

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

### Evitación de zonas de interferencias aerodinámicas para UAVs usando Control Barrier Functions

Autor: Mercedes Barral Cabrera

Tutores: Antonio González Morgado

Guillermo Heredia Benot

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Evitación de zonas de interferencias aerodinámicas para UAVs usando Control Barrier Functions**

Autor:

Mercedes Barral Cabrera

Tutores:

Antonio González Morgado

Doctorando

Guillermo Heredia Benot

Catedrático de Universidad

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Grado: Evitación de zonas de interferencias aerodinámicas para UAVs usando  
Control Barrier Functions

Autor: Mercedes Barral Cabrera  
Tutores: Antonio González Morgado  
Guillermo Heredia Benot

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

**M**e gustaría agradecer la oportunidad de realizar este trabajo a Antonio González Morgado, su dedicación y completa disposición en la realización del mismo.

Asimismo, me gustaría agradecer a todo el personal docente y compañeros de aula que me han acompañado en esta y en anteriores etapas educativas y que han posibilitado el que hoy esté aquí.

Finalmente mi agradecimiento a la comunidad científica y técnica que trabaja día a día por el avance y la innovación, y que con sus contribuciones a libre disposición permiten el aprendizaje y el desarrollo de nuevas generaciones.

*Mercedes Barral Cabrera*  
*Estudiante de Grado en Ingeniería Aeroespacial*

*Sevilla, 2023*





# Resumen

---

**E**n este trabajo se estudia en profundidad la teoría Control Barrier Function, y como su inclusión en el sistema de control de un UAV puede capacitarlo para el seguimiento de trayectorias libre de obstáculos configuradas de forma correctiva y en pleno vuelo. Desde el análisis matemático y el estudio de modificaciones para obstáculos de diferentes geometrías, hasta el estudio de la sobredimensión de los estos debidos a efectos aerodinámicos, pasando por multitud de ejemplos y ensayos en vuelo, este trabajo presenta una guía inicial y completa de la evitación de zonas de interferencias aerodinámicas usando Control Barrier Functions.



# Abstract

---

In this thesis we study in depth the Control Barrier Function theory and how its inclusion in UAVs control systems can allow to follow free obstacles trajectories created in a corrective way and in plain flight. From the mathematical analysis and the study of modifications for different geometry obstacles, to the study of their oversize due to aerodynamic effects, going through multiple examples and flight tests, this work presents an initial and complete guide about avoiding aerodynamic interferences regions using Control Barrier Functions.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos	4
1.2 Estructura del documento	4
<b>2 Control Barrier Functions</b>	<b>5</b>
2.1 Sistema, variable de estado, variable de entrada y región a salvo	5
2.2 Definición de Control Barrier Function	7
2.3 Problema de optimización sujeto a restricciones CBF	8
2.4 Ejemplo 1: Sistema robótico móvil y obstáculo estático en el plano 2D	9
2.5 Ejemplo 2: Sistema robótico y obstáculos móviles en el plano 2D	11
2.6 Geometría en forma de polígono y resolución dual del problema de optimización	12
2.6.1 Problema de optimización para el cálculo de la mínima distancia entre dos polígonos	14
2.6.2 Problema de optimización para el cálculo de la variable de actuación factible	19
2.7 Ejemplo 3: Sistema robótico y obstáculo con forma de polígonos en el plano 2D	21
<b>3 Interferencias aerodinámicas</b>	<b>23</b>
3.1 Análisis de las interferencias aerodinámicas generadas por el vuelo cercano a objetos	23
3.1.1 Interferencia aerodinámica: Efecto suelo	23
3.1.2 Interferencia aerodinámica: Efecto techo	25
3.1.3 Interferencia aerodinámica: Efecto pared	25
3.1.4 Ejemplo adicional: Mapa de obstáculos	25
<b>4 Evitación de zonas con interferencias aerodinámicas</b>	<b>27</b>
4.1 Interpolación de puntos del espacio y obtención de una nueva frontera	27
4.2 Ejemplo 4: Sistema robótico móvil y mapa de obstáculos en el plano 2D	28
4.3 Ejemplo 5: Sistema robótico móvil y mapa de obstáculos de forma escalonada en el plano 2D	31
<b>5 Implementación de la teoría CBF en UAVs</b>	<b>35</b>
5.1 Proceso de implementación	35
5.2 Descripción de los experimentos	36
5.3 Experimento A: Evitación de obstáculo con restricción CBF sencilla	37
5.4 Simulación A: Evitación de obstáculo con restricción CBF sencilla y modelado del sistema	38
5.4.1 Disminución del valor de $\gamma$ para una mejor respuesta del sistema	41
5.5 Simulación B: Evitación de obstáculo con restricción compleja y modelado del sistema	42
5.5.1 Disminución del valor de $\gamma$ para una mejor respuesta del sistema con respuesta lenta	44
5.5.2 Disminución del valor de $\tau_p$ para la simulación del sistema con respuesta rápida	45
5.6 Experimento B: Evitación de obstáculo con restricción CBF compleja	46
5.6.1 Dinámica instantánea: Valor de $\gamma$ restrictivo	47

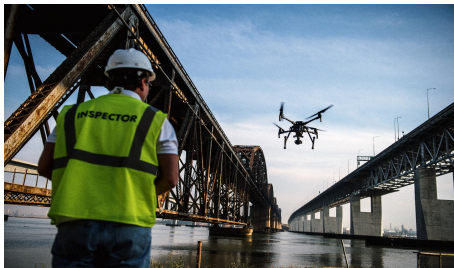
---

5.6.2	Dinámica instantánea: Valor de $\gamma$ no restrictivo	48
5.6.3	Dinámica compleja: Valor de $\gamma$ restrictivo	48
5.6.4	Conclusiones	49
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>Identificación del parámetro <math>\tau_p</math></b>	<b>53</b>
	<i>Índice de Figuras</i>	55
	<i>Bibliografía</i>	59

# 1 Introducción

---

En la actualidad, la investigación, innovación y desarrollo de la tecnología *Unmanned Aerial Vehicles* (UAVs) está en alza debido al gran número de posibles y futuras aplicaciones, que hacen que incrementen su atractivo en el sector industrial. El amplio abanico de utilidades que se encuentran abarca desde tareas pasivas de grabación, vigilancia, inspección visual, monitorización o teledetección, hasta tareas más activas de sujeción, reparación, inspección por contacto o interacción humano-robot, en la que el sistema robótico interactúa con su entorno. Estas últimas tareas se engloban dentro del campo conocido como *Aerial Manipulation*, que propone soluciones muy ventajosas en reducción de tiempo y coste operacional, y aumento de la seguridad del operario. Un ejemplo de uso podría ser la reparación o instalación de piezas a elevada altura y en situaciones de riesgo o el rescate de supervivientes en desastres naturales.



(a) Inspección de puente [1].



(b) Rescate de supervivientes [2].



(c) Transporte de carga y aterrizaje en plataforma [3].



(d) Recarga de combustible [4].

**Figura 1.1** Aplicaciones de *Aerial Manipulation*.

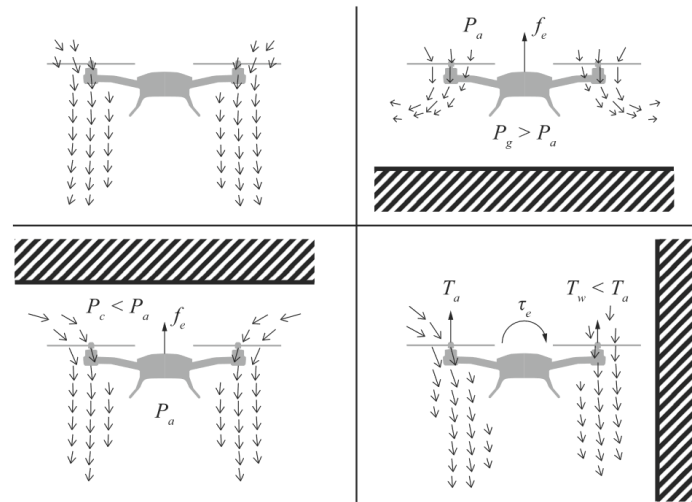
A pesar de todos los beneficios que se intuyen, hoy día esta tecnología no es generalizable para una aplicación industrial. La comunidad científica sigue trabajando en acortar la distancia y optimizar el funcionamiento de estos sistemas, centrandose en resolver el problema que surge al forzar el vuelo cerca de otros objetos. Entre otras cuestiones de estudio se encuentran [5]:

- La estabilidad del sistema sujeta a fuerzas y momentos generados en la interacción.
- Precisión en el posicionamiento y seguimiento de la ruta que posibiliten tareas como sujeción, inspección o reparación.

- Carga adicional necesaria para llevar los dispositivos de interacción.
- Tiempo de vuelo para el desplazamiento del sistema en grandes superficies.
- Planificación de rutas teniendo en cuenta las restricciones asociadas a la interacción.
- Efecto del viento en el vuelo cercano a objetos.
- Efectos aerodinámicos debido a la proximidad de superficies.

Este último problema aerodinámico consta de una cuestión propulsiva de generación de sustentación y control del vuelo, y una cuestión de interferencia aerodinámica con los obstáculos alrededor y las partes móviles de su propia estructura. Mientras la primera ha sido profundamente analizada en el estudio del vuelo de helicópteros con la dificultad adicional de tratar el flujo de aire alrededor de sí mismo, la segunda cuestión sigue aún a examen.

La presencia de obstáculos en el campo de vuelo de un UAV produce perturbaciones en su estela aerodinámica que llevan a modificar la actuación de los rotores y la generación de empuje, llegando a producir un comportamiento indeseado del sistema. Atendiendo a las aplicaciones futuras anteriormente descritas, se espera que el punto nominal de operación de estos dispositivos sea un entorno plagado de dichos obstáculos, y que la acción de manipulación se lleve a cabo especialmente cerca de ellos, por lo que **el modelado y control de este tipo de interferencias aerodinámicas será esencial** a la hora de proporcionar un servicio preciso y fiable, que no ponga en riesgo el éxito de la tarea ni las condiciones de seguridad de la operación.



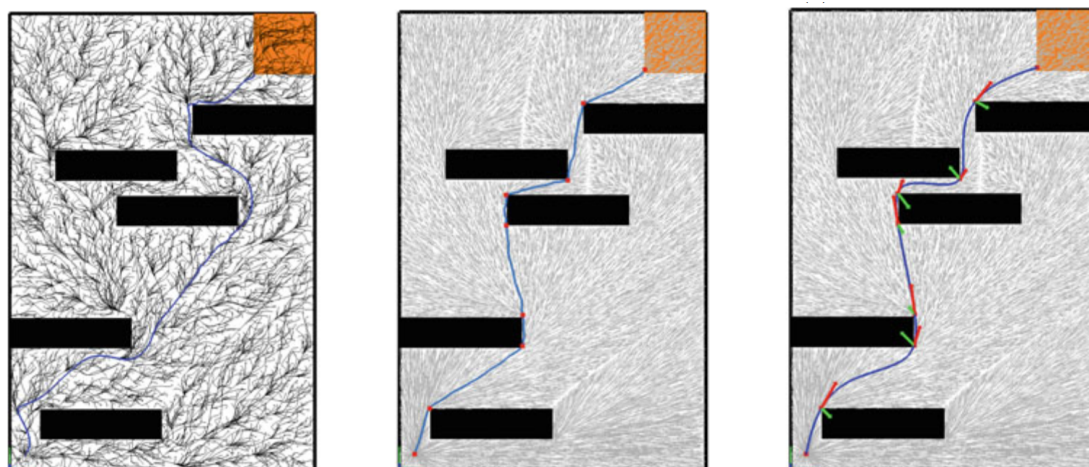
**Figura 1.2** Esquema cualitativo del campo fluido alejado de la superficie y bajo condiciones de efecto suelo, efecto techo y efecto pared, y las consecuencias dinámicas. La presión es denotada como  $P$ , el empuje como  $T$ , la fuerza  $f$  y el momento  $\tau$ . Los subíndices  $a$ ,  $g$ ,  $c$ ,  $w$  y  $e$  vienen de *away from surface*, *under ground effect*, *under ceiling effect*, *under wall effect* y *external* respectivamente [6].

Las interferencias aerodinámicas podrán ser modeladas delimitando ciertas regiones del espacio alrededor de los objetos, que podrán ser evitadas a partir de acciones de control (de forma correctiva) o a partir de métodos de planificación de trayectorias (de forma predictiva). Hasta el momento son algunos los artículos que centran su contribución en el desarrollo de algoritmos que generen trayectorias de evitación de obstáculos, sin embargo, son escasos los artículos que tengan en cuenta los efectos aerodinámicos entorno a ellos.

Concretamente en [7], se propone una planificación de rutas libre de objetos sujeta a restricciones cinemáticas y dinámicas. Esta aproximación requiere una capacidad doble del espacio considerado y por lo tanto un elevado coste computacional al considerar tanto la posición como la velocidad del sistema. Por otro lado, en [8] y [9] se propone la división del proceso en dos etapas. Mientras en la primera de ellas se reemplaza el sistema por una esfera y se busca una trayectoria factible con sus límites, en la segunda se busca



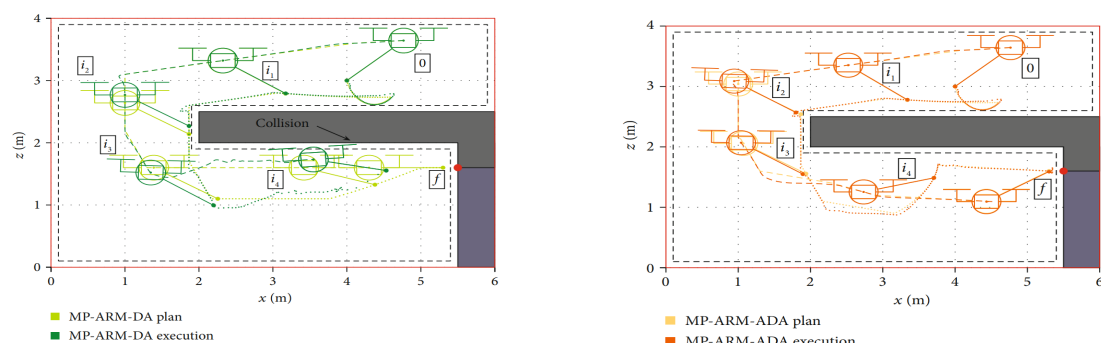
una trayectoria compatible con las restricciones cinemáticas y dinámicas. Esta aproximación requiere de una sobredimensión considerable del sistema al sustituirlo por la esfera que lo contiene, lo que puede dar problemas a la hora de obtener posibles rutas sin colisión.



- (a) Trayectoria obtenida a partir de algoritmos RRT\* (*Rapidly-exploring Random Tree*) tras 120 s de operación y con un elevado coste computacional. Este tipo de algoritmos es el empleado en [7].
- (b) Trayectoria preliminar obtenida en la primera fase del procedimiento considerado en [9]. A partir de un algoritmo simplificado RRT, tras 6 s de operación y sin tener en cuenta los efectos dinámicos, se obtiene una serie de *waypoints* de la ruta óptima.
- (c) Trayectoria obtenida en la segunda fase del procedimiento considerado en [9]. A partir de los *waypoints* anteriores y programación cuadrática se obtiene la ruta final teniendo en cuenta ambos aspectos en otros 3 s.

**Figura 1.3** Planificación de rutas libre de objetos sujeta a restricciones cinemáticas y dinámicas empleando diferentes procedimientos [9].

En cuanto a artículos que estudian la interferencia aerodinámica de estos obstáculos, existen algunos como [10], que analiza la mejora del aterrizaje de UAVs gracias al efecto suelo, o [11], que analiza el aprovechamiento del efecto techo en cuanto a generación de empuje. No obstante, estos artículos proponen soluciones de control del vuelo en estas regiones y no rutas de evitación de las mismas. Finalmente en [12] se estudian ambas cuestiones a partir de un algoritmo de árbol de búsqueda que da como resultado posibles rutas que verifiquen simultáneamente las condiciones dinámicas y aerodinámicas del desplazamiento, presentando el primer método de planificación de rutas con lo que ellos denominan *Aerodynamics Awareness*. En este artículo se coordina la posición del sistema con la posición de un brazo manipulador de largo alcance y se analiza el problema de forma predictiva, es decir en una etapa anterior al vuelo.



- (a) Trayectoria planeada y ejecutada a partir de algoritmos MP-ARM DA (*Motion Planning ARM Dynamic Awareness*). Los efectos aerodinámicos modifican la ruta planeada y se produce una colisión.
- (b) Trayectoria planeada y ejecutada a partir de algoritmos MP-ARM ADA (*Motion Planning ARM AeroDynamic Awareness*). Ambas rutas son prácticamente coincidentes y no se produce ningún incidente.

**Figura 1.4** Planificación de rutas libre de objetos y efectos aerodinámicos [12].

## 1.1 Objetivos

En este trabajo, se estudia la evitación de los obstáculos y las regiones de interferencia aerodinámica en torno a ellos de forma correctiva y conjunta, y se propone una solución admisible a partir de la teoría de *Control Barrier Function*. Esta solución permitirá encontrar una ruta directamente en la etapa de vuelo a partir de acciones de control, adaptar la misma a posibles interferencias inesperadas e incluso reaccionar ante objetos en movimiento.

Para ello en primer lugar, se analizará en profundidad el concepto CBF, así como su posibilidades como controlador de UAV. Partiendo de la dinámica del sistema y algunas definiciones claves como variable de estado, variable de entrada o región a salvo, se expondrá el desarrollo matemático sobre el que se basará el problema de optimización sujeto a restricciones CBF a incluir en el sistema de control. Atendiendo a la geometría de los obstáculos se detallarán ciertas modificaciones en dicho desarrollo. A continuación, se llevará a cabo un análisis aerodinámico basado en la teoría potencial de Cheeseman y Bennett, la cuantización de la interferencia aerodinámica en el vuelo y la sobredimensión del obstáculo a partir de la obtención de una nueva frontera. Finalmente se combinarán ambas contribuciones, exponiendo algunos ejemplos que muestren con claridad los resultados obtenidos en el estudio.

## 1.2 Estructura del documento

El documento se encuentra estructurado en capítulos cuyo contenido se muestra a continuación:

- En el capítulo 2 se define el concepto de Control Barrier Function y como un conjunto de estas funciones distancia delimitaran una región a salvo para el sistema. Estas funciones serán introducidas como restricciones del problema de optimización que será incluido en el sistema de control del UAV y que modificará la variable de actuación en el caso de que fuese necesario. Este desarrollo matemático se detallará para un caso primal y un caso dual en función de la geometría de los objetos que ocupen el mapa de obstáculos. Para ello se aplicará el Teorema de los multiplicadores de Lagrange y las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Por último, se incluirán numerosos ejemplos para un mejor entendimiento.
- En el capítulo 3 se concentra el análisis aerodinámico del trabajo sobre el que se basa la determinación de la región de interferencia aerodinámica en las inmediaciones de los obstáculos. Se estudiarán por separado los efectos suelo, techo y pared y a partir de la teoría potencial de Cheeseman y Bennett, se calculará el valor de ciertos coeficientes que cuantificarán el efecto de estas interferencias aerodinámicas en el vuelo del sistema en cada punto del espacio. De nuevo, se mostrarán algunos ejemplos de aplicación.
- En el capítulo 4 se extraen los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Se elegirá un valor concreto de los coeficientes aerodinámicos a partir de los cuales se considera que la presencia del obstáculo no afecta a la operación del UAV y mediante la interpolación de los puntos del espacio con dicho valor se obtendrá la nueva frontera del objeto que dará lugar a la sobredimensión del mismo. Esta nueva geometría dará lugar a una función distancia a este nuevo obstáculo delimitará una nueva región a salvo que deberá ser introducida como restricción CBF del problema de optimización anteriormente desarrollado. De esta forma, se conseguirá evitar de forma conjunta tanto el obstáculo como la región de interferencia asociado a este. Finalmente se analizarán varios ejemplos de diferente complejidad.
- En el capítulo 5 se recogen los resultados obtenidos en la implementación de la teoría CBF en el vuelo real de UAVs. En primer lugar, se realizan dos ensayos preliminares y se muestran las trayectorias obtenidas para un sistema modelado a partir de una dinámica sencilla. Atendiendo a ciertas observaciones en el comportamiento del UAV, se realizan ciertas modificaciones y se propone un modelo basado en una dinámica más compleja y una configuración de la estructura CBF a su medida. Finalmente, se realiza un ensayo final en el que se comparará el comportamiento del sistema para ambas dinámicas y tipo de restricciones.

## 2 Control Barrier Functions

---

En este capítulo se introduce el concepto de Control Barrier Function (CBF) y su aplicabilidad como controlador de sistemas robóticos. En la práctica un conjunto de CBF nos permitirán delimitar una región de estado en la que el sistema debe permanecer por uno o varios motivos. A esta región se le conocerá como región a salvo. Partiremos de la representación en espacio de estados de la dinámica del sistema. A partir de un problema de optimización sujeto a restricciones CBF, se hallará el valor de la variable de actuación, que finalmente será la que se introducirá en la dinámica del sistema para obtener la ley de movimiento. Esta variable de entrada de actuación será única y mínimamente diferente a la variable de entrada deseada si esta lleva al sistema a violar las fronteras de la región a salvo preestablecida.

### 2.1 Sistema, variable de estado, variable de entrada y región a salvo

Para la sencillez y mejor entendimiento del marco teórico matemático en la introducción del concepto de *Control Barrier Function*, se considera un sistema afín<sup>1</sup> no lineal genérico gobernado por la siguiente dinámica diferencial:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \quad (2.1)$$

siendo  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  el estado del sistema y  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  la variable de entrada. Las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  son funciones de Lipschitz<sup>2</sup> [14]. No obstante, el concepto de CBF es aplicable a sistemas gobernados por una dinámica diferente más compleja, siendo esta lineal o no, con una variable de entrada a elección, e incluso de segundo orden.

La región a salvo se corresponde con una región invariante  $S \subset D \subset \mathbb{R}^n$  y se expresa matemáticamente como [14]:

$$\begin{aligned} S &:= x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0, \\ \partial S &:= x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, \\ \text{Int}(S) &:= x \in \mathbb{R}^n : h(x) > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

En nuestro caso, estará delimitada por funciones distancia. De esta manera, la región a salvo será aquella en la que la distancia de seguridad entre el sistema y el obstáculo sea mayor a 0 y ambos no colisionen. Un ejemplo de una región a salvo podría ser una zona de vuelo en el interior delimitada por paredes y suelo o una zona de inspección en torno a una instalación sin que se interfiera con esta.

---

<sup>1</sup> Un sistema afín no lineal genérico es aquel sistema no lineal que es lineal en la entrada.

<sup>2</sup> Una función de Lipschitz es aquella que verifica:

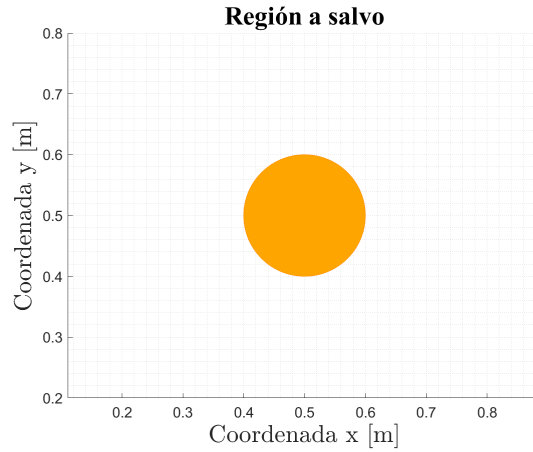
$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y| \quad (2.2)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  y siendo  $C \in \mathbb{R}$  una constante independiente [13].

