UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA Y LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

TESIS DOCTORAL

Los orígenes del conocimiento geométrico: una aproximación cognitiva, epistemológica y arqueo-histórica orientada al continente Euroasiático

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

Manuel Jesús García Pérez

Director

José Ferreirós Domínguez

Sevilla, 2023

A mis abuelos, Manuel Pérez Lorenzo y Carlota Galán Martín, ellos fueron la "luz de mi vida, fuego de mis entrañas"

"Detrás de un cerro siempre viene una cañada"
Dicho popular chipionero

"Levántate sus pitisniqui,
que estás en el potestate,
ponte los pirrimiri y también los tarabitate,
que casa la blanca y casa la negra
están llenas de experiencia,
y si no acudes con paciencia, se te quemará el bitoque,
que yo me he llevado aquí, asiricrí y asiricroque"
Canción popular de la que mi abuela nunca se olvidó

Índice

Agradecimientos

Hace siete años decidí embarcarme en la aventura de hacer una tesis doctoral sin financiación asegurada, pero con motivación de sobra. La financiación nunca llegó –salvo un contrato de un año como técnico de investigación con el programa de garantía juvenil de la Junta de Andalucía–; y la motivación fue menguándose hasta el punto de que, a fecha de 24 de mayo de 2022, he estado a punto de escribir a mi director para decirle que iba a abandonar. No hago ningún *spoiler* si os digo que esto no ocurrió, ya que estáis leyendo los agradecimientos a mi tesis, la cual nunca abandoné.

El contexto en el que he desarrollado mi labor investigadora ha estado lleno de sorpresas. Algunas han sido duras, como la pandemia global y actual emergencia climática y bélica en la que vivimos. Otras, muy amargas, como largas enfermedades y muertes de familiares. Por último, también he tenido sorpresas esperanzadoras, como el nacimiento de mis dos sobrinas, Lola y Thalia.

El impacto que estas y otras sorpresas han tenido en mi vida ha sido, en ocasiones, devastador. Y en esos momentos, la investigación en filosofía parecía que era la última de mis prioridades en la realidad precaria en la que ahora habitaba. Sin embargo, como bien dice mi madre, «aunque tú no quieras o no puedas, la vida continúa». Y la vida continuó. Y tengo que agradecer enormemente a todas las personas y redes de apoyo con las que he contado para llegar hasta aquí.

Quiero agradecer, en primer lugar, a todas las instituciones y personas particulares sin las cuales esta investigación no podría haberse llevado a cabo. Entre ellas, mi especial agradecimiento a Alexandra Elbakyan por haber creado Sci-Hub, y por defender y promover la accesibilidad de la investigación a todo el mundo. También un agradecimiento especial a todas las personas involucradas en Internet Archive, que con el mismo espíritu que Alexandra se dedican incansablemente a poner miles de libros a disposición de todos de manera gratuita. Por último, un agradecimiento a todo el PAS de la Facultad de Filosofía de la US, y especialmente al personal de biblioteca que es con quién más he interactuado. Sin vosotros y vosotras la universidad no funcionaría, y más de un alumno y profesor seguiría perdido por el nuevo catálogo fama.

Por otro lado, agradecer a todas las personas dentro del mundo de la filosofía que he ido conociendo a lo largo de estos años, y que de alguna manera han influido en mi manera de pensar y de hacer filosofía. Especialmente, gracias a Valeria Giardino, Lino

Campubrí, Karine Chemla, Abel Lassalle Casanave y Christopher Cullen. Gracias también a todo el equipo investigador, técnico y administrativo del *Laboratoire D'Histoire des Sciences et de Philosophie – Archies Henri-Poincaré*, en el que estuve tres meses de estancia, e hicieron que me sintiera lo más cómodo y bienvenido posible.

Gracias a Matheus Valente y Tamires Dal Magro (Tami). Fue muy bonito haber coincidido en Sevilla con vosotros, y haber continuado esta amistad en otros lugares como Bruselas, Barcelona o a través de nuestras pantallas. Ha sido un enorme placer trabajar contigo entre cervezas y cigarros, mensajes interminables de whatsapp discutiendo cuestiones sobre diagramas, o hablando de la variedad de prácticas matemáticas mientras probábamos seis tipos diferentes de queso. Sé que existe el dicho popular de que es mejor no mezclar el trabajo con el placer, pero he de decir que haberlo hecho contigo fue una experiencia muy bonita y enriquecedora.

