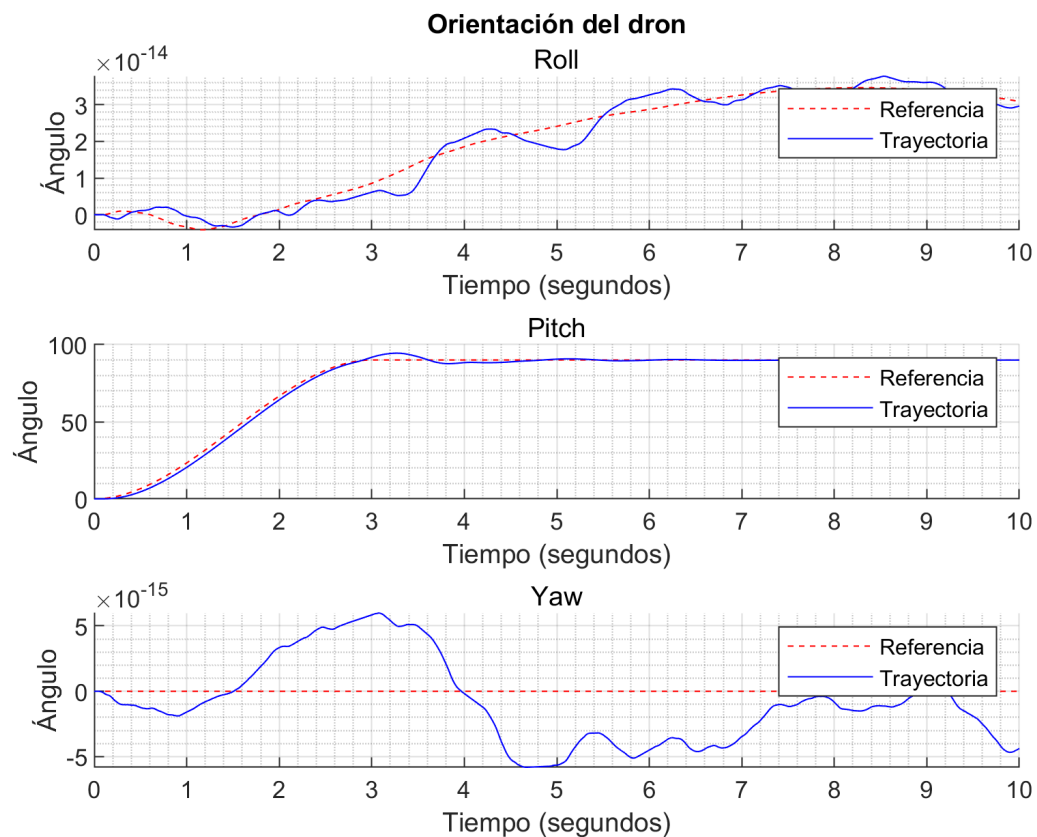
**Tabla 4.3** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3
Posiciones [x y z] [m]	[0 0 1]	[0 0 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0
Orientación en Pitch [grados]	0	90

En esta simulación, al igual que en la anterior, el dron permanecerá fijo en una posición del espacio a una determinada altura, coordenadas [0 0 1] metros. Desde este punto, comenzará a girar alrededor del eje Y en sentido horario hasta alcanzar un valor de Pitch de  $90^\circ$  a los 3 segundos. Una vez adquiera la orientación deseada, se mantendrá durante 10 segundos.



**Figura 4.12** Simulación de la posición cuando el dron se aproxima a  $90^\circ$ .



**Figura 4.13** Simulación de la orientación.



Figura 4.14 Simulación de la orientación de los rotores .

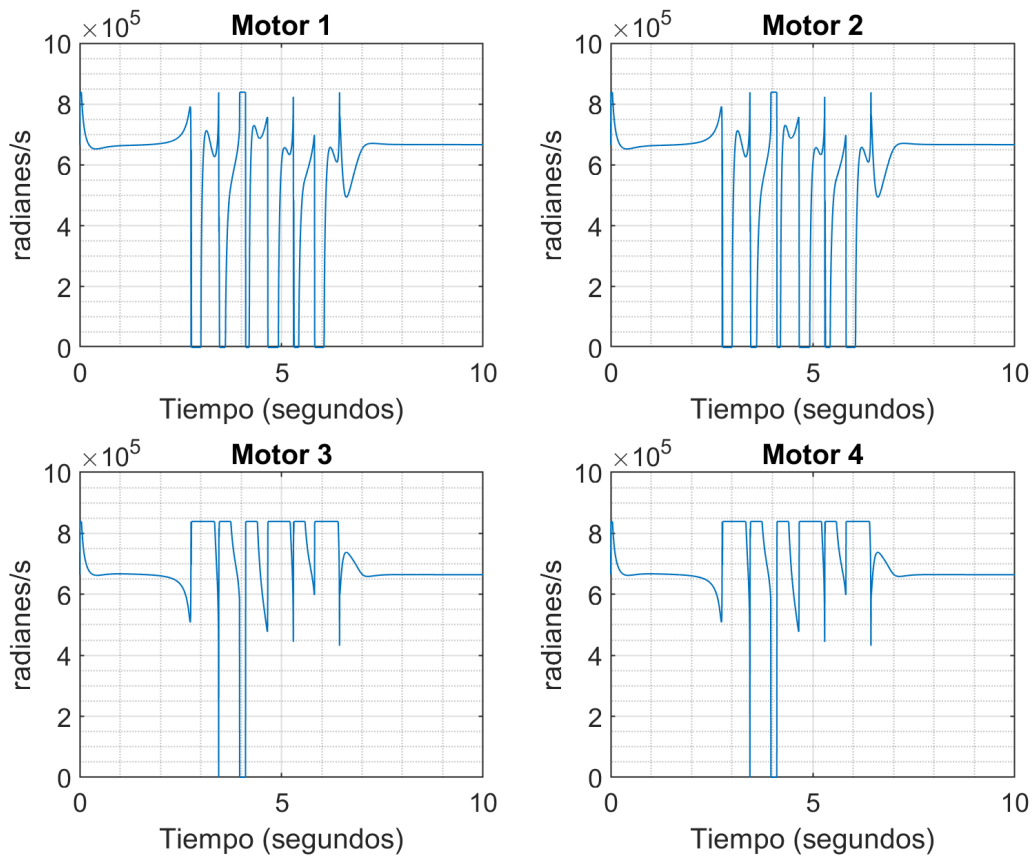


Figura 4.15 Simulación de la velocidad de giro de los motores .

En la Figura 4.12, que muestra la variación de la posición a lo largo de la simulación, se observa como, cuando la simulación se aproxima a los 3 segundos, el dron presenta un comportamiento oscilatorio en la posición de Z, mientras en el resto de ejes se mantiene fijo. Aplicando estos resultados a la realidad, se observaría que cuando el UAV alcanzase la posición vertical, caería y ascendería continuamente. En cuanto a la orientación, el dron sigue con bastante fiabilidad lo que ordena la referencia, siendo despreciable las diferencias en cada uno de los ejes.

En esta simulación, además, se ha añadido al conjunto de resultados unas gráficas que muestran las velocidades de los rotores. Como puede observarse, una vez han transcurrido poco menos de 3 segundos, o lo que es lo mismo, una vez el dron se aproxima los  $90^\circ$ , los motores comienzan a saturarse, provocando que pasen de estar parados a girar a máxima velocidad. Como consecuencia de esta saturación, el dron comienza a oscilar en altura debido a su incapacidad de generar la fuerza con componente vertical requerida por el controlador.

La causa de este fenómeno es la que se describía al comienzo de la sección. Al ser mínima la distancia del brazo a partir de la cual se calcula el momento, la fuerza requerida para producir el torque necesario para hacer que el quadrotor continúe girando es muy elevada. Al ser las fuerzas directamente proporcionales a las velocidades de los motores, lo anterior se traducirá en un aumento de la velocidad de giro, que hará que las hélices saturen al ser de una magnitud elevada. De esta forma, el UAV logrará seguir girando pero debido al continuo encendido y apagado de sus motores, no tendrá la capacidad de mantenerse fijo en  $90^\circ$ . En resumen, el dron produce torque en detrimento de la capacidad de mantener la altura de vuelo.

### 4.3 Resumen

Sintetizando todo lo estudiado en este apartado, existen dos situaciones donde el comportamiento del dron no es el adecuado:

- **Inicio vertical:** Inhabilitación de su capacidad de generar torque debido a la imposibilidad de modificar las fuerzas a generar.
- **Zonas cercanas a la verticalidad:** pérdida del control en altura debido a la dificultad para generar torque alrededor del eje Y.



# 5 Resultados

---

Una vez han quedado definidas todas las ecuaciones que modelarán y controlarán el dron, además de haber descrito sus puntos singulares y haber particularizado el simulador para el tilting quadrotor, se continuará este trabajo mostrando los resultados que se obtienen al implementar el modelo. El objetivo de este apartado será el de realizar simulaciones que permitan demostrar que el dron desarrollado a lo largo de este trabajo funciona correctamente y cumple con lo prometido.

Se realizaran 5 pruebas que permitirán demostrar el correcto funcionamiento del quadrotor. Estas serán:

- **Simulación 1:** Se realizará una trayectoria cuadrada con un valor tanto de Pitch como de Yaw de 0°.
- **Simulación 2:** Se realizará una trayectoria cuadrada donde se irá variando el valor de Pitch de forma que el dron gire a la vez que se desplaza sin que llegue a darse la vuelta.
- **Simulación 3:** Se realizará una trayectoria cuadrada con un valor de Pitch de 180°, es decir, el dron volará boca abajo.
- **Simulación 4:** Se realizará una trayectoria cuadrada donde se irá variando el valor de Pitch de forma que el dron gire a la vez que se desplaza permaneciendo siempre boca abajo.
- **Simulación 5:** Se realizará una vuelta completa alrededor del eje Y.

Se mostrarán 4 gráficas: posición y orientación del dron respecto a los ejes Tierra, orientación de los rotores y error en la posición. Se incluirá, en los casos en los que resulte de interés, una 5ª que ilustrará el recorrido realizado en el espacio tridimensional.