Un ejemplo gráfico sencillo es el de un obstáculo con forma circular en el plano. La región a salvo es todo el espacio exceptuando el círculo que lo representa y función distancia que lo delimita:

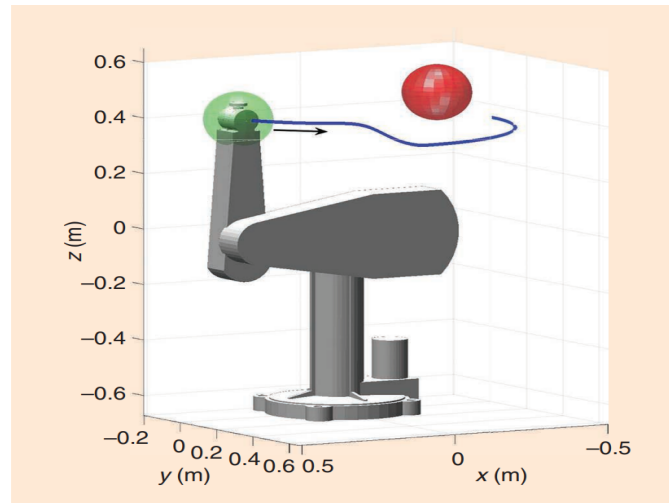
$$h(x) = (x - x_{obs})^2 + (y - y_{obs})^2 - R^2 \quad (2.4)$$

siendo  $x_{obs}, y_{obs} \in \mathbb{R}$  el centro geométrico del obstáculo y  $R \in \mathbb{R}$  el radio del obstáculo.



**Figura 2.1** En este caso el obstáculo se sitúa en el punto  $(0.5, 0.5)$  m y tiene un radio de  $0.1$  m.

Un ejemplo gráfico en 3D podría ser un manipulador de 6 grados de libertad ha de evitar un obstáculo esférico. La región a salvo será todo el espacio exceptuando la esfera.



**Figura 2.2** El obstáculo es la esfera roja. La esfera verde es el volumen de seguridad entorno a la cabeza del manipulador [14].

## 2.2 Definición de Control Barrier Function

Una vez definidas la dinámica del sistema, la variable de estado, la variable de entrada y la región a salvo, procedemos a introducir el concepto de *Control Barrier Function*.

Una Control Barrier Function  $h(x)$  es aquella función diferenciable y de derivada distinta de cero  $\forall x \in \partial S$  que para una función continua  $\alpha$  de clase  $\kappa^3$ , verifica [14]:

$$\sup_{u \in U} \underbrace{[\mathcal{L}_f h(x) + \mathcal{L}_g h(x) \cdot u]}_{\dot{h}(x)} \geq -\alpha(h(x)) \quad (2.5)$$

siendo  $\sup$  la abreviación de supremo, cota superior mínima de la función,  $\dot{h}(x)$  es la derivada temporal de la función CBF y  $\mathcal{L}_f h(x)$  y  $\mathcal{L}_g h(x)$  son derivadas de Lie tal que [16]:

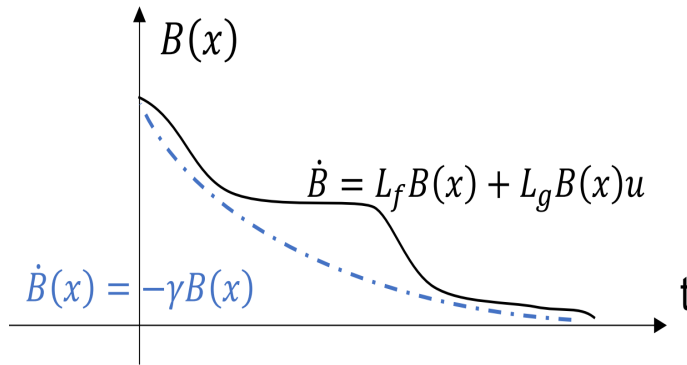
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f(x) \\ \mathcal{L}_g h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot g(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La función  $\alpha$  podrá ser cualquier función de  $h(x)$  que verifique las condiciones anteriores y permitirá modular la acción del CBF. En la práctica se suele elegir una función lineal de  $h(x)$  tal que [17]:

$$\alpha(h(x)) = \gamma \cdot h(x) \quad (2.7)$$

Esto permite limitar la velocidad mínima a la que el sistema alcanza el equilibrio. Para la igualdad (2.8) se logra una estabilización exponencial de la función CBF, siguiendo la línea discontinua de la figura 2.3 [17].

$$\dot{h}(x) = \mathcal{L}_f h(x) + \mathcal{L}_g h(x) \cdot u = -\gamma \cdot h(x) \quad (2.8)$$



**Figura 2.3** Estabilización exponencial de la restricción CBF. En la imagen la función CBF se corresponde con la función  $B(x)$  [17].

El valor del coeficiente  $\gamma$  permitirá regular la agresividad de la restricción. A mayor valor de  $\gamma$  se observará una mayor proximidad entre el estado del sistema y la región a salvo. A menor valor, se observará un comportamiento más conservativo y una solución más distante. Idealmente para un valor de  $\gamma \rightarrow \infty$  el CBF únicamente se activará en el contorno de la región a salvo.

<sup>3</sup> Una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\kappa$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Pertenecer a  $\kappa_\infty$  si  $a = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$  [15].

### 2.3 Problema de optimización sujeto a restricciones CBF

A continuación, se presenta el problema de optimización sujeto a restricciones CBF, resultado de minimizar la diferencia entre la variable de entrada deseada, calculada por el controlador nominal y la de actuación factible, sujeta a restricciones CBF [14].

$$u^* = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} \|u - u_{des}\|^2 \quad (2.9)$$

sujeto a  $\left[ \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot g(x) \cdot u \right] \geq -\alpha(h(x))$

El problema de optimización planteado simplemente garantiza que la variable de entrada introducida en el sistema no lleve a este a violar las fronteras de la región a salvo preestablecida. Aunque la variable de entrada deseada es la proveniente del controlador nominal y será la que lleve al sistema a completar su objetivo final de desplazamiento, como adelantábamos, será la variable de actuación  $u^*$ , solución del problema anterior, la introducida en la dinámica del sistema, ya que esta solución es mínimamente diferente a la deseada y además verifica las restricciones que delimitan la región a salvo. Este problema de optimización se repetirá en cada ciclo de control.

La siguiente imagen muestra un esquema del que sería el sistema de control de sistema robótico.

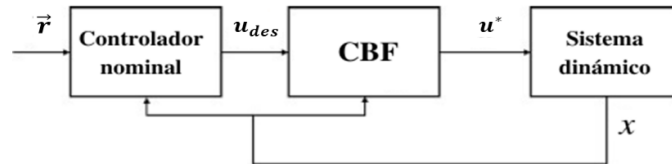


Figura 2.4 Sistema de control del sistema robótico.

El algoritmo a codificar e introducir en el sistema sería:

---

#### Algoritmo: Trayectoria correctiva de evitación de obstáculos.

---

**Input:** Posición inicial y velocidad deseada inicial del sistema y el obstáculo  
 $p_o, u_{des}, p_{obs_o}$  y  $v_{obs_o}$ . Periodo de tiempo  $\tau$ .

**Output:** Posición final del sistema y puntos intermedios de la trayectoria.

1: **definir** dinámica del sistema.

2: **definir** función objetivo:  $|u - u_{des}|$

4: **definir** función distancia y restricción CBF.

5: **definir** problema de optimización sujeto a la restricción CBF.

6:  $t_{im} \leftarrow \tau$  and  $i \leftarrow 1$

7: **repetir**

8:     **resolver** el problema de optimización y obtener la velocidad factible del sistema.

9:     **integrar** nueva posición del sistema a partir de su dinámica y la velocidad factible obtenida.

10:    **registrar** la posición del sistema y el obstáculo.

11:    **actualizar** posición y velocidad del sistema y el obstáculo para el siguiente instante de tiempo.

12: **hasta** que el periodo de tiempo preestablecido se agote.

13: **representación** de la trayectoria obtenida y **verificación** de los límites geométricos.

Figura 2.5 Algoritmo de evitación de obstáculos.

La formulación expuesta en el problema (2.9) será válida para regiones delimitadas por funciones capaces de expresar la distancia de forma explícita y diferenciable como las funciones distancia entre sistemas definidos por puntos, paraboloides o hiperesferas. Seguidamente se expone un ejemplo de aplicación para este tipo de primitivas. No obstante, esto no es siempre posible. En el apartado 2.5 se abordará la problemática de este otro tipo de funciones [18].

## 2.4 Ejemplo 1: Sistema robótico móvil y obstáculo estático en el plano 2D

Se considera un sistema robótico que se desplaza en un plano 2D. El estado del sistema es la posición de su centro geométrico  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y su variable de entrada, la velocidad  $(v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ . El robot está gobernado por la dinámica mostrada en (2.1), cuya entrada será la velocidad factible del dispositivo y siendo:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

El objetivo del sistema será desplazarse en dirección diagonal evitando un disco de radio 10 cm en su camino. Las condiciones de partida se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla 2.1** Condiciones iniciales del ejemplo: Sistema robótico móvil 2D.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$
Posición del obstáculo	$\begin{bmatrix} x_{obs} \\ y_{obs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} [m]$
Velocidad deseada del sistema	$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} 1.1 - x \\ 1 - y \end{bmatrix} [m/s]$

La velocidad deseada es la impuesta por el controlador nominal y surge de establecer como objetivo de desplazamiento hacia el punto (1.1, 1) y multiplicar la diferencia por una constante  $k_p$  siguiendo la siguiente fórmula.

$$\vec{v} = k_p \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = k_p \cdot \begin{bmatrix} x_{obj} - x \\ y_{obj} - y \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La región a salvo será todo el espacio exceptuando el disco, donde sistema y obstáculo colisionarían. Se considera que el robot puntual y que el obstáculo ya tiene en cuenta sus dimensiones. La función CBF que la delimite será la siguiente función distancia:

$$h(x) = (x - x_{obs})^2 + (y - y_{obs})^2 - R^2 \quad (2.12)$$

siendo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  la posición y estado del sistema,  $(x_{obs}, y_{obs}) \in \mathbb{R}^2$  la posición del centro geométrico del disco y  $R \in \mathbb{R}$  el radio de este. Para que sistema y obstáculo no entren en conflicto la distancia entre ellos deberá ser mayor igual a 0.

$$h(x) \geq 0 \quad (2.13)$$

La derivada de la función anterior teniendo en cuenta la igualdad (2.10) es:

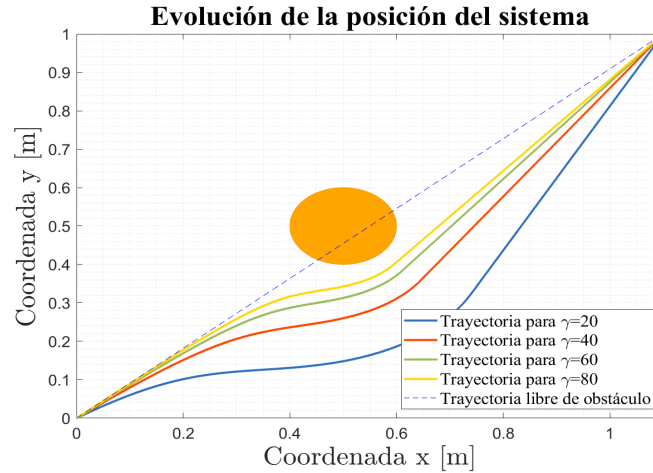
$$\dot{h}(x) = 2 \cdot (x - x_{obs}) \cdot \dot{x} + 2 \cdot (y - y_{obs}) \cdot \dot{y} = 2 \cdot (x - x_{obs}) \cdot u_x + 2 \cdot (y - y_{obs}) \cdot u_y \quad (2.14)$$

El problema de optimización resultante sujeto a la restricción anterior queda:

$$u^* = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} \|u - u_{des}\|^2 \quad (2.15)$$

sujeto a  $[2 \cdot (x - x_{obs}) \cdot u_x + 2 \cdot (y - y_{obs}) \cdot u_y] \geq -\gamma \cdot h(x)$

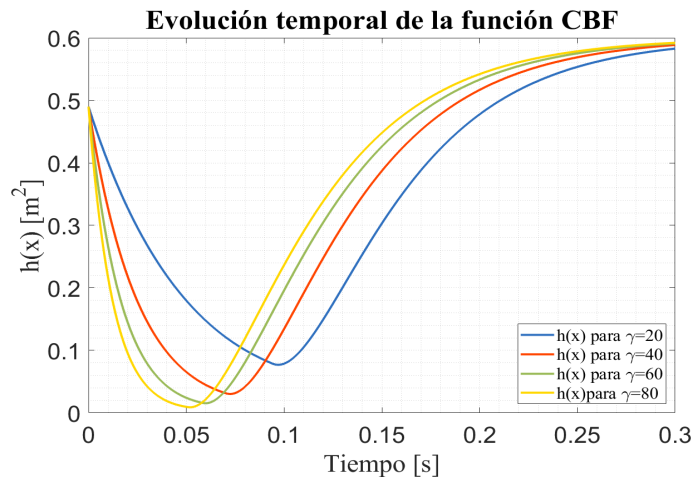
Al introducir reiteradamente la solución del problema anterior en la dinámica del sistema para cada paso de integración, partiendo de unas determinadas condiciones iniciales y forzando una velocidad de entrada deseada, se obtiene evolución de la posición en el plano XY mostrada en la siguiente figura.



**Figura 2.6** El sistema evita el obstáculo denotado por el círculo naranja definido anteriormente, adaptando su velocidad a la factible en cada instante, la deseada cuando es posible.

Las diferentes curvas obtenidas se corresponden a distintos valores de  $\gamma$ . Se observa que a mayor valor de este existe una mayor cercanía al obstáculo. Cabe destacar la importancia de determinar correctamente el orden de magnitud del valor de  $\gamma$ . De no ser así podríamos obtener un comportamiento inesperado del sistema.

Al representar el valor de la restricción CBF se verifica que esta no es menor a 0 en ningún instante. La distancia entre el sistema y el obstáculo es positivo en cada instante del intervalo independientemente del valor de  $\gamma$ . El sistema y el obstáculo no colisionan.



**Figura 2.7** La función CBF adquiere valores cercanos a 0 en torno a los 0.05s, sin embargo el sistema rectifica su trayectoria y  $h(x)$  no llega a alcanzar el valor nulo. Se observa que para valores mayores de  $\gamma$  la restricción es menos conservativa y la función  $h(x)$  alcanza un valor más cercano a 0.



## 2.5 Ejemplo 2: Sistema robótico y obstáculos móviles en el plano 2D

Se considera un sistema robótico que se desplaza en un plano 2D, de estado, variable de entrada y dinámica coincidentes con los del sistema robótico definido en el ejemplo anterior.

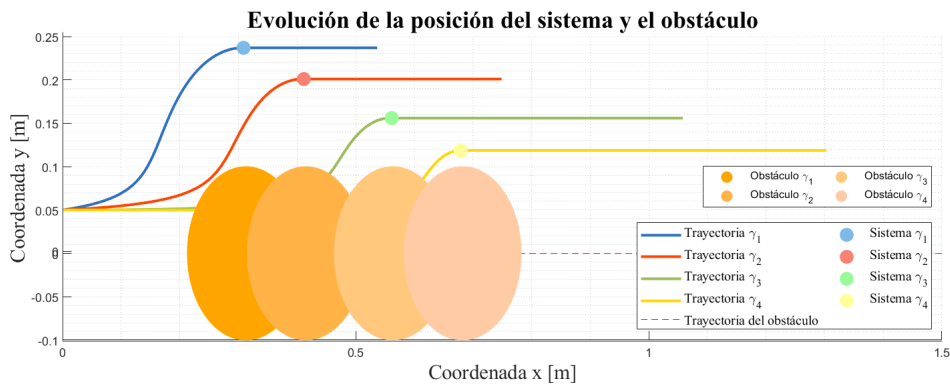
El objetivo del sistema será desplazarse en dirección paralela al eje de abscisas evitando un disco de radio 10 cm que avanza en sentido opuesto al mismo. Las condiciones de partida se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla 2.2** Condiciones iniciales del ejemplo 2: Sistema robótico móvil 2D.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix} [m]$
Posición inicial del obstáculo	$\begin{bmatrix} x_{obs} \\ y_{obs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$
Velocidad deseada del sistema	$\begin{bmatrix} v_{x_{des}} \\ v_{y_{des}} \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 0.075 \\ 0 \end{bmatrix} [m/s]$
Velocidad del obstáculo	$\begin{bmatrix} v_{x_{obs}} \\ v_{y_{obs}} \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0 \end{bmatrix} [m/s]$

De nuevo, la velocidad deseada del sistema es impuesta por el controlador nominal. La región a salvo queda definida como en el ejemplo anterior, y por lo tanto la restricción CBF y el problema de optimización empleados serán idénticos a los que aparecen en (2.12) y (2.15) respectivamente.

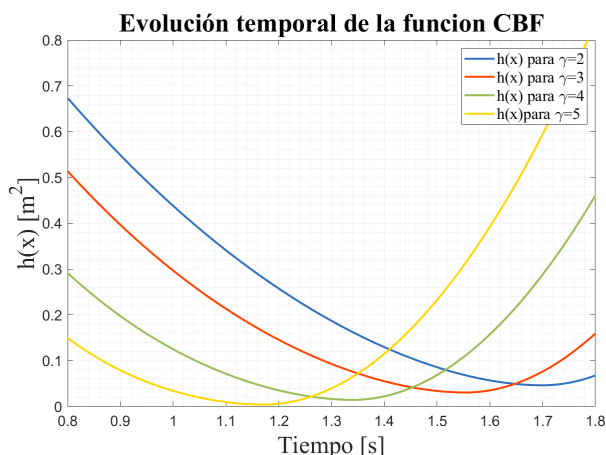
Se muestra a continuación la evolución en el plano bidimensional de este ejemplo.



**Figura 2.8** El sistema evita de nuevo el obstáculo, en este caso móvil.

En la figura se muestran las trayectorias del sistema obtenidas para diferentes valores de  $\gamma$ , así como la trayectoria del obstáculo móvil. La posición del obstáculo en cada instante se halla a partir de la integración de la velocidad impuesta. La posición de ambos se muestra para el instante en el que sistema y obstáculo se encuentran más cerca. Se observa que a mayor valor de  $\gamma$  existe menos distancia entre ellos, llegando casi a rozar en el último ejemplo.

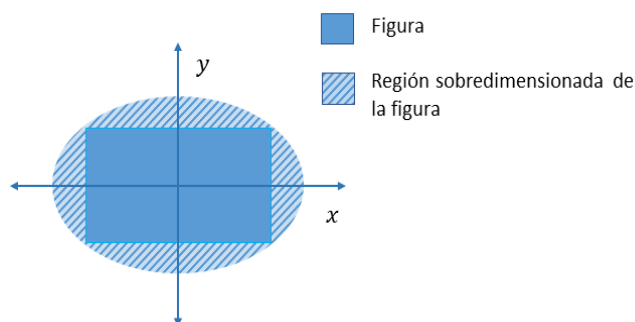
Finalmente se muestra la evolución temporal de la función CBF, ampliando el instante más crítico.



**Figura 2.9** La función  $h(x)$  adquiere valores muy cercanos a 0, sin llegar a alcanzar dicho valor.

## 2.6 Geometría en forma de polígono y resolución dual del problema de optimización

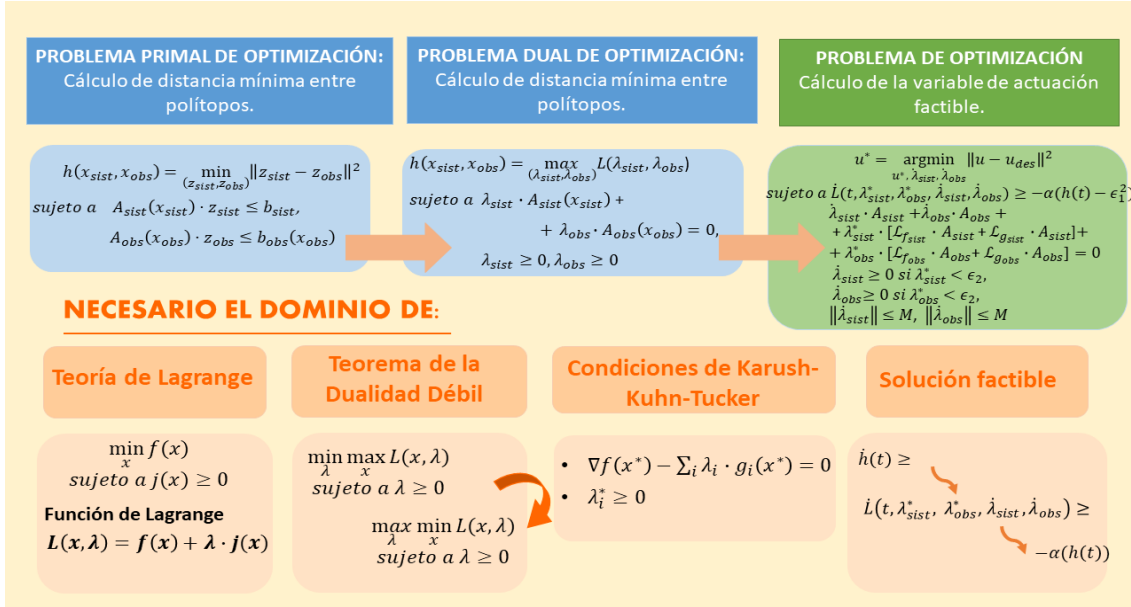
La formulación anteriormente descrita garantiza la evitación de un obstáculo para sistemas robóticos y obstáculos definidos geoméricamente a través de puntos, paraboloides o hipersferas. En definitiva, funciones que permiten expresar la distancia de forma explícita y diferenciable en el tiempo. No obstante, estas funciones frecuentemente sobredimensionan ambos sistemas, imponiendo un movimiento más conservativo entre ambos. Un obstáculo rectangular podría definirse a partir de la elipse de menor tamaño que lo contiene, sin embargo, esto restringiría el movimiento en zonas donde realmente no hay problemática.



**Figura 2.10** Se observa que al contener un rectángulo en la elipse de menor tamaño este queda sobredimensionado. La región rayada es una zona adicional a la geometría base de la figura.

En la práctica, se apuesta por el uso de polítopos para una definición más precisa de tanto sistemas como obstáculos. Esta definición geométrica aunque nos permite ser más rigurosos a la hora de delimitar los objetos, tiene inconvenientes, pues la distancia entre ellos no se puede expresar de forma explícita, su cálculo conlleva un mayor número de operaciones y no es diferenciable.

