

Trabajo Fin de Grado Grado en Ingeniería Aeroespacial

Conos de Taylor Coaxiales: soluciones con emisión de gas.

Autor: Máximo Beas Martínez

Tutor: Alfonso Miguel Gañán-Calvo

**Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Conos de Taylor Coaxiales: soluciones con emisión de gas.

Autor:

Máximo Beas Martínez

Tutor:

Alfonso Miguel Gañán-Calvo

Catedrático de Universidad

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023

Trabajo Fin de Grado: Conos de Taylor Coaxiales: soluciones con emisión de gas.

Autor: Máximo Beas Martínez
Tutor: Alfonso Miguel Gañán-Calvo

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

*A mi abuelo Jofi,
todavía sigo aprendiendo de tí.*

Agradecimientos

Mis padres Máxi y Arancha, mi hermana África y yo formamos una familia llena de amor. Me considero una persona muy afortunada por compartir mi vida con estas personas tan maravillosas. Gracias por todo lo que hacéis por mí. Juntos somos casa.

Gracias también a mis abuelos, tíos y primos. Siempre habéis sido un espejo en el que mirarse y me enseñáis lecciones que no están recogidas en ningún libro.

Gracias a Carmen, por apoyarme y por quererme. Por todo lo que la vida nos tiene preparado y porque juntos somos invencibles. Además de ser una persona muy especial, los esquemas e imágenes de este trabajo llevan su firma.

Gracias a todos mis amigos. Sois una parte fundamental de mí y os aprecio más de lo que nunca podré mostrar.

Gracias a Alfonso, mi tutor, que ha sacado la mejor versión de mí mismo, me ha hecho crecer como investigador, como ingeniero y como persona. Gracias por haberme aceptado para realizar este trabajo contigo y gracias por todo lo que me has enseñado.

Gracias a los profesores José María López-Herrera y Miguel Ángel Herrada, que me han ayudado siempre que lo he necesitado. El profesor López-Herrera me invitó a trabajar en su despacho y me permitió utilizar su ordenador para poder terminar el trabajo. El profesor Herrada fue la persona que me introdujo al mundo de la Mecánica de Fluidos en el segundo curso del grado, el cual me apasiona desde entonces. Además, estos dos profesores han contribuido enormemente a este trabajo puesto que han adaptado un método de resolución creado por ellos para que pueda utilizarlo y se ajuste al problema que he tratado. Siempre estaré agradecido con vosotros.

Gracias al profesor Bosco García, que me atendió y ayudó cuando acudí a él.

Gracias a los profesores que tanto me han enseñado y a la Universidad de Sevilla por esta experiencia.

Gracias también a tí, que estás leyendo este trabajo.

Máximo Beas Martínez

Sevilla, 2023

Resumen

Tratamos de encontrar una solución del problema electrohidrodinámico de los conos de Taylor coaxiales con tres dominios siendo la fase más interna un fluido gaseoso. Primero se resuelve la solución en equilibrio analíticamente y posteriormente se busca una solución real con emisión de microburbujas gaseosas.

Abstract

We aim to find a solution to the electrohydrodynamic problem of coaxial Taylor cones with three domains so that the inner phase is a gaseous fluid. Firstly, the static solution is analytically solved and afterwards a real solution with emission of a gas jet leading to a stream of microbubbles is searched.

Índice Abreviado

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract</i>	VII
<i>Índice Abreviado</i>	IX
<i>Notación</i>	XIII
1 Introducción y Antecedentes	1
1.1 El cono de Taylor y el electrospray	1
1.2 El experimento electrohidrodinámico	3
1.3 Evolución del electrospray	4
2 La solución estacionaria	7
2.1 La solución buscada	7
2.2 Planteamiento del problema	8
2.3 Ecuaciones generales del problema	9
2.4 Resolución del problema	13
2.5 Resultados obtenidos	18
3 Islas paramétricas	21
3.1 Definición y motivaciones	21
3.2 Extremos paramétricos	21
3.3 Planos paramétricos	24
3.4 Optimizaciones	28

4	Una nueva solución	31
4.1	Alternativas consideradas	31
4.2	Combinaciones líquidas	33
4.3	La solución real con emisión	33
5	Conclusiones y próximos pasos	37
5.1	El problema de la conductividad	37
5.2	Coherencia de resultados	38
5.3	Las islas paramétricas	38
5.4	Una solución con emisión de gas	39
Apéndice A	Resolución analítica del problema con 2 dominios (J=1)	41
Apéndice B	Resolución analítica del problema con 3 dominios (J=2)	51
Apéndice C	ISLAS PARAMÉTRICAS	67
Apéndice D	Investigación para lograr solución analítica con gas en el interior	77
Apéndice E	PROGRESO CON MATLAB®	87
	<i>Índice de Figuras</i>	89
	<i>Bibliografía</i>	91

Índice

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract</i>	VII
<i>Índice Abreviado</i>	IX
<i>Notación</i>	XIII
1 Introducción y Antecedentes	1
1.1 El cono de Taylor y el electrospray	1
1.2 El experimento electrohidrodinámico	3
1.3 Evolución del electrospray	4
1.3.1 Solución autosemejante con el Leaky Dielectric Model	4
1.3.2 Simulación Numérica	4
2 La solución estacionaria	7
2.1 La solución buscada	7
2.2 Planteamiento del problema	8
2.3 Ecuaciones generales del problema	9
2.4 Resolución del problema	13
2.4.1 Resolución con dos dominios ($J = 1$)	13
2.4.2 Resolución con tres dominios ($J = 2$)	15
2.5 Resultados obtenidos	18
3 Islas paramétricas	21
3.1 Definición y motivaciones	21
3.2 Extremos paramétricos	21
3.3 Planos paramétricos	24
3.4 Optimizaciones	28
4 Una nueva solución	31
4.1 Alternativas consideradas	31
4.2 Combinaciones líquidas	33
4.3 La solución real con emisión	33
5 Conclusiones y próximos pasos	37
5.1 El problema de la conductividad	37
5.2 Coherencia de resultados	38

5.3	Las islas paramétricas	38
5.4	Una solución con emisión de gas	39
Apéndice A	Resolución analítica del problema con 2 dominios (J=1)	41
Apéndice B	Resolución analítica del problema con 3 dominios (J=2)	51
Apéndice C	ISLAS PARAMÉTRICAS	67
Apéndice D	Investigación para lograr solución analítica con gas en el interior	77
Apéndice E	PROGRESO CON MATLAB®	87
	<i>Índice de Figuras</i>	89
	<i>Bibliografía</i>	91

Notación

τ_H	Tiempo de relajación hidrodinámico
τ_C	Tiempo de relajación de la carga eléctrica
κ_r	Cociente de conductividad interna y externa
r	Coordenada radial en la formulación del problema
θ	Coordenada angular en la formulación del problema
j	Refiere a la fase o interfaz entre fase j y $j-1$ en la formulación del problema
α_j	Ángulo de la interfaz j
$\varepsilon^{(j)}$	Permitividad relativa del fluido en la fase j
$K^{(j)}$	Conductividad eléctrica del fluido en la fase j
$\mu^{(j)}$	Viscosidad dinámica del fluido en la fase j
Γ_j	Tensión superficial en la interfaz j
$\beta^{(j)}$	Cociente de permitividad relativa del fluido de la fase j y la fase 1
$\kappa^{(j)}$	Cociente de conductividad eléctrica del fluido de la fase j y la fase 1
$\lambda^{(j)}$	Cociente de viscosidad dinámica del fluido de la fase j y la fase 1
γ_j	Cociente de tensión superficial de la interfaz j y la interfaz 1
E	Operador diferencial
Ψ	Función de flujo de Stokes
Φ	Función del potencial eléctrico
v_r	Componente radial de la velocidad
v_θ	Componente angular de la velocidad
E_r	Componente radial del campo eléctrico
E_θ	Componente angular del campo eléctrico
\propto	Proporcional
atanh	Arco-tangente hiperbólica
$B_i^{(j)}$	Constantes del flujo de stokes ($i = 1,2,3,4$)
$A_i^{(j)}$	Constantes del potencial eléctrico ($i = 1,2$)
$\tau_{\theta\theta}$	Esfuerzo normal hidrodinámico
$\tau_{M\theta\theta}$	Esfuerzo normal eléctrico
$\tau_{r\theta}$	Esfuerzo tangencial hidrodinámico

$\tau_{Mr\theta}$	Esfuerzo tangencial eléctrico
σ_j	Densidad superficial de carga en la interfaz j
π	Número Pi
α_{capa}	Ángulo de la capa intermedia en el problema con tres dominios
cP	Centipoise, unidad de medida de la viscosidad. ($1cP = 0.001Pa \cdot s$)

1 Introducción y Antecedentes

1.1 El cono de Taylor y el electrospray

A finales del siglo XVI, William Gilbert descubrió que una gota de agua, en presencia de una pieza cargada de ámbar, cambiaba su forma natural a una forma cónica. Entre 1914 y 1917, John Zeleny reportó en varios artículos el fenómeno del electrospray mostrando fotografías de conos de glicerina emitiendo micro-chorros bajo la acción de fuertes campos eléctricos.

Geoffrey Ingram Taylor fue quien modeló esa deformación cónica de la gota de fluido en 1964 y encontró una solución universal electrostática cónica. Por ello, esta configuración se conoce como el cono de Taylor, y es de gran aplicación en el electrospray.

El proceso del electrospray emplea electricidad para obtener un aerosol, esto es, partículas de escala microscópica de uno o varios fluidos suspendidas en otro fluido. Por ejemplo, partículas microscópicas de agua suspendidas en aire.

Se procede de la siguiente manera: se inyecta un fluido mediante un tubo capilar, que está sometido a un voltaje. Idealmente, el fluido, al salir del emisor inyector, forma un cono de Taylor que emite un micro-chorro capilar por el vértice.

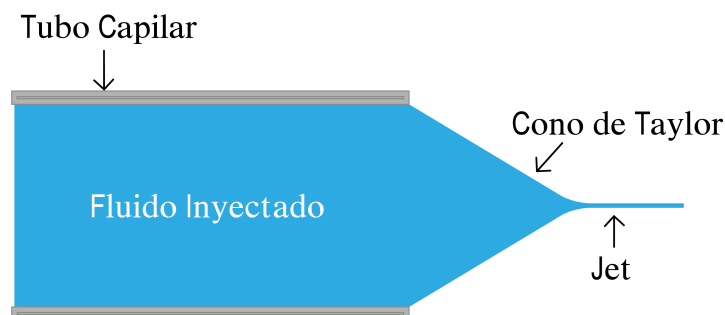


Figura 1.1 Esquema del proceso del electrospray.

Por efecto de la tensión superficial, el volumen fluido inyectado se deforma. A medida que el voltaje aumenta, el efecto del campo eléctrico es más notorio. Cuando ambos efectos (campo eléctrico y tensión superficial) son igual de importantes comienza a formarse una forma cónica con punta

redondeada. Cuando se supera cierto voltaje umbral, la punta se invierte y emite un chorro de líquido.

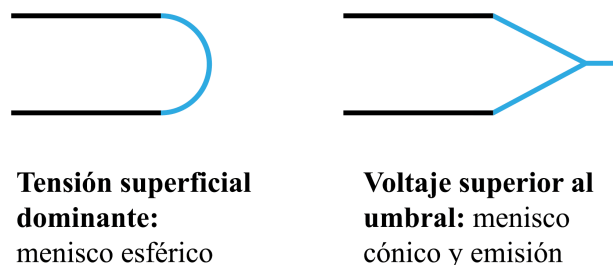


Figura 1.2 Efecto del campo eléctrico y de la tensión superficial.

Taylor describió el modelo teórico del cono formado con dos condiciones:

- La superficie del cono es una superficie equipotencial.
- El cono existe en un equilibrio estático

Para poder satisfacer ambos criterios el potencial eléctrico debe exhibir simetría azimutal (simetría de revolución respecto al eje del cono) y debe escalar como la raíz de la coordenada radial r .

Sin embargo, el vértice del menisco cónico no puede ser infinitamente pequeño, pues eso generaría una singularidad. Por tanto, lo que ocurre es que las fuerzas electrohidrodinámicas producen una gran aceleración puntual del líquido en el vértice del cono y se produce la emisión de líquido. Dicha emisión se realiza en forma de un chorro capilar cargado eléctricamente cuando el tiempo de relajación hidrodinámico τ_H es mayor que el tiempo de relajación de la carga τ_C .

El chorro capilar cargado se captura en el contraelectrodo (empleado para cerrar el circuito de corriente) como gotas cargadas o iones positivos. La pérdida simultánea de líquido y carga se suple desde el emisor, inyectando el caudal constante y (de forma electroquímica) las cargas necesarias para que se verifique la continuidad de masa y carga.

Las principales aplicaciones del electrospray son:

- Ionización de moléculas de elevada masa molecular (como proteínas o péptidos) para espectrometría de masa (análisis cualitativo de estructuras orgánicas).
- Electrospinning: aplicación de alto voltaje a una solución de polímero para obtener fibras muy delgadas en lugar de aerosol.
- Deposición de partículas o iones para nanoestructuras, permitiendo obtener materiales con propiedades especiales.
- Fabricación de portadores de droga y aditivos para la comida.
- Purificación de aire, minimizando la producción de ozono.

1.2 El experimento electrohidrodinámico

Tradicionalmente, para obtener nanopartículas se habían usado métodos como la doble emulsión (un polímero encapsula el fluido portador y la solución que forman se vierte en una tercera solución) la propia técnica del electrospray y otros métodos.

Todos estos métodos permiten obtener partículas encapsuladas en un rango de tamaño, con buen control sobre la capa de recubrimiento o con un tamaño específico de partícula encapsulada. En 1998, Gañán-Calvo propone y demuestra la tecnología Flow Focusing (Gañán-Calvo 1998, Phys. Rev. Lett. 80, 285), que tiene analogías físicas con el electrospray, demostrando además que se podían producir micro-chorros capilares coaxiales.

El trabajo de Gañán-Calvo inspiró el trabajo de Loscertales et al. (2002), que explicaban en su artículo "Micro/nano encapsulation via electrified coaxial liquid jets" cómo habían generado flujos coaxiales de dos líquidos inmiscibles utilizando la electrohidrodinámica. El resultado eran partículas en aerosol cuyo tamaño y estructura era controlado.

La configuración empleada fue la siguiente: dos líquidos inmiscibles, SOMOS (un fotopolímero) y etilenglicol (EG), se inyectan con un caudal apropiado mediante dos agujas concéntricas. La aguja externa se conecta a un electrodo, mientras que el potencial eléctrico de la interna se puede elegir entre el valor del electrodo y la diferencia de potencial aplicada.

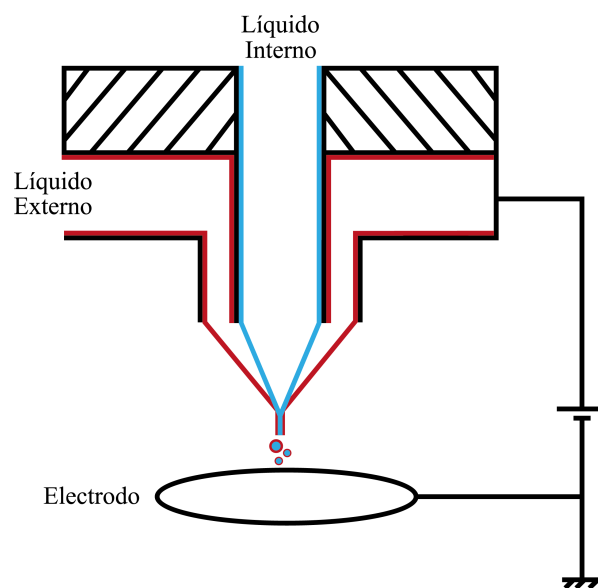


Figura 1.3 Configuración del experimento electrohidrodinámico.

El cono de Taylor se forma y es estable para un valor de la diferencia de potencial. Como la viscosidad del fluido externo (SOMOS) es suficientemente grande para difundir las perturbaciones eléctricas, los efectos viscosos dominan el problema y deforman el menisco cónico del fluido interno (EG) para formar dos jet de nanopartículas concéntricos.

Una conclusión muy importante a la que se llega en este experimento es que para obtener la configuración de cono de Taylor es necesario que las fuerzas actúen como mínimo en un fluido, pudiendo, eso sí, actuar sobre ambos. Se define el líquido conductor como el líquido sobre el cual actúan las fuerzas.

1.3 Evolución del electrospray

El tiempo ha sido testigo de descubrimientos de gran importancia en lo que concierne a la técnica del electrospray, como el efecto de una modificación sobre los parámetros del sistema o la solución de modelos complejos que definen el problema.

1.3.1 Solución autosemejante con el Leaky Dielectric Model

El modelo dieléctrico con fugas, también conocido como Leaky Dielectric Model (LDM) fue esbozado por Taylor y Melcher. Taylor introdujo este modelo para explicar el comportamiento de gotas deformadas por el efecto de un campo eléctrico y Melcher lo empleó para desarrollar la electrohidrodinámica.

El LDM desprecia los efectos de conducción en la superficie y asume que toda la carga libre neta se acumula en la interfase, en la denominada capa de Debye, una capa que es mucho más delgada que la longitud característica del sistema. También asume que la carga se transporta a través de ella por conducción óhmica.

En 2021, Gañán-Calvo y Montanero formularon las ecuaciones generales para resolver el problema electrostático (o de "orden cero") para un número arbitrario de conos de Taylor coaxiales. La conclusión más importante fue la necesidad de que la solución sea autosemejante. Una solución es autosemejante cuando su forma es independiente de la escala espacial o temporal (es decir, la solución en una escala es semejante a la de cualquier otra escala). La solución que se obtiene está formada por un desarrollo de potencias de la coordenada radial r . La velocidad es independiente de la coordenada radial y , como se explicó anteriormente en el apartado 1.1, es condición necesaria que el potencial eléctrico crezca como la raíz cuadrada de la coordenada radial. Todas las demás potencias de r pueden ser descartadas.

Existen dos tipos de soluciones autosemejantes:

- La solución Tipo I: desprecia la convección de carga en la interfase frente a la conducción óhmica a través de ella.
- La solución Tipo II: iguala tanto la carga conducida y la carga por convección a través de una esfera de radio r a cero.

Las soluciones de Tipo II permiten los conos de Taylor sin emisión a un dieléctrico externo, es decir, permiten que la fase interna sea de carácter gaseoso. Las soluciones de Tipo I permiten emisión a un entorno externo, pues la convección de carga se hace importante cuando el valor de r se hace pequeño, $r \ll 1$, mientras que la conducción es el efecto de mayor orden de magnitud cuando el valor de r es grande, $r \gg 1$.

El principal propósito de esta investigación será obtener soluciones de Tipo I (con emisión) con un gas como fase interna.

1.3.2 Simulación Numérica

En 2020, López-Herrera et al. presentaron unos resultados obtenidos mediante simulación numérica. Para ello, emplearon el Leaky Dielectric Model (LDM) que, como se explicó anteriormente, consiste en despreciar los efectos de conducción en la superficie, cumpliéndose para un caudal Q suficientemente grande.

Los resultados permiten comprobar que, igual que en el caso tradicional, se verifica $I \propto Q^{1/2}$. Además, existe inmiscibilidad: las cargas no van de un dominio al otro, pero se respeta conservación de la carga en la superficie de contacto. Las permitividades de los líquidos son constantes y además no modifican la una a la otra.

Se exploró la región de transición: al reducirse la sección transversal del cono, esto es, al acercarnos al vértice, la carga se inyecta en la superficie libre exterior, y se obtiene una intensidad de corriente mayor en ella, disminuyendo a su vez la intensidad que circula por la superficie interna hasta incluso hacerse negativa. Esta fue la mayor revelación del estudio, puesto que introducía un grado de libertad inexistente en problemas unidimensionales.

También se estudió el efecto de variar la conductividad del líquido interno (κ_i , siendo κ_o la conductividad del líquido externo). Esta variación trataba de mostrar el efecto en la solución de aumentar (o disminuir) este parámetro. Tomando $\kappa_r = \kappa_i/\kappa_o$:

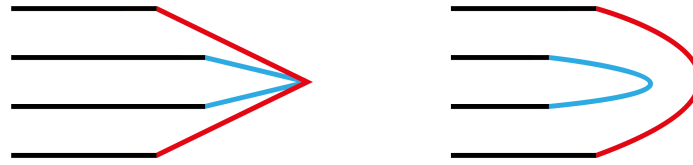
- Para valores de κ_r muy bajo (orden 10^{-4}) se tiene $\kappa_i \gg \kappa_o$ y por tanto I_i es la intensidad dominante: el fluido externo actúa como una “cáscara dieléctrica” y se forma un cono de Taylor con el líquido interno.
- Para valores de κ_r medios (orden 10^{-1}) se tiene $\kappa_i \sim \kappa_o$. El término dominante es I_i pero también hay inyección de I_o (pues ambas conductividades son del mismo orden y no se impide la inyección). Ambos fluidos son acelerados.
- Para valores de κ_r altos (orden 10^2) se tiene $\kappa_i \ll \kappa_o$. El término dominante es I_o y el sistema funciona como un cono de Taylor de un fluido.

En 2022, se estudiaron a fondo los efectos de la geometría: ancho de los tubos, afilado de las agujas inyectoras, efecto de la protuberancia del tubo interno...

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- La geometría no afecta sustancialmente a la zona de transición.
- La forma del menisco interno depende de las posiciones de los tubos:
 - Si el tubo interno está desplazado hacia atrás, la proyección del campo eléctrico es menor y la tensión superficial domina, creando una forma esférica
 - Si el tubo interno está desplazado hacia adelante, la proyección del campo eléctrico es mayor y domina sobre la tensión superficial, estableciendo un menisco cónico (forma clásica)
- El afilado ayuda al fluido externo a formar una capa alrededor del menisco, y se transmiten mejor las tensiones eléctricas por difusión viscosa, lo cual se espera que ayude a mejorar la estabilidad global.

En la siguiente figura se esbozan las formas que adoptan los meniscos en función de la posición relativa de las agujas emisoras.



Menisco Cónico

Menisco Esférico

Figura 1.4 Parámetros geométricos relevantes.

2 La solución estacionaria

2.1 La solución buscada

El principal objetivo de esta investigación es obtener un jet de nanopartículas gaseosas. Se trata de un hito nunca antes conseguido, y es interesante porque el dispositivo tendría la capacidad de producir microburbujas de tamaño muy controlado en un medio de baja conductividad (por ejemplo, un hidrocarburo) y además, en alguna posible aplicación eléctrica, podría funcionar como un triodo, además de las ya mencionadas deposición de alta precisión en nanoestructuras, síntesis de materiales o espectrometría de masas.

Para lograr este propósito, primero se busca una solución analítica estacionaria, también llamada "orden cero". Este paso es crucial pues no sólo nos indica si la solución existe o no, también nos ayuda a conocer características de la misma. Una vez se haya calculado el orden cero, se empleará un método numérico desarrollado por los profesores J.M. López-Herrera y Miguel Á. Herrada que, partiendo de una solución real en emisión, permite realizar barridos paramétricos para encontrar soluciones al problema, con el objeto de encontrar una solución real muy parecida a la obtenida analíticamente.

La configuración para la cual se desea obtener una solución con emisión consiste en un fluido gaseoso, aire (o nitrógeno) cubierto por una capa de agua en un entorno de aceite vegetal. Esto es, el chorro deseado se conformaría de partículas gaseosas cubiertas por una capa de agua con aceite como medio aislante (o de baja conductividad eléctrica) externo.

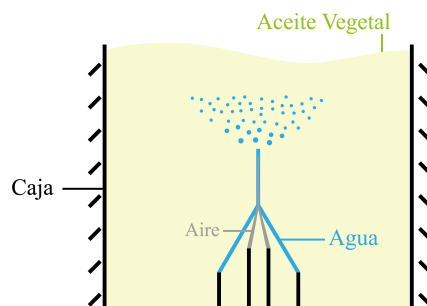


Figura 2.1 Configuración con aceite, agua y aire.

2.2 Planteamiento del problema

La configuración que se quiere resolver consta de 3 fluidos, esto es, 3 dominios distintos. Sin embargo, se plantea el caso general para $J+1$ dominios. Puesto que se trata de un problema complejo, resultaba apropiado resolver en primer lugar un caso más simple, con 2 dominios ($J=1$) para posteriormente enfrentar un desafío mayor con 3 dominios ($J=2$).

El problema se puede considerar bidimensional puesto que tiene simetría de revolución. Las coordenadas relevantes son la coordenada radial r y la coordenada angular θ . En la representación inferior pueden reconocerse los meniscos cónicos formados por los fluidos inyectados y el entorno. El origen de coordenadas se ubica en el vértice de los conos y se define $\theta = 0$ en el eje del cono, en el dominio J y $\theta = \pi$ en el eje del cono, en el dominio 0.