## 5.1 Simulación 1:

Para la primera simulación, los datos de referencia y entrada proporcionados son:

**Tabla 5.1** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3	Segundo 6	Segundo 9	Segundo 12
Posiciones [x y z] [m]	[-1 -1 1]	[1 -1 1]	[1 1 1]	[-1 1 1]	[-1 -1 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0	0	0	0
Orientación en Pitch [grados]	0	0	0	0	0

### Movement of the UAV

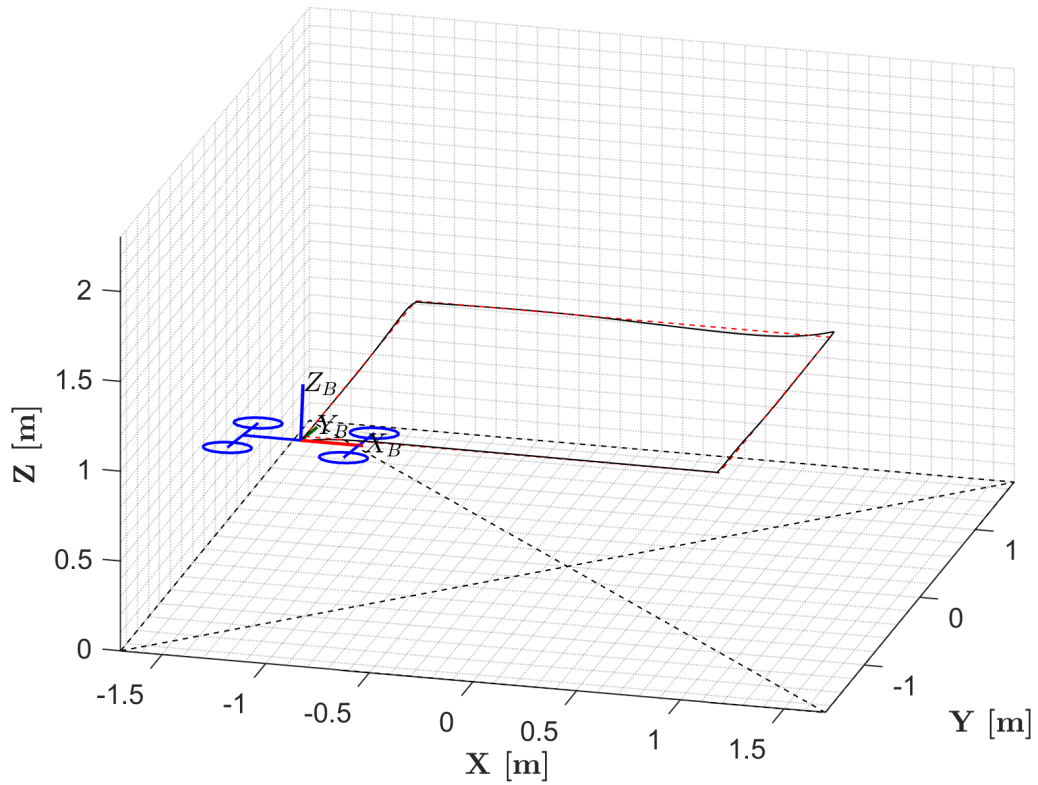


Figura 5.1 Simulación 1: Trayectoria descrita en simulación.

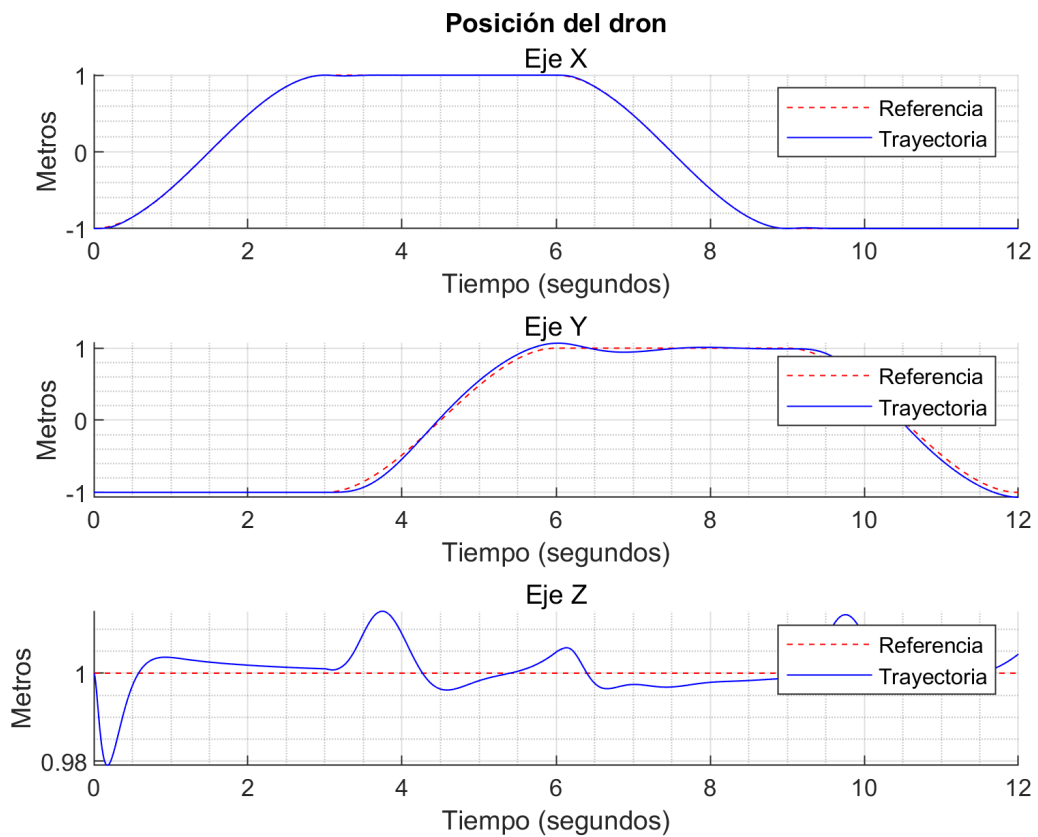
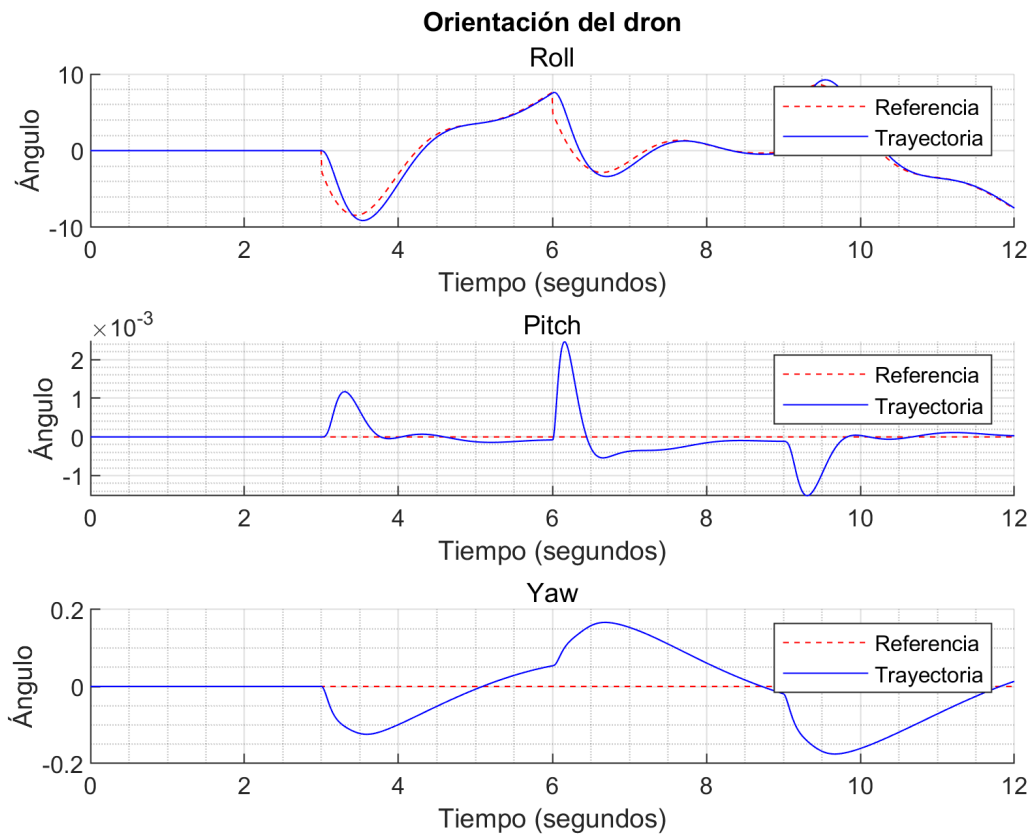


Figura 5.2 Simulación 1: Posición del dron.

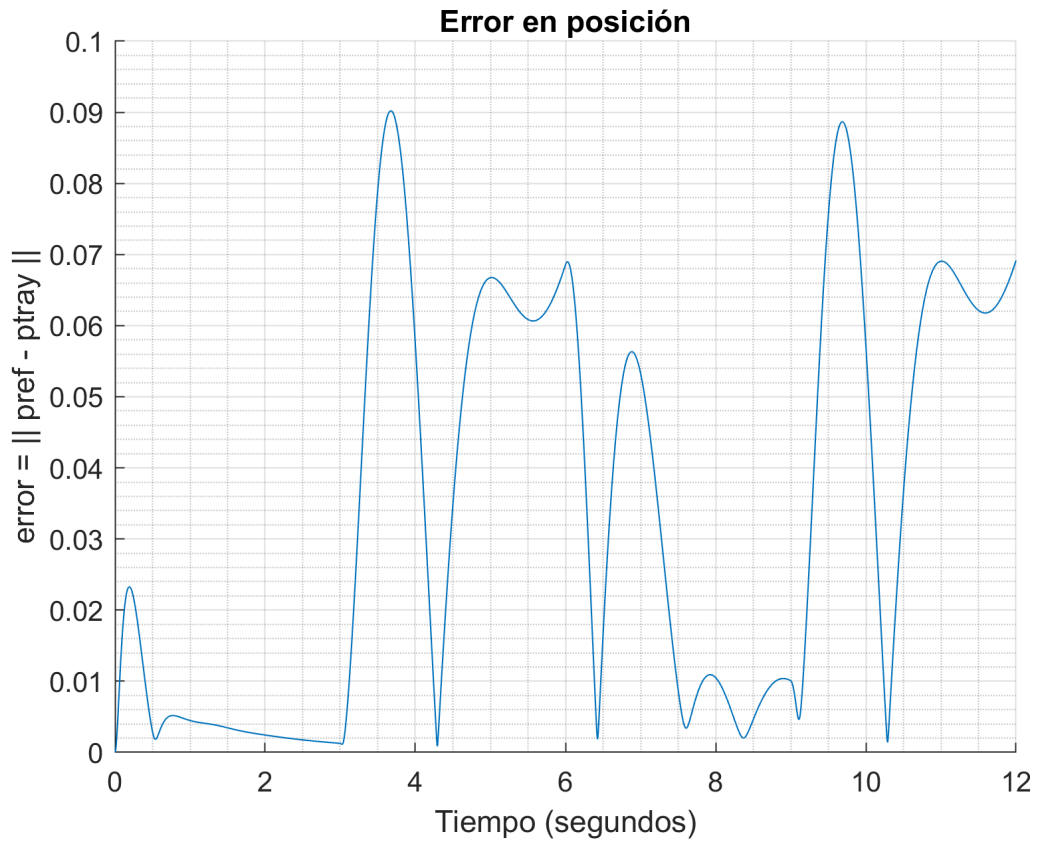




**Figura 5.3** Simulación 1: Orientación del dron.



**Figura 5.4** Simulación 1: Orientación de los rotores.



**Figura 5.5** Simulación 1: Error en posición.

En la Figura 5.1 puede observarse la trayectoria cuadrada que describe el dron. Recorrerá el cuadrado en sentido antihorario. Realizando una primera visual, se comprueba que presenta un buen seguimiento sin cometer grandes desviaciones.

