

Trabajo Fin de Grado Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de Herramientas para el Análisis de Incertidumbre de Satélites en Órbita Baja Terrestre sometidos a Perturbaciones

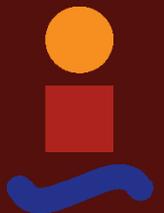
Autor: Jesús Urbano Navajas

Tutores: Rafael Vázquez Valenzuela

José Manuel Montilla García

**Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de Herramientas para el Análisis de Incertidumbre de Satélites en Órbita Baja Terrestre sometidos a Perturbaciones

Autor:

Jesús Urbano Navajas

Tutores:

Rafael Vázquez Valenzuela

Catedrático de Universidad

José Manuel Montilla García

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023

Trabajo Fin de Grado: Estudio de Herramientas para el Análisis de Incertidumbre de Satélites en Órbita Baja Terrestre sometidos a Perturbaciones

Autor: Jesús Urbano Navajas
Tutores: Rafael Vázquez Valenzuela
José Manuel Montilla García

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

Estas líneas pese a ser las primeras resultan ser las últimas que escribo y quizás las más complicadas de escribir también. Con este proyecto finalizo mi carrera y por fin puedo decir que soy ingeniero aeroespacial. Pero este logro no es solo mío, resultaría muy egoísta si lo pensara, este logro es de mucha gente, toda la que me ha acompañado durante estos años. Este breve espacio del proyecto va dedicado a todas esas personas.

A mis padres, Abundio y Ana. Un ejemplo continuo de cariño, trabajo y esfuerzo por sus hijos, esta carrera es casi más vuestra que mía. Con estos padres uno no puede estar más orgulloso de quien es y de donde viene. Gracias por inculcar en mí valores como el del trabajo bien hecho, la bondad, el cariño y el respeto, valores que gracias a vosotros llevaré conmigo toda la vida. Sois el mayor referente que uno puede tener.

A mis hermanos, Jose y Juan Antonio. No seremos los hermanos que más hablen pero sí los que más se quieren. Gracias Jose por actuar siempre como hermano mayor y gracias Juan Antonio por enseñarme a afrontar la vida siempre con una sonrisa pese a las dificultades.

A mi familia en general, a los que están y los que ya no. Espero que podáis estar orgullosos de mí.

A mis amigos, los de Castro y los de Sevilla. Gracias por hacer este camino más ameno. Por las charlas interminables, los viajes para el recuerdo e incontables risas. Porque sois amigos para toda la vida.

Y por último gracias a mis tutores, Rafa y José Manuel, por aconsejarme y antedarme en todo momento y por haberme elegido para terminar mi carrera con este proyecto.

Jesús Urbano Navajas

Sevilla, 2023

Resumen

Debido al efecto de las perturbaciones, el cual es difícil de modelar con precisión, siempre aparece un cierto grado de incertidumbre asociado a la órbita. Para modelar y trabajar con dicha incertidumbre se puede utilizar la teoría de la probabilidad. El objetivo de este proyecto es el de estudiar y analizar distintos métodos que permitan la propagación de la incertidumbre a lo largo de la órbita, tales como el método Montecarlo, Linealización, Unscented Transform (UT) o los Elementos Orbitales Equinocciales. Asimismo, las perturbaciones más importantes para los satélites en órbita baja, el J_2 y la resistencia aerodinámica, son estudiadas también. Además, el efecto que tienen en los elementos orbitales de la órbita y en la propia evolución de la incertidumbre es analizado de igual forma.

Abstract

Due to perturbation effects, which are difficult to model accurately, there is always a certain degree of uncertainty associated with the orbit. To model and work with such uncertainty, probability theory can be utilized. The objective of this project is to study and analyze different methods that allow us to propagate this uncertainty along the orbit, such as the Monte Carlo method, Linearization, Unscented Transform (UT), or Equinoctial Orbital Elements. Additionally, the most significant perturbations for satellites in low earth orbit, the J_2 effect and aerodynamic drag, are also studied. Besides, their impact on the orbital elements and the evolution of uncertainty itself are also analyzed.

Índice Abreviado

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XIII
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivo y alcance del proyecto	2
1.3 Estructura del proyecto	2
2 Conceptos básicos de mecánica orbital	5
2.1 Sistemas de referencia	5
2.2 El problema de los dos cuerpos y los elementos orbitales	9
2.3 Teoría de perturbaciones	12
2.4 Clasificación y metodología para los efectos de perturbación	17
3 Conceptos básicos de estadística	21
3.1 Variable aleatoria unidimensional	21
3.2 Variable aleatoria n-dimensional	24
3.3 Distribución Normal	25
4 Método Montecarlo	29
4.1 Definición	29
4.2 Desarrollo del método	29
4.3 Resultados	32
4.4 Análisis de sensibilidad	35
4.5 Test de normalidad de Henze-Zirkler	37
5 Método de Linealización	41
5.1 Definición	41
5.2 Desarrollo del método	41
5.3 Resultados	43
5.4 Análisis de sensibilidad	45
6 Unscented Transform (UT)	49

6.1	Definición	49
6.2	Desarrollo del método	49
6.3	Resultados	50
6.4	Análisis de sensibilidad	51
7	Método de los Elementos Orbitales Equinocciales	59
7.1	Definición	59
7.2	Desarrollo del método	59
7.3	Resultados	61
7.4	Análisis de sensibilidad	61
8	Comparativa de métodos	67
8.1	Ventajas e inconvenientes de los métodos	67
8.2	Comparativa de resultados	68
8.3	Análisis de sensibilidad con la excentricidad	71
9	Efecto de las perturbaciones	75
9.1	Efecto de las perturbaciones en la órbita	75
9.2	Efecto de las perturbaciones en la incertidumbre	80
10	Conclusiones y líneas futuras de trabajo	87
10.1	Conclusiones sobre la evolución de la incertidumbre y los métodos empleados	87
10.2	Conclusiones sobre el efecto de las perturbaciones	88
10.3	Líneas futuras de trabajo	88
	<i>Índice de Figuras</i>	91
	<i>Índice de Tablas</i>	93
	<i>Bibliografía</i>	95

Índice

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XIII
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivo y alcance del proyecto	2
1.3 Estructura del proyecto	2
2 Conceptos básicos de mecánica orbital	5
2.1 Sistemas de referencia	5
2.1.1 Sistemas de referencia inerciales	5
Sistema Heliocéntrico	5
Sistema Geocéntrico Eclíptico	6
Sistema Geocéntrico Ecuatorial	6
2.1.2 Sistemas de referencia no inerciales	8
Sistema Geográfico	8
Sistema Topocéntrico	8
2.2 El problema de los dos cuerpos y los elementos orbitales	9
2.2.1 Ecuación del movimiento	9
2.2.2 Elementos orbitales	10
2.3 Teoría de perturbaciones	12
2.3.1 Efecto de un tercer cuerpo	12
2.3.2 Forma no esférica de la Tierra:	14
2.3.3 Resistencia atmosférica:	15
2.3.4 Presión de radiación solar:	16
2.4 Clasificación y metodología para los efectos de perturbación	17
3 Conceptos básicos de estadística	21
3.1 Variable aleatoria unidimensional	21
3.1.1 Distribuciones discretas y continuas	21
Distribución discreta	21
Distribución continua	22
3.1.2 Esperanza matemática y media	23
3.1.3 Momentos de una variable aleatoria	23

3.2	Variable aleatoria n-dimensional	24
3.3	Distribución Normal	25
4	Método Montecarlo	29
4.1	Definición	29
4.2	Desarrollo del método	29
4.2.1	Garantías con método Montecarlo y tamaño muestral	30
	Generación de muestras	31
	Modelo del sistema	31
	Criterio de parada	31
	Aumento del tamaño muestral	31
	Ejemplo de uso	32
4.3	Resultados	32
4.4	Análisis de sensibilidad	35
4.4.1	Variación en excentricidad	36
4.4.2	Variación en semieje mayor	36
4.4.3	Variación en inclinación	37
4.5	Test de normalidad de Henze-Zirkler	37
5	Método de Linealización	41
5.1	Definición	41
5.2	Desarrollo del método	41
5.3	Resultados	43
5.4	Análisis de sensibilidad	45
5.4.1	Variación en excentricidad	45
5.4.2	Variación en semieje mayor	45
5.4.3	Variación en inclinación	45
6	Unscented Transform (UT)	49
6.1	Definición	49
6.2	Desarrollo del método	49
6.3	Resultados	50
6.4	Análisis de sensibilidad	51
6.4.1	Variación en excentricidad	52
6.4.2	Variación en semieje mayor	52
6.4.3	Variación con inclinación	53
6.4.4	Variación de κ	53
7	Método de los Elementos Orbitales Equinocciales	59
7.1	Definición	59
7.2	Desarrollo del método	59
7.3	Resultados	61
7.4	Análisis de sensibilidad	61
7.4.1	Variación en excentricidad	62
7.4.2	Variación en semieje mayor	63
7.4.3	Variación en inclinación	63
8	Comparativa de métodos	67
8.1	Ventajas e inconvenientes de los métodos	67

8.1.1	Método Montecarlo	67
8.1.2	Método de Linealización	67
8.1.3	Unscented Transform	68
8.1.4	Elementos Orbitales Equinocciales Modificados	68
8.2	Comparativa de resultados	68
8.3	Análisis de sensibilidad con la excentricidad	71
9	Efecto de las perturbaciones	75
9.1	Efecto de las perturbaciones en la órbita	75
9.1.1	Efecto del J_2	75
	Consecuencias en la órbita	75
	Resultados numéricos	76
9.1.2	Efecto de la resistencia aerodinámica	77
	Resultados numéricos	77
9.2	Efecto de las perturbaciones en la incertidumbre	80
9.2.1	Efecto del J_2	81
9.2.2	Efecto de la resistencia aerodinámica	82
9.2.3	Análisis de sensibilidad	82
10	Conclusiones y líneas futuras de trabajo	87
10.1	Conclusiones sobre la evolución de la incertidumbre y los métodos empleados	87
10.2	Conclusiones sobre el efecto de las perturbaciones	88
10.3	Líneas futuras de trabajo	88
	<i>Índice de Figuras</i>	91
	<i>Índice de Tablas</i>	93
	<i>Bibliografía</i>	95

Notación

a	Semieje mayor
e	Excentricidad
i	Inclinación
ω	Argumento de perigeo
Ω	Ascensión recta del nodo ascendente o RANN
M	Anomalía media
θ	Anomalía verdadera
ϕ	Latitud
λ	Longitud
AR	Ascensión recta
δ	Declinación
\oplus	Símbolo astronómico de la Tierra
\odot	Símbolo astronómico del Sol
\lrcorner	Símbolo astronómico de la Luna
Υ	Primer punto de Aries
Ω	Nodo ascendente
\oslash	Nodo descendente
t	Tiempo
T	Periodo orbital
m_v	Masa del vehículo
ρ	Densidad
A	Área
p	Presión de radiación solar
ε	Coefficiente de reflectividad
c	Velocidad de la luz
I	Flujo de radiación solar
C_b	Coefficiente balístico
C_D	Coefficiente de resistencia aerodinámica
\vec{v}_{rel}	Velocidad relativa
μ	Parámetro gravitacional
tg	Función tangente
$arctg$	Función arcotangente
\sin	Función seno
\cos	Función coseno
J_2	Perturbación del J_2

ω_{\oplus}	Velocidad angular de la Tierra
n	Velocidad orbital media
\vec{r}	Vector posición
\vec{v}	Vector velocidad
\vec{h}	Vector de momento específico
\vec{n}	Vector nodal
\vec{e}	Vector excentricidad
LEO	Órbita terrestre baja
MEO	Órbita terrestre media
GEO	Órbita geoestacionaria
σ	Desviación típica o estándar
σ^2	Varianza
$Cov(X_1, X_2)$	Covarianza de las variables X_1 y X_2
Σ	Matriz de covarianza
μ	Media
$N = (\mu, \sigma^2)$	Distribución normal o gaussiana de media μ y varianza σ^2
<i>PDF</i>	Función de densidad de propabilidad
MC	Método Montecarlo
LIN	Método de Linealización
UT	Método de la Unscented Transform
<i>EOE</i>	Elementos Orbitales Equinociales
<i>EOK</i>	Elementos Orbitales Keplerianos
<i>EOEM</i>	Elementos Orbitales Equinociales Modificados
<i>SCC</i>	Sistema de Coordenadas Cartesianas
p, f, g, h, k, L	Elementos orbitales equinociales modificados

1 Introducción

1.1 Motivación

Resulta innegable el aporte que ha tenido el espacio en el desarrollo de la humanidad en sí misma. Desde el primer satélite puesto en órbita en la historia, el Sputnik I en 1957 por la URSS, el cual solo emitía pulsos de radio a cierta frecuencia, hasta los lanzamientos cada vez más frecuentes de la constelación de satélites Starlink de SpaceX, han pasado apenas 66 años.

En este tiempo se han lanzado alrededor de 8900 satélites por más de 40 países. Según una estimación hecha en 2018 por las Naciones Unidas [3], unos 5000 permanecen en órbita. De ellos, unos 1900 están operativos, mientras que el resto ha cumplido con su vida útil y se han convertido en basura espacial.

Los satélites se utilizan para diversos propósitos. Entre las modalidades más frecuentes se incluyen a los satélites de observación terrestre, tanto civiles como militares, satélites de comunicaciones, satélites de navegación o satélites meteorológicos.

Además, no solo hemos lanzado satélites para orbitar a la Tierra, más de una docena de sondas espaciales han sido situadas en órbita alrededor de otros cuerpos celestes y han pasado a ser satélites artificiales de la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno, un cometa, el Sol y unos cuantos asteroides.

Las órbitas de los satélites varían considerablemente en función de la finalidad de este. Las más usadas son la órbita baja terrestre (LEO¹) donde se ubica el 63 % de los satélites operativos y la órbita geostacionaria (GEO²) donde está el 37 % restante.

Sin embargo, aunque resulte sorprendente, la posición de todos estos satélites no se conoce exactamente. Debido a numerosos factores como las perturbaciones a las que se encuentran sometidos o maniobras realizadas siempre existe un grado de incertidumbre. Es decir, la posición del satélite no es un punto sino una nube de puntos probabilística donde las empresas estiman que está la posición de su satélite.

Esto hace evidente la necesidad de una sólida y exhaustiva estimación de la posición del satélite, es decir, de esta nube de puntos. Para ello las empresas deben de contar con métodos y herramientas para su estimación y su análisis en todo instante de tiempo. Deben conocer cómo evoluciona dicha incertidumbre. Pues solo así se evitarían desgracias como la ocurrida en febrero de 2009 entre un satélite comercial en uso de la empresa Iridium Satellite LLC con otro satélite ruso declarado fuera de operaciones. El choque resultó en unos 600 fragmentos que se unían a las aproximadamente 9000 toneladas de basura espacial que estima la ESA que se encuentran actualmente orbitando alrededor de nuestro planeta.

¹ Órbitas con altura inferior a 2000 km.

² Órbita circular en el plano ecuatorial con una altura de 35786 km.

Otro incidente más reciente ocurrió el 31 de octubre de 2022. China lanzaba un cohete con el objetivo de completar la última fase de su estación espacial. Tras ponerlo en órbita, las autoridades chinas permitieron que uno de sus módulos, de alrededor de 20 toneladas de peso, se desprendiera y cayera sin control hacia la Tierra. Esta caída descontrolada, a pesar de estar monitorizada por diversos organismos, provocó que varios aeropuertos de España y parte de Europa, como Francia e Italia, decidieran parar la actividad aérea, lo cual generó importantes retrasos en el tráfico aéreo. Afortunadamente, el 4 de noviembre de 2022 se confirmaba la caída del objeto en el océano pacífico.

Con unos métodos para estimar la posición, la nube de puntos, de manera más precisa se podrían predecir posibles colisiones como estas, y evitarlas con las maniobras pertinentes.

Para que dicha estimación sea lo más exacta posible, en estos métodos y modelos habrá que incluir las perturbaciones, que propiamente son las que provocan dicha incertidumbre. Así, como nuestro estudio se va a centrar en órbitas LEO, pues es donde están la mayoría de satélites, resultaría de lo más interesante estudiar como las perturbaciones más importantes para este tipo de órbita, el J_2 y la resistencia aerodinámica, interactúan con la incertidumbre.

Este proyecto además surge también como complementación del trabajo pasado realizado sobre este tema en [10].

1.2 Objetivo y alcance del proyecto

El objetivo principal de este proyecto es el de analizar cómo evoluciona la incertidumbre a partir de errores iniciales a lo largo de una órbita tipo LEO con el paso del tiempo. El error inicial que se usará en este proyecto para analizar la evolución de la incertidumbre será de 50 m en posición en las tres direcciones. Además, se estudiarán diferentes métodos para realizar dicho análisis. Se pretende también estudiar las ventajas y desventajas que tienen todos los métodos, los resultados obtenidos con ellos y la determinación de los mejores métodos para llevar a cabo esta tarea.

Por otro lado, se llevará a cabo distintos análisis de sensibilidad con todos los métodos para comprobar cuál es el efecto que tendría en la evolución de la incertidumbre en la órbita un cambio en las propiedades de ella.

Finalmente, se procede a estudiar el efecto de las perturbaciones más importantes que sufren los satélites en órbita LEO, así como los cambios que provocan en la órbita y sobre todo en la evolución de la incertidumbre.

1.3 Estructura del proyecto

El documento se encuentra estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 1: El capítulo empieza presentado la motivación principal que lleva a la realización de este proyecto. Además de esto se explica también el objetivo, alcance y estructura del mismo.

Capítulo 2: Los conceptos básicos de la mecánica orbital más necesarios para el seguimiento del proyecto son introducidos: sistemas de referencias, ecuaciones del movimiento, elementos orbitales, así como una introducción a las perturbaciones.

Capítulo 3: En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de estadística para facilitar el seguimiento del proyecto: variables aleatorias unidimensionales, n-dimensionales, distribución normal, momentos estadísticos, distribuciones continuas, distribuciones discretas.

Capítulo 4: A partir de este capítulo y hasta el Capítulo 7 se presenta los diferentes métodos que se van a usar para analizar la evolución de la incertidumbre en la órbita. En este capítulo en concreto se estudia el método Montecarlo, se explica sus fundamentos, los resultados que se obtienen y los diferentes análisis de sensibilidad realizados.

Capítulo 5: El método de Linealización es presentado en este capítulo, se explica sus fundamentos, los resultados que se obtienen y los diferentes análisis de sensibilidad realizados.

Capítulo 6: Se desarrollan las bases del método de la Unscented Transform (UT), los resultados obtenidos y los análisis de sensibilidad realizados.

Capítulo 7: Para concluir con los métodos de estudios se analiza el método basado en los Elementos Orbitales Equinocciales, sus resultados y los análisis de sensibilidad.

Capítulo 8: En este capítulo se compara los resultados obtenidos con los cuatro métodos y se presentan las ventajas e inconvenientes de la utilización de cada uno de ellos.

Capítulo 9: En esta parte del proyecto se desarrolla más el efecto de las perturbaciones comentado en el Capítulo 2. Se centra en el estudio de dos de ellas: el J_2 y la resistencia aerodinámica, las más importantes para LEO. Se estudia tanto su efecto en la propia órbita como en la evolución de la incertidumbre.

Capítulo 10: Para terminar, se presenta en este capítulo todas las conclusiones extraídas y las posibles líneas de trabajo futuras.

2 Conceptos básicos de mecánica orbital

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos y herramientas matemáticas básicas de la mecánica orbital que utilizaremos a lo largo de este proyecto y explicar los diferentes sistemas de referencia y su uso. Además, se explicará la teoría de perturbaciones así como los diferentes efectos que pueden tener en nuestro cuerpo de estudio.

2.1 Sistemas de referencia

En la mecánica orbital, entendida esta como la rama de la ciencia encargada de la aplicación de la matemática y la física para la resolución de problemas prácticos relacionados con el movimiento de los astros y/o vehículos espaciales, es vital hacer una correcta y meticulosa elección del sistema de referencia bajo el cual vamos a trabajar, pues de no ser así podría llevarnos a problemas con una dificultad añadida.

El sistema de referencia elegido dependerá en muchas ocasiones de cuál sea el cuerpo celeste al que nuestro objeto de estudio, normalmente un satélite, orbite. Encontrándonos así por ejemplo con sistemas de referencia heliocéntricos cuyo centro será el Sol (\odot) o sistemas de referencia geocéntricos con el centro en la Tierra (\oplus).

Además, existen pues otros sistemas de referencia auxiliares que serán útiles para ciertas misiones/tareas como puede ser simplificar la visualización de una órbita, lanzamientos espaciales o la toma de medidas astronómicas entre otras.

Existen muchas clasificaciones distintas para dichos sistemas de referencia pero una de las más extendidas es la de dividir los sistemas de referencia en inerciales y no inerciales. Hay que tener especial cuidado cuando hablamos de sistemas de referencia inerciales pues formalmente, dicho sistema es aquel el cual se encuentra en reposo o en movimiento con velocidad constante (carece de aceleración) y como sabemos en el contexto que nos ocupa el centro del sistema de referencia va a estar situado en un cuerpo del Sistema Solar (el Sol, la Tierra u otro planeta) con lo que no son realmente inerciales; no obstante, en la práctica se desprecian las fuerzas de inercia (aceleraciones de arrastre, fuerzas de inercia, fuerzas de Coriolis) ya que suelen ser muy pequeñas frente al resto de fuerzas que actúan en el sistema (fuerza gravitatoria).

2.1.1 Sistemas de referencia inerciales

Sistema Heliocéntrico

El sistema de referencia heliocéntrico, el cual denotaremos con el superíndice (\odot), tiene su origen en el Sol. El plano que queda definido por el origen y las direcciones X e Y es el de la eclíptica,

plano en el que la Tierra orbita al Sol. Apuntando la dirección X siempre hacia el Primer Punto de Aries (Υ), punto en el que el Sol pasa del hemisferio sur al hemisferio norte (iniciándose la primavera en el hemisferio norte) justo en la recta de intersección del plano ecuatorial, plano que contiene al ecuador terrestre, y el plano de la eclíptica.

Los principales usos que tradicionalmente se le ha dado a este sistema de referencia es el del estudio de movimientos planetarios así como el diseño de misiones interplanetarias.

Las coordenadas angulares que definen este sistema son la latitud heliocéntrica (ϕ^{\odot}) y longitud heliocéntrica (λ^{\odot}) cuya representación se puede ver en la Figura 2.1.

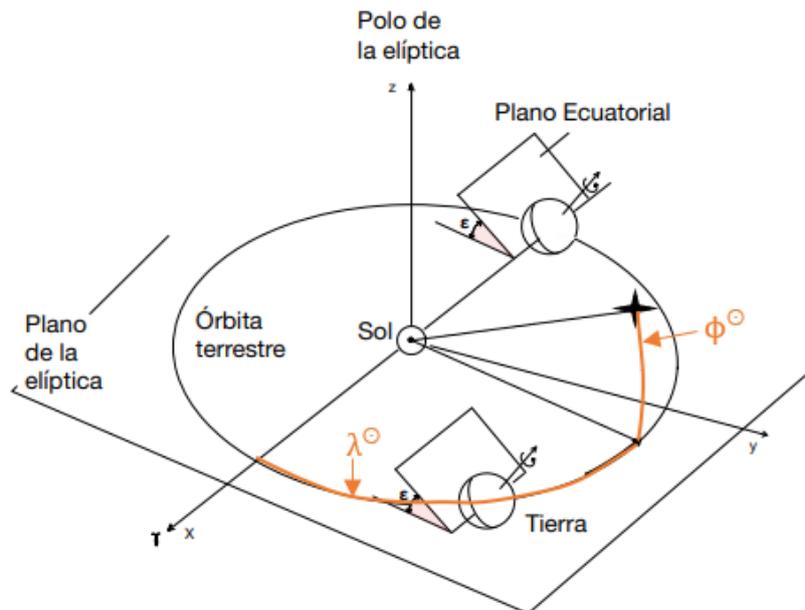


Figura 2.1 Sistema Heliocéntrico.

Sistema Geocéntrico Eclíptico

El sistema de referencia geocéntrico eclíptico se determina partiendo del sistema heliocéntrico y desplazando el origen al centro de la Tierra. El plano que queda definido por el origen y las direcciones X e Y es el de la eclíptica. Apuntando la dirección X siempre hacia Υ .

Los principales usos que tradicionalmente se le ha dado a este sistema es el del estudio de cuerpos cercanos a la Tierra así como sistema de referencia intermedio.

Las coordenadas angulares que definen este sistema son la latitud eclíptica (β) y longitud eclíptica (λ) cuya representación se puede ver en la Figura 2.2

Sistema Geocéntrico Ecuatorial

El sistema de referencia geocéntrico ecuatorial es determinado partiendo del sistema geocéntrico eclíptico y rotando el eje OZ en torno al eje OX un ángulo $\epsilon = 23.5^\circ$, ángulo de inclinación entre el plano del ecuador terrestre y el plano de la eclíptica, para que dicho eje OZ coincida con el eje de rotación terrestre. De nuevo el origen se encuentra en la Tierra, el plano que queda definido por el origen y las direcciones X e Y ahora es el del ecuador mientras que la dirección X sigue apuntando hacia Υ .

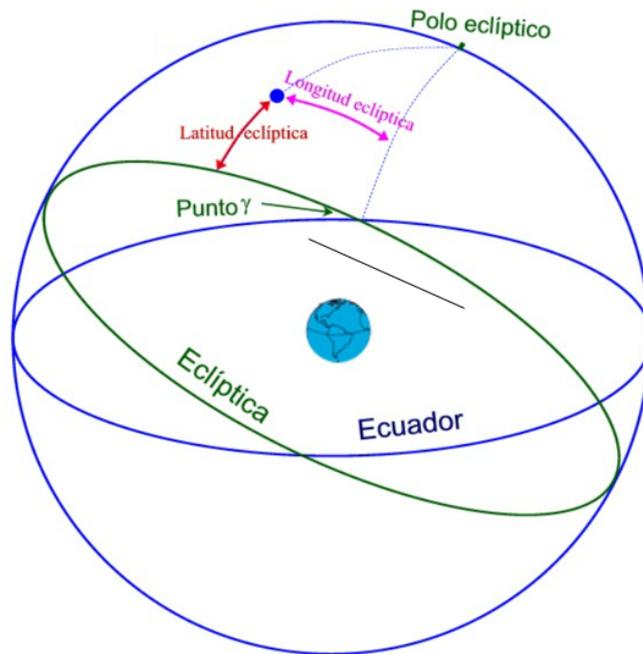


Figura 2.2 Sistema Geocéntrico Eclíptico.

Los principales usos que típicamente se le ha dado al sistema de referencia geocéntrico ecuatorial es el del estudio de cuerpos orbitando a la Tierra, por lo que será el elegido para el análisis y diseño de misiones geocéntricas, es decir, orbitando a la Tierra. Las coordenadas angulares que definen este sistema son la Ascensión Recta (AR) y declinación (δ) cuya representación se puede ver en la Figura 2.3.

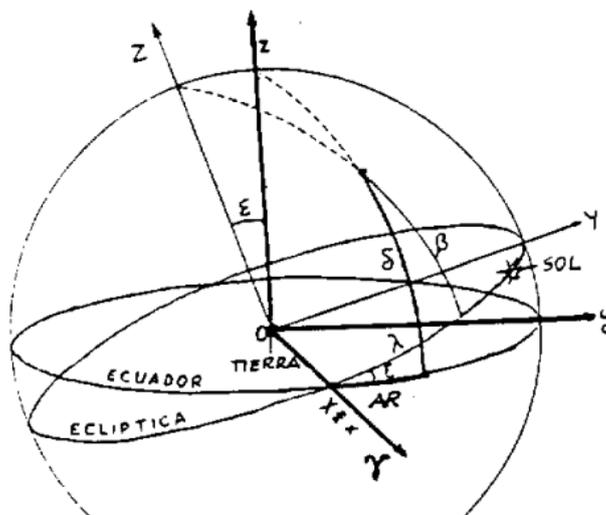


Figura 2.3 Sistema Geocéntrico Ecuatorial [11].

2.1.2 Sistemas de referencia no inerciales

Sistema Geográfico

El sistema geográfico es un sistema que se encuentra íntimamente ligado con la Tierra pues rota con ella, es por ello que ha sido muy utilizado para referenciar posiciones terrestres. El origen de este sistema vuelve a ser la Tierra, el plano que queda definido por el origen y las direcciones X e Y , al igual que el sistema geocéntrico ecuatorial, contiene al ecuador pero ahora el plano definido por el origen y las direcciones X y Z es el del meridiano de Greenwich coincidiendo nuevamente el eje OZ con el eje de rotación terrestre.

Las coordenadas geodésicas que definen este sistema es la Altitud (H), la latitud (ϕ) y la longitud (λ) cuya representación se puede ver en Figura 2.4.

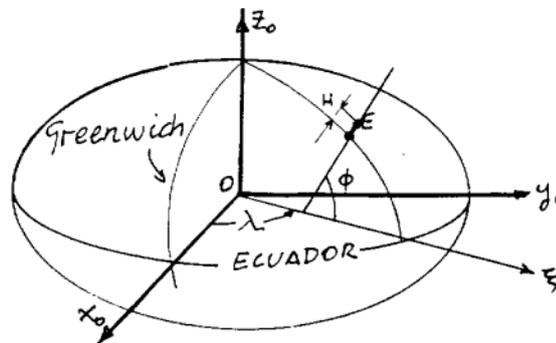


Figura 2.4 Sistema Geográfico [11].

Sistema Topocéntrico

Al igual que el sistema geográfico este también se encuentra íntimamente ligado con la Tierra pues su origen se encuentra en el observador (E). En este caso el plano que define el observador junto con las direcciones X e Y es el plano tangente a la superficie de la Tierra. la dirección X apuntará al Este mientras que la Y al Norte y la Z al cénit, el cual se define como el punto del hemisferio celeste situado sobre la vertical del observador.

Las coordenadas topocéntricas que definen este sistema son la distancia al objeto (ρ), el azimut (A) y la elevación (h) cuya representación se puede ver en la Figura 2.5.

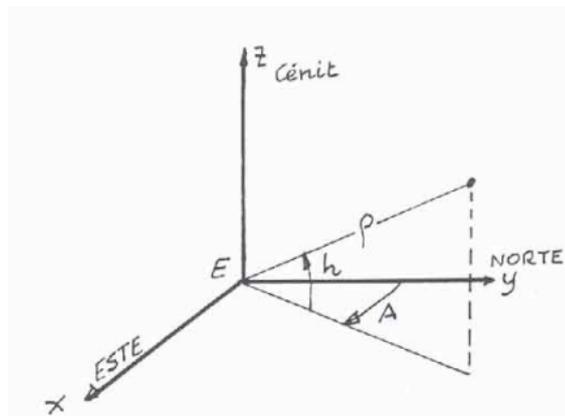


Figura 2.5 Sistema Topocéntrico [11].

2.2 El problema de los dos cuerpos y los elementos orbitales

El objetivo del problema de los dos cuerpos no es otro que el del estudio del movimiento de dos cuerpos masivos en el universo sometidos ambos a la fuerza de la gravedad. Para dicho estudio es necesario la realización de dos hipótesis simplificadoras del problema, las cuales se exponen a continuación:

- Se va a considerar que nuestro sistema está aislado del resto del universo, por ende solo existe la fuerza provocada por la atracción gravitatoria mutua de los dos cuerpos.
- Los dos cuerpos se pueden considerar como masas puntuales, las denominaremos como m_1 y m_2 respectivamente, y localizadas en el centro de masas de cada cuerpo, punto geométrico del cuerpo que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema. Posteriormente esta hipótesis fue sustituida considerando que los dos cuerpos no son puntos sino cuerpos rígidos con forma esférica y densidad constante que generarían el mismo campo gravitatorio que una partícula de la misma masa del cuerpo situada en el centro de dicha esfera.

2.2.1 Ecuación del movimiento

La fuerza en cada partícula es la atracción gravitatoria ejercida por la otra partícula que viene dada por la *Ley de Gravitación Universal*:

$$\vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2)$$

Donde G es la *Constante de Gravitación Universal* y tiene un valor de $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ y

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \quad (2.3)$$

donde \vec{R}_1 y \vec{R}_2 son los vectores posición de cada partícula.

Una vez definidas las fuerzas que actúan en cada partícula la deducción de la ecuación del movimiento resulta inmediata de la aplicación de la *Segunda Ley de Newton* como se muestra a continuación:

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = \vec{F}_1 \rightarrow \ddot{\vec{R}}_1 = \frac{Gm_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.4)$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = \vec{F}_2 \rightarrow \ddot{\vec{R}}_2 = \frac{Gm_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.5)$$

Si en las expresiones (2.4) y (2.5) introducimos la definición de \vec{r} , (2.3), queda:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_1 - \ddot{\vec{R}}_2 = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.6)$$

Donde $\mu = G(m_1 + m_2)$ es el *Parámetro Gravitacional de las Masas Combinadas* que para el caso que $m_1 \gg m_2$ quedaría $\mu \approx \mu_1 = Gm_1$, aproximando así el movimiento por el “problema de un cuerpo” alrededor de un cuerpo masivo, expresión muy útil por ejemplo para el estudio de satélites orbitando a la Tierra.

La ecuación del movimiento (2.6) está sujeta, como vimos en el Punto 2.2, a ciertas hipótesis generales muy restrictivas, por tanto si queremos mayor precisión debemos introducir en nuestra ecuación un modelo de perturbaciones.