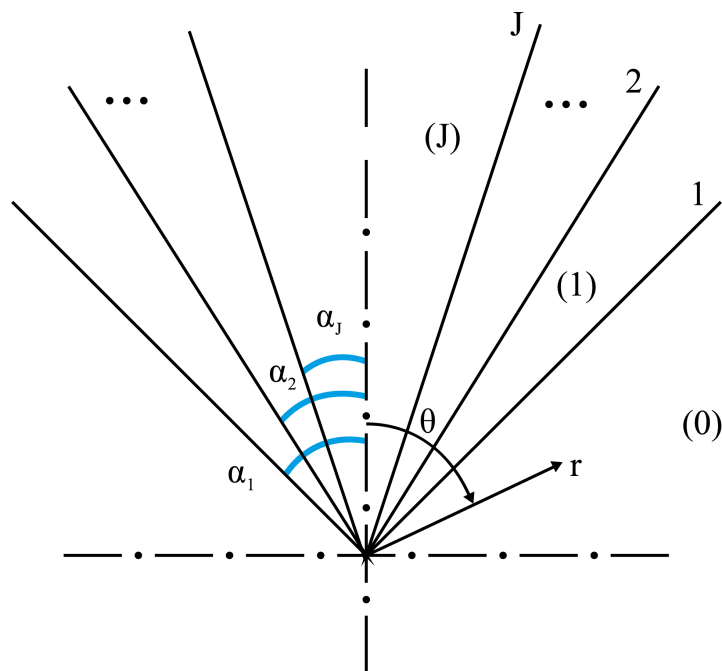


Figura 2.2 Esquema del problema.

La variable $j = 0, 1, \dots, J$ hace referencia al dominio j y se expresa como superíndice. La variable $j = 1, 2, \dots, J$ hace referencia a la interfaz j y se expresa como subíndice. Es decir, hay $J+1$ fluidos o fases, que son dieléctricos o dieléctricos con fugas (leaky dielectric) y hay J interfaces.

Cada fase se define por los siguientes parámetros fluidos: permitividad relativa $\varepsilon^{(j)}$, conductividad eléctrica $K^{(j)}$ y viscosidad dinámica $\mu^{(j)}$. Cada interfase, por su parte, se caracteriza por su tensión superficial γ_j y por el ángulo de interfaz α_j . Es preciso mencionar que, debido al criterio de signos tomado, $\alpha_{J+1} = 0 < \alpha_J < \dots < \alpha_j < \dots < \alpha_1 < \alpha_0 = \pi$.

Para simplificar el problema, se eligen $\varepsilon^{(1)} = K^{(1)} = \mu^{(1)} = \gamma_1 = 1$. De esta forma, se tiene un problema que puede ser formulado en términos de cocientes de permitividad, conductividad, viscosidad y tensión superficial: $\beta^{(j)} = \varepsilon^{(j)} / \varepsilon^{(1)}$, $\kappa^{(j)} = K^{(j)} / K^{(1)}$, $\lambda^{(j)} = \mu^{(j)} / \mu^{(1)}$ y $\Gamma_j = \gamma_j / \gamma_1$, ($j \neq 1$).

Con esta hipótesis, se obtiene un tiempo de relajación de carga $\tau_C = \varepsilon^{(1)} / K^{(1)} = 1$ en la fase 1.

2.3 Ecuaciones generales del problema

En esta sección se plantean todas las ecuaciones que caracterizan el problema estacionario, utilizando el modelo dieléctrico con fugas (LDM) y partiendo del planteamiento detallado en el apartado anterior.

La función de corriente característica del flujo de Stokes Ψ obedece la ecuación parcial diferencial

$$E^2(E^2\Psi^{(j)}) = 0 \quad (2.1)$$

donde E es un operador diferencial que verifica

$$E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.2)$$

La ecuación de Laplace, teniendo carga neta libre nula (aproximación del LDM), para el potencial eléctrico Φ

$$\nabla^2\Phi^{(j)} = 0 \quad (2.3)$$

Estas ecuaciones permiten una solución con variables separadas para las funciones Ψ y Φ

Para la función de flujo Ψ :

$$\Psi^{(j)}(r, \theta) = r^{m+2} F_m^j(\theta) \quad (2.4)$$

$$\left[(m+2)(m+1) + (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \right] \times \left[m(m-1) + (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \right] F_m^{(j)}(x) = 0 \quad (2.5)$$

Para el potencial eléctrico Φ

$$\Phi^{(j)}(r, \theta) = r^{m+\frac{1}{2}} \Phi_m^j(\theta) \quad (2.6)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2\Phi_m^{(j)}}{dx^2} - 2x \frac{d\Phi_m^{(j)}}{dx} + \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m + \frac{3}{2} \right) \Phi_m^{(j)} = 0 \quad (2.7)$$

donde $x = \cos(\theta)$.

Por los motivos descritos en la sección 1.3.1, la solución debe ser autosemejante, que se obtiene tomando el parámetro $m = 0$ y convierte el problema en axisimétrico.

La solución debe ser autosemejante, pues según las condiciones establecidas en el modelo de Taylor, se tiene la certeza de que el campo de velocidades no puede mostrar dependencia radial y que la función de potencial eléctrico crece como la raíz de r. Si elegimos el parámetro $m = 0$, se obtiene

$$\Psi^{(j)}(r, \theta) = r^2 F_0^{(j)}(\theta)$$

y puesto que

$$v_r^{(j)} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial \theta}, \quad v_\theta^{(j)} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial r}$$

Se puede observar como las dependencias radiales se cancelan al derivar y dividir, y se obtienen

$$v_r^{(j)} = v_r^{(j)}(\theta) \quad y \quad v_\theta^{(j)} = v_\theta^{(j)}(\theta)$$

Por otro lado, elegir $m = 0$ resulta en la siguiente función de potencial

$$\Phi^{(j)}(r, \theta) = r^{1/2} \Phi_0^{(j)}(\theta)$$

y puesto que

$$E_r^{(j)} = -\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial r}, \quad E_\theta^{(j)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial \theta}$$

Se verifica que el potencial eléctrico crece como la raíz de la coordenada radial, $\Phi^{(j)} \propto r^{1/2}$ y ambas componentes del campo eléctrico cumplen $E_r \propto r^{-1/2}$, $E_\theta \propto r^{-1/2}$

Por tanto, el parámetro m debe ser nulo y la solución, autosemejante.

Las expresiones de $F_0^{(j)}$ y $\Phi_0^{(j)}$ se pueden expresar como el producto de constantes desconocidas por funciones dependientes de la coordenada angular θ .

$$F_0^{(j)}(x) = B_1^{(j)} + B_2^{(j)}x + B_3^{(j)}x^2 + B_4^{(j)}(1-x^2)\operatorname{atanh}(x) \quad (2.8)$$

$$\Phi_0^{(j)} = A_1^{(j)}P_{\frac{1}{2}}(x) + A_2^{(j)}Q_{\frac{1}{2}}(x) \quad (2.9)$$

Es decir, se tiene un sistema de ecuaciones con $6J + 6$ constantes desconocidas y J ángulos de interfaz también desconocidos. Éstas son las incógnitas del problema. Para satisfacerlo, necesitamos $7J + 6$ ecuaciones.

Las ecuaciones que se emplean caracterizan el contorno (condiciones de contorno o regularidad) o las interfaces (regularidad, equilibrio de fuerzas y conservación de carga).

Las condiciones de contorno se dividen en regularidad del campo de velocidades (2.10-13) y regularidad de la función del potencial (2.14-15).

La regularidad del campo de velocidades viene dada por

$$B_4^{(0)} = 0 \quad (2.10)$$

$$B_4^{(J)} = 0 \quad (2.11)$$

$$B_1^{(0)} - B_2^{(0)} + B_3^{(0)} = 0 \quad (2.12)$$

$$B_1^{(J)} + B_2^{(J)} + B_3^{(J)} = 0 \quad (2.13)$$

En efecto, en la ecuación (2.8) encontramos que

$$\sin^2(0)\operatorname{atanh}(1) = 0 \quad y \quad \sin^2(\pi)\operatorname{atanh}(-1) \text{ es singular,}$$

por tanto las ecuaciones (2.10-11) justifican la regularidad de $v_r^{(0)}(\pi)$ y $v_r^{(J)}(0)$.

Además, si se admite que se cumplen estas condiciones, la componente normal del campo de velocidades $v_\theta^{(0)}(\pi) = 0$ y $v_\theta^{(J)}(0) = 0$. Por ello, se debe cumplir que $F_0^{(0)}(x = \cos(\pi) = -1) = 0$ y $F_0^{(J)}(x = \cos(0) = 1) = 0$. Y, sustituyendo valores en la ecuación (2.8), se obtienen las condiciones (2.12-13).

La regularidad del potencial eléctrico viene dada por

$$A_1^{(0)} = 0 \tag{2.14}$$

$$A_2^{(J)} = 0 \tag{2.15}$$

Para comprender esto, simplemente se dibujan las funciones asociadas de Legendre $P_{1/2}(x)$ y $Q_{1/2}(x)$, que pueden verse en las figuras siguientes.

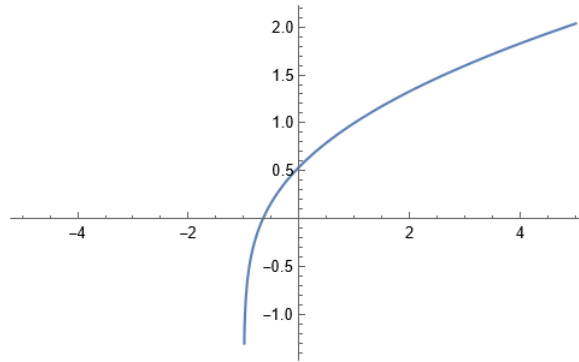


Figura 2.3 Representación de $P_{1/2}(x)$.

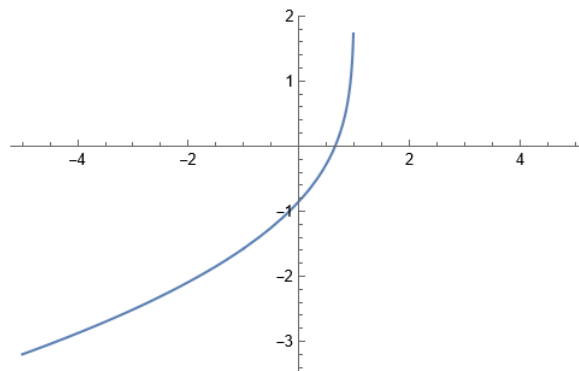


Figura 2.4 Representación de $Q_{1/2}(x)$.

A la vista de las figuras, $P_{1/2}(x = -1)$ y $Q_{1/2}(x = 1)$ producen singularidades. Estas singularidades afectan a $\Phi_0^{(0)}$ y a $\Phi_0^{(J)}$ y quedan anuladas con las condiciones de regularidad (2.14-15).

En las j interfaces, se encuentran ecuaciones de regularidad para el campo de velocidades y el campo eléctrico, así como equilibrio de esfuerzos y conservación de carga.

Ecuaciones de regularidad en interfaz para el campo de velocidades (normal y tangencial):

$$v_{\theta}^{(j-1)}(r, \alpha_j) = v_{\theta}^{(j)}(r, \alpha_j) = 0, \quad v_r^{(j-1)}(r, \alpha_j) = v_r^{(j)}(r, \alpha_j), \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (2.16)$$

Ecuaciones de regularidad en la interfaz de campo eléctrico tangencial:

$$E_r^{(j-1)}(r, \alpha_j) = E_r^{(j)}(r, \alpha_j) \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (2.17)$$

Equilibrio de esfuerzos normales:

$$\begin{aligned} -p^{(j-1)}(r, \alpha_j) + \tau_{\theta\theta}^{(j-1)}(r, \alpha_j) + \tau_{M\theta\theta}^{(j-1)}(r, \alpha_j) - \frac{\Gamma_j}{r \tan(\alpha_j)} = \\ -p^{(j)}(r, \alpha_j) + \tau_{\theta\theta}^{(j)}(r, \alpha_j) + \tau_{M\theta\theta}^{(j)}(r, \alpha_j) \quad \forall j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (2.18)$$

Equilibrio de esfuerzos tangenciales:

$$\tau_{r\theta}^{(j-1)}(r, \alpha_j) + \tau_{Mr\theta}^{(j-1)}(r, \alpha_j) = \tau_{r\theta}^{(j)}(r, \alpha_j) + \tau_{Mr\theta}^{(j)}(r, \alpha_j) \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (2.19)$$

En la siguiente figura se pueden ver los esfuerzos normales y tangenciales que aparecen en la interfaz para un valor fijo de r (la coordenada radial no afecta a la representación puesto que la dependencia radial se eliminará de ambos lados de la ecuación, como se explicará más adelante).

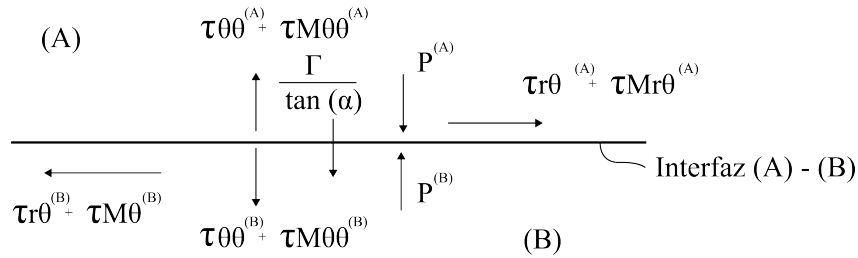


Figura 2.5 Esfuerzos en la interfaz.

La conservación de la carga se puede formular de distintas formas, en función de las hipótesis asumidas:

Despreciando la convección de carga a través de la interfaz frente a la conducción de carga a través del sustrato, se obtiene la ecuación de Burcham & Saville:

$$\kappa^{(j-1)} E_r^{(j-1)}(r, \alpha_j) = \kappa^{(j)} E_r^{(j)}(r, \alpha_j) \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (2.20)$$

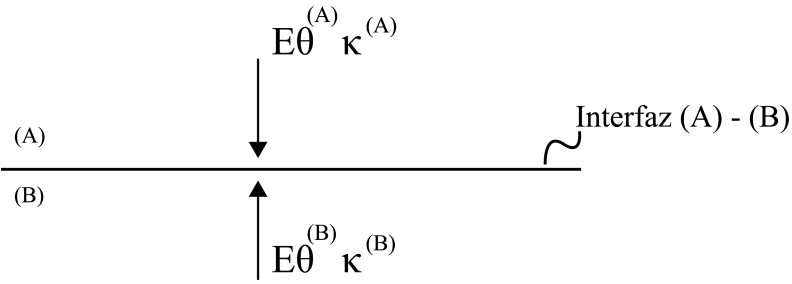


Figura 2.6 Conducción de carga a través de la interfaz. Condición de Burcham & Saville.

Si se quiere considerar ambos efectos, se obtiene como resultado que ambos deben ser nulos por separado. Esto es, la conducción de carga debe ser nula, así como la convección de carga:

$$\sum_{j=0}^J \kappa^{(j)} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} E_r^{(j)}(r, \theta) 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta = 0, \quad \sum_{j=0}^J 2\pi r \sin(\alpha_j) \sigma_j(r) v_r^{(j)}(r, \alpha_j) = 0 \quad (2.21)$$

siendo $\sigma_j(r)$ la densidad superficial de carga en la interfaz j .

Si bien la segunda permite extender la solución a zonas con r cercano a la unidad (normalmente la solución es válida para $r \gg 1$) la condición de Burcham & Saville aplica a configuraciones con emisión y será la utilizada en la resolución de las ecuaciones.

Es preciso mencionar que se eliminan todas las dependencias radiales debido a que se desprecia la convección de carga frente a la conducción.

Las ecuaciones de contorno son 6, mientras que las ecuaciones de regularidad en las interfaces proporcionan $7J$ ecuaciones, que permiten determinar las $7J + 6$ incógnitas del problema. Con todas las ecuaciones, se puede proceder a la resolución del problema.

2.4 Resolución del problema

2.4.1 Resolución con dos dominios ($J = 1$)

En este apartado se muestra la resolución del problema con dos dominios. Este problema se ha resuelto escribiendo un código en el programa Wolfram Mathematica®, con el artículo de Gañán-Calvo y Montanero (2021) y sus correspondientes códigos como referencia. Se trata de comprobaciones realizadas por el alumno para cerciorar que se conoce el proceso de resolución, pese a que este problema ya fue resuelto por Gañán-Calvo y Montanero en 2021. Las figuras 2.7 y 2.8 fueron obtenidas en primer lugar por Gañán-Calvo y después se comprobó que las imágenes que resultaban de introducir la solución obtenida por el alumno eran idénticas a las mismas.

Antes de resolver un problema tan complejo como el que se planteaba, se creyó conveniente resolver un problema más sencillo para poder afianzar conocimientos y conocer el proceso de resolución.

El problema que se resuelve es el caso general con dos dominios, esto es, ($J = 1$). Se comienza planteando todas las ecuaciones particularizadas para el caso de dos dominios. En este caso hay 13 ecuaciones con 13 incógnitas.

Primeramente, se resuelve el problema eléctrico, obteniendo tres constantes. Calculando el determinante del problema eléctrico e igualándolo a cero, se puede obtener la condición que relaciona la conductividad del fluido externo con el ángulo de interfaz, que se traduce en la siguiente gráfica, en la que el eje de $\kappa^{(0)}$ se ha representado en escala logarítmica.

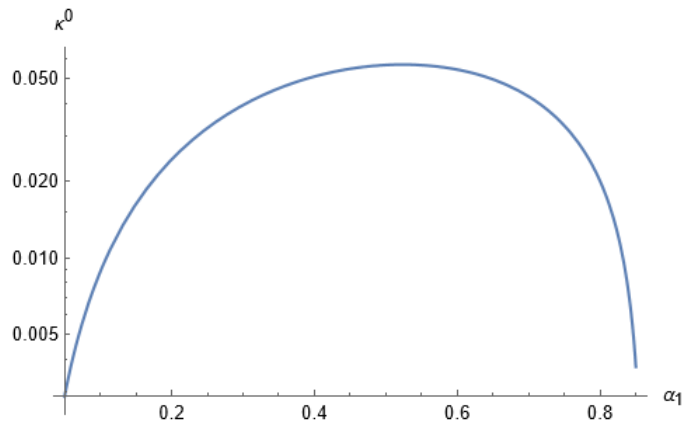


Figura 2.7 $\kappa^{(0)}$ frente a α_1 para el caso de dos dominios (Gañán-Calvo y Montanero, 2021).

A continuación, se resuelven todas las ecuaciones de flujo para obtener las 8 constantes de flujo. Esta resolución se hace de manera escalonada: una vez se conoce la expresión de una constante en función de otras, se considera como "conocida" y puede sustituirse en las ecuaciones posteriores.

Por último, elegimos un valor del parámetro $\kappa^{(0)}$, que dependerá de los fluidos elegidos para cada configuración. Este valor de $\kappa^{(0)}$ está directamente relacionado con el ángulo de interfaz, que ahora será conocido y permite resolver la última ecuación para obtener la constante restante.

Una particularidad del caso de dos dominios es que permite elegir un valor del ángulo de interfaz y, al haber una única interfaz y un único cociente de conductividades $\kappa^{(0)}$, elegir un valor de α_1 directamente proporciona un valor para este cociente.

En el caso de dos dominios, la solución depende de 3 parámetros fluidos: $\kappa^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ y $\lambda^{(0)}$.

Resulta interesante realizar una representación de la situación estacionaria ahora que ya se ha resuelto el problema. En la siguiente representación se encuentran las líneas de interfaz en color blanco, las líneas de flujo (líneas continuas) y las líneas equipotenciales (líneas discontinuas) en gris. Además, se representa el valor del potencial eléctrico (escalado) en un mapa de colores, donde los colores cálidos indican zonas de potencial máximo y los colores fríos, zonas de potencial mínimo.

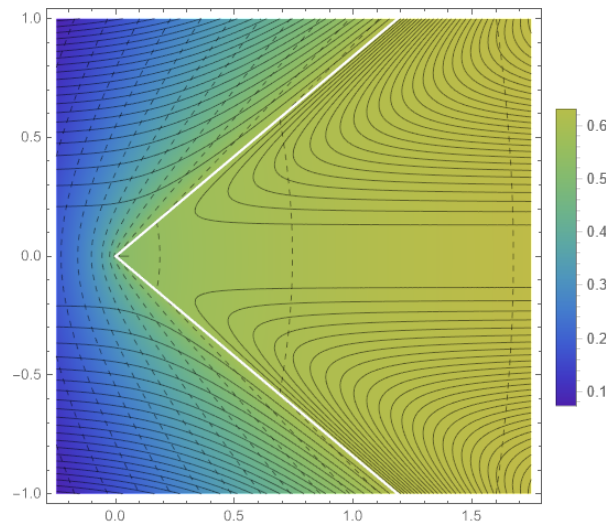


Figura 2.8 Solución del problema eligiendo $\alpha_1 = 0.7$ (Gañán-Calvo y Montanero, 2021).

En este caso se ha elegido $\alpha_1 = 0.7$ para comprobar que los resultados obtenidos en esta resolución son iguales a los obtenidos por Gañán-Calvo y Montanero en su artículo de 2021.

Puede encontrar el método de resolución de este problema, así como los resultados obtenidos aquí presentados, detallado en el apéndice A. Este código fue escrito por el alumno, pero con el código original de Gañán-Calvo y Montanero (2021) como fuente de ayuda cuando fue necesaria. Se trata de una mera comprobación para poder resolver el problema planteado en este trabajo y no son una contribución del alumno a esta investigación.

2.4.2 Resolución con tres dominios ($J = 2$)

En este apartado se muestra la resolución del problema con tres dominios. Este problema se ha resuelto escribiendo un código en el programa Wolfram Mathematica®, con el artículo de Gañán-Calvo y Montanero (2021) y sus correspondientes códigos como referencia. Se trata de comprobaciones realizadas por el alumno para cerciorar que se conoce el proceso de resolución, pese a que este problema ya fue resuelto por Gañán-Calvo y Montanero en 2021. Las figuras 2.9 y 2.12 fueron obtenidas en primer lugar por Gañán-Calvo y después se comprobó que las imágenes que resultaban de introducir la solución obtenida por el alumno eran idénticas a las mismas.

Tras una primera toma de contacto con el problema, se comenzó a resolver la situación de tres dominios, es decir, ($J = 2$). En este caso tenemos 20 incógnitas.

Procediendo análogamente a la resolución del problema con dos dominios, se toman las ecuaciones de conservación de carga y regularidad de campo eléctrico en interfaz para resolver el problema eléctrico. Junto con las condiciones de contorno, estas ecuaciones permitirían obtener la solución de todas las constantes que caracterizan el potencial eléctrico $A_1^{(j)}$ y $A_2^{(j)}$. Sin embargo, al tener un sistema de ecuaciones homogéneo, la solución proporcionada sería la solución trivial $A_1^{(j)} = 0$ y $A_2^{(j)} = 0$.

Como no resulta de interés esta solución, se exige que el determinante de la matriz que forman los coeficientes que multiplican a las constantes en estas ecuaciones sea nulo. Esto se convierte en una

condición más que hay que considerar en el proceso de resolución. Esta nueva condición permite, para un valor fijo de ambos cocientes de conductividades $\kappa^{(0)}$ y $\kappa^{(2)}$, obtener una relación entre ambos ángulos de interfaz.

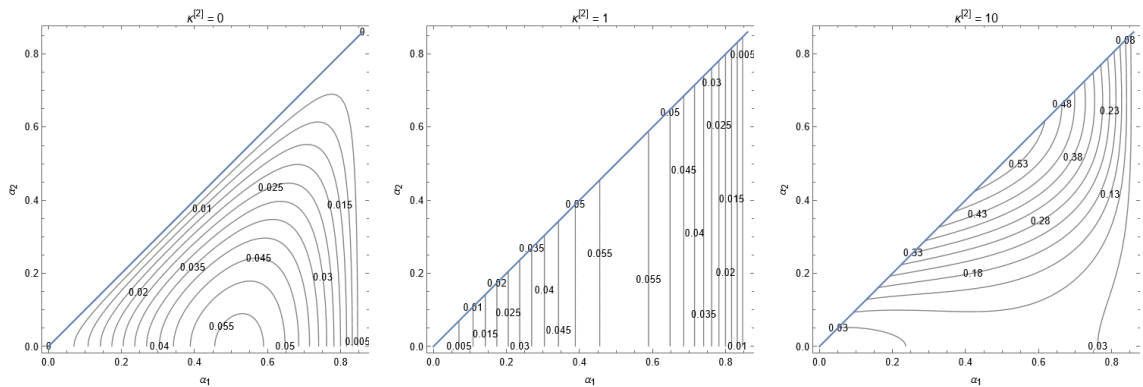


Figura 2.9 α_2 frente a α_1 para valores fijos de $\kappa^{(2)}$ e isocontornos de $\kappa^{(0)}$ (Gañán-Calvo y Montanero, 2021).

A continuación, se resuelven el resto de ecuaciones para las constantes que caracterizan el flujo de Stokes. El procedimiento de resolución vuelve a ser escalonado: consiste en resolver primero las constantes más sencillas, e incluir progresivamente esos valores en las nuevas ecuaciones, obteniendo expresiones de constantes desconocidas en función de constantes calculadas previamente.

La complejidad de este problema reside en la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones de forma analítica. Este problema es altamente no lineal, y no es posible resolver la última constante y los dos ángulos de interfaz analíticamente.

Se tienen 3 ecuaciones disponibles (las 3 que no se hayan usado en la resolución, dependen del proceso de resolución seguido) para 3 incógnitas. La resolución de este sistema de ecuaciones no lineal se tiene que llevar a cabo numéricamente, lo cual implica un error asociado.