Millones de gracias a José Ferreirós. Sobra decir que esta tesis es fruto de haberte conocido. Cuando te propuse trabajar sobre el "Nacimiento de la física matemática", aún recuerdo cómo me dijiste que no era buena idea –aunque me dijiste que, si yo quería, nos embarcaríamos en ello–, y por qué era una mejor decisión trabajar sobre "La génesis de la geometría". Me has descubierto un mundo que ahora siento como mío, el de las matemáticas durante el período prehistórico y mundo antiguo. Siempre me has ayudado a comprender mejor estos temas, y a veces con una sola palabra ya lograbas que entendiera algo con lo que llevaba semanas liado sin conseguir entenderlo. Gracias también por haber tenido la paciencia que has tenido en mis innumerables retrasos en la entrega de capítulos, y de esta tesis, y por haber estado también presente cuando mi vida personal no estaba en su mejor momento. Recuerdo que en un congreso se me acercó un estudiante de doctorado a decirme: «se me hace raro veros a José y a ti reíros y estar charlando con tanta confianza, no conozco a ningún director de tesis que se comporte así con su doctorando». Gracias por haber sido así.

Gracias infinitas a María de Paz. Aunque con tu llegada tuviera que marcharme del despacho en el que estaba, me alegro enormemente de que esto ocurriera. Eres el ejemplo de persona con el que la academia sí que es un lugar agradable en el que me gusta trabajar, y en muy poco tiempo te has convertido en el modelo de investigadora al que yo aspiro a convertirme. Me has ayudado tanto a nivel personal como académico, siempre con una paciencia, cariño y rigurosidad envidiables. Has aceptado mis silencios y espacio personal extra, y además me has dado consejos que, aunque no te lo haya dicho, sigo usando en mi día a día, e incluso ya los he usado para ayudar a otras personas diciendo «como me dijo María de Paz».

Gracias a todos los amigos y familiares que me han ayudado durante todos estos años, Reyes, Luís, Mercedes, Sthefy, Irune, Edurne, Yolanda, Samuel, Charli, Ruba y un largo etcétera de personas que he ido conociendo durante estos años en tantos cursos, congresos, estudios o viajes. Un agradecimiento muy especial a Maite, quién en primero de bachillerato me enseñó qué era la filosofía, y que con su forma de enseñarla y de entenderla despertó algo en mí que al final me ha traído hasta aquí. De hecho, no deja de resultarme curioso que ambos quisiéramos en un primer momento dedicarnos a las matemáticas –o al menos así lo recuerdo–, pero al final acabamos enganchados en las ramas de la filosofía.

Gracias a mi hermano Rafa, la persona más graciosa y que mejor baila que conozco. En días grises, siempre acabo buscándote para que me hagas reír. A mi hermana Isa, que me ha introducido al mundo de *Bollywood*, el cual me ha servido para desconectar de la tesis cuando más lo necesitaba. A Isma, que ha aguantado estos últimos meses a una persona que a la mínima oportunidad viendo una película aprovechaba para empezar a hablar de cuestiones de la tesis. Has sido, además, el lugar en el que he podido apoyarme y desahogarme estos últimos años tan tempestuosos. Gracias también a Nacho, quien durante tanto tiempo me apoyó –emocional y económicamente– para que pudiera hacer esta tesis. Sigues siendo una de las personas más inteligente e interesante que conozco, aunque prefieras las plantas a los insectos. Nadie es perfecto.

Gracias a mi padre, Pepe, por haberme enseñado desde pequeño la importancia del conocimiento y la reflexión crítica. Recuerdo cómo te ilusionaste cuando decidí estudiar filosofía, porque iba a convertirme en alguien que conocería muchas formas de pensamiento, y eso te parecía algo maravilloso. Lo es, y te doy las gracias por habérmelo inculcado. También quiero expresar lo orgulloso que estoy de alguien que, con 50 años y nueve hijos, decidió estudiar el acceso a la universidad. Y lo aprobó. Ojalá hubieras tenido –todavía la tienes– la oportunidad de estudiar derecho como te habría gustado. No conozco a nadie que ame más el conocimiento que tú.