En este apartado se detalla la resolución dual del problema, que dará fin a las cuestiones planteadas anteriormente. En primer lugar, se mostrará el cálculo de la distancia mínima entre dos polítopos a través de un problema de minimización. Para considerar esta función una restricción CBF se realizarán las modificaciones pertinentes. A continuación, se introducirán los resultados obtenidos en el problema de optimización que minimizará la diferencia entre la variable de entrada factible y la deseada, cuya solución será la acción de control a aplicar al sistema. La nueva función dual de la distancia aparecerá en él como restricción CBF del problema. El análisis matemático a desarrollar en las páginas a continuación se introduce en el siguiente esquema.



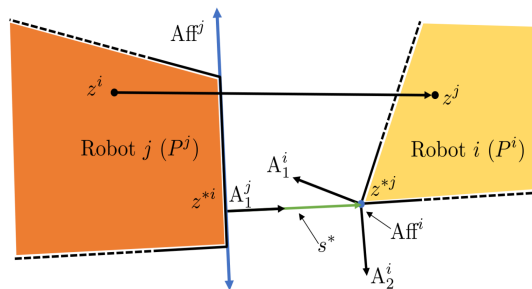
**Figura 2.11** Se plantean dos problemas de optimización, uno para el cálculo de la distancia mínima entre polítopos y otro para el cálculo de la variable de actuación factible. El primero de ellos será transformado a partir del teorema de los multiplicadores de Lagrange y el teorema de la Dualidad Débil y resuelto parcialmente aplicando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker hasta obtener su versión dual. El segundo de ellos, estará sujeto a una restricción CBF obtenida al imponer una solución factible abordable a partir de la función de Lagrange deducida.

Para una mayor sencillez en la teoría expuesta, se considerará un sistema robótico y un obstáculo, ambos definidos por polítopos. Sin embargo, esto puede trasladarse con facilidad a una multitud de obstáculos e incluso a la interacción entre dos o más sistemas robóticos.

Ambos sistemas quedan definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} A_{sist}(x_{sist}) \cdot z_{sist} &\leq b_{sist}(x_{sist}) \\ A_{obs}(x_{obs}) \cdot z_{obs} &\leq b_{obs}(x_{obs}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

siendo  $z_{sist}, z_{obs} \in \mathbb{R}^n$  las coordenadas de los puntos en el interior de los polítopos considerados,  $x_{sist}, x_{obs} \in \mathbb{R}^n$  los estados de dichas figuras y  $A_{sist}, A_{obs} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b_{sist}, b_{obs} \in \mathbb{R}^m$  las matrices y vectores que los delimitan geoméricamente. Estas matrices y vectores deberán tener derivada continua [18].



**Figura 2.12** Sistema de referencia y cálculo de distancia entre polítopos [18].

### 2.6.1 Problema de optimización para el cálculo de la mínima distancia entre dos polítopos

En primer lugar, se expresa la función distancia como un problema de optimización en sí mismo, que calcule la mínima separación existente entre puntos del interior del sistema robótico y obstáculo, considerando las dimensiones de ambos [18]:

$$h(x_{sist}, x_{obs}) = \min_{z_{sist}, z_{obs}} \|z_{sist} - z_{obs}\|^2 \quad (2.17)$$

sujeto a  $A_{sist}(x_{sist}) \cdot z_{sist} \leq b_{sist}(x_{sist})$ ,  $A_{obs}(x_{obs}) \cdot z_{obs} \leq b_{obs}(x_{obs})$

Como se adelantaba, al tratarse de polítopos la función distancia (2.17) no es una función explícita derivable candidata a CBF y el problema no puede ser abordado siguiendo el procedimiento anterior. Es necesario transformar el problema primal restringido en un problema dual factible a partir del teorema de los multiplicadores de Lagrange y el teorema de la Dualidad Débil.

#### Teorema de los multiplicadores de Lagrange

En el teorema de los multiplicadores de Lagrange se introducen las restricciones en la función coste a maximizar a través de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{sist}, \lambda_{obs} \in \mathbb{R}^m$ . Estos términos penalizarán la función si las restricciones no se verifican. Para un valor elevado de estos multiplicadores, la función a minimizar tenderá a un valor elevado y los valores de  $z_{sist}$  y  $z_{obs}$  no serán considerados solución del problema de optimización. Veamos un ejemplo para un problema de minimización para función cualquiera  $f(x)$  sujeto a la restricción  $j(x)$  [19].

$$\min_x f(x) \quad (2.18)$$

sujeto a  $j(x) \leq 0$

La función  $h(x)$  será transformada en la función de Lagrange  $L(x, \lambda)$ :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot j(x) \quad (2.19)$$

Siendo  $\lambda \geq 0$ , se deducen dos opciones:

- Si no se verifica la restricción, es decir para  $j(x) > 0$ , el término adicional penaliza y añade valor a la función original.
- Si se verifica la restricción, es decir para  $j(x) \leq 0$ , el término adicional resta valor a la función original.

Si con el problema de optimización buscamos el mínimo de la función, los puntos en los que se verifica la restricción y que son beneficiados por esta aproximación serán los candidatos prioritarios a solución. Para un valor máximo de  $\lambda$  la penalización también será máxima, por lo que el problema intermedio resultante queda [19]:

$$\min_x \max_{\lambda} L(x, \lambda) \quad (2.20)$$

sujeto a  $\lambda \geq 0$

Minimizar  $L(x, \lambda)$  en función de  $x$  puede ser complicado y es por ello que invertimos el orden de la minimización en  $x$  y la maximización en  $\lambda$  [19].

$$\max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda) \quad (2.21)$$

sujeto a  $\lambda \geq 0$

Este cambio en el orden es posible gracias al teorema de la Dualidad Débil.

### Teorema de la Dualidad Débil

El teorema de la Dualidad Débil no verifica que este intercambio en el orden nos proporcione una solución idéntica a la del problema inicial. Sin embargo, prueba que la solución  $d^*$  del problema obtenido, sea la frontera inferior más cercana a la solución del problema inicial  $p^*$ . Cuanto menor sea la diferencia  $d^* - p^*$ , más satisfactoria será la dualidad entre ambos problemas [19].

$$\begin{aligned}
 p^* = \min_x \max_{\lambda} L(x, \lambda) \quad \text{sujeto a } \lambda \geq 0 & \quad \rightarrow \quad d^* = \max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda) \quad \text{sujeto a } \lambda \geq 0 \\
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para su comprobación denotemos  $J(x)$  como la función obtenida al maximizar  $L(x, \lambda)$  en función de  $x$  y  $g(\lambda)$  como la función obtenida al minimizar  $L(x, \lambda)$  en función de  $\lambda$ .

$$J(x) = \max_{\lambda} L(x, \lambda) \tag{2.23}$$

$$g(\lambda) = \min_x L(x, \lambda) \tag{2.24}$$

Al ser  $g(\lambda) = \min_x L(x, \lambda)$  una función obtenida a partir de los valores mínimos de  $L(x, \lambda)$ ,  $g(\lambda)$  es una función cóncava y un problema más fácil de resolver. Es por ello por lo que instamos el cambio.

Al ser  $J(x)$  el máximo de la función  $L(x, \lambda)$  en  $\lambda$ , cualquier valor de  $L(x, \lambda)$  será menor que el de  $J(x)$ .

$$L(x, \lambda) \leq J(x) = \max_{\lambda} L(x, \lambda) \quad \forall \lambda \geq 0 \tag{2.25}$$

Tomando el mínimo en función de  $x$  a ambos lados de la desigualdad se verifica:

$$\underbrace{\min_x L(x, \lambda)}_{g(\lambda)} \leq \underbrace{\min_x J(x)}_{p^*} \quad \rightarrow \quad g(\lambda) \leq p^* \tag{2.26}$$

Si maximizamos  $g(\lambda)$  en función de  $\lambda$  esta vez y según el problema (2.21), de nuevo la solución será menor que la obtenida  $p^*$ .

$$\underbrace{\max_{\lambda} g(\lambda)}_{d^*} \leq p^* \quad \rightarrow \quad d^* \leq p^* \tag{2.27}$$

De esta forma, se comprueba que el problema de optimización resultante no nos proporcionará necesariamente la solución  $p^*$ , pero sí la solución inferior más cercana  $d^*$  [19].

Cuando la diferencia  $d^* - p^*$  es nula, se dice que la dualidad entre el problema primal y dual es fuerte y que la solución dual obtenida es idéntica a la inicial. La dualidad fuerte no suele cumplirse para todos los problemas de optimización, sin embargo, sí que es frecuente en problemas de optimización convexos y sujeto a lo que se conoce como calificaciones de restricciones [18][20].

Una de estas calificaciones de restricciones es la condición de Slater, que sostiene que para problemas de optimización convexos sujetos a restricciones convexas afines en desigualdad, se verifica dualidad fuerte. Este es el caso del problema (2.17) que nos concierne. La función objetivo es inicialmente convexa y las restricciones, lineales con respecto a  $z_{sist}$  y  $z_{obs}$ . Por lo que concretamente, para nuestro problema se cumple que problema primal y dual son iguales [20].

El problema de minimización dual sería finalmente transformado de la siguiente forma [19]:

$$\begin{aligned}
 \min_x f(x) \quad \text{sujeto a } j(x) \leq 0 & \quad \rightarrow \quad \max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda) \quad \text{sujeto a } \lambda \geq 0 \\
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

## Transformación del problema primal a un problema dual de cálculo de distancia

En nuestro caso, el problema de optimización es el mostrado en (2.17). Para su resolución deberá ser transformado según el teorema de los multiplicadores de Lagrange y el teorema de la Dualidad Débil tal y como se ha expuesto anteriormente.

La función de Lagrange contará con dos vectores de multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_{sist}$  y  $\lambda_{obs}$ , uno por cada restricción. Las restricciones son dos y están escritas de forma matricial, por lo que los multiplicadores deberán ser vectores indispensablemente. La función de Lagrange teniendo en cuenta estas particularidades queda:

$$L(z_{sist}, z_{obs}, \lambda_{sist}, \lambda_{obs}) = \|z_{sist} - z_{obs}\|^2 + \lambda_{sist} \cdot A_{sist}(x_{sist}) \cdot z_{sist} - \lambda_{sist} \cdot b_{sist}(x_{sist}) + \lambda_{obs} \cdot A_{obs}(x_{obs}) \cdot z_{obs} - \lambda_{obs} \cdot b_{obs}(x_{obs}) \quad (2.29)$$

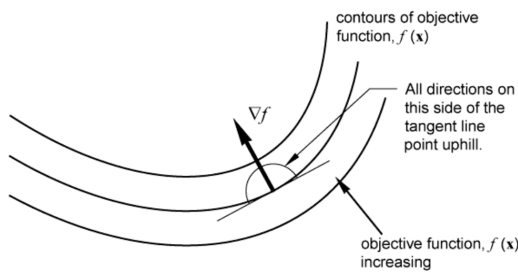
El problema dual de optimización para el cálculo de la distancia atendiendo al problema dual final mostrado en (2.28) resultante de la aplicación del teorema de la Dualidad Débil queda:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{sist}, \lambda_{obs}} \min_{z_{sist}, z_{obs}} L(z_{sist}, z_{obs}, \lambda_{sist}, \lambda_{obs}) \\ \text{sujeto a } \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

## Resolución parcial del problema dual de cálculo de distancia

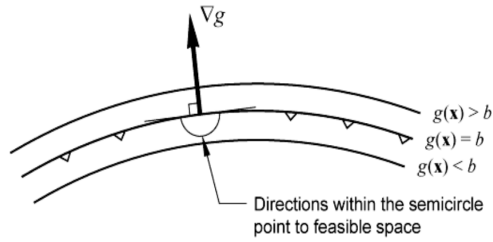
Para la resolución parcial del problema de optimización (2.30), inicialmente habría que hallar los valores óptimos de  $z_{sist}^*$  y  $z_{obs}^*$  al minimizar la función de Lagrange  $L(z_{sist}, z_{obs}, \lambda_{sist}, \lambda_{obs})$ . De tratarse de un problema de optimización no restringido, hallaríamos el valor óptimo simplemente igualando el gradiente de la función  $\nabla L(z_{sist}, z_{obs}, \lambda_{sist}, \lambda_{obs})$  a 0. El gradiente de la función nos da las direcciones de mejora de la función objetivo. Si este es igual a 0 significa que en ese punto no existen tales direcciones y que este es un óptimo local. En un problema de optimización restringido esta definición se extiende, ya que el óptimo local no es únicamente el punto en el que no existen direcciones de mejora, sino el punto en el que tales direcciones pueden existir, pero estas llevan a violar las restricciones del problema. Para el ejemplo de maximización (2.31) esto se visualiza de la siguiente forma [21].

$$\begin{aligned} \max_x f(x) \\ \text{sujeto a } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$



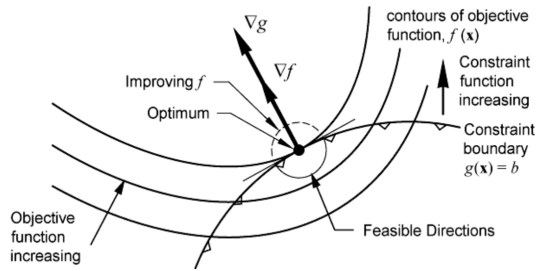
El objetivo es maximizar el valor de la función. En un punto, el conjunto de vectores  $s$  que denoten direcciones de mejora serán aquellas que verifiquen  $s^T \cdot \nabla f > 0$ , en el dibujo, todas las direcciones contenidas en el semicírculo. El gradiente  $\nabla f$  muestra la dirección de máxima mejora [21].

**Figura 2.13** Gradiente y conjunto de direcciones que mejoran la función objetivo [21].



El objetivo es que la dirección verifique las restricciones del problema. En un punto, el conjunto de vectores  $s$  que denoten direcciones hacia soluciones factibles serán aquellas que verifiquen  $s^T \cdot \nabla g < 0$ , en el dibujo, todas las direcciones contenidas en el semicírculo [21].

Figura 2.14 Gradiente y conjunto de direcciones que llevan a soluciones factibles del problema [21].



Para que un punto sea óptimo local restringido no debe haber direcciones en las que se mejore la función objetivo y se avance hacia una región factible simultáneamente. Ambas regiones denotadas anteriormente deben ser excluyentes. Para ello, los gradientes  $\nabla f(x)$  y  $\nabla g(x)$  han de superponerse [21].

Figura 2.15 Superposición del gradiente y óptimo local del problema restringido [21].

La condición anterior puede escribirse matemáticamente para valores de  $\lambda \geq 0$  como:

$$\nabla f(x^*) = \lambda \cdot \nabla g(x^*) \tag{2.32}$$

Si trasladamos esto a un problema con una serie de  $k$  restricciones, es la suma vectorial de los gradientes de las restricciones  $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_k(x)$  la que tiene que superponerse al gradiente de la función  $f(x)$ . Esto es:

$$\nabla f(x^*) = \sum_i \lambda_i \cdot \nabla g_i(x^*) \quad \forall i = 1, \dots, k \tag{2.33}$$

Para  $k = 2$  puede visualizarse en la siguiente imagen.

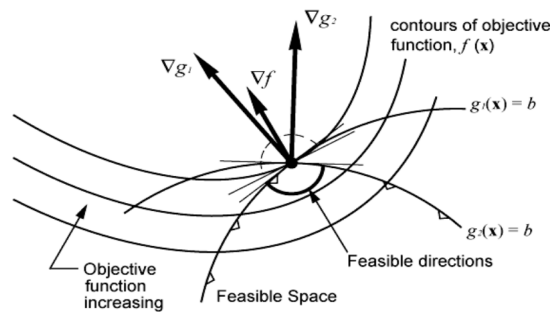


Figura 2.16 La región de direcciones factibles y de mejora de las funciones objetivos son excluyentes, por lo que se trata de un óptimo local [21].

El conjunto de todas las condiciones anteriores se engloba en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker KKT y han de ser verificadas en el óptimo local de un problema restringido [21].

**Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker KKT**

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) - \sum_i \lambda_i \cdot \nabla g_i(x^*) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \lambda_i^* &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k\end{aligned}\quad (2.34)$$

Estas condiciones son aplicables para un problema de maximización similar al expuesto en (2.31), así como para problemas de minimización con la siguiente estructura, más parecidos a nuestro problema inicial (2.17).

$$\begin{aligned}\min_x f(x) \\ \text{sujeto a } g(x) \geq 0\end{aligned}\quad (2.35)$$

De vuelta a nuestro problema de optimización, la función objetivo  $f(z_{sist}, z_{obs})$ , las restricciones  $g_{sist}(z_{sist})$  y  $g_{obs}(z_{obs})$  y sus respectivos gradientes  $\nabla f(z_{sist}, z_{obs})$ ,  $\nabla g_{sist}(z_{sist})$  y  $\nabla g_{obs}(z_{obs})$  son:

$$\begin{aligned}f(z_{sist}, z_{obs}) &= \|z_{sist} - z_{obs}\|^2 & \rightarrow \quad \nabla f(z_{sist}, z_{obs}) &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (z_{sist} - z_{obs})^T & -2 \cdot (z_{sist} - z_{obs})^T \end{bmatrix} \\ g_{sist}(x_{sist}) &= -A_{sist}(x_{sist}) \cdot z_{sist} + b_{sist}(x_{sist}) \geq 0 & \rightarrow \quad \nabla g_{sist}(z_{sist}) &= \begin{bmatrix} -A_{sist}(x_{sist}) & 0 \end{bmatrix} \\ g_{obs}(z_{obs}) &= -A_{obs}(x_{obs}) \cdot z_{obs} + b_{obs}(x_{obs}) \geq 0 & \rightarrow \quad \nabla g_{obs}(z_{obs}) &= \begin{bmatrix} 0 & -A_{obs}(x_{obs}) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.36)$$

Por lo que si queremos hallar el óptimo local restringido se deberán verificar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker KKT anteriores tal que [18]:

$$\begin{aligned}2 \cdot (z_{sist}^* - z_{obs}^*)^T + \lambda_{sist} \cdot A_{sist} &= 0 \\ -2 \cdot (z_{sist}^* - z_{obs}^*)^T + \lambda_{obs} \cdot A_{obs} &= 0 \\ \lambda_{sist} &\geq 0 \\ \lambda_{obs} &\geq 0\end{aligned}\quad (2.37)$$

Se observa que para que los signos de las restricciones de nuestro problema (2.17) coincidan con el de la restricción del problema genérico de minimización (2.35), se cambia el signo de  $g_{sist}(z_{sist})$  y  $g_{obs}(z_{obs})$ .

De las expresiones anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones para el valor óptimo:

$$\begin{aligned}2 \cdot (z_{sist}^* - z_{obs}^*)^T &= -\lambda_{sist} \cdot A_{sist} \\ \lambda_{sist} \cdot A_{sist}(x_{sist}) + \lambda_{obs} \cdot A_{obs}(x_{obs}) &= 0\end{aligned}\quad (2.38)$$

Al sustituirlas en la función de Lagrange  $L(z_{sist}^*, z_{obs}^*, \lambda_{sist}, \lambda_{obs})$  esta queda [18]:

$$L(z_{sist}^*, z_{obs}^*, \lambda_{sist}, \lambda_{obs}) = -\frac{1}{4} \cdot \lambda_{sist} \cdot A_{sist}(x_{sist}) \cdot A_{sist}(x_{sist})^T \cdot \lambda_{sist} - \lambda_{sist} \cdot b_{sist}(x_{sist}) - \lambda_{obs} \cdot b_{obs}(x_{obs}) \quad (2.39)$$

El problema dual a resolver, únicamente sometido a las condiciones KKT, cuya solución serán los vectores  $\lambda_{sist}^*$  y  $\lambda_{obs}^*$  resulta [18]:

$$\begin{aligned}h(x_{sist}, x_{obs}) &= \max_{\lambda_{sist}, \lambda_{obs}} L(\lambda_{sist}, \lambda_{obs}) \\ \text{sujeto a } \lambda_{sist} \cdot A_{sist}(x_{sist}) + \lambda_{obs} \cdot A_{obs}(x_{obs}) &= 0, \quad \lambda_{sist}, \lambda_{obs} \geq 0\end{aligned}\quad (2.40)$$

Este problema dual nos permitirá encontrar los puntos del sistema y del obstáculo que se encuentran a menor distancia a través de los valores de  $\lambda_{sist}^*$  y  $\lambda_{obs}^*$ . Sin embargo, no modificará la variable de entrada en



caso de que esta distancia no verifique la distancia mínima permitida entre ambos. Para ello se necesita el problema de optimización que minimice la diferencia entre la variable de entrada factible y la deseada, en otras palabras el problema (2.9) sujeto esta vez a la restricción dual CBF obtenida en (2.40).