El primer paso para empezar una resolución numérica es obtener un buen punto de partida. Si el punto de partida no es lo suficientemente bueno, es posible que el método nunca converja y no se halle una solución. La condición de no trivialidad proporciona unos valores de ángulos de interfaz adecuados para comenzar.

Con los valores de ángulos de interfaz elegidos, se dibujan las tres ecuaciones restantes en función de la constante de potencial desconocida para identificar fácilmente la solución.

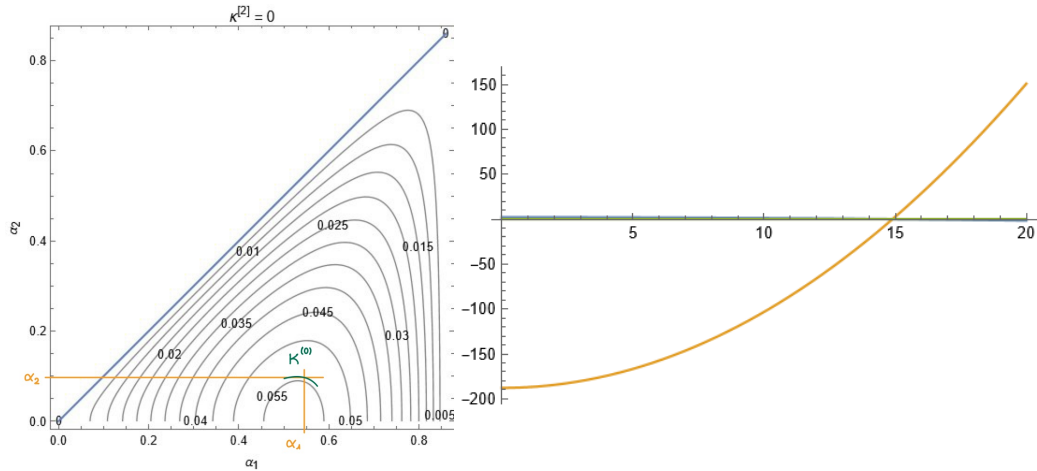


Figura 2.10 Elección de ángulos de interfaz y búsqueda de punto de partida.

La solución numérica resulta en un valor para la constante de potencial eléctrico desconocida y ambos ángulos de interfaz.

En el caso de tres dominios, la solución depende de 7 parámetros fluidos: $\kappa^{(0)}$, $\kappa^{(2)}$, $\beta^{(0)}$, $\beta^{(2)}$, $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(2)}$ y γ_2 .

Al resolver el problema, se representan de nuevo las líneas de interfaz (blanco) las líneas de flujo (gris continuo) las líneas equipotenciales (gris discontinuo) y el mapa de calor del potencial eléctrico.

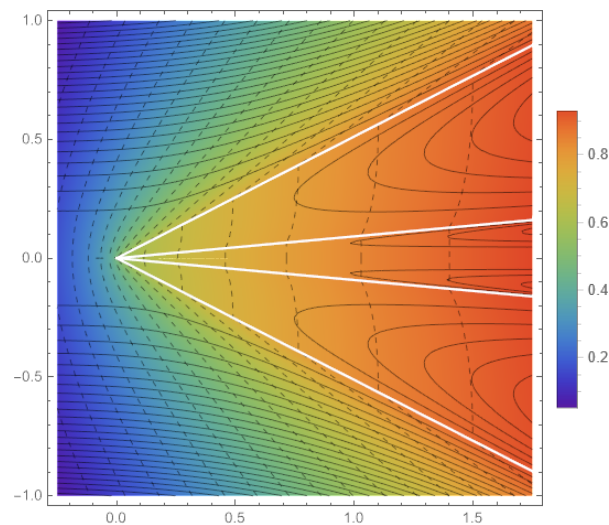


Figura 2.11 Representación de solución con gas interna (Gañán-Calvo y Montanero, 2021).

Se ha elegido esta solución de entre todas las posibles porque permite corroborar los resultados con el artículo de Gañán-Calvo y Montanero, y además es una solución con un gas como fase interna.

Puede encontrar el método de resolución de este problema, así como los resultados obtenidos aquí presentados, detallado en el apéndice B. Este código fue escrito por el alumno, pero con el código original de Gañán-Calvo y Montanero (2021) como fuente de ayuda cuando fue necesaria. Se trata

de una mera comprobación para poder resolver el problema planteado en este trabajo y no son una contribución del alumno a esta investigación.

2.5 Resultados obtenidos

Ahora que se dispone de un método de resolución para el problema general, particularizamos el problema para nuestra configuración con aceite, agua y aire. La resolución numérica proporciona solamente soluciones singulares. Se explica a continuación qué tipo de soluciones son admisibles.

En primer lugar, todos los parámetros fluidos son positivos, así como los ángulos de interfaz. Además, se debe verificar que $\alpha_1 > \alpha_2$. Por otro lado, la constante desconocida debe tener un valor finito y positivo, lejano a cero.

Es decir, se descartará la solución numérica si

- La constante es muy pequeña, convirtiéndola en aproximadamente 0 y obteniendo la solución trivial.
- $\alpha_1 = \alpha_2$ ó $\alpha_1 < \alpha_2$
- La constante es negativa y/o los valores de los ángulos de interfaz son mayores que $\frac{\pi}{2}$

Estas soluciones son singularidades o soluciones degeneradas.

Si se presta atención a los parámetros fluidos de nuestra configuración, resulta inmediato identificar que $\kappa^{(0)} = \kappa^{(2)} = 0$, puesto que el aire y el aceite tienen una conductividad muy baja. Si se representa nuevamente el diagrama de α_2 frente a α_1 , con isocontornos de $\kappa^{(0)}$, para el valor fijo de $\kappa^{(2)} = 0$, se observa que el contorno de $\kappa^{(0)} = 0$ se corresponde con la recta $\alpha_2 = \alpha_1$.

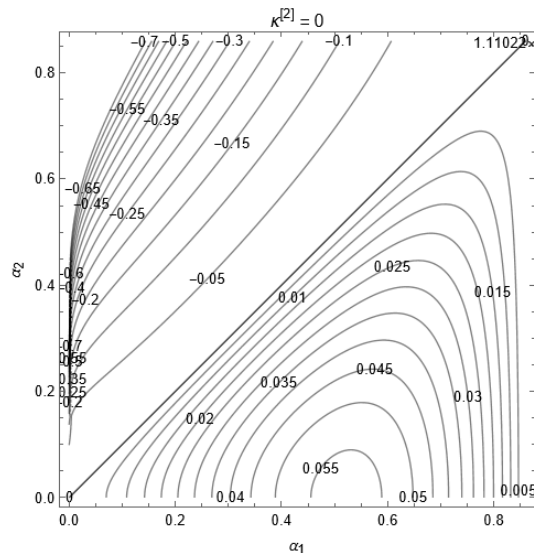


Figura 2.12 α_2 frente a α_1 , con isocontornos de $\kappa^{(0)}$, para el valor fijo de $\kappa^{(2)} = 0$.

En la representación superior también se han representado isocontornos de $\kappa^{(0)} < 0$ que, aunque no tengan sentido físico, ayudan a comprender la naturaleza de estos isocontornos: para valores de

$\kappa^{(0)} > 0$, si nos acercamos a $\kappa^{(0)} = 0$ nos acercamos también a la recta $\alpha_2 = \alpha_1$; para valores de $\kappa^{(0)} < 0$, si nos acercamos a $\kappa^{(0)} = 0$ nos acercamos también a la recta $\alpha_2 = \alpha_1$.

Además, esta representación es independiente del resto de parámetros fluidos. Ello implica que se cumple necesariamente en cualquier configuración de tres dominios.

Este resultado es importante: se demuestra analíticamente que, para una configuración con $\kappa^{(0)} = \kappa^{(2)} = 0$, no existe solución.

3 Islas paramétricas

3.1 Definición y motivaciones

Llamamos isla paramétrica a la región del espacio definido por los parámetros fluidos en la que existe solución analítica.

El concepto de isla paramétrica de soluciones es antiguo y pertenece al ámbito del análisis funcional no lineal. Se trata de la existencia de regiones n-dimensionales donde existe solución a un cierto problema no lineal. En particular, para problemas físicos, las fronteras las puede imponer la existencia misma de sistemas físicos que permitan esos parámetros o su combinación.

Para el caso de tres dominios, el espacio definido por los parámetros fluidos tiene 7 dimensiones, puesto que son 7 los parámetros que determinan la solución del problema.

Estos parámetros son, al tratarse de un caso de tres dominios: $\kappa^{(0)}$, $\kappa^{(2)}$, $\beta^{(0)}$, $\beta^{(2)}$, $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(2)}$ y γ_2 .

Si únicamente buscáramos soluciones con gas como fase interna, diríamos que $\kappa^{(2)} = 0$ y reduciríamos una dimensión del espacio que estamos considerando. Pero se ha decidido considerar todo tipo de soluciones para obtener una isla paramétrica general, ya que obtener una región paramétrica global resulta más interesante y tiene mayor uso potencial para la investigación.

Una posible aplicación, que dependerá de los resultados obtenidos, consistiría en obtener una nueva solución con, esta vez sí, un gas como fase interna con emisión de aerosol, con el objeto de conocer todo tipo de soluciones con emisión de gas para analizar las prestaciones de cada una y llevar a cabo la más óptima.

En resumen, se desea obtener la región del espacio de 7 dimensiones formado por los parámetros fluidos que definen el problema en la que existe solución analítica. Como solución de partida se toma aquella obtenida en la sección 2.4.2 con un gas como fase interna.

3.2 Extremos paramétricos

La idea inicial que surge es la de hacer barridos paramétricos, aumentando o disminuyendo los parámetros hasta topar con una frontera de la isla paramétrica. Si bien parece una acometida sencilla, la gran cantidad de parámetros a considerar lo convierte en un problema mayúsculo.

Al abordar un problema tan complejo lo más óptimo suele ser comenzar por un problema similar pero muy sencillo o incluso trivial. Así pues, se empieza por encontrar los valores máximos y mínimos que pueden tomar los parámetros fluidos, manteniendo todos los demás constantes.

Los "extremos paramétricos" se obtienen realizando barridos paramétricos en una dimensión (la del propio parámetro). El procedimiento es simple e iterativo:

- Se verifica si existe solución para el valor actual del parámetro en cuestión.
- Si la respuesta anterior es afirmativa, se aumenta el valor del parámetro.
- Si la respuesta es negativa, se ha alcanzado un extremo paramétrico para el valor anterior del parámetro.

Evidentemente, se trata de un problema muy sencillo, pero es una primera toma de contacto muy útil, ya que se ha tenido que discernir qué tipo de soluciones son asumibles (discutidas en la sección 2.5) y qué valores de los parámetros fluidos son admisibles (sólo tienen sentido físico los valores positivos de los mismos).

En la siguiente tabla aparecen los valores de los extremos paramétricos, así como los valores de partida.

Parámetro	Extremo inferior	Valor de partida	Extremo superior
κ^0	0.05006	0.05357	0.05605
κ^2	0	0	0.7581
β^0	0.01556	0.0217	0.02222
β^2	0	0.011	1.968
γ_2	0.08041	2	3.921
λ^0	0	0.2	5.000
λ^2	0	0.001	0.1795

Figura 3.1 Tabla de extremos paramétricos.

Algunos resultados obtenidos han llamado la atención:

- Existen soluciones negativas para los parámetros $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(2)}$ y $\kappa^{(2)}$. Aunque carecen de sentido físico, pueden tener interés matemático para el estudio de la continuidad de la solución.
- Existe una gran variedad de rangos admisibles para la solución: mientras que los parámetros $\beta^{(2)}$ y $\lambda^{(0)}$ ofrecen rangos amplios de validez (varios ordenes de magnitud en el mismo intervalo), los parámetros $\kappa^{(0)}$ y $\beta^{(0)}$ tienen rangos muy estrechos de validez (todo el intervalo tiene el mismo orden de magnitud).
- Se presenta en la siguiente tabla la variación de la constante $A_{1,2}$ y de los ángulos de interfaz α_1 y α_2 en función de las variaciones paramétricas realizadas.

Parámetro	Crecimiento	A _{1,2}	alpha ₁	alpha ₂
kappa ⁰	Aumenta	Aumenta	Aumenta	Aumenta
kappa ⁰	Disminuye	Disminuye	Disminuye	Aumenta
kappa ²	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
kappa ²	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
beta ⁰	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
beta ⁰	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
beta ²	Aumenta	Disminuye	Aumenta	Aumenta
beta ²	Disminuye	Aumenta	Disminuye	Aumenta
gamma ₂	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
gamma ₂	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Disminuye
lambda ⁰	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
lambda ⁰	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Aumenta
lambda ²	Aumenta	Disminuye	Aumenta	Disminuye
lambda ²	Disminuye	Aumenta	Disminuye	Disminuye

Figura 3.2 Tabla de variación de la solución en función de la variación de los parámetros.

En esta figura se representa el aumento o disminución de las variables obtenidas en la solución respecto a las de la solución de partida, con el objeto de estudiar la continuidad de la solución.

Si se aumenta el valor de un parámetro y se obtiene un resultado mayor al anterior, se espera que disminuyendo el valor del mismo parámetro el resultado disminuya también. Cuando esto no sucede podemos intuir que nos encontramos ante un mínimo local. Si sucede al contrario, se tiene un máximo local. Esto ocurre y puede verse en la tabla. Para los valores de los parámetros fluidos en la solución de partida:

- Para $\kappa^{(0)}$ se tiene un mínimo local en α_2 .
- Para $\beta^{(0)}$ se tiene un mínimo local en $A_{1,2}$.
- Para $\beta^{(0)}$ se tiene un máximo local en α_2 .
- Para $\beta^{(2)}$ se tiene un mínimo local en α_2 .
- Para γ_2 se tiene un máximo local en α_2 .
- Para $\lambda^{(2)}$ se tiene un máximo local en α_2 .

Estos efectos pueden resultar ser muy interesantes para el cálculo de la solución más óptima con emisión de gas, sobre todo el mínimo de α_2 en $\kappa^{(0)} = 0.05357$ y el mínimo de α_2 en $\beta^{(2)} = 0.011$, puesto que resulta de interés obtener una capa intermedia gruesa (y minimizar α_2 contribuye a lograr este efecto).

No tener mínimo para la constante del potencial eléctrico parece lógico (si se acerca a cero el resultado se aproxima a la solución trivial homogénea), pero no tener máximo para ella puede indicar que este sólo se conseguirá aumentando (o disminuyendo, según convenga) todos los parámetros hasta que se deje de obtener una solución válida.

3.3 Planos paramétricos

Se puede explorar la variación simultánea de dos parámetros. En este caso, se han elegido los pares de cocientes $\kappa^{(0)}$ y $\kappa^{(2)}$, $\beta^{(0)}$ y $\beta^{(2)}$, y por último, $\lambda^{(0)}$ y $\lambda^{(2)}$. Se tiene un continuo de direcciones de exploración para cada pareja de parámetros.

Se puede partir de una dirección arbitraria (la de mayor apariencia de realidad física) hasta encontrar la frontera de la región paramétrica de existencia en esa dirección. Esa frontera sirve entonces de punto de partida para determinar el resto del contorno bidimensional en el plano paramétrico por continuidad.

Si bien el proceso que se ha seguido en la obtención de la frontera bidimensional es distinto en cada caso y depende de la situación concreta a tratar, se podría obtener una descripción discreta suficiente de la isla paramétrica de la siguiente manera:

- Obtención de ocho puntos principales discretizando el continuo de direcciones en ocho.
- Obtención de los cuatro puntos fronterizos a 30, 45 y 60 grados.
- Obtención de puntos fronterizos a elección dependiendo de la frontera calculada anteriormente.
- Obtención de puntos internos orientativos.
- Obtención de puntos concretos de interés para precisar la forma de la región paramétrica calculada.

El procedimiento se puede generalizar para n-dimensiones, intentando deducir en qué direcciones se encontrarán las fronteras de la isla n-dimensional. Se propone para una posible futura investigación agrupar la tensión superficial γ_2 con los pares de parámetros considerados en los planos paramétricos: $\kappa^{(0)}$ y $\kappa^{(2)}$, $\beta^{(0)}$ y $\beta^{(2)}$, y por último, $\lambda^{(0)}$ y $\lambda^{(2)}$.

En este trabajo se han explorado cuatro planos paramétricos, como se menciona anteriormente en esta sección. El plano tensión superficial es realmente una recta que recoge sus extremos paramétricos. El plano conductividad eléctrica representa $\kappa^{(2)}$ frente a $\kappa^{(0)}$, el plano permitividad relativa representa $\beta^{(2)}$ frente a $\beta^{(0)}$ y el plano viscosidad representa $\lambda^{(2)}$ frente a $\lambda^{(0)}$.

En los siguientes planos se muestran en azul los puntos fronterizos obtenidos, en verde, los puntos internos a la región paramétrica válida y en naranja, la solución de partida.

Los puntos azules se llaman fronterizos porque se han obtenido maximizando (o minimizando) en cada caso el parámetro correspondiente. Por debajo (o encima) del mismo no existe solución al menos en los puntos inmediatos. En ocasiones se puede obtener una pequeña región dentro de la isla paramétrica en la que no haya solución, estas regiones se marcarán con puntos azules en su frontera y con líneas rojas en su interior.

Los puntos verdes se denominan internos porque no ha habido ningún proceso de barrido en su determinación. Simplemente se representan para determinar o intuir que en esa región del espacio existe solución válida.

Los planos paramétricos se han representado en escala logarítmica en ambos ejes. Este tipo de escala en los ejes permite representar puntos de diferentes órdenes de magnitud en la misma gráfica, pero no representa los ceros absolutos. Estos puntos se añaden a mano en representaciones siguientes.

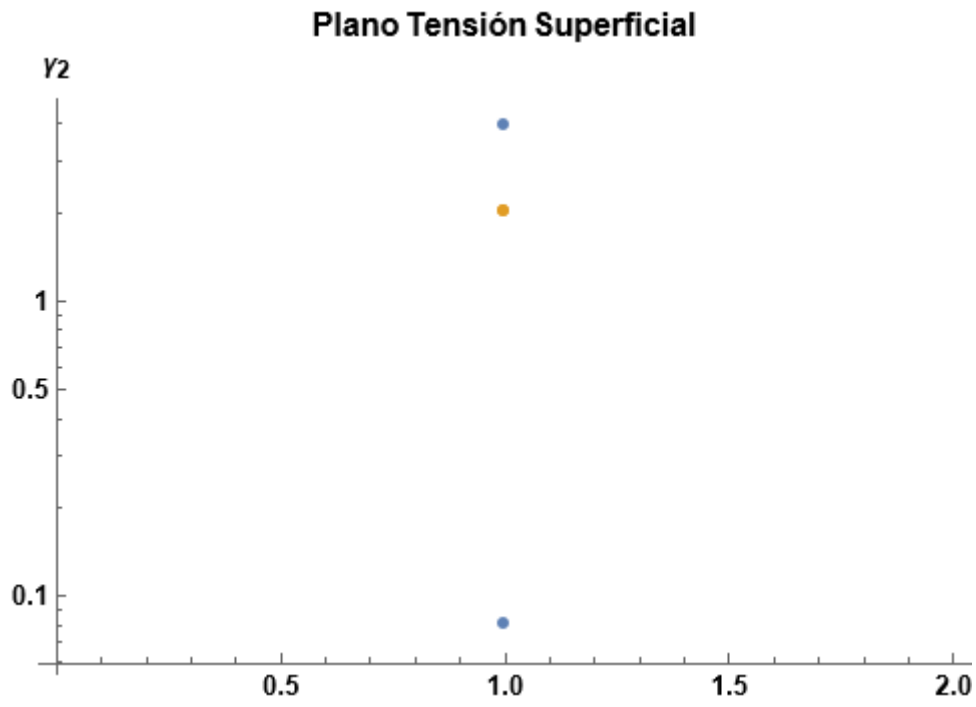


Figura 3.3 Planos paramétricos: tensión superficial.

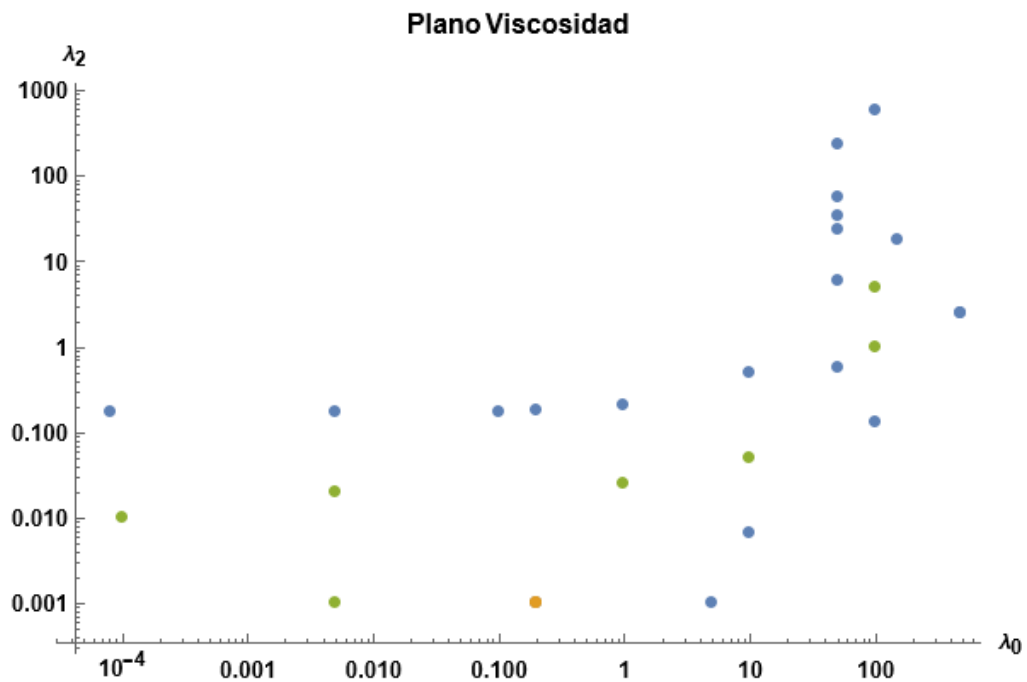


Figura 3.4 Planos paramétricos: viscosidad.

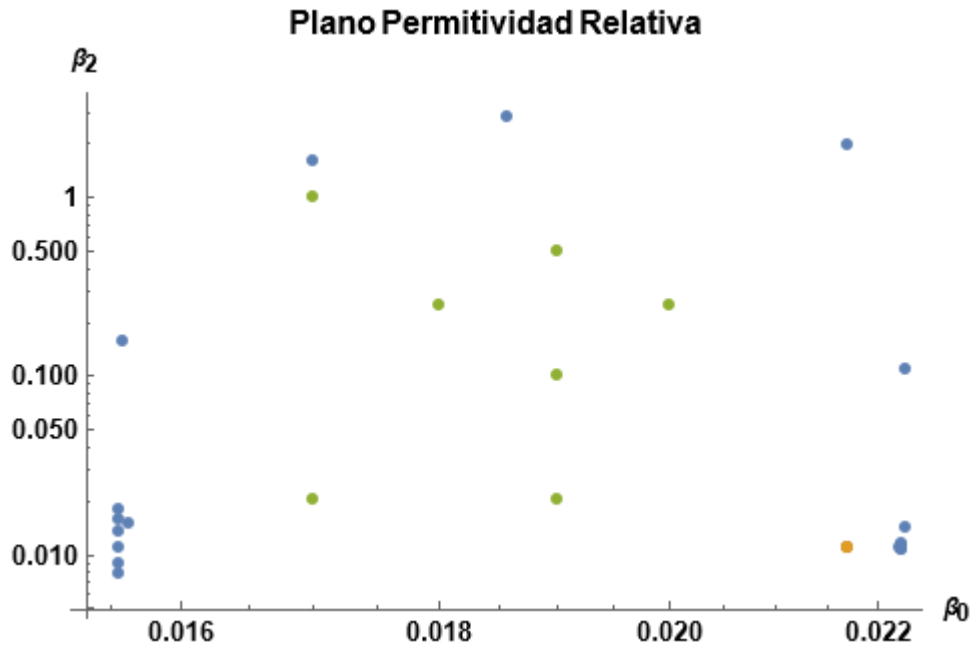


Figura 3.5 Planos paramétricos: permitividad relativa.

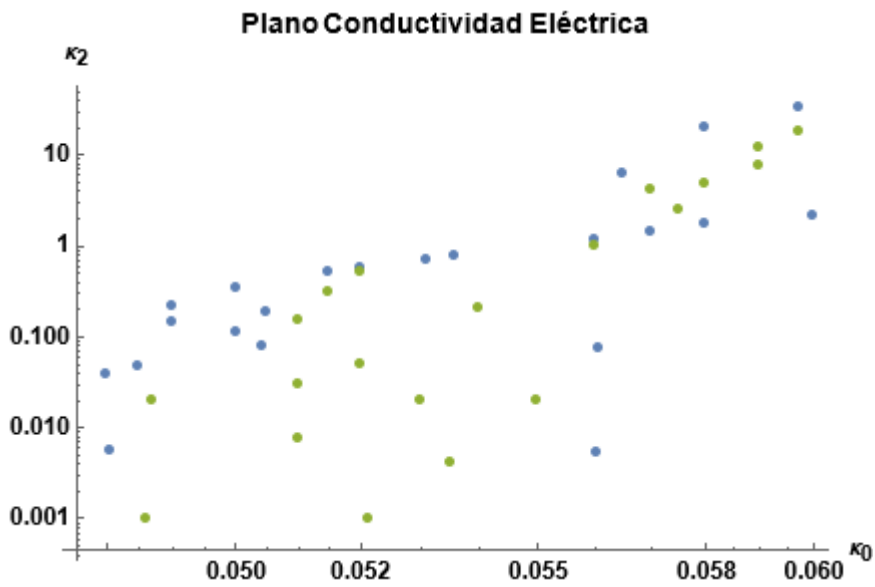


Figura 3.6 Planos paramétricos: conductividad eléctrica.