En último lugar, y sí por ello más importante, gracias a mi madre, Maribel. Es un clásico dedicar un lugar especial a una madre –como ella misma me dijo, «es que todos los hombres sois muy madreros»–, pero no me importa seguir el tópico. Gracias por haberme enseñado tanto, y por nuestras charlas de una hora en las que descubro que la filosofía existe más allá de los muros de la universidad, y la importancia que tiene atesorar

todos los buenos momentos que te ofrece la vida. Sobre todo, gracias por haberme dado tantos ánimos, de tantas formas distintas, para que acabara esta tesis. Gracias por haber respetado mis dudas –sin alimentarlas–, y por elegir las palabras adecuadas en el momento oportuno. Gracias por detectar al instante si estoy feliz o triste por mi timbre de voz, y por apoyarme en todos los proyectos en los que me meto al mismo tiempo. Si termino esta tesis, en gran parte es por ti. Espero y deseo parecerme a ti más de lo que a veces me gusta admitir.

Índice de Abreviaturas

AMS, *Artificial Memory System*, Sistema de Memoria Artificial

ANS, *Approximate Number System*, Sistema Numérico Aproximado

CKS, *Core Knowledge System,* Sistema Nuclear de Conocimiento

EA, Europa y África

IPN, Industria Principal del Norte

IPS, Industria Principal del Sur

NCS, *Navigational Core System*, Sistema Nuclear para la Orientación

OCS, *Object Core System*, Sistema Nuclear para los Objetos

OTS, *Object Tracking System*, Sistema de Seguimiento de Objetos

PIS, *Parallel Individuation System*, Sistema de Individuación Paralela

WEIRD, *Western, Educated, Industrialized, Rich and Democratic* [*Societies*], [Sociedades] Occidentales, Educadas, Industrializadas, Ricas y Democráticas.

Resumen

Existe un extenso e intenso debate en torno a la cuestión de cómo surgió, y se desarrolló posteriormente, el conocimiento matemático en nuestra especie. Este tipo de cuestión ha sido abordada desde una amplia variedad de disciplinas, incluyendo la filosofía, a lo largo de la historia del pensamiento humano. En la actualidad, varias de estas disciplinas se aproximan a este debate desde una postura o enfoque "universalista". Es decir, consideran que existe un único origen del conocimiento matemático que es universal para todo el género humano, o al menos un único origen que se adecúa al tipo de matemáticas que poseemos hoy día.

Podemos ver este tipo de caracterización universalista en el siguiente ejemplo. La teoría CKS es una de las propuestas más activas y con mayor impacto académico dentro de los estudios actuales en cognición matemática. Los investigadores dentro de esta teoría consideran que existe un tipo de intuiciones geométricas que son innatas en el ser humano, o incluso hablan de una geometría natural. Esto se debería precisamente a cómo son y cómo se combinan los módulos o sistemas nucleares de conocimiento que se relacionan con el desarrollo de este tipo de conocimiento, los cuales son innatos en nuestra especie. Por lo tanto, el ser humano desarrollará un tipo de conocimiento geométrico similar, que equiparan con algunos elementos básicos de la geometría euclidiana, de manera independiente tanto a su medio físico como cultural.

Por otro lado, en gran parte de los trabajos en historia de las matemáticas ha existido una "concepción helenofílica" acerca del desarrollo de las matemáticas. Lo que esto quiere decir es que para muchos historiadores existe un único origen de nuestras matemáticas actuales, el cual se sitúa en la Grecia antigua, y más concretamente en las matemáticas desarrolladas por Euclides. Por lo tanto, los desarrollos de otras tradiciones de la antigüedad no son considerados como plenamente matemáticos ya que elaboraron un tipo de conocimiento que no es similar al de los griegos. A menudo se considera que, aunque en estas culturas no existiera conocimiento matemático en sentido estricto, quizás pudieron poseer algún tipo de arte 'matemático'.