Estudiando los resultados mostrados en las Figuras 5.2, 5.3, 5.5, puede corroborarse esta primera observación. En primer lugar, interpretando las gráficas de la posición, se observa como los resultados reales siguen a la referencia sin apenas cometer error, encontrando las mayores desviaciones en el eje Z tomando valores máximos de 0.02 metros. En cuanto a la orientación, los valores de Pitch y Yaw se mantienen prácticamente constantes. Se pueden identificar con facilidad los tramos que corresponden a un desplazamiento a lo largo del eje Y, ya que en esas situaciones, la orientación en Roll será distinta de  $0^\circ$ . Así puede comprobarse como el movimiento en X se ha conseguido desacoplar del giro en Pitch, sin embargo, el movimiento en Y sigue ligado al Roll. Por último, en la Figura 5.5, se recogen los errores cometidos tanto en la orientación como en la posición. Teniendo para toda la simulación valores bajos, los picos de máximo error se dan en los tramos donde el dron varía su coordenada Y.

Por último, comentando la gráfica de la orientación de los rotores Figura 5.4, se puede comprobar como para los tramos donde varía la coordenada x del dron, los rotores se inclinan para así producir fuerzas con componente horizontal evitando así la necesidad de girar el cuerpo del dron para generarlas. Sin embargo, en los tramos donde el desplazamiento se produce en el eje Y, los rotores se mantienen a  $0^\circ$  ya que no pueden originar fuerzas en esa dirección debido a su limitación de giro en el plano XZ. La única forma de conseguir este movimiento será inclinando el dron en Roll, tal y como se explicaba en el párrafo anterior.

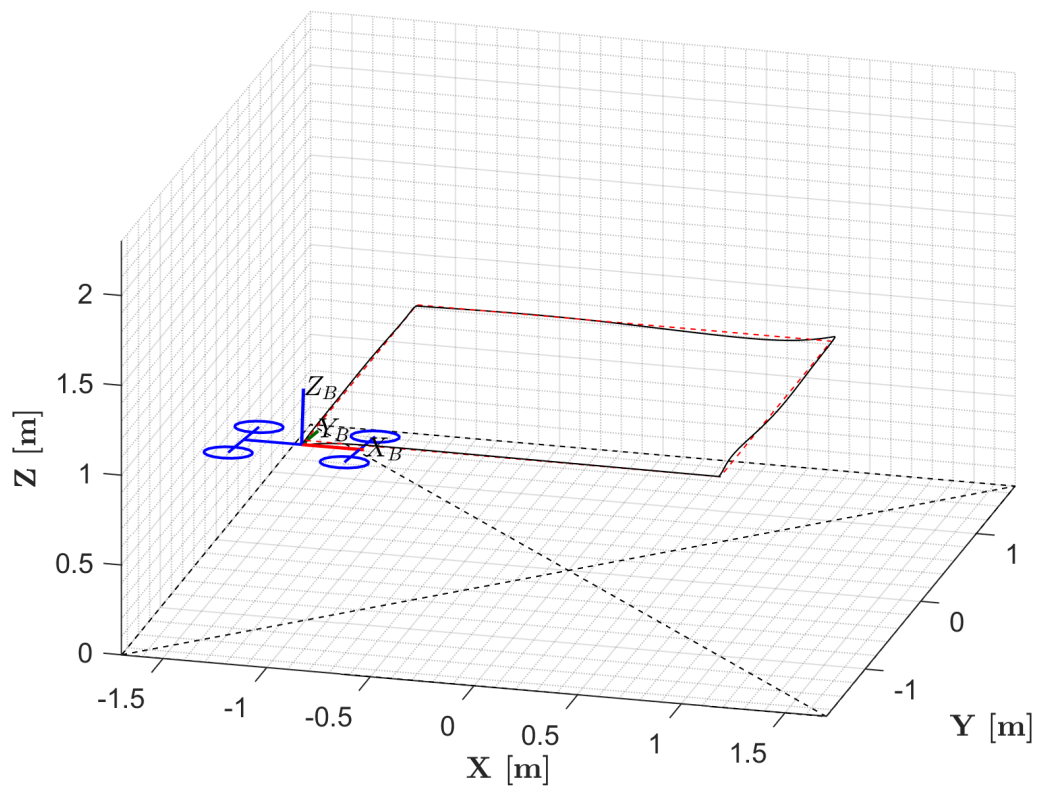
## 5.2 Simulación 2:

Los datos de referencia que describen la trayectoria para esta simulación son:

**Tabla 5.2** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3	Segundo 6	Segundo 9	Segundo 12
Posiciones [x y z] [m]	[-1 -1 1]	[1 -1 1]	[1 1 1]	[-1 1 1]	[-1 -1 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0	0	0	0
Orientación en Pitch [grados]	0	-45	0	45	0

### Movement of the UAV



**Figura 5.6** Simulación 2: Trayectoria descrita en simulación.

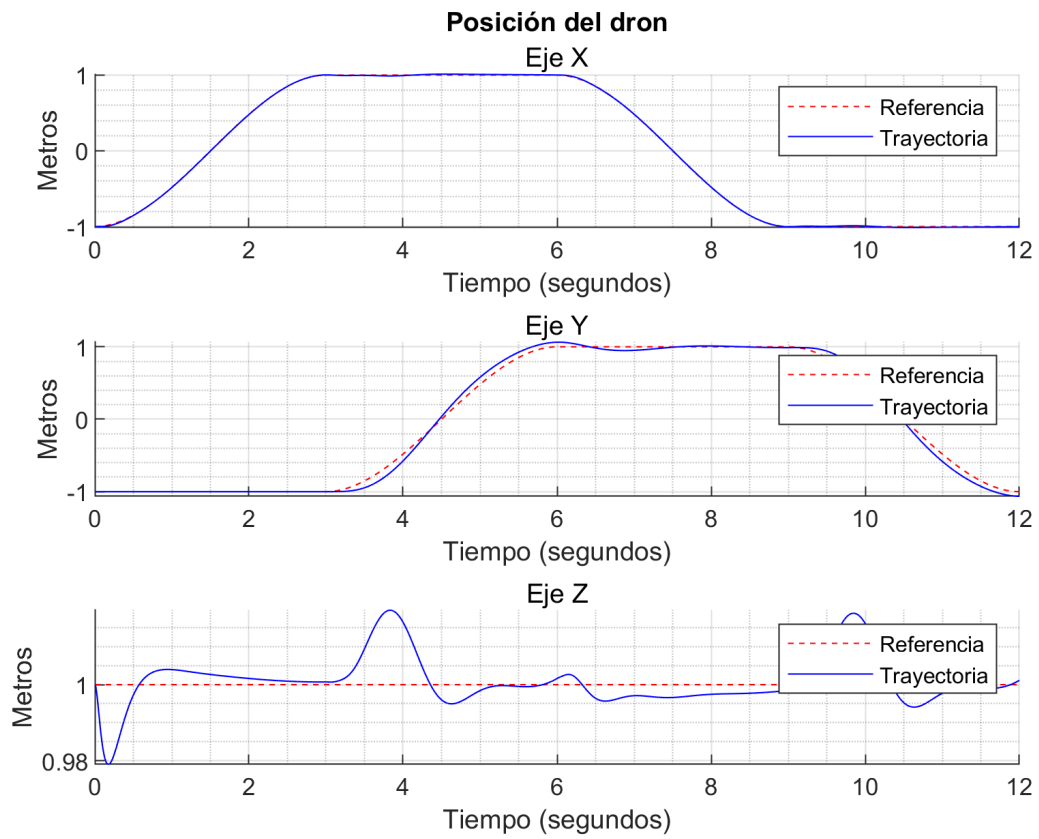


Figura 5.7 Simulación 2: Posición del dron.

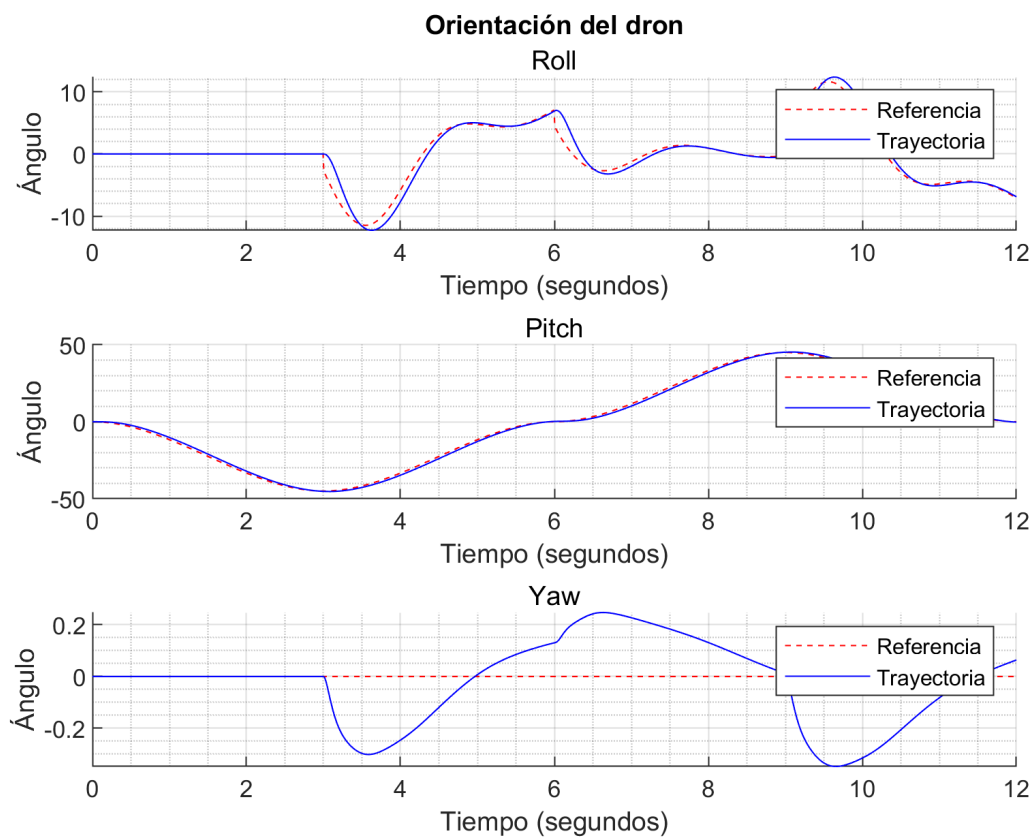


Figura 5.8 Simulación 2: Orientación del dron.