La frontera de la isla paramétrica se obtiene uniendo los puntos que se habían calculado anteriormente, calculando nuevos puntos intermedios si procede. A continuación, se adjuntan los planos con las fronteras intuitivas señaladas en color morado:

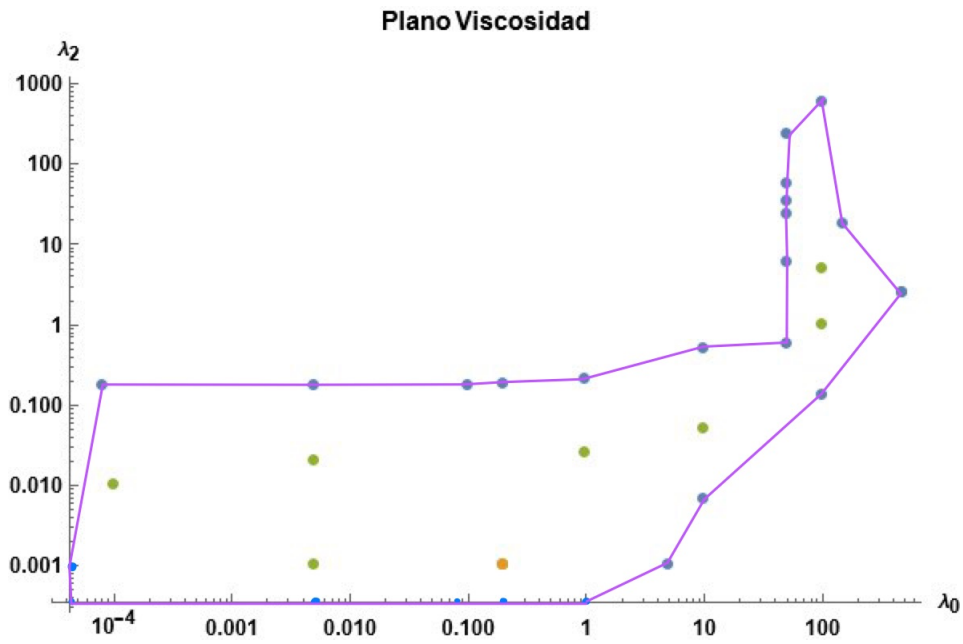


Figura 3.7 Planos paramétricos con frontera: viscosidad.

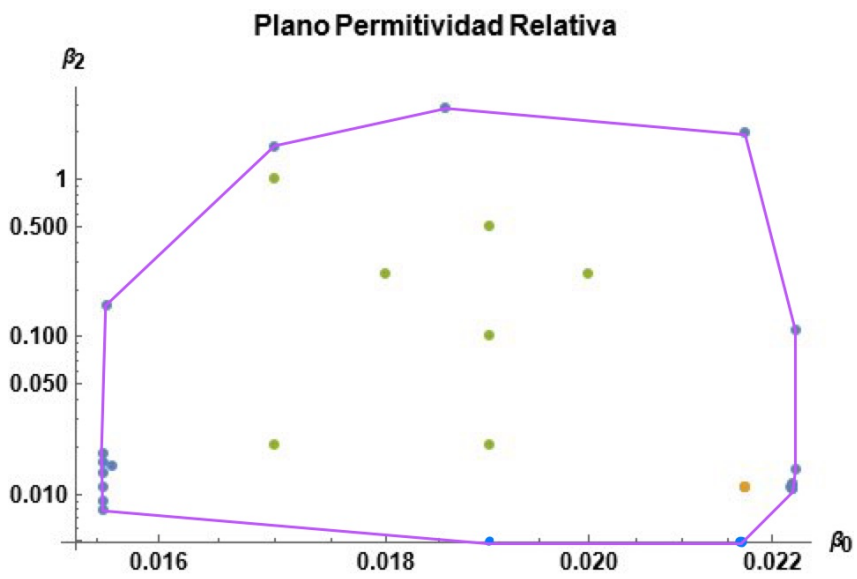


Figura 3.8 Planos paramétricos con frontera: permitividad relativa.

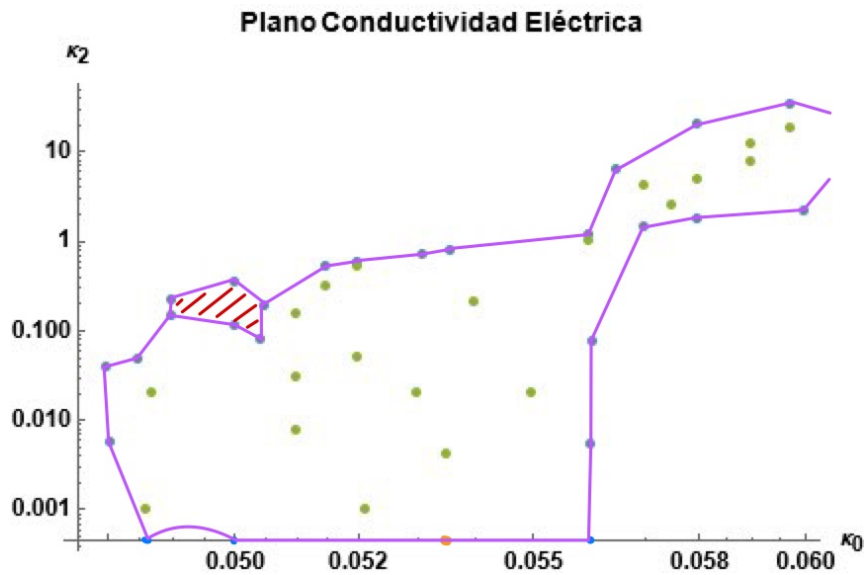


Figura 3.9 Planos paramétricos con frontera: conductividad eléctrica.

Se ha creído oportuno ahondar en las siguientes cuestiones:

- Plano viscosidad: presenta una frontera bastante continua y comprende órdenes de magnitud muy distintos. Las soluciones con altos valores en ambos cocientes de viscosidad presentan muy altos valores para la constante del potencial eléctrico.
- Plano permitividad relativa: se trata de una región muy simple pero demasiado pequeña. Sería conveniente estudiar a fondo mayores rangos de validez para los parámetros.
- Plano conductividad eléctrica: es el más complejo de todos, es necesario estudiarlo por zonas y sería interesante estudiar la región en la que $\lambda^{(0)} < 0.05$ a fondo, la línea curva es una línea determinada por la intuición y podría aportar información valiosa determinarla con mayor precisión. Presenta regiones internas a la isla paramétrica en las que no existe solución y grandes cambios de forma. Además, se ha dejado la zona superior derecha abierta porque se sabe que existe región paramétrica por encima de esos valores pero no son a priori puntos relevantes para nuestro estudio (véase la Figura 2.11).

3.4 Optimizaciones

En este apartado se pretende encontrar valores óptimos de la solución. El procedimiento para llegar a ellas está puramente guiado por la intuición, con ayuda de la tabla de la figura 3.2 mostrada al final de la sección 3.3.1.

Como todas las constantes del problema son de órdenes de magnitud parecidos, maximizar la constante resultante de la solución numérica parece ser equivalente a maximizar el potencial eléctrico, o el caudal necesario de entrada. Por otro lado, minimizar la diferencia entre los ángulos de interfaz equivale a tener una capa de fluido intermedio más fina. Al situarse entre los otros dos dominios, se puede esperar que cuanto más gruesa sea esta capa, mejor será la estabilidad de la configuración real, pues la transición será continuada y no brusca.

Si bien estas optimizaciones son cálculos interesantes, no podemos asegurar que sean los óptimos globales en todo el dominio, pero sí podemos pensar que, como mínimo, se trata de extremos relativos.

En este caso se cambia el valor de muchos parámetros simultáneamente, ello requiere un cambio en la condición admisibilidad de la solución obtenida. Además de todo lo discutido anteriormente, la solución no será admisible si el valor del parámetro a optimizar se aleja del óptimo.

En las siguientes tablas se muestra la optimización de la constante del potencial eléctrico desconocida $A_{1,2}$ y del tamaño de la capa intermedia α , lo que es lo mismo $\alpha_{capa} = \alpha_1 - \alpha_2$

Parámetro	Valor de partida	Máximo 1	Máximo 2	Máximo 3
κ^0	0.05357	0.05465	0.05465	0.05357
κ^2	0	0	0	0
β^0	0.0217	0.02214	0.02214	0.0217
β^2	0.011	0.01078	0.01078	0.011
γ_2	2	2.042	2.042	2
λ^0	0.2	623.9	0.1960	483.1
λ^2	0.001	2.299	0.0009801	2.415
$A_{1,2}$	14.78	21.69	22.25	47.68
α_1	0.4232	0.4513	0.4503	0.4405
α_2	0.06233	0.02110	0.01631	0.04376

Figura 3.10 Resultados de la optimización de la constante desconocida.

En la tabla de la figura 3.10 se muestran los resultados de la optimización de la constante del potencial eléctrico desconocida. Los procesos de optimización que se han llevado a cabo son:

- Máximo 1: aumento o disminución correspondiente de cada parámetro (según los resultados obtenidos en la tabla de la figura 3.2).
- Máximo 2: aumento o disminución correspondiente de cada parámetro (según los resultados obtenidos en la tabla de la figura 3.2) a excepción de los cocientes de viscosidad.
- Máximo 3: solución obtenida buscando puntos fronterizos del plano viscosidad con un valor muy alto de la constante.

Parámetro	Valor de partida	Máximo 1	Máximo 2	Mínimo 1
κ^0	0.05357	0.05670	0.05357	0.05239
κ^2	0	0	0	0.5392
β^0	0.0217	0.02049	0.017	0.02219
β^2	0.011	0.01164	16.119	0.01076
γ_2	2	1.889	3.921	2
λ^0	0.2	0.2	2	0.2
λ^2	0.001	0.001058	0.001	0.001
$A_{1,2}$	14.78	18.87	10.06	18.16
α_1	0.4232	0.5191	0.6028	0.4232
α_2	0.06233	0.02201	0.05692	0.06233
Capa intermedia	0.3818 rad, 21.87°	0.4971 rad, 28.48°	0.5459 rad, 31.28°	0.3609 rad, 20.68°

Figura 3.11 Resultados de la optimización del tamaño de la capa intermedia.

- Máximo 1: Aumento o disminución de los parámetros según corresponde (conclusiones de la tabla de la figura 3.2) para maximizar la diferencia de ángulos de interfaz.
- Máximo 2: Solución obtenida cambiando únicamente los parámetros más relevantes cuya variación causaba un mayor cambio en la solución.
- Mínimo 1: Aumento o disminución de los parámetros según corresponde (conclusiones de la tabla de la figura 3.2) para minimizar la diferencia de ángulos de interfaz.

Puede ver todos los resultados de esta sección sobre islas paramétricas en el código incluido en el apéndice C.

4 Una nueva solución

4.1 Alternativas consideradas

Tratando de encontrar una isla paramétrica a la que pertenezca una configuración con el dominio interno gaseoso, es imprescindible entender qué rangos de valores de los parámetros lo representarían y decidir las modificaciones pertinentes.

Parámetro	Valor de partida
κ^0	0
κ^2	0
β^0	0.02469
β^2	0.01234
γ_2	2.400
λ^0	112.4
λ^2	0.02022

Figura 4.1 Parámetros de la solución de aceite agua y gas.

En esta tabla se muestran los parámetros de la configuración para la que se deseaba obtener solución y no se pudo en la sección 2. Llama mucho la atención la nulidad de los dos cocientes de conductividades, claro indicativo de que la solución no existirá. Pero también se debe resaltar que los puntos de los planos permitividad relativa y viscosidad no pertenecen a la región de solución admisible. En concreto, el punto del plano viscosidad es el más alejado y el que se debe cambiar con prioridad. Para ello se estudian cambios en los fluidos de la configuración.

En primer lugar, ya se ha demostrado en la sección 2.5 que ambos coeficientes de conductividad no pueden ser nulos. Puesto que el gas es necesario ya que obtener un aerosol de partículas gaseosas es el propósito de este trabajo, el aceite fue el elegido para ser cambiado (o al menos modificado).

Con las tablas de propiedades de fluidos se han encontrado algunas alternativas que parecían atractivas para sustituir al aceite: acetona, butano, polipropil carbonato y etilglicol (este último en sustitución del agua). Se muestran en la siguiente tabla los parámetros logrados.

Configuración	κ^0	κ^2	β^0	β^2
Aislante poco viscoso, agua y aire	0.05	0	0.02	0.01235
Aceite conductor, leaky dielectric poco viscoso y aire	0.05	0	0.02469	0.01235
Aceite conductor, etilglicol y aire	0.05	0	0.05405	0.02703
Aceite con aditivos, polipropil carbonato y aire	0.05	0	0.03082	0.01541
Aceite con aditivos, acetona y aire	0.05	0	0.2301	0.1151
Acetona, agua y aire	0.05	0	0.01254	0.01235
Aceite con aditivos, agua y aire	0.05	0	0.02	0.01235

Figura 4.2 Parámetros de conductividad eléctrica y permitividad relativa de las configuraciones investigadas.

Configuración	γ_2	λ^0	λ^2
Aislante poco viscoso, agua y aire	2.400	0.5	0.2022
Aceite conductor, leaky dielectric poco viscoso y aire	2.400	1120	0.2022
Aceite conductor, etilglicol y aire	0.5319	6.25	0.001094
Aceite con aditivos, polipropil carbonato y aire	0.5967	36.23	0.06522
Aceite con aditivos, acetona y aire	0.9921	312.5	0.05625
Acetona, agua y aire	0.84	0.36	0.018
Aceite con aditivos, agua y aire	2.400	10	0.018

Figura 4.3 Parámetros de tensión superficial y viscosidad de las configuraciones investigadas.

Se encuentran soluciones para las configuraciones de

- Aislante con poca viscosidad, agua y aire. (Solución válida siempre que exista el fluido inventado).
- Aceite con aditivos para conductividad, polipropil carbonato y aire.
- Aceite con aditivos para conductividad, agua y gas.

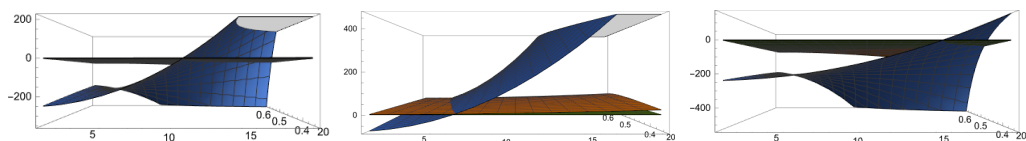


Figura 4.4 Algunos gráficos obtenidos en busca de solución. Consulte el apéndice D para más información.

Partiendo del código anterior de resolución del caso con tres dominios, se extrae la solución de todas las constantes y las tres ecuaciones restantes pendientes de resolver numéricamente. Se cambian los valores de los parámetros fluidos en función de la configuración deseada y se obtiene como resultado numérico la constante de potencial eléctrico restante y los dos ángulos de interfaz.

Como se ve en estos gráficos, la solución en este caso se ha buscado fijando un valor del ángulo menor de interfaz y usando como coordenadas libres el otro ángulo de interfaz y la constante de potencial eléctrico. De igual forma que cuando se buscó un punto de partida en la sección 2.4, aquí

se persigue que las tres superficies representadas en el gráfico tridimensional tengan el mismo valor en un punto del espacio. Puede ver un código con la investigación realizada en el apéndice D.

Era crucial dotar el sistema de cierta conductividad, pero aparecían problemas nuevos, esencialmente problemas con la viscosidad y la permitividad relativa. La viscosidad puede ser problemática porque si los efectos viscosos dominan el problema pueden frenar la emisión disminuyendo las velocidades en las interfaces debido a los efectos de los esfuerzos eléctricos tangenciales. La permitividad relativa, por su parte, tiene una región de validez muy pequeña, en vista de los resultados de la investigación de las islas paramétricas.

Se pueden buscar rangos de valores con sentido físico dentro de familias de líquidos existentes con los que puedan producirse diferentes formulaciones mediante mezclas, una práctica habitual en ingeniería química, bioquímica, química analítica, etc.

4.2 Combinaciones líquidas

En nuestra configuración existen dos problemas principales: la conductividad eléctrica y la viscosidad del aceite.

Es cierto que la permitividad relativa del aceite ha de disminuirse un poco, o en su lugar se debe elegir un agua con una permitividad relativa mayor, pero no parece ser un problema tan grande como los dos anteriores.

El problema de la conductividad eléctrica tiene fácil solución: existen unos aditivos, brevemente mencionados en el apartado anterior, que pueden incorporarse al aceite para dotarlo de conductividad. Por ejemplo, la empresa americana AftonChemical fabrica aditivos para añadir a combustibles, lubricantes y aceites de motor, y la empresa alemana Clariant Produkte tiene una patente que trata sobre aceites minerales dotados de conductividad eléctrica.

En cuanto a la viscosidad, se necesita un aceite muy poco viscoso. Normalmente la viscosidad del aceite ronda los 100 cP. Se requiere reducir su viscosidad en un orden de magnitud, en torno a los 10 cP. Existen métodos para reducir la viscosidad de los fluidos, como realizar una especie de tratamiento térmico (al aumentar la temperatura disminuye la viscosidad). La empresa mexicana Noria explica como fabrica aceites con la viscosidad adecuada para cada motor: se trata de mezclar un aceite con cierta viscosidad con otro aceite o lubricante con la viscosidad deseada.

La viabilidad tecnológica parece existir, pero sería necesario realizar un estudio de la viabilidad económica antes de llevar a cabo el experimento en la realidad.

4.3 La solución real con emisión

Para este propósito se ha contado con los métodos desarrollados en MATLAB® por los profesores José María López-Herrera y Miguel Ángel Herrada. Como el método inicialmente disponible no contemplaba la posibilidad de un dominio interno gaseoso, estos profesores han adaptado su método numérico para que se ajuste al problema que se pretende resolver en este documento y me han permitido utilizarlo para investigar. Son por tanto parte fundamental de este trabajo y quiero utilizar este espacio para agradecer su aportación.

El código funciona de la siguiente manera: se elige el número de ejecuciones que se van a realizar,

incluso permite utilizar varios núcleos del procesador para un mejor rendimiento. El método carga una solución anterior, normalmente la última que se ha obtenido, y verifica el número de parámetros que la caracterizan (en este caso deben ser 23) y se inicia el cálculo.

El cálculo comienza con un barrido paramétrico (o una actualización de parámetros) elegido por el usuario. Estos son generalmente pequeños aumentos o disminuciones de los mismos. Con este nuevo valor del parámetro, se verifica numéricamente el error cometido en la diferencia de la solución anterior con esta posible nueva solución. Si el error converge (cada iteración se hace menor), la nueva solución existe.

La filosofía del método es encontrar un camino de soluciones intermedias que conecten la solución de partida con la solución buscada. Si esto ocurre, la solución buscada existe y puede producirse. Esto es lo que se intentará encontrar para la nueva solución buscada.

Los parámetros que intervienen en el método son 23:

- Permitividad relativa de los fluidos 1 y 2: $pa(1) = \epsilon^{(1)}$ y $pa(14) = \epsilon^{(2)}$
- Velocidades de entrada del fluido 2 (parámetro 2) y del fluido 1 (parámetro 15)
- Número de Ohnesorge para el fluido 2 (parámetro 3)
- Conductividad eléctrica de los fluidos 0, 1 y 2: $pa(4) = K^{(2)}$, $pa(11) = K^{(1)}$ y $pa(23) = K^{(0)}$
- Voltaje aplicado (parámetro 5)
- Longitud de la aguja inyectora 1 y 2 (parámetros 13 y 6, respectivamente)
- Radio de la aguja 2 (parámetro 7)
- Campo eléctrico externo (parámetro 8)
- Cociente de densidades entre los fluidos 2 y 1 (parámetro 9) y entre los fluidos 0 y 1 (parámetro 21)
- Cociente de viscosidades entre los fluidos 2 y 1 (parámetro 10) y entre los fluidos 0 y 1 (parámetro 22)
- Cociente de tensión superficial entre los fluidos 2 y 1 $pa(12) = \gamma_2$
- Amplitud del dominio computacional (parámetro 16)
- Los parámetros 17, 18, 19 y 20 son parámetros relacionados con las condiciones de geometría del problema

La solución inicial tiene agua en la fase interna (fluido 2), TBP (tributilfosfato) en la fase intermedia (fluido 1) y aire en la fase externa (fluido 0). Los parámetros que la caracterizan se pueden ver en la tabla de la figura 4.5.

En primer lugar se optó por bajar la conductividad interna, para posteriormente bajar la densidad del fluido interno, esto convertiría el agua de la solución de partida en un gas en la solución final (baja densidad y baja conductividad eléctrica).

Posteriormente, se aumentaría la densidad externa para conseguir un aceite, y se corregirían los parámetros relativos a las densidades, permitividades relativas y viscosidades para transformar el TBP en agua.

Sin embargo, al comenzar la búsqueda numérica de la solución todavía no se había calculado la solución analítica (se empezó a buscar una solución que ni siquiera se sabía con certeza si existiría) y por tanto se requirió realizar un pequeño cambio en el método: la introducción del parámetro 23 (conductividad del fluido externo, que en un principio sería nula al tratarse de un aislante, pero finalmente debía ser distinta de cero, tal y como se demuestra en la sección 2.5) para el que comenzamos con un valor muy pequeño (de forma que fuera aproximadamente nulo) que incrementaría poco a poco.

Así, se procedió disminuyendo el parámetro 4, la conductividad interna. Posteriormente se insertó el parámetro 23, la conductividad externa, y se aumentó para finalmente cuadrar el resto de parámetros, sobre todo aquellos relacionados con la densidad y viscosidad de los fluidos, los parámetros 21 y 22.

Los parámetros que se desean obtener son orientativos y se han calculado con el código de evaluación de parámetros que los profesores López-Herrera y Herrada incluyen en su aportación a este trabajo.

La siguiente tabla muestra los parámetros de la solución de partida, algunas soluciones intermedias y los valores finales a los que se ha llegado.

Parámetros	Solución de partida	Solución Intermedia 1	Solución Intermedia 2	Solución Intermedia 3	Solución Intermedia 4	Solución Intermedia 5	Solución Final
1	8.91	16.8011	55.3656	55.3656	81	81	81
2	4.0486e-04	4.0486e-04	1.7210e-05	1.7210e-05	7.9087e-06	7.9087e-06	7.9087e-06
3	0.0191	1.0324	1.0324	1.0324	0.9808	0.9700	0.0104
4	1e+04	27.5956	27.0464	15.0361	6.2869	6.1002	0
5	8.1908	8.1908	8.1908	8.1908	8.1908	8.9688	7.8492
6	3.7001	3.7001	3.7001	3.7001	3.7001	3.6927	1.5010
7	2.6670	2.6670	2.6670	2.6670	2.6670	2.6670	2.6670
8	30	30	30	30	27.1106	26.6935	10
9	0.9760	0.9760	1000	1000	1000	1000	1000
10	3.3900	3.3900	0.4579	0.4579	1.6873	3.7681	55.5556
11	1.8997e+3	1.8997e+3	1.6234e+03	427.8035	418.8236	418.8236	418.8236
12	0.2904	0.3052	2.3688	2.2811	2.2811	2.3156	2.3997
13	3.7001	3.7001	3.7001	3.7001	3.4096	3.3757	1.5010
14	81	81	1	1	1	1	1
15	0.0034	0.0034	1.0412e-04	1.0412e-04	1.0210e-04	1.0210e-04	1.0210e-04
16	16.0500	16.0500	16.0500	16.0500	16.0500	16.0500	12
17	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000
18	10	10	10	10	10	10	10
19	0.8890	0.8890	0.8890	0.8890	0.8890	0.8890	0.8890
20	10	10	10	10	10	10	10
21	1e-03	1e-03	1e-03	0.0051	0.0064	0.0064	920
22	1e-03	1e-03	0.0020	0.0018	0.0032	0.0032	555.55556
23	0	0	0	1.6987e-04	0.0099	0.0118	0.05

Figura 4.5 Soluciones inicial, final e intermedias.

Hasta ahora se han calculado más de 380 soluciones intermedias y los principales obstáculos para llegar a la solución final parecen los parámetros 21 y 22, muy lejanos de su orden de magnitud. Se trata del cociente de viscosidades y del cociente de densidades, que queremos aumentar para terminar la "transformación" del líquido interno de la solución de partida en el gas deseado.

Como se puede ver en la tabla, actualmente queda poco para llegar a la solución final, pero no ha sido posible obtenerla antes de que finalizara el periodo de tiempo para entregar el trabajo. Igualmente se pretende continuar con la búsqueda de la misma con el objetivo de encontrar una solución para un posible artículo científico o simplemente por concluir el trabajo.

Se muestra a continuación una solución intermedia obtenida, que permite representar también diagramas como campos de presiones, líneas de flujo y líneas equipotenciales.