Aunque estos ejemplos se relacionan con el estudio del conocimiento geométrico, gran parte de los trabajos actuales que tratan sobre el origen y desarrollo del conocimiento matemático se dedican al estudio de los posibles fundamentos cognitivos y culturales de la aritmética. Por lo tanto, para ocupar este vacío que existe en la investigación actual, en

este trabajo nos centraremos específicamente en el análisis y estudio de los orígenes arqueo-históricos del conocimiento geométrico.

Para llevarlo a cabo, hemos dividido el trabajo en tres partes. En la **primera parte** presentaremos, en primer lugar, cómo se han ido configurando a lo largo de la historia las posibles relaciones entre el espacio, la percepción del espacio, así como la posible geometrización de estos ámbitos. Esta presentación nos parece importante por dos cuestiones fundamentalmente. Por un lado, para entender el desarrollo y herencia histórica de los trabajos actuales en cognición matemática; por otro, porque nos permite observar que el objeto de estudio de la geometría no ha sido siempre el mismo, sino que ha ido variando a lo largo de la historia. Esta segunda cuestión tiende a ser obviada precisamente por la teoría CKS, para la cual el ser humano siempre desarrollará un tipo de conocimiento geométrico básico similar influenciado por cómo percibe y codifica el medio gracias a los módulos cognitivos innatos.

Posteriormente, y esta vez en relación únicamente con trabajos actuales en cognición matemática, presentaremos la teoría CKS en detalle, así como algunas críticas que se han elaborado a esta propuesta innatista y universalista desde disciplinas como la psicología, la educación matemática o la filosofía. Esto nos servirá para establecer el marco general en el que se sitúa nuestro propio trabajo, en el que desarrollaremos un nuevo programa de investigación acerca de los orígenes arqueo-históricos del conocimiento geométrico. Este programa se fundamenta en dos ideas o puntos centrales. Por un lado, establecemos una distinción en tres niveles de competencia en relación con la cognición geométrica. En el primer nivel, denominado de cognición visoespacial, estaríamos considerando la manera en la que los agentes se relacionan perceptualmente con el espacio tanto a pequeña como gran escala. En el segundo y tercer nivel tendríamos el desarrollo del conocimiento protogeométrico y geométrico, respectivamente. En estos niveles no estaríamos considerando cómo los agentes perciben y codifican de manera inmediata el medio gracias a su sistema cognitivo, sino cómo hacen un uso activo de representaciones externas, y otras herramientas, para reflexionar y obtener algún tipo de conocimiento sobre las características y relaciones de las figuras o formas espaciales.

Por otro lado, y apoyándonos principalmente en algunos desarrollos de la filosofía de las prácticas matemáticas, así como la arqueología e historia cognitiva, consideramos que existen una serie de elementos clave para analizar los orígenes de este tipo de conocimiento. Particularmente, consideramos que para entender cómo surgieron las matemáticas en la antigüedad es crucial analizar quiénes fueron los agentes encargados de crearlas, usarlas y enseñarlas. De esta manera, no solo son importantes sus capacidades y habilidades cognitivas, sino también el tipo de herramientas que usaron para hacerlo, así como el contexto socio-histórico, político e institucional particular en el que lo hicieron.

Una vez establecido nuestro marco teórico general, presentaremos en la **segunda parte** algunos casos de estudio, los cuales tratarán sobre dos períodos principalmente. El primero de ellos será el de la Prehistoria, debido a que en las últimas décadas un mayor número de investigadores sitúa en este período los inicios u orígenes del pensamiento matemático. Estas propuestas se apoyan en la interpretación de algunos elementos arqueológicos como los primeros casos en los que se puede observar que el ser humano tuvo que usar algún tipo de conocimiento geométrico para tareas de construcción –p. ej. de monumentos megalíticos–, o empleó herramientas cuya forma particular pudo propiciar el desarrollo del conocimiento geométrico –p. ej. herramientas líticas–. Sin embargo, y apoyándonos fundamentalmente en nuestra distinción en tres niveles, defenderemos que ninguno de los materiales ni actividades de la Prehistoria ejemplifica los comienzos del desarrollo de este tipo de conocimiento. Bajo nuestro punto de vista, no tenemos indicios suficientes que nos indiquen que las formas particulares de estos elementos materiales fueron utilizadas para obtener algún tipo de conocimiento básico sobre las propias formas espaciales o sus características, ni tenemos datos suficientes para asegurar que fue necesaria la posesión de conocimiento geométrico para elaborar el tipo de construcciones que encontramos en este período.