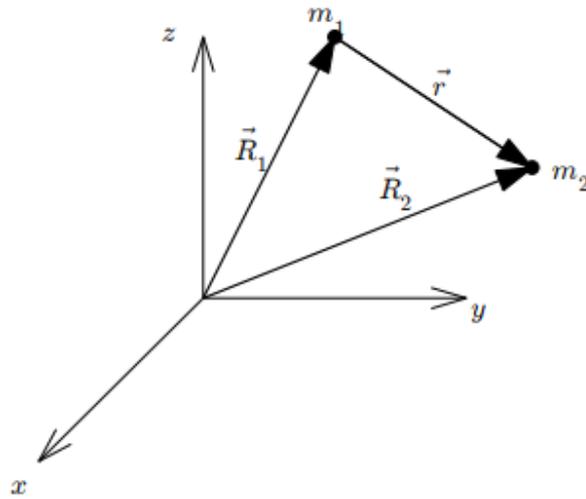


Figura 2.6 Representación del problema de los dos cuerpos [11].

2.2.2 Elementos orbitales

Los elementos orbitales son seis parámetros característicos para cada órbita que nos permiten localizar la órbita en el espacio, su tamaño y forma, la posición del periapsis¹, así como la localización de nuestro cuerpo en la órbita. Para su definición vamos a tener que presentar previamente tres parámetros constantes, bajo las hipótesis del problema de los dos cuerpos, llamados cantidades conservadas:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = rv \cos(\gamma) \quad (2.7)$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{v} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

Donde \vec{h} es el momento cinético específico, \vec{e} es el vector excentricidad, ε la energía específica y $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ el vector velocidad. Además definiremos el vector nodal como:

$$\vec{n} = \frac{\vec{k} \times \vec{h}}{\|\vec{k} \times \vec{h}\|} \quad (2.11)$$

El cual representa un vector unitario en la dirección y sentido de la recta de unión de los nodos descendente (\wp) y ascendente (Ω), los cuales se definen como los puntos de corte de la órbita con el plano ecuatorial. Uno cuando el cuerpo que orbita se encuentra descendiendo y el otro cuando está ascendiendo por la órbita.

Una vez definidos estos parámetros estamos en condiciones de presentar los seis elementos orbitales:

¹ Punto más cercano de la órbita al astro al cual orbita, el más alejado sería el apoapsis.

- **Semieje mayor (a):** Este parámetro nos da información acerca del tamaño de nuestra órbita, se puede obtener a través de la energía específica:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow a = -\frac{\mu}{v^2 - \frac{2\mu}{r}} \quad (2.12)$$

- **Excentricidad (e):** Nos da una idea de la forma de la órbita permitiéndonos distinguir entre: circular, elíptica, parabólica o hiperbólica:

1. Si $e = 0$, circular
2. Si $e \in (0,1)$, elíptica
3. Si $e = 1$, parabólica
4. Si $e > 1$, hiperbólica

Podemos obtenerlo a través de h , el módulo del momento cinético específico:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \rightarrow a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu} \rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \quad (2.13)$$

- **Inclinación (i):** Mide el ángulo entre el plano de referencia y el plano orbital, con el sentido indicado por \vec{n} . Permite distinguir entre:

1. Si $i = 0^\circ$, órbitas ecuatoriales
2. Si $i = 90^\circ$, órbitas polares
3. Si $i < 90^\circ$, órbitas directas
4. Si $i > 90^\circ$, órbitas retrógradas
5. Si $i = 180^\circ$, órbitas ecuatoriales retrógradas

Se puede calcular como:

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right) \quad (2.14)$$

Comprendido siempre entre 0° y 180° . En esta expresión h_z hace referencia a la proyección en Z del vector momento cinético.

- **Argumento de Perigeo (ω):** Orienta la línea de ápsides, línea de unión del apoapsis con el periapsis, en la dirección del vector excentricidad \vec{e} que apunta al periapsis.

$$\omega = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{e}\right) \quad (2.15)$$

Expresión válida cuando la proyección en Z del vector excentricidad sea positiva ($e_z > 0$), si es negativa entonces el perigeo está por debajo del plano de referencia y ω estaría comprendida entre 180° y 360° .

- **Ascensión recta del nodo ascendente o RAAN (Ω):** Ángulo medido en sentido contrario a las agujas del reloj entre \Uparrow y \vec{n} .

$$\Omega = \arccos(n_x) \quad (2.16)$$

Expresión válida para $n_y > 0$, si es negativo el vector \vec{n} está “a la izquierda” de \Uparrow luego Ω se encontraría comprendido entre 180° y 360° .

- **Anomalía media (M):** Este valor nos indica la posición de nuestro cuerpo en la órbita, también se podría usar la anomalía verdadera θ pero M presenta mayores facilidades matemáticas a la hora de analizar perturbaciones.

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t \quad (2.17)$$

Donde t representa al tiempo desde el último paso por el periapsis.

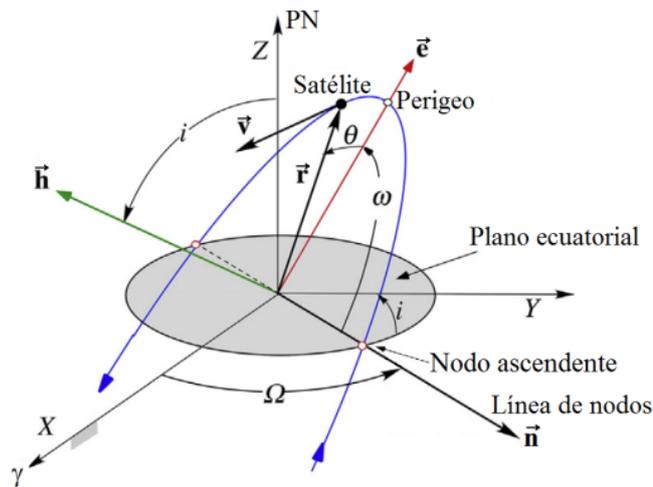


Figura 2.7 Elementos orbitales de una órbita.

2.3 Teoría de perturbaciones

Como hemos dicho en la Sección 2.2 el modelo de los dos cuerpos es poco realista si no incluimos las perturbaciones debido a las hipótesis realizadas.

Con la primera hipótesis considerábamos nuestro sistema aislado del universo obviando otras fuerzas como pueden ser la resistencia atmosférica, la presión de radiación solar o la fuerza gravitatoria ejercida por otros cuerpos que en ocasiones pueden resultar bastante importantes.

Con la segunda hipótesis se consideraban a los cuerpos de estudio con forma perfectamente esférica y por ende con una distribución de masas constante, afirmación errónea pues la distribución de masa va a depender de la latitud (ϕ) y la longitud (λ).

A continuación se presenta un estudio de las principales fuentes de perturbación en nuestras órbitas.

2.3.1 Efecto de un tercer cuerpo

Al inicio del Punto 2.3 rebatimos ya la primera hipótesis realizada ya que nuestro sistema no se encuentra realmente aislado del resto del universo pues, como es el caso, se ve afectado por ejemplo por la presencia de otros cuerpos celestes y por ende por las fuerzas que dichos cuerpos ejercen sobre nuestro sistema.

A modo explicativo se va a proceder al estudio de la fuerza de perturbación a la que se ve sometido un cuerpo poco masivo, como es el caso de un satélite, orbitando la Tierra por la presencia de la Luna (\mathbb{C}) ya que como veremos al final de este apartado esta será la perturbación más importante para un cuerpo orbitando a la Tierra provocada por un tercer cuerpo. Una representación de este problema se puede ver en la Figura 2.8

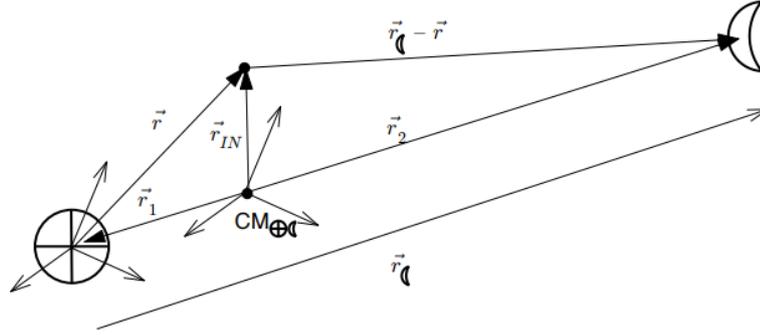


Figura 2.8 Objeto orbitando a la Tierra con el efecto de la Luna [11].

En este problema la ecuación de movimiento, que quedó definida por la ecuación (2.6), la reescribiremos en el sistema de referencia inercial centrado en el centro de masas del sistema Tierra-Luna, ($CM_{\oplus\zeta}$):

$$\ddot{r}_{IN} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} \quad (2.18)$$

Donde

$$\vec{r}_{\zeta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.19)$$

y se verifica por estar centrado nuestro sistema en el ($CM_{\oplus\zeta}$) la siguiente expresión:

$$m_{\oplus} \vec{r}_1 + m_{\zeta} \vec{r}_2 = \vec{0} \quad (2.20)$$

Además sabemos que la ecuación de movimiento de la Luna queda:

$$\ddot{r}_{\zeta} = -\frac{G(m_{\oplus} + m_{\zeta}) r_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} \quad (2.21)$$

Por tanto combinando adecuadamente las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) llegamos a:

$$\ddot{r}_1 = \frac{\mu_{\zeta} r_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} \quad (2.22)$$

Finalmente como podemos deducir de la Figura 2.8, $r_{IN} = \vec{r} + \vec{r}_1$ luego la expresión para la ecuación de movimiento teniendo en cuenta la presencia de la Luna es:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{\zeta} r_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} = \vec{\gamma}_k + \vec{\gamma}_p \quad (2.23)$$

En donde se ha definido por comodidad

$$\vec{\gamma}_k = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.24)$$

$$\vec{\gamma}_p = \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{\zeta} r_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} \quad (2.25)$$

la fuerza kepleriana clásica ($\vec{\gamma}_k$) y la fuerza de perturbación debida al tercer cuerpo ($\vec{\gamma}_p$), en nuestro caso la Luna.

Linealizando ahora la fuerza de perturbación podemos llegar a una expresión más sencilla del siguiente tipo:

$$\vec{\gamma}_p \approx \frac{\mu_C}{r_C} \left[3r_C \frac{r_C \cdot \vec{r}}{r_C} - \vec{r} \right] \quad (2.26)$$

Donde se puede deducir fácilmente que el orden de magnitud para estas perturbaciones es de

$$\vec{\gamma}_p \approx \mu_C \frac{r}{r_C^3} \quad (2.27)$$

Ahora para que resulte más fácil vislumbrar el efecto de estas perturbaciones podemos realizar el cociente entre $\vec{\gamma}_p$ y $\vec{\gamma}_k$ quedando finalmente:

$$\left| \frac{\gamma_p}{\gamma_k} \right| \approx \frac{\mu_C}{\mu_\oplus} \left(\frac{r}{r_C} \right)^3 \quad (2.28)$$

para el caso de la Luna, mientras que para el caso general del efecto causado por la presencia de cualquier cuerpo del Sistema Solar al que denotaremos por el subíndice C quedaría:

$$\left| \frac{\gamma_p}{\gamma_k} \right| \approx \frac{\mu_C}{\mu_\oplus} \left(\frac{r}{r_C} \right)^3 \quad (2.29)$$

Como ya avanzamos las perturbaciones más importantes que va a ver un cuerpo orbitando a la Tierra por la presencia de un tercer cuerpo son las causadas por la presencia de la Luna, pues su valor es el de 10^{-5} para GEO y 10^{-7} para LEO, mientras que las causadas por el Sol serán del orden de $5 \cdot 10^{-6}$ para GEO y $5 \cdot 10^{-8}$ para LEO. Las perturbaciones producidas por los demás cuerpos del Sistema Solar quedan despreciadas frente a estas, las cuales comúnmente son llamadas perturbaciones lunisulares.

2.3.2 Forma no esférica de la Tierra:

Al principio de la Sección 2.3 se discutió como la segunda hipótesis no puede ser válida pues la distribución de masas para un cuerpo cualquiera dependerá de la latitud (ϕ) y la longitud (λ) es este hecho el que introduce una nueva perturbación que definimos como:

$$\vec{\gamma} = \nabla U \quad (2.30)$$

Donde U es el potencial gravitatorio el cual definiremos en coordenadas esféricas $U = U(r, \phi, \lambda)$ y vendrá dado para un cuerpo con forma arbitraria por la solución de la *Ecuación de Laplace*:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) \quad (2.31)$$

Cuya solución general para el caso que nos ocupa, la cual viene desarrollada en [12], resulta:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n J_{nm} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n p_{nm}(\sin \phi) \cos(m(\lambda - \lambda_{nm})) \right] \quad (2.32)$$

Expresión en la cual el primer término representa el potencial de una esfera, mientras que el resto (la serie) representa la desviación del modelo esférico, o cuan diferente es el potencial respecto a un cuerpo esférico. Los coeficiente J_{nm} y λ_{nm} son los asociados al armónico nm mientras que p_{nm} representa el polinomio de Legendre de grado n y orden m , definido como:

$$p_{nm}(x) = (1 - x^2)^{n/2} \frac{d^m p_n(x)}{dx^m} \tag{2.33}$$

El argumento trigonométrico de los polinomios de Legendre en la ecuación (2.32) constituye armónicos esféricos superficiales permitiendo diferenciar dichos armónicos en zonales, sectoriales y teserales.

- **Armónicos zonales:** Estos armónicos están definidos para cuando $m = 0$ lo cual lleva al hecho de que el potencial no sufra variaciones respecto a λ y por tanto los armónicos coinciden con los del modelo con simetría de revolución.

Entre dichos armónicos el J_2 sin duda es la perturbación más importante debida a la forma no esférica de la Tierra pues el J_{22} y el J_3 , las siguientes perturbaciones más importantes, son del orden de 1000 veces más débiles.

- **Armónicos sectoriales:** Para cuando n y m coinciden provocando que no se produzcan variaciones en el potencial respecto a ϕ , dividiendo la esfera en sectores.
- **Armónicos teserales:** Se producen cuando el grado y el orden, n y m , son distintos entre sí y a su vez distintos de 0, en este caso el potencial varía tanto con ϕ como con λ dividiendo por ende la esfera en cuadrados esféricos.

Para una mejor comprensión de dichos armónicos se representan en la Figura 2.9.

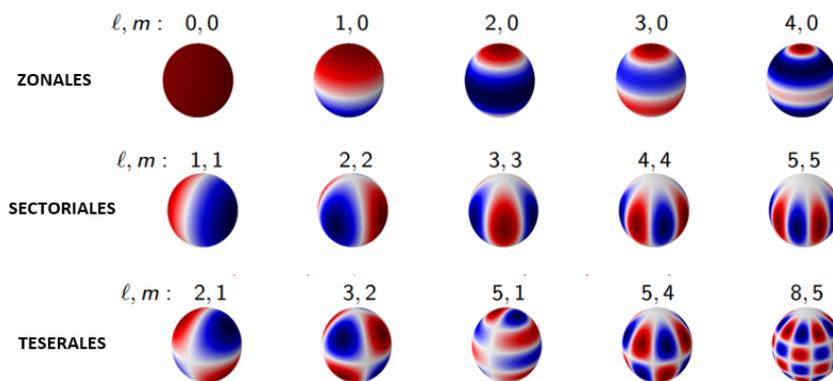


Figura 2.9 Representación de los distintos tipos de armónicos [8].

En esta visualización, donde l representa nuestra n , las áreas rojas representan $U > 0$, áreas azules representan $U < 0$ y las áreas blancas representan $U \approx 0$. Las líneas nodales del armónico están entre las áreas rojas y azules y correspondan a $U = 0$ [8].

2.3.3 Resistencia atmosférica:

Dicha perturbación resulta la más importante en órbitas bajas y órbitas muy excéntricas con perigeo bajo. El efecto de esta en la órbita es la de su circularización, haciendo disminuir el radio de apogeo hasta que coincide con el de perigeo y una vez la órbita es circular el efecto será el de una caída en espiral hasta la reentrada del vehículo, efecto que se puede apreciar en la Figura 2.10

La resistencia tiene la dirección de la velocidad relativa, \vec{v}_{rel} , entendida esta como la diferencia entre la velocidad del cuerpo y la velocidad de la atmósfera, pero sentido opuesto:

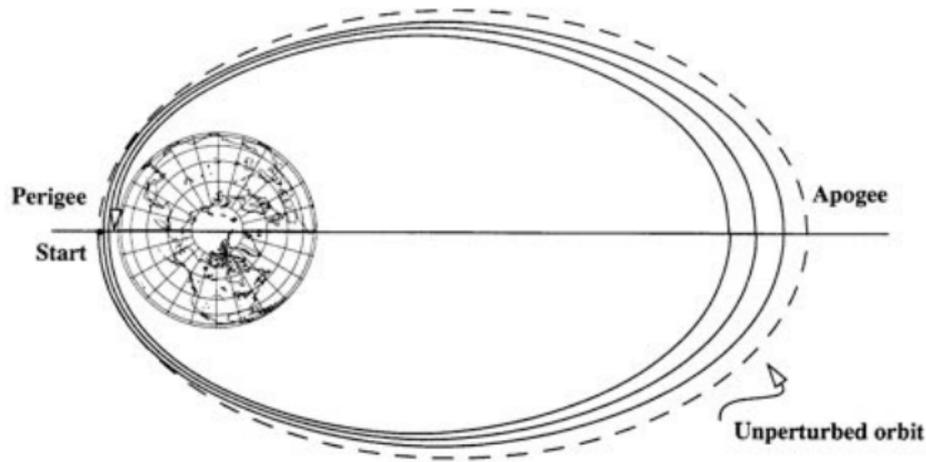


Figura 2.10 Efecto de la resistencia aerodinámica [11].

$$\vec{\gamma}_p = -\frac{SC_D}{2m_V} \rho v_{rel} \vec{v}_{rel} \quad (2.34)$$

En donde encontramos que m_V es la masa del vehículo, S la superficie frontal, C_D el coeficiente de resistencia aerodinámico y ρ la densidad del medio, precisamente por dicha densidad esta perturbación resulta de lo más complicada para modelar puesto que depende de múltiples factores: la naturaleza de la estructura molecular de la atmósfera, el flujo solar incidente o las interacciones geomagnéticas.

Ahora bien existen diversos modelos que intentan caracterizar el comportamiento de la densidad como son los *modelos estáticos* y los *modelos variables con el tiempo*. Los *modelos estáticos* son los más simples pero también los menos precisos pues se basan en asumir todos los parámetros atmosféricos constantes mientras que los *modelos variables con el tiempo* son más fieles a la realidad pero también mucho más complejos pues tienen en cuenta efectos como las fluctuaciones diurnas, el ciclo de rotación solar de 27 días, rotación de la atmósfera entre otros [12].

2.3.4 Presión de radiación solar:

Como la resistencia, la presión de radiación solar es una perturbación no conservativa que se convierte más importante para grande altitudes. Uno de los aspectos más difíciles a la hora de analizar la radiación solar es el de modelar y predecir los ciclos y variaciones solares. Durante periodos de tormentas solares, episodios de mayor emisión de radiación solar, este efecto puede ser mucho mayor que cualquier otra perturbación, dependiendo claro está de la altitud en la que nos encontremos. Sin embargo, para periodos de baja actividad solar este efecto puede ser incluso despreciable frente a los demás [12].

Dicha perturbación como hemos avanzado está producida por la incidencia de la luz solar (fotones) en una superficie produciendo en ella un efecto mecánico, la presión de radiación solar la cual produce una perturbación que puede ser modelada como:

$$\vec{\gamma}_p \approx -\frac{pA(1+\varepsilon)}{m_V} \vec{e}_{\odot} \quad (2.35)$$

Donde A es el área, ε el coeficiente de reflectividad que dependerá si el cuerpo es reflectante, absorbente o transparente, m_V la masa del vehículo, \vec{e}_{\odot} apunta en la dirección del Sol desde el vehículo y p es la presión que viene dada por $p = \frac{I}{c}$ siendo c la velocidad de la luz e I el flujo medio de radiación solar que se puede calcular como:

$$I = I_{\oplus} \left(\frac{L_{\oplus}}{L} \right)^2 \quad (2.36)$$

Expresión en la cual L_{\oplus} es la distancia Sol-Tierra, L la distancia del Sol a nuestro cuerpo e I_{\oplus} el flujo medio de radiación solar a 1 AU (149597870 km) del Sol ($I_{\oplus} = 1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$).

Para el estudio de esta perturbación también se tienen que tener en cuenta periodos de eclipses, pues ahí la fuerza desaparece, la sombra de la Tierra o el albedo de la Tierra, reflexión de la luz del Sol en la Tierra.

Tanto en la Figura 2.12 como en la Figura 2.13 se muestra el efecto de todas estas perturbaciones para órbitas bajas y elevadas.

2.4 Clasificación y metodología para los efectos de perturbación

Los efectos que producen todas estas perturbaciones en los elementos orbitales explicados en el Punto 2.2.2 permiten clasificar dichos efectos en:

- **Seculares:** Los cuales tienen un comportamiento monótono en las variaciones que provocan en los elementos orbitales. Su efecto por ende es acumulativo, y por ello son las más importantes cuando se hace un estudio de perturbaciones.
- **Periódicos:** Son aquellos cuya variación se repite cada cierto periodo ya sea de largo periodo, mayor que el periodo orbital² o de corto periodo, del orden del periodo orbital.

En la Figura 2.11 se presenta la clasificación de los efectos que producen cada perturbación estudiada para cada elemento orbital.

Para terminar con el tema de las perturbaciones, es necesario comentar los métodos más importantes hoy en día que se tienen para afrontar el estudio de los efectos de las perturbaciones:

- **Método de perturbaciones generales:** Emplea de base los elementos orbitales y estudia como varían con el tiempo.
- **Método de perturbaciones especiales:** No emplea elementos orbitales sino directamente las ecuaciones del movimiento, (2.6). Este a su vez se puede dividir en dos tipos de tratamiento del problema:
 - *Método de Encke:* Resolver directamente las ecuaciones del movimiento incluyendo perturbaciones y tantos cuerpos como sea necesario.
 - *Método de Cowell:* Resuelve las ecuaciones de una corrección $\delta\vec{r}$ sobre una solución de referencia de los dos cuerpos $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$. Si la corrección crece es necesario recalculer la solución de referencia.

² Tiempo que tarda el cuerpo en completar una revolución en su órbita.

	Gravedad		3 ^{er} cuerpo	Atmosf		Pres Rad	
	Zonal	Sect/Tes					
a	P	P	P	P	S	P	
e	P	P	P	P	S	P	
i	P	P	P	P	S	P	
Ω	P	S	P	P	S	P	S
ω	P	S	P	P	S	P	S
M_0	P	S	P	P	S	P	S

P: Periódicos
S: Seculares

Figura 2.11 Clasificación de los efectos de las perturbaciones [11].

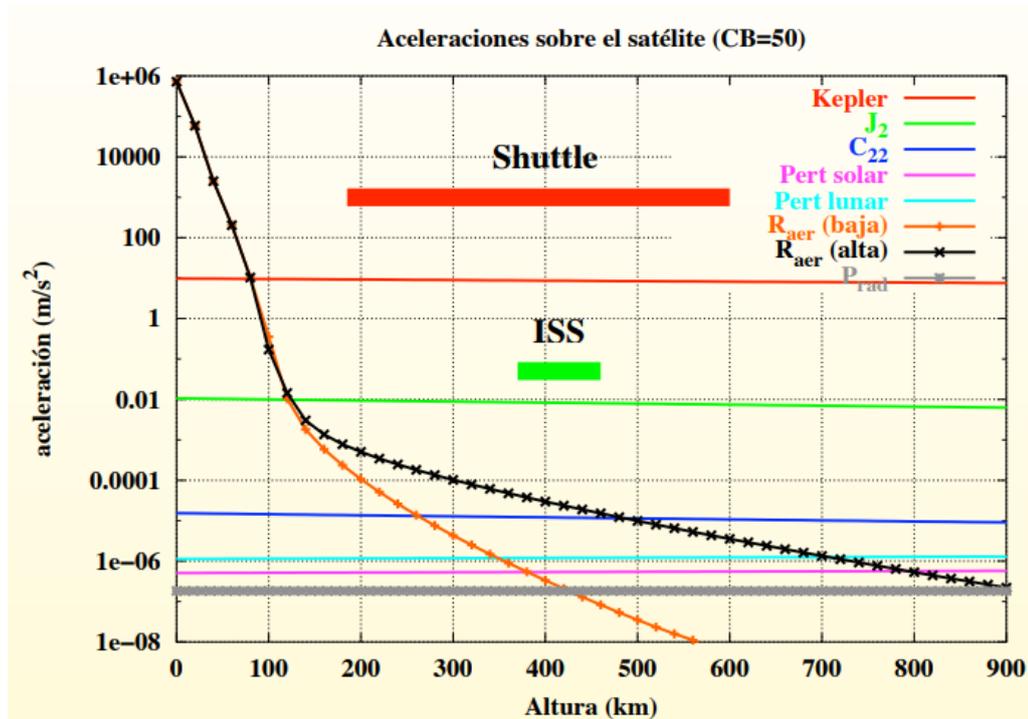


Figura 2.12 Efecto de perturbaciones en órbita baja [11].

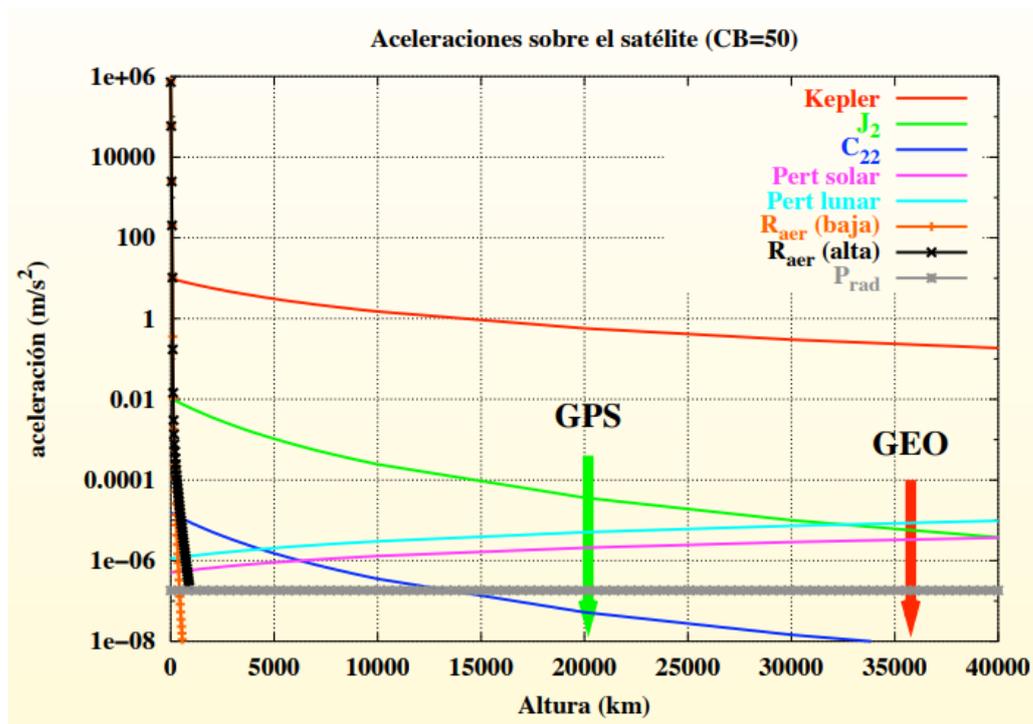


Figura 2.13 Efecto de perturbaciones en órbita elevada [11].

3 Conceptos básicos de estadística

La estadística es una rama de las matemáticas que se enfoca en la recolección, análisis e interpretación de datos. Su objetivo es describir y resumir los datos, así como inferir y hacer predicciones sobre la población ¹ a partir de una muestra de datos. También se utiliza para evaluar la fiabilidad de las conclusiones que se obtienen a partir de los datos y para tomar decisiones basadas en ellos utilizando técnicas y métodos matemáticos para modelar dichos datos y extraer información útil de ellos.

En resumen, la estadística es una herramienta fundamental en la investigación científica, el análisis de datos, la toma de decisiones y la resolución de problemas en una amplia variedad de campos. En este capítulo se van a presentar dichas técnicas y métodos matemáticos cuya comprensión es clave para el seguimiento de un proyecto como este.

3.1 Variable aleatoria unidimensional

Una variable aleatoria unidimensional es una variable numérica que puede tomar valores numéricos aleatorios en un conjunto dado con una probabilidad asociada a cada valor posible. En otras palabras, una variable aleatoria unidimensional es una función que asigna un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio, entendido este como un evento o proceso que puede producir diferentes resultados cuando se realiza en condiciones similares.

3.1.1 Distribuciones discretas y continuas

La variable aleatoria unidimensional puede seguir una distribución discreta o continua siendo la principal diferencia el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria.

Una variable aleatoria discreta toma valores que son separados e individuales, como números enteros o contables. Es decir, los valores que puede tomar la variable se pueden enumerar mientras que una variable aleatoria continua toma valores que están en un intervalo continuo.

Distribución discreta

Las distribuciones discretas, las que siguen las variables discretas aleatorias, quedan definidas por una función de probabilidad o función de cuantía la cual describe la probabilidad de que una variable aleatoria discreta tome cada uno de sus posibles valores.

$$p(x) = P(X = x) \quad (3.1)$$

En donde $p(x)$ es la función de probabilidad, X la variable aleatoria discreta y x los posibles valores que puede tomar X .

¹ Conjunto de elementos o eventos similares que son de interés para alguna pregunta o experimento.

Normalmente las distribuciones discretas se representan gráficamente mediante un histograma o un gráfico de barras, donde el eje horizontal representa los valores de X y el eje vertical representa las probabilidades de cada valor.

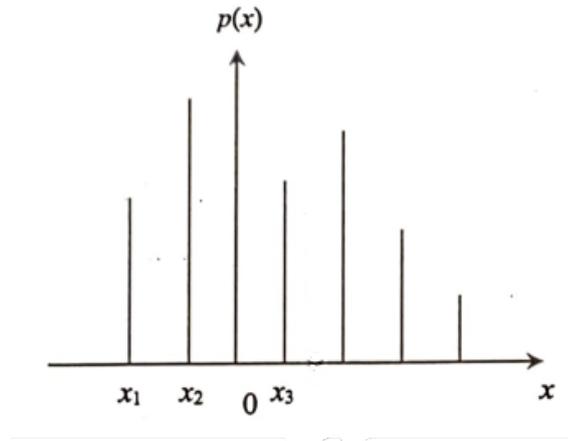


Figura 3.1 Representación de la función de probabilidad [9].

Distribución continua

Para una variable aleatoria continua X , la distribución continua se puede representar mediante una función de densidad de probabilidad (*PDF*, por sus siglas en inglés), que es una función matemática que describe la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en un intervalo específico.

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx \quad (3.2)$$

Donde $f(x)$ representa la función de densidad y $P(X \in A)$ la probabilidad que X pertenezca al intervalo A .

La distribución continua se puede representar gráficamente mediante una curva de distribución, que es una curva suave que muestra la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua como se puede observar en la Figura 3.2. La curva de distribución es útil para visualizar la forma de la distribución, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria continua, conceptos que explicaremos en los Puntos 3.1.2 y 3.1.3.

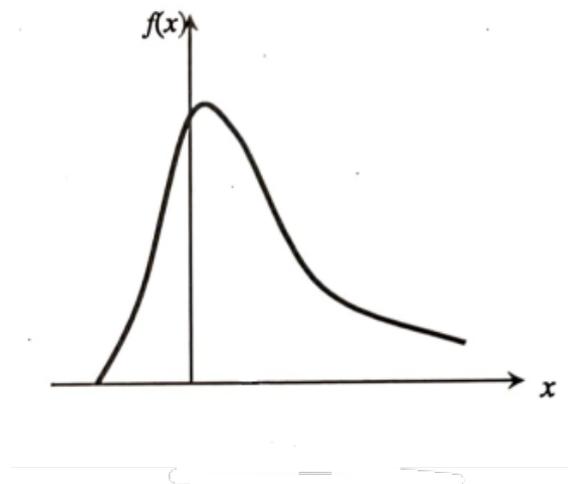


Figura 3.2 Representación de la función de densidad de probabilidad (PDF) [9].

3.1.2 Esperanza matemática y media

La definición matemática para la esperanza es que, sea X la variable aleatoria y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variable real, la esperanza de $g(X)$ se denota por $E[g(X)]$:

$$E[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} g(x_i) p(x_i) \quad , \text{ si } X \text{ es una variable aleatoria discreta} \quad (3.3)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad , \text{ si } X \text{ es una variable aleatoria continua} \quad (3.4)$$

Donde para el caso particular en el cual $g(X) = X$ se define $E[X]$ como la media que representa el valor medio esperado de una variable aleatoria y se denota por la letra μ .

3.1.3 Momentos de una variable aleatoria

Sea X una variable real y sean $c \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, se define el momento respecto de c de orden k de la variable aleatoria X como:

$$E[(X - c)^k] = \begin{cases} \sum_i (x_i - c)^k P(X = x_i) & \text{Variable aleatoria discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^k f(x) dx & \text{Variable aleatoria continua} \end{cases} \quad (3.5)$$

Si $c = 0$, se denomina momento respecto al origen de orden k y se representa por α_k a las siguientes expresiones:

$$\alpha_k = E[X^k] = \begin{cases} \sum_i x_i^k P(X = x_i) & \text{Variable aleatoria discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx & \text{Variable aleatoria continua} \end{cases} \quad (3.6)$$

Si $c = \mu = E[X]$, se denomina momento central de orden k y se representa por μ_k a las siguientes expresiones:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^k P(X = x_i) & \text{Variable aleatoria discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx & \text{Variable aleatoria continua} \end{cases} \quad (3.7)$$

Una vez presentados los conceptos de momentos de una variable aleatoria se puede definir la varianza y desviación típica de una variable aleatoria X .