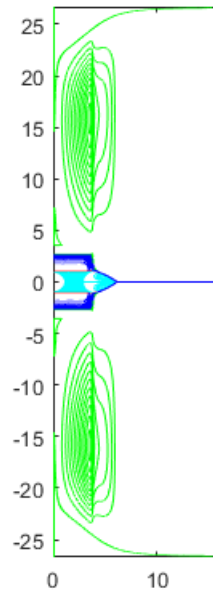


Figura 4.6 Diagrama de una solución intermedia.

5 Conclusiones y próximos pasos

La ciencia no tiene un principio y un final, sino que se trata de un proceso continuo de experimentación, investigación y desarrollo. Aunque aquí termine mi trabajo, sigue quedando mucho por hacer. En esta sección se resumen los avances más relevantes de la investigación, se describen avances en otros caminos que no llegaron a completarse y se proponen próximos pasos y campos de estudio interesantes para trabajos futuros.

5.1 El problema de la conductividad

En primer lugar, se ha demostrado que no existirá solución en un problema de 3 dominios si ambos cocientes de conductividad $\kappa(0)$ y $\kappa(2)$ son idénticamente nulos.

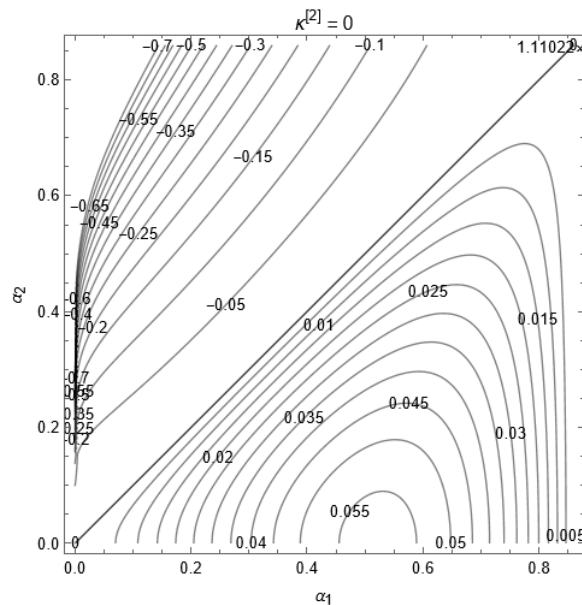


Figura 5.1 Demostración gráfica de la inexistencia de solución cuando $\kappa(0) = \kappa(2) = 0$.

En el proceso del electrospray se ha utilizado tradicionalmente aire como fase externa (fluido 0),

y se tenía por tanto $\kappa(0) = 0$, lo cual no afectaba al problema con dos líquidos inyectados. Sin embargo, a la hora de inyectar un gas en el interior se tiene que evitar la tendencia de volver a colocar un aislante, puesto que imposibilitará la existencia de solución.

5.2 Coherencia de resultados

Se consideró interesante resolver el problema en otro programa distinto, como medida de comparación de resultados: si se hubiera obtenido lo mismo en dos entornos distintos, se habría conseguido un pilar en el que apoyarse para justificar la validez y la coherencia de los resultados.

El problema analítico está resuelto en el programa Wolfram Mathematica[®]. También se intentó una resolución en MATLAB[®], que no fue fructífera. A la hora de la resolución fueron dos los principales problemas:

- MATLAB[®] no cuenta con las funciones asociadas de Legendre para coeficientes no enteros.
- El tamaño de la ventana de comandos es limitado y si se excede el programa no es capaz de retomar los cálculos.

Si bien no se pudo resolver el problema del espacio limitado en la ventana de comandos de MATLAB[®], el primer problema fue solucionado. Si se parte de la definición de las funciones asociadas de Legendre, se pueden calcular fácilmente las funciones deseadas obteniendo las condiciones iniciales de Wolfram Mathematica[®]. El resultado son funciones hipergeométricas. Puede ver esta resolución en el código incluido en el apéndice E.

La expresión general de la definición de las funciones asociadas de Legendre es:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (a(a+1) - \frac{b^2}{1-x^2})y = 0 \quad (5.1)$$

Y al sustituir los parámetros $a = 1/2$ y $b = 0$ se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4}y = 0 \quad (5.2)$$

Si se presta atención, se puede relacionar directamente la expresión (3.2) con la ecuación (2.7) para $m = 0$ que define la solución autosemejante del potencial eléctrico. Es por ello que en la ecuación (2.9) se observa que la solución es una combinación lineal de las dos soluciones posibles.

5.3 Las islas paramétricas

El concepto de isla paramétrica es antiguo, pero su utilidad es inmensa y las regiones paramétricas aquí representadas pueden ser una base que expandir o una guía para futuros investigadores.

Aplicaciones y campos de estudio interesantes relacionados con las islas paramétricas son: encontrar combinaciones de fluidos que formen una configuración útil que hasta entonces era desconocida, estudiar la influencia de ciertos parámetros o combinaciones de los mismos en soluciones de todo tipo, representaciones tridimensionales o n-dimensionales, hallazgo de nuevas optimizaciones...

También podría ser interesante estudiar la isla paramétrica de soluciones con un gas como fase interna y estudiar la transición entre esta región del espacio y la isla paramétrica global.

5.4 Una solución con emisión de gas

Sin dudar, la consecución de una solución con emisión de gas es el logro más reseñable del trabajo (si es que se consigue, todo parece cuestión de tiempo). No sólo porque se habría obtenido por primera vez, sino también porque abriría muchos caminos nuevos: un estudio de la estabilidad de la solución, un estudio de la viabilidad técnica y económica del proyecto, una investigación sobre otro tipo de configuraciones que permitan obtener emisión de gas con mejores propiedades, mayor o menor potencial eléctrico, mayor o menor tamaño de capa intermedia...

Además, el hecho de que se haya obtenido una solución analítica estacionaria y una región del espacio formado por los parámetros fluidos que la definen donde es posible encontrar una solución analítica sugiere que debe existir una solución real con emisión de aerosol.

En definitiva, realizar un avance, por minúsculo que sea, en el ámbito científico siempre implica la apertura de nuevos caminos.

Apéndice A

Resolución analítica del problema con 2 dominios (J=1)

Los códigos de los apéndices A y B han sido escritos por Máximo Beas Martínez a partir del artículo escrito por Gañán-Calvo y Montanero en 2021 como referencia y fundamento principal. Todas las ecuaciones descritas en el planteamiento del problema fueron formuladas en dicho artículo, que además explica el proceso de resolución. Alfonso Gañán-Calvo, autor de dicho artículo y tutor de este trabajo desarrolló su propio código de resolución del problema en Wolfram Mathematica®, y me ha enseñado a utilizar este lenguaje de programación, a resolver el problema y me ha brindado su ayuda cuando me he encontrado con problemas que no he sabido solventar.

El código desarrollado por Gañán-Calvo se ha usado como base y lo que se presenta en esta sección se puede considerar como un añadido al mismo. Pese a que el escritor es el alumno Máximo Beas, los códigos originales y en particular, los de representaciones gráficas, pertenecen a Alfonso Gañán-Calvo.

1. Formulación del problema

$$\Psi_0 = r^2 * (C10 + C20 * \text{Cos}[t] + C30 * \text{Cos}[t]^2 + C40 * (1 - \text{Cos}[t]^2) * \text{ArcTanh}[\text{Cos}[t]]);$$

$$\Psi_1 = r^2 * (C11 + C21 * \text{Cos}[t] + C31 * \text{Cos}[t]^2 + C41 * (1 - \text{Cos}[t]^2) * \text{ArcTanh}[\text{Cos}[t]]);$$

$$\Phi_0 = r^{0.5} * (A10 * \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[t]] + A20 * \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[t]]);$$

$$\Phi_1 = r^{0.5} * (A11 * \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[t]] + A21 * \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[t]]);$$

$$Vr_0 = 1/r^2 / \text{Sin}[t] * D[\Psi_0, t];$$

$$Vr_1 = 1/r^2 / \text{Sin}[t] * D[\Psi_1, t];$$

$$Vt_0 = -1/r / \text{Sin}[t] * D[\Psi_0, r];$$

$$Vt_1 = -1/r / \text{Sin}[t] * D[\Psi_1, r];$$

$$Er_0 = -D[\Phi_0, r];$$

$$\begin{aligned}
Er1 &= -D[\Phi1,r]; \\
Et0 &= -1/r * D[\Phi0,t]; \\
Et1 &= -1/r * D[\Phi1,t]; \\
Vr0int &= Vr0/.t->\alpha; \\
Vr1int &= Vr1/.t->\alpha; \\
Vt0int &= Vt0/.t->\alpha; \\
Vt1int &= Vt1/.t->\alpha; \\
Er0int &= Er0/.t->\alpha; \\
Er1int &= Er1/.t->\alpha; \\
Et0int &= Et0/.t->\alpha; \\
Et1int &= Et1/.t->\alpha; \\
p0 &= p\infty + 2 * \lambda0 * (C20 - C40)/r; \\
p1 &= p\infty + 2 * (C21 - C41)/r; \\
tautt0 &= 2 * \lambda0/r * (D[Vt0,t] + Vr0); \\
tautt1 &= 2/r * (D[Vt1,t] + Vr1); \\
tauMtt0 &= \beta0/2 * ((Et0)^2 - (Er0)^2); \\
tauMtt1 &= 1/2 * ((Et1)^2 - (Er1)^2); \\
kgorro &= 1/(r * Tan[\alpha]); \\
taurt0 &= \lambda0 * (r * D[Vt0/r,r] + 1/r * D[Vr0,t]); \\
taurt1 &= (r * D[Vt1/r,r] + 1/r * D[Vr1,t]); \\
tauMrt0 &= \beta0 * Er0 * Et0; \\
tauMrt1 &= Er1 * Et1; \\
tautt0int &= tautt0/.t->\alpha; \\
tautt1int &= tautt1/.t->\alpha; \\
tauMtt0int &= tauMtt0/.t->\alpha; \\
tauMtt1int &= tauMtt1/.t->\alpha; \\
taurt0int &= taurt0/.t->\alpha; \\
taurt1int &= taurt1/.t->\alpha; \\
tauMrt0int &= tauMrt0/.t->\alpha; \\
tauMrt1int &= tauMrt1/.t->\alpha;
\end{aligned}$$

2. Ecuaciones

$$E1 = C10 - C20 + C30 == 0;$$

$$E2 = C11 + C21 + C31 == 0;$$

$$E3 = C40 == 0;$$

$$E4 = C41 == 0;$$

$$E5 = A10 == 0;$$

$$E6 = A21 == 0;$$

$$E7 = Vt0int == 0;$$

$$E8 = Vt1int == 0;$$

$$E9 = Vr0int - Vr1int == 0;$$

$$E10 = p1 - p0 + \text{tautt0int} - \text{tautt1int} + \text{tauMtt0int} - \text{tauMtt1int} - \text{kgorro} == 0;$$

$$E11 = \text{taurt0int} - \text{taurt1int} + \text{tauMrt0int} - \text{tauMrt1int} == 0;$$

$$E12 = Er0int - Er1int == 0;$$

$$E13 = k0 * Et0int - Et1int == 0;$$

3. Resolución

3.1 Condiciones de contorno

$$C40 = 0;$$

$$C41 = 0;$$

$$A10 = 0;$$

$$A21 = 0;$$

$$C30 = -(C10 - C20);$$

$$C31 = -(C11 + C21);$$

3.2 Problema eléctrico

`FullSimplify[Solve[E12,A11]]`

$$\left\{ \left\{ A_{11} \rightarrow \frac{1.A_{20} \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]}{\text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]} \right\} \right\}$$

$$A_{11} = \frac{1.A_{20} \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]}{\text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]},$$

FullSimplify[E13]

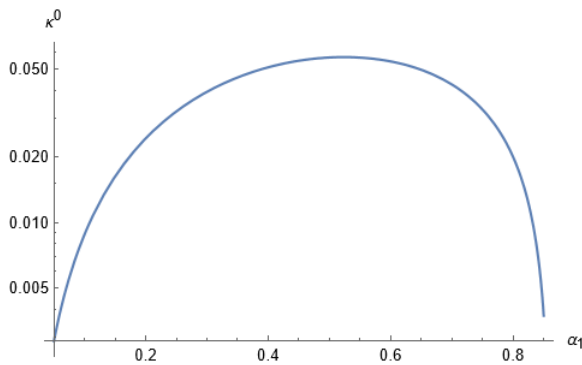
FullSimplify[

Solve[

$$\begin{aligned} & (A_{20}(-1.5 \text{LegendreP}[1.5, \text{Cos}[\alpha]] \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] + \\ & \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] \\ & ((1.5 - 1.5k_0) \text{Cos}[\alpha] \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] + \\ & 1.5k_0 \text{LegendreQ}[1.5, \text{Cos}[\alpha]])) \text{Sin}[\alpha]) / \\ & (r^{0.5} (-1. + \text{Cos}[\alpha]^2) \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]) == 0, k_0] \end{aligned}$$

k0 =

$$\begin{aligned} & ((1. \text{Cos}[\alpha] \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] - 1. \text{LegendreP}[1.5, \text{Cos}[\alpha]]) \\ & \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]) / \\ & (\text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] \\ & (1. \text{Cos}[\alpha] \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] - 1. \text{LegendreQ}[1.5, \text{Cos}[\alpha]])); \\ & \text{LogPlot}[k_0, \{\alpha, 0, 0.86\}] \end{aligned}$$



El cálculo de estas gráficas es una comprobación de que se obtienen los mismos resultados que obtuvieron Gañán-Calvo y Montanero.

3.3 Condiciones de velocidad en la interfaz

E7

E8

E9

FullSimplify[Solve[E7,C10]]

FullSimplify[Solve[E8,C11]]

$$\left\{ \left\{ C10 \rightarrow \frac{C20 \cos[\alpha]}{-1 + \cos[\alpha]} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ C11 \rightarrow -\frac{C21 \cos[\alpha]}{1 + \cos[\alpha]} \right\} \right\}$$

$$C10 = \frac{C20 \cos[\alpha]}{-1 + \cos[\alpha]}; C11 = -\frac{C21 \cos[\alpha]}{1 + \cos[\alpha]};$$

FullSimplify[Solve[E9,C20]]

$$\left\{ \left\{ C20 \rightarrow C21 \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right]^4 \right\} \right\}$$

$$C20 = C21 \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right]^4;$$

3.4 Esfuerzos en interfaz

FullSimplify[E10]

FullSimplify[E11]

FullSimplify[

Solve[

(A20²r

((-0.09375 + 0.09375β0+

(-0.0625 + 0.0625β0)Cos[2α] + (0.15625 - 0.15625β0)Cos[4α])

LegendreP[0.5,Cos[α]]²LegendreQ[0.5,Cos[α]]²+

(2.25Cos[α]LegendreP[0.5,Cos[α]]LegendreP[1.5,Cos[α]]

$$\begin{aligned}
& \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 - 1.125 \text{LegendreP}[1.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \\
& \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 + \beta_0 \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \\
& \text{LegendreQ}[1.5, \text{Cos}[\alpha]] \\
& (-2.25 \text{Cos}[\alpha] \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] + 1.125 \text{LegendreQ}[1.5, \text{Cos}[\alpha]]) \\
& \text{Sin}[\alpha]^2 + r^1 \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \\
& (C21(-0.5 - 7.5\lambda_0) + \\
& C21((1. + 13.\lambda_0)\text{Cos}[\alpha] - 8.\lambda_0\text{Cos}[2\alpha] + (-1. + 3.\lambda_0)\text{Cos}[3\alpha] + \\
& (0.5 - 0.5\lambda_0)\text{Cos}[4\alpha]) - 0.5\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha] + 0.125\text{Sin}[4\alpha]) / \\
& \left(r^2 \cdot (-1. + \text{Cos}[\alpha]^2)^2 \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \right) == 0, C21 \Big]
\end{aligned}$$

$$C21 =$$

$$\begin{aligned}
& (-0.173077A20^2 \text{Cos}[\alpha] \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] \text{LegendreP}[1.5, \text{Cos}[\alpha]] \\
& \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \text{Sin}[\alpha]^2 + \\
& 0.0865385A20^2 \text{LegendreP}[1.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \\
& \text{Sin}[\alpha]^2 + \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 \\
& (0.0384615 \text{Cos}[\alpha] \text{Sin}[\alpha] + \\
& A20^2 \\
& ((0.00721154 - 0.00721154\beta_0 + \\
& (0.00480769 - 0.00480769\beta_0)\text{Cos}[2.\alpha] + \\
& (-0.0120192 + 0.0120192\beta_0)\text{Cos}[4.\alpha]) \\
& \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2 + \\
& \beta_0(0.173077\text{Cos}[\alpha] \text{LegendreQ}[0.5, \text{Cos}[\alpha]] - \\
& 0.0865385 \text{LegendreQ}[1.5, \text{Cos}[\alpha]]) \text{LegendreQ}[1.5, \text{Cos}[\alpha]] \\
& \text{Sin}[\alpha]^2 - 0.00961538 \text{Sin}[4.\alpha])) / \\
& ((-0.0384615 - 0.576923\lambda_0 + \\
& (0.0769231 + 1.\lambda_0)\text{Cos}[\alpha] - 0.615385\lambda_0\text{Cos}[2.\alpha] + \\
& (-0.0769231 + 0.230769\lambda_0)\text{Cos}[3.\alpha] + \\
& 0.0384615\text{Cos}[4.\alpha] - 0.0384615\lambda_0\text{Cos}[4.\alpha]) \\
& \text{LegendreP}[0.5, \text{Cos}[\alpha]]^2);
\end{aligned}$$

Para completar la resolución del sistema se podría resolver la última ecuación analíticamente y obtener $A_{2,0}$, pero también se puede calcular primero el valor del ángulo de interfaz para un menor esfuerzo computacional.

4. Ejemplos

4.1 Ejemplo 1

4.1.1 Formulación y resultados numéricos

Elegimos $\alpha=0.7$, con $\beta_0 = 3.5$ y $\lambda_0 = 0.1$.

$$\alpha = 0.7; \beta_0 = 3.5; \lambda_0 = 0.1; \mathbf{k}_0$$

0.0426335

FullSimplify[Solve[E11,A20]]

$\{\{A20 \rightarrow -0.398161\}, \{A20 \rightarrow 0.398161\}\}$

$$A20 = 0.398161;$$

Ψ_0

Ψ_1

Φ_0

Φ_1

$$r^2 (-0.0100982 + 0.00310479\text{Cos}[t] + 0.013203\text{Cos}[t]^2)$$

$$r^2 (-0.0757863 + 0.174874\text{Cos}[t] - 0.0990875\text{Cos}[t]^2)$$

$$0.398161r^{0.5}\text{LegendreQ}[0.5,\text{Cos}[t]]$$

$$0.115922r^{0.5}\text{LegendreP}[0.5,\text{Cos}[t]]$$

4.1.2 Representaciones y gráficas

La representación gráfica se llevó a cabo con el código original de Gañán-Calvo y Montanero de 2021.

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2};$$

```

t = ArcTan[x,Abs[y]];
X1 = -0.25;
X2 = 1.75;
Y1 = -1.;
Y2 = 1.;
δψ = 0.00001;
δφ = 0.05;
npoints = 50;
Δφ = 0.5;
y = 1.0; φr = Table[Φ0,{x,{ -0.5,2.}}]; y=.;
Nφ = IntegerPart[φr[[2]] - φr[[1]]]

0

Nφ = 1;

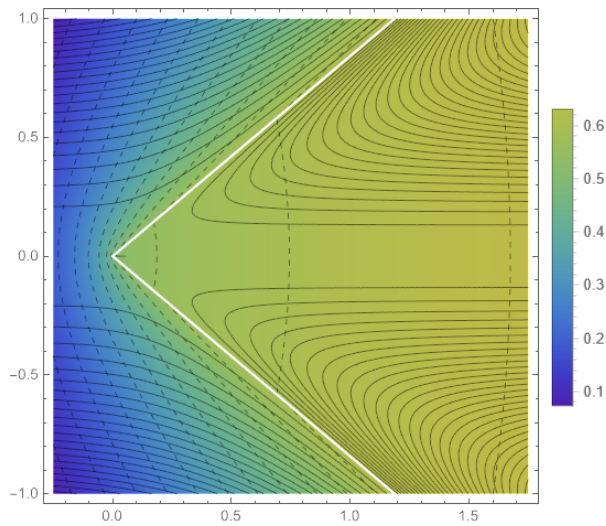
f0 = Quiet[ContourPlot[Ψ0,{x,X1,X2},{y,Y1,Y2},
Contours->Table[z,{z, -0.7,0.7,50.δψ}],ContourShading->False,
RegionFunction->Function[{x,y,z},π ≥ ArcTan[x,y] ≥ α || -α ≥ ArcTan[x,y] ≥ -π],
PlotPoints->npoints]];
f1 = Quiet[ContourPlot[Ψ1,{x,X1,X2},{y,Y1,Y2},
Contours->Table[z,{z, -0.5,0.5,20.δψ}],ContourShading->False,
RegionFunction->Function[{x,y,z},0 ≤ Abs[y]/x ≤ Tan[α]],
PlotPoints->npoints]];
e0 = Quiet[ContourPlot[Φ0,{x,X1,X2},{y,Y1,Y2},ContourStyle->Dashed,
Contours->Table[z,{z, -10.,10.,δφ}],ContourShading->False,
RegionFunction->Function[{x,y,z},Abs[y]/x ≥ Tan[α] || x < 0],
PlotPoints->npoints]];
e1 = Quiet[ContourPlot[Φ1,{x,X1,X2},{y,Y1,Y2},ContourStyle->Dashed,
Contours->Table[z,{z, -10.,10.,δφ}],ContourShading->False,
RegionFunction->Function[{x,y,z},0 ≤ Abs[y]/x ≤ Tan[α]],
PlotPoints->npoints]];

```

```

pot0 = Quiet[DensityPlot[ $\Phi_0/N\phi + \Delta\phi$ , {x,X1,X2}, {y,Y1,Y2},
RegionFunction -> Function[{x,y,z}, Abs[y]/x  $\geq$  Tan[ $\alpha$ ]|x < 0],
PlotLegends -> Automatic, ColorFunctionScaling -> False, ColorFunction -> Rainbow,
PlotPoints -> npoints]];
pot1 = Quiet[DensityPlot[ $\Phi_1/N\phi + \Delta\phi$ , {x,X1,X2}, {y,Y1,Y2},
RegionFunction -> Function[{x,y,z}, 0  $\leq$  Abs[y]/x  $\leq$  Tan[ $\alpha$ ]],
ColorFunctionScaling -> False, ColorFunction -> Rainbow, PlotPoints -> npoints]];
i = Plot[{Tan[ $\alpha$ ]x, -Tan[ $\alpha$ ]x}, {x,0,X2}, Frame->True, PlotRange->{Y1,Y2},
PlotStyle->White];
Show[pot0,pot1,e0,e1,f0,f1,i]

```



Apéndice B

Resolución analítica del problema con 3 dominios (J=2)

1. Formulación del problema

Se utiliza el método de Gañán-Calvo y Montanero para plantear el problema de forma automática con un bucle.

$$n = 2;$$

$$\text{Quiet}[\text{Do}[t=., \Psi_i=., \Phi_i=., \text{Vr}_i=., \text{Vt}_i=., \text{Er}_i=., \text{Et}_i=., p_i=., \text{tautt}_i=., \text{tauMtt}_i=., \text{taurt}_i=., \text{tauMrt}_i=., \alpha_i=., \{i, 0, n\}]];$$

$$\lambda_1 = 1;$$

$$\beta_1 = 1;$$

$$\gamma_1 = 1;$$

$$\kappa_1 = 1;$$

$$\text{Do}[t=.,$$

$$\Psi_i = r^2(B_{1,i} + B_{2,i} * \text{Cos}[t] + B_{3,i} * \text{Cos}[t]^2 + B_{4,i} * \text{Sin}[t]^2 * \text{ArcTanh}[\text{Cos}[t]]);$$

$$\Phi_i = r^{1/2} * (A_{1,i} * \text{LegendreP}[1/2, \text{Cos}[t]] + A_{2,i} * \text{LegendreQ}[1/2, \text{Cos}[t]]);$$

$$\text{Vr}_i = D[\Psi_i, t] / (r^2 * \text{Sin}[t]);$$

$$\text{Vt}_i = . - D[\Psi_i, r] / (r * \text{Sin}[t]);$$

$$\text{Er}_i = -D[\Phi_i, r];$$

$$\text{Et}_i = . - D[\Phi_i, t] / r;$$

$$p_i = p_\infty + 2 * \lambda_i * (B_{2,i} - B_{4,i}) / r;$$

$$\text{tautt}_i = 2 * \lambda_i / r * (\text{Vr}_i + D[\text{Vt}_i, t]);$$

$$\text{tauMtt}_i = . \beta_i / 2 * (\text{Et}_i^2 - \text{Er}_i^2);$$

$$\text{taurt}_i = \lambda_i * (r * D[\text{Vt}_i/r, r] + D[\text{Vr}_i, t]/r);$$

$$\text{.tauMrt}_i = \beta_i * \text{Er}_i * \text{Et}_i, \{i, 0, n\};$$

$$\alpha_0 = \text{Pi};$$

$$\alpha_{n+1} = 0;$$

2. Resolución del problema

2.1 Problema eléctrico

2.1.1 Constantes y no trivialidad

$$\text{Quiet}[\text{Do}[t=.; t = \alpha_i; \text{Etan}_i = \text{Er}_{i-1} - \text{Er}_i, \{i, 1, n\}]];$$

$$\text{Table}[\text{FullSimplify}[\text{Etan}_i], \{i, 1, n\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[\frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]](-A_{1,0}+A_{1,1})+\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]](-A_{2,0}+A_{2,1})}{2\sqrt{r}}==0, A_{2,0}]]$$

$$\{\{A_{2,0} \rightarrow \frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]](-A_{1,0}+A_{1,1})}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]} + A_{2,1}\}\}$$

$$A_{2,0} = \frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]](-A_{1,0}+A_{1,1})}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]} + A_{2,1};$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[\frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-A_{1,1}+A_{1,2})+\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-A_{2,1}+A_{2,2})}{2\sqrt{r}}==0, A_{2,1}]]$$

$$\{\{A_{2,1} \rightarrow \frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-A_{1,1}+A_{1,2})}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]} + A_{2,2}\}\}$$

$$A_{2,1} = \frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-A_{1,1}+A_{1,2})}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]} + A_{2,2};$$

$$\text{Quiet}[\text{Do}[t=.; t = \alpha_i; \text{Ecar}_i = \kappa_{i-1}\text{Et}_{i-1} - \kappa_i\text{Et}_i, \{i, 1, n\}]];$$

$$\text{Table}[\text{FullSimplify}[\text{Ecar}_i], \{i, 1, n\}]$$

$$\text{Ecar}_1 =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{r}} 3\text{Csc}[\alpha_1]$$

$$((- \text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{1,1} + .$$

$$\kappa_0((\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{1,0} +$$

$$(\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{2,0}) +$$

$$.(-\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{2,1});$$

$$\text{Ecar}_2 =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{r}}3\text{Csc}[\alpha_2]((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1} +$$

$$(\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,1} +$$

$$.\kappa_2((-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,2} +$$

$$(-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,2});$$

$$M = \text{Normal}[\text{CoefficientArrays}[\text{Table}[\sqrt{r} * \text{Ecar}_i, \{i, 1, 2\}], \text{Join}[\text{Table}[A_{1,i}, \{i, 1, 2\}]]];$$

$$\text{ED} = \text{FullSimplify}[\text{Det}[M[[2]]]];$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[\text{ED}==0, \kappa_0]]$$