### 2.6.2 Problema de optimización para el cálculo de la variable de actuación factible

Para la configuración el problema de optimización para el cálculo de la variable de actuación factible, atendiendo a la estructura genérica de un problema de optimización de evitación de obstáculos sujeto a restricciones CBF descrita en (2.9), es necesario la función  $\dot{h}(x)$  y no la función  $h(x)$  (para la que anteriormente hemos hallado  $L(x)$ ). Al ser  $\lambda_{sist}^*$ ,  $\lambda_{obs}^*$ ,  $A_{sist}$  y  $A_{obs}$  diferenciables,  $\dot{h}(x)$  podrá ser sustituido por el problema lineal  $g(t)$  a continuación, obtenido a partir de la derivación de la función coste y las restricciones del problema (2.40) [18].

$$g(t) = \max_{\dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}} \dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs})$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \dot{\lambda}_{sist} \cdot A_{sist}(t) + \lambda_{sist}^* \cdot \dot{A}_{sist}(t) + \dot{\lambda}_{obs} \cdot A_{obs}(t) + \lambda_{obs}^* \cdot \dot{A}_{obs}(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_{sist} \geq 0 \text{ si } \lambda_{sist}^* = 0 \\ \dot{\lambda}_{obs} \geq 0 \text{ si } \lambda_{obs}^* = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\frac{1}{2} \cdot \lambda_{sist} \cdot A_{sist}(t) \cdot A_{sist}(t)^T \cdot \dot{\lambda}_{sist}^T - \frac{1}{2} \cdot \lambda_{obs} \cdot A_{obs}(t) \cdot A_{obs}(t)^T \cdot \dot{\lambda}_{obs}^T - \dot{\lambda}_{sist} \cdot b_{sist}(t) - \lambda_{sist}^* \cdot \dot{b}_{sist}(t) - \\ & - \dot{\lambda}_{obs} \cdot b_{obs}(t) - \lambda_{obs}^* \cdot \dot{b}_{obs}(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Resolver este problema supondría un coste adicional considerable a la resolución del problema completo, por lo que optamos por introducir las soluciones  $\lambda_{sist}^*$  y  $\lambda_{obs}^*$  obtenidas en el problema (2.40) y calcular simplemente soluciones factibles  $\dot{\lambda}_{sist}^*$  y  $\dot{\lambda}_{obs}^*$  del problema (2.41). De esta forma, como  $\dot{h}(t)$  es el máximo de la función  $\dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs})$ , al sustituir  $\dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}$  por las soluciones factibles  $\dot{\lambda}_{sist}^*$  y  $\dot{\lambda}_{obs}^*$ ,  $\dot{L}$  sería mayor a cualquier valor de esta misma función y se estaría implementando la restricción CBF de forma conservativa.

$$\dot{h}(t) = \max_{\dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}} \dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}) \geq \dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}^*, \dot{\lambda}_{obs}^*) \geq -\alpha(h(t)) \quad (2.43)$$

Todo ello se puede comprobar realizando el proceso inverso de integración del problema (2.41) a partir de dos soluciones factibles de  $\dot{\lambda}_{sist}^*$  y  $\dot{\lambda}_{obs}^*$ . El objetivo será deshacer la derivación e intentar obtener una expresión de  $\bar{\lambda}_{sist}(\tau)$  y  $\bar{\lambda}_{obs}(\tau)$  válida en un intervalo muy pequeño  $\tau \in [t, t + \varepsilon]$ . Para ello se necesita una condición inicial en el instante inicial  $t$ , para la que propondremos las soluciones óptimas  $\lambda_{sist}^*$  y  $\lambda_{obs}^*$  del problema (2.40) [18].

$$\text{Para } \tau = t \rightarrow (\bar{\lambda}_{sist}(t), \bar{\lambda}_{obs}(t)) = (\lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*) \quad (2.44)$$

Al forzar que los valores  $\bar{\lambda}_{sist}(t)$  y  $\bar{\lambda}_{obs}(t)$  sean idénticos a  $\lambda_{sist}^*$  y  $\lambda_{obs}^*$  y al ser estos las soluciones óptimas del problema (2.40), se verifica que la función  $h(x_{sist}, x_{obs})$  sea máxima para ambos pares [18].

$$L(\bar{\lambda}_{sist}(t), \bar{\lambda}_{obs}(t)) = L(\lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*) = \max_{\lambda_{sist}, \lambda_{obs}} L(\lambda_{sist}, \lambda_{obs}) = h(x_{sist}, x_{obs}) \quad (2.45)$$

Para el resto del intervalo la función  $h(x_{sist}, x_{obs})$  deberá ser necesariamente igual o menor que su valor máximo [18]:

$$L(\bar{\lambda}_{sist}(\tau), \bar{\lambda}_{obs}(\tau)) \leq h(x_{sist}, x_{obs}) \quad \forall \tau \in (t, t + \varepsilon] \quad (2.46)$$

Si derivamos la función coste anterior se obtiene [18]:

$$\dot{L}(\tau, \bar{\lambda}_{sist}(\tau), \bar{\lambda}_{obs}(\tau), \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}) \leq \dot{h}(x_{sist}, x_{obs}) \quad \forall \tau \in [t, t + \varepsilon] \quad (2.47)$$

Esta desigualdad también se cumplirá para  $\tau = t$  ya que, aunque las soluciones  $\bar{\lambda}_{sist}(t)$  y  $\bar{\lambda}_{obs}(t)$  sean iguales a las soluciones óptimas  $\lambda_{sist}^*$  y  $\lambda_{obs}^*$ , estamos usando soluciones solo factibles de  $\dot{\lambda}_{sist}$  y  $\dot{\lambda}_{obs}$ . Únicamente obtendremos el valor máximo solución de  $g(t)$  si damos con los valores  $\dot{\lambda}_{sist}^*$  y  $\dot{\lambda}_{obs}^*$ . Estos valores son los que verdaderamente verificarán [18]:

$$g(t) = \max_{\dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}} \dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}) = \dot{h}(x_{sist}, x_{obs}) \quad (2.48)$$

De esta manera, se verifica que  $g(t)$  se podrá usar como  $\dot{h}(t) \forall t \in [0, T]$  seleccionando instantes muy seguidos de integración, aunque finalmente simplifiquemos el proceso usando  $\dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs})$  y soluciones factibles del problema  $\dot{\lambda}_{sist}$  y  $\dot{\lambda}_{obs}$  [18].

Al introducir la restricción CBF (2.43) en el problema dual que proporcionará el valor de entrada factible a introducir en la dinámica del sistema en cada instante se obtiene [18]:

$$u^* = \underset{u, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}}{\operatorname{argmin}} \|u - u_{des}\|^2, \quad (2.49)$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \dot{L}(t, \lambda_{sist}^*, \lambda_{obs}^*, \dot{\lambda}_{sist}, \dot{\lambda}_{obs}) \geq -\alpha \cdot (h(x) - \varepsilon_1^2) \\ \dot{\lambda}_{sist} \cdot A_{sist}(x) + \lambda_{sist}^* \cdot (\dot{A}_{sist}(x) \cdot f(x) + \dot{A}_{sist}(x) \cdot g(x) \cdot u) + \\ + \lambda_{obs}^* \cdot (\dot{A}_{obs}(x) \cdot f(x) + \dot{A}_{obs}(x) \cdot g(x) \cdot u) = -\dot{\lambda}_{obs} \cdot A_{obs}(x) \\ \dot{\lambda}_{sist} \geq 0 \text{ si } \lambda_{sist}^* < \varepsilon_2, \quad \dot{\lambda}_{obs} \geq 0 \text{ si } \lambda_{obs}^* < \varepsilon_2 \\ \|\dot{\lambda}_{sist}\| \leq M, \quad \|\dot{\lambda}_{obs}\| \leq M \\ u \in U \end{cases}$$

siendo  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  constantes de relajación pequeñas,  $M$  una constante de elevado valor y  $f(x)$  y  $g(x)$  las funciones que describen la dinámica del sistema incluidas en la ecuación (2.1).

La constante de relajación  $\varepsilon_1$  surge de considerar el escenario en el que el gradiente de la función cuadrática  $h(x)$  (si existe) sea cero en la región a salvo. De ser así, el sistema consideraría estar a salvo indiferentemente del valor de la variable de actuación, lo cual no sería cierto. Podría darse ser el caso por ejemplo en una dinámica 1D igual a  $\dot{x} = u$  y una función  $h(x) = x^2$ . En  $x = 0$  la restricción sería  $0 \cdot u \geq 0$  y esto se verificaría para  $\forall u \in U$ . Al establecer  $h(x) = x^2 - \varepsilon_1^2$ , la restricción quedaría  $0 \cdot u \geq \varepsilon_1^2$  lo cual no se verificaría en ningún caso y sería una incongruencia. Para  $x = \varepsilon_1$  la restricción sería  $2 \cdot \varepsilon_1 \cdot u \geq 0$ , desigualdad admisible y verificable para un valor positivo de la constante.

La constante de relajación  $\varepsilon_2$  surge de asegurar la semi-continuidad superior<sup>4</sup> del conjunto de variables de actuación factibles, es decir que estos no superan el valor máximo de solución factible. Este criterio es similar al utilizado en el método de gradiente casi-activo empleado en [23] para verificar la seguridad.

<sup>4</sup> Se dice que una función es una función semi-continua superiormente en un punto  $x_0$  si los valores de la función en puntos cercanos a  $x_0$  son próximos a  $f(x_0)$  o menores que  $f(x_0)$  [22].

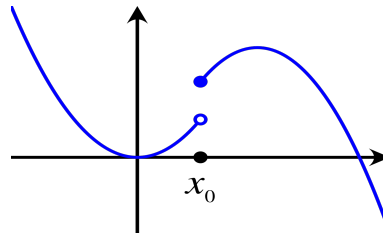


Figura 2.17 Función semi-continua superiormente. El punto azul se refiere a  $f(x_0)$  [22].

Finalmente, el algoritmo implementado en cada paso de integración consistirá en hallar la función de Lagrange (2.39) a partir de las matrices y vectores de dimensión definidos, y resolver el primer problema de optimización dual (2.40), obteniendo  $\lambda_{sist}$  y  $\lambda_{obs}$ . Una vez obtenidos, se introducirán en el segundo problema de optimización (2.49), obteniendo  $u$ ,  $\lambda_{sist}$  y  $\lambda_{obs}$  en cada instante. Al introducir el valor  $u$  resultante en la dinámica del sistema la evolución temporal del estado del sistema.

Seguidamente se expone un ejemplo de evitación de un obstáculo para un sistema y un objeto con forma de polítopo a partir de un problema de optimización dual sujeto a restricciones CBF.

### 2.7 Ejemplo 3: Sistema robótico y obstáculo con forma de polítopos en el plano 2D

Se considera un sistema robótico que se desplaza en un plano 2D, de estado, variable de entrada y dinámica coincidentes con los del sistema robótico definido en la sección 2.4.

El objetivo del sistema será desplazarse en diagonal evitando un polítopo rectangular estático. Las condiciones de partida se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla 2.3** Condiciones iniciales del ejemplo 3: Sistema robótico y obstáculo con forma de polítopos.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [m]$
Dimensiones del sistema	$2 \times 2 m$
Posición del obstáculo	$\begin{bmatrix} x_{obs} \\ y_{obs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$
Dimensiones del obstáculo	$4 \times 8 m$
Velocidad deseada del sistema	$\begin{bmatrix} v_{xdes} \\ v_{ydes} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} [m/s]$

De nuevo, la velocidad deseada del sistema es impuesta por el controlador nominal. La región a salvo queda definida como todo el espacio bidimensional exceptuando el rectángulo. La restricción CBF será la mínima distancia existente entre dos puntos del sistema y el obstáculo, hallada a través del problema de optimización mostrado en (2.17). Se muestran a continuación las matrices y vectores  $A_{sist}$ ,  $A_{obs}$ ,  $b_{sist}$  y  $b_{obs}$  resultantes:

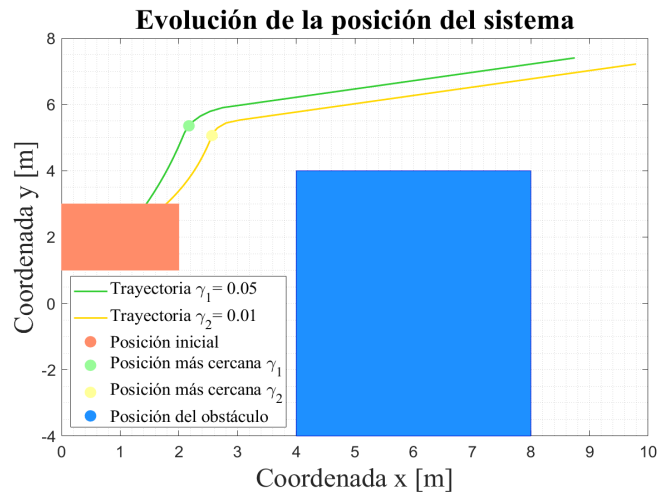
$$\begin{aligned}
 A_{sist} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{obs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 b_{sist} &= \begin{bmatrix} 1 + x_{sist} \\ 1 - x_{sist} \\ 1 + y_{sist} \\ 1 - y_{sist} \end{bmatrix}, \quad b_{obs} = \begin{bmatrix} 2 + x_{obs} \\ 2 - x_{obs} \\ 4 + y_{obs} \\ 4 - y_{obs} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

siendo  $(x_{sist}, y_{sist})$  y  $(x_{obs}, y_{obs}) \in \mathbb{R}^2$  la posición del centro geométrico cada polítopo en un instante determinado.

Se puede comprobar que todo punto  $z_{sist}$  y  $z_{obs}$ , interiores al sistema y al obstáculo respectivamente, verifica:

$$\begin{aligned} A_{sist}(x_{sist}) \cdot z_{sist} &\leq b_{sist}(x_{sist}) \\ A_{obs}(x_{obs}) \cdot z_{obs} &\leq b_{obs}(x_{obs}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

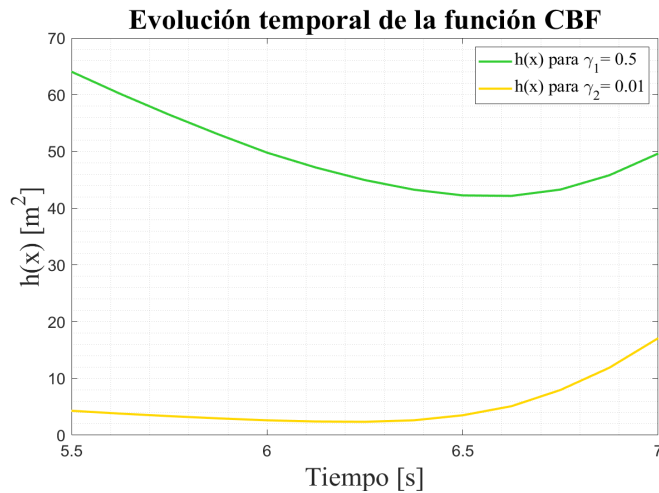
El algoritmo implementado en cada paso de integración consistirá en el explicado anteriormente. A partir de las matrices y vectores en las desigualdades mostradas en (2.50) y el problema dual mostrado en (2.40) se hallarán los valores de  $\lambda_{sist}$  y  $\lambda_{obs}$ . Estos valores serán introducidos en un segundo problema dual que minimice la diferencia entre la variable de entrada deseada y la factible, que tendrá como solución el valor óptimo de  $u$ ,  $\dot{\lambda}_{sist}$  y  $\dot{\lambda}_{obs}$ . Al introducir reiteradamente la solución anterior  $u$  en la dinámica del sistema, se obtendrá la evolución de la posición en el plano bidimensional mostrada en la Figura 2.18.



**Figura 2.18** El sistema evita el obstáculo denotado por el rectángulo naranja definido anteriormente, adaptando su velocidad a la factible en cada instante, la deseada cuando es posible.

Las curvas obtenidas se corresponden a un valor de  $\gamma$  igual a 0.5 y 0.01. Se observa que este valor es muy diferente en orden de magnitud a los propuestos en el ejemplo anterior.

Al representar el valor de la función de CBF en la Figura 2.19 ampliando el instante más crítico, se verifica que esta no es menor a 0 en ningún instante.



**Figura 2.19** La función CBF adquiere valores cercanos a 0 en torno a los 6 s, sin embargo el sistema rectifica su trayectoria y  $h(x)$  no llega a alcanzar el valor nulo.

## 3 Interferencias aerodinámicas

---

Se define interferencia aerodinámica como la perturbación de las líneas de flujo aerodinámico en la proximidad de otros objetos o sistemas. En nuestro caso estas líneas de flujo son generadas por los rotores de un UAV y originan la fuerza de sustentación para su vuelo. Estas perturbaciones al modificar la estela producida por los rotores, modifican en consecuencia el empuje generado, por lo que las zonas donde se producen serán regiones a evitar e introducidas como restricciones CBF más adelante.

En este capítulo se analiza en profundidad las interferencias generadas por el vuelo de un UAV cercano a objetos.

### 3.1 Análisis de las interferencias aerodinámicas generadas por el vuelo cercano a objetos

La interferencia aerodinámica alrededor de obstáculos se cuantifica a partir de un coeficiente aerodinámico, que será el cociente del empuje en presencia del obstáculo entre el empuje en ausencia del mismo. Para su cálculo es necesario modelar el diagrama de flujo que genera el rotor y aplicar el método de las imágenes convenientemente en función de la situación de la superficie respecto a la que se vuela. Según esto último podremos diferenciar entre efecto suelo, efecto techo y efecto pared. Una vez obtenido el modelo matemático, se impondrá la condición de potencia constante, obteniendo una fórmula del coeficiente aerodinámico para cada uno de los efectos considerados [24].

El objetivo final de este apartado es el de representar los valores de los coeficientes obtenidos en el espacio y en torno a unos obstáculos situados a conciencia. En los apartados a continuación se introduce la fórmula para el cálculo del coeficiente aerodinámico para cada uno de los efectos por separado y se obtiene el mapa de valores de coeficientes aerodinámicos.

#### 3.1.1 Interferencia aerodinámica: Efecto suelo

El efecto suelo es la interferencia aerodinámica que surge al volar el sistema sobre una superficie sólida cercana. Como adelantábamos, su influencia aerodinámica será cuantificada por el coeficiente aerodinámico  $C_{IGE}$ , obtenido a partir de la siguiente fórmula:

$$C_{IGE} = \frac{T_{IGE}}{T_{OGE}} = \frac{1}{1 - \frac{\delta v_{a_i}}{v_i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{R}{z}\right)^2} \quad (3.1)$$

donde  $\delta v_{a_i}$  es la velocidad inducida por el rotor imagen,  $v_i$  la velocidad inducida por el rotor real,  $R$  el radio del rotor y  $z$  la distancia a la que este se encuentra del suelo. Las siglas "IGE" y "OGE" vienen de "In Ground Effect" y "Out Ground Effect" respectivamente [24].

Esta expresión es la propuesta en la teoría potencial de Cheeseman y Bennett para un solo rotor, al modelarlo como una fuente de flujo aerodinámico de intensidad constante y aplicar el método de las imágenes con respecto al suelo. Al imponer la condición de potencia constante se obtiene la expresión del cociente de

empujes  $T_{IGE}/T_{OGE}$ .

El efecto suelo origina un aumento de empuje generado por el rotor del UAV, por lo que se obtendrá un valor de  $C_{IGE}$  mayor que 1 en regiones superiores a los obstáculos susceptibles de producir interferencias aerodinámicas e igual a 1 en el resto del mapa.

Para la representación gráfica del valor del coeficiente aerodinámico definimos en un mapa dos obstáculos de ejemplo:

- Cubo de dimensiones  $6 \times 3 \times 1$  m en la posición (1.0, 1.5, 0.5).
- Cilindro de radio 0.5 m, paralelo al eje  $y$  y en la posición XZ (3.0, 1.8)

Asimismo definimos el suelo para  $z$  igual 0. Se presenta a continuación el mapa de obstáculos descrito.

### Mapa de obstáculos

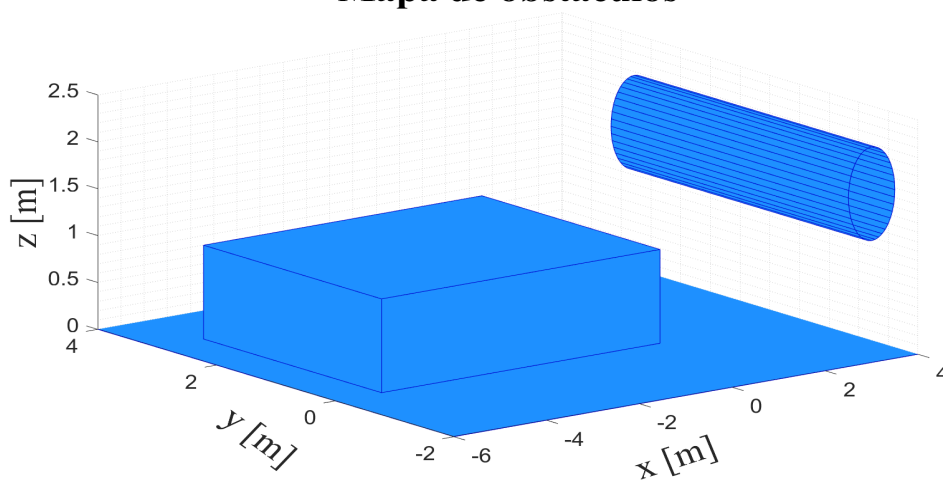


Figura 3.1 Mapas de obstáculos. Cubo, cilindro y suelo.

Al representar el valor del coeficiente aerodinámico  $C_{IGE}$  de efecto suelo según un código de color, sobre el mapa de obstáculo definido y el plano  $y = 0$  se obtiene el siguiente mapa aerodinámico.

### Coficiente aerodinámico $C_{IGE}$ en el mapa de obstáculos

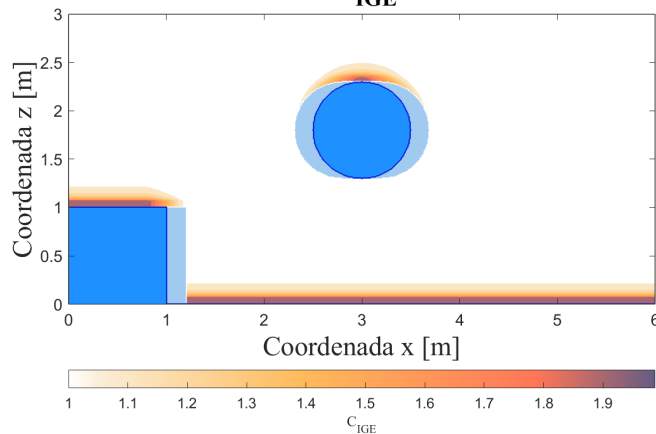


Figura 3.2 Se obtiene un valor de  $C_{IGE}$  igual a 1 en todo el mapa, exceptuando las inmediaciones superiores del cubo y del cilindro y el propio suelo. La zona de colisión es la zona azul claro en la que por las dimensiones del rotor el UAV, este colisionaría con el obstáculo.

3.1.2 Interferencia aerodinámica: Efecto techo

El efecto techo es la interferencia aerodinámica que surge al volar el sistema bajo una superficie sólida cercana. Su influencia aerodinámica será cuantificada por el coeficiente aerodinámico  $C_{ICE}$ , obtenido a partir de la siguiente fórmula:

$$C_{ICE} = \frac{T_{ICE}}{T_{OCE}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{R}{z+K_2}\right)^2} \tag{3.2}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes conocidas,  $R$  el radio del rotor y  $z$  la distancia a la que este se encuentra del suelo. Las siglas "ICE" y "OCE" vienen de "In Ceiling Effect" y "Out Ceiling Effect" respectivamente [24].

En este caso esta expresión no puede ser obtenida de la teoría potencial, por lo que se ha recurrido a la estimación de mínimos cuadrados a partir de datos obtenidos experimentalmente. El resultado es la obtención de las constantes  $K_1$  y  $K_2$  [24].

$$K_1 = 6.924 \quad K_2 = 0.0378 \text{ m} \tag{3.3}$$

El efecto techo origina de nuevo un aumento de empuje generado por el rotor del UAV, por lo que se obtendrá un valor de  $C_{ICE}$  mayor que 1 en regiones superiores a los obstáculos susceptibles de producir interferencias aerodinámicas e igual a 1 en el resto del mapa.

Se muestra a continuación la representación de los valores del coeficiente  $C_{ICE}$  sobre el mapa descrito en el apartado anterior.

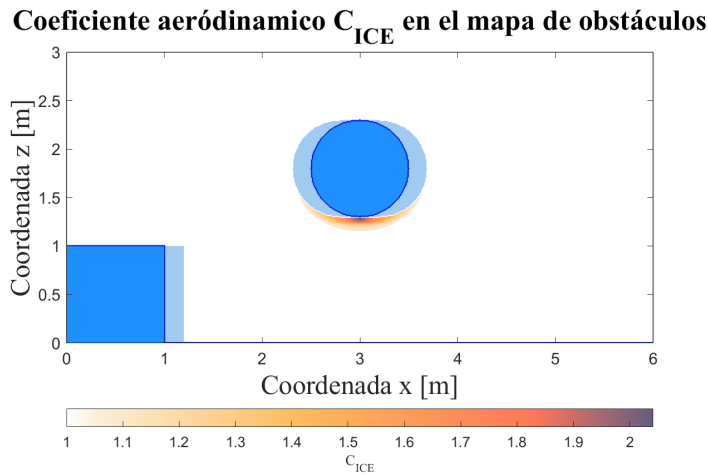


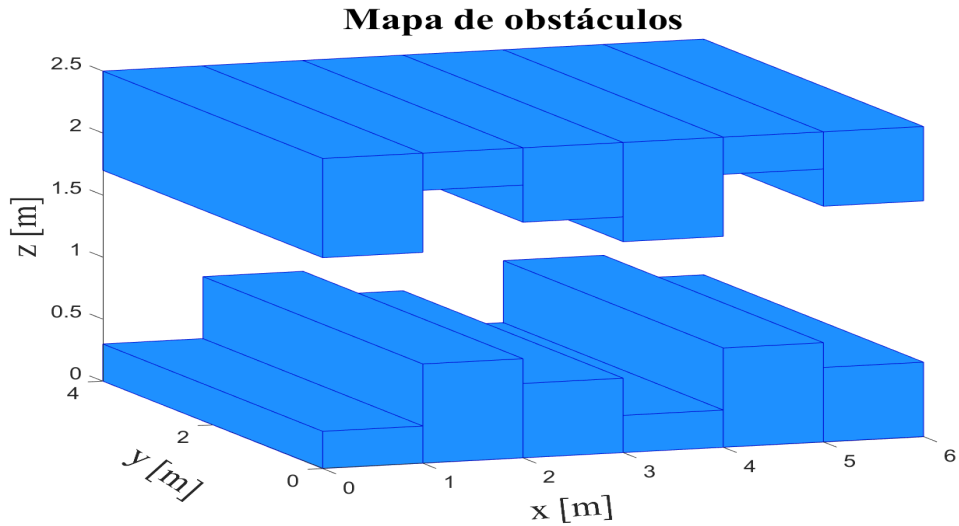
Figura 3.3 Se obtiene un valor de  $C_{ICE}$  igual a 1 en todo el mapa, exceptuando región inferior al cilindro. .