La varianza es una medida estadística que indica cuánto se desvían los valores de una variable de su valor medio, se calcula como el momento central de orden dos de la variable aleatoria X o μ_2 y se utiliza para evaluar la dispersión de los datos. Además, su orden de magnitud indica la cantidad de variabilidad que existe en la muestra o población, así una varianza alta indica que los datos están más dispersos y que hay una mayor variabilidad en la muestra o población, mientras que una varianza baja indica que los datos están más concentrados alrededor de su media y que hay una menor variabilidad en la muestra o población.

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] \quad (3.8)$$

La desviación típica o estándar es la raíz cuadrada de la varianza y es útil porque permite comprender la cantidad de dispersión de los datos de manera más intuitiva. Al igual que la varianza, una desviación típica alta indica que los datos están más dispersos y que hay una mayor variabilidad en la muestra o población, mientras que una desviación típica baja indica que los datos están más concentrados alrededor de su media y que hay una menor variabilidad en la muestra o población. En resumen, la desviación típica es una medida importante para analizar la distribución de los datos y para comparar diferentes conjuntos de datos.

3.2 Variable aleatoria n-dimensional

Para el caso n-dimensional ahora nos encontramos con un vector $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ cuyas componentes son variables aleatorias. Se dice que una variable aleatoria n-dimensional es discreta o continua cuando todas las variables unidimensionales son discretas o continuas.

En el contexto del proyecto que nos ocupa no tiene demasiado sentido estudiar variables aleatorias discretas, pues en el estudio de incertidumbre en posición o velocidad está claro que dichas variables representan variables aleatorias continuas. Por ello de aquí en adelante nos centraremos en dicho caso.

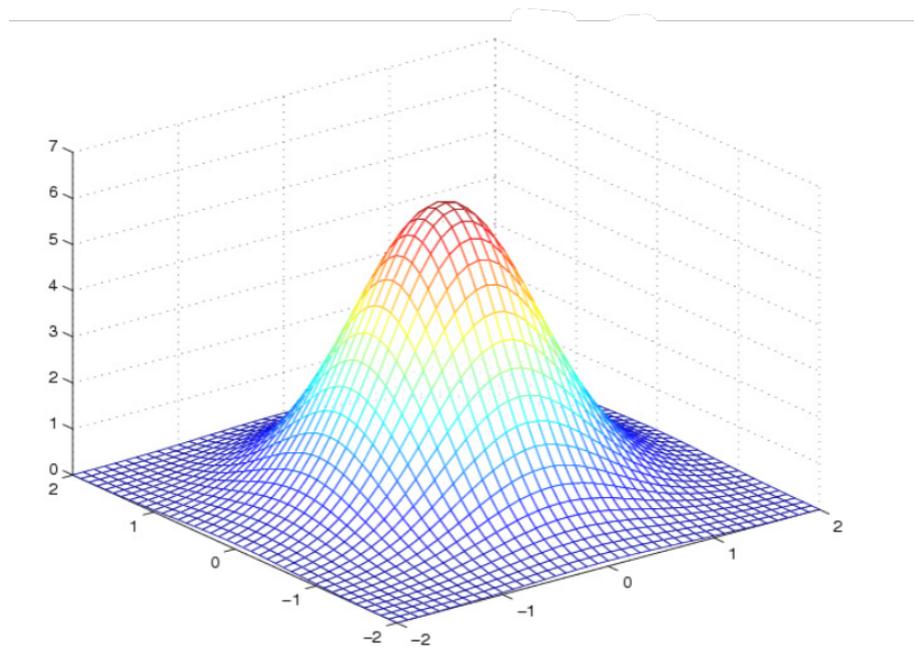


Figura 3.3 Representación de la *PDF* para el caso bidimensional [7].

Para la definición de la esperanza, media o varianza, al igual que hicimos para el caso unidimensional en el Punto 3.1, para el caso n-dimensional se realiza de manera análoga.

Así, para la función de variable real $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la esperanza matemática de $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es:

$$E[g(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n \quad (3.9)$$

La esperanza de una variable cualquiera de tales n variables aleatorias es:

$$\mu_1 = E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 \quad (3.10)$$

Y la varianza de dicha variable es:

$$Var(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)^2 f(x_1) dx_1 \quad (3.11)$$

Además para el caso n-dimensional es preciso introducir un nuevo concepto, la matriz de covarianza la cual nos sirve como herramienta para analizar la relación entre dos o más variables aleatorias,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \text{ siendo } \sigma_{ii} = Var(X_i); \sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) \text{ si } i \neq j \quad (3.12)$$

Donde $Cov(X_i, X_j)$ se denomina covarianza entre las variables aleatorias X_i y X_j y cuya expresión es:

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = E[XY] - \mu_{X_i}E[X_j] - \mu_{X_j}E[X_i] + \mu_{X_i}\mu_{X_j} = E[XY] - \mu_{X_i}\mu_{X_j} \quad (3.13)$$

3.3 Distribución Normal

La distribución normal, también conocida como distribución gaussiana, es una distribución de probabilidad continua que se utiliza para describir muchos fenómenos naturales y sociales. Esta distribución en el caso unidimensional tiene una forma de campana simétrica y se caracteriza por dos parámetros $X = N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es la media y σ la desviación estándar. La media es el punto en el que la campana está centrada y la desviación estándar determina la anchura de la campana como explicamos en el Punto 3.1.3.

La PDF de la distribución normal y su función de distribución se puede escribir matemáticamente como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.14)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (3.15)$$

La distribución normal es importante en estadística debido a su relación con la teoría del límite central, el cual establece que bajo ciertas condiciones (como pueden ser independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita), la suma de un gran número de variables aleatorias se distribuye aproximadamente como una normal. Esta propiedad hace que la distribución normal sea una de las más utilizadas en la inferencia estadística y en la modelización de datos en muchos campos de la ciencia y la ingeniería.

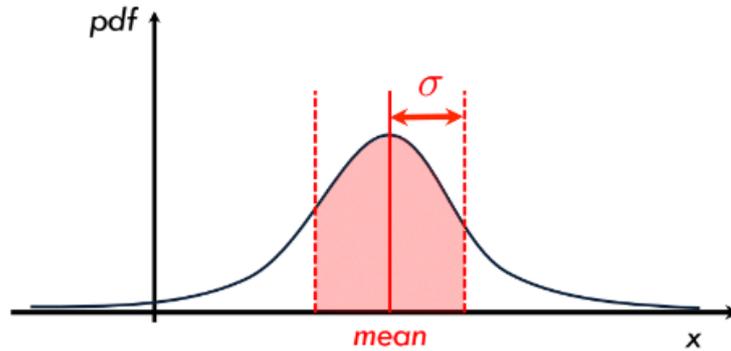


Figura 3.4 Representación de distribución normal en 1D [7].

En una distribución normal, el valor de la variable aleatoria no está definido por un número concreto sino por un intervalo. Este es denominado intervalo de confianza, en él se encuentra un valor aleatorio de X con una cierta probabilidad. De aquí en adelante en el proyecto se considerará un intervalo de confianza del 95 %.

Sin embargo, en el marco del proyecto en el que nos encontramos nuestras variables no son unidimensionales y por ende su PDF será de la forma:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu))}{\sqrt{(2\pi)^k \Sigma}} \quad (3.16)$$

Así, al pasar al caso 2D ya no tendremos la forma de campana sino la de una elipse, en 3D será en forma de elipsoide y en el caso genérico n -dimensional tendremos un hiperelipsoide de n dimensiones. En nuestro caso trabajaremos con 6 dimensiones, pues la posición y velocidad se descomponen en sus tres componentes respectivamente.

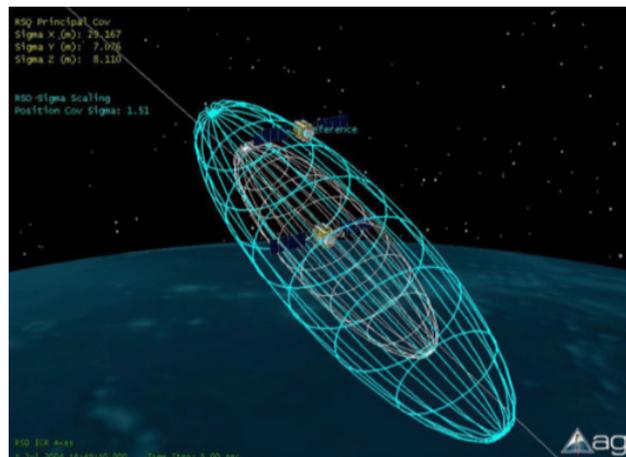


Figura 3.5 Representación del elipsoide de confianza [7].

Estos elipsoides se definen a partir de las curvas denominadas $iso - pdf$, que no son más que las que hacen que la PDF de la distribución sea una constante. Fijámonos en la expresión (3.16) esto ocurre cuando la exponencial es una constante:

$$-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) = const \quad (3.17)$$

Constante que la marcará el nivel de confianza que nosotros queramos que abarque nuestro elipsoide.

4 Método Montecarlo

4.1 Definición

El método Montecarlo (MC) es una técnica numérica utilizada para resolver problemas matemáticos complejos mediante el uso de simulaciones estadísticas y aleatorias. Este método se basa en la generación de números aleatorios para simular un gran número de casos posibles de un problema, lo que permite estimar probabilidades y distribuciones de resultados.

Este método es particularmente útil cuando no es posible obtener una solución analítica exacta a un problema, o cuando se requiere tomar en cuenta múltiples variables y posibles resultados. Este método puede proporcionar una aproximación de la solución con una precisión y confiabilidad deseada, pero requiere una gran cantidad de cálculos y simulaciones para producir resultados precisos.

El método Montecarlo se utiliza en una amplia variedad de campos como la física, la ingeniería, la economía, la finanzas, las ciencias sociales y la informática, entre otros. Una definición más exhaustiva del método la podemos encontrar en [6].

4.2 Desarrollo del método

Para el caso que nos ocupa, dentro del marco de la mecánica orbital, este método se va a utilizar para observar el efecto de la incertidumbre en posición y velocidad en órbitas geocéntricas y ver su evolución en el tiempo. Para ello se genera una primera nube de puntos, del orden de los 1000, que seguirá una distribución normal alrededor del punto de referencia, el cual será la posición y velocidad inicial en nuestra órbita, r_0 y v_0 .

Así, la media inicial de dicha distribución normal será las condiciones iniciales de posición y velocidad. Por otro lado, la matriz de covarianza inicial será diagonal con una desviación típica inicial en posición de 50 m en cada eje y la correspondiente en velocidad¹. Calculada esta tomando derivada en la fórmula de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (4.1)$$

Una vez tenemos esta primera nube de puntos, con el método Montecarlo vamos a propagar cada uno de estos puntos. Esto no es más que resolver las ecuaciones del problema de los dos cuerpos definidas en (2.6) para cada punto.

Así, una vez que tenemos la nube de puntos propagada para un tiempo determinado podemos calcular fácilmente su nueva media y su matriz de covarianza y con ello a través de la expresión

¹ Para todos los métodos siguientes se usará esta misma matriz de covarianza inicial.

(3.17) el nuevo elipsoide de confianza viendo con esto como evoluciona la incertidumbre en nuestra órbita.

En el Punto 4.3 se va a presentar los resultados obtenidos con este método para una órbita concreta, así como la realización de un test de normalidad para ver cuando deja dicha distribución de comportarse como una distribución normal. Además, se procederá a realizar un análisis de sensibilidad cambiando los elementos orbitales iniciales, que no es más que cambiar las condiciones iniciales con las que se realiza el método.

4.2.1 Garantías con método Montecarlo y tamaño muestral

Al principio, en el Punto 4.2, decidimos que el número de puntos para el uso de este método sería de 1000. Sin embargo, no se justificó esta elección. A continuación, se va a presentar un algoritmo para poder tener ciertas garantías con el método Montecarlo, así como poder elegir adecuadamente un tamaño muestral. El algoritmo se ha extraído íntegramente de [14].

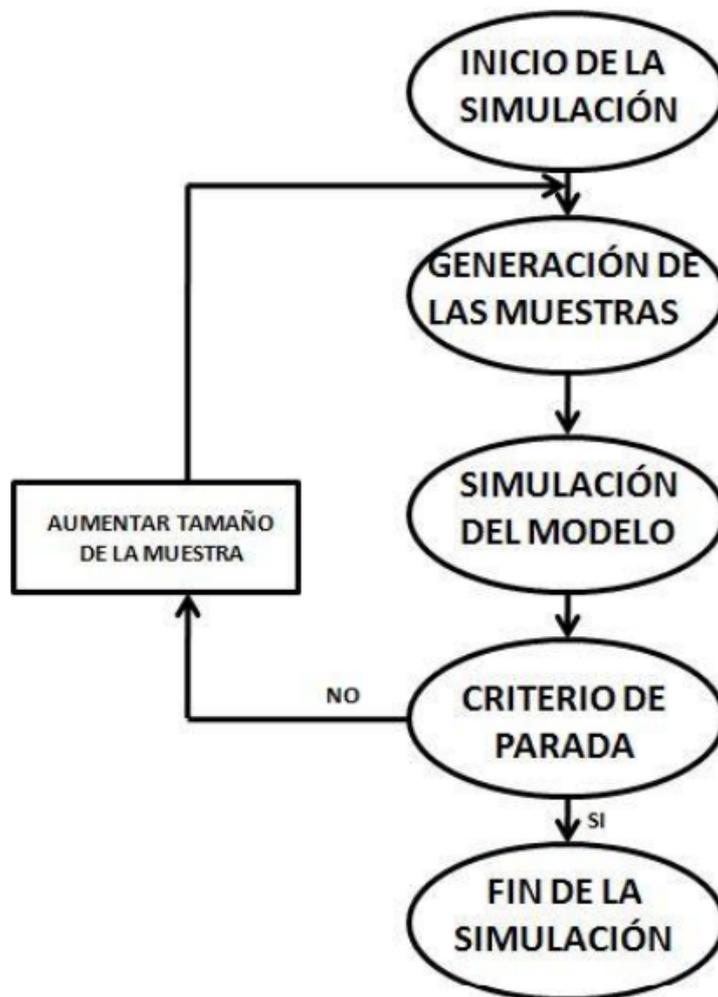


Figura 4.1 Diagrama del algoritmo.

Como vemos en la Figura 4.1 el algoritmo se divide en tres grandes bloques, la generación de las muestras, el modelo de estudio y el criterio de parada. A continuación, se explica más en detalle cada uno de ellos.

Generación de muestras

Una de las características esenciales del método de Montecarlo es el uso de números aleatorios, por lo tanto, la forma en la que estos se generan constituye un punto importante a la hora de usar el método.

Para nuestro caso, como vimos en el Punto 4.2, la nube de puntos inicial seguirá una distribución normal. De tal forma que la generación de la muestra se ha realizado a través del comando *mvnrnd* de MATLAB®, el cual con la matriz de covarianza y la media de la distribución normal es capaz de generar una nube de puntos aleatorios del tamaño elegido.

Modelo del sistema

El modelado del sistema es un aspecto clave del proceso, ya que la precisión de los resultados obtenidos en las simulaciones dependerá de la precisión del método y de la exactitud con la que el modelo representa el sistema físico que se pretende estudiar. Por lo tanto, es necesario un modelo que emule de la manera más exacta posible el comportamiento del sistema real.

Para el estudio de la evolución de la incertidumbre en las órbitas usando el método Montecarlo está claro el modelo a emplear. Este modelo es el que se adelantó en el Punto 4.2 y no son más que las ecuaciones del problema de los dos cuerpos definidas en la expresión (2.6). De tal forma que el objetivo del método es resolver para cada uno de los puntos de la nube las ecuaciones y observar así su evolución.

Criterio de parada

En [14] se discute el criterio de parada que se usará para determinar el fin de las simulaciones realizadas con Montecarlo y por ende el tamaño muestral. Para ello se presentan dos posibles criterios.

El primero de ellos consiste en comparar los valores obtenidos en la iteración con los obtenidos en varias iteraciones anteriores. Esta comparación consiste en restar los valores obtenidos en las diferentes iteraciones, calculando así los errores absolutos y comprobando que en varias iteraciones sucesivas estos errores estén por debajo de la tolerancia fijada. El motivo por el cual es necesario comparar con varios valores anteriores es que al comparar con un único valor anterior puede suceder que el error sea pequeño por “casualidad” sin haber llegado a la convergencia del método.

El segundo procedimiento consiste en realizar varias simulaciones para un tamaño de la muestra elevado. Representando posteriormente el error cometido con respecto al tamaño de la muestra para cada una de las simulaciones, se obtiene una envolvente de errores que nos permite determinar el tamaño de la muestra que nos garantiza la precisión fijada.

En nuestro caso resultaría más interesante usar el segundo de los procedimientos debido a las limitaciones en la memoria del ordenador, que podría verse colapsada en el caso de utilizar el primero de los procedimientos.

Aumento del tamaño muestral

En las sucesivas iteraciones del método será necesario aumentar el tamaño de la muestra en caso de buscar unos resultados más precisos. A la hora de cuantificar el aumento del tamaño de la muestra en cada iteración existen diferentes opciones. En [14] se detallan dos de ellas: el *procedimiento aditivo*, el cual en cada iteración añade un número de nuevas muestras del mismo tamaño que la muestra inicial, y el *procedimiento multiplicativo*, el cual añade en cada iteración un número de nuevas muestras del mismo tamaño que las muestras acumuladas hasta ese momento.

El segundo de ellos, el *procedimiento multiplicativo*, resultaría más adecuado ya que el *procedimiento aditivo* tiene como inconveniente que al aumentar el número de iteraciones las simulaciones antiguas tienen más peso que las nuevas.

Ejemplo de uso

Con el algoritmo ya definido se presenta en la Figura 4.2 los resultados obtenidos en [14] para el ejemplo de la estimación del número π con el método Montecarlo.

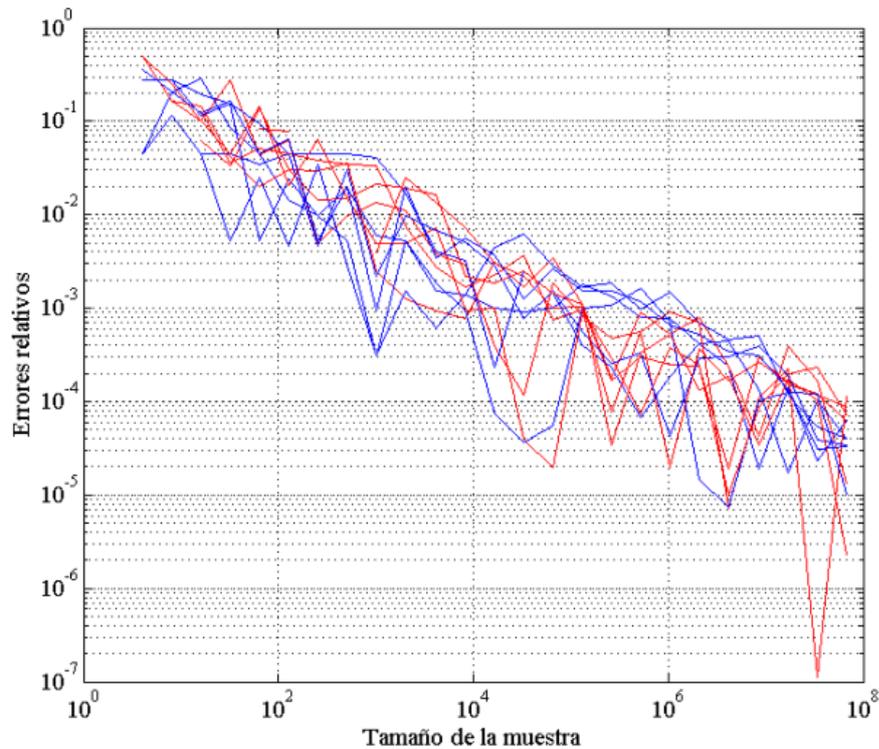


Figura 4.2 Reducción de la envolvente de error con el tamaño de la muestra.

En esta figura se muestra la relación entre los errores relativos cometidos y el tamaño de la muestra. De tal forma que con el error relativo que nosotros exijamos a nuestros resultados podemos obtener el tamaño de muestra necesario.

La diferencia entre los errores obtenidos en azul y en rojo es que en azul se obtiene el error relativo a partir del valor de π teórico y el caso del rojo es para cuando no se conozca los resultados a obtener, de tal manera que este error relativo se obtiene a partir del resultado obtenido en la simulación anterior.

Ahora, para nuestro caso de estudio, la elección ha sido de un tamaño muestral de 1000 puntos pues analizando los resultados obtenidos con este algoritmo y con los obtenidos también de [10] se determina que este tamaño es suficientemente grande como para dar resultados fiables. Se deja como línea futura de trabajo realizar un análisis como el de la Figura 4.2 para el caso de la evolución de la incertidumbre en órbitas.

4.3 Resultados

Para hacer uso del método primero de todo debemos de definir cuál va a ser nuestra órbita de referencia y sus elementos orbitales iniciales, Tabla 4.1.

Una vez que tenemos esto definido podemos hacer uso del método y observar como es la evolución de la incertidumbre, es decir, de los elipsoides de confianza tras una revolución.

Como se observa en la Figura 4.3 vemos como al principio este elipsoide empieza prácticamente como una esfera, pues como dijimos en el Punto 4.2 las desviaciones típicas iniciales van a ser las

Tabla 4.1 Elementos orbitales iniciales.

a	e	i	ω	Ω	M
6878 km	0.01	20°	90°	45°	0°

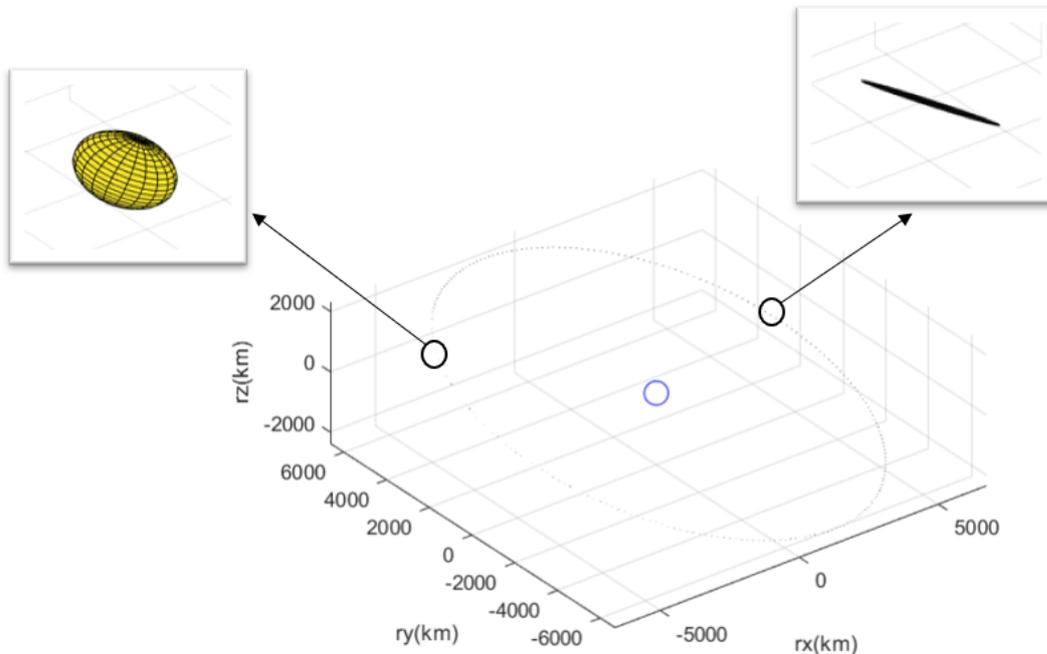


Figura 4.3 Elipsoides de confianza en una revolución (MC).

mismas en los 3 ejes. Sin embargo, a medida que pasa el tiempo se observa que en el sistema local $LHVH$, definido este con el eje OX como el eje radial el OY perpendicular al OX en el mismo plano en el sentido del movimiento y OZ completando el triedro, hay un crecimiento de la incertidumbre sobre todo en dirección OY , convirtiéndose con el paso del tiempo en prácticamente una línea.

Primero de todo, el crecimiento de la incertidumbre se debe a la naturaleza no lineal de las ecuaciones del problema de los dos cuerpos, que hace que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales del problema se conviertan en grandes variaciones con el paso del tiempo, lo que se denomina "efecto mariposa".

Por otro lado el crecimiento mayor en dirección OY local es debido simplemente a la 3ª Ley de Kepler². Las órbitas con menor semieje mayor tienen menos periodo orbital. Por ello se va a producir un desfase entre los diferentes puntos de la nube (los que tienen más semieje mayor se van quedando atrás, y al contrario). Este desfase se traduce en una mayor dispersión en la dirección OY local, mientras que en las otras direcciones locales no vemos tantos cambios.

Para entender mejor estos resultados sería adecuado presentar como varía con el tiempo la matriz de covarianza, es decir, tanto las desviaciones típicas en los tres ejes como la suma de los autovalores, la cual nos da una idea del tamaño de la incertidumbre. Esto se puede ver en las Figuras 4.5 y 4.6.

En estas figuras observamos el efecto visto en la Figura 4.3. Tanto la suma de autovalores como las desviaciones típicas tienen por un lado una componente secular creciente y por otro lado tienen una componente periódica de periodo igual al periodo orbital, pues, será en el perigeo cuando mayor sea dicha incertidumbre al haber aquí mayores cambios en velocidad y posición, lo que se traduce en

² $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$

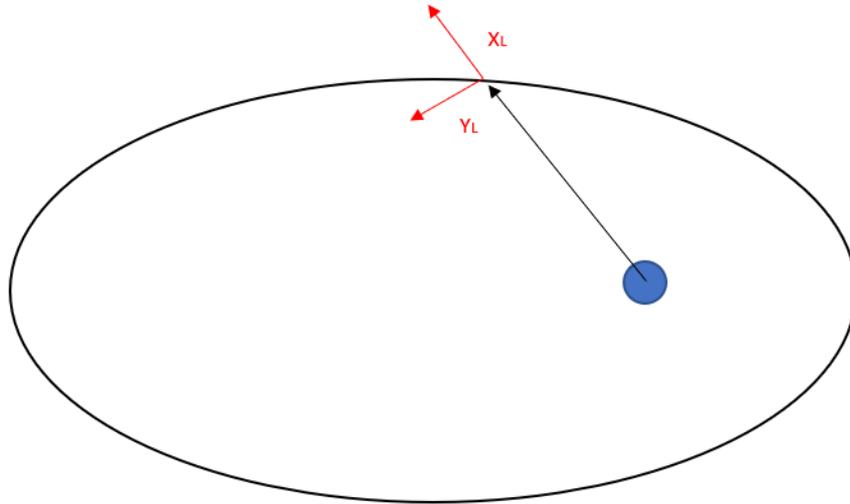


Figura 4.4 Representación de ejes locales.

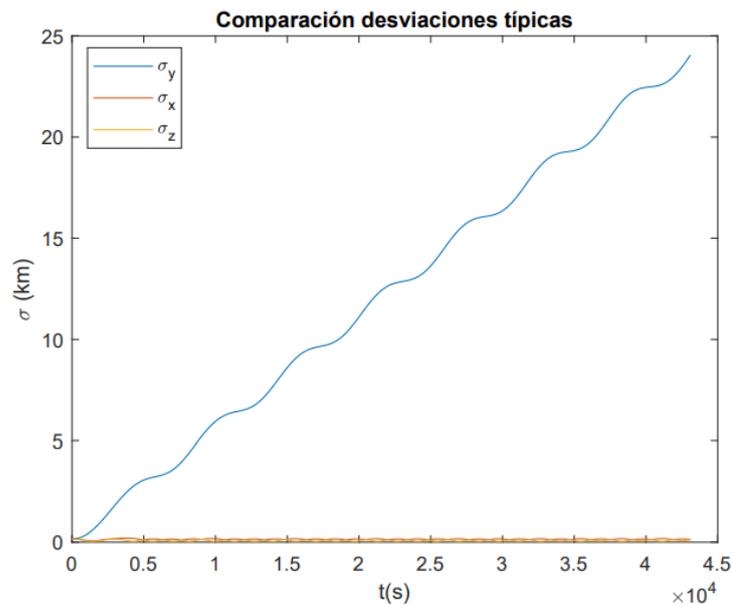


Figura 4.5 Comparación desviaciones típicas (MC).

una mayor dispersión de la incertidumbre. Además, en cuanto a las desviaciones típicas se observa lo mencionado anteriormente, el claro predominio del crecimiento en dirección OY local.

También resultaría interesante mostrar como sería este elipsoide de confianza si en vez de en una revolución lo propagamos durante mucho más tiempo, días por ejemplo. El resultado se muestra en la Figura 4.7, y es que al cabo de cierto tiempo el elipsoide de confianza deja de ser representativo pues, la distribución deja de comportarse como una gaussiana. De hecho, se muestra como la nube de puntos propagada empieza a curvarse por los extremos, cosa que el elipsoide no puede capturar. El tiempo concreto a partir del cual deja de comportarse como una distribución normal se presentará en el Punto 4.5, evidentemente cuanto más tiempo pase más evidente será esta diferencia.

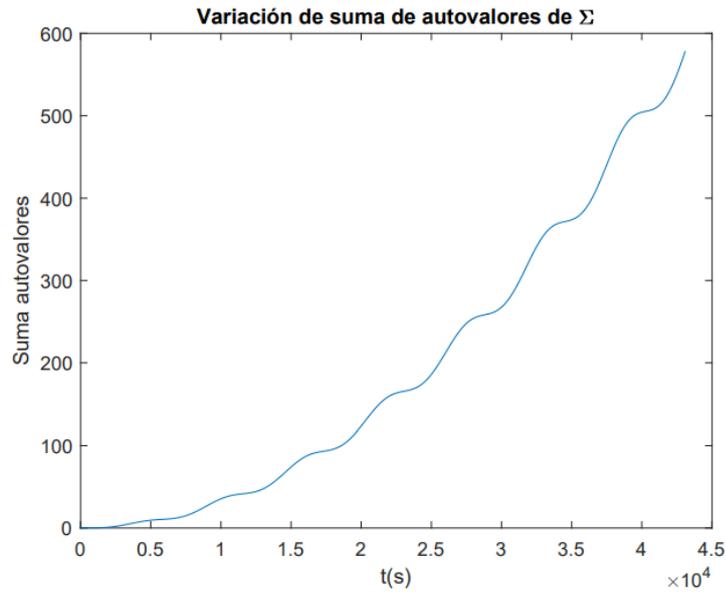


Figura 4.6 Suma de autovalores (MC).

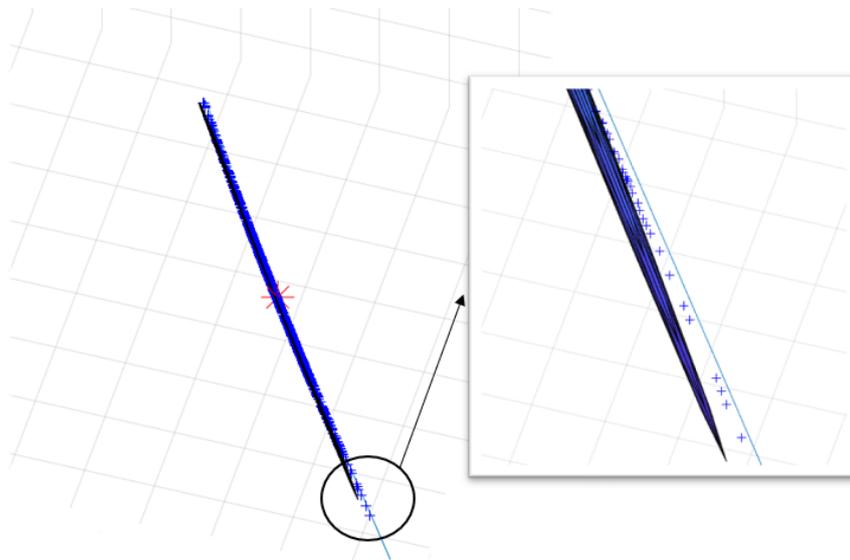


Figura 4.7 Elipsoide de confianza versus nube de puntos propagada tras un par de días.

4.4 Análisis de sensibilidad

Para facilitar la comprensión de los resultados obtenidos sería conveniente observar como dichos resultados se verían afectados al cambiar ciertos parámetros, en concreto se van a realizar análisis de sensibilidad con la excentricidad, el semieje mayor y la inclinación de la órbita.

4.4.1 Variación en excentricidad

Como observamos en la Tabla 4.1 la órbita utilizada inicialmente es prácticamente circular debida a la excentricidad tan pequeña que tiene. Para ver cuál es el efecto de esta en la evolución de la incertidumbre se va a probar con excentricidades iguales a 0.3 y 0.6 respectivamente, obteniendo los resultados que se muestran en la Figura 4.8.

Con estas gráficas se pueden extraer cierta información realmente interesante. Lo primero que es fácil de ver a simple vista es el hecho de que al aumentar la excentricidad en la órbita aumenta el crecimiento de la incertidumbre, pues tanto la suma de autovalores como las desviaciones típicas por separado son mayores, lo que significa que el elipsoide de confianza es mayor.

Esto es debido a que al aumentar la excentricidad los cambios en velocidad y por ende en posición son más abruptos y por tanto hay una mayor dispersión de la incertidumbre. Hecho que se magnifica en el perigeo de la órbita, punto donde el satélite pasa a mayor velocidad, como se puede observar en la periodicidad de las gráficas de periodo igual al periodo orbital.