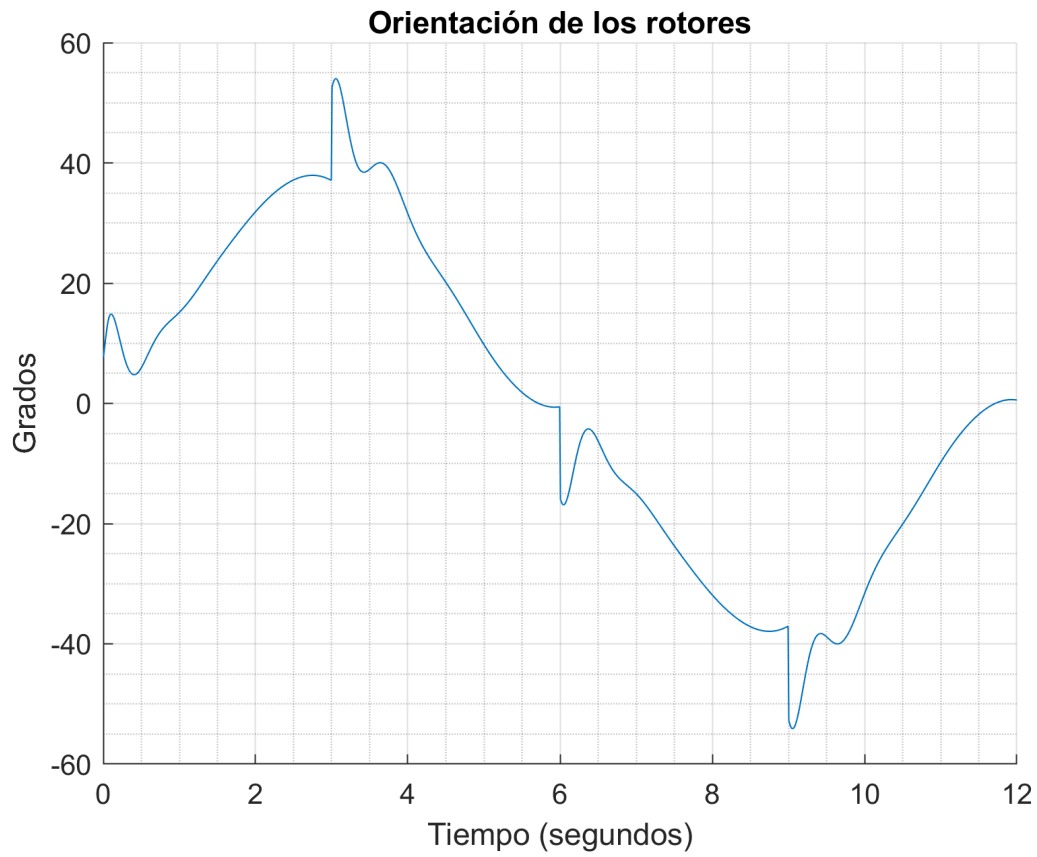


Figura 5.9 Simulación 2: Orientación de los rotores.

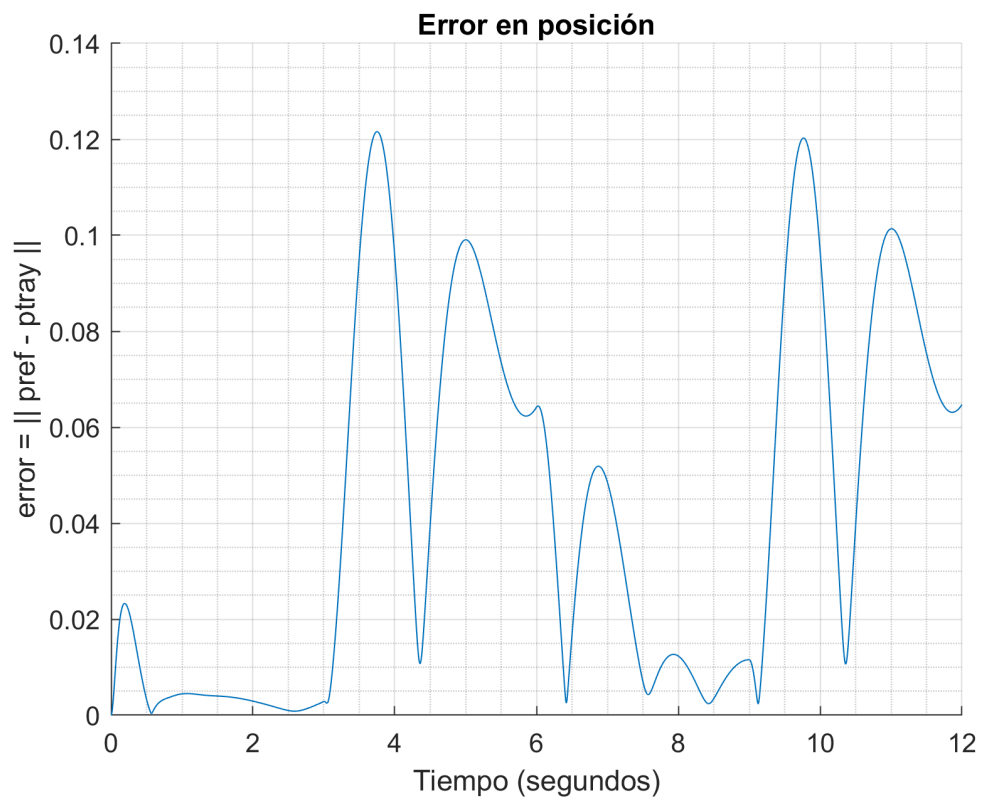


Figura 5.10 Simulación 2: Error en posición.

En esta segunda simulación, como se indicó en la introducción del capítulo, se realizarán los mismos desplazamientos que en el primer caso, por lo que la Figura 5.2 será similar a la de la sección anterior, con la diferencia que el dron rotará en Pitch al mismo tiempo. Para comprobar que efectivamente rota, se comenzará haciendo una observación a la Figura 5.8.

Mientras que la orientación en Yaw se mantiene prácticamente constante en  $0^\circ$ , el valor de Roll y Pitch varía. La curva que representa la variación de Roll a lo largo de la simulación es similar a la del apartado anterior, ya que la lógica de su variación es la misma. En los tramos donde se produce un desplazamiento a lo largo del eje Y, su valor aumenta o disminuye según lo hace la coordenada  $\tilde{y}$  ya que la traslación está ligada a la rotación, no puede darse la una sin la otra. En cuanto a la orientación de Pitch, se observa que sigue el mismo recorrido que la referencia marcada: durante los tres primeros segundos rotará  $45^\circ$  hacia la izquierda para después realizar el mismo movimiento en sentido contrario y finalmente, terminar la trayectoria con un valor de  $0^\circ$ . De esta forma queda comprobado que el UAV permite realizar movimientos y rotaciones de manera independiente además de ser capaz de permanecer inclinado y fijo en el espacio.

Haciendo ahora, una interpretación de los resultados mostrados en la Figura 5.9, se observa como los rotores se inclinan según el ángulo que formen las fuerzas que es necesario generar en las direcciones de X y Z. Cuando el dron debe girar  $45^\circ$  en sentido antihorario, los rotores lo harán en sentido horario y viceversa, permitiendo así que el UAV pueda rotar y desplazarse sin que esto altere a su estabilidad.

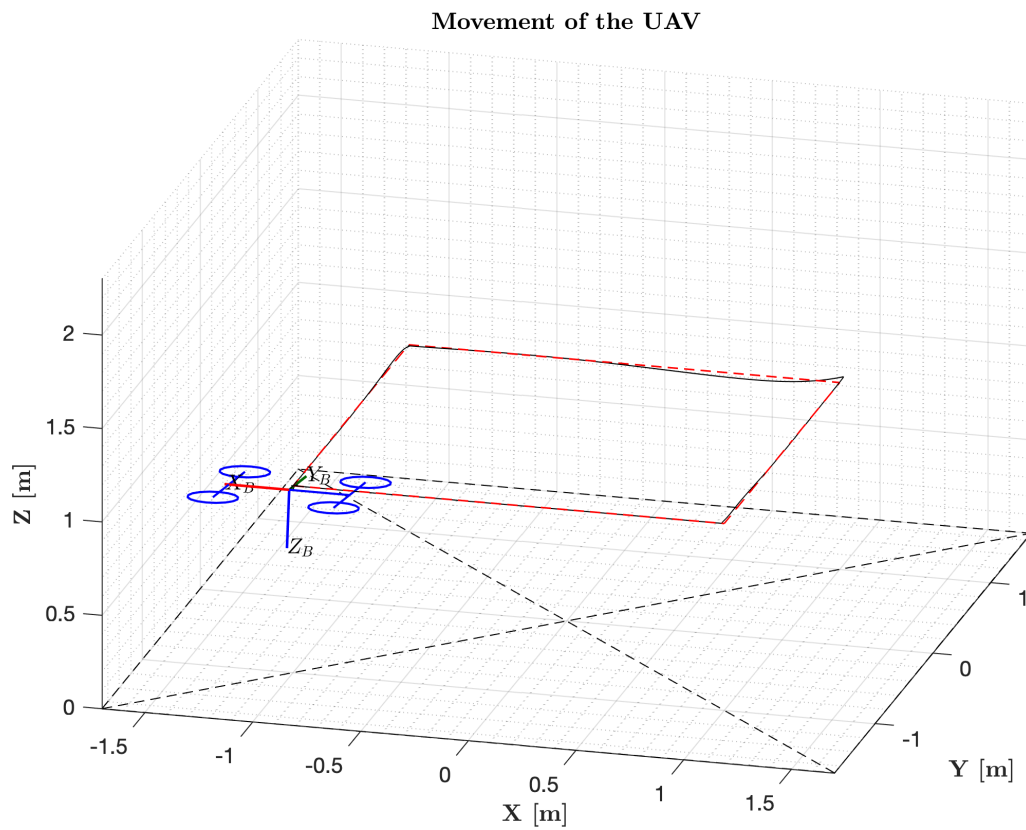
Por último, se vuelve a demostrar el buen control que realiza el quadrotor al comprobar que el error cometido a lo largo de la simulación se mantiene en valores muy bajos, siendo la máxima desviación de aproximadamente de 0.12 con respecto al valor real.