2.1.2 Gráficas

El cálculo de estas gráficas es una comprobación de que se obtienen los mismos resultados que obtuvieron Gañán-Calvo y Montanero.

$$\kappa_0 =$$

$$(\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]$$

$$(\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](\text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]) +$$

$$\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]) +$$

$$(\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])(\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] -$$

$$\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])) + (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])$$

$$((-\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]$$

$$(\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]))\kappa_2))/$$

$$((\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])$$

$$(\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]$$

$$\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]](\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])) +$$

$$(\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])(\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]$$

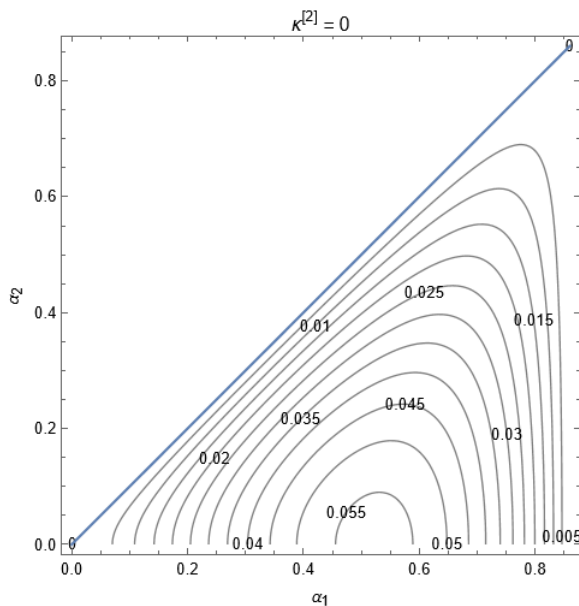
$$- \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])\kappa_2));$$

$$\delta = 0.0005;$$

$$\text{puntos} = 50;$$

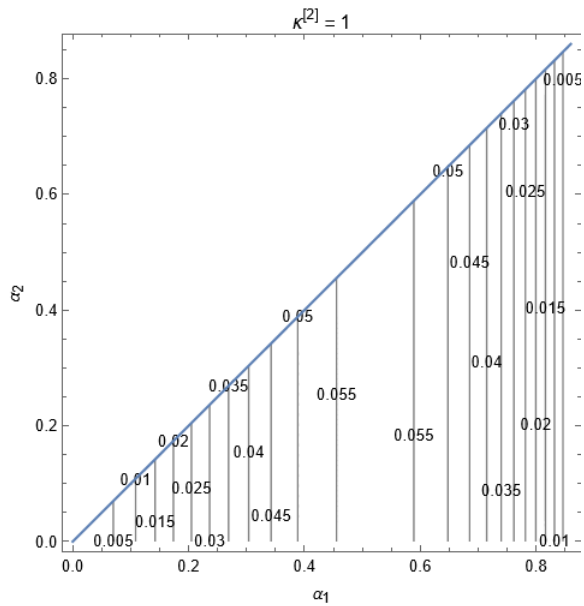
$\kappa_2 = 0;$

```
Campo = Quiet[ContourPlot[ $\kappa_0$ , { $\alpha_1$ , 0., 0.86}, { $\alpha_2$ , 0., 0.86}, Contours  $\rightarrow$  Table[z, {z, -.07, .07, 10. $\delta$ }],
ContourLabels  $\rightarrow$  True, ContourShading  $\rightarrow$  False, RegionFunction  $\rightarrow$  Function[{x, y, z}, x  $\geq$  y], PlotPoints  $\rightarrow$  puntos]
Frontera = Plot[x, {x, 0., 0.86}];
Show[Campo, Frontera, FrameLabel  $\rightarrow$  {{HoldForm[ $\alpha_2$ ], None}, {HoldForm[ $\alpha_1$ ], None}},
PlotLabel  $\rightarrow$  RawBoxes[RowBox[{SuperscriptBox[" $\kappa$ ", RowBox[{"[", "2", "]"}], "=", "0"}]],
LabelStyle  $\rightarrow$  {GrayLevel[0]}]
```



$\kappa_2 = 1;$

```
Campo = Quiet[ContourPlot[ $\kappa_0$ , { $\alpha_1$ , 0., 0.86}, { $\alpha_2$ , 0., 0.86}, Contours  $\rightarrow$  Table[z, {z, -.07, .07, 10. $\delta$ }],
ContourLabels  $\rightarrow$  True, ContourShading  $\rightarrow$  False,
RegionFunction  $\rightarrow$  Function[{x, y, z}, x  $\geq$  y], PlotPoints  $\rightarrow$  puntos];
Frontera = Plot[x, {x, 0., 0.86}];
Show[Campo, Frontera, FrameLabel  $\rightarrow$  {{HoldForm[ $\alpha_2$ ], None}, {HoldForm[ $\alpha_1$ ], None}},
PlotLabel  $\rightarrow$  RawBoxes[RowBox[{SuperscriptBox[" $\kappa$ ", RowBox[{"[", "2", "]"}], "=", "1"}]],
LabelStyle  $\rightarrow$  {GrayLevel[0]}]
```



$\kappa_2 = 10;$

```
Campo = Quiet[ContourPlot[ $\kappa_0$ , { $\alpha_1$ , 0., 0.86}, { $\alpha_2$ , 0., 0.86}, Contours  $\rightarrow$  Table[z, {z, -.07, 5, 100 *  $\delta$ },
ContourLabels  $\rightarrow$  True, ContourShading  $\rightarrow$  False, ..
```

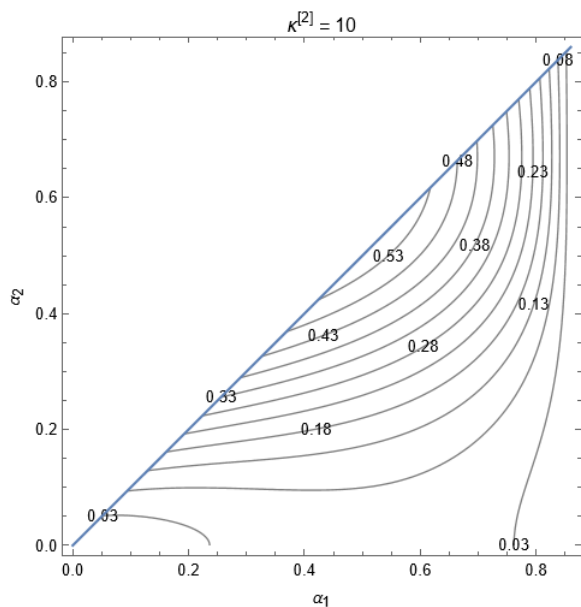
```
RegionFunction  $\rightarrow$  Function[{x, y, z}, x  $\geq$  y], PlotPoints  $\rightarrow$  puntos];
```

```
Frontera = Plot[x, {x, 0., 0.86}];
```

```
Show[Campo, Frontera, FrameLabel  $\rightarrow$  {{HoldForm[ $\alpha_2$ ], None}, {HoldForm[ $\alpha_1$ ], None}},
```

```
PlotLabel  $\rightarrow$  RowBoxes[RowBox[{SuperscriptBox[" $\kappa$ ", RowBox[{"["", "2", "]""]], "=", "10"}]],,
```

```
LabelStyle  $\rightarrow$  {GrayLevel[0]}]
```



2.2 Condiciones de contorno

$$A_{1,0} = 0;$$

$$A_{2,2} = 0;$$

$$B_{4,0} = 0;$$

$$B_{4,2} = 0;$$

$$B_{3,0} = -(B_{1,0} - B_{2,0});$$

$$B_{3,2} = -(B_{1,2} + B_{2,2});$$

2.3 Condiciones de velocidad en interfaz

$$\text{Quiet}[\text{Do}[t=.; t = \alpha_i; \text{Fnorm1}_i = \text{Vt}_{i-1}; \text{Fnor}_i = \text{Vt}_i; \text{Ftan}_i = \text{Vr}_i - \text{Vr}_{i-1}, \{i, 1, n\}];$$

$$\text{Table}[\text{FullSimplify}[\text{Fnorm1}_i], \{i, 1, n\}]$$

$$\text{Table}[\text{FullSimplify}[\text{Fnor}_i], \{i, 1, n\}]$$

$$\text{Table}[\text{FullSimplify}[\text{Ftan}_i], \{i, 1, n\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[((-1 + \text{Cos}[\alpha_1])B_{1,0} - \text{Cos}[\alpha_1]B_{2,0}) == 0, B_{1,0}]]$$

$$\{\{B_{1,0} \rightarrow \frac{\text{Cos}[\alpha_1]B_{2,0}}{-1 + \text{Cos}[\alpha_1]}\}\}$$

$$B_{1,0} = \frac{\text{Cos}[\alpha_1]B_{2,0}}{-1 + \text{Cos}[\alpha_1]};$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[(B_{1,1} + \text{Cos}[\alpha_2])(B_{2,1} + \text{Cos}[\alpha_2]B_{3,1}) + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2 B_{4,1}) == 0, B_{1,1}]]$$

$$\{\{B_{1,1} \rightarrow -\text{Cos}[\alpha_2](B_{2,1} + \text{Cos}[\alpha_2]B_{3,1}) - \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2 B_{4,1}\}\}$$

$$B_{1,1} = -\text{Cos}[\alpha_2](B_{2,1} + \text{Cos}[\alpha_2]B_{3,1}) - \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2 B_{4,1};$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[(B_{1,1} + \text{Cos}[\alpha_1])(B_{2,1} + \text{Cos}[\alpha_1]B_{3,1}) + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_1]]\text{Sin}[\alpha_1]^2 B_{4,1}) == 0, B_{2,1}]]$$

$$\{\{B_{2,1} \rightarrow -((\text{Cos}[\alpha_1] + \text{Cos}[\alpha_2])B_{3,1}) + \frac{(-\text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_1]]\text{Sin}[\alpha_1]^2 + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2)B_{4,1}}{\text{Cos}[\alpha_1] - \text{Cos}[\alpha_2]}\}\}$$

$$B_{2,1} = -((\text{Cos}[\alpha_1] + \text{Cos}[\alpha_2])B_{3,1}) + \frac{(-\text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_1]]\text{Sin}[\alpha_1]^2 + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2)B_{4,1}}{\text{Cos}[\alpha_1] - \text{Cos}[\alpha_2]};$$

FullSimplify[Solve[-2Sin[α₂](B_{1,2} + B_{2,2}) + 2B_{2,2}Tan[$\frac{\alpha_2}{2}$]==0,B_{1,2}]]

{{B_{1,2} → B_{2,2}(-1 + Csc[α₂]Tan[$\frac{\alpha_2}{2}$])}}

B_{1,2} = B_{2,2}(-1 + Csc[α₂]Tan[$\frac{\alpha_2}{2}$]);

FullSimplify[Solve[B_{2,0} - B_{2,1} - B_{4,1} - 2Cos[α₁](B_{1,0} - B_{2,0} + B_{3,1} - ArcTanh[Cos[α₁]]B_{4,1})==0,B_{2,0}]]

{{B_{2,0} → ((-1 + Cos[α₁])(-Cos[α₁] - Cos[α₂])²B_{3,1} + (-Cos[α₁] + Cos[α₂] + ArcTanh[Cos[α₁]](2Cos[α₁](Cos[α₁] - Cos[α₂]) + Sin[α₁]²) - ArcTanh[Cos[α₂]]Sin[α₂]²)B_{4,1})/((1 + Cos[α₁])(Cos[α₁] - Cos[α₂]))}}

B_{2,0} = ((-1 + Cos[α₁])(-Cos[α₁] - Cos[α₂])²B_{3,1} + (-Cos[α₁] + Cos[α₂] + ArcTanh[Cos[α₁]](2Cos[α₁](Cos[α₁] - Cos[α₂]) + Sin[α₁]²) - ArcTanh[Cos[α₂]]Sin[α₂]²)B_{4,1})/((1 + Cos[α₁])(Cos[α₁] - Cos[α₂]));

FullSimplify[Solve[B_{2,1} - B_{2,2} + B_{4,1} + 2Cos[α₂](B_{1,2} + B_{2,2} + B_{3,1} - ArcTanh[Cos[α₂]]B_{4,1})==0,B_{2,2}]]

{{B_{2,2} → $\frac{1}{-\text{Cos}[\alpha_1] + \text{Cos}[\alpha_2]}$ Cot[$\frac{\alpha_2}{2}$]²((Cos[α₁] - Cos[α₂])²B_{3,1} + (-Cos[α₁] + Cos[α₂] + $\frac{1}{2}$ ArcTanh[Cos[α₂]](-3 + 4Cos[α₁]Cos[α₂] - Cos[2α₂]) + ArcTanh[Cos[α₁]]Sin[α₁]²)B_{4,1})}}

B_{2,2} = $\frac{1}{-\text{Cos}[\alpha_1] + \text{Cos}[\alpha_2]}$ Cot[$\frac{\alpha_2}{2}$]²((Cos[α₁] - Cos[α₂])²B_{3,1} + (-Cos[α₁] + Cos[α₂] + $\frac{1}{2}$ ArcTanh[Cos[α₂]](-3 + 4Cos[α₁]Cos[α₂] - Cos[2α₂]) + ArcTanh[Cos[α₁]]Sin[α₁]²)B_{4,1});

2.4 Esfuerzos en interfaz

Quiet[Do[t=.; t = α_i; ET_i = taurt_{i-1} + tauMrt_{i-1} - taurt_i - tauMrt_i, {i, 1, n}]]];

Table[FullSimplify[ET_i], {i, 1, n}]

Quiet[Do[t=.; t = α_i; EN_i = p_i - p_{i-1} - γ_i/(r * Tan[α_i]) + tautt_{i-1} - tautt_i + tauMtt_{i-1} - tauMtt_i, {i, 1, n}]]];

Table[Simplify[EN_i], {i, 1, n}]

FullSimplify[

Solve[3Csc[α₁]LegendreQ[$\frac{1}{2}$, Cos[α₁]](-Cos[α₁]LegendreQ[$\frac{1}{2}$, Cos[α₁]] + LegendreQ[$\frac{3}{2}$, Cos[α₁]])β₀

($\frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]A_{1,1}}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]} + \frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-A_{1,1} + A_{1,2})}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]}$)² - $\frac{1}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]}$ 3Csc[α₁]

$$\begin{aligned}
& (((-\cos[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]] \\
& (\cos[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])A_{1,1} + \\
& \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](-\cos[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])A_{1,2}) \\
& (\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]A_{1,1} + \frac{\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]](-A_{1,1} + A_{1,2})}{\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]}) - \\
& 8\sin[\alpha_1]B_{3,1} + 8(\cot[\alpha_1] + \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1])B_{4,1} - \\
& 8\csc[\alpha_1]((\text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1]^2 - \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]\sin[\alpha_2]^2)B_{4,1} + \\
& (-\text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1]^2 + \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]\sin[\alpha_2]^2)B_{4,1}) + \\
& 8\lambda_0(-((\cos[\alpha_1] + \cos[\alpha_2])B_{3,1}) + B_{4,1} + \frac{(-\text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1]^2 + \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]\sin[\alpha_2]^2)B_{4,1}}{\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2]} + 2\cos[\alpha_1] \\
& (B_{3,1} - \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]B_{4,1}))\tan[\frac{\alpha_1}{2}] = 0, B_{3,1}]
\end{aligned}$$

$$\{\{B_{3,1} \rightarrow (\dots)\}\}$$

No se muestra en pantalla para ahorrar espacio puesto que es una solución larga y aparece exactamente igual en su activación en la siguiente línea.

$$B_{3,1} =$$

$$(\cot[\frac{\alpha_1}{2}]$$

$$((3(\cot[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \csc[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])\beta_0$$

$$((-\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]])A_{1,1} +$$

$$\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]A_{1,2})^2)/$$

$$(\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]^2) -$$

$$(3\csc[\alpha_1]((-\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]])A_{1,1} +$$

$$+\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]A_{1,2})$$

$$(((\cos[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]] +$$

$$\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](-\cos[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]]))A_{1,1} +$$

$$\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](\cos[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])A_{1,2}))/$$

$$\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]^2 - 8(\cot[\alpha_1] + \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1])B_{4,1} -$$

$$8\lambda_0 B_{4,1} \tan[\frac{\alpha_1}{2}] + 16\text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\cos[\alpha_1]\lambda_0 B_{4,1} \tan[\frac{\alpha_1}{2}] +$$

$$\frac{8(\text{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1]^2 - \text{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]\sin[\alpha_2]^2)\lambda_0 B_{4,1} \tan[\frac{\alpha_1}{2}]}{\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2]})/(8(-1 - \cos[\alpha_1] + (\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2])\lambda_0));$$

FullSimplify[

Solve[

$$\begin{aligned}
& \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]](-((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]) + 15\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])) + \\
& (\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])^2 \\
& ((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2 - 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] \\
& + 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2)\beta_0)A_{1,1}^2 - \\
& 2\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] \\
& (\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] \\
& (\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] \\
& - 15\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \\
& 3(-5\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + 3\text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]))\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \\
& \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2 \\
& - 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2)) + \\
& (\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]) \\
& ((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2 - 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] \\
& + 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2)\beta_0)A_{1,1}A_{1,2} + \\
& \text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2 \\
& (-4\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]^2\text{Sin}[2\alpha_1] + \\
& \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]^2((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2 \\
& - 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2)(-1 + \beta_0)A_{1,2}^2))/ \\
& (32\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]]^2\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]^2);
\end{aligned}$$

FullSimplify[

Solve[

$$\begin{aligned}
& ((\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{1,1} + \\
& \kappa_0((-\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{1,0} + \\
& (-\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{2,0}) + \\
& (\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_1]])A_{2,1}) = 0, A_{1,1}]
\end{aligned}$$

{{A_{1,1} → (...)}}}

$$\begin{aligned}
A_{1,1} = & ((-10\text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] \\
& (9\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]))A_{1,2}) / \\
& (-\text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]);
\end{aligned}$$

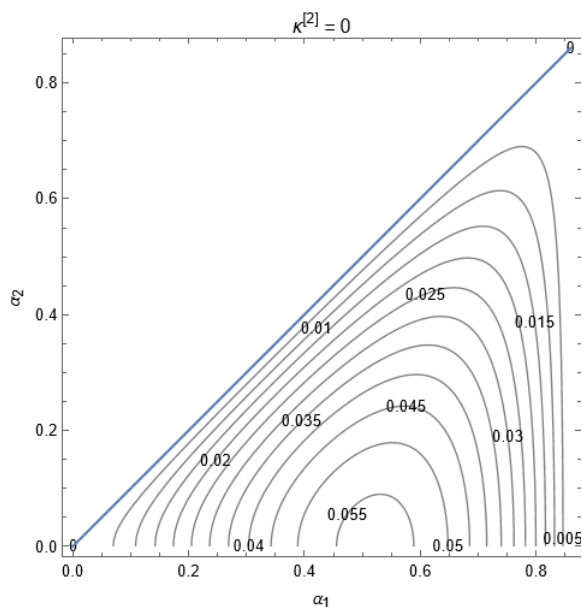
3. Resolución numérica

3.1 Obtención de resultados numéricamente

Selección de parámetros: solución con gas como fase interna del artículo Gañán-Calvo y Montanero (2021).

$$\beta_0 = 0.0217; \beta_2 = 0.011; \kappa_0 = 0.05357; \kappa_2 = 0.; \lambda_0 = 0.2; \lambda_2 = 0.001; \gamma_2 = 2;$$

Utilizamos la gráfica correspondiente para seleccionar el punto de partida aproximado:



$$\alpha_1 = 0.473815;$$

$$\alpha_2 = 0.08982;$$

Verificamos que existe solución. Las ecuaciones que todavía no se han cumplido son E1, E2 y E3. Las dibujamos para los valores provisionales de los ángulos de interfaz elegidos en función de $A_{1,2}$, que es la constante desconocida.

$$\begin{aligned} E1 = & (3\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])(\text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \\ & \text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1}A_{1,2} + \\ & 3\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \\ & \text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-1 + \beta_2) - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]\beta_2) \\ & A_{1,2}^2 + 8\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]](-((-1 + \text{Cos}[\alpha_2])\lambda_2 B_{2,2}) + \text{Sin}[\alpha_2]^2 B_{3,1} - \\ & (\text{Cos}[\alpha_2] + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2)B_{4,1})); \end{aligned}$$

E2 =

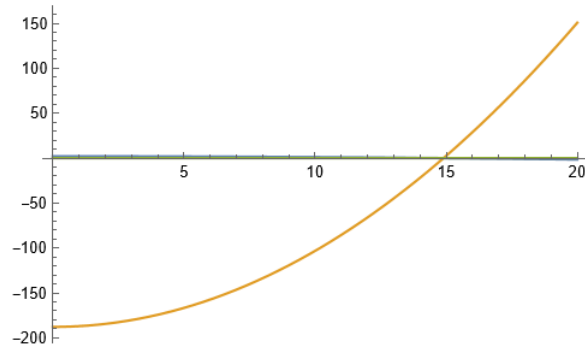
$$\begin{aligned}
 & (-8\text{Cot}[\alpha_2]\gamma_2 - (\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]A_{1,1} + \text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]A_{2,1})^2 + \\
 & 9\text{Csc}[\alpha_2]^2 ((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1} + \\
 & (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,1})^2 + \\
 & \beta_2 ((\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]A_{1,2} + \text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]A_{2,2})^2 - \\
 & 9\text{Csc}[\alpha_2]^2 ((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,2} + \\
 & (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,2})^2) + 16(-B_{2,1} + B_{4,1}) + \\
 & 8(\text{Csc}[\alpha_2]^2((3 + \text{Cos}[2\alpha_2])B_{2,1} + 4\text{Cos}[\alpha_2](B_{1,1} + B_{3,1})) + 2B_{4,1}) + \\
 & 16\lambda_2(B_{2,2} - B_{4,2}) - 8\text{Csc}[\alpha_2]^2\lambda_2((3 + \text{Cos}[2\alpha_2])B_{2,2} + 4\text{Cos}[\alpha_2](B_{1,2} + B_{3,2}) + 2\text{Sin}[\alpha_2]^2B_{4,2}));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{E3} = & ((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1} + \\
 & (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,1} + \\
 & \kappa_2((-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,2} \\
 & + (-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,2});
 \end{aligned}$$

$$\beta_0 = 0.0217; \beta_2 = 0.011; \kappa_0 = 0.05357; \kappa_2 = 0.; \lambda_0 = 0.2; \lambda_2 = 0.001; \gamma_2 = 2;$$

$$\alpha_1 = 0.473815; \alpha_2 = 0.08982;$$

Plot[{E1,E2,E3},{A_{1,2},0,20}]



$\alpha_1 = .;$

$\alpha_2 = .;$

FindRoot[{E1==0,E2==0,E3==0},{A_{1,2},14.88},{ α_1 ,0.473815},{ α_2 ,0.08982}]

{A_{1,2} → 14.7838, α_1 → 0.473333, α_2 → 0.0915497}

3.2 Representaciones y gráficas

La representación gráfica se llevó a cabo con el código original de Gañán-Calvo y Montanero de 2021.