Para facilitar la comprensión del efecto de la excentricidad en la incertidumbre se presenta en la Tabla 4.2 los valores de desviaciones típicas y suma de autovalores para un tiempo concreto de 20000s en los tres casos.

Tabla 4.2 Variación en excentricidad (MC).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.16	11.02	0.063	122.63
$e_0 = 0.3$	0.29	16.39	0.091	232.57
$e_0 = 0.6$	0.62	33.88	0.24	1031.8

Con esta tabla es más fácil observar el aumento de la incertidumbre con el aumento de excentricidad en la órbita de partida.

4.4.2 Variación en semieje mayor

Para observar el efecto que tendría en la incertidumbre un cambio en el tamaño de la órbita se procede a variar el semieje mayor de los iniciales 6878 km a 8000 km y 9000 km respectivamente obteniendo los resultados de la Figura 4.9

Estas gráficas nos permiten ver lo primero de todo que ahora tenemos el efecto contrario que con la excentricidad, pues al aumentar el valor del semieje mayor ahora el crecimiento de la incertidumbre es más lento.

Este hecho es debido a que al aumentar el tamaño de la órbita estamos aumentando el periodo orbital y la distancia de perigeo, lo cual va a hacer que haya menor variación de velocidad y por tanto también en posición, haciendo que las dispersión de la incertidumbre sea menor conforme aumentemos dicho tamaño orbital.

Para facilitar la comprensión del efecto de aumentar el semieje mayor en la incertidumbre se presenta en la Tabla 4.3 los valores de desviaciones típicas y suma de autovalores para un tiempo concreto de 20000s en los tres casos.

Tabla 4.3 Variación en semieje mayor (MC).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.16	11.02	0.063	122.63
$a_0 = 8000km$	0.26	9.75	0.07	89.46
$a_0 = 9000km$	0.12	7.72	0.11	52.35

Con esta tabla queda mucho más claro el efecto de la disminución de la incertidumbre para un tiempo concreto con el aumento del semieje mayor.

4.4.3 Variación en inclinación

El último parámetro que vamos a modificar para realizar un análisis de sensibilidad en la evolución de la incertidumbre es la inclinación, la cual en un principio es de 20° y la vamos a modificar a 40° y 60° respectivamente, obteniendo los resultados que se pueden ver en la Figura 4.10.

Ahora resulta curioso observar como al contrario que pasaba en los casos 4.4.1 y 4.4.2 el efecto no está tan claro. Se puede concluir por ende que la inclinación en un principio no va a modificar la incertidumbre en la órbita, pues no modifica la velocidad de paso del satélite en la órbita y por tanto no aumenta ni disminuye la dispersión de la incertidumbre.

Esto se puede observar de manera más clara en la Tabla 4.4 en la que se compara para los tres casos mencionados y para un tiempo concreto de 20000s la evolución de la incertidumbre.

Tabla 4.4 Variación en inclinación (MC).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.16	11.02	0.06	121.8
$i_0 = 40^\circ$	0.16	11.03	0.06	122.63
$i_0 = 60^\circ$	0.16	11.11	0.06	123.63

4.5 Test de normalidad de Henze-Zirkler

El test de normalidad multivariable de Henze-Zirkler es una prueba estadística utilizada para evaluar si un conjunto de datos multivariados se ajusta a una distribución normal. Esta prueba es una extensión del test de normalidad univariada de Anderson-Darling y se utiliza para comprobar si las variables aleatorias en un conjunto de datos tienen una distribución normal conjunta.

El test se basa en una distancia de divergencia entre la distribución empírica y la distribución normal teórica. Esta distancia es medida mediante una función de densidad de probabilidad que se ajusta a los datos de entrada y se compara con una función de densidad normal teórica.

La hipótesis nula del test es que los datos siguen una distribución normal multivariada. Si el valor asociado con el test es menor que un nivel de significancia previamente establecido, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los datos no siguen una distribución normal multivariada. Una explicación más en detalle se puede encontrar en [13].

Si aplicamos dicho test a nuestra órbita inicial y posteriormente a las distintas modificaciones realizadas en el análisis de sensibilidad observamos:

Tabla 4.5 Resultados test de normalidad.

Órbita inicial	Tiempo test	Variación en e	Tiempo test	Variación en a	Tiempo test	Variación en i	Tiempo test
	≈ 23000 s	$e_0 = 0.3$	≈ 11000 s	$a_0=8000$ km	≈ 41000 s	$i_0 = 40^\circ$	≈ 23000 s
		$e_0 = 0.6$	≈ 5200 s	$a_0=9000$ km	≈ 49000 s	$i_0 = 60^\circ$	≈ 23000 s

Tabla en la cual se recoge el tiempo en el cual la incertidumbre sigue una distribución gaussiana, observando como para el caso en el que hacemos crecer la excentricidad de nuestra órbita la distribución deja de ser gaussiana mucho antes, lo que está en concordancia con lo que vimos en el Punto 4.4.1 en el cual observábamos que la incertidumbre crecía más rápidamente con el crecimiento de la excentricidad.

Por otro lado al crecer el semieje mayor de la órbita, es decir, crece el tamaño de la órbita y también su periodo, el tiempo en el cual deja de ser una distribución normal aumenta hecho que

concuerta con lo visto nuevamente en el Punto 4.4.2 en el cual si aumentaba el semieje mayor de la órbita la incertidumbre tardaba más en crecer.

Con la inclinación al igual que explicamos en 4.4.3 no se observa grandes cambios.

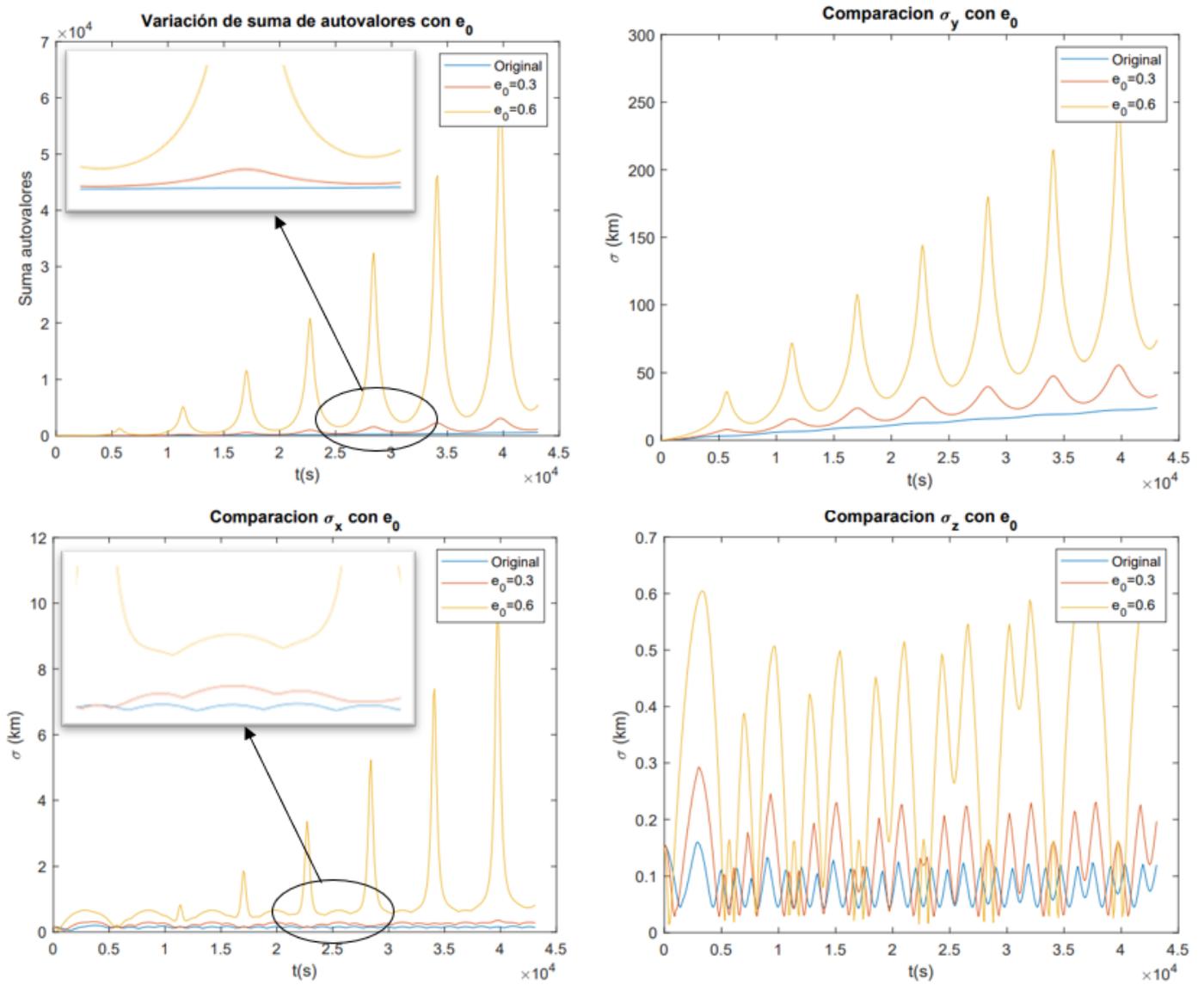


Figura 4.8 Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (MC).

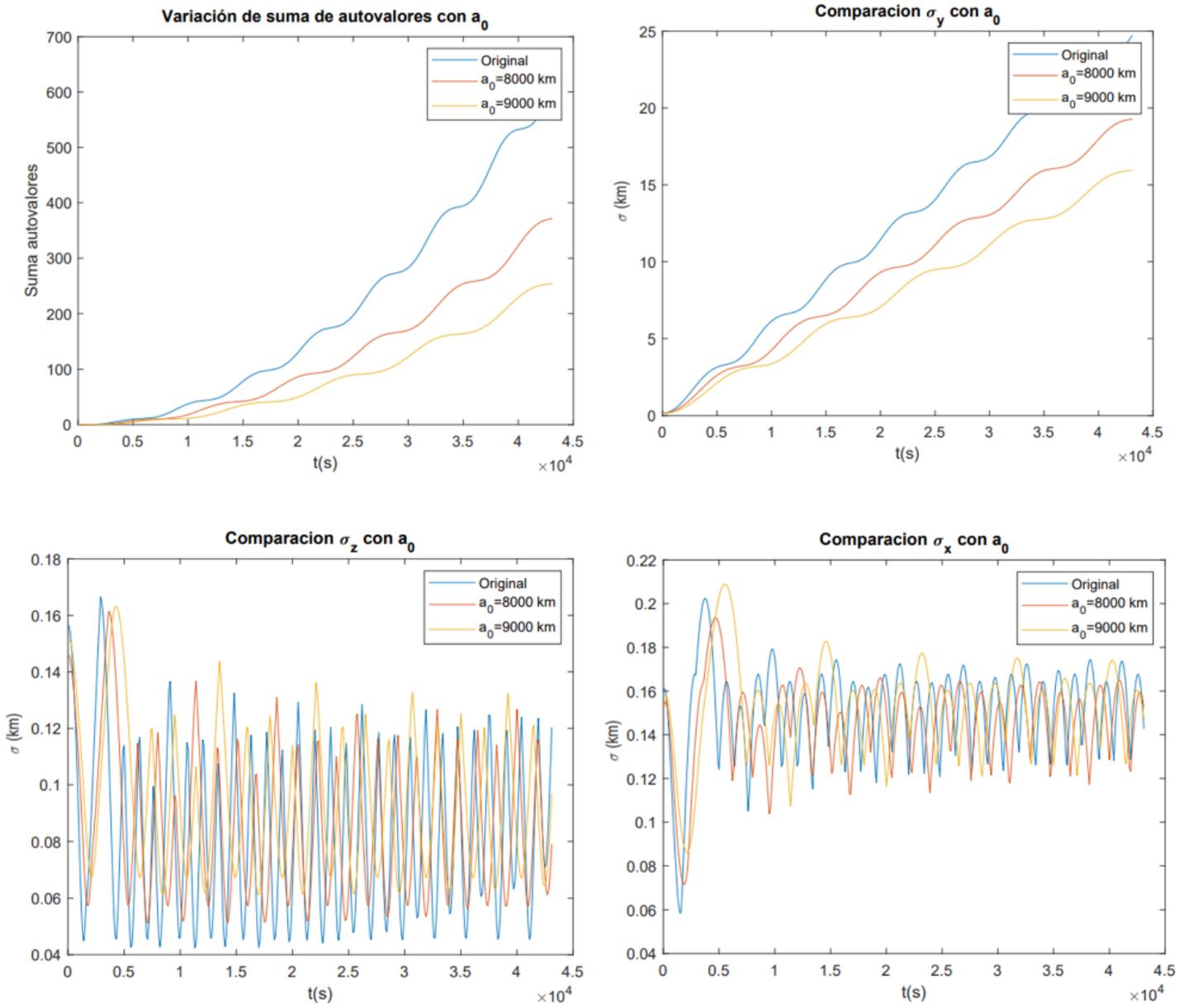


Figura 4.9 Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (MC).

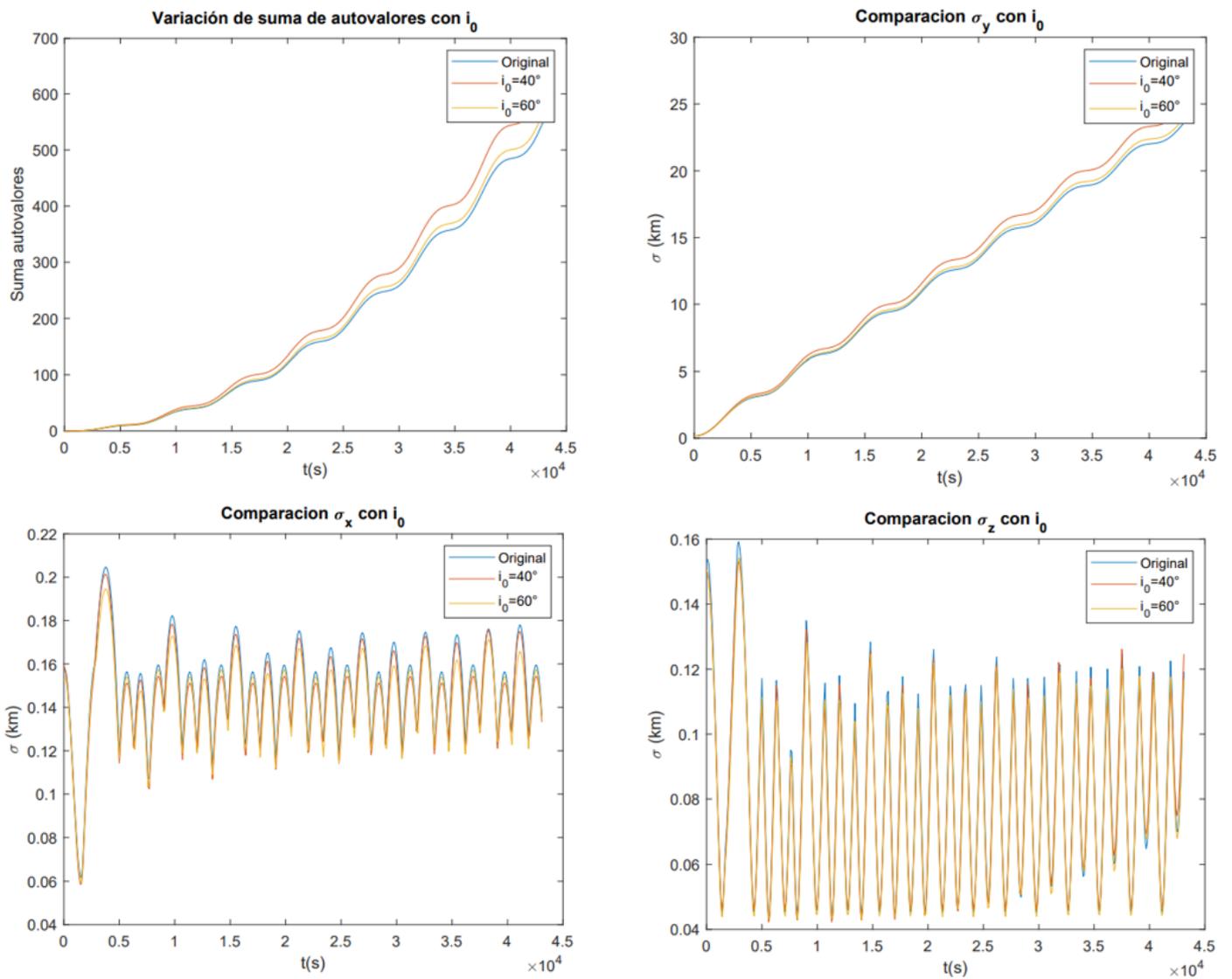


Figura 4.10 Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (MC).

5 Método de Linealización

5.1 Definición

El método de Linealización (LIN) se basa en una aproximación lineal del sistema dinámico que describe la evolución de la órbita a través de una matriz de sensibilidad o *STM* en sus siglas en inglés. La idea fundamental es propagar la incertidumbre inicial a lo largo de una órbita de referencia mediante la propagación de las matrices de covarianza.

El proceso de Linealización implica calcular las derivadas parciales de las ecuaciones de movimiento con respecto a los parámetros y las variables de estado, y luego construir una matriz jacobiana que recopile estas derivadas. Esta matriz jacobiana se utiliza para propagar la matriz de covarianza inicial a lo largo de la órbita mediante técnicas de propagación lineal.

El resultado de este método es una estimación de la matriz de covarianza de las variables de estado y los parámetros orbitales en cualquier punto a lo largo de la órbita. Esta matriz de covarianza proporciona información sobre la incertidumbre asociada con la posición y velocidad en diferentes instantes de tiempo.

El método de Linealización es ampliamente utilizado en el campo de la navegación y el seguimiento de objetos espaciales para evaluar y predecir la incertidumbre en las órbitas debido a su alta eficiencia. Al contrario que pasa con el método Montecarlo, en el método de Linealización solo ha de resolverse las ecuaciones de movimiento una solo vez.

Sin embargo, el principal inconveniente es que al hacer una Linealización del sistema dinámico de estudio se pierde la naturaleza no lineal de las ecuaciones del movimiento, haciendo que este método deje de ser útil con el paso del tiempo.

5.2 Desarrollo del método

Una vez descrito los principios del método pasamos a mostrar su desarrollo y expresiones matemáticas. Extraídas todas ellas de [7].

Dado el sistema dinámico de estudio por:

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}, t) \quad (5.1)$$

y considerando el desarrollo de Taylor de primer orden alrededor de la trayectoria de referencia $\mathbf{X}^*(t)$:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = F(\mathbf{X}, t) = F(\mathbf{X}^*, t) + \left[\frac{\partial F(t)}{\partial \mathbf{X}(t)} \right]^* [\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)] \quad (5.2)$$

Si definimos ahora la desviación con respecto a la órbita de referencia como:

$$x(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t) \quad (5.3)$$

y su derivada

$$\dot{x}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}^*(t) \quad (5.4)$$

Podemos sustituir ambas expresiones en (5.2) para obtener la siguiente ecuación diferencial u *ODE*:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{con} \quad A(t) = \left[\frac{\partial F(t)}{\partial \mathbf{X}(t)} \right]^* \quad (5.5)$$

cuya solución general viene dada como:

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 \quad (5.6)$$

donde ϕ se define como la matriz de sensibilidad o *STM*. La cual tiene la siguiente propiedad:

$$\phi(t_0, t_0) = I \quad (5.7)$$

El cálculo de ϕ resulta ahora sencillo, pues, tomando derivada en (5.6) e igualando con (5.5) obtenemos:

$$\dot{\phi}(t, t_0)x_0 = \dot{x}(t) \quad (5.8)$$

$$\dot{\phi}(t, t_0)x_0 = A(t)x(t) \quad (5.9)$$

$$\dot{\phi}(t, t_0)x_0 = A(t)\phi(t, t_0)x_0 \quad (5.10)$$

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0) \quad (5.11)$$

con la condición inicial $\phi(t_0, t_0) = I$

Esta expresión junto con las que definen a la órbita de referencia, establecen un sistema de ecuaciones diferenciales con 42 ecuaciones y 42 incógnitas. Para su resolución es preciso conocer la matriz jacobiana A en cada instante:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} & \frac{d\vec{v}}{d\vec{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & I \\ \frac{-\mu}{r^3} I_{3 \times 3} + 3 \frac{\mu}{r^5} \vec{r} \vec{r}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\delta a_x}{\delta r_x} & \frac{\delta a_x}{\delta r_y} & \frac{\delta a_x}{\delta r_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta a_y}{\delta r_x} & \frac{\delta a_y}{\delta r_y} & \frac{\delta a_y}{\delta r_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta a_z}{\delta r_x} & \frac{\delta a_z}{\delta r_y} & \frac{\delta a_z}{\delta r_z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

donde se han tenido en cuenta la expresión de la aceleración definida por la ecuación (2.6). Recordemos que estas expresiones son sin introducir en ellas perturbaciones de ningún tipo.

Una vez obtenida numéricamente la *STM* podemos ya proceder a la propagación de la covarianza para así determinar la evolución de la incertidumbre en la órbita.

Dado el vector estado inicial $x_0 = [r_0 \ v_0]^T$ caracterizado por su media y matriz de covarianza inicial:

$$\mu_0 = E[x_0] \quad (5.13)$$

$$\Sigma_0 = E[(\mu_0 - x_0)(\mu_0 - x_0)^T] \quad (5.14)$$

Generalizando ahora la expresión para un instante t cualquiera y empleando la expresión (5.6) obtenemos:

$$\Sigma(t) = E[(\mu(t) - x(t))(\mu(t) - x(t))^T] \quad (5.15)$$

$$= E[\phi(t, t_0)(\mu_0 - x_0)(\mu_0 - x_0)^T \phi(t, t_0)^T] \quad (5.16)$$

$$= \phi(t, t_0) E[(\mu_0 - x_0)(\mu_0 - x_0)^T] \phi(t, t_0)^T \quad (5.17)$$

$$\Sigma(t) = \phi(t, t_0) \Sigma_0 \phi(t, t_0)^T \quad (5.18)$$

Expresión que nos permite conocer en cada instante de tiempo la evolución de la incertidumbre en nuestra órbita.

5.3 Resultados

Para el método de Linealización se va a emplear la misma órbita de referencia que para el estudio con el método Montecarlo. Dicha órbita quedó definida previamente a través de sus elementos orbitales iniciales en la Tabla 4.1.

Así, haciendo uso de este nuevo método podemos obtener de nuevo la evolución de la incertidumbre, de los elipsoides de confianza, tras una revolución completa en la órbita.

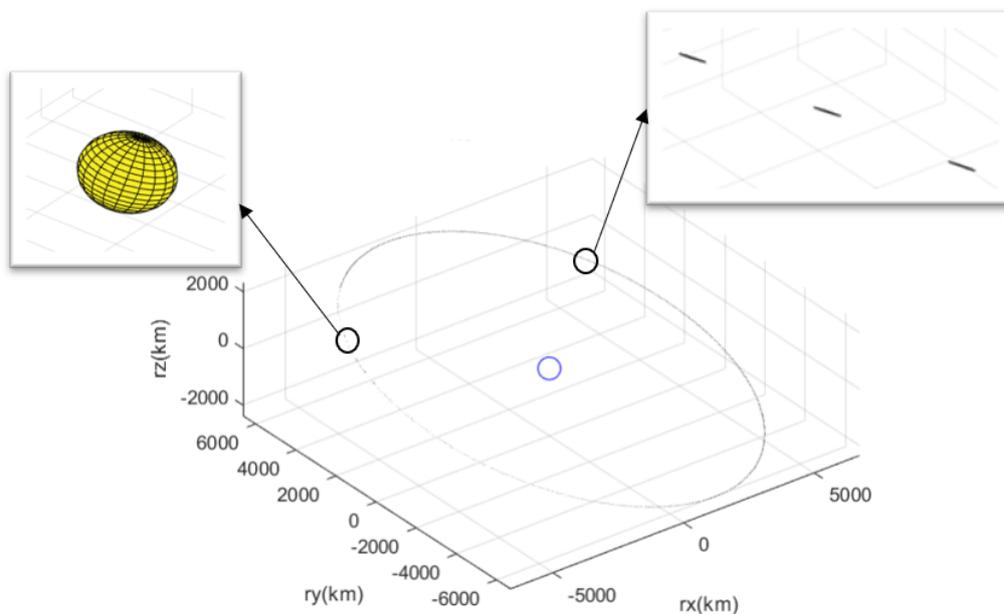


Figura 5.1 Elipsoides de confianza en una revolución (LIN).

Como se puede observar en la Figura 5.1 los resultados, pese a usar distintos métodos, son coherentes con los obtenidos en el Capítulo 4. Los elipsoides de confianza empiezan inicialmente como una esfera debido a la igualdad de las desviaciones típicas iniciales en los tres ejes y con el paso del tiempo su tamaño va aumentando.

Este efecto se ve magnificado sobre todo en la dirección OY local pues, como ya explicamos en el Punto 4.3, esto es debido al efecto de la variación del periodo orbital en los puntos de la nube.

Todos estos efectos que se observan visualmente en la Figura 5.1 se pueden entender mejor a través de las Figuras 5.2 y 5.3 donde se muestra la evolución temporal de la matriz de covarianza.

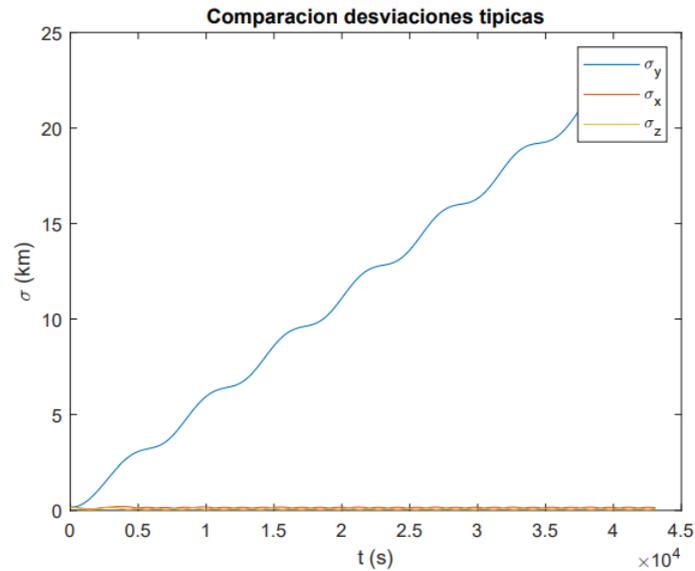


Figura 5.2 Comparación desviaciones típicas (LIN).

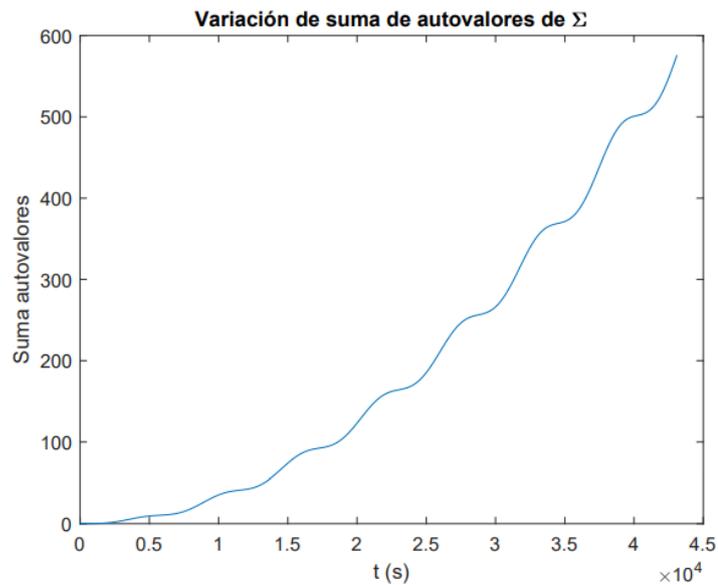


Figura 5.3 Suma de autovalores (LIN).

5.4 Análisis de sensibilidad

Al igual que se hizo para el método Montecarlo, se va a analizar como cambia la evolución de la incertidumbre si cambiamos la órbita inicial de referencia. En concreto se varía la excentricidad, el semieje mayor y la inclinación.

5.4.1 Variación en excentricidad

Para poder observar los cambios que se producen en la evolución de la incertidumbre si cambiamos la excentricidad inicial de nuestra órbita de referencia, se procede a hacer un análisis con excentricidades iguales a 0.3 y 0.6, obteniendo los resultados que se muestran en la Figura 5.5.

De nuevo, estos resultados son coherentes con los obtenidos en el Capítulo 4. La incertidumbre crece con la excentricidad debido a que al aumentar esta los cambios en velocidad y por ende en posición son mayores. Estos efectos se acentúan por tanto en el perigeo de la órbita, punto de mayor velocidad de paso, como se observa en la periodicidad de la Figura 5.5 de periodo igual al periodo orbital.

Para facilitar la comprensión de dichos efectos se presenta en la Tabla 5.1 los valores de desviaciones típicas y suma de autovalores para un tiempo concreto de 20000s en los tres casos.

Tabla 5.1 Variación en excentricidad (LIN).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.15	11.02	0.061	123.23
$e_0 = 0.3$	0.29	16.19	0.084	232.57
$e_0 = 0.6$	0.63	33.88	0.17	1133.6

5.4.2 Variación en semieje mayor

En el caso de una variación en el semieje mayor de la órbita y por ende en su tamaño, se procede a hacer un estudio variando el semieje mayor de los iniciales 6878 km a 8000 km y 9000 km respectivamente obteniendo los resultados mostrados en la Figura 5.6.

Al igual que en el Punto 4.4.2 observamos que, al aumentar el tamaño de la órbita, la incertidumbre tarda más en crecer, pues, ahora los cambios en velocidad y posición son menores y en consecuencia la dispersión de la incertidumbre es menor.

Como en el Punto 5.4.1, a continuación se presenta la Tabla 5.2 con los valores de las desviaciones típicas y suma de autovalores para un tiempo de 20000s en los tres casos.

Tabla 5.2 Variación en semieje mayor (LIN).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.15	11.02	0.06	123.23
$a_0 = 8000km$	0.16	9.45	0.07	89.47
$a_0 = 9000km$	0.11	7.43	0.11	55.25

5.4.3 Variación en inclinación

El último análisis de sensibilidad que vamos a hacer es al cambiar la inclinación de los iniciales 20° a 40° y 60° respectivamente, obteniendo los resultados de la Figura 5.4.

En estas gráficas se observa el mismo efecto que se observó en 4.4.3 y es que la inclinación no va a tener apenas efecto en la incertidumbre. La diferencia radica es que con el método de Linealización no se captura ese pequeño efecto que si se veía en la Figura 4.10 con el método Montecarlo.

A continuación se presenta en la Tabla 5.3 la comparativa de la incertidumbre en la órbita para los tres casos comentados y para un tiempo concreto de 20000s.

Tabla 5.3 Variación en inclinación (LIN).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.15	11.02	0.06	123.23
$i_0 = 40^\circ$	0.15	11.02	0.06	123.23
$i_0 = 60^\circ$	0.15	11.02	0.06	123.23

Como vemos no hay diferencias en la incertidumbre con la inclinación si hacemos el análisis con el método de Linealización.

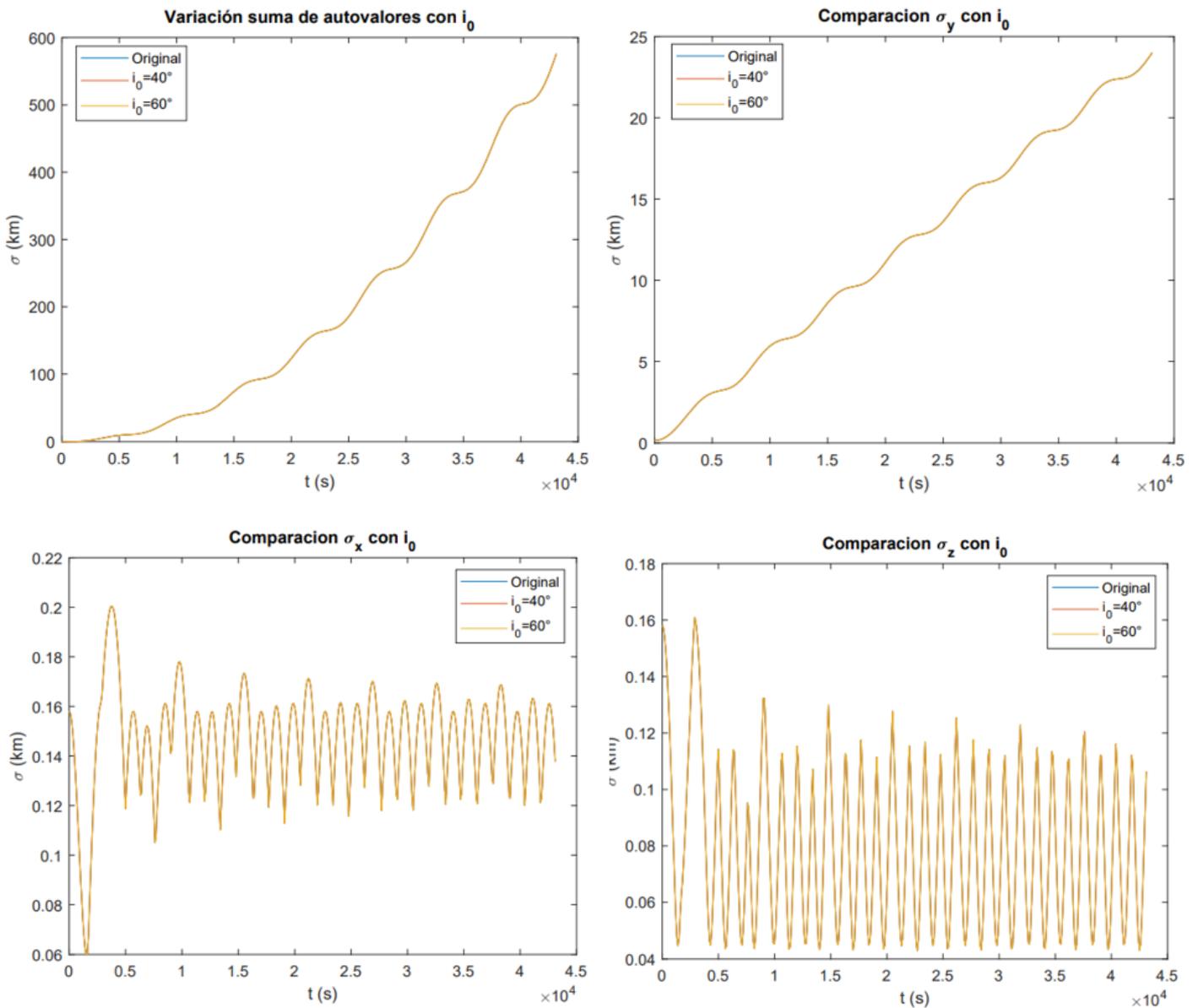


Figura 5.4 Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (LIN).