Lo que sí consideramos que existen, sobre todo a partir del Neolítico, son una serie de elementos que pueden ser considerados como las bases cognitivo-culturales para el posterior desarrollo del conocimiento protogeométrico. Entre estas, fue fundamental la construcción de lugares con un marcado carácter ritual por dos cuestiones principalmente: por un lado, porque en ellas se pudo acumular y mejorar progresivamente el material con contenido simbólico; y por otro, este tipo de construcciones favoreció la división y especialización del trabajo, de tal manera que las cuestiones rituales quedaron en manos de un grupo reducido de la población.

El segundo período de interés es el de la Historia Antigua, y nos centraremos principalmente en los casos de tres grandes civilizaciones del continente Euroasiático, que son Mesopotamia, la Grecia antigua y la Antigua civilización china. Mostraremos detalladamente cómo en cada una de estas civilizaciones se fue dando forma, desde el Neolítico hasta el final de la Historia Antigua, a este tipo de conocimiento. Encontraremos de hecho contribuciones culturales que atestiguan la aparición de formas de protogeometría, pero también veremos –en alguno de los casos– el paso a consideraciones no utilitarias y la aparición de formas de geometría, en sentido estricto.

Finalmente, en la **tercera parte**, llevaremos a cabo un análisis comparativo de los anteriores casos de estudio. De esta manera, pretendemos mostrar y analizar las similitudes y diferencias que existen tanto en el desarrollo arqueo-histórico del conocimiento (proto)geométrico, como en el propio contenido de estas prácticas matemáticas. Es decir, que analizaremos de qué manera se configuran y relacionan los elementos teóricos que establecimos en la primera parte de esta tesis en cada uno de los casos particulares que hemos presentado.

A partir de este análisis comparativo estableceremos las siguientes conclusiones. Primero, nuestro análisis pone en evidencia que en cada una de estas civilizaciones los agentes encargados de dar forma a este tipo de conocimiento usaron para ello toda una serie de herramientas cognitivas –p. ej. diagramas o lenguaje técnico– y herramientas técnicas. Además, estos agentes elaboraron este tipo de conocimiento siguiendo unas metas particulares, como poder resolver problemas prácticos, o desarrollar métodos o procedimientos matemáticos generales. Por lo tanto, y en contra de las conclusiones principales de la teoría CKS, estos casos de estudio muestran que el desarrollo de este tipo de conocimiento siempre se encuentra culturalmente influenciado. Segundo, y en relación con la conclusión anterior, nuestro análisis muestra que existieron diversas maneras de dar forma a este tipo de conocimiento en el pasado. Sin embargo, y esta vez contra la asunción helenofílica, la preferencia por una u otra de estas formas lo que estaría poniendo en evidencia son nuestros propios sesgos a la hora de acercarnos a la historia antigua de las matemáticas. Es decir, consideramos que es metodológicamente erróneo analizar las prácticas matemáticas del pasado asumiendo que estas tienen que asemejarse a nuestras prácticas actuales, o a un tipo de matemáticas que hoy día consideramos como las únicas correctas o paradigmáticas. Lo que nuestra aproximación plural y contextual revela es que existieron diversas maneras de desarrollar este tipo de conocimiento, y lo interesante es observar cómo en cada una de estas civilizaciones se comenzaron a estudiar y analizar las formas y figuras espaciales, y cómo se desarrollaron marcos simbólicos en los que conectar y seguir desarrollando este conocimiento.

Por lo tanto, este trabajo muestra que existe una rica y variada historia del desarrollo del conocimiento protogeométrico y geométrico en la antigüedad. Para entender dicho desarrollo es necesario analizar con detalle la manera en la que toda una serie de elementos –agentes, herramientas, instituciones y contexto socio-histórico y político– fueron dando forma a este conocimiento. Estaríamos considerando, de esta manera, que no existe una única manera correcta de hacer matemáticas en la antigüedad que tenga que asemejarse a los desarrollos griegos, ni que nuestras capacidades cognitivas innatas sean el único motor de la cognición matemática o del desarrollo cultural. Defendemos, de esta manera, que no existe un único origen común de las matemáticas, sino múltiples orígenes que tendrán que ser analizados y considerados comparativamente a la hora de reescribir, alejados de concepciones helenofílicas, la historia antigua de las matemáticas.