### 5.3 Simulación 3:

Los datos de referencia que describen la trayectoria para esta simulación son:

**Tabla 5.3** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3	Segundo 6	Segundo 9	Segundo 12	Segundo 15
Posiciones [x y z] [m]	[-1 -1 1]	[-1 -1 1]	[1 -1 1]	[1 1 1]	[-1 1 1]	[-1 -1 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0	0	0	0	0
Orientación en Pitch [grados]	0	180	180	180	180	180



**Figura 5.11** Simulación 3: Trayectoria descrita en simulación.

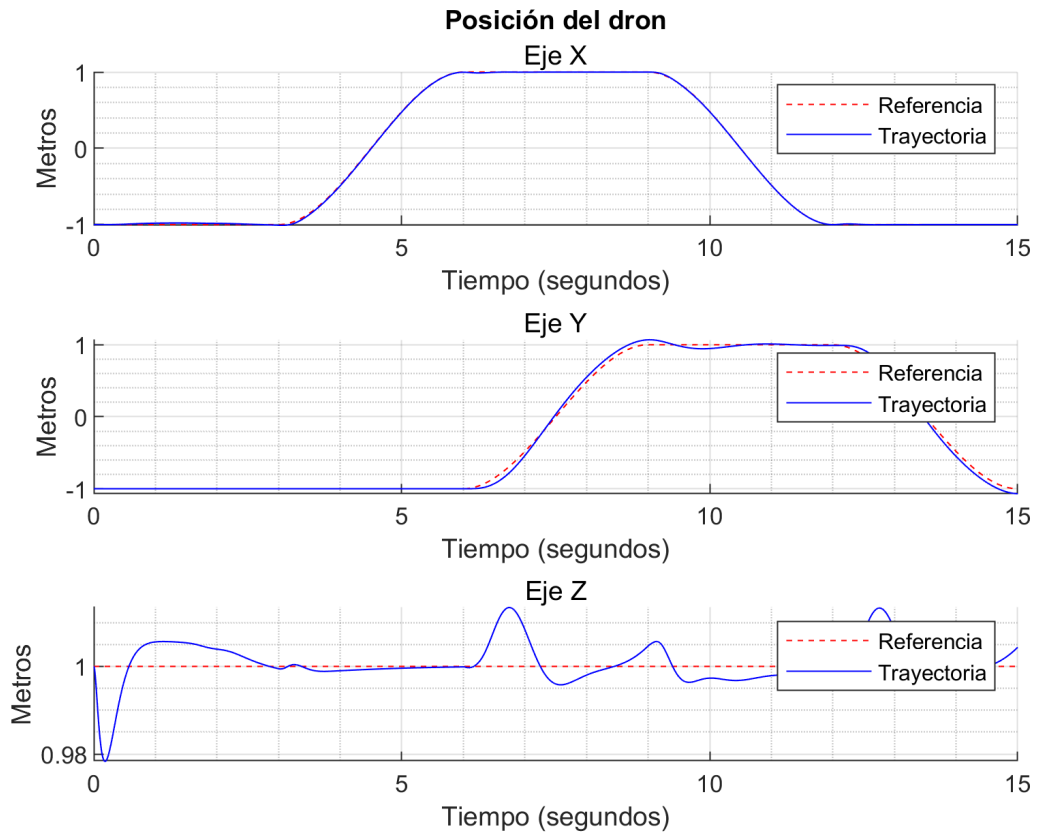


Figura 5.12 Simulación 3: Posición del dron.

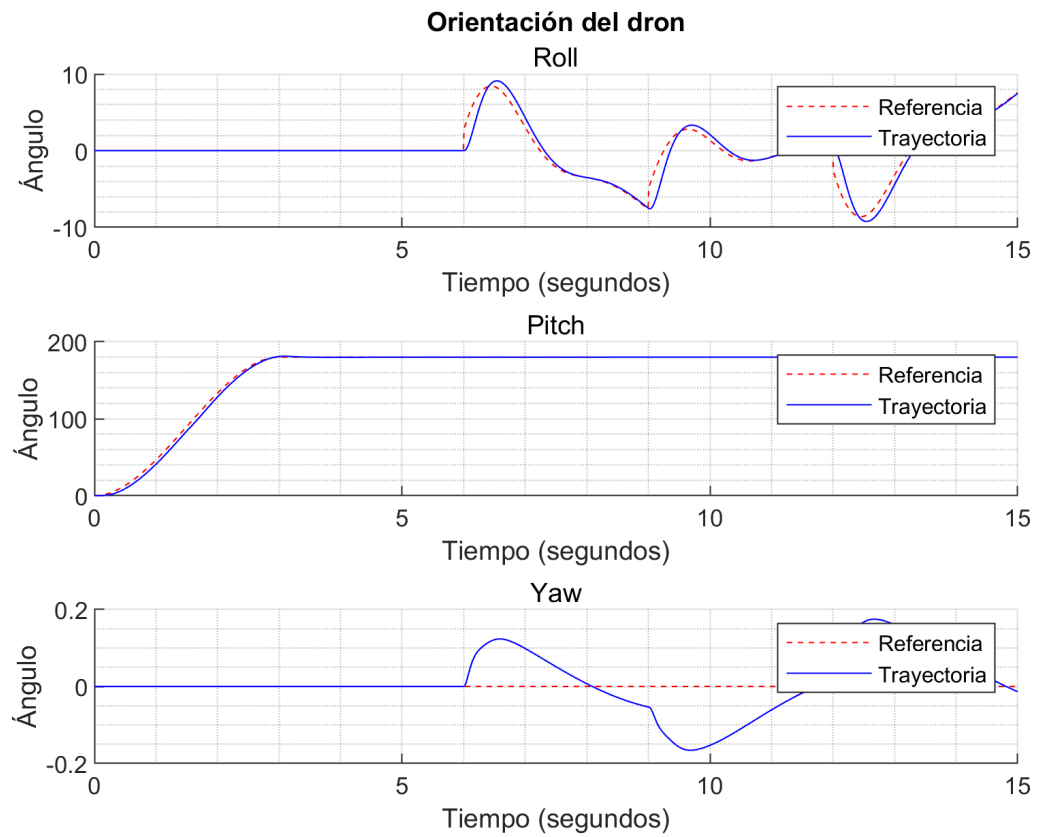


Figura 5.13 Simulación 3: Orientación del dron.





Figura 5.14 Simulación 3: Orientación de los rotores.

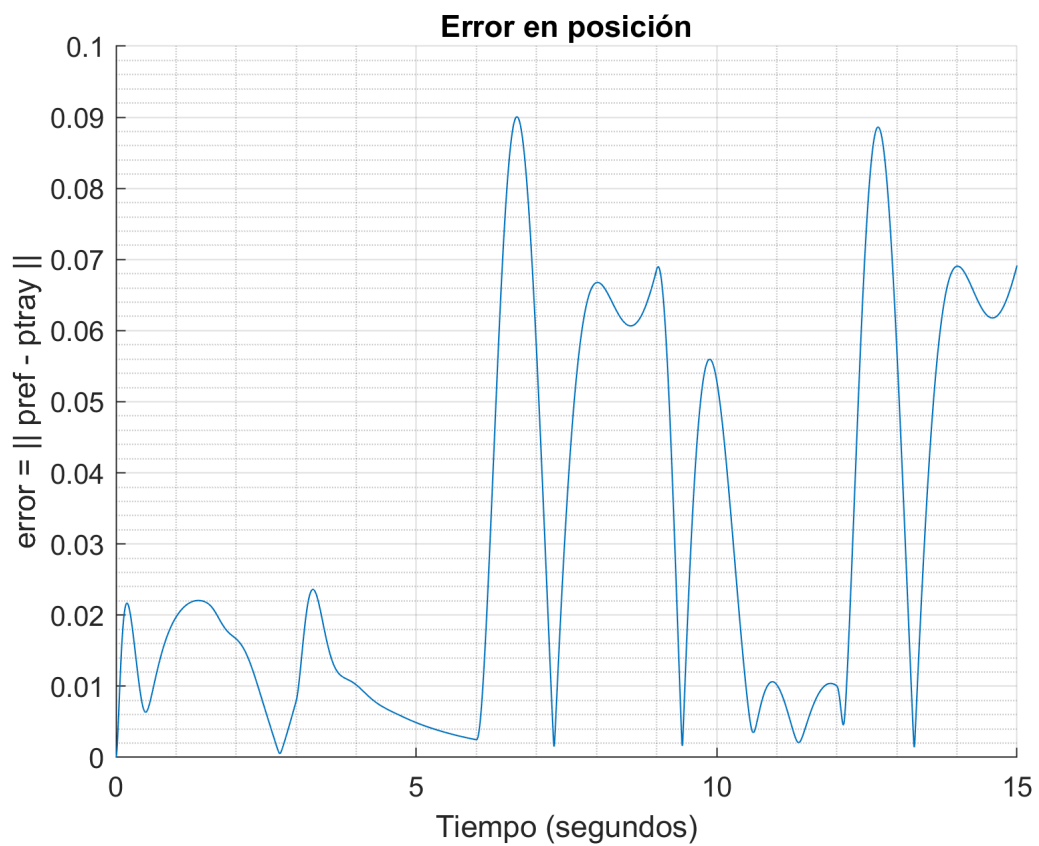


Figura 5.15 Simulación 3: Error en posición.

Para la tercera simulación, se ha optado por seguir la misma dinámica que en la primera, realizar una trayectoria cuadrada, pero llevándola a cabo mientras el dron se encuentra boca abajo, es decir, con un valor de referencia en Pitch de  $180^\circ$ . Ya que los puntos por los que pasa al trazar la trayectoria son los mismos, la Figura 5.12 será similar a la de la primera simulación.

Al no poder iniciar la simulación con los rotores orientados de la forma en la que deberían encontrarse para esta situación, el primer paso a llevar a cabo será el de girar el dron mientras se mantiene en el mismo punto del espacio. En la Figura 5.13 puede comprobarse como el valor de Pitch pasa de tener un valor de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  en los primeros instantes de tiempo. Acto seguido, permanece boca abajo hasta que finalice el periodo de tiempo evaluado. Para las gráficas de Roll y Yaw, el patrón es el mismo que para el de la primera simulación pero invertido. El valor de Yaw se mantiene constante, ya que no se espera que cambie, y para el Roll, sus valores serán distintos de 0 en los casos en los que el dron se desplace a lo largo del eje Y. Los valores de este último serán los del signo opuesto por el hecho de que el UAV está boca abajo.

Analizando el comportamiento de la orientación de los rotores, podrá observarse el mismo patrón que en la Figura 5.4 con la diferencia de que en este caso se da tomando como valor donde el dron esta completamente horizontal el  $-180^\circ$ , mientras que en la primera simulación este valor era de  $0^\circ$ .

Por último, haciendo una observación del error cometido, se mantiene en valores similares al resto de las simulaciones, lo que supone que realizar movimientos mientras se encuentra boca abajo no supone una pérdida de precisión.