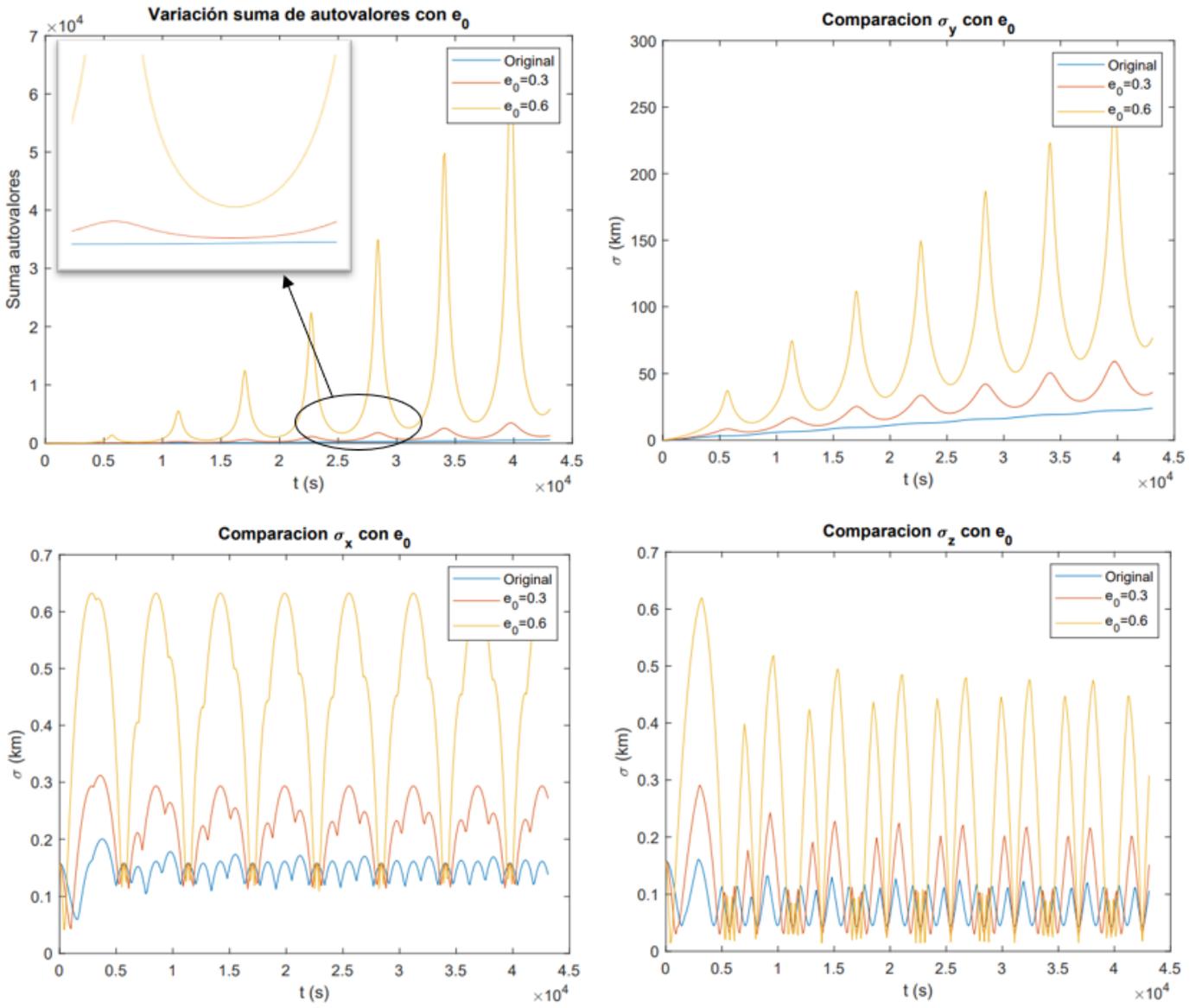


Figura 5.5 Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (LIN).

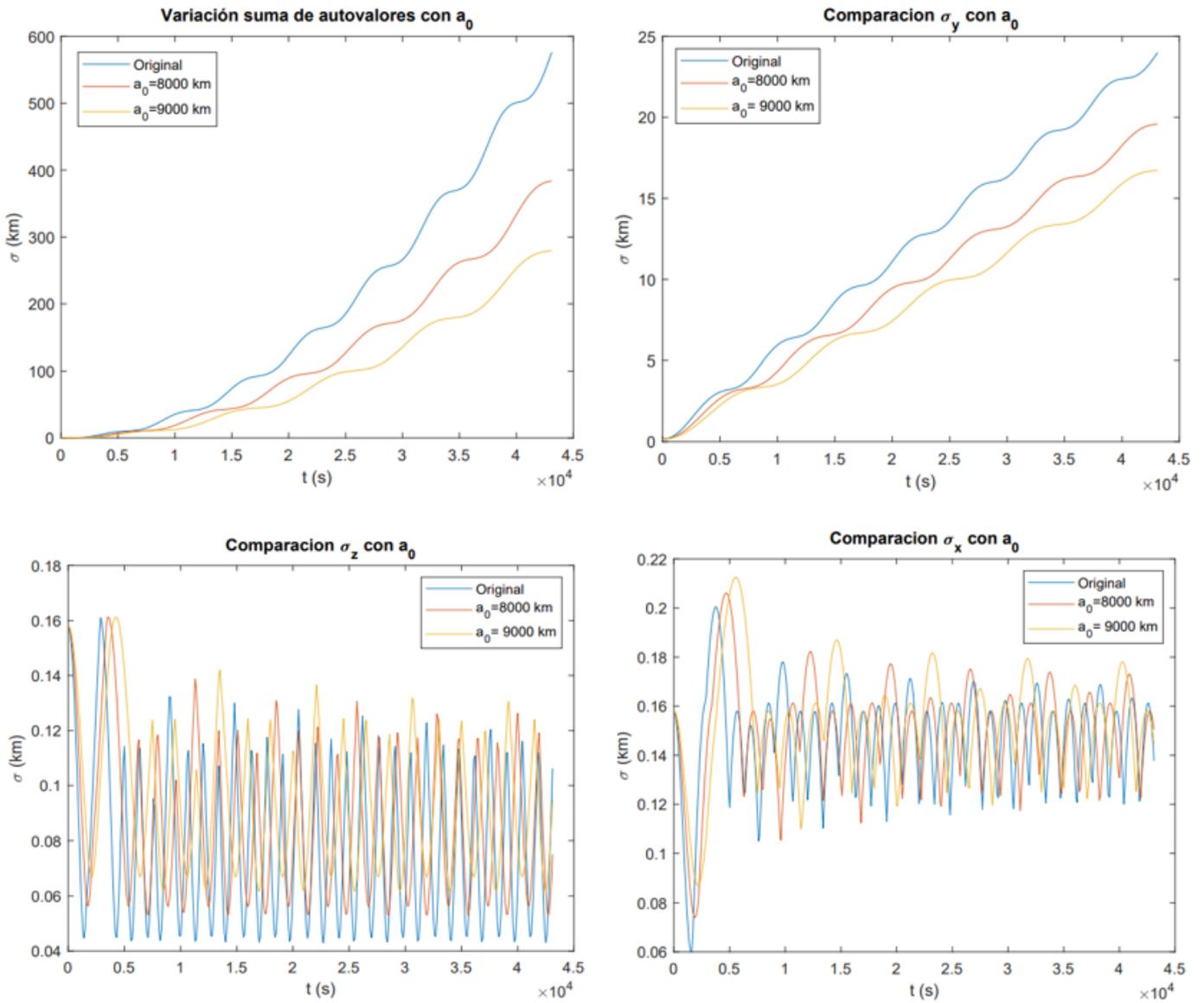


Figura 5.6 Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (LIN).

6 Unscented Transform (UT)

6.1 Definición

El método de Unscented Transform (UT) es una técnica utilizada en la teoría de estimación estadística para aproximar la propagación de incertidumbre a través de funciones no lineales.

Este método se utiliza principalmente en la estimación de estados en sistemas dinámicos no lineales. Su objetivo es obtener una representación precisa de la distribución de probabilidad de un vector de estados después de que ha pasado a través de una función no lineal. Esto es especialmente útil cuando la función no lineal no puede ser aproximada de manera precisa mediante una expansión de primer orden como la serie de Taylor.

El método de UT utiliza un conjunto de puntos llamados *sigma points* para representar la distribución de probabilidad del estado. Estos puntos se eligen de manera estratégica para capturar los momentos de la distribución, como la media y la covarianza.

La idea clave detrás de este método es propagar estos puntos a través de la función no lineal para obtener una estimación de la distribución resultante.

La principal ventaja de la UT es que puede capturar de manera más precisa la propagación de la incertidumbre a través de funciones no lineales en comparación con los métodos de aproximación lineal tradicionales. Sin embargo, también tiene algunas limitaciones, como la necesidad de seleccionar adecuadamente los *sigma points* y la complejidad computacional asociada con el cálculo de las transformaciones no lineales.

6.2 Desarrollo del método

Una vez definidos los fundamentos del método vamos a presentar la matemática que rodea a la UT. Expresiones que se han extraído de [2].

Para la aplicación del método el primer paso es definir cuantos *sigma points* necesitamos y cuales son. Con respecto a la cantidad de *sigma points* en [2] se justifica que el número más aceptado en la literatura es $2n + 1$, siendo n las dimensiones de nuestro problema. Así un número más elevado requeriría un excesivo coste computacional.

Por otro lado, para la definición de estos *sigma points* (S) hay distintos métodos, sin embargo nosotros nos quedaremos con el que se define en [2]:

$$\mathbf{S}_{[0]} = \boldsymbol{\mu}_0 \quad (6.1)$$

$$\mathbf{S}_{[i]} = \boldsymbol{\mu}_0 + \left(\sqrt{(n + \kappa)\boldsymbol{\Sigma}_0} \right)_{[i]} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{S}_{[i+n]} = \boldsymbol{\mu}_0 - \left(\sqrt{(n + \kappa)\boldsymbol{\Sigma}_0} \right)_{[i]} \quad (6.3)$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

En estas expresiones $\boldsymbol{\mu}_0$ representa la media y $\boldsymbol{\Sigma}_0$ la matriz de covarianza de nuestra distribución inicial. Recordemos que esta distribución inicial como dijimos en el Punto 4.2 es la misma que para el método Montecarlo y de Linealización.

Ahora que tenemos los $2n + 1$ *sigma points* de la UT, se procede a propagarlos para un instante t cualquiera a través de la resolución de las ecuaciones de los dos cuerpos definidas en (2.6). Una vez propagados los puntos simplemente queda definir la nueva media y covarianza en el instante t :

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{S}_i \quad (6.4)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathbf{S}_i - \boldsymbol{\mu}(t)) (\mathbf{S}_i - \boldsymbol{\mu}(t))^T \quad (6.5)$$

donde w_i son los pesos que se usan en la UT asociados cada uno con un *sigma points* y definidos como:

$$w_{[0]} = \frac{\kappa}{n + \kappa} \quad (6.6)$$

$$w_{[i]} = \frac{1}{2(n + \kappa)} \quad (6.7)$$

$$w_{[i+n]} = \frac{1}{2(n + \kappa)} \quad (6.8)$$

con $i \in \{1, \dots, n\}$ y con κ un parámetro libre de la UT que en la literatura típicamente se escoge como $\kappa = n - 3$.

Con estos pesos definidos ya tenemos la covarianza en cualquier instante de tiempo, expresión (6.5), y por ende la evolución de la incertidumbre en la órbita.

6.3 Resultados

Una vez que conocemos ya tanto los fundamentos del método como la matemática tras él, pasamos a su implementación numérica para la misma órbita de referencia usada para los otros dos métodos, Tabla 4.1. Así, podemos obtener de nuevo la evolución de la incertidumbre tras una revolución completa en la órbita pero con otro método.

En la Figura 6.1 se puede ver como se obtienen de nuevo resultados coherentes con los métodos anteriores, y es que al inicio el elipsoide de confianza vuelve a ser prácticamente una esfera y con el paso de tamaño aumenta su tamaño. Alargándose sobre todo en la dirección OY local debido a ese efecto de la disminución y aumento del periodo orbital en función del semieje como ya explicamos en el Punto 4.3.

Este efecto se puede vislumbrar más claramente en las Figuras 6.2 y 6.3 donde se muestra la evolución temporal de la matriz de covarianza, es decir, de la incertidumbre en la órbita.

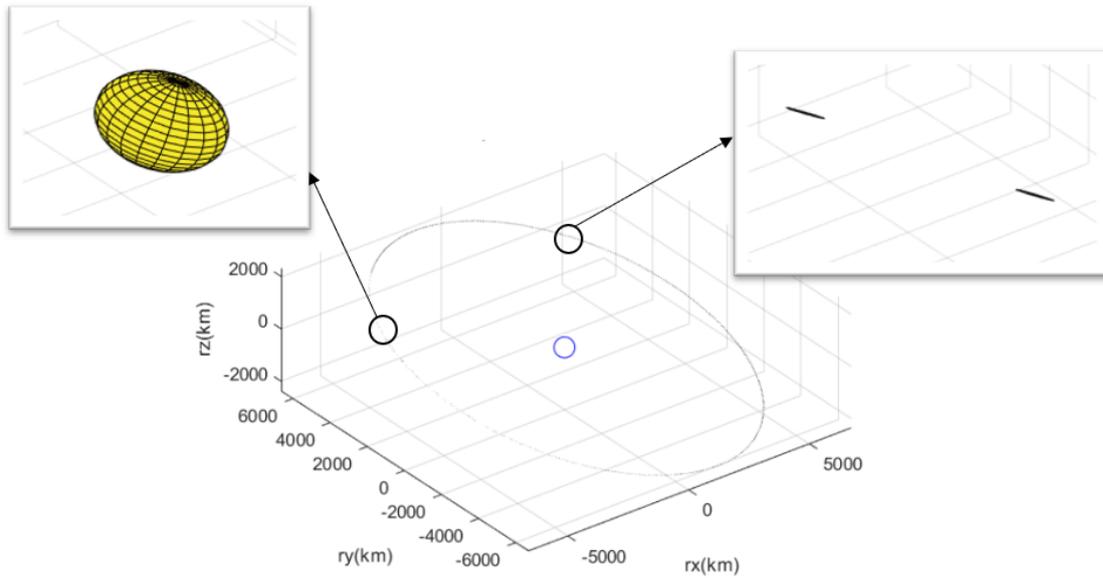


Figura 6.1 Elipsoides de confianza en una revolución (UT).

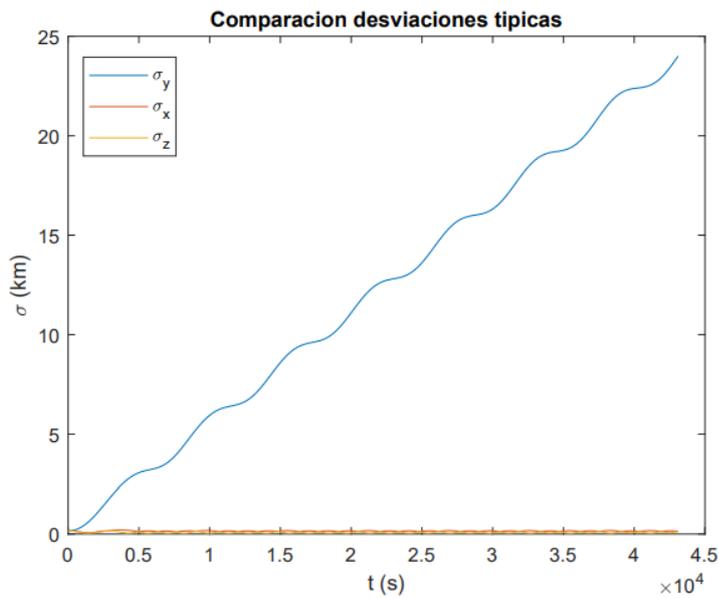


Figura 6.2 Comparación desviaciones típicas (UT).

6.4 Análisis de sensibilidad

En este punto se va a proceder a examinar como varía la evolución de la incertidumbre si cambiamos ciertos parámetros de la órbita inicial de referencia como son la excentricidad, el semieje mayor o la inclinación. Además, se realizará un análisis para observar cuan relevante resulta el parámetro κ en la UT al ser este un parámetro libre a elegir.

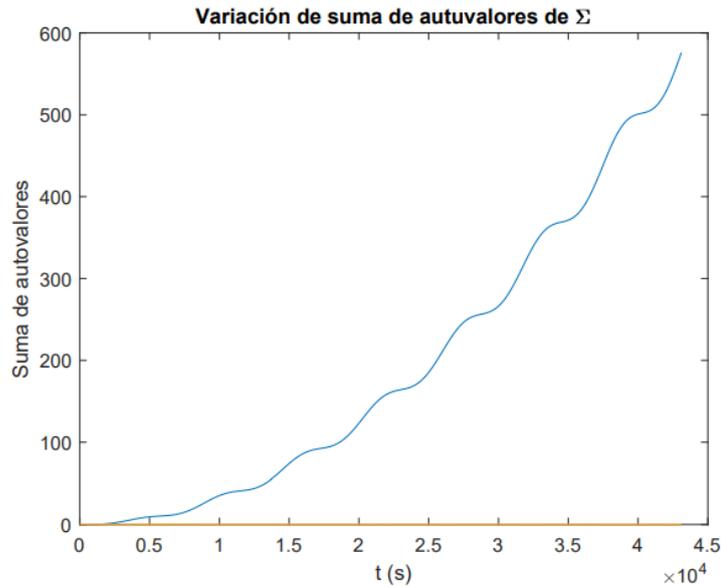


Figura 6.3 Suma de autovalores (UT).

6.4.1 Variación en excentricidad

Para observar cual es el efecto de la excentricidad en la evolución de la incertidumbre para este nuevo método, se procede a variar la excentricidad de la inicial 0.01 a 0.3 y 0.6 respectivamente con lo que obtenemos los resultados de la Figura 6.5.

Al igual que en los anteriores métodos se observa una tendencia creciente con la excentricidad debido al efecto que tiene esta en la velocidad de paso y por tanto en la dispersión de la incertidumbre. Efectos explicados ya en los anteriores métodos, Punto 4.4.1.

En la Tabla 6.1 se puede ver la evolución de la incertidumbre para un tiempo de 20000s en los tres casos estudiados. Observándose la tendencia claramente creciente mencionada anteriormente.

Tabla 6.1 Variación en excentricidad (UT).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.16	11.1	0.064	123.22
$e_0 = 0.3$	0.29	16.19	0.09	262.57
$e_0 = 0.6$	0.63	33.66	0.24	1133.7

6.4.2 Variación en semieje mayor

Para el caso del semieje mayor se procede a hacer un análisis de los cambios en la incertidumbre variando el semieje mayor a 8000 km y 9000 km respectivamente. El resultado de este se puede ver en la Figura 6.6.

Ahora la tendencia es la contraria que para la excentricidad, al aumentar el semieje mayor la incertidumbre crece más lentamente. Esto es debido al aumento del tamaño de la órbita y por ende a la disminución de la velocidad de paso y de los cambios en posición. Explicado este efecto ya en el Punto 4.4.2.

Para clarificar el efecto mencionado se presenta en la Tabla 6.2 los datos numéricos del análisis realizado para los tres casos en un tiempo de 20000s.

Tabla 6.2 Variación en semieje mayor (UT).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.16	11.1	0.06	123.22
$a_0 = 8000km$	0.16	9.45	0.07	89.47
$a_0 = 9000km$	0.11	7.43	0.11	55.25

6.4.3 Variación con inclinación

El último parámetro que se va a modificar es la inclinación, la cual se va a variar de los iniciales 20° a 40° y 60° , obteniendo los resultados mostrados en la Figura 6.7.

Con la UT se constata que, al igual que con Montecarlo y la Linealización, el efecto de la inclinación es limitado en la evolución de la incertidumbre.

En la Tabla 6.3 se presenta la comparativa de la incertidumbre en la órbita para los tres casos comentados y para un tiempo concreto de 20000s.

Tabla 6.3 Variación en inclinación (UT).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.16	11.1	0.06	123.23
$i_0 = 40^\circ$	0.16	11.1	0.06	123.22
$i_0 = 60^\circ$	0.16	11.1	0.06	123.22

6.4.4 Variación de κ

Al inicio del capítulo, en concreto en el Punto 6.2, se mencionó de la existencia en la UT del parámetro κ , un parámetro libre a elegir por el usuario que afecta tanto a los pesos como a la definición de los sigma points.

En la literatura normalmente κ se toma como $n-3$ pues, como se explica en [2], este valor minimiza el desajuste de momento de cuarto orden. Sin embargo, este parámetro puede tomar el valor que nosotros consideremos y es por ello que vamos a analizar su efecto en la UT.

En nuestro caso como tenemos $n=6$, κ según la literatura valdría 3 pero para la realización de este análisis se ha probado con valores de κ de 1 a 6 obteniendo los resultados de la Figura 6.4.

En la Figura 6.4 se observa como el valor de $\kappa = 3$ se sitúa en medio mientras que los valores menores se adelantan y los mayores se retrasan. De todas formas, el efecto a gran escala de κ parece que no es demasiado relevante para los resultados obtenidos con el método, así que se opta por un $\kappa = 3$ siguiendo así con lo utilizado en la literatura.

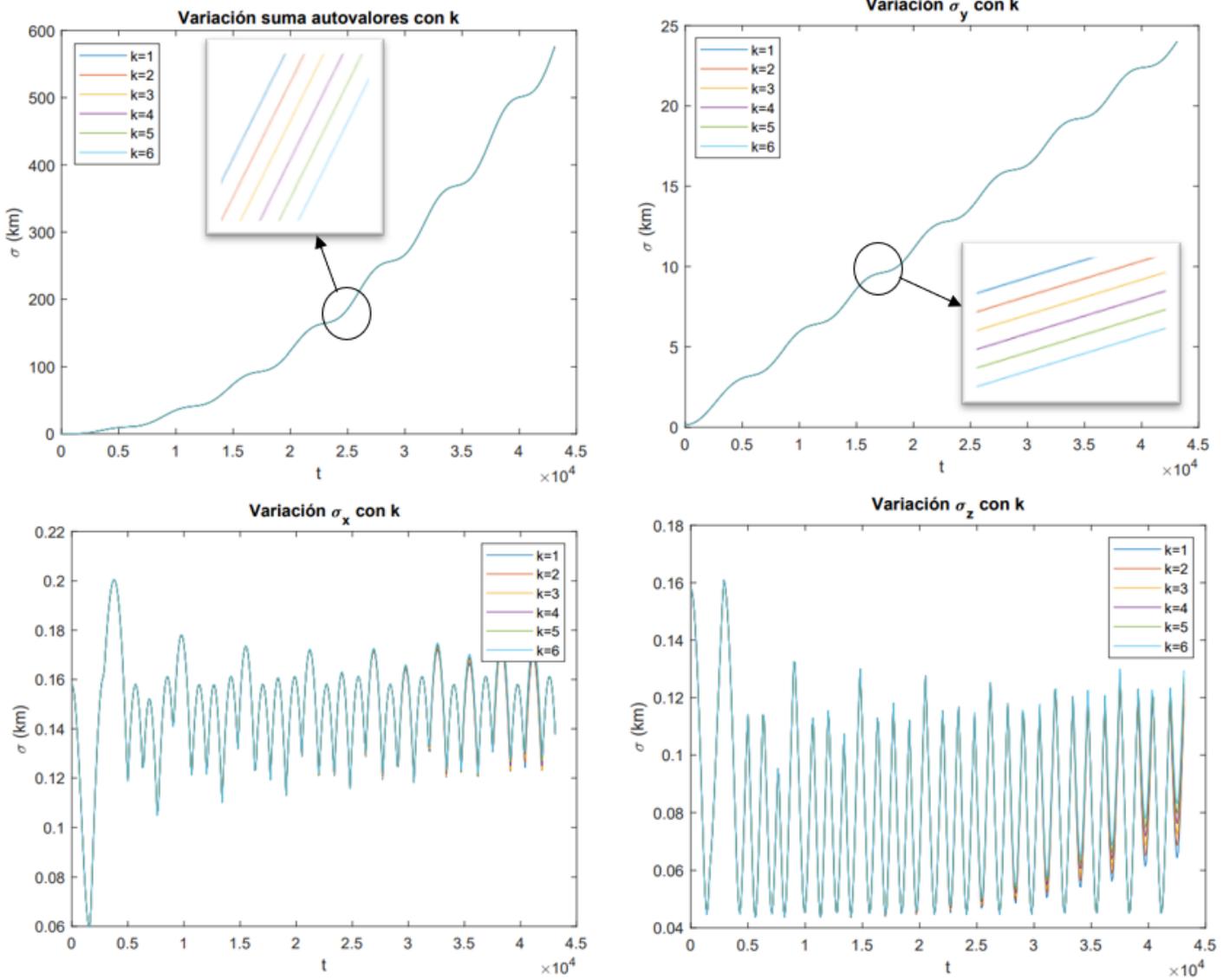


Figura 6.4 Variación de σ y suma de autovalores con κ .

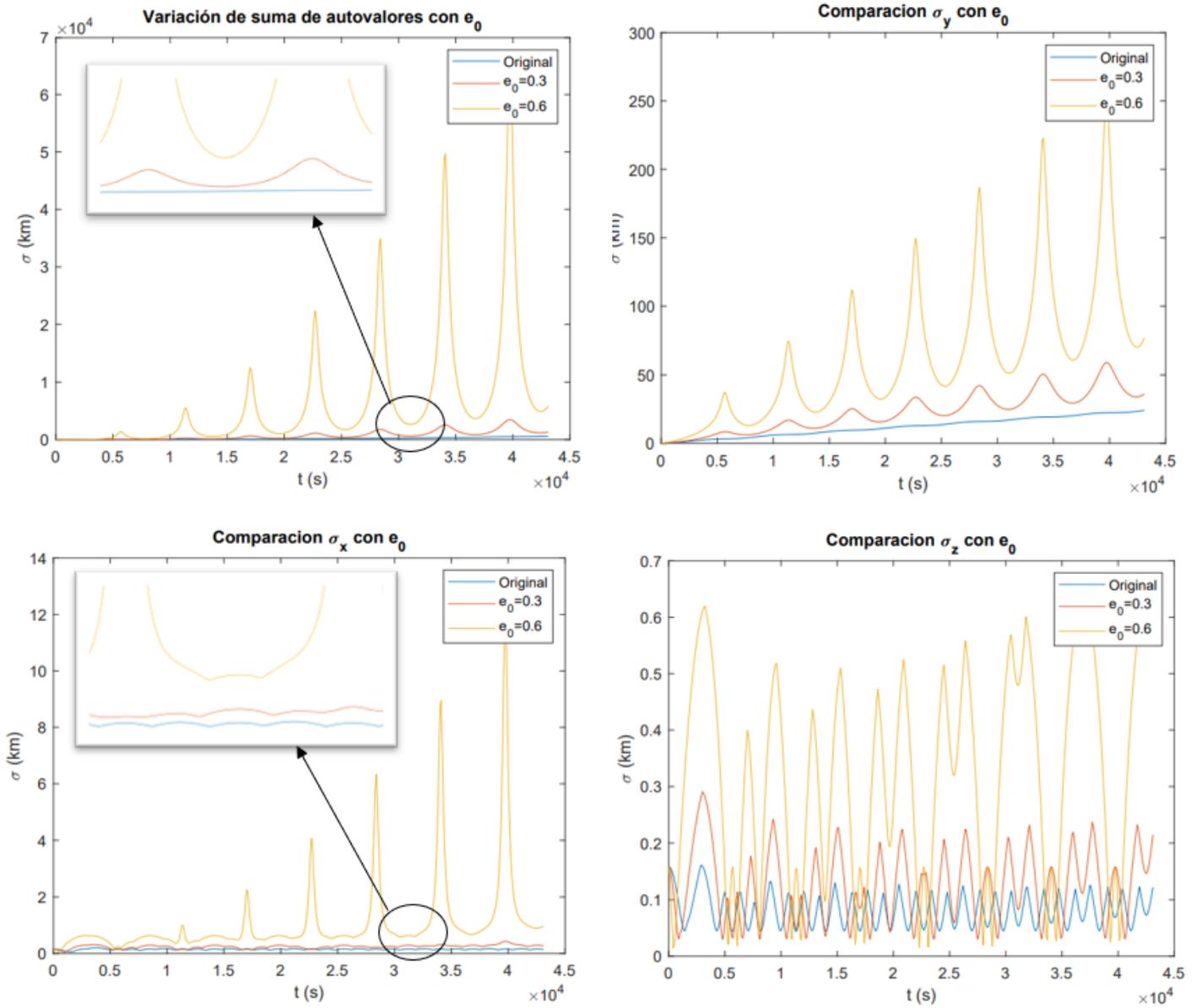


Figura 6.5 Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (UT).

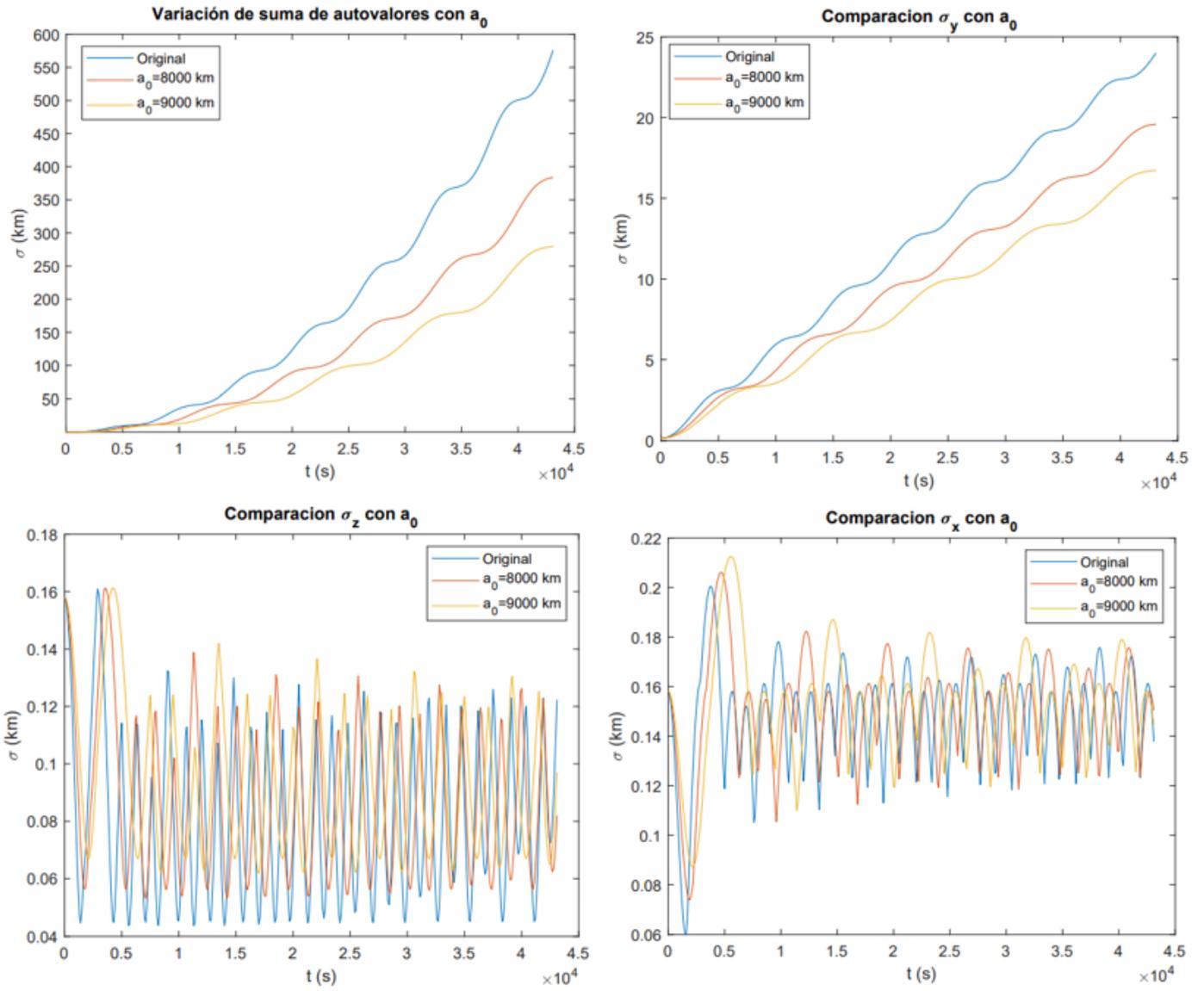


Figura 6.6 Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (UT).