3.1.3 Interferencia aerodinámica: Efecto pared

El efecto pared es la interferencia aerodinámica que surge al volar el sistema al lado de una superficie sólida cercana. El estudio experimental del flujo aerodinámico que se genera en vuelo muestra que este es prácticamente perpendicular al rotor y que volar cerca de una superficie paralela a él no afecta al empuje producido. El efecto pared se considera insignificante al compararlo con el efecto techo y el efecto pared y no será materia de estudio en este trabajo [24].

3.1.4 Ejemplo adicional: Mapa de obstáculos

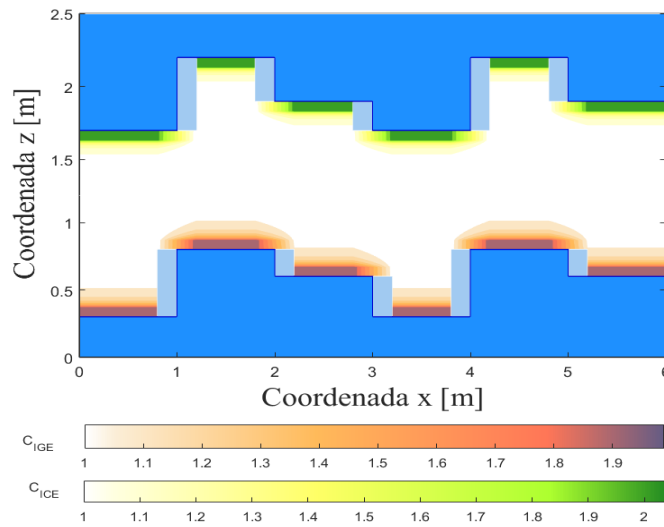
Para un mejor entendimiento del estudio de las interferencias aerodinámicas se analiza un ejemplo de mapa de obstáculos algo más complejo. En este caso, el mapa de obstáculos estará formado por una serie de cubos dispuestos de forma escalonada tanto en la parte superior como en la parte inferior del escenario.



**Figura 3.4** Mapa de obstáculos. Figura escalonada.

El empuje generado por un UAV aumentará al volar cerca de la superficie inferior del mapa, por lo que el valor del coeficiente aerodinámico de efecto suelo  $C_{IGE}$  será distinto de 1 en sus inmediaciones. Esto mismo ocurrirá al volar el UAV cerca de la superficie superior, modificando también el coeficiente  $C_{ICE}$ . El mapa de coeficientes aerodinámicos descrito para el plano  $y = 0$  queda reflejado en la siguiente imagen.

### Coeficientes aerodinámicos en el mapa de obstáculos



**Figura 3.5** Representación gráfica de los valores de coeficientes aerodinámicos en cada punto del espacio.



## 4 Evitación de zonas con interferencias aerodinámicas

En este capítulo se aplica la teoría CBF analizada en profundidad en el capítulo 2, a un ejemplo concreto de evitación de zonas de interferencias aerodinámicas. Estas regiones son difíciles de determinar visualmente por los operadores de UAVs y a menudo dificulta el control del vuelo. Por lo que la inclusión de este tipo de sistemas de control facilitarían su labor.

En primer lugar, se establecerá la nueva frontera del obstáculo a partir de la interpolación de puntos del espacio con lo que consideraremos un valor de coeficiente aerodinámico lo suficientemente elevado como para influir en el vuelo del sistema. Esta nueva frontera incluirá en su interior la región ocupada por el propio obstáculo, la zona de colisión y la región en la que este origina interferencias aerodinámicas. Una vez establecida, se introducirá en el código de control. Finalmente se expondrán algunos ejemplos y se llevará a cabo una comparación entre la trayectoria inicial de evitación del obstáculo y la trayectoria actual teniendo en cuenta ahora los efectos estudiados.

### 4.1 Interpolación de puntos del espacio y obtención de una nueva frontera

En el capítulo anterior analizamos conjuntamente el valor de los coeficientes aerodinámicos de efecto suelo y techo. Ambos adquirirían valores entre 1 (en los puntos en los que no se producían interferencias aerodinámicas) y 2.15 (en los puntos más próximos al objeto). En nuestro caso consideraremos que para valores menores a 1.1 la presencia del obstáculo no afecta al vuelo del UAV. Por lo que serán los puntos con dicho valor los seleccionados para la interpolación que dará lugar a la nueva frontera del obstáculo.

A modo de ejemplo, para el mapa de obstáculos descrito en en apartado 3.1.1 se obtiene la siguiente frontera.

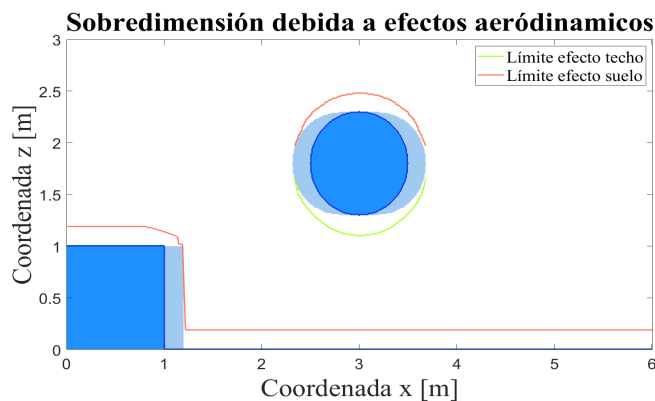


Figura 4.1 El obstáculo crece al incluir las regiones de efectos aerodinámicos y las zonas de colisión, de nuevo marcadas por un azul más claro.

Esta nueva frontera dará lugar a la sobredimensión de los obstáculos. Una vez analizado el mapa y realizado la interpolación de los puntos convenientemente seleccionados, se calcula la diferencia con la inicial y se añade este margen a la geometría de los obstáculos anteriormente descritos. Para el ejemplo planteado se obtiene que esta adquiere un valor de hasta  $0.18\text{ m}$  sobre la superficie del obstáculo. Se muestra a continuación el mapa resultante.

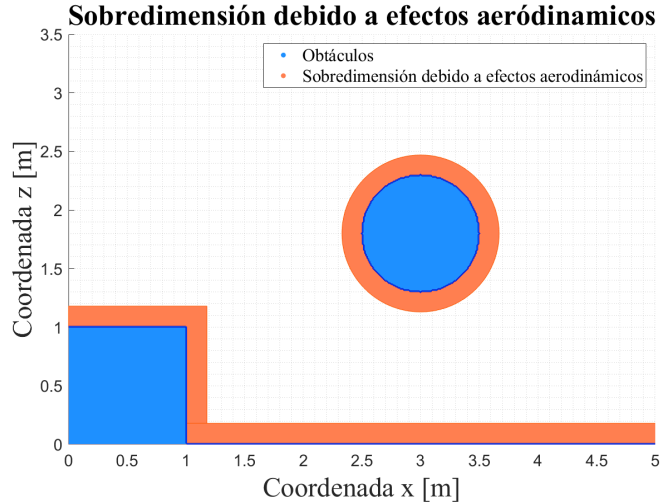


Figura 4.2 Geometría sobredimensionada. Cubo, cilindro y suelo.

Llegados a este punto, se introduce la nueva descripción geométrica en el código de control como nuevas restricciones CBF y se resuelve el problema de optimización planteado. Integrando para cada instante, se obtiene su ley de movimiento.

Seguidamente se expone dos ejemplos de aplicación.

## 4.2 Ejemplo 4: Sistema robótico móvil y mapa de obstáculos en el plano 2D

Se considera un sistema robótico que se desplaza en un plano 2D, de estado, variable de entrada y dinámica coincidentes con los del sistema robótico definido en la sección 2.4.

El objetivo del sistema será desplazarse en dirección paralela al eje de abscisas, evitando un cilindro y un cubo en su camino, ambos estáticos. El sistema deberá tener en cuenta las regiones de interferencias aerodinámicas y en ningún caso deberá atravesar el suelo. Las condiciones de partida se muestran en la tabla 4.1.

El escenario descrito es tridimensional, no obstante, para la simplificación del ejemplo, se analizará únicamente en el plano  $y = 0$ .

De nuevo, la velocidad deseada del sistema es impuesta por el controlador nominal. La región a salvo queda definida como todo el plano  $y = 0$  exceptuando el cilindro, el cubo, el suelo y sus respectivas zonas de colisión y región de efectos aerodinámicos.

Para la resolución del ejemplo propuesto, podríamos plantear una resolución primal o dual para el cilindro y el suelo, ya que ambas funciones distancia y posteriores restricciones CBF puede expresarse de forma explícita y derivable, y la resolución dual siempre es una opción. Sin embargo, para la evitación del cubo únicamente podríamos optar por la resolución dual. En este caso, se ha optado por plantear un único problema de optimización dual alrededor del obstáculo con forma de cubo, incluyendo el cilindro y el suelo como restricciones CBF adicionales de forma primal y sin modificar. El valor de  $\gamma$  seleccionado es 0.35.

**Tabla 4.1** Condiciones iniciales del ejemplo sencillo 4: Sistema robótico y mapa de obstáculos.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1.6 \end{bmatrix} [m]$
Dimensiones del sistema	$0.5 \times 0.4 \times 0.5 m$
Posición del cilindro	$\begin{bmatrix} x_{cil} \\ y_{cil} \\ z_{cil} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1.8 \end{bmatrix} [m]$
Dimensiones del cilindro	$R = 0.5 m$
Posición del cubo	$\begin{bmatrix} x_{cubo} \\ z_{cubo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix} [m]$
Dimensiones del cubo	$1 \times 3 \times 6 m$
Posición del suelo	$z_{suelo} = 0 [m]$
Velocidad deseada del sistema	$\begin{bmatrix} v_{x_{des}} \\ v_{y_{des}} \\ v_{z_{des}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} [m/s]$

En primer lugar, se establecen las matrices y vectores  $A_{sist}$ ,  $A_{cubo}$ ,  $b_{sist}$  y  $b_{cubo}$  que definen la geometría del sistema y del cubo, y que serán incluidas en el problema de optimización. Como adelantábamos, la geometría del obstáculo tendrá en cuenta la región de interferencia y colisión, por lo que se incluirá un valor  $Extra_{cubo}$ ,  $Extra_{cil}$  y  $Extra_{suelo}$  en sus definiciones. El valor de estas constantes será 0.18 indiferentemente, ya que el UAV nota la presencia de una superficie y no de un sólido geométrico concreto.

$$\begin{aligned}
 A_{sist} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{cubo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 b_{sist} &= \begin{bmatrix} 0.25 + x_{sist} \\ 0.25 - x_{sist} \\ 0.25 + z_{sist} \\ 0.25 - z_{sist} \end{bmatrix}, \quad b_{cubo} = \begin{bmatrix} 0.5 + Extra_{cubo} + x_{cubo} \\ 0.5 + Extra_{cubo} - x_{cubo} \\ 3 + Extra_{cubo} + z_{cubo} \\ 3 + Extra_{cubo} - z_{cubo} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Las restricciones CBF asociadas al cilindro y al suelo son las siguientes funciones.

$$\begin{aligned}
 h_{cilindro}(x,z) &= (x - x_{cil})^2 + (z - z_{cil})^2 - (R + Extra_{cil})^2 \\
 h_{suelo}(z) &= z - z_{suelo} - Extra_{suelo}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se observa que estos obstáculos también aparecen sobredimensionados.

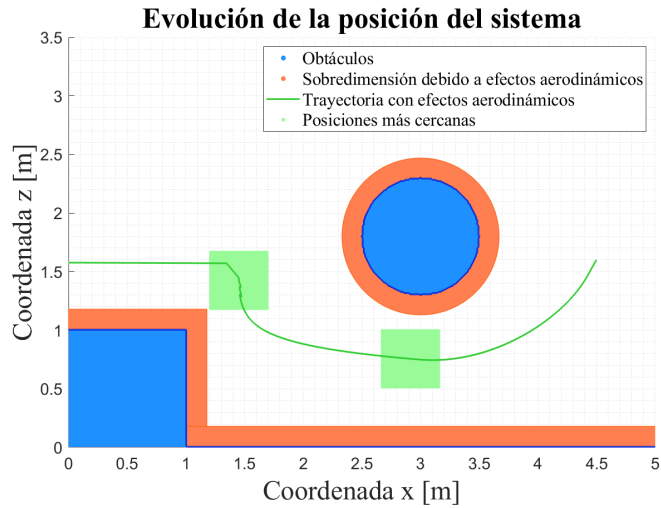
Ambas funciones distancia deberán verificar siempre:

$$h_{cilindro}(x,z) \geq 0, \quad h_{suelo}(z) \geq 0 \tag{4.3}$$

De esta forma, el proceso de optimización quedaría idéntico al expuesto en 2.49 con las dos restricciones adicionales en su versión primal según 2.8 que se muestran a continuación.

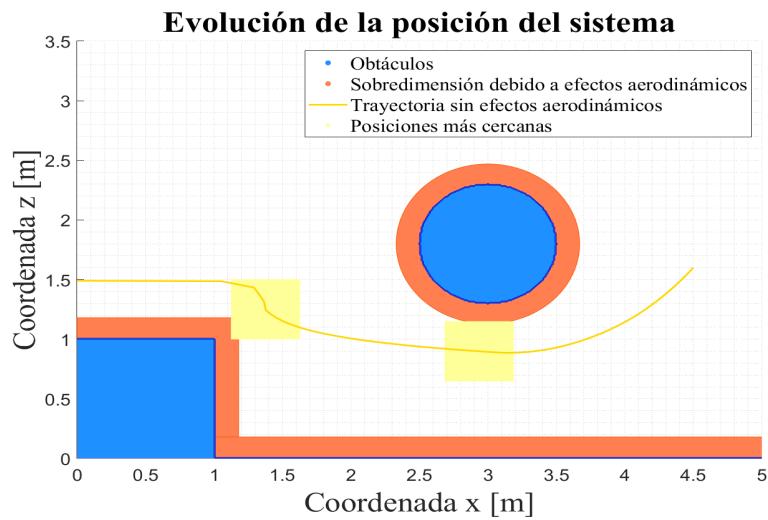
$$\begin{aligned}
 2(x - x_{cil}) \cdot u_x + 2(z - z_{cil}) \cdot u_z &\leq -\gamma \cdot h_{cilindro}(x, z) \\
 u_z &\leq -\gamma \cdot h_{suelo}(z)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Al introducir reiteradamente la solución del problema anterior en la dinámica del sistema para cada paso de integración, se obtiene de nuevo la evolución en el plano bidimensional, esta vez mostrada en la Figura 4.3.



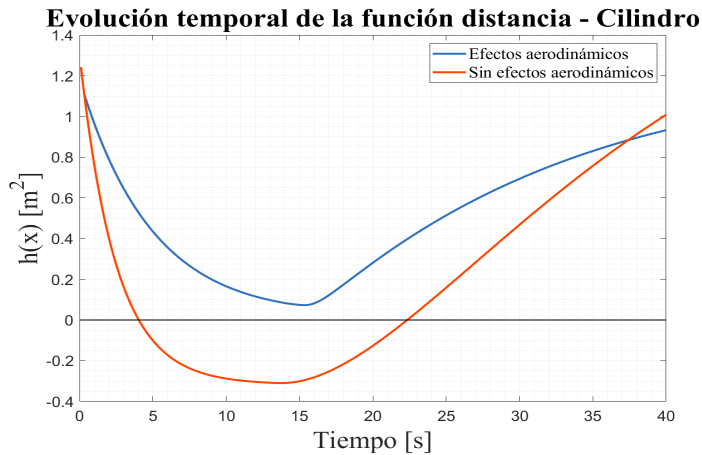
**Figura 4.3** El sistema consigue evitar tanto el cilindro como el cubo, no llegando a interferir con el suelo. Los dos rectángulos verde claro muestran la posición del sistema más cercana al cilindro y al cubo respectivamente. Se observa que la distancia a este último es crítica pero suficiente.

Una vez analizado el ejemplo anterior, se procede a repetir el cálculo, esta vez sin tener en cuenta las regiones de interferencias aerodinámicas y de colisión. Es decir, eliminando del desarrollo las variables *Extra* de sobredimensión.



**Figura 4.4** El sistema se introduce en la región de interferencia aerodinámica de tanto el cilindro como del cubo, pudiendo ocasionar efectos en el control de su vuelo.

Finalmente en la Figura 4.5 se representa la distancia del sistema al cilindro sobredimensionado en los instantes iniciales del movimiento, con respecto al tiempo en ambos desarrollos.



**Figura 4.5** La función obtenida sin tener en cuenta los efectos estudiados adquiere valores negativos, por lo que el sistema en este segundo caso interferiría con la región de interferencias aerodinámicas y/o la zona de colisión.

Las curvas obtenidas son muy diferentes. Mientras la curva obtenida al considerar la región de efectos aerodinámicos es siempre positiva, la curva sin la misma, traspasa el valor nulo. De no considerar los efectos aerodinámicos, el sistema, al querer trazar trayectorias muy cercanas a los obstáculos, tendería a introducirse en la región donde se producen estos fenómenos.

### 4.3 Ejemplo 5: Sistema robótico móvil y mapa de obstáculos de forma escalonada en el plano 2D

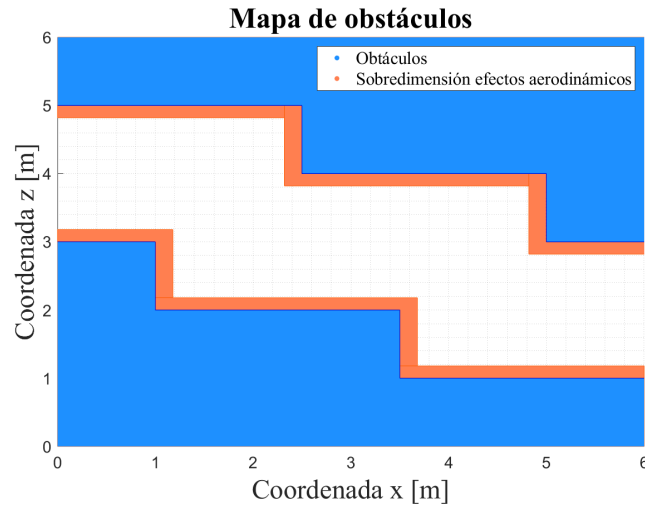
Se considera un sistema robótico que se desplaza en un plano 2D, de estado, variable de entrada y dinámica coincidentes con los del sistema robótico definido en la sección 2.4.

El objetivo del sistema será desplazarse en dirección paralela al eje de abscisas, evitando una serie de obstáculos estáticos situados en el plano de forma escalonada y similar al escenario expuesto en el subapartado 3.1.4. El sistema deberá tener en cuenta las regiones de interferencias aerodinámicas. Las condiciones de partida se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla 4.2** Condiciones iniciales del ejemplo 5: Sistema robótico y mapa de obstáculos de forma escalonada.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.75 \end{bmatrix} [m]$
Dimensiones del sistema	$0.5 \times 0.5 m$
Velocidad deseada del sistema	$\begin{bmatrix} v_{x_{des}} \\ v_{z_{des}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.05 \end{bmatrix} [m/s]$

El mapa de obstáculos está formado por un conjunto de 6 polítopos situados en la parte superior e inferior, por lo que en primer lugar habrá que definir la geometría de cada uno de ellos y matrices y vectores  $A_{obs}$  y  $b_{obs}$ . Estas matrices permiten calcular la mínima distancia existentes entre dos puntos del sistema y el obstáculo respectivamente, al igual que en los ejemplos anteriores. Se tendrá en cuenta la sobredimensión debida a la región de interferencias aerodinámicas. El escenario resultante es el que se muestra a continuación.

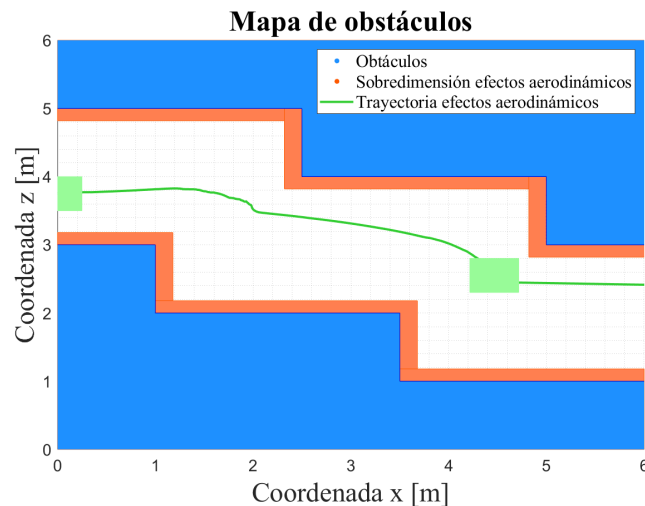


**Figura 4.6** Geometría sobredimensionada. Figura escalonada.

La matriz  $A_{sist}$  y el vector  $b_{sist}$  son coincidentes con las del ejemplo anterior en 4.1 al coincidir la geometría del UAV.

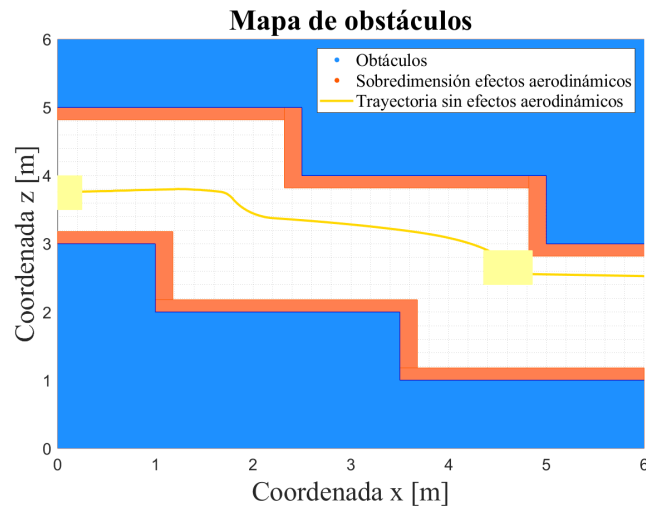
Para la resolución de se opta de nuevo por un único problema de optimización dual idéntico al mostrado sujeto esta vez a un conjunto ampliado de restricciones. Concretamente estas restricciones se corresponden con el grupo de 6 restricciones descritas, particularizadas para cada obstáculo. Se obtiene por lo tanto problema de optimización sujeto a un máximo de 36 restricciones y 50 incógnitas, las dos componentes de la variable de entrada factible  $u$  y los 8 valores de  $\hat{\lambda}_{sist}$  y  $\hat{\lambda}_{obs}$  asociados a cada par sistema-obstáculo. Cuanto más complejo sea el escenario del vuelo más restrictivo será el problema de optimización resultante.