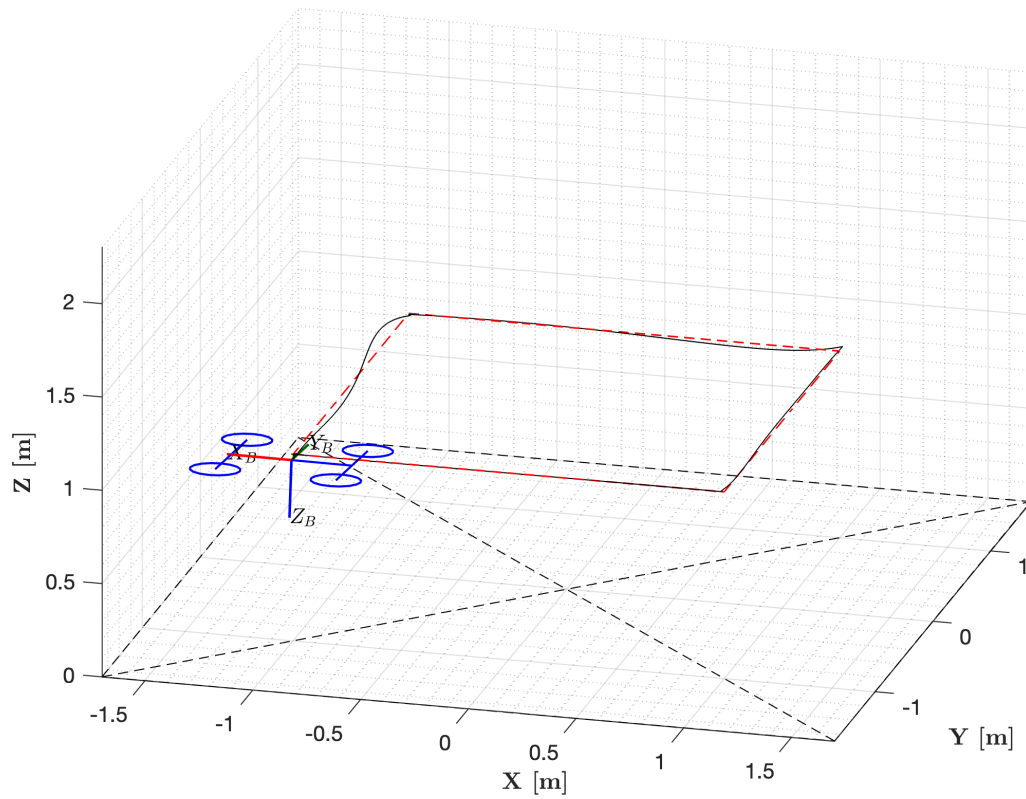
## 5.4 Simulación 4:

Los datos de referencia que describen la trayectoria para esta simulación son:

**Tabla 5.4** Datos de entrada de la simulación.

Variable	Segundo 0	Segundo 3	Segundo 6	Segundo 9	Segundo 12	Segundo 15
Posiciones [x y z] [m]	[-1 -1 1]	[-1 -1 1]	[1 -1 1]	[1 1 1]	[-1 1 1]	[-1 -1 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0	0	0	0	0
Orientación en Pitch [grados]	0	180	230	180	110	180

**Movement of the UAV**



**Figura 5.16** Simulación 4: Trayectoria descrita en simulación.

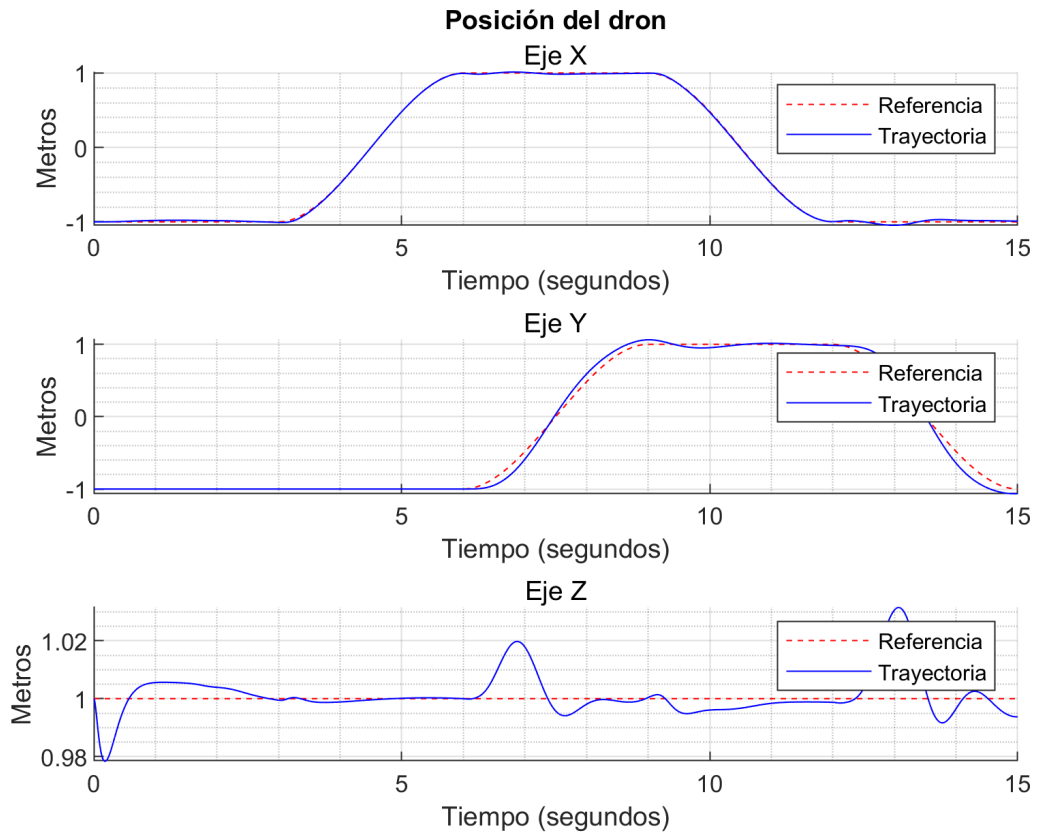


Figura 5.17 Simulación 4: Posición del dron.

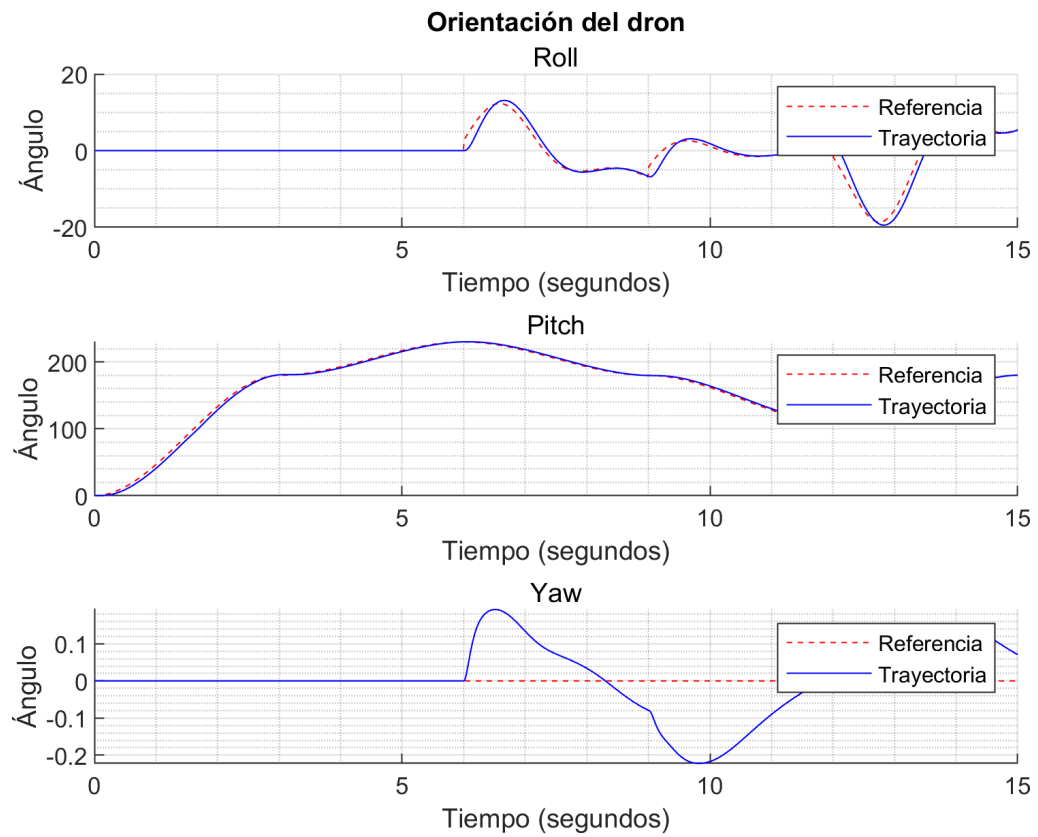


Figura 5.18 Simulación 4: Orientación del dron.

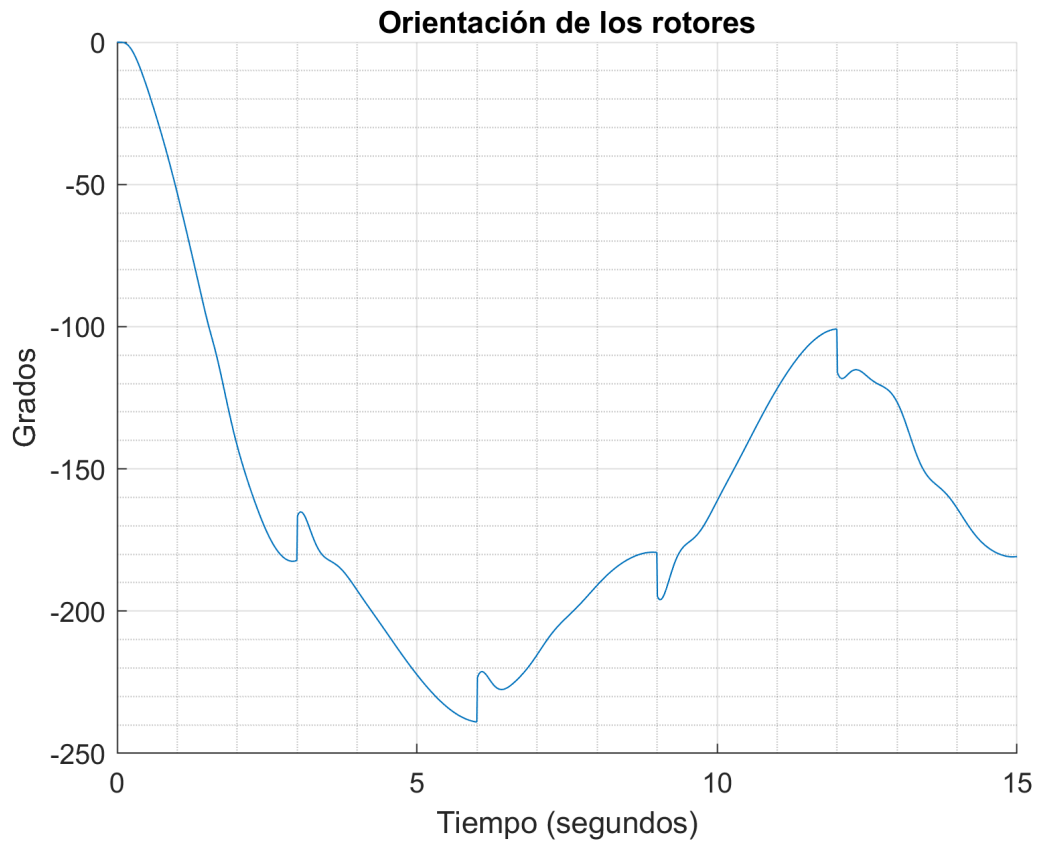


Figura 5.19 Simulación 3: Orientación de los rotores.