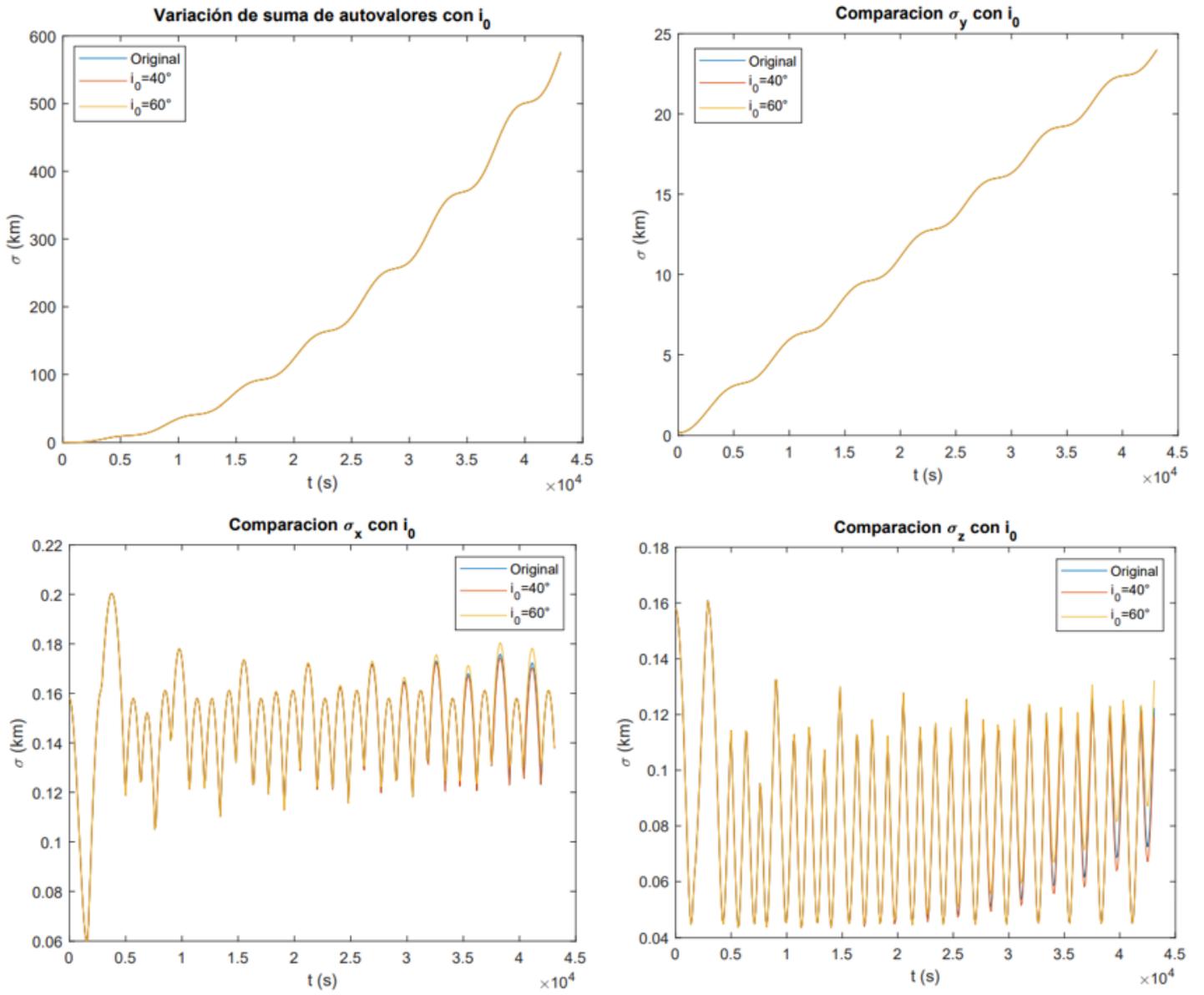


Figura 6.7 Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (UT).

7 Método de los Elementos Orbitales Equinocciales

7.1 Definición

El último método de estudio que vamos a analizar para su uso en el análisis de la propagación de la incertidumbre en órbitas, es el método de los Elementos Orbitales Equinocciales (*EOE*).

La definición de este método es bastante simple, básicamente hasta ahora los métodos usados trabajan en el espacio de las coordenadas cartesianas. Ahora, vamos a realizar el análisis de la incertidumbre en el espacio de los *EOE* pues, estos presentan ciertas ventajas a la hora de propagar la incertidumbre.

Y es que con los *EOE* se puede llegar a propagar la *PDF* del estado completo usando tan solo una suma gaussiana unidimensional. Esta mejora de rendimiento no sería posible en un Sistema de Coordenadas Cartesianas (*SCC*) pues las no linealidades de la dinámica del problema actúan fuertemente en las seis coordenadas.

Por el contrario, en el espacio de los *EOE*, como veremos en el Punto 7.2, cinco de las seis coordenadas evolucionan linealmente bajo el problema de los dos cuerpos sin perturbación y casi linealmente para el caso perturbado. En consecuencia, la incertidumbre crece principalmente a lo largo de una coordenada, la longitud verdadera (*L*). Una explicación más detallada de esto se puede encontrar en [5].

7.2 Desarrollo del método

Una vez visto cuan interesante es el análisis de la incertidumbre en el espacio de los *EOE* procedemos al desarrollo en sí del propio método.

Lo primero que hay que definir para usar este método son los *EOE*, en concreto se van a utilizar los Elementos Orbitales Equinocciales Modificados (*EOEM*) definidos en [4]:

$$p = a(1 - e^2) \quad (7.1)$$

$$f = e \cos(\omega + \Omega) \quad (7.2)$$

$$g = e \sin(\omega + \Omega) \quad (7.3)$$

$$h = \tan(i/2) \cos \Omega \quad (7.4)$$

$$k = \tan(i/2) \sin \Omega \quad (7.5)$$

$$L = \omega + \Omega + \theta \quad (7.6)$$

donde $a, e, \omega, \Omega, i, \theta$ son los Elementos Orbitales Keplerianos (*EOK*) ya estudiados en el Capítulo 2.

A su vez, para el uso del método también va a ser preciso obtener los *EOK* a partir de los *EOEM* para con ellos pasar de nuevo al *SCC*:

$$a = \frac{p}{1 - f^2 - g^2} \quad (7.7)$$

$$e = \sqrt{f^2 + g^2} \quad (7.8)$$

$$i = 2 \arctan \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right) \quad (7.9)$$

$$\Omega = \arctan \left(\frac{k}{h} \right) \quad (7.10)$$

$$\omega = \arctan \left(\frac{g}{f} \right) - \Omega \quad (7.11)$$

$$\theta = L - \omega - \Omega \quad (7.12)$$

$$(7.13)$$

Una vez definidas estas transformaciones ya estamos en disposición de hacer uso del método.

Lo primero es que, al igual que con el resto de métodos, inicialmente tenemos nuestra Σ y μ de la distribución normal inicial de nuestra órbita de referencia que ya quedaron definidas en el Punto 4.2.

Ahora, y haciendo uso de lo aprendido en el Capítulo 6 con la UT, vamos a pasar esta Σ y μ al espacio de los *EOEM*. Para ello obtenemos los *sigma points* de la distribución inicial en cartesianas y lo transformamos con las expresiones (7.1) a los *EOEM*. Con las fórmulas (6.4) de la UT calculamos la nueva Σ y μ en el espacio de los *EOEM*.

Una vez tenemos nuestra Σ y μ iniciales en *EOEM* y los *sigma points* pasamos a la propagación. Como adelantamos en el Punto 7.1 todos los elementos van a permanecer constantes exceptuando L . Así, la propagación queda:

$$p(t) = p_0 \quad (7.14)$$

$$f(t) = f_0 \quad (7.15)$$

$$g(t) = g_0 \quad (7.16)$$

$$h(t) = h_0 \quad (7.17)$$

$$k(t) = k_0 \quad (7.18)$$

$$L(t) = L_0 + n_0 \Delta t \quad (7.19)$$

donde $n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}$ está referido al instante inicial t_0 .

Con los *sigma points* ya propagados el cálculo de la nueva μ y Σ en el espacio de los *EOEM* es inmediato pues, simplemente hay que volver a usar las expresiones (6.4) de la UT para obtener esta nueva media y matriz de covarianza propagadas.

Ahora, para poder comparar este método con los otros procedemos a volver al *SCC*. Para ello, se vuelve a proceder de la misma forma en la que procedió inicialmente para pasar al espacio de los *EOEM* pero al revés. Es decir, los *sigma points* propagados en el espacio de los *EOEM* se pasan al *SCC* a través de las expresiones (7.7) y con las mismas expresiones de la UT que antes, las definidas en (6.4), se obtiene la nueva media y matriz de covarianza pero ahora en el *SCC*.

7.3 Resultados

Con este último método que vamos a usar para el estudio de la incertidumbre en la órbita se va a proceder de manera completamente análoga que con los anteriores métodos. Primero se implementa numéricamente el método, como quedó ya explicado en el Punto 7.2, y posteriormente se extraen los resultados para una revolución completa de la órbita. Esto se muestra en la Figura 7.1.

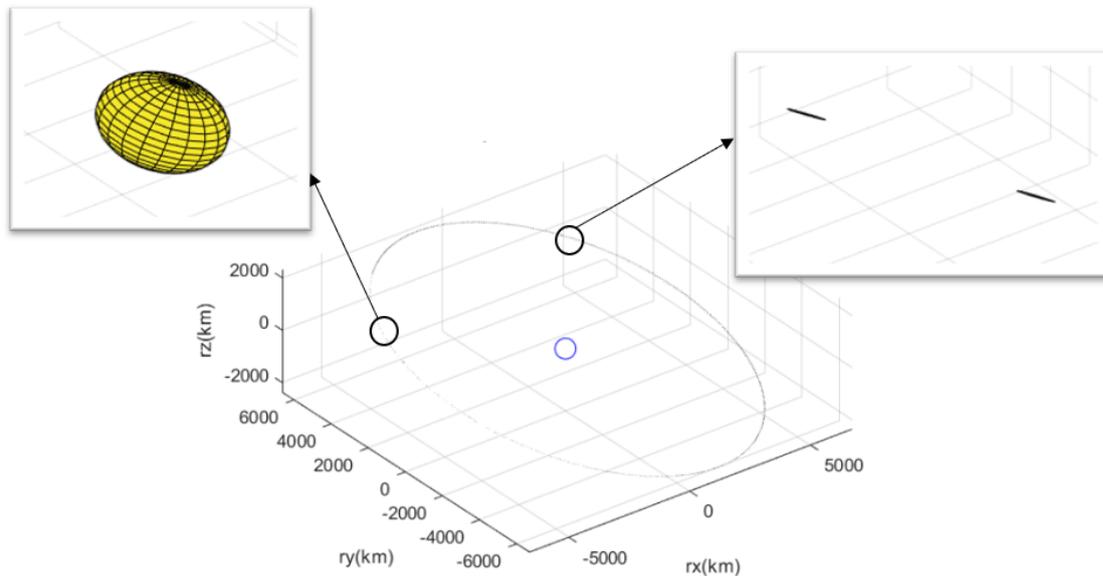


Figura 7.1 Elipsoides de confianza en una revolución (EOEM).

Así, como se puede observar en la figura el resultado es igual que los métodos usados previamente. De nuevo, se observa un crecimiento de la incertidumbre, el cual se acentúa en dirección OY local. Este efecto quedó ya explicado en el Punto 4.3.

Ahora, para que quede más clara esta evolución, se va a proceder de nuevo a mostrar la evolución de la matriz de covarianza, esto es, de la suma de autovalores y desviaciones típicas. Estos resultados se muestran en las Figuras 7.2 y 7.3.

La tendencia creciente está en concordancia con los resultados obtenidos con los anteriores métodos. Ahora la diferencia es que esta componente periódica, al menos para la órbita inicial, no queda tan clara. Es decir, los *EOEM* parecen no captar del todo bien estos aumentos de incertidumbre al pasar por el perigeo de la órbita, que recordemos, es debido al aumento de los cambios en velocidad y posición en dicho punto. Lo que provoca un aumento de la dispersión de la incertidumbre. Esta diferencia entre métodos quedará más clara en el posterior análisis de sensibilidad y en el Capítulo 8 donde se compararán todos ellos.

7.4 Análisis de sensibilidad

Al hilo de las diferencias observadas en el Punto 7.3 en la suma de autovalores y desviaciones típicas con respecto a los demás métodos, resulta de lo más interesante realizar el análisis de sensibilidad que se hizo en los anteriores métodos en este. Este análisis consiste, como en los demás, en variar la excentricidad, semieje mayor e inclinación y observar el cambio en la evolución de la incertidumbre en la órbita.

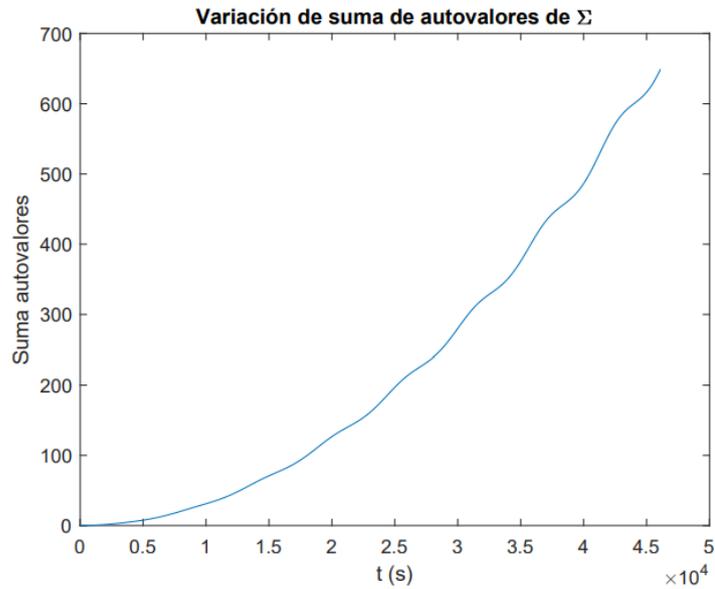


Figura 7.2 Comparación desviaciones típicas (EOEM).

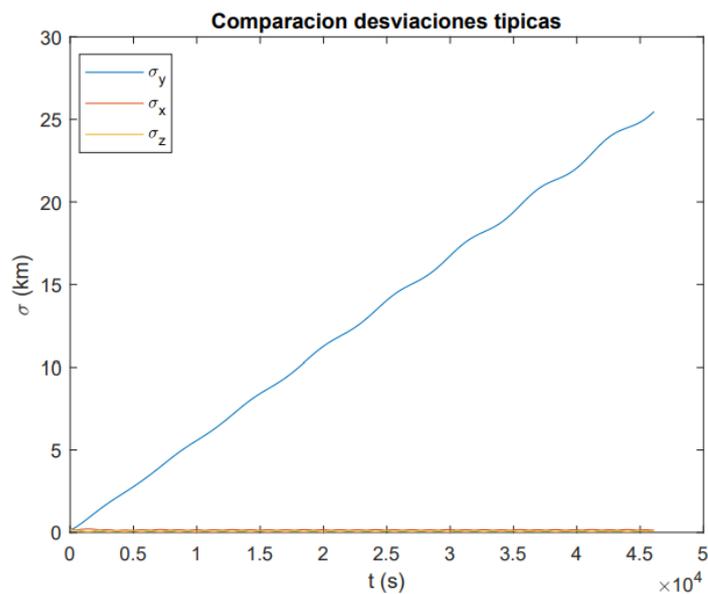


Figura 7.3 Suma de autovalores (EOEM).

7.4.1 Variación en excentricidad

Para el caso del efecto de la excentricidad en la evolución de la incertidumbre se va a variar la excentricidad de la inicial a 0.3 y 0.6 respectivamente. Con estos cambios se obtienen los resultados de la Figura 7.4.

En esta figura se muestra que, como cabía esperar, el efecto sigue en concordancia con los anteriores métodos, y es que la tendencia es claramente creciente con la excentricidad debido al aumento de la dispersión de la incertidumbre por el aumento de la velocidad de paso con el aumento de la excentricidad.

El cambio más significativo es que con el aumento de la excentricidad si se percibe el efecto periódico de los resultados, que comentamos en el Punto 7.3, de manera más clara. Esto es debido a

que al aumentar la excentricidad la velocidad de paso por el perigeo lo hace también, provocando un aumento mayor en la incertidumbre.

En la Tabla 7.1 se muestra dicha evolución de la incertidumbre para el caso concreto de una propagación de 20000s.

Tabla 7.1 Variación en excentricidad (EOEM).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.15	12.68	0.069	160.91
$e_0 = 0.3$	0.15	17.81	0.07	317.4
$e_0 = 0.6$	0.17	31.14	0.15	969.9

7.4.2 Variación en semieje mayor

Para el caso del análisis de sensibilidad con el semieje mayor se procede a variar este de los iniciales 6878 km a 8000 km y 9000 km respectivamente, obteniendo los resultados de la Figura 7.5.

En este caso la tendencia principal de decrecimiento de la incertidumbre con el crecimiento del semieje mayor vuelve a coincidir con los anteriores métodos. Pero ahora, al contrario que pasaba con el caso de la excentricidad, esta componente periódica no se acentúa sino que es prácticamente igual que la inicial.

Para hacer más claro el efecto del semieje mayor en la incertidumbre para el caso de los *EOEM* se presenta la Tabla 7.2 donde se muestra los resultados del análisis para un tiempo concreto de 20000s.

Tabla 7.2 Variación en semieje mayor (EOEM).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.15	12.68	0.069	160.91
$a_0 = 8000km$	0.17	10.41	0.059	108.42
$a_0 = 9000km$	0.16	8.97	0.077	80.61

7.4.3 Variación en inclinación

Ahora, para el caso del análisis de sensibilidad con la inclinación de la órbita se procede a variar la inclinación de la inicial a 40° y 60° respectivamente, con lo que se obtienen los resultados mostrados en la Figura 7.6.

Al igual que pasaba con los anteriores métodos, debido a que el cambio de inclinación no provoca un cambio en la velocidad de paso en la órbita y por ende en la dispersión de la incertidumbre, los resultados para los tres casos son prácticamente iguales.

En la Tabla 7.3 se muestran los resultados concretos para el caso de una propagación de 20000s. Observando como, efectivamente, los cambios son mínimos para los tres casos.

Tabla 7.3 Variación en inclinación (EOEM).

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores
Órbita inicial	0.15	12.68	0.069	160.91
$i_0 = 40^\circ$	0.15	12.68	0.069	160.91
$i_0 = 60^\circ$	0.15	12.68	0.069	160.91

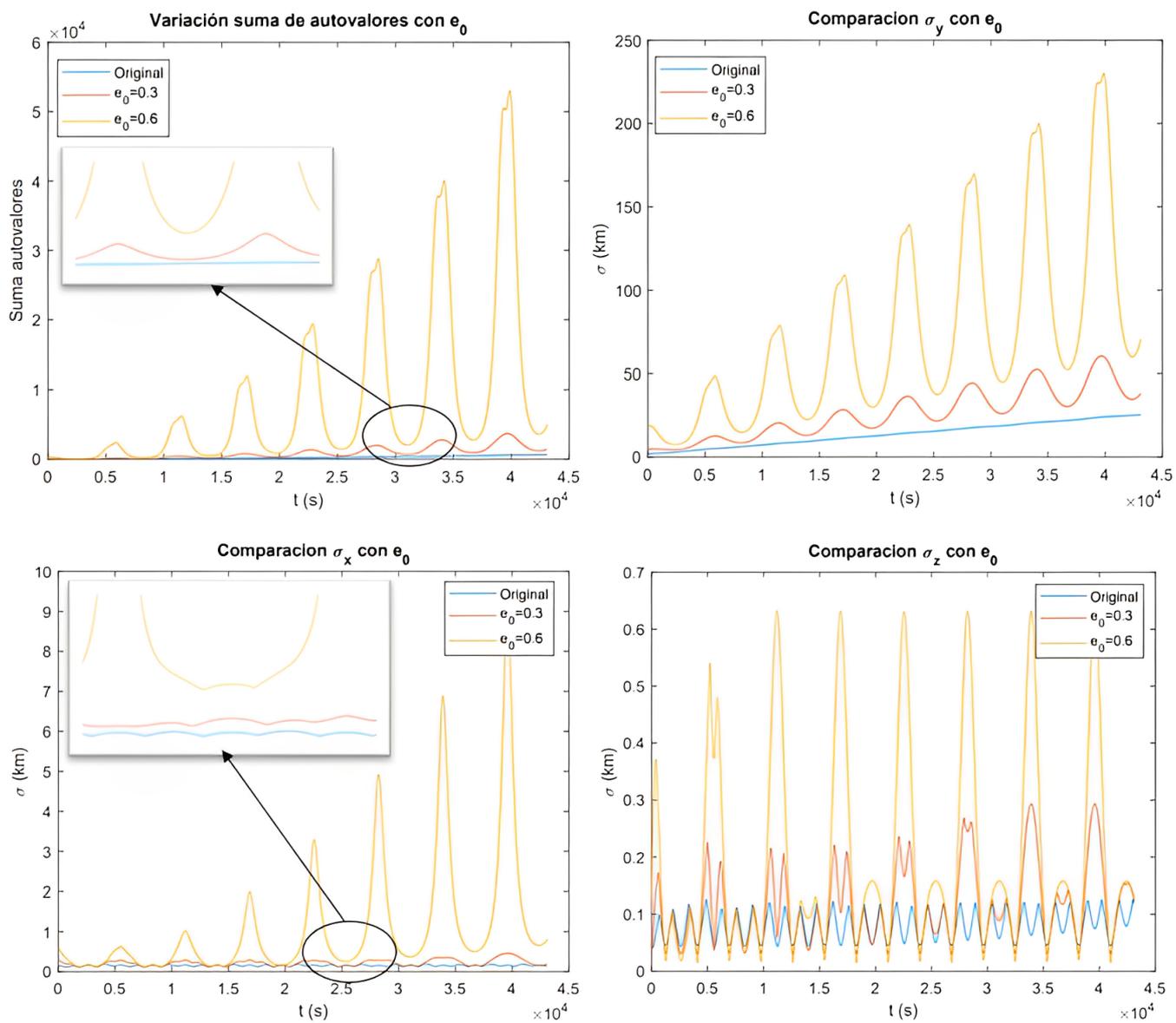


Figura 7.4 Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (EOEM).

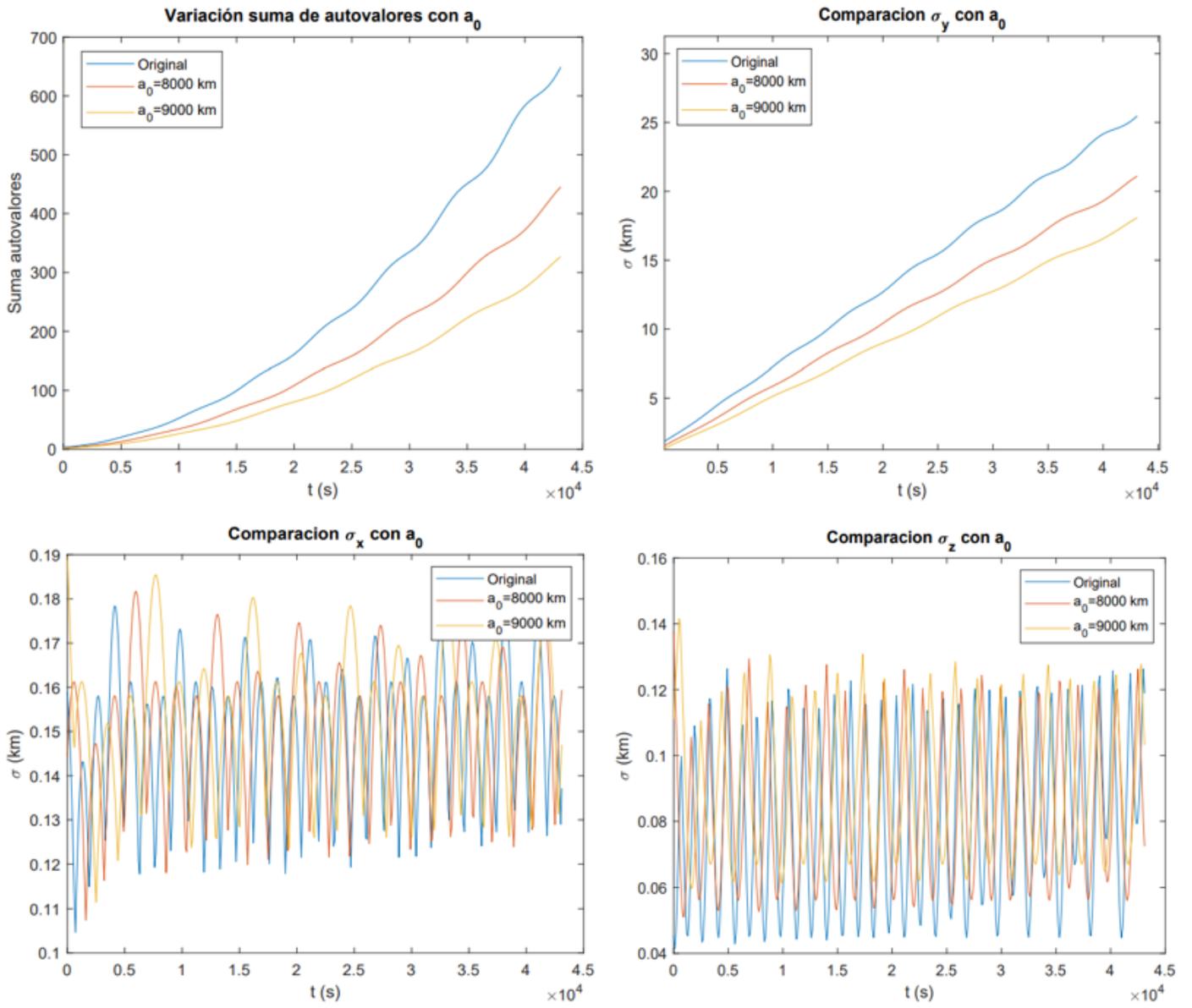


Figura 7.5 Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (EOEM).

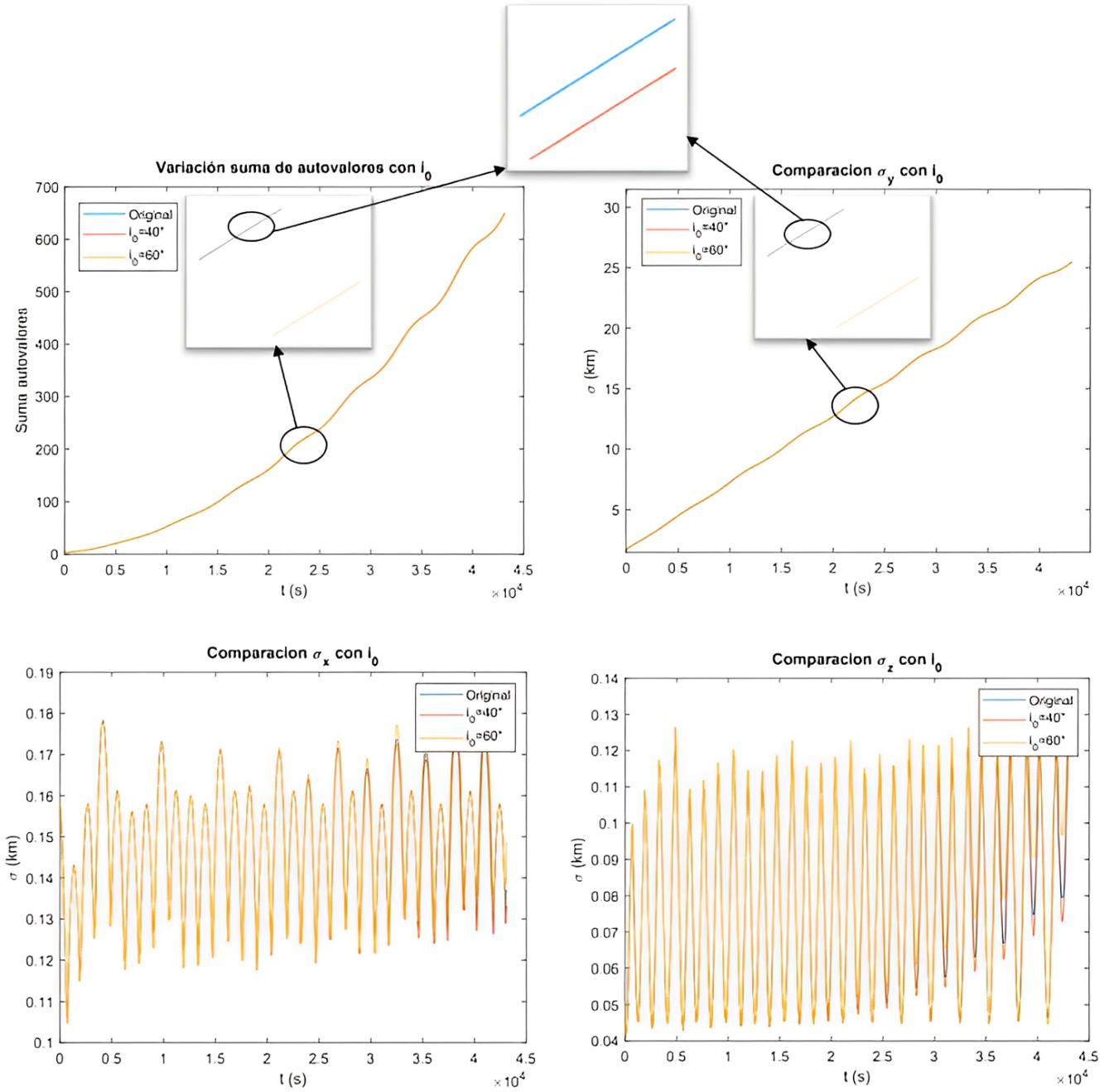


Figura 7.6 Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (EOEM).

8 Comparativa de métodos

Este capítulo viene a cerrar la parte del estudio de métodos para el análisis de la incertidumbre en órbitas. Así, se procederá a estudiar y analizar las ventajas e inconvenientes que tienen la utilización de cada uno de los métodos y se realizará comparativas de los resultados obtenidos con ellos. Para hacer esta comparativa, se tomará el método Montecarlo como “realidad”, pues, con suficientes puntos para la simulación es el que mejor la captura, ya que resuelve directamente las ecuaciones.

8.1 Ventajas e inconvenientes de los métodos

Como avanzamos con anterioridad, lo primero a realizar para la elección de los mejores métodos es, sin duda, conocer en detalle cuáles son las ventajas e inconvenientes principales que tienen cada uno de estos métodos.

8.1.1 Método Montecarlo

En cuanto a las ventajas que presenta este método destacamos:

- Capacidad para modelar y propagar incertidumbres complejas y no lineales.
- Puede considerar fuentes de incertidumbre tanto aleatorias como sistemáticas.
- Permite obtener distribuciones de probabilidad para los resultados, lo que facilita el análisis estadístico.
- Puede adaptarse a diferentes niveles de detalle y complejidad del modelo orbital.

En contraposición sus desventajas principales son:

- Requiere un gran número de muestras para obtener resultados precisos, lo que puede llevar a un alto coste computacional.
- La precisión y calidad de los resultados dependen en gran medida de la representatividad de las muestras generadas.
- Puede resultar difícil de implementar y validar correctamente debido a la complejidad asociada a la generación de muestras aleatorias.

8.1.2 Método de Linealización

Las ventajas principales que presenta el uso de la Linealización son:

- Método apropiado para sistemas donde las no linealidades son pequeñas.
- Es computacionalmente eficiente en comparación con los métodos no lineales más complejos.

- Puede proporcionar una solución analítica aproximada, lo que facilita el análisis matemático.

Los inconvenientes de su uso por otro lado resultan ser:

- No tiene en cuenta las no linealidades importantes, lo que puede introducir errores significativos con el paso del tiempo.
- No proporciona una medida directa de la distribución de probabilidad de los resultados.
- Puede requerir conocimiento detallado del modelo linealizado y su derivación.

8.1.3 Unscented Transform

Las principales ventajas de este método son:

- Aproxima la propagación de incertidumbre en sistemas no lineales sin requerir una Linealización explícita.
- Proporciona una estimación precisa de la media y covarianza de la distribución resultante.
- Menos susceptible a errores de muestreo en comparación con el método Montecarlo.

Por otro lado, los inconvenientes que presenta son:

- Requiere una mayor cantidad de evaluaciones del modelo en comparación con el método de Linealización, lo que puede aumentar la carga computacional.
- No proporciona una descripción completa de la distribución de probabilidad resultante.
- Puede ser más complejo de implementar y entender en comparación con el método de Linealización.

8.1.4 Elementos Orbitales Equinocciales Modificados

En cuanto a las ventajas de trabajar en el espacio de los *EOEM* destacamos:

- Con los *EOEM* se puede llegar a propagar la *PDF* del estado completo usando una suma gaussiana unidimensional.
- Cinco de las seis coordenadas evolucionan linealmente bajo el problema de los dos cuerpos.
- La incertidumbre crece principalmente solo a lo largo de una de las seis coordenadas.

Las desventajas que presenta en contraposición son:

- Debido a la forma de propagación del método puede no capturar tan bien la incertidumbre como los demás métodos.

8.2 Comparativa de resultados

Una vez hemos analizado cuáles son las ventajas e inconvenientes de cada método y podemos tener una idea más clara de ellos a la hora de hacer una elección, vamos a pasar a comparar los resultados que se obtienen con cada uno de ellos.