Al introducir reiteradamente la solución del problema anterior en la dinámica del sistema para cada paso de integración, se obtiene de nuevo la evolución en el plano bidimensional.



**Figura 4.7** El sistema desciende de forma escalonada evitando los obstáculos en su entorno. El valor de  $\gamma$  empleado es de 0.2.

Al realizar la misma simulación sin tener en cuenta la sobredimensión debido a los efectos aerodinámicos, se obtienen los siguientes resultados.



**Figura 4.8** El sistema desciende de forma escalonada ajustando lo mínimo su trayectoria, adoptando posiciones que podrían violar la frontera de la región de efectos aerodinámicos.

Se observa que ambas curvas son diferentes, especialmente en el tramo inicial y final. En la segunda simulación el sistema se acerca peligrosamente a la primera esquina que se encuentra y se mantiene muy cerca de la superficie superior de la escalera en los últimos puntos de su trayectoria. El desplazamiento en la primera simulación es en cualquier caso más conservativo.





# 5 Implementación de la teoría CBF en UAVs

En este capítulo se recoge el proceso de implementación de la teoría CBF en el control de un UAV real. A partir de los datos experimentales, nuevas simulaciones y la introducción de modificaciones tanto en la dinámica del sistema como en la configuración de la restricción CBF, se probará el correcto funcionamiento de los conceptos estudiados en un escenario real de vuelo.

En este capítulo no se incluirá la sobredimensión geométrica de los obstáculos debido a las regiones de efecto aerodinámicas, simplemente se analizará una serie de herramientas que permitirán en futuros trabajos su estudio en profundidad.

## 5.1 Proceso de implementación

El proceso de implementación constará de una serie de etapas que permitirán la mejora progresiva del algoritmo a incluir en el control del UAV.

En primer lugar, se realizará un experimento preliminar en torno a un obstáculo real. A partir de las observaciones realizadas, se propondrá un cambio en la dinámica que modele mejor el comportamiento del sistema. A continuación, se llevarán a cabo una serie de simulaciones que probarán que la restricción CBF no será suficiente para posibilitar la evitación del obstáculo. Llegados a este punto, se propondrá una nueva configuración de esta que se adapte mejor a la dinámica planteada y se realizarán nuevas simulaciones. Finalmente se introducirán todas estas modificaciones, se realizará un experimento final y se extraerán conclusiones.

La evolución y mejora de la implementación de la teoría CBF se muestra en el siguiente esquema.



Figura 5.1 Esquema del sistema de control del UAV en el experimento.

## 5.2 Descripción de los experimentos

Atendiendo a ciertas modificaciones geométricas y de posición se llevaron a cabo un experimento preliminar y un experimento final en vuelo, realizado en las instalaciones del GRVC en la calle Torricelli, con la ayuda de Carlos Álvarez Cía y Antonio González Morgado y a partir de la integración de un código en C++ en la tarjeta de control del UAV.

En los experimentos, el controlador nominal dictaba al UAV a recorrer una trayectoria en línea recta desde la posición inicial hasta la posición intermedia, incitándolo a topar con un obstáculo recurrentemente. El obstáculo considerado se trata del muñeco negro que aparece en la figura 5.2, modelado como un cilindro vertical de radios diferentes y situado en el origen de coordenadas.



Figura 5.2 Escenario considerado en los experimentos realizados. Obstáculo y UAV.

El UAV utilizado durante los experimentos se trata de un *Fully Actuated* hexarotor de rotores inclinados, cuyo control se realiza en tres fases bien diferenciadas según el lugar donde se realizan las operaciones: la estación en tierra, el autopiloto del UAV y la plataforma aérea. El siguiente esquema muestra el proceso de control.

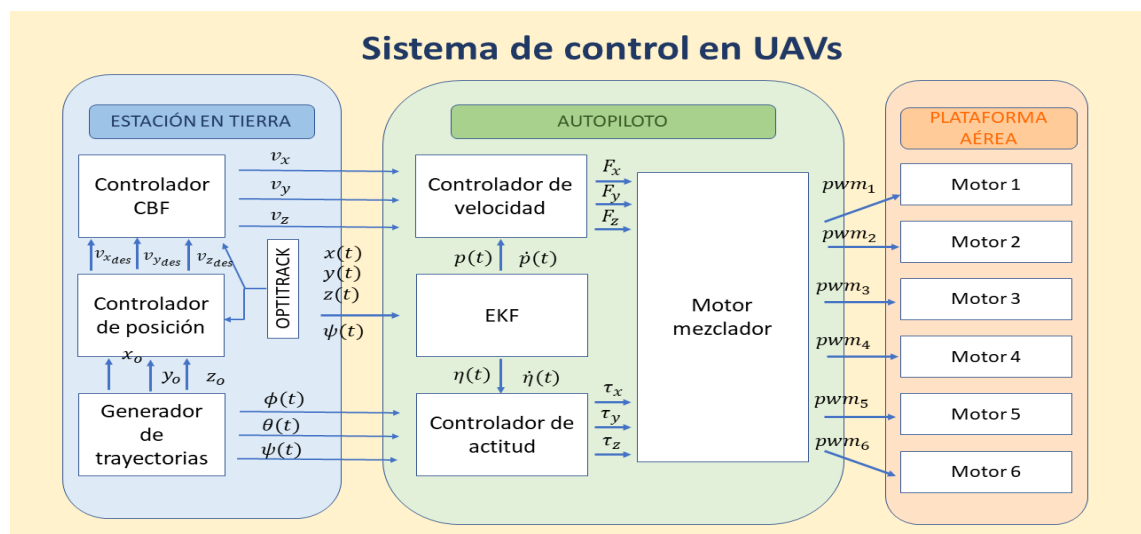


Figura 5.3 Esquema del sistema de control del UAV en el experimento.

En primer lugar en la estación en tierra, el generador de trayectorias proporciona la posición deseada del UAV, la cual usa el controlador de posición para calcular la velocidad de referencia del sistema.

Una vez calculada la velocidad deseada, en lo que comúnmente conocemos como controlador nominal, esta se introduce en el bloque CBF, que verifica si la velocidad propuesta cumple con los requisitos impuestos de evitación de obstáculos. El hecho de que las primeras operaciones se realicen en un ordenador en tierra se debe a la necesidad de una gran capacidad de cálculo, lo que implica la instalación en el UAV de una CPU más compleja y pesada y por lo tanto una mayor demanda de empuje y autonomía de este.

Ya en la tarjeta de control del UAV, el controlador de velocidad calcula la fuerza y el controlador de actitud el par necesario para ejecutar la maniobra. Estos datos eran introducidos en el motor mezclador, que a su vez obtiene la señal *pwm* necesaria en cada uno de los 6 rotores del UAV en la plataforma aérea.

### 5.3 Experimento A: Evitación de obstáculo con restricción CBF sencilla

En este primer experimento se utilizó una restricción CBF basada en la modelización del sistema a partir de la dinámica instantánea que se recuerda a continuación:

$$\left. \begin{matrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Se puede observar que las acciones de control de este modelo son las velocidades en X e Y del robot, las cuales se consideran que pueden ser modificadas de manera instantánea. Es por ello, que a esta dinámica la llamaremos "dinámica instantánea". Así mismo, al modelar el obstáculo como un cilindro vertical de radio 0.5 m, la función distancia CBF era:

$$h(x) = (x - x_{obs})^2 + (y - y_{obs})^2 - R^2 \quad (5.2)$$

De esta forma la restricción CBF resultante incluida en el problema de optimización a resolver por el bloque de control CBF es:

$$\dot{h}(x) = 2(x - x_{obs}) \cdot \dot{x} + 2(y - y_{obs}) \cdot \dot{y} = 2(x - x_{obs}) \cdot u_x + 2(y - y_{obs}) \cdot u_y \geq -\gamma \cdot h(x) \quad (5.3)$$

Como adelantábamos, el controlador nominal dicta al UAV a recorrer una trayectoria en línea recta desde la posición inicial hasta la posición intermedia, recogidas en la tabla 5.1, incitándolo a topar con el obstáculo descrito. Una vez volado este recorrido, lo insta a realizar la misma trayectoria de vuelta.

**Tabla 5.1** Posiciones de referencia del experimento 1: Trayectoria de ida y vuelta en torno a un obstáculo real.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$
Posición intermedia del sistema	$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$

En la Figura 5.4 se muestran los datos de la posición del UAV recogidos en el experimento. Se observa que el UAV modifica su trayectoria ante la presencia del obstáculo y la restricción CBF impuesta. Sin embargo, su desplazamiento no es lo suficientemente preciso y en algunos instantes llega a invadir la región ocupada por el obstáculo. Para este vuelo, se tomó un valor de  $\gamma = 3$ .

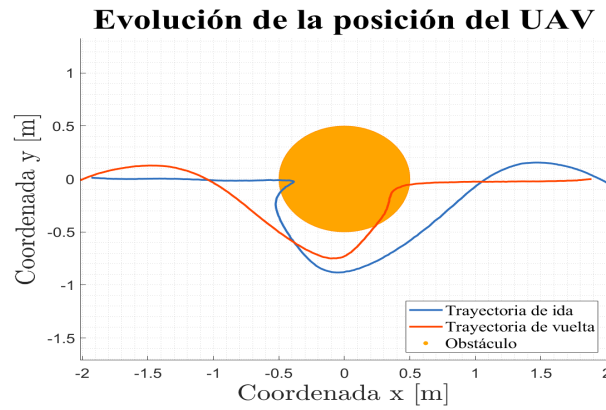


Figura 5.4 Evolución de la posición en el experimento 1.

En la Figura 5.5 se muestra la evolución temporal de la función CBF, la función distancia al objeto. En ella se observa que esta adquiere valores negativos. De no estar el muñeco sobredimensionado y haber incluido su geometría exacta en la restricción CBF, ambos habrían colisionado.

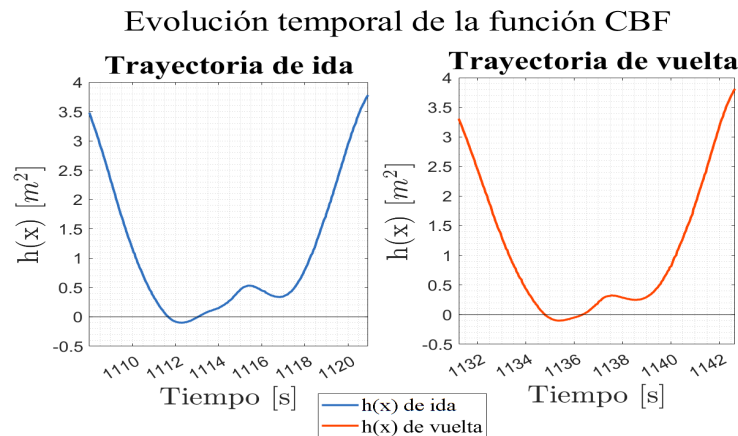


Figura 5.5 Evolución temporal de la función CBF en el experimento 1.

La violación de la frontera de la región a salvo en ambas trayectorias se debe a que la variable de entrada  $u$ , velocidad del sistema, considerada en la dinámica que gobierna el sistema, no es capaz de modificar su valor instantáneamente. La dinámica considerada es demasiado simple y el sistema no es capaz de reaccionar a tiempo ante la presencia de un obstáculo.

Esto podría solventarse cambiando la modelización del sistema teniendo en cuenta ecuaciones diferenciales más complejas que tengan como variable de entrada la aceleración del sistema o bien modelen la dinámica de la velocidad del sistema. A pesar de la falta de precisión del modelo, el UAV es consciente de la presencia del obstáculo y modifica de su trayectoria dentro de sus posibilidades.

#### 5.4 Simulación A: Evitación de obstáculo con restricción CBF sencilla y modelado del sistema

En la simulación inicial del ejemplo descrito en la sección 2.4 no se observan los fenómenos que si se han observado en los experimentos. En la simulación, el sistema logra evitar el obstáculo incluso para valores muy elevados de  $\gamma$  y no se percibe falta de precisión o de velocidad de reacción. Esta disparidad podría deberse a que el modelo del sistema no recoge lo suficientemente bien su comportamiento y por lo tanto no contempla posibles reacciones.

En esta sección se opta por simular de nuevo este ejemplo, esta vez utilizando la dinámica de primer orden para la velocidad del UAV. Las ecuaciones en espacio de estados quedarían de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \ddot{x} = a_x \\ \ddot{y} = a_y \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_p}{\tau_p} & 0 \\ 0 & \frac{K_p}{\tau_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x^d \\ v_y^d \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Esta dinámica es resultado modelar la velocidad de translación como un sistema de primer orden, cuya entrada es la velocidad deseada ( $v_x^d, v_y^d$ ) enviada a la plataforma. Como todo sistema de primer orden, la dinámica está caracterizada por las constantes  $K_p$  y  $\tau_p$ . Mientras  $\tau_p$  es la constante de tiempo del sistema y es medida de la rapidez con la que evoluciona el sistema,  $K_p$  es la ganancia estática del sistema y pendiente de la característica estática del sistema. La constante  $\tau_p$  se mide en la unidad de tiempo del modelo, en nuestro caso segundos, y es siempre positiva. La constante  $K_p$  se mide en el consciente de unidades de la señal de entrada entre la señal de salida, en nuestro caso adimensional, y puede tomar cualquier valor real. Ambas son constantes características del sistema y por lo tanto no modificables [25].

Al igual que en el ejemplo 1 incluido en el apartado 2.4, el sistema deberá desplazarse en dirección diagonal evitando un disco de radio 20 cm en su camino, partiendo de las siguientes condiciones iniciales.

**Tabla 5.2** Condiciones iniciales del ejemplo: Sistema robótico móvil 2D.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$
Posición del obstáculo	$\begin{bmatrix} x_{obs} \\ y_{obs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} [m]$
Velocidad deseada del sistema	$\begin{bmatrix} v_x^d \\ v_y^d \end{bmatrix} = 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1.1 - x \\ 1 - y \end{bmatrix} [m/s]$

La función CBF será idéntica a la del apartado anterior mostrada en la expresión (5.2), modificando el radio utilizado, ya que ambos obstáculos son modelados por circunferencias. En esta primera simulación también se empleará una restricción CBF basada en la dinámica instantánea, idéntica a la mostrada en la expresión (5.3).

Se realiza una nueva simulación con la nueva dinámica, para un valor de  $\kappa_p$  igual a 1, un valor de  $\tau_p$  igual a 0.7 s y un valor de  $\gamma$  igual a 40, y se obtienen los siguientes resultados. La evolución de la posición del sistema se muestra en la Figura 5.6.

Efectivamente para un modelo más ajustado, la simulación contempla un comportamiento del sistema más parecido al observado en el experimento. Al considerar un valor de  $\tau_p$  igual a 0.7 s estamos suponiendo que el sistema tarda 7 décimas de segundo en alcanzar la velocidad propuesta por el controlador. Esta aproximación es bastante más realista ya que, aunque sea un retardo pequeño, no contempla que sea posible adoptar la velocidad de forma inmediata. Este retardo supone que el sistema no es capaz de rectificar su trayectoria en consonancia con lo que dicta el controlador CBF a tiempo y acaba colisionando con el obstáculo, tal y como se observa en la Figura 5.6. Se observa que el sistema reacciona tarde y que la restricción CBF impuesta no es suficiente para evitar el obstáculo.

Al analizar la comparativa entre la velocidad real del sistema bajo la acción del controlador CBF y la velocidad propuesta por el controlador nominal en la Figura 5.8, se verifica que esta primera sí que cambia debido a la acción del controlador CBF, sin embargo no lo suficiente y no a tiempo. Para conseguir sortear el obstáculo, el sistema debería tomar la velocidad propuesta por el CBF en el instante en el que este lo propone

y de igual magnitud. En este caso, se limita cada una de las componentes de esta velocidad a un módulo de  $0.5 \text{ m/s}$  con el objetivo de que no demande velocidades desorbitadas.

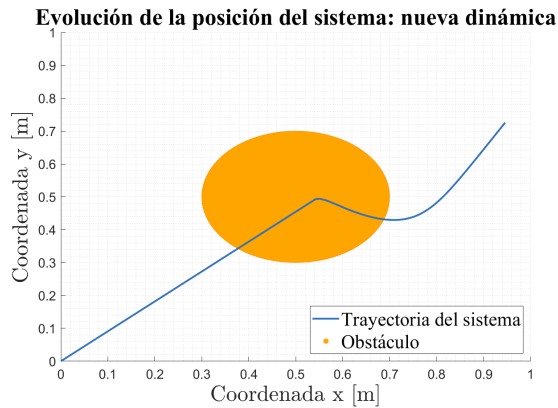


Figura 5.6 Evolución de la posición del sistema.

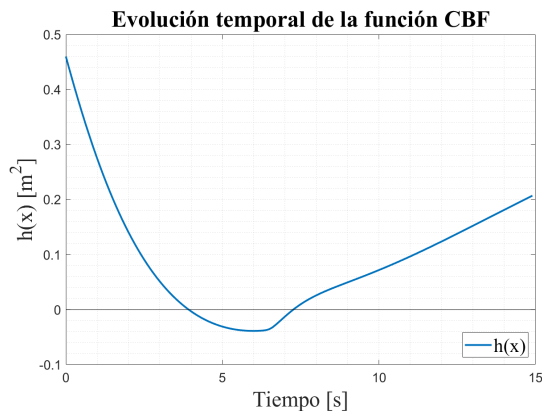


Figura 5.7 La función distancia  $h(x)$  adquiere valores negativos en torno a los 6 segundos. En este periodo de tiempo sistema y obstáculo colisionan.

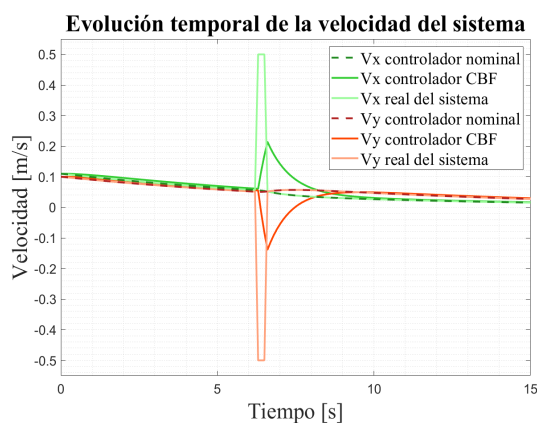
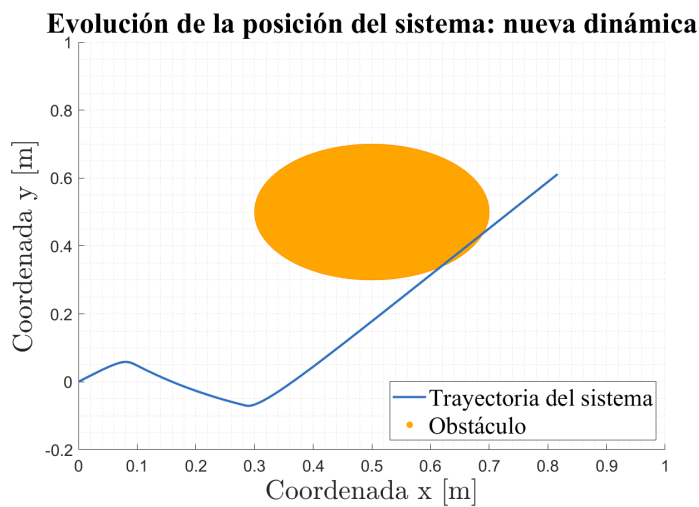


Figura 5.8 El sistema percibe la presencia del obstáculo en torno a los 6 segundos tratando de modificar la velocidad real y con ello la trayectoria. No obstante, no lo logra de manera efectiva. La limitación de la velocidad propuesta por el CBF es visible en torno a los mismos segundos, es decir, el CBF propone una velocidad correctiva aún mayor. En los últimos instantes, una vez rebasado el obstáculo, se observa que las velocidad real y la velocidad propuesta por el controlador CBF, tienden a la velocidad nominal.

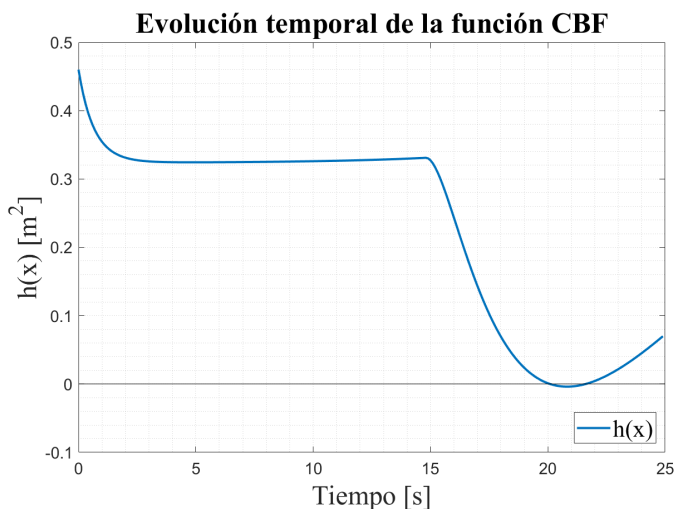
Para que el cambio de posición y velocidad se viera reflejado de manera satisfactoria en la trayectoria del sistema, manteniendo esta configuración de restricción CBF, habría que disminuir bien el valor de  $\gamma$ , la velocidad del sistema o ambos. Disminuyendo el valor de  $\gamma$  se conseguiría que el CBF aumentará su acción en la presencia del obstáculo, siguiendo una trayectoria más restrictiva y reaccionando antes. Si el controlador CBF reacciona mucho antes, a pesar del retardo natural del sistema, se llegaría a modificar la ruta a tiempo.

#### 5.4.1 Disminución del valor de $\gamma$ para una mejor respuesta del sistema

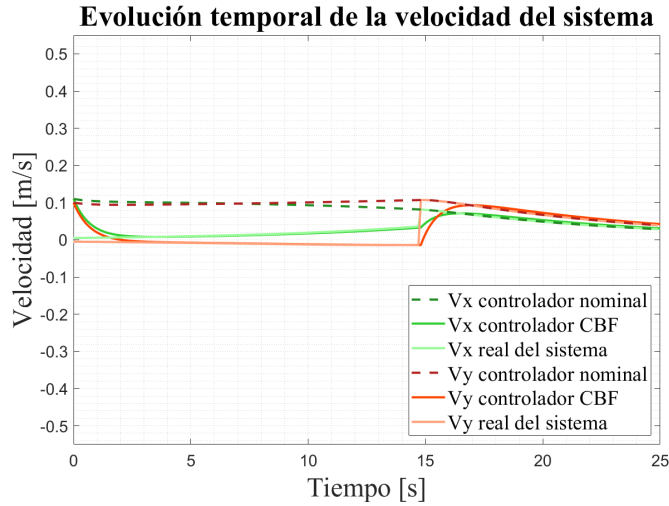
En este subapartado y con el objetivo de forzar la evitación del obstáculo por parte del sistema, se disminuye el valor de  $\gamma$ . Tras numerosas simulaciones con sucesión decreciente de valores, se obtiene una trayectoria más o menos admisible para un valor ínfimo de  $\gamma$  igual a  $1e-8$ . A partir de este valor las trayectorias resultantes varían muy poco.