$$\beta_0 = 0.0217; \beta_2 = 0.011; \kappa_0 = 0.05357; \kappa_2 = 0.; \lambda_0 = 0.2; \lambda_2 = 0.001; \gamma_2 = 2;$$

$$A_{1,2} = 14.7838; \alpha_1 = 0.473333; \alpha_2 = 0.0915497;$$

$$\Psi_0$$

$$\Psi_1$$

$$\Psi_2$$

$$\Phi_0$$

$$\Phi_1$$

$$\Phi_2$$

$$r^2(1.19694 - 0.147854\text{Cos}[t] - 1.34479\text{Cos}[t]^2)$$

$$r^2(12.2161 - 21.5699\text{Cos}[t] + 9.38105\text{Cos}[t]^2 - 1.52051\text{ArcTanh}[\text{Cos}[t]]\text{Sin}[t]^2)$$

$$r^2(-1172.39 + 2349.71\text{Cos}[t] - 1177.32\text{Cos}[t]^2)$$

$$18.4138\sqrt{r}\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[t]]$$

$$\sqrt{r}(13.7549\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[t]] + 0.416914\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[t]])$$

$$14.7838\sqrt{r}\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[t]]$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2};$$

$$t = \text{ArcTan}[x, \text{Abs}[y]];$$

$$X1 = -0.25;$$

$$X2 = 1.75;$$

$$Y1 = -1.;$$

$$Y2 = 1.;$$

$$\delta\psi = 0.001;$$

$$\delta\phi = 2.5;$$

```

npoints = 50;
 $\Delta\phi = 0.5;$ 
y = 1.0;  $\phi_r = \text{Table}[\Phi_0, \{x, \{-0.5, 2.\}\}]; y = .;$ 
N $\phi = \text{IntegerPart}[\phi_r[[2]] - \phi_r[[1]]]$ 

44

f0 = Quiet[ContourPlot[ $\Psi_0, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{Contours} \rightarrow \text{Table}[z, \{z, -1.3, 1.3, 0.05\}],$ 
ContourShading  $\rightarrow \text{False},$ 
RegionFunction  $\rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, \pi \geq \text{ArcTan}[x, y] \geq \alpha_1 \parallel -\alpha_1 \geq \text{ArcTan}[x, y] \geq -\pi], \text{PlotPoints} \rightarrow 25];$ 
f1 = Quiet[ContourPlot[ $\Psi_1, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{Contours} \rightarrow \text{Table}[z, \{z, -1., 1., 0.05\}],$ 
ContourShading  $\rightarrow \text{False}, \text{RegionFunction} \rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, \text{Tan}[\alpha_2] \leq \text{Abs}[y]/x \leq \text{Tan}[\alpha_1],$ 
PlotPoints  $\rightarrow 25];$ 
f2 = Quiet[ContourPlot[ $\Psi_2, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{Contours} \rightarrow \text{Table}[z, \{z, -0.07, 0.07, 0.005\}],$ 
ContourShading  $\rightarrow \text{False}, \text{RegionFunction} \rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, 0 \leq \text{Abs}[y]/x \leq \text{Tan}[\alpha_2],$ 
PlotPoints  $\rightarrow 25];$ 
e0 = Quiet[ContourPlot[ $\Phi_0, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{ContourStyle} \rightarrow \text{Dashed},$ 
Contours  $\rightarrow \text{Table}[z, \{z, -20., 20., 2.5\}], \text{ContourShading} \rightarrow \text{False},$ 
RegionFunction  $\rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, \text{Abs}[y]/x \geq \text{Tan}[\alpha_1] \parallel x < 0], \text{PlotPoints} \rightarrow 20];$ 
e1 = Quiet[ContourPlot[ $\Phi_1, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{ContourStyle} \rightarrow \text{Dashed},$ 
Contours  $\rightarrow \text{Table}[z, \{z, -20., 20., 2.5\}], \text{ContourShading} \rightarrow \text{False},$ 
RegionFunction  $\rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, \text{Tan}[\alpha_2] \leq \text{Abs}[y]/x \leq \text{Tan}[\alpha_1], \text{PlotPoints} \rightarrow 20];$ 
e2 = Quiet[ContourPlot[ $\Phi_2, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{ContourStyle} \rightarrow \text{Dashed},$ 
Contours  $\rightarrow \text{Table}[z, \{z, -20., 20., 2.5\}], \text{ContourShading} \rightarrow \text{False},$ 
RegionFunction  $\rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, 0 \leq \text{Abs}[y]/x \leq \text{Tan}[\alpha_2], \text{PlotPoints} \rightarrow 20];$ 
pot0 = Quiet[DensityPlot[ $\Phi_0/N\phi + \Delta\phi, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{RegionFunction} \rightarrow$ 
Function[ $\{x, y, z\}, \text{Abs}[y]/x \geq \text{Tan}[\alpha_1] \parallel x < 0], \text{PlotLegends} \rightarrow \text{Automatic},$ 
ColorFunctionScaling  $\rightarrow \text{False}, \text{ColorFunction} \rightarrow \text{"Rainbow"}, \text{PlotPoints} \rightarrow \text{npoints}];$ 
pot1 = Quiet[DensityPlot[ $\Phi_1/N\phi + \Delta\phi, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{RegionFunction} \rightarrow$ 
Function[ $\{x, y, z\}, \text{Tan}[\alpha_2] \leq \text{Abs}[y]/x \leq \text{Tan}[\alpha_1], \text{ColorFunctionScaling} \rightarrow \text{False},$ 
ColorFunction  $\rightarrow \text{"Rainbow"}, \text{PlotPoints} \rightarrow \text{npoints}];$ 
pot2 = Quiet[DensityPlot[ $\Phi_2/N\phi + \Delta\phi, \{x, X1, X2\}, \{y, Y1, Y2\}, \text{RegionFunction} \rightarrow$ 

```

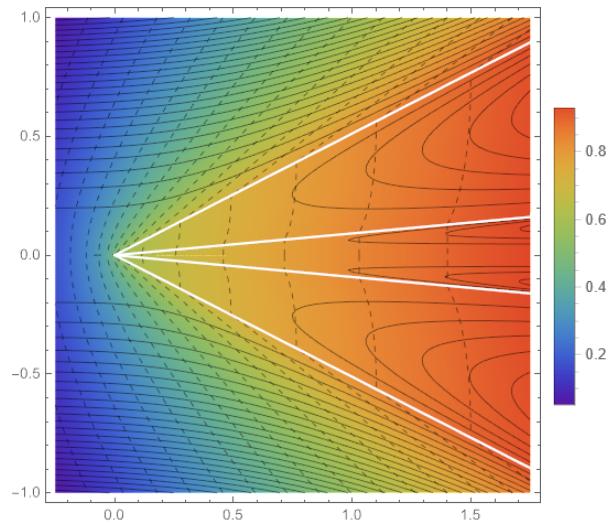
```
Function[{x,y,z},0 ≤ Abs[y]/x ≤ Tan[α2]],ColorFunctionScaling → False,
```

```
ColorFunction → "Rainbow",PlotPoints → npoints]];
```

```
i1 = Plot[{Tan[α1]x, -Tan[α1]x},{x,0,X2},Frame->True,PlotRange->{Y1,Y2},PlotStyle->White];
```

```
i2 = Plot[{Tan[α2]x, -Tan[α2]x},{x,0,X2},Frame->True,PlotRange->{Y1,Y2},PlotStyle->White];
```

```
Show[pot0,pot1,pot2,e0,e1,e2,f0,f1,f2,i1,i2]
```



Apéndice C

ISLAS PARAMÉTRICAS

1. Introducción

Los parámetros fluidos de la solución de partida son los siguientes:

$$\beta_0 = 0.0217;$$

$$\beta_2 = 0.011;$$

$$\kappa_0 = 0.05357;$$

$$\kappa_2 = 0.;$$

$$\lambda_0 = 0.2;$$

$$\lambda_2 = 0.001;$$

$$\gamma_2 = 2;$$

Y la solución es: $\{A_{1,2} \rightarrow 14.8884, \alpha_1 \rightarrow 0.473815, \alpha_2 \rightarrow 0.08982\}$

No se detalla el proceso de cálculo pues ya se ha explicado en el documento escrito y ocuparía demasiado espacio. Sólo se mostrarán los planos resultantes y los óptimos encontrados.

2. Extremos paramétricos

$$\kappa_{0, \text{máx}} = \text{"0.0560478"};$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow \text{"19.6982"}, \alpha_1 \rightarrow \text{"0.480845"}, \alpha_2 \rightarrow \text{"0.0130859"}\}$$

$$\kappa_{0,\text{mín}} = "0.0500638";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "13.6879", \alpha_1 \rightarrow "0.444729", \alpha_2 \rightarrow "0.121848"\}$$

$$\kappa_{2,\text{máx}} = "0.758066";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "13.3774", \alpha_1 \rightarrow "0.448674", \alpha_2 \rightarrow "0.122907"\}$$

$$\kappa_{2,\text{mín}} = 0; \{A_{1,2} \rightarrow "14.7838", \alpha_1 \rightarrow "0.473333", \alpha_2 \rightarrow "0.0915497"\}$$

$$\beta_{0,\text{máx}} = "0.0222154";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "22.8332", \alpha_1 \rightarrow "0.434501", \alpha_2 \rightarrow "0.0245058"\}$$

$$\beta_{0,\text{mín}} = "0.0155554";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "16.6273", \alpha_1 \rightarrow "0.609462", \alpha_2 \rightarrow "0.0197192"\}$$

$$\beta_{2,\text{máx}} = "1.96824";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "7.17304", \alpha_1 \rightarrow "0.572317", \alpha_2 \rightarrow "0.108755"\}$$

$$\beta_{2,\text{mín}} > 0; \{A_{1,2} \rightarrow "14.9769", \alpha_1 \rightarrow "0.472169", \alpha_2 \rightarrow "0.0904298"\}$$

$$\gamma_{2,\text{máx}} = "3.92114";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "23.0356", \alpha_1 \rightarrow "0.456077", \alpha_2 \rightarrow "0.0717643"\}$$

$$\gamma_{2,\text{mín}} = "0.0804078";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "3.90759", \alpha_1 \rightarrow "0.608611", \alpha_2 \rightarrow "0.0278498"\}$$

$$\lambda_{0,\text{máx}} = "4.99972"; \{A_{1,2} \rightarrow "22.2415", \alpha_1 \rightarrow "0.453289",$$

$$\alpha_2 \rightarrow "0.0677497"\}$$

$$\lambda_{0,\text{mín}} > 0; \{A_{1,2} \rightarrow "14.5264", \alpha_1 \rightarrow "0.474549", \alpha_2 \rightarrow "0.0926921"\}$$

$$\lambda_{2,\text{máx}} = "0.179534";$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "4.98513", \alpha_1 \rightarrow "0.593342", \alpha_2 \rightarrow "0.08154"\}$$

$$\lambda_{2,\text{mín}} > 0; \{A_{1,2} \rightarrow "15.3319", \alpha_1 \rightarrow "0.470917", \alpha_2 \rightarrow "0.0891965"\}$$

3. Planos paramétricos

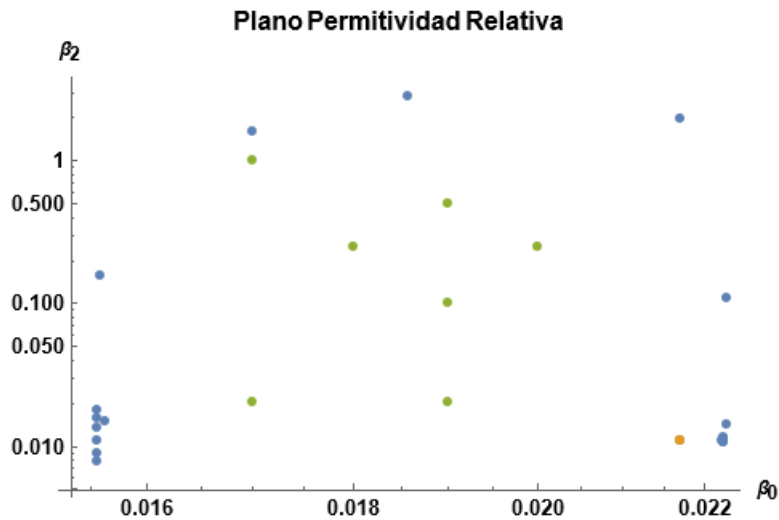
```
Contorno = {{0.0217,0.011},{0.0222154,0.011},{0.0155554,0.011},
{0.0217,"1.96824"},{0.0217,0},{0.0222466,"0.0112771"},
{0.0155555,"0.00788501"},{0.022246,"0.0107289"},
{0.0156271,"0.0150459"},{0.0222465,"0.0111841"},
{0.0155551,"0.00883467"},
{0.0222461,"0.0108185"},{0.0155558,"0.0135585"},
{0.0222468,"0.011418"},{0.0155561,"0.0155557"},
{0.0222459,"0.0105956"},{0.0155564,"0.017623"},
{0.0222716,"0.0141885"},{0.0155812,"0.157616"},
{0.0185746,"2.78803"},{0.0222725,"0.109475"},
{0.017,1.6118737}};
```

```
Interno = {{0.017,1},{0.018,0.25},{0.020,0.25},{0.019,0.1},{0.019,0.5},
{0.019,0},{0.019,0.02},{0.017,0.02}};
```

```
Show[ListLogLogPlot[{Contorno,{{0.0217,0.011}},Interno}],
```

```
AxesLabel → {HoldForm[ $\beta_0$ ],HoldForm[ $\beta_2$ ]},PlotLabel → HoldForm[PlanoPermitividadRelativa],
```

```
LabelStyle → {GrayLevel[0],Bold}]
```

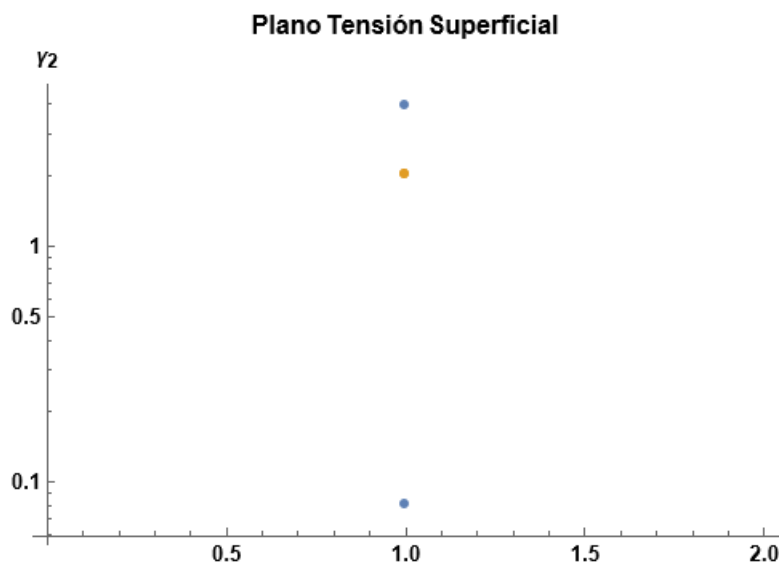


```
ResTensSup = {{1,"0.0804078"},{1,"3.92114"}};
```

```
Sol = {{1,2}};
```

```
Show[ListLogPlot[{ResTensSup,Sol}],AxesLabel -> {None,HoldForm[γ2]},.
```

```
PlotLabel -> HoldForm[Plano Tensión Superficial],LabelStyle -> {GrayLevel[0],Bold}]
```

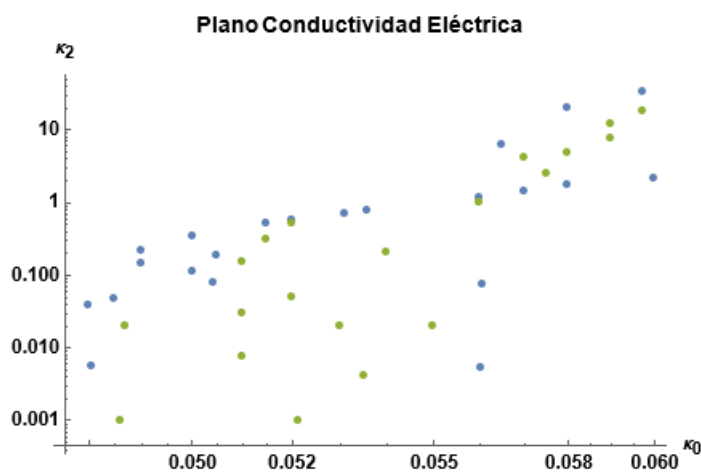


```
Contorno = {{0.05357,0},{0.05357,0},{0.05357,"0.758066"},{"0.0560478",0},
{"0.0500638",0},{"0.0560484","0.0052053"},
{"0.0480763","0.00551581"},{"0.0560595","0.0743433"},
{"0.0504238","0.0782235"},{"0.0597162","32.482"},
{"0.0531157","0.703759"},{0.052,0.57027889},{0.049,0.21315264},
{0.048,0.038136797},{0.056,1.1487113},{0.049,0.14502},{0.0515,0.510833209},
{0.0485,0.046911485},{0.0486,0},{0.05,0.10784909},{0.05,0.33394272},
```

```
{0.0505,0.18094185},{0.058,1.6928767},{0.058,19.96},{0.06,2.1519},
{0.0565,6.1405},{0.057,1.430406}};
```

```
Interno = {{0.055,0.02},{0.056,1},{0.052,0.05},{0.052,0.5},{0.053,0.02},
{0.051,0.03},{0.054,0.2},{0.0515,0.3},{0.0487,0.02},{0.0486,0.001},
{0.051,0.0075},{0.0535,0.004},{0.05215,0.001},{0.051,0.15},{0.058,4.75},
{"0.0597162",18},{0.059,12},{0.059,7.5},{0.057,4},{0.0575,2.4}};
```

```
Show[ListLogLogPlot[{Contorno,{0,0},Interno}],AxesLabel → {HoldForm[κ0],HoldForm[κ2]},
PlotLabel → HoldForm[PlanoConductividadEléctrica],LabelStyle → {GrayLevel[0],Bold}]
```



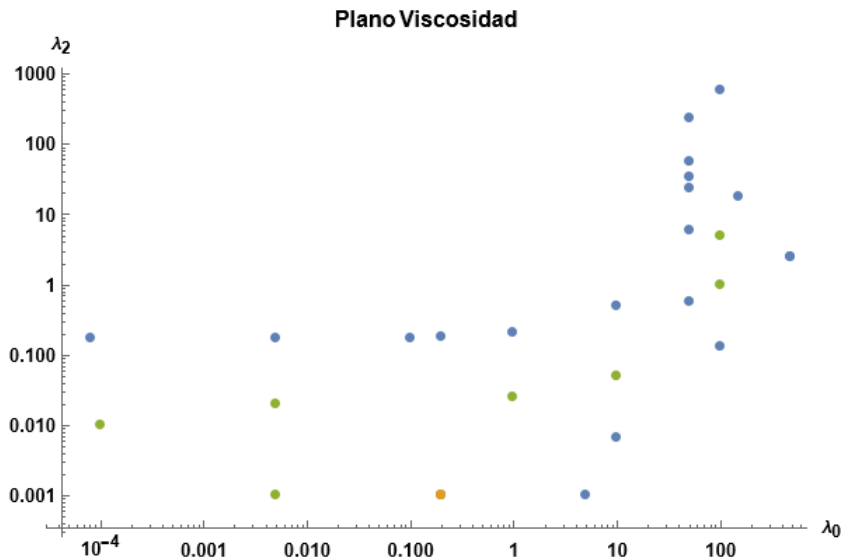
```
Contorno = {{0.2,0.001},{0.2,"0.179534"},{0.2,0},{4.99972,0.001},
{0,0.001},{483.07,2.41535},
{"0.0000807162","0.17256"},{0.1,"0.176015"},
{10,"0.485381"},{10,"0.00670318"},{100,"575.162"},
{100,"0.131447"},{483.07,2.41535},{0.005,0},
{1,0},{50,0.58},{50,233.13839},{1,0.21012822},{50,55.785399},{50,5.7885989},
{50,23},{50,33.080204},{0,0},{0.005,0.17272901},{150,18.087678}};
```

```
Interno = {{0.005,0.001},{0.005,0.02},{0.0001,0.01},{1,0.025},{10,0.05},
{100,1},{100,5}};
```

```
Show[ListLogLogPlot[{Contorno,{0.2,0.001}},Interno}],
```

```
AxesLabel → {HoldForm[λ0],HoldForm[λ2]},PlotLabel → HoldForm[PlanoViscosidad],
```

```
LabelStyle → {GrayLevel[0],Bold}]
```



4. Óptimos encontrados

No se puede garantizar que estas soluciones sean los óptimos en el dominio (de hecho no lo son) pero se han calculado siguiendo un proceso intuitivo y los resultados son en el peor de los casos ilustrativos. El criterio de aumento o disminución del valor de los parámetros se explica mejor en el documento escrito. En esencia, se trata de observar durante los barridos unidimensionales el efecto que tiene el aumento o disminución del parámetro en cuestión sobre la solución obtenida.

4.1 Optimización de $A_{1,2}$

Buscamos el mayor valor puesto que si $A_{1,2}$ se hace nulo se obtiene la solución trivial.

$$\gamma_2 = "2.0402";$$

$$\kappa_0 = "0.0546468";$$

$$\beta_0 = "0.0221362";$$

$$\lambda_0 = "623.895";$$

$$\lambda_2 = "2.29947";$$

$$\beta_2 = "0.0107811";$$

$$\kappa_2 = 0;$$

$$\text{FindRoot}\{\{E1==0,E2==0,E3==0\},\{\{A_{1,2},10\},\{\alpha_1,0.471503\},\{\alpha_2,0.08982\}\}\}$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 21.6932, \alpha_1 \rightarrow 0.451266, \alpha_2 \rightarrow 0.0210981\}$$

$$\gamma_2 = "2.0402";$$

$$\kappa_0 = "0.0546468";$$

$$\beta_0 = "0.0221362";$$

$$\lambda_0 = "0.19602";$$

$$\lambda_2 = "0.0009801";$$

$$\beta_2 = "0.0107811";$$

$$\kappa_2 = 0;$$

$$\text{FindRoot}[\{E1==0,E2==0,E3==0\},\{\{A_{1,2},10\},\{\alpha_1,0.471503\},\{\alpha_2,0.08982\}\}]$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 22.247, \alpha_1 \rightarrow 0.450335, \alpha_2 \rightarrow 0.0163065\}$$

4.2 Ancho de capa intermedia

4.2.1 Mayor valor

$$\kappa_0 = "0.0567016";$$

$$\lambda_2 = "0.00105846";$$

$$\beta_2 = "0.011643";$$

$$\beta_0 = "0.0204911";$$

$$\gamma_2 = "1.88858";$$

$$\kappa_2 = 0.;$$

$$\lambda_0 = 0.2;$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "18.866", \alpha_1 \rightarrow "0.519126", \alpha_2 \rightarrow "0.0220145"\}$$

$$\Delta\alpha = 0.5191258354009706 - "0.0220145"$$

$$180/\text{Pi} * \Delta\alpha$$

$$180/\text{Pi} * "0.0220145"$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 18.866, \alpha_1 \rightarrow 0.519126, \alpha_2 \rightarrow 0.0220145\}$$

$$0.497111$$

$$28.4824$$

$$1.26134$$

Comparación con la solución de partida:

$$\{A_{1,2} \rightarrow "14.7838", \alpha_1 \rightarrow "0.473333", \alpha_2 \rightarrow "0.0915497"\}$$

$$\Delta\alpha = "0.473333" - "0.0915497"$$

$$180/\text{Pi} * \Delta\alpha$$

$$180/\text{Pi} * "0.0915497"$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 14.7838, \alpha_1 \rightarrow 0.473333, \alpha_2 \rightarrow 0.0915497\}$$

0.381783

21.8746

5.24541

4.2.2 Menor valor

$$\kappa_0 = "0.0523912";$$

$$\beta_2 = "0.010758";$$

$$\kappa_2 = "0.539168";$$

$$\beta_0 = "0.0221838";$$

$$\lambda_0 = 0.2;$$

$$\lambda_2 = 0.001;$$

$$\gamma_2 = 2;$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "18.1605", \alpha_1 \rightarrow "0.423182", \alpha_2 \rightarrow "0.062329"\}$$

$$\Delta\alpha = "0.423182" - "0.062329"$$

$$180/\text{Pi} * \Delta\alpha$$

$$180/\text{Pi} * "0.062329"$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 18.1605, \alpha_1 \rightarrow 0.423182, \alpha_2 \rightarrow 0.062329\}$$

0.360853

20.6753

3.57119

4.2.3 Otras soluciones

Otras soluciones que han obtenido valores óptimos:

Para el tamaño de la capa intermedia:

$$\kappa_0 = 0.05357;$$

$$\kappa_2 = 0.;$$

$$\lambda_0 = 0.2;$$

$$\lambda_2 = 0.001;$$

$$\gamma_2 = 2;$$

$$\beta_0 = 0.017;$$

$$\beta_2 = 1.6118737;$$

$$\text{FindRoot}[\{E1==0,E2==0,E3==0\},\{A_{1,2},10\},\{\alpha_1,0.471503\},\{\alpha_2,0.08982\}]$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 10.0594, \alpha_1 \rightarrow 0.60281, \alpha_2 \rightarrow 0.0569206\}$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow "10.0594", \alpha_1 \rightarrow "0.60281", \alpha_2 \rightarrow "0.0569206"\}$$

$$\Delta\alpha = "0.60281" - "0.0569206"$$

$$180/\text{Pi} * \Delta\alpha$$

$$180/\text{Pi} * "0.0569206"$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 10.0594, \alpha_1 \rightarrow 0.60281, \alpha_2 \rightarrow 0.0569206\}$$