Para ello lo primero que es importante definir es la órbita de referencia, pues, para que la comparativa sea coherente esta debe ser la misma. En concreto, usaremos la que hemos estado utilizando hasta ahora y es la definida por sus elementos orbitales en la Tabla 4.1, pero que volvemos a indicar en la Tabla 8.1 para que quede más claro en este capítulo.

Tabla 8.1 Elementos orbitales iniciales.

a	e	i	ω	Ω	M
6878 km	0.01	20°	90°	45°	0°

Como la órbita es la misma que hemos estado usando hasta ahora para estudiar los métodos individualmente, solo queda superponer los resultados para ver cuan de semejantes o diferentes son del método Montecarlo. Estos resultados se muestran en la Figura 8.1 donde se pueden observar para una simulación de medio día la evolución de la incertidumbre, esto es, de la suma de autovalores y desviaciones típicas con los cuatro métodos.

Con estos resultados se pueden extraer cierta información interesante sobre los métodos. Lo primero que resulta claro es que el método de los *EOEM* resulta ser el peor debido a las diferencias con los demás métodos. Esto se puede explicar por la forma en la que se propaga con los *EOEM*, y es que, como se dijo en el Punto 8.1.4, la incertidumbre crece principalmente solo a lo largo de una de las seis coordenadas mientras que las otras cinco permanecen constantes. Esto hace que el método no capture bien la incertidumbre.

Con los otros métodos, la Linealización y la UT, no resulta tan claro pues, se puede observar como al menos para cortos periodos de tiempos ambos métodos se difieren del Montecarlo de una manera prácticamente similar.

Para poder ver mejor las diferencias entre estos dos métodos se procede a analizar la evolución para mayor tiempo, en concreto se muestra en las Tablas 8.2, 8.3 y 8.4 los resultados para 20000s, 7 días y 30 días. Con estos resultados se puede concluir que el método de Linealización, como se comentó en el Punto 8.1.2, pierde exactitud con el tiempo al no tener en cuenta la naturaleza no lineal de las ecuaciones del movimiento.

Tabla 8.2 Evolución de la incertidumbre en 20000s con tres métodos.

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores	Tiempo (s)
MC	0.16	11.02	0.063	122.63	3.82
LIN	0.15	11.02	0.062	123.23	0.034
UT	0.16	11.1	0.064	123.23	0.062

Tabla 8.3 Evolución de la incertidumbre en 7 días con tres métodos.

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores	Tiempo (s)
MC	10.33	324.69	0.15	105530	107.81
LIN	0.15	333.51	0.058	111230	0.42
UT	11.81	333.11	0.15	111100	1.43

Tabla 8.4 Evolución de la incertidumbre en 30 días con tres métodos.

	σ_x (km)	σ_y (km)	σ_z (km)	Suma autovalores	Tiempo (s)
MC	199.69	1393.7	0.13	1982200	433
LIN	0.13	1431.2	0.09	2048300	1.63
UT	214.87	1399.3	0.13	2004200	5.38

En estas tablas también se muestra el tiempo computacional, el cual nos indica lo que avanzamos ya en el Punto 8.1.1, y es que el Montecarlo, evidentemente, es el más costoso al resolver directamente las ecuaciones del movimiento. La Linealización y la UT se encuentran bastante parecidas en cuanto a este aspecto, aunque la linealización requiere de un poco menos tiempo. Todos estos resultados dejan al método de la UT como mejor candidato, en un principio, para el estudio de la evolución de la incertidumbre.

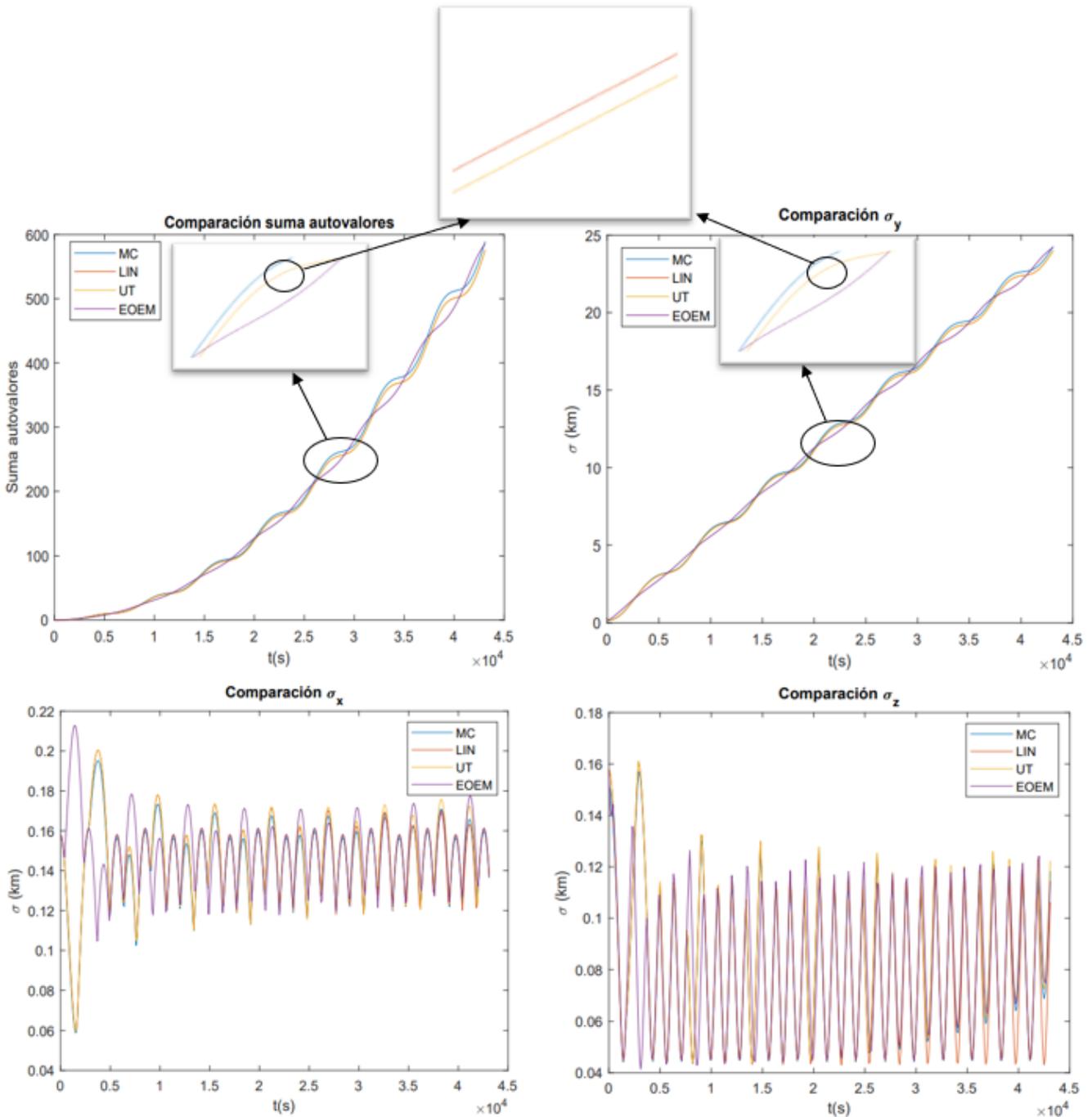


Figura 8.1 Comparación de suma de autovalores y σ con los distintos métodos estudiados.

8.3 Análisis de sensibilidad con la excentricidad

Para profundizar más en la comparativa de los métodos, como en los anteriores capítulos se ha ido viendo que los cambios en excentricidad son los que más influyen en la incertidumbre en la órbita por los grandes cambios que introduce esta en la velocidad de paso, se va a proceder a analizar los resultados de nuevo con todos los métodos, pero ahora con excentricidad de 0.3 y 0.6 respectivamente. Así, se obtiene los resultados de las Figura 8.2 y 8.3.

Con estos resultados se corrobora lo mencionado en el Punto 8.2, y es que rápidamente se descarta el método de los *EOEM*. Además, se puede observar como el aumento de la excentricidad produce que la diferencia entre el método Montecarlo y el de Linealización y UT sea considerablemente menor. Por otro lado, la diferencia entre el método de Linealización y la UT, pese que para cortos periodos de tiempo sean bastantes similares, se observa que con la excentricidad, en concreto con 0.6, la diferencia empieza a ser mayor entre dichos métodos incluso para un corto periodo de tiempo.

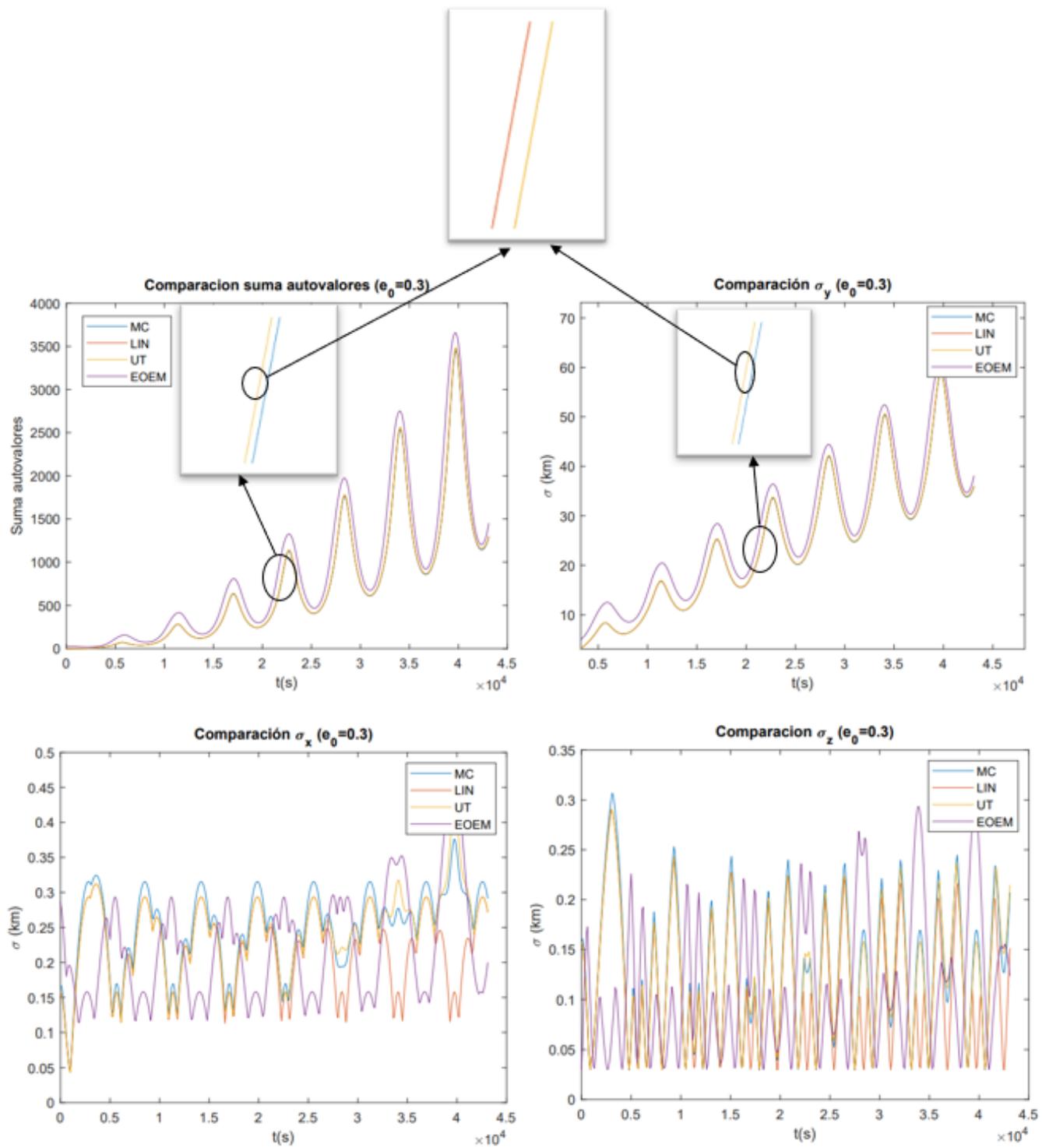


Figura 8.2 Comparación de suma de autovalores y σ con los distintos métodos estudiados ($e_0=0.3$).

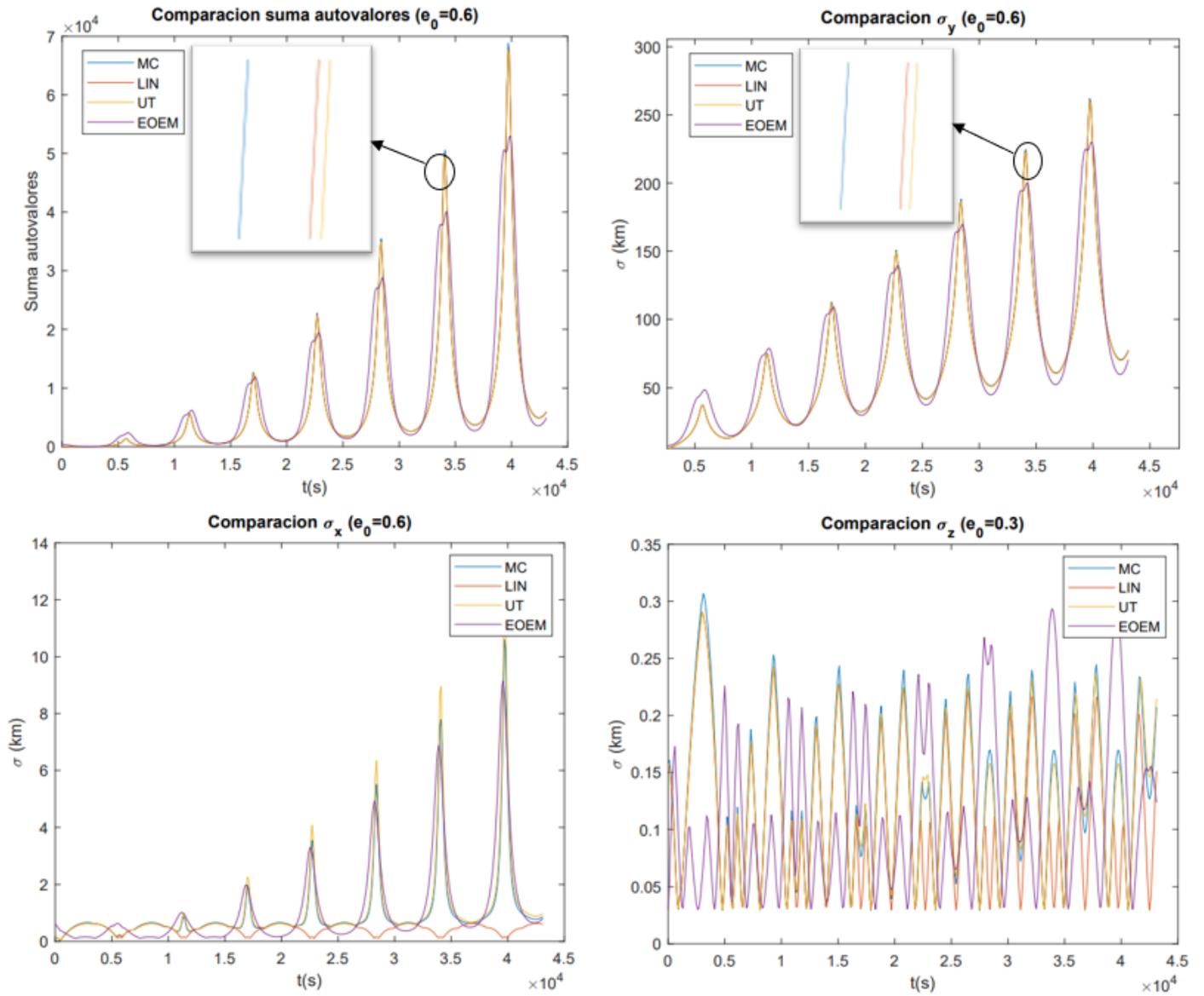


Figura 8.3 Comparación de suma de autovalores y σ con los distintos métodos estudiados ($e_0=0.6$).

9 Efecto de las perturbaciones

En este capítulo se va a profundizar un poco más en las perturbaciones del J_2 y de la resistencia aerodinámica cuyos principios y expresiones se avanzaron ya en el Capítulo 2. La elección de estas dos perturbaciones no es aleatoria, sino que estas resultan ser las perturbaciones más importantes para nuestras órbitas de estudio, las órbitas LEO (Figura 2.12). Concretamente ahora, nos centraremos no tanto en la perturbación en sí sino en los efectos que tienen en la propia órbita y sus elementos orbitales, así como en la evolución de la incertidumbre.

9.1 Efecto de las perturbaciones en la órbita

9.1.1 Efecto del J_2

En este apartado se va a proceder a analizar el efecto del achatamiento terrestre, en concreto, el del armónico J_2 . La razón de la elección de este armónico quedó ya justificada en el Punto 2.3, y es que este es el armónico de mayor orden de magnitud.

Los efectos que provoca el J_2 en la órbita, es decir, en sus elementos orbitales es el de las variaciones de tres de los seis elementos orbitales: en Ω , en ω y en M . Las tasas medias de las variaciones de estos ángulos se pueden obtener a través de las expresiones extraídas de [11]:

$$\frac{d\Omega}{dt} = - \left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T^2}{(1-e^2)^2 a^{7/2}} \right) \cos(i) \quad (9.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T^2}{(1-e^2)^2 a^{7/2}} \right) \left(\frac{5}{2} \sin^2(i) - 2 \right) \quad (9.2)$$

$$\frac{dM}{dt} = \left(\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T^2}{(1-e^2)^{3/2} a^{7/2}} \right) (2 - 3 \sin^2(i)) \quad (9.3)$$

donde R_T y μ son el radio y el parámetro gravitacional del planeta respectivamente, a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la órbita e i es la inclinación.

Consecuencias en la órbita

- **Regresión/avance de los nodos:**

Cuando la órbita es directa ($i \in [0^\circ, 90^\circ)$) entonces $\dot{\Omega} < 0$ lo que indica que la ascensión recta del nodo ascendente irá decreciendo continuamente. A este retroceso del nodo se le conoce como *Regresión de los nodos*.

En cambio si la órbita es retrógrada ($i \in [90^\circ, 180^\circ)$) entonces $\dot{\Omega} > 0$ por lo que la línea de nodos avanzaría hacia el Este ganando ascensión recta. Para órbitas polares ($i = 90^\circ$) la línea nodal se mantendrá fija.

- **Retroceso/avance del perigeo:**

En la ecuación (9.2) podemos ver que la variación del argumento del perigeo se anula para determinados valores de la inclinación:

$$\dot{\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \sin^2(i) - 2 = 0 \rightarrow \sin(i) = \sqrt{\frac{4}{5}} \rightarrow i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = \begin{cases} 63.4^\circ \\ 116.4^\circ \end{cases} \quad (9.4)$$

Por lo tanto $\dot{\omega} > 0$, cuando $i \in [0^\circ, 63.4^\circ)$ o $i \in (116.6^\circ, 180^\circ]$, indica que el perigeo avanza en la dirección del movimiento, fenómeno conocido como *Avance del perigeo*. El efecto contrario, *Retroceso del perigeo*, se presenta cuando $\dot{\omega} < 0$, es decir cuando $i \in (63.4^\circ, 116.6^\circ)$. Notemos que hay dos inclinaciones críticas en las que la línea de ápsides no gira: $i = 63.4^\circ$ e $i = 116.6^\circ$.

Resultados numéricos

Llegados a este punto tenemos que aclarar que la implementación computacional del efecto del J_2 en la órbita no se hará siguiendo las expresiones (9.1), (9.2) y (9.3) sino que directamente se resolverán numéricamente las ecuaciones del problema de los dos cuerpos añadiendo el efecto del J_2 en ellas. Esto es debido a que dichas expresiones solo son válidas para elementos medios y nosotros trabajaremos con elementos orbitales osculantes¹. Así, las ecuaciones del movimiento en cartesianas quedan:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_{pert}^{J_2} \quad (9.5)$$

con

$$\vec{a}_{pert}^{J_2} = \begin{bmatrix} \frac{\mu x}{r^3} \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) \right] \\ \frac{\mu y}{r^3} \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) \right] \\ \frac{\mu z}{r^3} \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 3 \right) \right] \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

donde J_2 es 0.00108248, valor extraído de [11] y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Expresiones del efecto del J_2 en cartesianas extraídas de [1].

Con la ecuación (9.5) ya completa con el efecto del J_2 se procede a analizar su efecto en nuestra órbita de referencia que recordemos viene dada por sus elementos orbitales iniciales en la Tabla 4.1.

Así, los resultados obtenidos son los que se muestran en las Figuras 9.1, 9.2 y 9.3. En las Figuras 9.2 y 9.3 se muestra por un lado el efecto mencionado en el Punto 9.1.1, el efecto secular decreciente de Ω por ser una órbita directa y a su vez un efecto periódico de corto periodo. Por otro lado, en el caso de ω se muestra un comportamiento secular creciente debido a que la inclinación de la órbita es menor que la crítica de 63.4° y también la componente periódica de corto periodo. El hecho de que el efecto sea tanto secular como periódico está en concordancia con lo mostrado en la Figura 2.11.

En la Figura 9.1 sin embargo, se muestra de una manera más visual el efecto que tiene estos cambios en los elementos orbitales en la propia órbita, observando un efecto oscilante en ella.

¹ Elementos correspondientes a la órbita definida por el vector posición y velocidad en un determinado instante de tiempo.

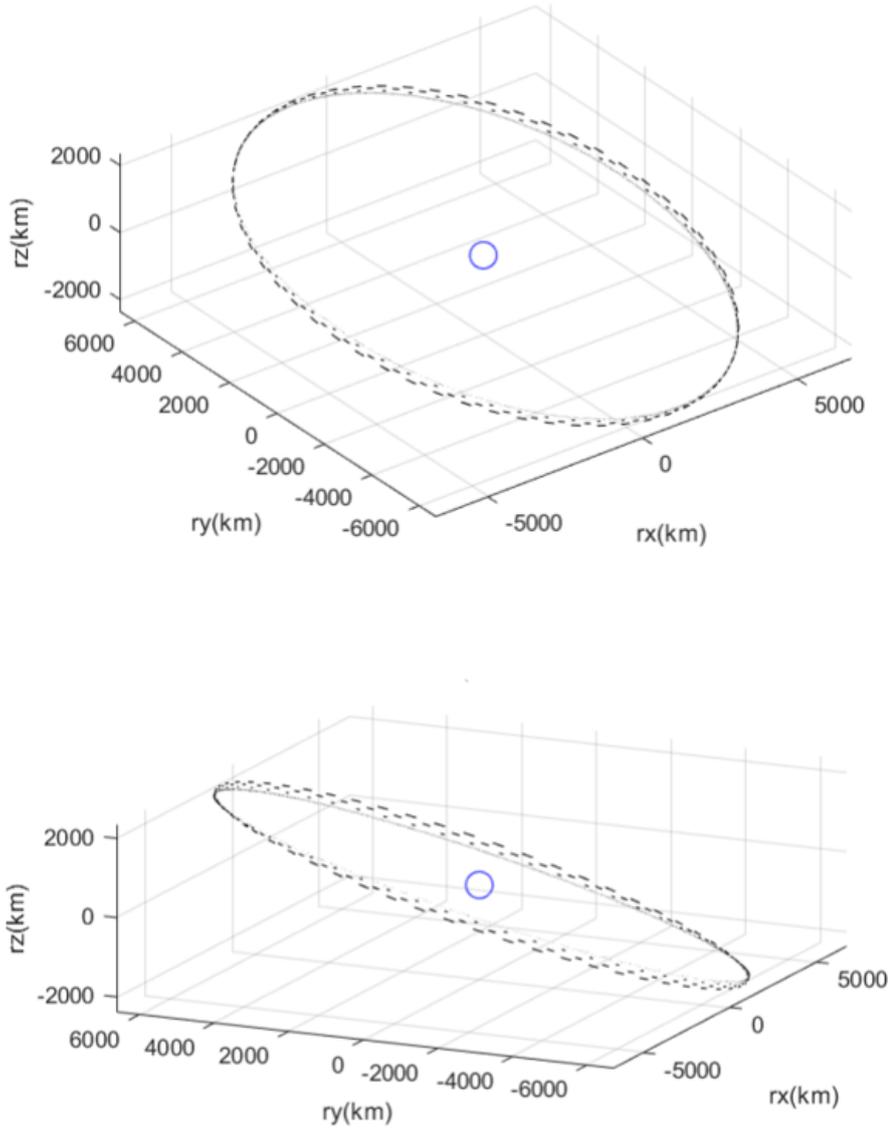


Figura 9.1 Efecto del J_2 en la órbita de referencia.

9.1.2 Efecto de la resistencia aerodinámica

Con respecto a la resistencia aerodinámica, las variaciones que provoca en los elementos orbitales corresponden con su efecto de circularizar la órbita. Esto es, la disminución de la excentricidad y del semieje mayor. Efectos explicados ya en el Punto 2.3.3.

Resultados numéricos

Para la implementación del efecto de la resistencia aerodinámica, al igual que se hizo con el J_2 , se va a resolver numéricamente las ecuaciones de los dos cuerpos en cartesianas introduciendo en ellas los términos de la resistencia aerodinámica quedando:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_{pert}^{Drag} \tag{9.7}$$

con

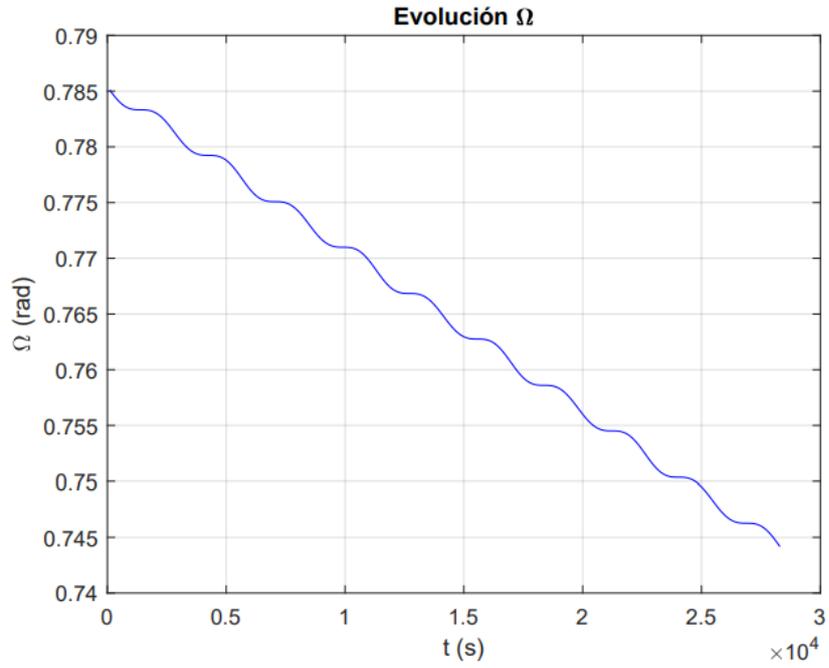


Figura 9.2 Evolución de Ω con el tiempo.

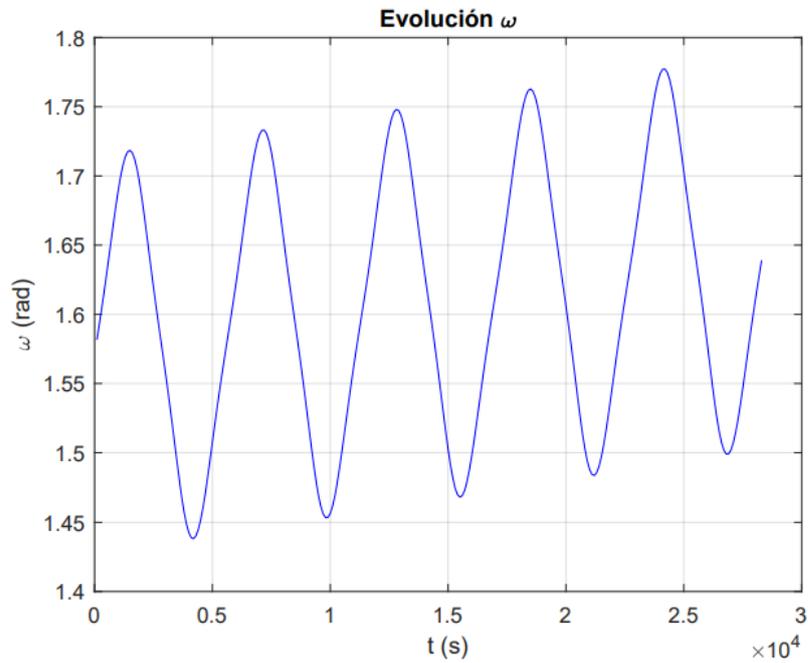


Figura 9.3 Evolución de ω con el tiempo.

$$\vec{a}_{pert}^{Drag} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{1}{C_b} \rho v_r (v_x + \omega_{\oplus} y) \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{C_b} \rho v_r (v_y + \omega_{\oplus} x) \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{C_b} \rho v_r v_z \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

donde ω_{\oplus} es la velocidad angular de la Tierra, C_b el coeficiente balístico que escogeremos como

$6.69 \cdot 10^{-8}$ por semejanza con otros satélites LEO, v_x, v_y, v_z las componentes de la velocidad, v_r el módulo de la velocidad relativa, definida esta como:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{atm} \tag{9.9}$$

con

$$\vec{v}_{atm} = \omega_{\oplus} \times \vec{r} \tag{9.10}$$

Mientras que ρ es la densidad, calculada esta a través de un modelo exponencial como el siguiente:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h_{ellp} - h_0}{H}\right) \tag{9.11}$$

donde h_{ellp} es la altura del satélite y ρ_0, h_0 y H son tres parámetros tabulados en función de h_{ellp} como se muestra en la Figura 9.4. Tabla extraída íntegramente de [12].

Altitude h_{ellp} (km)	Base Altitude h_0 (km)	Nominal Density ρ_0 (kg/m ³)	Scale Height H (km)	Altitude h_{ellp} (km)	Base Altitude h_0 (km)	Nominal Density ρ_0 (kg/m ³)	Scale Height H (km)
0–25	0	1.225	7.249	150–180	150	2.070×10^{-9}	22.523
25–30	25	3.899×10^{-2}	6.349	180–200	180	5.464×10^{-10}	29.740
30–40	30	1.774×10^{-2}	6.682	200–250	200	2.789×10^{-10}	37.105
40–50	40	3.972×10^{-3}	7.554	250–300	250	7.248×10^{-11}	45.546
50–60	50	1.057×10^{-3}	8.382	300–350	300	2.418×10^{-11}	53.628
60–70	60	3.206×10^{-4}	7.714	350–400	350	9.518×10^{-12}	53.298
70–80	70	8.770×10^{-5}	6.549	400–450	400	3.725×10^{-12}	58.515
80–90	80	1.905×10^{-5}	5.799	450–500	450	1.585×10^{-12}	60.828
90–100	90	3.396×10^{-6}	5.382	500–600	500	6.967×10^{-13}	63.822
100–110	100	5.297×10^{-7}	5.877	600–700	600	1.454×10^{-13}	71.835
110–120	110	9.661×10^{-8}	7.263	700–800	700	3.614×10^{-14}	88.667
120–130	120	2.438×10^{-8}	9.473	800–900	800	1.170×10^{-14}	124.64
130–140	130	8.484×10^{-9}	12.636	900–1000	900	5.245×10^{-15}	181.05
140–150	140	3.845×10^{-9}	16.149	1000–	1000	3.019×10^{-15}	268.00

Figura 9.4 Tabla para la obtención de los parámetros del modelo exponencial de densidad [12].

Ahora, con las ecuaciones del movimiento ya perfectamente completas y definidas se procede a analizar su efecto en nuestra órbita de referencia que, al igual que en 9.1.1, queda definida por sus elementos orbitales iniciales en la Tabla 4.1.

Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 9.5, 9.6 y 9.7. En las Figuras 9.6 y 9.7 se muestra la evolución de la excentricidad y del semieje mayor que como avanzamos son ambos decrecientes. Tanto el semieje mayor como la excentricidad tienen por un lado una componente secular decreciente y por otro lado una componente de corto periodo. Efectos en concordancia de nuevo con lo mostrado en la Figura 2.11.

En cuanto a la Figura 9.5 se muestra de una manera más visual el efecto de la resistencia aerodinámica, la circularización de la órbita.

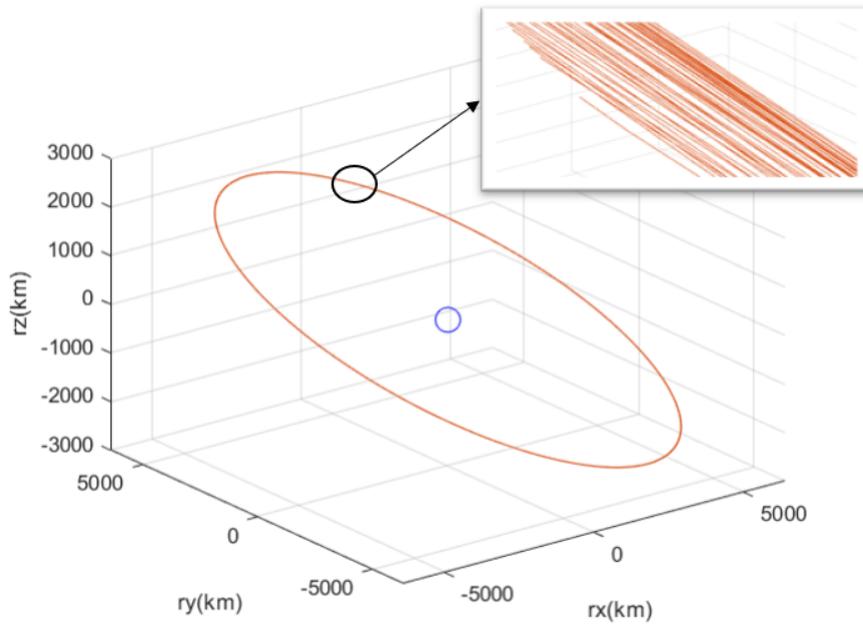


Figura 9.5 Efecto de la resistencia aerodinámica en la órbita de referencia.