**Figura 5.9** La acción del controlador CBF toma lugar cuando el sistema aún se encuentra muy alejado del obstáculo. El sistema modifica su trayectoria en el inicio de su movimiento creyendo que será suficiente para sortear el obstáculo, sin embargo, no lo logra completamente.



**Figura 5.10** El sistema y el obstáculo siguen colisionando mínimamente, y el signo de  $h(x)$  así lo muestra.



**Figura 5.11** El sistema sigue sin adoptar la velocidad propuesta por el CBF exactamente, pero es algo más similar. Para llevar a cabo una evitación del obstáculo controlada, ambas velocidades disminuyen en gran medida hasta valores en torno a 0 m/s.

La evitación del obstáculo no es posible siquiera para valores muy pequeños de  $\gamma$ , por lo que llegados a este punto, se opta por implementar una restricción CBF más compleja verdaderamente adaptada a la dinámica de primer orden empleada.

## 5.5 Simulación B: Evitación de obstáculo con restricción compleja y modelado del sistema

En esta sección se opta por simular por tercera vez este ejemplo, esta vez utilizando de nuevo la dinámica de primer orden mostrada en la expresión (5.4) y proponiendo una variación de la restricción CBF que tenga en cuenta la derivada segunda de la función distancia  $h(x)$ . Tanto el objetivo como las condiciones iniciales del sistema y obstáculo se mantienen y serán coincidentes con las mostradas en la tabla 5.2.

La función distancia  $h(x)$  será idéntica a la de la sección anterior mostrada en (5.2), sin embargo, optaremos por una restricción CBF algo más compleja.

Para que la restricción CBF a incluir dependa realmente de la variable de actuación es necesario derivar la función  $h(x)$  dos veces, ya que esta depende únicamente de  $x$  y el grado derivativo entre ella y  $u$  es 2. El sistema deberá satisfacer una restricción con la siguiente estructura [?]:

$$\ddot{h}(x) + \gamma \cdot h(x) + \xi \cdot \dot{h}(x) \geq 0 \quad (5.5)$$

De esta forma, el problema de optimización sujeto a esta restricción CBF queda:

$$\begin{aligned} u^* &= \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} \|u - u_{des}\|^2 \\ \text{sujeto a } &\ddot{h}(x) + \gamma \cdot h(x) + \xi \cdot \dot{h}(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

En este caso la segunda derivada de la función distancia es:

$$\ddot{h}(x) = 2 \cdot \dot{x}_{sist}^2 + 2 \cdot (x_{sist} - x_{obs}) \cdot \ddot{x}_{sist} + 2 \cdot \dot{y}_{sist}^2 + 2 \cdot (y_{sist} - y_{obs}) \cdot \ddot{y}_{sist} \quad (5.7)$$



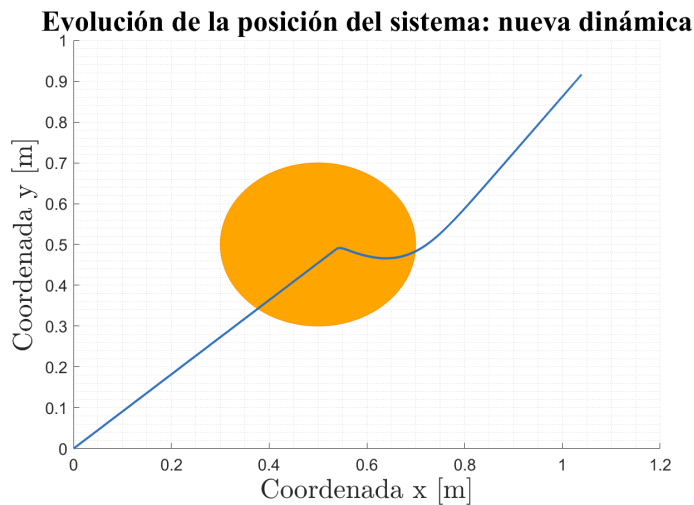
Atendiendo a la dinámica considerada del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{sist} &= -\frac{1}{\tau_p} \cdot \dot{x}_{sist} + \frac{\kappa_p}{\tau_p} \cdot u_x \\ \dot{y}_{sist} &= -\frac{1}{\tau_p} \cdot \dot{y}_{sist} + \frac{\kappa_p}{\tau_p} \cdot u_y \end{aligned} \tag{5.8}$$

Al sustituir en la expresión (5.7) nos queda:

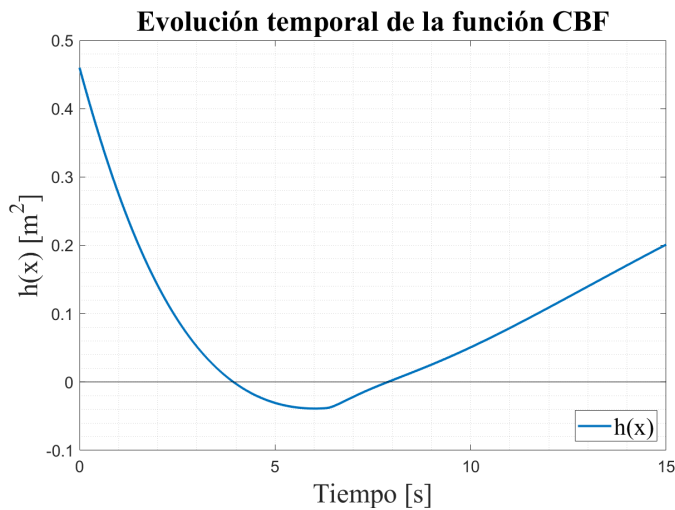
$$\ddot{h}(x) = 2 \cdot \dot{x}_{sist}^2 + 2 \cdot (x_{sist} - x_{obs}) \cdot \left[ \frac{1}{\tau_p} \cdot \dot{x}_{sist} + \frac{\kappa_p}{\tau_p} \cdot u_x \right] + 2 \cdot \dot{y}_{sist}^2 + 2 \cdot (y_{sist} - y_{obs}) \cdot \left[ -\frac{1}{\tau_p} \cdot \dot{y}_{sist} + \frac{\kappa_p}{\tau_p} \cdot u_y \right] \tag{5.9}$$

Para un valor de  $\kappa_p$  igual a 1, un valor de  $\tau_p$  igual a 0.7 s, un valor de  $\gamma$  igual a 40 y un valor de  $\xi$  igual a 10 se obtienen los siguientes datos de simulación.



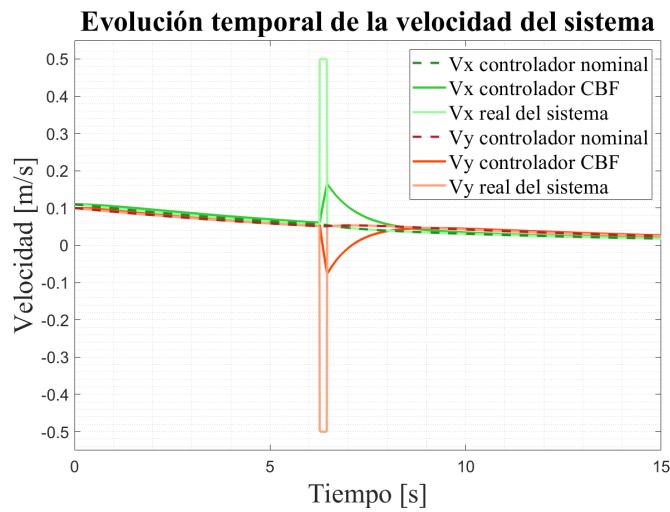
**Figura 5.12** El sistema modifica mínimamente su trayectoria.

Tal y como se esperaba, el modelo sigue reflejando de manera precisa el comportamiento del sistema. No obstante, a pesar de haber incluido una restricción CBF más compleja adaptada a la dinámica del sistema, UAV y obstáculo siguen colisionando para los valores estándares seleccionados de  $\gamma$  y  $\xi$ .



**Figura 5.13** La función  $h(x)$  adquiere valores negativos, muestra de la colisión de sistema y obstáculo .

Al analizar la comparativa entre la velocidad real del sistema y la velocidad dictada por el CBF se observa que estas siguen sin ser coincidentes y que el sistema no es capaz de seguir sus instrucciones bajo estas condiciones.



**Figura 5.14** De nuevo, la velocidad la propuesta por el controlador nominal, propuesta por el CBF y la adoptada finalmente por el controlador son muy dispares en torno a los 6 segundos, en los que el sistema se cruza con el obstáculo. El sistema sigue reaccionando tarde y en menor medida a la presencia del obstáculo.

Con el objetivo de controlar el sistema de forma más efectiva y lograr finalmente evitar el obstáculo a partir de esta nueva restricción CBF, se ajustan los valores de  $\gamma$  y  $\xi$ . De esta forma, aunque el sistema adopte estas velocidades con retardo, modificará su trayectoria satisfactoriamente.

### 5.5.1 Disminución del valor de $\gamma$ para una mejor respuesta del sistema con respuesta lenta

La disminución del valor de  $\gamma$  y un aumento de  $\xi$  permite seguir una trayectoria más conservativa al sistema. El controlador verá un gran peligro ante la presencia del obstáculo y propondrá una modificación de la velocidad a su medida. Aunque esta no sea completamente seguida por el sistema debido al retardo ya analizado, este evitará el obstáculo, porque ya de por sí la velocidad del CBF será de gran magnitud. La trayectoria seguida simplemente no será tan drástica como la propuesta.

En este nuevo subapartado se disminuye el valor de  $\gamma$  a 5 y se aumentará el valor de  $\xi$  a 100 se obtienen nuevos datos de simulación.



**Figura 5.15** El sistema evita el obstáculo correctamente.

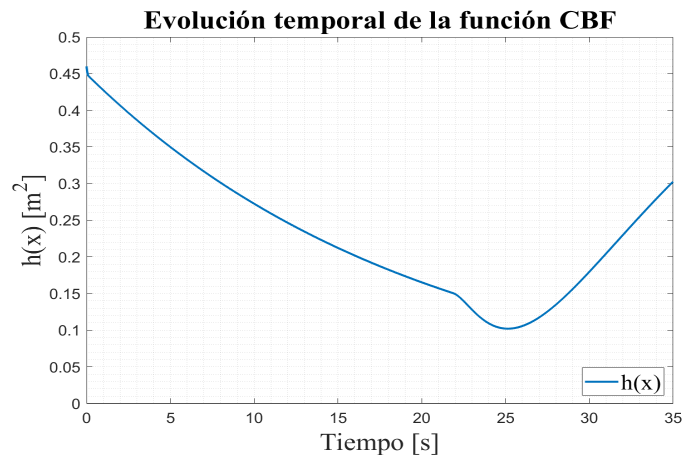


Figura 5.16 La función distancia  $h(x)$  es positiva en todo su dominio.

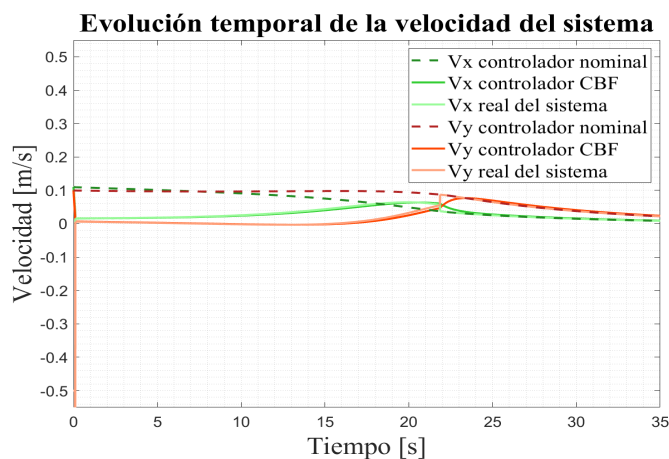


Figura 5.17 La velocidad propuesta por el controlador CBF y la velocidad real no coinciden en el inicio, sin embargo esto no impide que no se lleve a cabo la maniobra con éxito.

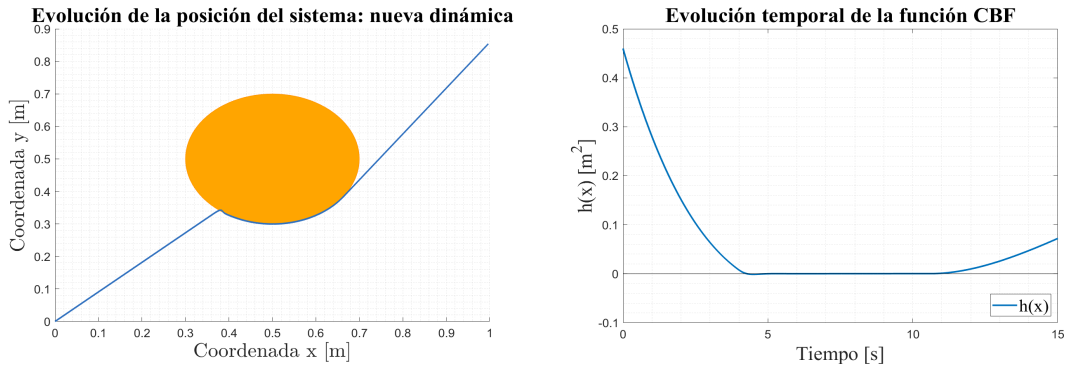
Con esta nueva restricción CBF y valores razonables de  $\gamma$  y  $\xi$ , la evitación del obstáculo para esta dinámica más realista es posible.

### 5.5.2 Disminución del valor de $\tau_p$ para la simulación del sistema con respuesta rápida

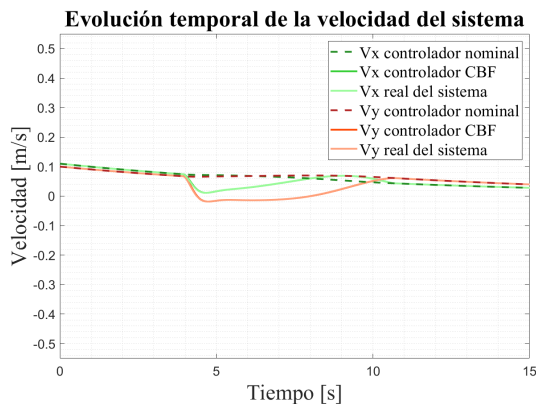
En este subapartado se disminuye el valor de  $\tau_p$  y por lo tanto la rapidez de respuesta del sistema. Para valores muy pequeños de la constante estaríamos asumiendo un comportamiento ideal en el que el sistema adopta la velocidad propuesta por el controlador de forma casi inmediata.

Concretamente para un valor de  $\tau_p$  igual a 0.01 s, se asume que en una centésima de segundo el sistema es capaz de modificar de forma precisa y controlada el empuje generado, su velocidad y en consecuencia su posición. Como sabemos, esto no es posible y se trataría de un comportamiento idealizado similar al considerado en la dinámica instantánea inicial.

Modificando únicamente el valor de  $\tau_p$  se obtienen los siguientes resultados de posición, evolución de la función distancia  $h(x)$  y comparativa de velocidades.



(a) La velocidad propuesta por el controlador CBF y la velocidad real coinciden. (b) La velocidad propuesta por el controlador CBF y la velocidad real coinciden.



(c) La velocidad propuesta por el controlador CBF y la velocidad real coinciden.

**Figura 5.18** Resultados obtenidos de la simulación con una dinámica de primer orden y una restricción CBF compara un comportamiento ideal .

### 5.6 Experimento B: Evitación de obstáculo con restricción CBF compleja

En este último apartado se realiza una comparativa de las trayectorias obtenidas al realizar un último experimento tres veces distintas, con modificaciones en el valor de  $\gamma$  empleado y la dinámica que modela el sistema. Concretamente se realizará este experimento para:

- Una modelización del sistema a partir de la dinámica instantánea expuesta en la expresión (5.1) y un valor de  $\gamma$  igual a 1.
- Una modelización del sistema a partir de la dinámica instantánea expuesta en la expresión (5.1) y un valor de  $\gamma$  igual a 3.
- Una modelización del sistema a partir de la dinámica de primer orden expuesta en la expresión (5.4) y un valor de  $\gamma$  igual a 1.

En este experimento, el sistema deberá realizar una serie de trayectorias sujetas a restricciones CBF en línea recta, en torno a un obstáculo real y entre las posiciones detalladas en la tabla 5.3. De nuevo, el obstáculo será modelado como un cilindro vertical, esta vez de radio igual a 1.3 m.

Finalmente en un último subapartado, se extraerán conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

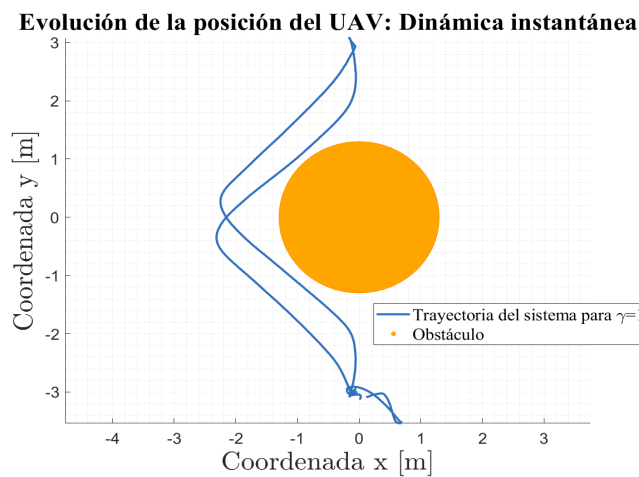
**Tabla 5.3** Posiciones de referencia del experimento 3: Comparativa de trayectorias en torno a un obstáculo real.

Posición inicial del sistema	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} [m]$
Posición intermedia del sistema	$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [m]$

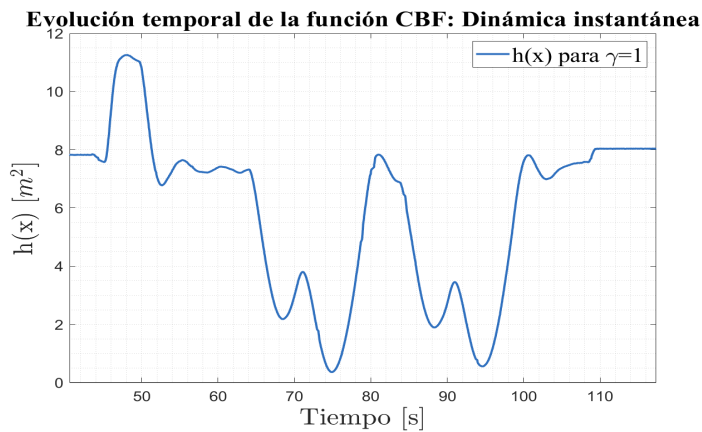
**5.6.1 Dinámica instantánea: Valor de  $\gamma$  restrictivo**

Como adelantábamos, en este subapartado se recogen los datos obtenidos al realizar el experimento para la dinámica instantánea y para un valor restrictivo de  $\gamma$  igual a 1. Al tratarse de un valor muy reducido, el sistema es capaz de sortear exitosamente el obstáculo.

Se muestra a continuación la evolución del sistema y el valor de la función distancia  $h(x)$ .



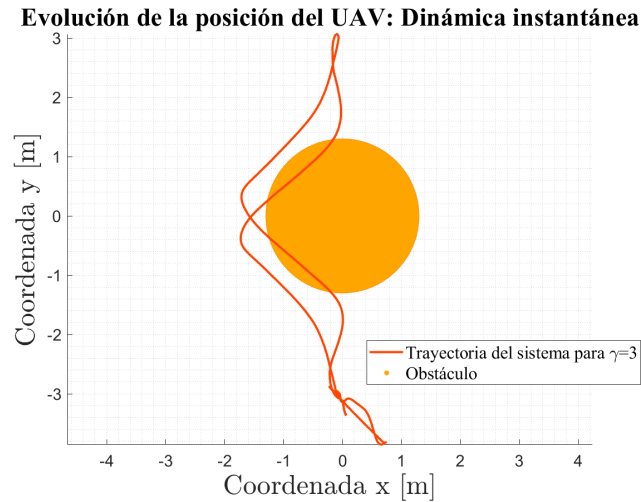
**Figura 5.19** El sistema ve un gran peligro en presencia del obstáculo, realiza maniobras de gran magnitud para evitar el obstáculo correctamente.



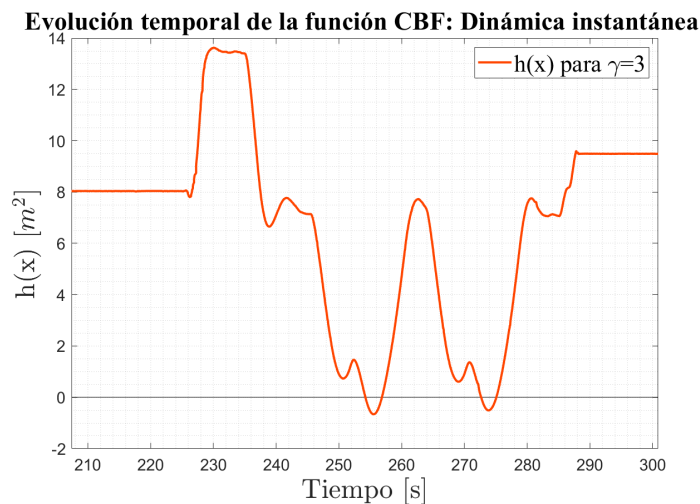
**Figura 5.20** La función distancia  $h(x)$  es positiva en todo su dominio. Obstáculo y sistema no colisionan.

### 5.6.2 Dinámica instantánea: Valor de $\gamma$ no restrictivo

En este subapartado se recogen los datos obtenidos al realizar de nuevo el experimento para la dinámica instantánea, esta vez para un valor menos restrictivo de  $\gamma$  igual 3. Se espera que el sistema opte por una trayectoria más cercana al objeto y que reaccione más tarde. Muestra de ello es la ruta a continuación.



**Figura 5.21** Se observa que esta vez el sistema no es capaz de evitar el obstáculo. El sistema sigue una trayectoria muy similar a la dictada por el controlador nominal hasta un punto muy avanzado y no responde a tiempo.