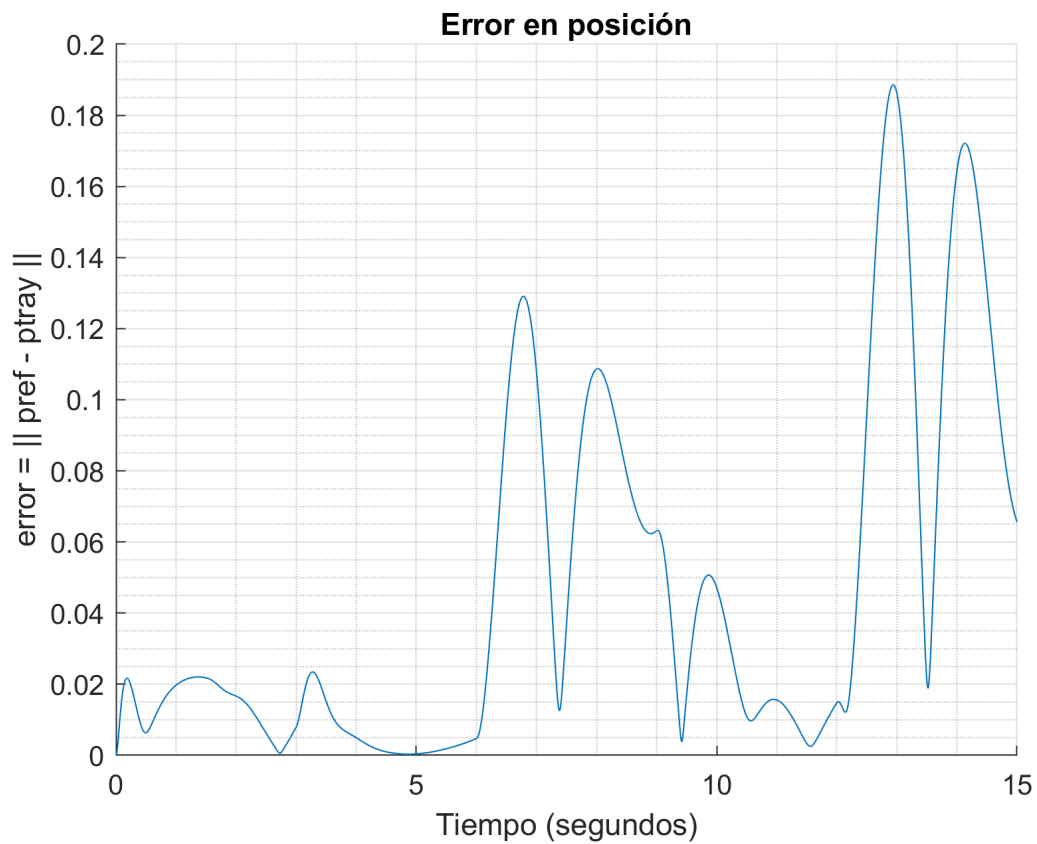


Figura 5.20 Simulación 4: Error en posición.

Para la cuarta simulación se ha querido demostrar que el UAV tiene la misma capacidad de desplazarse y rotar boca arriba que boca abajo. Para ello, se ha realizado una trayectoria cuadrada donde el dron comenzará girando hacia la derecha para luego hacer lo mismo en sentido contrario y finalizar plano y boca abajo. Al igual que en el caso anterior, previo al movimiento, se realizará una rotación hasta alcanzar los 180°.

Mientras que la figura donde se recogen las posiciones en el espacio, sigue siendo similar a las anteriores, los cambios se observan en la de la orientación. En la Figura 5.18 los valores de Roll y Yaw son los mismos que en el de la tercera simulación. Sin embargo, en el Pitch se observa como varía, desde que alcanza los 180°, un rango que va desde los 180° a valores superiores a 200° y después disminuye hasta cerca de 100°, siguiendo en todo momento lo que marca la trayectoria.

Haciendo un análisis de la orientación de los rotores, ocurre el mismo fenómeno que el descrito en la tercera simulación. El patrón de movimiento que se observa es el mismo que en el de la Figura 5.9, con un offset de -180° debido al giro que supone estar boca abajo.

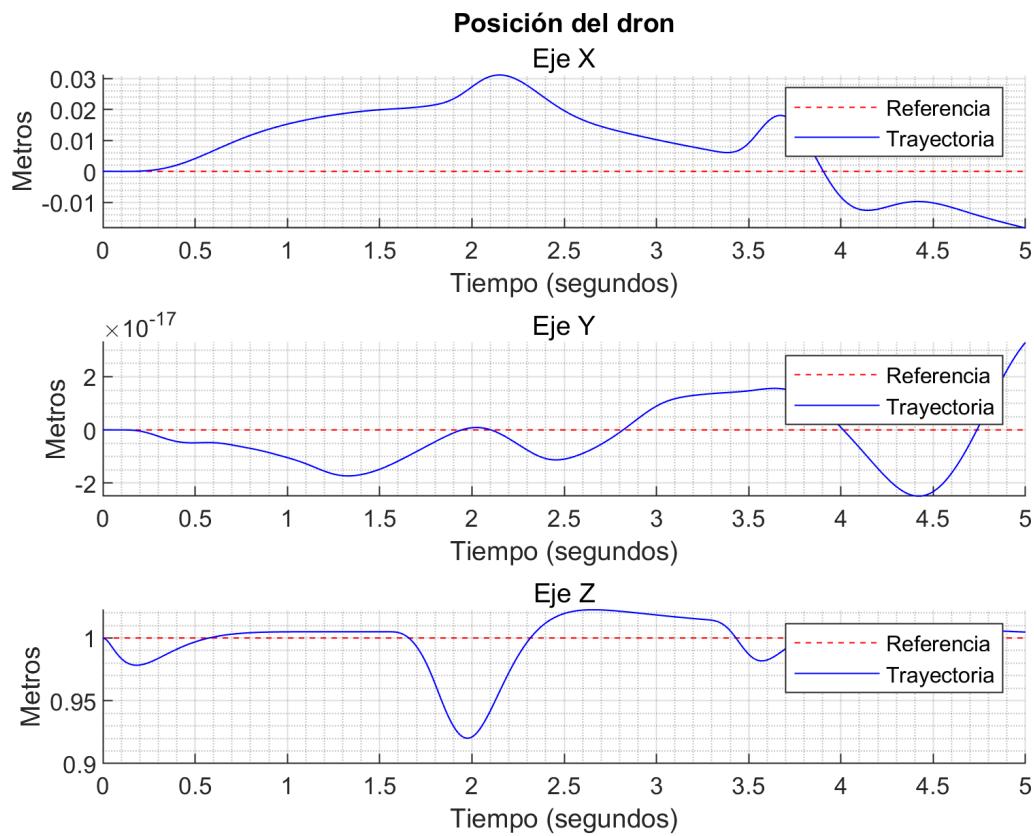
Por último, observando la Figura 5.20 se comprueba como el error cometido, a pesar de seguir siendo un valor bajo, es el doble del cometido en los casos anteriores. A pesar de ello, sigue presentando un buen comportamiento.

## 5.5 Simulación 5:

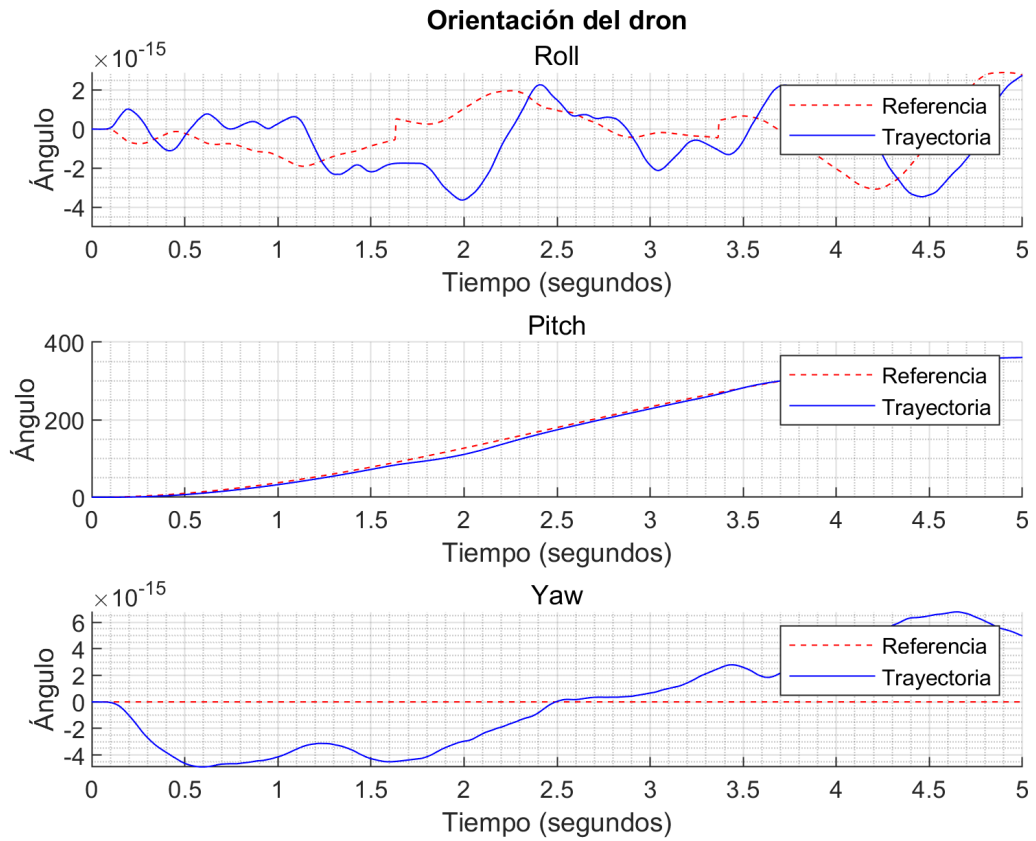
Los datos de referencia que describen la trayectoria para esta simulación son:

**Tabla 5.5** Datos de entrada de la simulación.

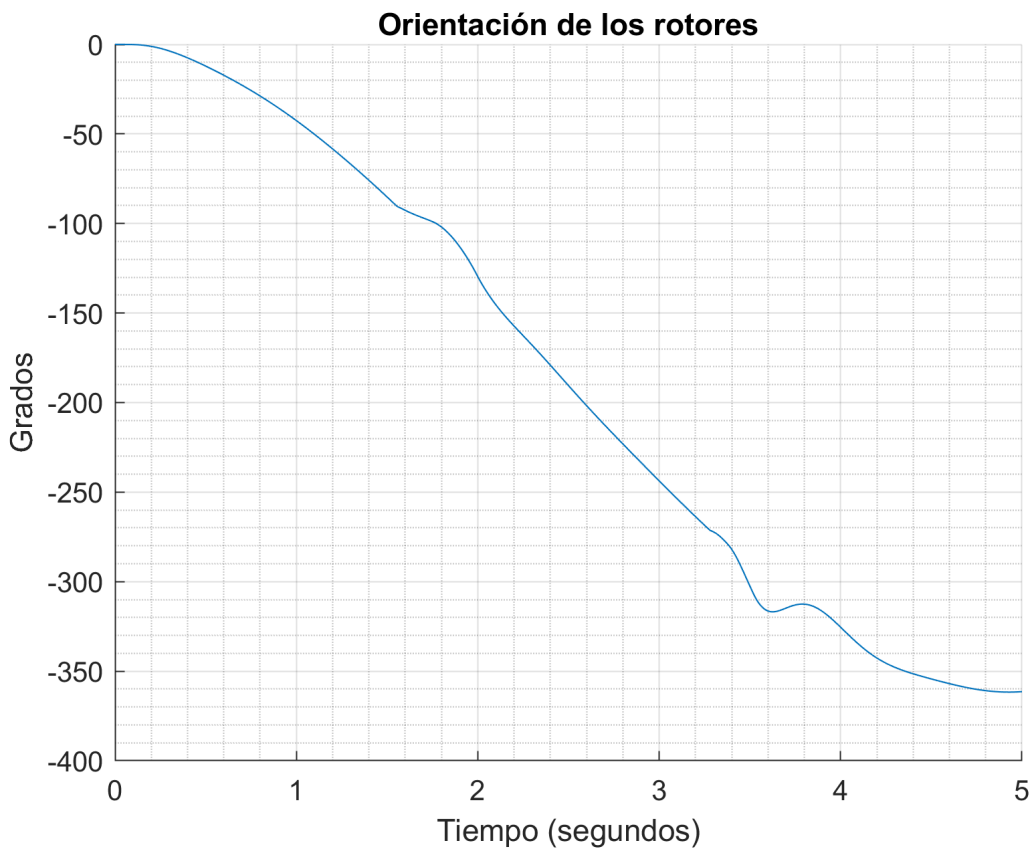
Variable	Segundo 0	Segundo 5
Posiciones [x y z] [m]	[0 0 1]	[0 0 1]
Orientación en Yaw [grados]	0	0
Orientación en Pitch [grados]	0	360



**Figura 5.21** Simulación 5: Posición del dron.

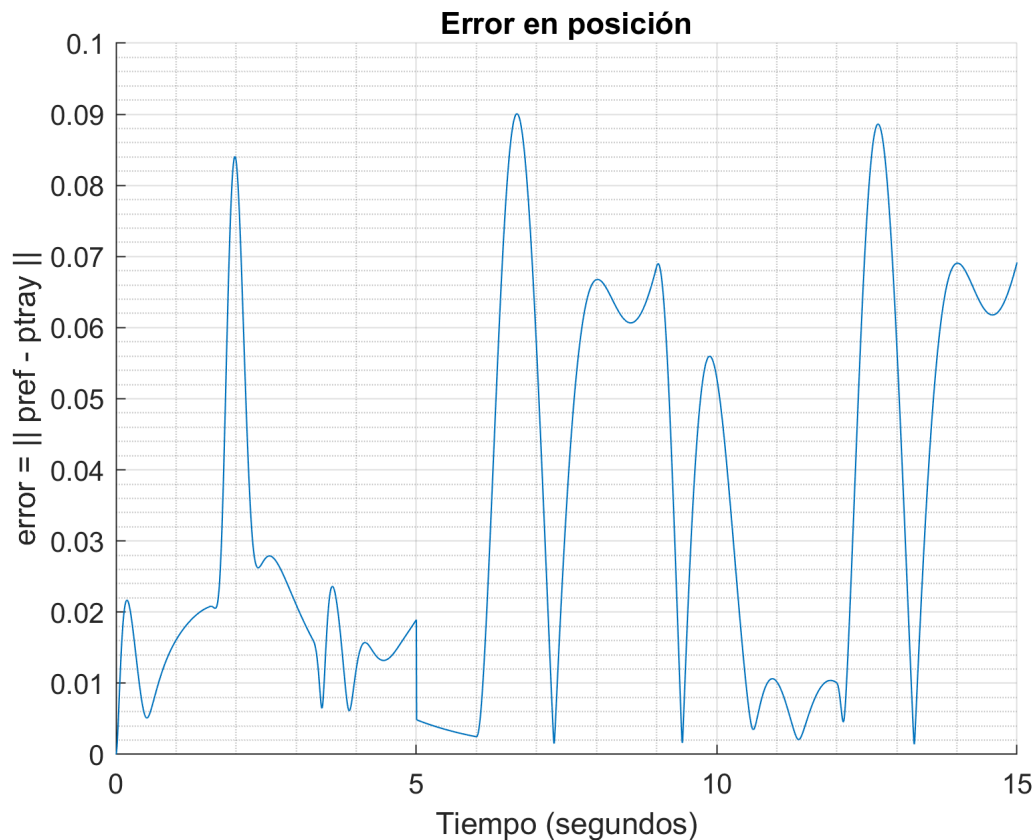


**Figura 5.22** Simulación 5: Orientación del dron.



**Figura 5.23** Simulación 5: Orientación de los rotores.





**Figura 5.24** Simulación 5: Error en posición.

Para finalizar con las simulaciones, se ha querido demostrar la capacidad del dron para dar una vuelta de  $360^\circ$ . Para que pueda apreciarse al completo, se ha optado por mantener al dron fijo en una posición variando, simplemente, el valor de Pitch.

En este caso, hacer algún comentario sobre la posición no resulta de interés, por lo que se comenzará comentando las gráficas de la orientación. En la Figura 5.22, mientras los valores de Yaw y Roll se mantienen constantes, el Pitch varía desde los  $0^\circ$  hasta los  $360^\circ$ , siguiendo con bastante precisión a lo que le indica la referencia. De esta forma queda demostrado que el dron realiza el giro correctamente.

En cuanto a la orientación de los rotores, Figura 5.23, se aprecia como siguen el movimiento contrario al giro en Pitch, cambiando la orientación para que los rotores generen en todo momento las fuerzas necesarias para producir el torque que permite el movimiento. Para los 1.5 y 3.5 segundos, puede apreciarse una leve desviación de la curva. En estos dos instantes corresponden a los momentos en los que el dron se encuentra atravesando los puntos críticos.

Por último, analizando el error en la Figura 5.24, se vuelve a encontrar un error similar al de las primeras simulaciones. Valores bajos para todos los instantes de tiempo y dándose los picos más elevados al pasar por los puntos críticos.



## 6 Conclusiones

---

**T**ras haber estudiado las diferentes secciones en las que se divide este trabajo, se finalizará ilustrando las conclusiones que es posible extraer de los resultados obtenidos.

En primer lugar, la inclusión de servomotores permite al dron desacoplar los movimientos de traslación de los de rotación, en detrimento de la sencillez del controlador. Los servomotores permiten que el vehículo adopte ciertas inclinaciones sin involucrar un desplazamiento con ello, es decir, pueden permanecer fijos en el espacio a la par que inclinados. Sin embargo, la orientación de los rotores introduce nuevas incógnitas a resolver. Al contar con dos servomotores, las incógnitas típicas de un quadrotor convencional ascienden en dos. Por tanto, ha habido que estudiar diferentes formas de abordar una solución. De entre las 3 vistas, se ha comprobado que la opción viable, y que presenta buenos resultados, es la que supone que las orientaciones de los 4 motores son la misma y que su cálculo debe realizarse como la arcotangente de las fuerzas que debe generar con dirección X y Z. A pesar de que requiere una mayor elaboración el desarrollar el modelo, las ventajas en cuanto a precisión que presentan suplen este trabajo. Este dron, resulta de gran utilidad a la hora de realizar aproximaciones a superficies u objetos en los que se requiera que se aborde con una cierta inclinación.

En segundo lugar, el modelo diseñado y propuesto presenta un buen comportamiento general. Sin embargo, a la hora de llevarlo a la realidad, habría que tener en cuenta los puntos singulares donde el funcionamiento no es el adecuado. A la hora de realizar aproximaciones en posición vertical, el dron no presentaría un comportamiento adecuado debido a la dificultad para generar el torque necesario que le permite mantener esa orientación.

Por último, aunando los resultados de las diferentes simulaciones, se puede llegar a la conclusión de que en el tilting quadrotor, las ecuaciones calculadas para su modelado presentan una buena respuesta frente a distintas situaciones. Las rotaciones de Yaw y Pitch se encuentran desacopladas a las traslaciones. Además, el error cometido para el vuelo horizontal, tanto boca arriba como boca abajo, presenta un valor similar y bajo, siendo el de mayor magnitud el del caso en el que se rote y se desplace mientras se vuela con el eje Z del cuerpo en sentido contrario al de los ejes Tierra.

Para concluir con este trabajo, este tipo de drones presentan grandes ventajas de precisión frente a los drones convencionales, siendo más demandados, por su utilidad, en tareas que requieran cierto nivel de exigencia. Por ello, el estudio de los mismos resulta de gran importancia y levanta interés hoy en día. En este trabajo, se han supuesto que los rotores compartían orientación a pesar de contar con dos servomotores en lugar de uno. En un futuro, la idea fundamental sería desacoplar estos movimientos para mejorar aun más la eficiencia y precisión de los mismos.



# Bibliografía

---

- [1] “Tilt drone: A fully-actuated tilting quadrotor platform,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 5, 2020.
- [2] A. González-Morgado, C. Álvarez Cía, J. G. H. Benot, and A. O. Baturone, “Uav fully-actuated: modelo, control y comparación con configuración coplanaria,” *XLIII Jornadas de Automática: libro de actas: 7, 8 y 9 de septiembre de 2022, Logroño (La Rioja)*, pp. 700–707, 9 2022.
- [3] M. Ryll, H. H. Bühlhoff, and P. R. Giordano, “Modeling and control of a quadrotor uav with tilting propellers,” 2012.
- [4] C. Ding and L. Lu, “A tilting-rotor unmanned aerial vehicle for enhanced aerial locomotion and manipulation capabilities: Design, control, and applications,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 26, 2021.
- [5] M. Kamel, S. Verling, O. Elkhatib, C. Sprecher, P. Wulkop, Z. Taylor, R. Siegwart, and I. Gilitschenski, “The voliro omniorientational hexacopter: An agile and maneuverable tiltable-rotor aerial vehicle,” *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 25, 2018.
- [6] A. González-Morgado, G. Heredia, and A. Ollero, “Grvc-simulator of multirotors: Design and application in classroom,” vol. 589 LNNS, 2023.