0.545889

31.2771

3.26131

Para la constante $A_{1,2}$:

$$\kappa_0 = 0.05357;$$

$$\kappa_2 = 0.;$$

$$\lambda_0 = "483.07";$$

$$\lambda_2 = "2.41535";$$

$$\gamma_2 = 2;$$

$$\beta_0 = 0.0217;$$

$$\beta_2 = 0.011;$$

$$\text{FindRoot}\{\{E1==0,E2==0,E3==0\},\{A_{1,2},10\},\{\alpha_1,0.471503\},\{\alpha_2,0.08982\}\}$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 47.6828, \alpha_1 \rightarrow 0.440521, \alpha_2 \rightarrow 0.0437622\}$$

Apéndice D

Investigación para lograr solución analítica con gas en el interior

1. Constantes resueltas y ecuaciones libres

$$\lambda_1 = 1;$$

$$\beta_1 = 1;$$

$$\gamma_1 = 1;$$

$$\kappa_1 = 1;$$

$$\alpha_0 = \text{Pi};$$

$$\alpha_{n+1} = 0;$$

$$A_{1,0} = 0;$$

$$A_{2,2} = 0;$$

$$B_{4,0} = 0;$$

$$B_{4,2} = 0;$$

$$B_{3,0} = -(B_{1,0} - B_{2,0});$$

$$B_{3,2} = -(B_{1,2} + B_{2,2});$$

$$B_{1,0} = \frac{\text{Cos}[\alpha_1]B_{2,0}}{-1 + \text{Cos}[\alpha_1]};$$

$$B_{1,1} = -\text{Cos}[\alpha_2](B_{2,1} + \text{Cos}[\alpha_2]B_{3,1}) - \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2B_{4,1};$$

$$B_{2,1} = -((\text{Cos}[\alpha_1] + \text{Cos}[\alpha_2])B_{3,1}) + \frac{(-\text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_1]]\text{Sin}[\alpha_1]^2 + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2)B_{4,1}}{\text{Cos}[\alpha_1] - \text{Cos}[\alpha_2]};$$

$$B_{1,2} = B_{2,2}(-1 + \text{Csc}[\alpha_2]\text{Tan}[\frac{\alpha_2}{2}]);$$

$$B_{2,0} = ((-1 + \text{Cos}[\alpha_1])(-\text{Cos}[\alpha_1] - \text{Cos}[\alpha_2])^2B_{3,1} + (-\text{Cos}[\alpha_1] + \text{Cos}[\alpha_2] + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_1]])$$

$$\begin{aligned}
& (2\cos[\alpha_1](\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2]) + \sin[\alpha_1]^2) - \operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]\sin[\alpha_2]^2)B_{4,1})/ \\
& ((1 + \cos[\alpha_1])(\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2])); B_{2,2} = \frac{1}{-\cos[\alpha_1] + \cos[\alpha_2]} \cot\left[\frac{\alpha_2}{2}\right]^2 ((\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2])^2 B_{3,1} + \\
& (-\cos[\alpha_1] + \cos[\alpha_2]) + \frac{1}{2}\operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]) \\
& (-3 + 4\cos[\alpha_1]\cos[\alpha_2] - \cos[2\alpha_2]) + \operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1]^2)B_{4,1}); \\
& A_{2,0} = \frac{\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]A_{1,1}}{\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]} + A_{2,1}; \\
& A_{2,1} = \frac{\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](-A_{1,1} + A_{1,2})}{\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]}; \\
& B_{3,1} = \\
& (\cot\left[\frac{\alpha_1}{2}\right] \\
& ((3(\cot[\alpha_1]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \csc[\alpha_1]\operatorname{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])\beta_0 \\
& ((-\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]])A_{1,1} + \\
& \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]A_{1,2})^2)/ \\
& (\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]])^2) - \\
& (3\csc[\alpha_1]((-\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] \\
& + \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]])A_{1,1} \\
& + \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]A_{1,2}) \\
& (((\cos[\alpha_1]\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \operatorname{LegendreP}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]] + \\
& \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](-\cos[\alpha_1]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] + \operatorname{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]]))A_{1,1} + \\
& \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](\cos[\alpha_1]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] - \operatorname{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]])A_{1,2}))/ \\
& \operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]^2 - 8(\cot[\alpha_1] + \operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1])B_{4,1} - \\
& 8\lambda_0 B_{4,1} \tan\left[\frac{\alpha_1}{2}\right] + 16\operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\cos[\alpha_1]\lambda_0 B_{4,1} \tan\left[\frac{\alpha_1}{2}\right] + \\
& \frac{8(\operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_1]]\sin[\alpha_1]^2 - \operatorname{ArcTanh}[\cos[\alpha_2]]\sin[\alpha_2]^2)\lambda_0 B_{4,1} \tan\left[\frac{\alpha_1}{2}\right])}{\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2]})/ \\
& (8(-1 - \cos[\alpha_1] + (\cos[\alpha_1] - \cos[\alpha_2])\lambda_0)); \\
& B_{4,1} = \\
& ((-\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]])^2(((10 + 11\cos[2\alpha_1])\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]])^2 \\
& - 30\cos[\alpha_1]\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] \\
& \operatorname{LegendreP}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]] + 9\operatorname{LegendreP}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]]^2)\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]^2 + \\
& \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]^2((10 + 11\cos[2\alpha_1])\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]^2 - 30\cos[\alpha_1]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] \\
& \operatorname{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]] + 9\operatorname{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]]^2) + \\
& 2\operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_2]](3\operatorname{LegendreP}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1]](5\cos[\alpha_1]\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]] \\
& - 3\operatorname{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \cos[\alpha_1])) + \\
& \operatorname{LegendreP}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]](-((10 + 11\cos[2\alpha_1])\operatorname{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \cos[\alpha_1]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+15\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]) + (\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] \\
&- \text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]])^2 \\
&((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2 - 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] \\
&+ 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2)\beta_0)A_{1,1}^2 - \\
&2\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] \\
&(\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] \\
&(\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] \\
&- 15\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] + \\
&3(-5\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] + 3\text{LegendreP}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]])\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]) - \\
&\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2 \\
&- 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] + 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2)) + \\
&(\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] - \text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]) \\
&((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2 - 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] \\
&+ 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2)\beta_0)A_{1,1}A_{1,2} + \\
&\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2 \\
&(-4\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]^2\text{Sin}[2\alpha_1] + \\
&\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]^2((10 + 11\text{Cos}[2\alpha_1])\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2 \\
&- 30\text{Cos}[\alpha_1]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]] + 9\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2)(-1 + \beta_0)A_{1,2}^2))/ \\
&(32\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_1]]^2\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E1 = &(3\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]](\text{LegendreP}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]] - \\
&\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1}A_{1,2} + \\
&3\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]](\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_2]] + \\
&\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]](-1 + \beta_2) \\
&- \text{LegendreP}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]\beta_2) \\
&A_{1,2}^2 + 8\text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]](-((-1 + \text{Cos}[\alpha_2])\lambda_2 B_{2,2}) + \text{Sin}[\alpha_2]^2 B_{3,1} - \\
&(\text{Cos}[\alpha_2] + \text{ArcTanh}[\text{Cos}[\alpha_2]]\text{Sin}[\alpha_2]^2)B_{4,1}));
\end{aligned}$$

E2 =

$$\begin{aligned}
&(-8\text{Cot}[\alpha_2]\gamma_2 - (\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]A_{1,1} + \text{LegendreQ}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]]A_{2,1})^2 + \\
&9\text{Csc}[\alpha_2]^2((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2},\text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2},\text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,1})^2 + \\
& \beta_2((\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]A_{1,2} + \text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]]A_{2,2})^2 - \\
& 9\text{Csc}[\alpha_2]^2((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,2} + \\
& (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,2})^2) + 16(-B_{2,1} + B_{4,1}) + \\
& 8(\text{Csc}[\alpha_2]^2((3 + \text{Cos}[2\alpha_2])B_{2,1} + 4\text{Cos}[\alpha_2](B_{1,1} + B_{3,1})) + 2B_{4,1}) + \\
& 16\lambda_2(B_{2,2} - B_{4,2}) - 8\text{Csc}[\alpha_2]^2\lambda_2((3 + \text{Cos}[2\alpha_2])B_{2,2} + 4\text{Cos}[\alpha_2](B_{1,2} + B_{3,2}) + 2\text{Sin}[\alpha_2]^2B_{4,2}));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E3 = & ((\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,1} + \\
& (\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] - \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,1} + \\
& \kappa_2((-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreP}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreP}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{1,2} \\
& + (-\text{Cos}[\alpha_2]\text{LegendreQ}[\frac{1}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]] + \text{LegendreQ}[\frac{3}{2}, \text{Cos}[\alpha_2]])A_{2,2}));
\end{aligned}$$

2. Aislante con poca viscosidad, agua y aire

$$\beta_0 = 0.02;$$

$$\beta_2 = 0.01234567901;$$

$$\kappa_0 = 0.05;$$

$$\kappa_2 = 0;$$

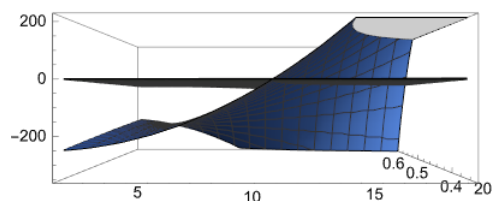
$$\lambda_0 = 0.5;$$

$$\lambda_2 = 0.0202247191;$$

$$\gamma_2 = 2.399666667;$$

$$\alpha_2 = 0.07;$$

$$\text{Plot3D}[\{E1, E2, E3\}, \{A_{1,2}, 1, 20\}, \{\alpha_1, 0.35, 0.6\}]$$



$$\alpha_2 = .;$$

$$\text{FindRoot}[\{E1==0, E2==0, E3==0\}, \{A_{1,2}, 12\}, \{\alpha_1, 0.45\}, \{\alpha_2, 0.07\}]$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 10.9064, \alpha_1 \rightarrow 0.520111, \alpha_2 \rightarrow 0.173436\}$$

Solución válida si existe un fluido con dichas propiedades.

3. Aceite con aditivos, leaky dielectric menos viscoso que el agua y aire

$$\beta_0 = 0.02469135802;;$$

$$\beta_2 = 0.01234567901;$$

$$\kappa_0 = 0.05;$$

$$\kappa_2 = 0;$$

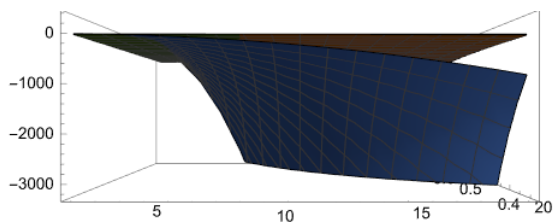
$$\lambda_0 = 1120;$$

$$\lambda_2 = 0.202247191;$$

$$\gamma_2 = 2.399666667;$$

$$\alpha_2 = 0.07;$$

$$\text{Plot3D}[\{E1,E2,E3\},\{A_{1,2},1,20\},\{\alpha_1,0.35,0.6\}]$$



$$\alpha_2 = .;$$

$$\text{FindRoot}[\{E1==0,E2==0,E3==0\},\{\{A_{1,2},5\},\{\alpha_1,0.45\},\{\alpha_2,0.07\}\}]$$

$$\{A_{1,2} \rightarrow 1.29189, \alpha_1 \rightarrow 0.933066, \alpha_2 \rightarrow 1.59882\}$$

Solución no válida.

4. Aceite con aditivos, etilglicol y aire

$$\beta_0 = 2/37;$$

$$\beta_2 = 1/37;$$

$$\kappa_0 = 0.05;$$

$$\kappa_2 = 0;$$

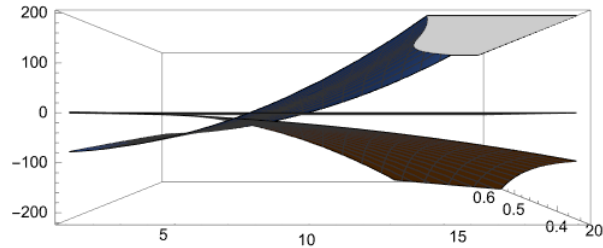
$$\lambda_0 = 0.1/0.016;$$

$$\lambda_2 = 1.74 * 10^{-5}/0.016;$$

$$\gamma_2 = 0.025/0.047;$$

$$\alpha_2 = 0.07;$$

`Plot3D[{E1,E2,E3},{A1,2,1,20},{α1,0.35,0.6}]`



$$\alpha_2 = .;$$

`FindRoot[{E1==0,E2==0,E3==0},{A1,2,7.5},{α1,0.45},{α2,0.07}]`

FindRoot : "Failed to converge to the requested accuracy or precision within 100 iterations."

$$\{A_{1,2} \rightarrow 1.59106, \alpha_1 \rightarrow 0.688319, \alpha_2 \rightarrow 0.506842\}$$

No parece existir solución.

5. Aceite con aditivos, polipropil carbonato y aire

$$\beta_0 = 2/64.9;$$

$$\beta_2 = 1/64.9;$$

$$\kappa_0 = 0.05;$$

$$\kappa_2 = 0;$$

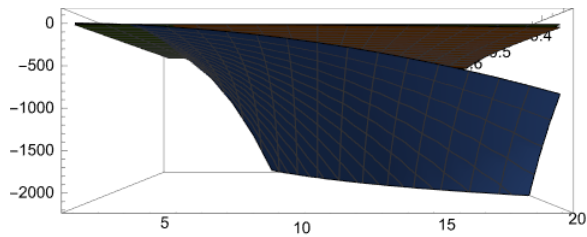
$$\lambda_0 = 0.1/0.00276;$$

$$\lambda_2 = 0.00018/0.00276;$$

$$\gamma_2 = 0.025/0.0419;$$

$$\alpha_2 = 0.07;$$

`Plot3D[{E1,E2,E3},{A1,2,1,20},{α1,0.35,0.6}]`



$\alpha_2 = .;$

`FindRoot[{E1==0,E2==0,E3==0},{A1,2,2.5},{α1,0.52},{α2,0.07}]`

$\{A_{1,2} \rightarrow 4.94847, \alpha_1 \rightarrow 0.389187, \alpha_2 \rightarrow 0.0137827\}$

6. Aceite con aditivos, acetona y aire

$\beta_0 = 2/8.69;$

$\beta_2 = 1/8.69;$

$\kappa_0 = 0.05;$

$\kappa_2 = 0;$

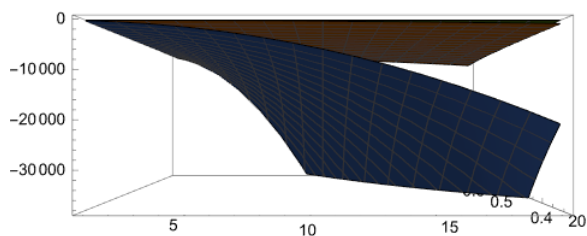
$\lambda_0 = 1/0.0032;$

$\lambda_2 = 0.00018/0.0032;$

$\gamma_2 = 0.025/0.0252;$

$\alpha_2 = 0.07;$

`Plot3D[{E1,E2,E3},{A1,2,1,20},{α1,0.35,0.6}]`



$\alpha_2 = .;$

`FindRoot[{E1==0,E2==0,E3==0},{A1,2,2.5},{α1,0.52},{α2,0.07}]`

$\{A_{1,2} \rightarrow -3.0462675056801947*^{-26}, \alpha_1 \rightarrow 1.5684, \alpha_2 \rightarrow 1.57321\}$

Solución no válida.

7. Acetona, agua y aire

$$\beta_0 = 1.0159/81;$$

$$\beta_2 = 1/81;$$

$$\kappa_0 = 0.05;$$

$$\kappa_2 = 0;$$

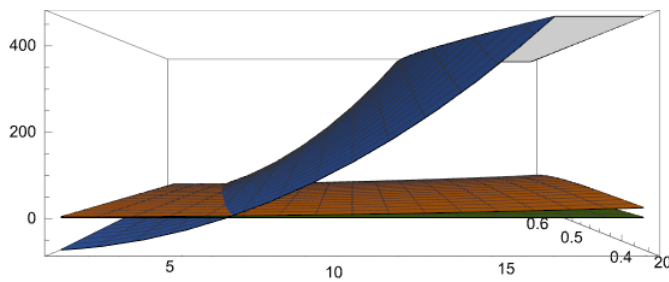
$$\lambda_0 = 0.36/1;$$

$$\lambda_2 = 0.018/1;$$

$$\gamma_2 = 0.0252/0.03;$$

$$\alpha_2 = 0.09;$$

Plot3D[{E1,E2,E3},{A_{1,2},1,20},{α₁,0.35,0.6}]



$\alpha_2 = .;$

FindRoot[{E1==0,E2==0,E3==0},{A_{1,2},10},{α₁,0.45},{α₂,0.09}]

FindRoot: "The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient decrease in the merit function.

{A_{1,2} → 0.880994, α₁ → 0.439312, α₂ → 0.0462252}

No existe solución o no tenemos la suficiente precisión para determinarla.

8. Aceite muy poco viscoso con aditivos, agua y aire

$$\beta_0 = 0.02;$$

$$\beta_2 = 1/81;$$

$$\kappa_0 = 0.05;$$

$$\kappa_2 = 0;$$

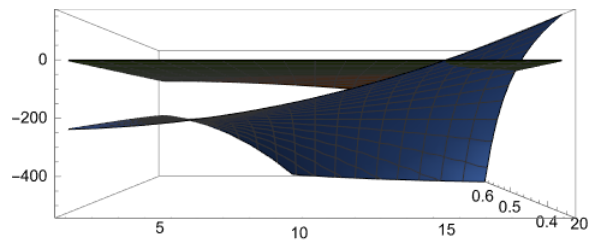
$$\lambda_0 = 10/1;$$

$$\lambda_2 = 0.018/1;$$

$$\gamma_2 = 2.399666667;$$

$$\alpha_2 = 0.08;$$

`Plot3D[{E1,E2,E3},{A1,2,1,20},{α1,0.35,0.65}]`



$$\alpha_2 = .;$$

`FindRoot[{E1==0,E2==0,E3==0},{A1,2,15},{α1,0.45},{α2,0.07}]`

$$\{A_{1,2} \rightarrow 19.0706, \alpha_1 \rightarrow 0.474321, \alpha_2 \rightarrow 0.14869\}$$

PROGRESO CON MATLAB®

Obtención de las funciones asociadas de Legendre en MATLAB®

```

1  %% Solving Legendres recursion formula for lambda=0.5 and mu=0
2  syms y(x)
3  %LegendreP
4  eq = (1-x^2)*diff(y,x,2) - 2*x*diff(y,x) + 0.75*y == 0;
5  dy = diff(y,x);
6  cond = [dy(0),y(0)] == [0.59017,0.539353];
7  dsolve(eq,cond)
8  %LegendreQ
9  eq = (1-x^2)*diff(y,x,2) - 2*x*diff(y,x) + 0.75*y == 0;
10 dy = diff(y,x);
11 cond = [dy(0),y(0)] == [0.927037,-0.847213];
12 dsolve(eq,cond)
13
14 %LegendreP1.5
15 eq = (1-x^2)*diff(y,x,2) - 2*x*diff(y,x) + 3.75*y == 0;
16 dy = diff(y,x);
17 cond = [dy(0),y(0)] == [0.809029,-0.393447];
18 dsolve(eq,cond)
19 %LegendreQ1.5
20 eq = (1-x^2)*diff(y,x,2) - 2*x*diff(y,x) + 3.75*y == 0;
21 dy = diff(y,x);
22 cond = [dy(0),y(0)] == [-1.27082,-0.618025];
23 dsolve(eq,cond)

```

Progreso en la resolución del problema en MATLAB®

Como el código ocupa más de 30 páginas, se ha creído conveniente no incluirlo en este apéndice. Si está interesado en conocer más sobre él o en utilizarlo para avanzar en la investigación o cualquier

otro motivo, puede contactar con el catedrático Alfonso M. Gañán-Calvo o con el alumno Máximo Beas.

Índice de Figuras

1.1	Esquema del proceso del electrospray	1
1.2	Efecto del campo eléctrico y de la tensión superficial	2
1.3	Configuración del experimento electrohidrodinámico	3
1.4	Parámetros geométricos relevantes	6
2.1	Configuración con aceite, agua y aire	7
2.2	Esquema del problema	8
2.3	Representación de $P_{1/2}(x)$	11
2.4	Representación de $Q_{1/2}(x)$	11
2.5	Esfuerzos en la interfaz	12
2.6	Conducción de carga a través de la interfaz. Condición de Burcham & Saville	13
2.7	$\kappa^{(0)}$ frente a α_1 para el caso de dos dominios (Gañán-Calvo y Montanero, 2021)	14
2.8	Solución del problema eligiendo $\alpha_1 = 0.7$ (Gañán-Calvo y Montanero, 2021)	15
2.9	α_2 frente a α_1 para valores fijos de $\kappa^{(2)}$ e isocontornos de $\kappa^{(0)}$ (Gañán-Calvo y Montanero, 2021)	16
2.10	Elección de ángulos de interfaz y búsqueda de punto de partida	17
2.11	Representación de solución con gas interna (Gañán-Calvo y Montanero, 2021)	17
2.12	α_2 frente a α_1 , con isocontornos de $\kappa^{(0)}$, para el valor fijo de $\kappa^{(2)} = 0$	18
3.1	Tabla de extremos paramétricos	22
3.2	Tabla de variación de la solución en función de la variación de los parámetros	23
3.3	Planos paramétricos: tensión superficial	25
3.4	Planos paramétricos: viscosidad	25
3.5	Planos paramétricos: permitividad relativa	26
3.6	Planos paramétricos: conductividad eléctrica	26
3.7	Planos paramétricos con frontera: viscosidad	27
3.8	Planos paramétricos con frontera: permitividad relativa	27
3.9	Planos paramétricos con frontera: conductividad eléctrica	28
3.10	Resultados de la optimización de la constante desconocida	29
3.11	Resultados de la optimización del tamaño de la capa intermedia	29
4.1	Parámetros de la solución de aceite agua y gas	31
4.2	Parámetros de conductividad eléctrica y permitividad relativa de las configuraciones investigadas	32
4.3	Parámetros de tensión superficial y viscosidad de las configuraciones investigadas	32
4.4	Algunos gráficos obtenidos en busca de solución. Consulte el apéndice D para más información	32
4.5	Soluciones inicial, final e intermedias	35

4.6	Diagrama de una solución intermedia	36
5.1	Demostración gráfica de la inexistencia de solución cuando $\kappa(0) = \kappa(2) = 0$	37

Bibliografía

- [1] *Cono de Taylor*, 2022.
- [2] Milton Abramowitz and Irene A Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55, US Government printing office, 1948.
- [3] AftonChemical, *Aditivos para el aceite del motor*.
- [4] Noria Latín América, *Como reducir la viscosidad de un aceite*, 2020.
- [5] CSIC, *Espectrometría de masas*.
- [6] Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Cuyo, *Compilado de tablas*, 2012.
- [7] Antonio de Jesús Vargas Efigenio and Daniel Esquivel Velazquez, *Disminución de la viscosidad de Líquidos mediante cavitación hidrodinámica*, 2014.
- [8] The engineering toolbox, *Relative permittivity - the dielectric constant*, 2010.
- [9] Prof. Ing. Mahuli A. González G., *Tablas y graficos propiedades de los fluidos*, 2012.
- [10] Alfonso M Gañán-Calvo and JM Montanero, *Self-similar electrohydrodynamic solutions in multiple coaxial Taylor cones*, *Journal of Fluid Mechanics* **915** (2021), R1.
- [11] Fernando Quirós Gracián, *Comportamiento autosemejante en problemas con difusión no lineal*, Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 1996.
- [12] OFICINA ESPAÑOLA DE PATENTES Y MARCAS Lehmann Novo, María Isabel, *Aceites minerales con una conductividad eléctrica y una fluidez en frío mejoradas.*, 2011.
- [13] Jose M López-Herrera, Miguel A Herrada, M Gamero-Castaño, and Alfonso M Ganan-Calvo, *Effects of geometry in the operation of coaxial electrosprays*, *Journal of Aerosol Science* **167** (2023), 106075.
- [14] Jose M López-Herrera, Miguel A Herrada, Manuel Gamero-Castaño, and Alfonso M Gañán-Calvo, *A numerical simulation of coaxial electrosprays*, *Journal of Fluid Mechanics* **885** (2020), A15.
- [15] Ignacio G Loscertales, A Barrero, I Guerrero, R Cortijo, M Marquez, and AM Ganan-Calvo, *Micro/nano encapsulation via electrified coaxial liquid jets*, *Science* **295** (2002), no. 5560, 1695–1698.

- [16] M Olmo R Nave, *Viscosity of liquids and gases*, 2008.
- [17] D. A. Saville, *Electrohydrodynamics: The Taylor-Melcher leaky dielectric model*, 1997.
- [18] Martijn van Dijk, *¿importa el tamaño del contraelectrodo?*, 2021.
- [19] Wikipedia, *Polinomios asociados de Legendre*, 2008.
- [20] ———, *Electrospray*, 2009.