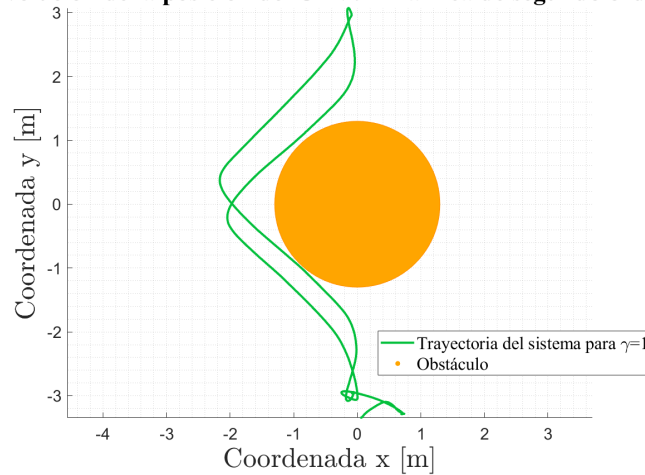


**Figura 5.22** La función distancia  $h(x)$  adquiere valores negativos.

### 5.6.3 Dinámica compleja: Valor de $\gamma$ restrictivo

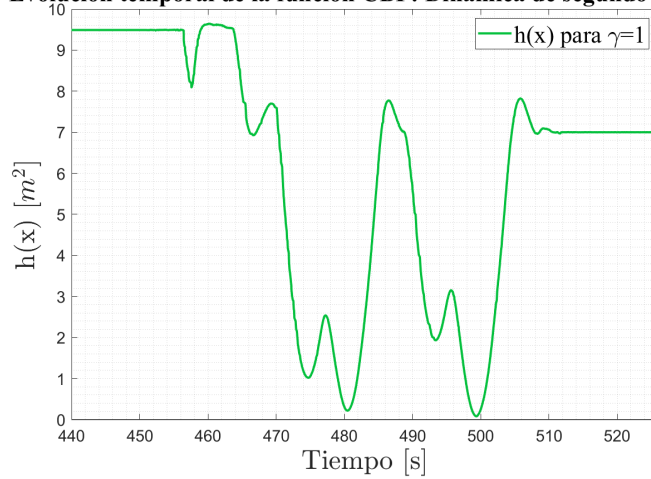
En este apartado se modela el sistema a partir de la dinámica compleja descrita en 5.4 y se realiza de nuevo el experimento. Como sabemos, esta dinámica refleja mejor el comportamiento del sistema al tener en cuenta el retardo que se produce al adoptar la velocidad adecuada. En este caso, se considera un valor de  $\tau_p$  igual a 1.2 s, obtenido experimentalmente en el Anexo A. Siendo la ganancia del sistema  $K_p$  igual a 1 y el valor de  $\gamma$  igual a 1, se obtienen los siguientes resultados.

**Evolución de la posición del UAV: Dinámica de segundo orden**



**Figura 5.23** El sistema evita con precisión el obstáculo.

**Evolución temporal de la función CBF: Dinámica de segundo orden**



**Figura 5.24** La función distancia  $h(x)$  es positiva en todo el dominio.

**5.6.4 Conclusiones**

Finalmente en este subapartado se muestra las características de cada experimento en una tabla comparativa, que incluye la dinámica empleada, el tipo de respuesta que se espera del sistema, el valor de  $\gamma$  y el valor mínimo de la función CBF, que nos da algo de información sobre como de lejos o de cerca pasa el sistema.

	Ensayo 3.1	Ensayo 3.2	Ensayo 3.3
Dinámica empleada	Sencilla	Sencilla	Compleja
Tipo de respuesta	Inmediata	Inmediata	1.2 s de retardo
Valor de $\gamma$	1	3	1
Valor mínimo de la función CBF	0.3585 $m^2$	-0.6598 $m^2$	0.0819 $m^2$

**Figura 5.25** Tabla comparativa de los experimentos realizados.

Tanto en el experimento 3.1 como en el experimento 3.2, se modela el sistema a partir de una dinámica

instantánea, en la que se considera un comportamiento ideal en el que el sistema es capaz de adaptar su velocidad instantáneamente. Para un valor restrictivo de  $\gamma$  igual a 1, el sistema ve un peligro inminente ante la presencia del obstáculo, modifica drásticamente su trayectoria y consigue evitar el obstáculo. No obstante, para un valor de  $\gamma$  igual a 3 menos restrictivo, esto no sucede. A mayor valor de  $\gamma$  se espera que el sistema siga una trayectoria más cercana al objeto, siguiendo un movimiento menos conservativo. Para  $\gamma$  igual a 3 el sistema se aproxima tanto al obstáculo que lo invade, siendo incapaz de evitarlo y obteniendo un valor mínimo de la función CBF negativo.

Por otro lado, en el experimento 3.3 se modela al sistema a partir de una dinámica compleja que refleja mejor el comportamiento real. Se considera un retardo de 1.2 s en el cambio de velocidad y se logra un valor mínimo de la función CBF más ajustado pero nunca negativo. El sistema logra evitar el obstáculo con mayor precisión, modificando su trayectoria lo menos posible.



## 6 Conclusiones

---

En conclusión, la teoría CBF nos da una infinidad de opciones a la hora de capacitar a un UAV para trazar trayectorias de forma correctiva y bajo unas restricciones de vuelo determinadas. En este trabajo se ha decidido enfocar su aplicación a la evitación de obstáculos y regiones de interferencia aerodinámica conjuntamente, sin embargo, son múltiples los usos adicionales que podrían darse a esta tecnología. Desde el vuelo controlado en una región del espacio autorizada, hasta la asistencia en vuelo de operadores humanos que garantice la seguridad en este.

Para una aplicación adecuada, es necesario conocer en profundidad los fundamentos matemáticos sobre los que se basa la teoría CBF y prestar atención a las modificaciones que diferentes geometrías de obstáculo y sistema puedan acarrear. Concretamente, es de vital importancia definir correctamente el espacio sobre el que se espera que vuele el UAV, así como las dimensiones del sistema y la función distancia entre ambos. Esta función será la función CBF y la base de la estructura de la restricción CBF a incluir en el problema de optimización que resolverá el controlador CBF. Una vez definida, se habrá de optar por un desarrollo primal o dual en función de si esta es explícita y diferenciable. Adicionalmente, será esencial ajustar con precisión el valor de la constante  $\gamma$ , que adapte el comportamiento del sistema de menos a más conservativo.

En cuanto a la evitación de las regiones de interferencias aerodinámicas asociadas a los obstáculos presentes en el espacio, se ha propuesto una sobredimensión y redefinición de las geometrías previamente descritas. Como sabemos, la presencia de obstáculos en las inmediaciones de un UAV puede afectar a la generación de empuje y por lo tanto al control de su vuelo. En este trabajo, se ha tratado de dar solución a esta problemática calculando una región adicional entorno a cada objeto, a partir de los valores de los coeficientes aerodinámicos de efecto suelo, techo y pared, que cuantifican el efecto de estas superficies en el empuje del UAV. Al realizar simulaciones teniendo en cuenta esta sobredimensión y sin ella, se han obtenido resultados diferentes, que muestran que de no considerar estas interferencias, el sistema acabaría interfiriendo con ellas, lo cual no es beneficioso.

Finalmente, gracias a la implementación de todos estos conceptos en el vuelo real de un UAV, hemos centrado la mirada en lo importante que es una correcta modelización del sistema a la hora de trasladar los resultados de simulación a un escenario físico. La modelización del sistema a partir de una dinámica demasiado sencilla puede llevar a una descripción incorrecta de su comportamiento. En este caso, se observó una falta de velocidad de reacción por parte del sistema, que no se veía reflejada en la simulación inicial. Al utilizar una dinámica más compleja y modificar la restricción CBF, se conseguía solventar esta dificultad.

En futuros trabajos, se espera indagar más acerca de la configuración de las regiones de interferencia aerodinámica y realizar ensayos en los que sí se tengan en cuenta. Con la continuación de este trabajo, podremos probar la validez de los conceptos desarrollados y acercarnos paulatinamente hacia una generación de trayectorias libres de obstáculos e interferencias aerodinámicas basada completamente en la teoría CBF.

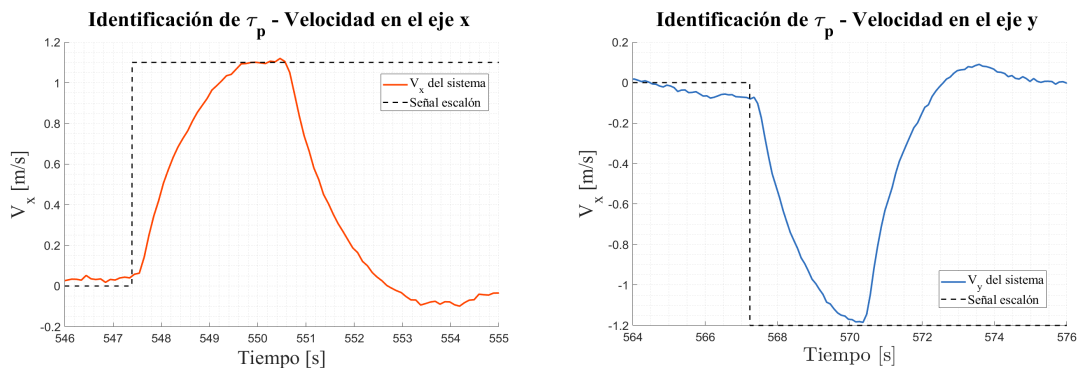


# Apéndice A

## Identificación del parámetro $\tau_p$

Para la identificación de la constante de tiempo  $\tau_p$  del UAV empleado en los experimentos se analiza la respuesta del sistema ante una entrada escalón. Concretamente, se registran los valores de las componentes de la velocidad en el eje  $x$  e  $y$  ante esta señal, y se calcula el intervalo en el que ambas magnitudes pasan de un valor nulo a adquirir el 63% del valor que dicta la entrada.

En el análisis de la componente de la velocidad en el eje  $x$  se envía una señal escalón de un valor  $1.1 \text{ m/s}$ . Para el análisis de la componente en el eje  $y$  se envía una señal escalón de valor  $-1.2 \text{ m/s}$ . Se muestran a continuación los resultados obtenidos.



(a) Velocidad del sistema en el eje  $x$  frente a una señal de entrada escalón. (b) Velocidad del sistema en el eje  $y$  frente a una señal de entrada escalón.

Figura A.1 Identificación de  $\tau_p$ .

El tiempo en alcanzar el 63% del valor es  $1.1529 \text{ s}$  en el eje  $x$  y  $1.3172 \text{ s}$  en el eje  $y$ . Al realizar la media entre ambos valores se obtiene  $1.2351 \text{ s}$ . Finalmente, en el desarrollo se considera un valor aproximado de  $\tau_p$  igual a  $1.2 \text{ s}$ .



# Índice de Figuras

---

1.1	Aplicaciones de <i>Aerial Manipulation</i>	1
1.2	Esquema cualitativo del campo fluido alejado de la superficie y bajo condiciones de efecto suelo, efecto techo y efecto pared, y las consecuencias dinámicas. La presión es denotada como $P$ , el empuje como $T$ , la fuerza $f$ y el momento $\tau$ . Los subíndices $a$ , $g$ , $c$ , $w$ y $e$ vienen de <i>away from surface</i> , <i>under ground effect</i> , <i>under ceiling effect</i> , <i>under wall effect</i> y <i>external</i> respectivamente [6]	2
1.3	Planificación de rutas libre de objetos sujeta a restricciones cinemáticas y dinámicas empleando diferentes procedimientos [9]	3
1.4	Planificación de rutas libre de objetos y efectos aerodinámicos [12]	3
2.1	En este caso el obstáculo se sitúa en el punto $(0.5, 0.5) m$ y tiene un radio de $0.1 m$	6
2.2	El obstáculo es la esfera roja. La esfera verde es el volumen de seguridad entorno a la cabeza del manipulador [14]	6
2.3	Estabilización exponencial de la restricción CBF. En la imagen la función CBF se corresponde con la función $B(x)$ [17]	7
2.4	Sistema de control del sistema robótico	8
2.5	Algoritmo de evitación de obstáculos	8
2.6	El sistema evita el obstáculo denotado por el círculo naranja definido anteriormente, adaptando su velocidad a la factible en cada instante, la deseada cuando es posible	10
2.7	La función CBF adquiere valores cercanos a 0 en torno a los $0.05s$ , sin embargo el sistema rectifica su trayectoria y $h(x)$ no llega a alcanzar el valor nulo. Se observa que para valores mayores de $\gamma$ la restricción es menos conservativa y la función $h(x)$ alcanza un valor más cercano a 0	10
2.8	El sistema evita de nuevo el obstáculo, en este caso móvil	11
2.9	La función $h(x)$ adquiere valores muy cercanos a 0, sin llegar a alcanzar dicho valor	12
2.10	Se observa que al contener un rectángulo en la elipse de menor tamaño este queda sobredimensionado. La región rayada es una zona adicional a la geometría base de la figura	12
2.11	Se plantean dos problemas de optimización, uno para el cálculo de la distancia mínima entre polítopos y otro para el cálculo de la variable de actuación factible. El primero de ellos será transformado a partir del teorema de los multiplicadores de Lagrange y el teorema de la Dualidad Débil y resuelto parcialmente aplicando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker hasta obtener su versión dual. El segundo de ellos, estará sujeto a una restricción CBF obtenida al imponer una solución factible abordable a partir de la función de Lagrange deducida	13
2.12	Sistema de referencia y cálculo de distancia entre polítopos [18]	13
2.13	Gradiente y conjunto de direcciones que mejoran la función objetivo [21]	16
2.14	Gradiente y conjunto de direcciones que llevan a soluciones factibles del problema [21]	17
2.15	Superposición del gradiente y óptimo local del problema restringido [21]	17
2.16	La región de direcciones factibles y de mejora de las funciones objetivos son excluyentes, por lo que se trata de un óptimo local [21]	17
2.17	Función semi-continua superiormente. El punto azul se refiere a $f(x_0)$ [22]	20
2.18	El sistema evita el obstáculo denotado por el rectángulo naranja definido anteriormente, adaptando su velocidad a la factible en cada instante, la deseada cuando es posible	22

2.19	La función CBF adquiere valores cercanos a 0 en torno a los 6 s, sin embargo el sistema rectifica su trayectoria y $h(x)$ no llega a alcanzar el valor nulo	22
3.1	Mapas de obstáculos. Cubo, cilindro y suelo	24
3.2	Se obtiene un valor de $C_{IGE}$ igual a 1 en todo el mapa, exceptuando las inmediaciones superiores del cubo y del cilindro y el propio suelo. La zona de colisión es la zona azul claro en la que por las dimensiones del rotor el UAV, este colisionaría con el obstáculo	24
3.3	Se obtiene un valor de $C_{ICE}$ igual a 1 en todo el mapa, exceptuando región inferior al cilindro.	25
3.4	Mapa de obstáculos. Figura escalonada	26
3.5	Representación gráfica de los valores de coeficientes aerodinámicos en cada punto del espacio	26
4.1	El obstáculo crece al incluir las regiones de efectos aerodinámicos y las zonas de colisión, de nuevo marcadas por un azul más claro	27
4.2	Geometría sobredimensionada. Cubo, cilindro y suelo	28
4.3	El sistema consigue evitar tanto el cilindro como el cubo, no llegando a interferir con el suelo. Los dos rectángulos verde claro muestran la posición del sistema más cercana al cilindro y al cubo respectivamente. Se observa que la distancia a este último es crítica pero suficiente	30
4.4	El sistema se introduce en la región de interferencia aerodinámica de tanto el cilindro como del cubo, pudiendo ocasionar efectos en el control de su vuelo	30
4.5	La función obtenida sin tener en cuenta los efectos estudiados adquiere valores negativos, por lo que el sistema en este segundo caso interferiría con la región de interferencias aerodinámicas y/o la zona de colisión	31
4.6	Geometría sobredimensionada. Figura escalonada	32
4.7	El sistema desciende de forma escalonada evitando los obstáculos en su entorno. El valor de $\gamma$ empleado es de 0.2	32
4.8	El sistema desciende de forma escalonada ajustando lo mínimo su trayectoria, adoptando posiciones que podrían violar la frontera de la región de efectos aerodinámicos	33
5.1	Esquema del sistema de control del UAV en el experimento	35
5.2	Escenario considerado en los experimentos realizados. Obstáculo y UAV	36
5.3	Esquema del sistema de control del UAV en el experimento	36
5.4	Evolución de la posición en el experimento 1	38
5.5	Evolución temporal de la función CBF en el experimento 1	38
5.6	Evolución de la posición del sistema	40
5.7	La función distancia $h(x)$ adquiere valores negativos en torno a los 6 segundos. En este periodo de tiempo sistema y obstáculo colisionan	40
5.8	El sistema percibe la presencia del obstáculo en torno a los 6 segundos tratando de modificar la velocidad real y con ello la trayectoria. No obstante, no lo logra de manera efectiva. La limitación de la velocidad propuesta por el CBF es visible en torno a los mismos segundos, es decir, el CBF propone una velocidad correctiva aún mayor. En los últimos instantes, una vez rebasado el obstáculo, se observa que las velocidad real y la velocidad propuesta por el controlador CBF, tienden a la velocidad nominal	40
5.9	La acción del controlador CBF toma lugar cuando el sistema aún se encuentra muy alejado del obstáculo. El sistema modifica su trayectoria en el inicio de su movimiento creyendo que será suficiente para sortear el obstáculo, sin embargo, no lo logra completamente	41
5.10	El sistema y el obstáculo siguen colisionando mínimamente, y el signo de $h(x)$ así lo muestra	41
5.11	El sistema sigue sin adoptar la velocidad propuesta por el CBF exactamente, pero es algo más similar. Para llevar a cabo una evitación del obstáculo controlada, ambas velocidades disminuyen en gran medida hasta valores en torno a 0 m/s	42
5.12	El sistema modifica mínimamente su trayectoria	43
5.13	La función $h(x)$ adquiere valores negativos, muestra de la colisión de sistema y obstáculo	43
5.14	De nuevo, la velocidad la propuesta por el controlador nominal, propuesta por el CBF y la adoptada finalmente por el controlador son muy dispares en torno a los 6 segundos, en los que el sistema se cruza con el obstáculo. El sistema sigue reaccionando tarde y en menor medida a la presencia del obstáculo	44
5.15	El sistema evita el obstáculo correctamente	44
5.16	La función distancia $h(x)$ es positiva en todo su dominio	45

---

5.17	La velocidad propuesta por el controlador CBF y la velocidad real no coinciden en el inicio, sin embargo esto no impide que no se lleve a cabo la maniobra con éxito	45
5.18	Resultados obtenidos de la simulación con una dinámica de primer orden y una restricción CBF compara un comportamiento ideal	46
5.19	El sistema ve un gran peligro en presencia del obstáculo, realiza maniobras de gran magnitud para evitar el obstáculo correctamente	47
5.20	La función distancia $h(x)$ es positiva en todo su dominio. Obstáculo y sistema no colisionan	47
5.21	Se observa que esta vez el sistema no es capaz de evitar el obstáculo. El sistema sigue una trayectoria muy similar a la dictada por el controlador nominal hasta un punto muy avanzado y no responde a tiempo	48
5.22	La función distancia $h(x)$ adquiere valores negativos	48
5.23	El sistema evita con precisión el obstáculo	49
5.24	La función distancia $h(x)$ es positiva en todo el dominio	49
5.25	Tabla comparativa de los experimentos realizados	49
A.1	Identificación de $\tau_p$	53





# Bibliografía

---

- [1] Evaluating the use of drones for Bridge Inspection. [Online]. Available: <https://www.dronitech.com/evaluating-the-use-of-drones-for-bridge-inspection/>
- [2] Search & Rescue. [Online]. Available: <https://www.onyxstar.net/search-and-rescue-by-drone/>
- [3] Dron de carga. [Online]. Available: <https://www.embention.com/es/projects/drone-de-carga/>
- [4] M. Ball. MQ-25 UAS Successfully Refuels F/A-18 Mid-Air. [Online]. Available: <https://www.unmannedsystemstechnology.com/2021/06/mq-25-becomes-first-uav-to-refuel-another-aircraft/>
- [5] A. Ollero, and B. Siciliano, *Aerial Robotic Manipulation: Research, Development and Applications*. Springer, 2019.
- [6] A. Matus-Vargas, G. Rodriguez-Gomez, and J. Martinez-Carranza, “Ground effect on rotorcraft unmanned aerial vehicles: a review,” *Intelligent Service Robotics*, vol. 14, pp. 99–118, 2021.
- [7] S. M. LaValle, and J. J. Kuffner Jr, “Randomized kinodynamic planning,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 20, no. 5, pp. 378–400, 1999.
- [8] E. Koyuncu, and G. Inalhan, “A probabilistic B-spline motion planning algorithm for unmanned helicopters flying in dense 3D environments,” *Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 815–821, 2008.
- [9] C. Richter, A. Bry, and N. Roy, “Polynomial trajectory planning for aggressive quadrotor flight in dense indoor environments,” *Robotics Research*, pp. 649–666, 2016.
- [10] L. Danjun, Z. Yan, S. Zongying, and L. Geng, “Autonomous landing of quadrotor based on ground effect modelling,” *34th Chinese Control Conference (CCC)*, p. 5647–5652, 2015.
- [11] P. J. Sanchez-Cuevas, G. Heredia, and A. Ollero, “Multirotor UAS for bridge inspection by contact using the ceiling effect,” *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2017.
- [12] A. Caballero, P. J. Sanchez-Cuevas, M. Bejar, G. Heredia, M. A. Trujillo, and A. Ollero, “An Aerodynamic Extension for Motion Planning with Dynamics Awareness in Aerial Long-Reach Manipulators,” *International Journal of Aerospace Engineering*, 2020.
- [13] Lipschitz Function. [Online]. Available: <https://mathworld.wolfram.com/LipschitzFunction.html>
- [14] F. Ferraguti, C. Talignani Landi, A. Singletary, H. Lin, A. Ames, C. Secchi, and M. Bonfè, “Safety and Efficiency in Robotics: The Control Barrier Functions Approach,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 29, no. 3, pp. 139–151, 2022.
- [15] J. Song, Z. Zuo, and M. Basin, “New Class  $\kappa_\infty$  Function-Based Adaptive Sliding Mode Control Design,” *IEEE Transactions on automatic control*, 2020.
- [16] Y. Eliashberg, “Math 53H: The Lie derivative,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2011.

- [17] J. J. Choi. (2021) A Tutorial on CLF, CBF / CBF-CLF-Helper Manual. [Online]. Available: <https://github.com/HybridRobotics/CBF-CLF-Helper>
- [18] A. Thirugnanam, J. Zeng, and K. Sreenath, “Duality-based Convex Optimization for Real-time Obstacle Avoidance between Polytopes with Control Barrier Functions,” *2022 American Control Conference (ACC)*, 2022.
- [19] D. Knowles, “Lagrangian Duality for Dummies,” 2010.
- [20] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [21] “Constrained optimization 1: The Karush- Kuhn- Tucker Conditions.”
- [22] Espinosa de los Monteros, *Diccionario de matemática*. Cultural S.A, 2001.
- [23] P. Glotfelter, J. Cortés, and M. Egerstedt , “Boolean Composability of Constraints and Control Synthesis for Multi-Robot Systems via Nonsmooth Control Barrier Functions,” *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications*, 2018.
- [24] P. J. Sánchez Cuevas , “Modelling and control of aerial manipulators considering aerodynamic effects,” *Tesis Doctoral por la Universidad de Sevilla, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática*, 2020.
- [25] D. Muñoz de la Peña, F. Salas, D.Limón and C. Bordons, *Fundamentos de Control Automático*. Sección de Publicaciones Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla.
- [26] B. Xu and K. Sreenath, “Safe Teleoperation of Dynamic UAVs Through Control Barrier Functions,” *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2018.