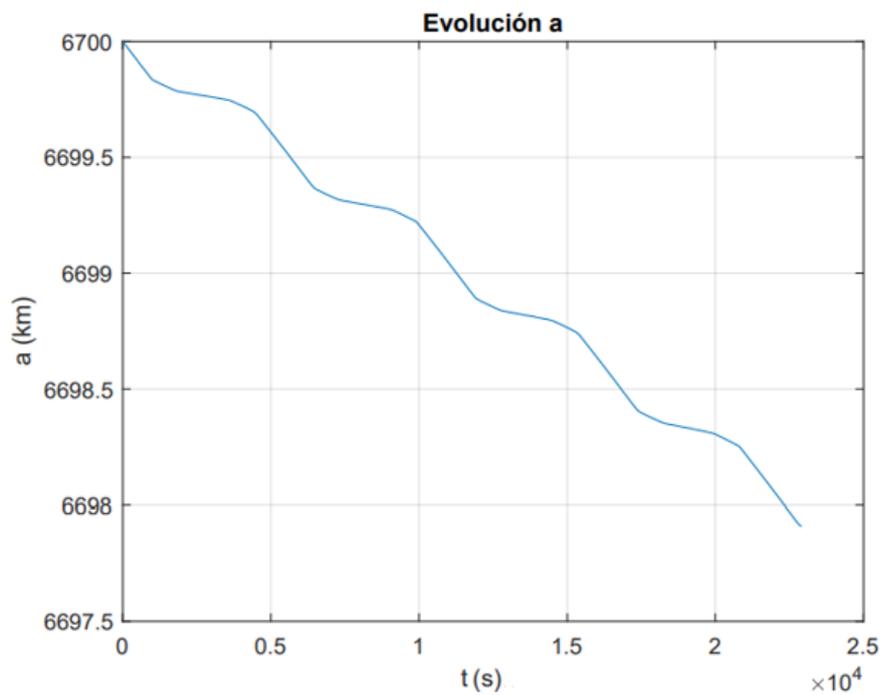


Figura 9.6 Evolución de a con el tiempo.

9.2 Efecto de las perturbaciones en la incertidumbre

En este apartado vamos a proceder a analizar cual es el efecto de las perturbaciones, tanto del J_2 como de la resistencia aerodinámica, en la evolución de la incertidumbre en la órbita. Hasta ahora, hemos analizado por varios métodos dicha evolución pero no hemos tenido en cuenta perturbaciones

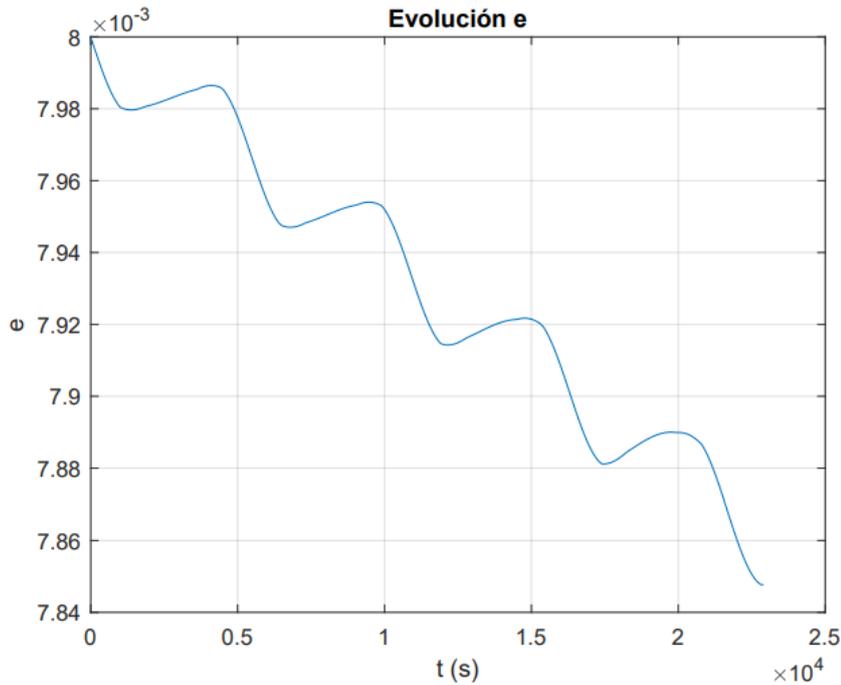


Figura 9.7 Evolución de e con el tiempo.

de ningún tipo.

Para este análisis, en vista de los resultados obtenidos en el Capítulo 8, se va a utilizar el método Montecarlo y la UT para la propagación de la incertidumbre. Esto es debido a que la UT es el método más interesante para su uso, mientras que el Montecarlo lo usaremos como reflejo de la realidad.

9.2.1 Efecto del J_2

Para estudiar el efecto que tiene la perturbación del J_2 en la evolución de la incertidumbre con Montecarlo o con la UT, simplemente hay que introducir en las ecuaciones del movimiento las expresiones en cartesianas de la aceleración producida por el efecto del J_2 . Expresiones que encontramos en (9.6).

De nuevo se utilizará como referencia la órbita de la Tabla 4.1 y la media y matriz de covarianza inicial del Capítulo 2. Así, haciendo uso de ambos métodos obtenemos los resultados de la Figura 9.9.

En esta figura, como ya avanzamos en el Punto 9.2, se ha tomado como “realidad” los resultados obtenidos en el método Montecarlo pues, como se explicó en el Capítulo 8, es este método el que más fiel refleja la realidad a resolver directamente las ecuaciones del movimiento para una nube de puntos inicial. Considerando esto, se observa como al principio el efecto es despreciable, pero con el paso del tiempo el Montecarlo captura un aumento de la incertidumbre, mientras que la UT no captura tan bien este efecto debido a que no deja de ser una aproximación a través de los *sigma points*.

La razón de este aumento en la incertidumbre es debido al efecto que produce el J_2 en la órbita, generando cambios en la forma y la orientación. Esto, como vimos en los análisis de sensibilidad realizados para todos los métodos, provocará cambios en la evolución de la incertidumbre de las órbitas, en este caso el aumento de ella.

9.2.2 Efecto de la resistencia aerodinámica

Para el análisis de la resistencia aerodinámica en la evolución de la incertidumbre en la órbita se procede de manera similar que para el caso del J_2 . Esto es, se procede a añadir, como se explicó en el Punto 9.1.2, las expresiones en cartesianas de la aceleración producida por la perturbación de la resistencia aerodinámica a las ecuaciones del movimiento.

Para el análisis, se utiliza una órbita de referencia con los mismos elementos orbitales iniciales que los de la Tabla 4.1 exceptuando la excentricidad que elegiremos de 0.008 y un semieje mayor de 6600 km. Esta elección no es arbitraria, sino que se elige una altura de órbita muy baja, en torno a 200 km, para que el efecto de esta perturbación sea mayor. Así como una excentricidad que hace prácticamente circular a la órbita para que el efecto se pueda observar también durante más tiempo.

Con la órbita ya definida y las ecuaciones del movimiento completas con el término de la resistencia aerodinámica, se procede a realizar el análisis con ambos métodos obteniendo los resultados de la Figura 9.10.

En esta figura se muestra como la resistencia provoca ahora una disminución de la incertidumbre, con un efecto mucho mayor al que tenía el J_2 . Esto es debido a esta altura tan baja elegida de la órbita. Así pues, la diferencia entre Montecarlo y la UT sigue siendo que la UT al ser una aproximación no captura del todo bien este efecto, pero se ve también ese comportamiento decreciente de la incertidumbre.

La razón por la que disminuye la incertidumbre de nuevo está en concordancia con los análisis de sensibilidad realizados hasta ahora. Y es que al disminuir la excentricidad la incertidumbre baja más rápidamente que aumenta por la disminución del semieje mayor.

9.2.3 Análisis de sensibilidad

Para que quede más claro el efecto de la resistencia aerodinámica se va a hacer un estudio de sensibilidad donde se va a proceder a variar la altura de la órbita definida en el Punto 9.2.2.

En la Figura 9.8 se muestran los resultados para una $h=200$ km, 300 km y 400 km respectivamente. En esta figura se puede observar el efecto claro de disminución de la incertidumbre, tanto suma de autovalores como desviaciones típicas, con la altura. Este efecto es debido a que al aumentar la altura, el efecto de la resistencia aerodinámica es menor y por tanto no produce tantos cambios en posición ni velocidad, no hay tanta dispersión de la incertidumbre.

También se puede observar como al cabo de un tiempo, unas horas, el satélite a una altura de 200 km empezaría a caer, pues hay un crecimiento brusco de la suma de autovalores y desviaciones que lo indica.

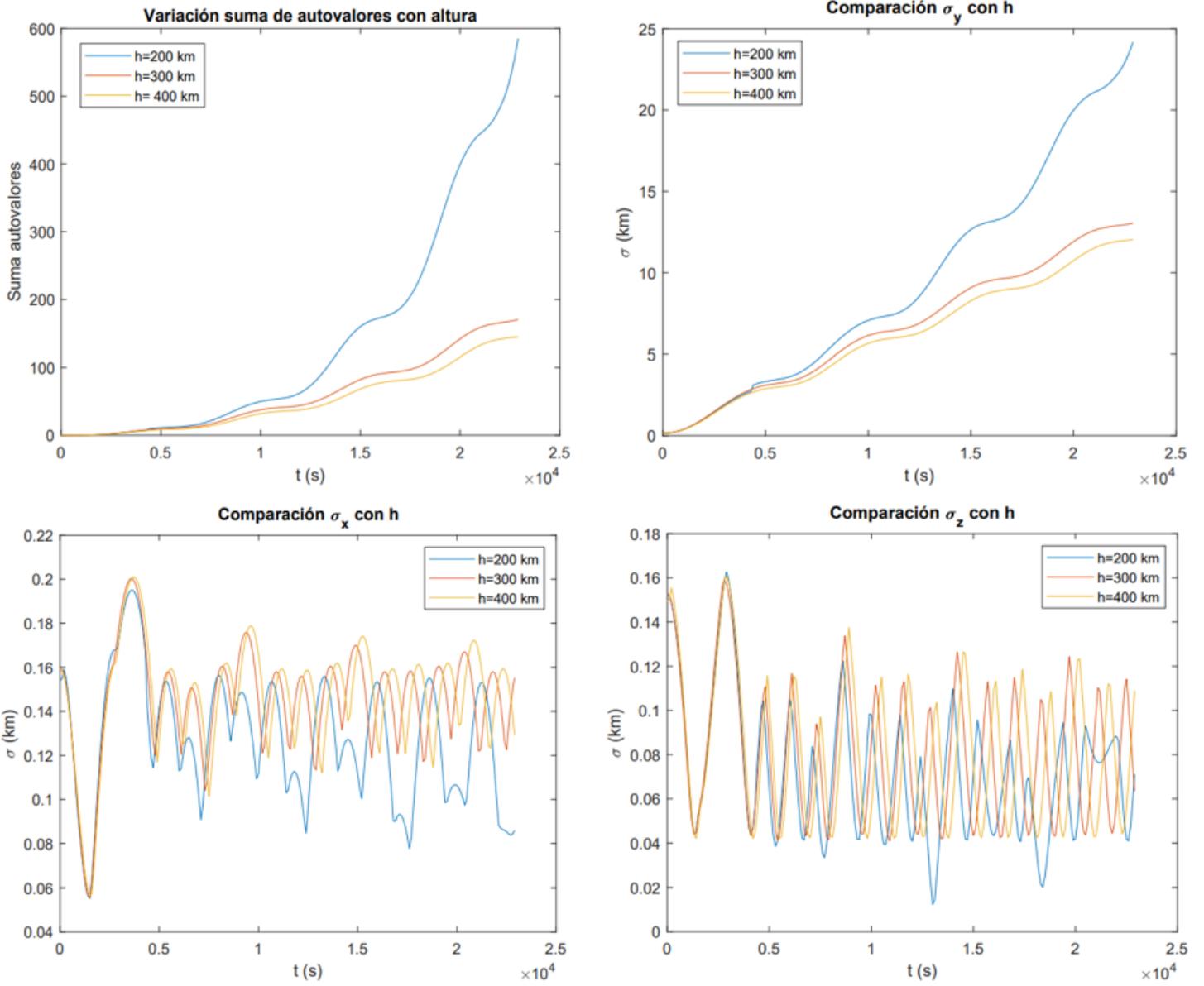


Figura 9.8 Efecto de la altura en σ y suma autovalores.

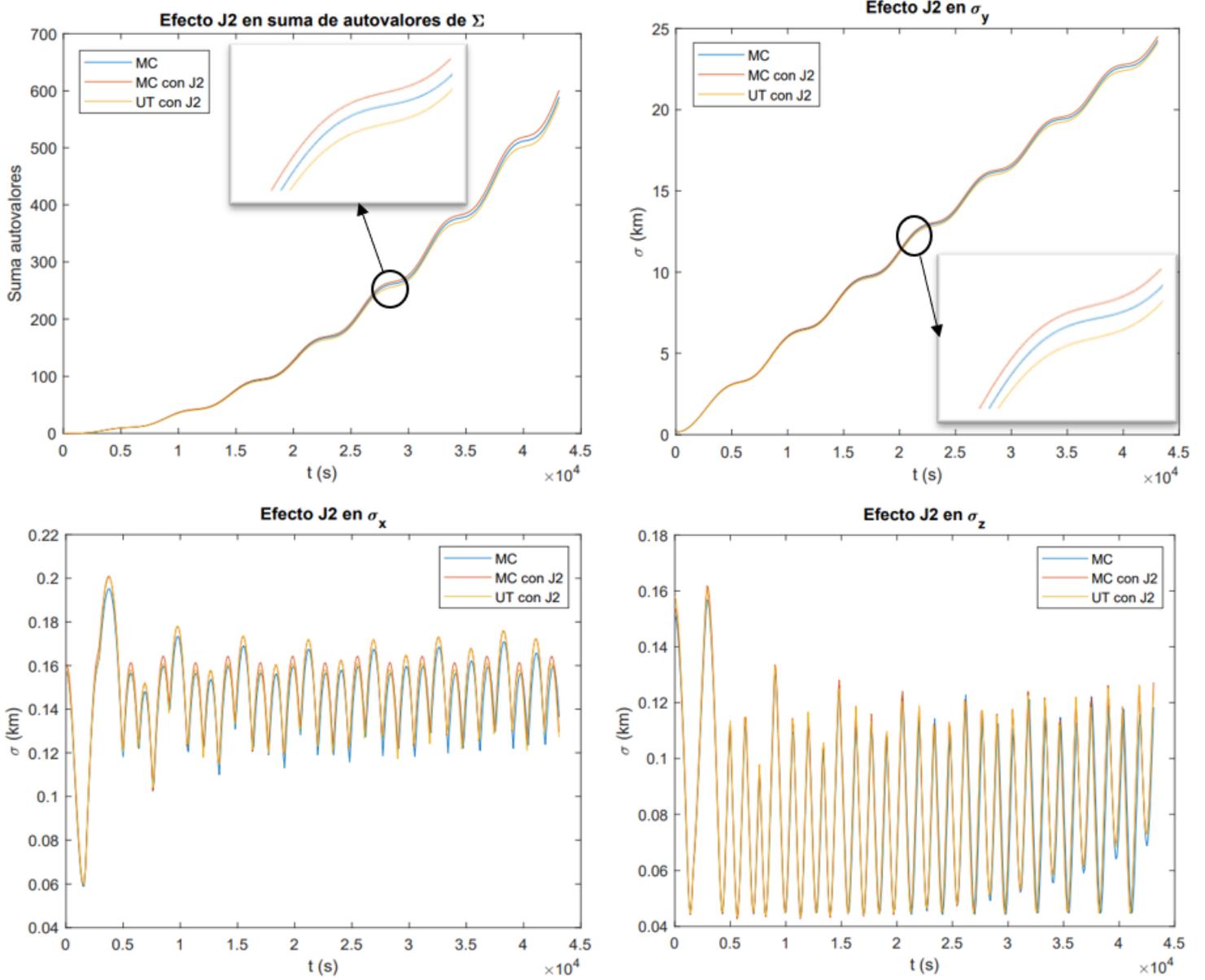


Figura 9.9 Efecto del J2 en σ y suma autovalores en MC y UT.

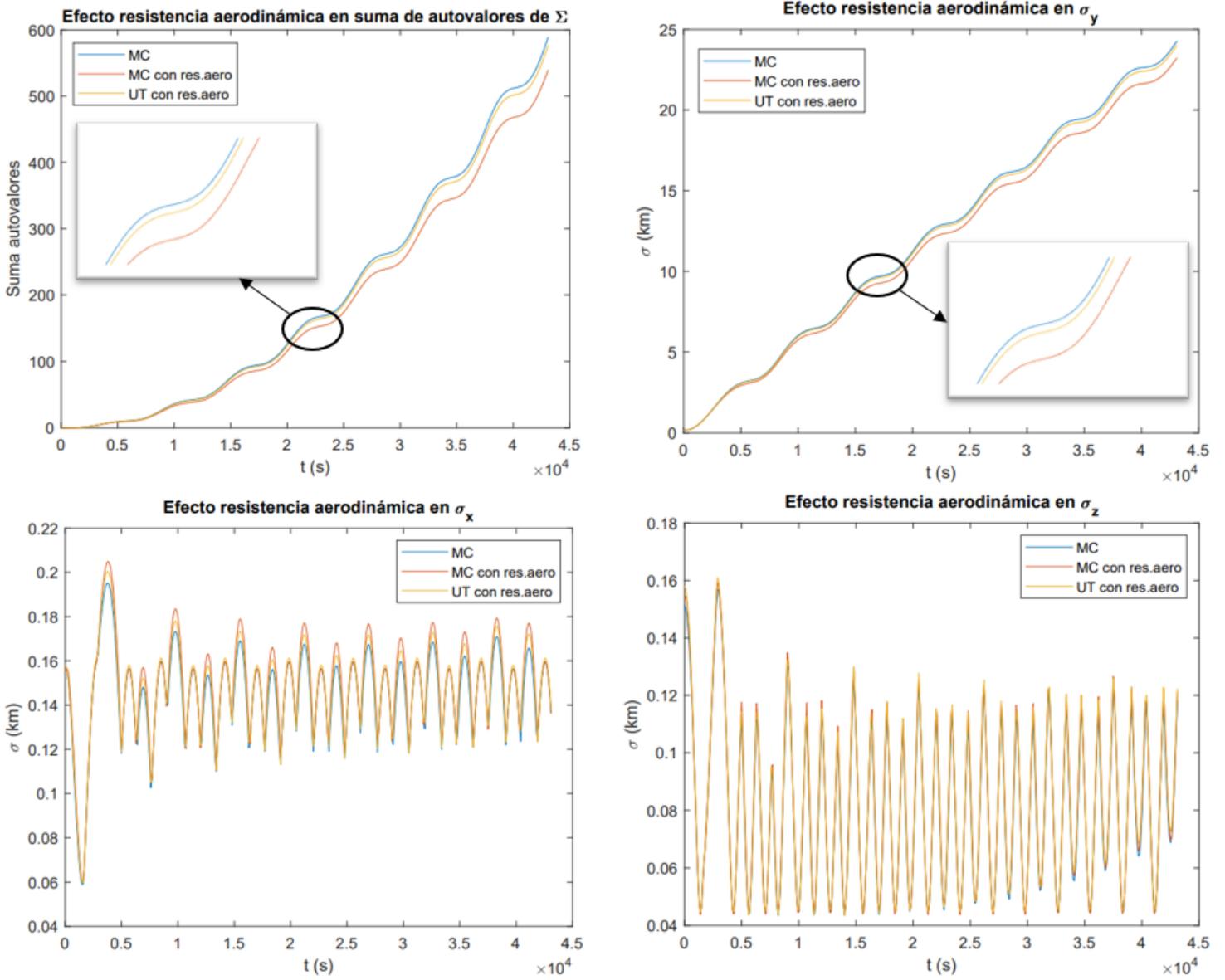


Figura 9.10 Efecto de la resistencia aerodinámica en σ y suma autovalores en MC y UT.

10 Conclusiones y líneas futuras de trabajo

Para finalizar el contenido de este proyecto se va a proceder a recopilar las conclusiones que se han ido extrayendo en la realización del mismo. Esto es, tanto de la parte de análisis de incertidumbre en órbitas y los métodos de estudio empleados, como del efecto de las perturbaciones. Además, se presentarán una serie de líneas futuras de trabajo interesantes si se quiere seguir profundizando en el tema de este proyecto.

10.1 Conclusiones sobre la evolución de la incertidumbre y los métodos empleados

Primero de todo, hay que recordar el trabajo realizado sobre el análisis de la evolución de la incertidumbre. Esto es, se procedió a analizar sobre una órbita concreta, Tabla 4.1, como evolucionaba la incertidumbre dadas unas condiciones iniciales. Además, se extrajeron resultados numéricos concretos, así como gráficas donde se mostraban la evolución de la suma de autovalores y de las desviaciones típicas de la matriz de covarianza. También, se relizaron análisis de sensibilidad para poder observar el efecto de la excentricidad, semieje mayor e inclinación en la incertidumbre. Todo ello realizado con cuatro métodos distintos: Montecarlo, Linelización, UT y Elementos Orbitales Equinocciales.

La primera conclusión que sacamos es el crecimiento de la incertidumbre con el paso del tiempo, magnificándose esta en la dirección OY local. Por un lado, el crecimiento de la incertidumbre es debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones del movimiento y por otro lado, el crecimiento en dirección OY local se concluyó que era debido a la variación del periodo orbital que producía un desfase entre los diferentes puntos de la nube.

En segundo lugar, se observó como, con el paso del tiempo, la distribución de puntos de la nube que inicialmente era gaussiana deja de serlo. Esta se empieza a curvar por los extremos haciendo que un elipsoide deje de ser útil para la captación de la incertidumbre.

Por otro lado, en cuanto al análisis de sensibilidad se observó como el elemento orbital de mayor efecto en la incertidumbre es la excentricidad seguido del semieje mayor y por último de la inclinación que apenas producía cambios. El crecimiento de la excentricidad hacía que la velocidad de paso aumentase por lo cual aumentaba la dispersión de la incertidumbre. El crecimiento del semieje mayor por el contrario hacía que disminuyese el crecimiento de la incertidumbre pues, aumentaba el tamaño de la órbita consiguiendo menores variaciones de la velocidad de paso. En cuanto a la inclinación esta no suponía ningún cambio en la velocidad de paso por lo que su efecto en la incertidumbre es prácticamente despreciable.

Por último, en cuanto a la comparación de métodos, el método Montecarlo no sería una opción para su utilización puesto que, aunque para este caso simplificado del problema el tiempo sea asumible, cuando tengamos problemas y perturbaciones más realistas esto sería completamente inviable en términos de coste computacional. Sin embargo, este método se ha utilizado como comparativa para los demás pues, al resolver directamente las ecuaciones, es el que mejor refleja la realidad. El método de Linealización sería adecuado para pequeños intervalos de tiempo sin embargo, cuando propaguemos durante más tiempo, como se ha observado en los resultados del Capítulo 8, este deja de captar la incertidumbre debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones del movimiento. La UT resultaría ser el mejor método de todos, pues es el que más se aproxima al Montecarlo con un coste computacional asumible. En cuanto al método de los *EOEM*, resulta ser el que peores resultados obtiene, debido a esta forma de propagación inherente del método que hace que la incertidumbre crezca principalmente solo en una de las seis coordenadas mientras que las otras cinco permanecen constantes.

Todo lo explicado aquí ha sido una breve recopilación del trabajo extraído de los anteriores capítulos donde se explica en más detalle lo mencionado en este punto.

10.2 Conclusiones sobre el efecto de las perturbaciones

En cuanto a las perturbaciones se han analizado el efecto del J_2 y de la resistencia aerodinámica, pues, viendo las Figuras 2.11 y 2.12, se concluyó que serían las más importantes que puede ver un cuerpo orbitando la Tierra en órbita LEO.

Lo primero que se analizó en el Capítulo 9 fue el impacto de dichas perturbaciones en la propia órbita. Con lo que se demostró que el J_2 provocaba una oscilación en ella, con una disminución periódica de Ω debido a que la órbita de estudio era directa y un crecimiento también periódico de ω al tener la órbita una inclinación menor que la crítica. En cuanto a la resistencia aerodinámica, se comprobó que, efectivamente, como se dijo en el Capítulo 2, el efecto es el de circularizar la órbita, disminuyendo tanto su semieje mayor como la excentricidad.

Finalmente, se analizó el efecto que tenían estas perturbaciones pero ahora en la evolución de la incertidumbre. Así pues, se observó como con el J_2 había un crecimiento de ella mientras que con la resistencia aerodinámica disminuía. Efectos, por otro lado, que se iban magnificando con el paso del tiempo, teniendo la resistencia aerodinámica mayor impacto que el J_2 en la incertidumbre debido a que se estudió para una órbita con una altura de apenas 200 km.

10.3 Líneas futuras de trabajo

Para finalizar, resultaría apropiado a la par que interesante, mencionar algunas líneas de trabajo con las que se podría profundizar aún más y mejorar el conocimiento sobre los temas que trata el proyecto.

Así, algunas propuestas interesantes sería:

- Estudio de la evolución de la incertidumbre con otros métodos: Álgebra diferencial, Expansión del Caos Polinomial (PCE), etc.
- Efecto que tendría en la resistencia aerodinámica que la densidad no fuese una exponencial tabulada si no una distribución normal de probabilidad. Pues, en la realidad la densidad para una misma altura variaría por múltiples efectos que se producen en la misma atmósfera. Además, resultaría interesante también observar el efecto que tendría esto en la vida útil del satélite.
- Análisis para diferentes tipos de órbitas (LEOs, MEOs, GEOs,...).

- Análisis de la evolución de la incertidumbre para satélites que se encuentren orbitando diferentes planetas.
- Uso de un método completo de perturbaciones. Incluir, aunque no sean las principales para LEO, todas las perturbaciones: Presión de radiación solar, presencia de un tercer cuerpo (Luna, Sol, ...), etc.
- Determinar envolvente de errores en el método Montecarlo con el problema de la incertidumbre en órbitas para así optimizar el tamaño muestral.

Índice de Figuras

2.1	Sistema Heliocéntrico	6
2.2	Sistema Geocéntrico Eclíptico	7
2.3	Sistema Geocéntrico Ecuatorial [11]	7
2.4	Sistema Geográfico [11]	8
2.5	Sistema Topocéntrico [11]	8
2.6	Representación del problema de los dos cuerpos [11]	10
2.7	Elementos orbitales de una órbita	12
2.8	Objeto orbitando a la Tierra con el efecto de la Luna [11]	13
2.9	Representación de los distintos tipos de armónicos [8]	15
2.10	Efecto de la resistencia aerodinámica [11]	16
2.11	Clasificación de los efectos de las perturbaciones [11]	18
2.12	Efecto de perturbaciones en órbita baja [11]	18
2.13	Efecto de perturbaciones en órbita elevada [11]	19
3.1	Representación de la función de probabilidad [9]	22
3.2	Representación de la función de densidad de probabilidad (PDF) [9]	22
3.3	Representación de la <i>PDF</i> para el caso bidimensional [7]	24
3.4	Representación de distribución normal en 1D [7]	26
3.5	Representación del elipsoide de confianza [7]	26
4.1	Diagrama del algoritmo	30
4.2	Reducción de la envolvente de error con el tamaño de la muestra	32
4.3	Elipsoides de confianza en una revolución (MC)	33
4.4	Representación de ejes locales	34
4.5	Comparación desviaciones típicas (MC)	34
4.6	Suma de autovalores (MC)	35
4.7	Elipsoide de confianza versus nube de puntos propagada tras un par de días	35
4.8	Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (MC)	38
4.9	Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (MC)	39
4.10	Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (MC)	40
5.1	Elipsoides de confianza en una revolución (LIN)	43
5.2	Comparación desviaciones típicas (LIN)	44
5.3	Suma de autovalores (LIN)	44
5.4	Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (LIN)	46
5.5	Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (LIN)	47
5.6	Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (LIN)	48

6.1	Elipsoides de confianza en una revolución (UT)	51
6.2	Comparación desviaciones típicas (UT)	51
6.3	Suma de autovalores (UT)	52
6.4	Variación de σ y suma de autovalores con κ	54
6.5	Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (UT)	55
6.6	Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (UT)	56
6.7	Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (UT)	57
7.1	Elipsoides de confianza en una revolución (EOEM)	61
7.2	Comparación desviaciones típicas (EOEM)	62
7.3	Suma de autovalores (EOEM)	62
7.4	Variación de σ y suma de autovalores con e_0 (EOEM)	64
7.5	Variación de σ y suma de autovalores con a_0 (EOEM)	65
7.6	Variación de σ y suma de autovalores con i_0 (EOEM)	66
8.1	Comparación de suma de autovalores y σ con los distintos métodos estudiados	70
8.2	Comparación de suma de autovalores y σ con los distintos métodos estudiados ($e_0=0.3$)	72
8.3	Comparación de suma de autovalores y σ con los distintos métodos estudiados ($e_0=0.6$)	73
9.1	Efecto del J_2 en la órbita de referencia	77
9.2	Evolución de Ω con el tiempo	78
9.3	Evolución de ω con el tiempo	78
9.4	Tabla para la obtención de los parámetros del modelo exponencial de densidad [12]	79
9.5	Efecto de la resistencia aerodinámica en la órbita de referencia	80
9.6	Evolución de a con el tiempo	80
9.7	Evolución de e con el tiempo	81
9.8	Efecto de la altura en σ y suma autovalores	83
9.9	Efecto del J_2 en σ y suma autovalores en MC y UT	84
9.10	Efecto de la resistencia aerodinámica en σ y suma autovalores en MC y UT	85

Índice de Tablas

4.1	Elementos orbitales iniciales	33
4.2	Variación en excentricidad (MC)	36
4.3	Variación en semieje mayor (MC)	36
4.4	Variación en inclinación (MC)	37
4.5	Resultados test de normalidad	37
5.1	Variación en excentricidad (LIN)	45
5.2	Variación en semieje mayor (LIN)	45
5.3	Variación en inclinación (LIN)	46
6.1	Variación en excentricidad (UT)	52
6.2	Variación en semieje mayor (UT)	53
6.3	Variación en inclinación (UT)	53
7.1	Variación en excentricidad (EOEM)	63
7.2	Variación en semieje mayor (EOEM)	63
7.3	Variación en inclinación (EOEM)	63
8.1	Elementos orbitales iniciales	69
8.2	Evolución de la incertidumbre en 20000s con tres métodos	69
8.3	Evolución de la incertidumbre en 7 días con tres métodos	69
8.4	Evolución de la incertidumbre en 30 días con tres métodos	69

Bibliografía

- [1] Paloma Belén Mangas Carbajo, *Desarrollo de un simulador de vuelo orbital. estudio de perturbaciones*, Trabajo fin de carrera, Departamento de Bioingeniería e Ingeniería Aeroespacial. Universidad Carlos III de Madrid, 2013.
- [2] Donald Ebeigbe, Tyrus Berry, Michael M. Norton, Andrew J. Whalen, Dan Simon, Timothy Sauer, and Steven J. Schiff, *A generalized unscented transformation for probability distributions*, ArXiv (2021).
- [3] United Nations Office for Outer Space Affairs, *Number of satellites in low earth orbits*, extraído el 25-06-2023 de <http://www.unoosa.org/oosa/en/ourwork/topics/space-debris/index.html>.
- [4] Juan Luis Gonzalo Gómez, *Propagation and Optimal Control of Space Trajectories Using Perturbation Methods*, Ph.D. thesis, Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aero-náutica y Naval. Universidad Politécnica de Madrid, 2017.
- [5] Nathan D. Aragon Joshua T. Horwood and Aubrey B. Poore, *Gaussian sum filters for space surveillance: Theory and simulations*, Journal of guidance, control, and dynamics **34** (2011), no. 6.
- [6] Jan Krejčí, *Uncertainty Propagation for Tracking of Moving Objects*, Ph.D. thesis, Universidad de Bohemia del Oeste, 2018.
- [7] Pierluigi Di Lizia, *Uncertainty estimation and propagation with space applications [sesión de conferencia]*, Politécnico de Milán, (2021).
- [8] Matt Miller, *Geofísica de la tierra sólida*, Apuntes de clase (Universidad de Concepción), extraídos de https://www.mttmlr.com/geoTS_files/GTS_S07.pdf.
- [9] Ester Gutierrez Moya, *Estadística e investigación operativa*, Apuntes de clase (ETSI Sevilla).
- [10] Manuel Ruiz Pérez, *Uncertainty propagation in low earth orbits*, Trabajo fin de grado, Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. ETSI Sevilla, 2019.
- [11] Rafael Vázquez Valenzuela, *Mecánica orbital y vehículos espaciales*, Apuntes de clase (ETSI Sevilla).
- [12] David A. Vallado, *Fundamentals of astrodynamics and applications*, 4 ed., Springer, 2001.
- [13] Ming Zhou and Yongzhao Shao, *A powerful test for multivariate normality*, Journal of Applied Statistics **41** (2014), no. 2, 351–363.

- [14] Manuel Ángel Zapata Habas, *Análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a incertidumbre en los datos*, Trabajo fin de grado, Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. ETSI Sevilla, 2015.