Palabras clave: cognición geométrica, protogeometría, herramientas matemáticas, evolución del conocimiento geométrico, arqueología e historia comparativa, historia de la geometría.

Summary

There is an extensive and intense debate around the issue of how mathematical knowledge emerged and was developed in our species. This kind of question has been approached from a wide variety of disciplines, including philosophy, throughout the history of human thought. Nowadays, several of these disciplines approach this debate from a "universalist" position. That is, they consider that there is a unique origin of mathematical knowledge that is universal for the whole human race, or at least one origin that fits the type of mathematics that we have today.

We can see this kind of universalist characterization in the following example. The CKS theory is one of the most active proposals, with great academic impact in current mathematical cognition studies. Researchers within this theory consider that there exists a kind of geometric intuitions, that are innate in the human being –they even speak of a natural geometry. This is precisely due to how our modules related to the development of this kind of knowledge are combined; the modules or "cognitive knowledge systems" are innate in our species. Therefore, human beings will develop a similar kind of geometric knowledge, which these researchers equate with the basic elements of Euclidean geometry, independently of both their physical and cultural environment.

On the other hand, in much of the work on the history of mathematics there has been a "hellenophilic conception" about the development of mathematics. What this means is that for many historians there is a single origin of mathematics, properly speaking, which is situated in ancient Greece, more specifically in the mathematics developed by Euclid. Therefore, developments from other ancient traditions are not considered mathematical because they elaborated a type of knowledge that is not similar to that of the Greeks. It is often considered that these other cultures possessed perhaps a kind of 'mathematical' art, but not knowledge in the proper sense.

Although these examples are related to the study of geometric knowledge, much of the current work dealing with the origin and development of mathematical knowledge is devoted to the study of the possible cognitive and cultural foundations of arithmetic. Therefore, a gap exists in current research, and this work aims to fill this gap by focusing specifically on the analysis and study of the archaeo-historical origins of geometric knowledge.

To accomplish this, we have divided this work into three parts. In the **first part**, we will first discuss how the possible relations between space, the perception of space,

and their possible geometrization, have been shaped throughout history. This presentation is important to us for two main reasons. On the one hand, to understand the development and historical inheritance of current work in mathematical cognition; on the other hand, because it allows us to observe that the object of study of geometry has not always been the same, but has been varying throughout history. This second question tends to be ignored precisely by the CKS theory, for which human beings will always develop a similar basic geometric knowledge influenced by how they perceive and encode the environment thanks to innate cognitive modules.

Afterwards, in relation to current work in mathematical cognition, we will present in detail the CKS theory, as well as some criticisms that have been made of this innatist and universalist proposal from disciplines such as psychology, mathematical education, or philosophy. This is useful to establish the general framework in which our own work is situated, where we will develop a new research program about the archaeo-historical origins of geometric knowledge. This program is based on two main ideas or points. First, we establish a distinction of three levels of competence in relation to geometric cognition. At the first level, named of visuospatial cognition, we would be considering how agents relate perceptually to space on both the small and large scale. In the second and third levels we would have the development of protogeometric and geometric knowledge, respectively. At these levels we are not considering how agents immediately perceive and encode the medium thanks to their cognitive system, but how they make active use of external representations, and other tools, to reflect and obtain some knowledge about the characteristics and relationships of spatial figures or forms.

On the other hand, and relying mainly on some developments in the philosophy of mathematical practices, as well as cognitive archaeology and cognitive history, we consider that there are a number of key elements to analyze the origins of this kind of knowledge. Particularly, we consider that in order to understand how mathematics arose in antiquity it is crucial to analyze who were the agents in charge of creating, using and teaching it. In this way, not only are their cognitive abilities and capacities important, but also the type of tools they employed, as well as the particular socio-historical, political and institutional contexts in which they did so.

Once our general theoretical framework has been established, we will present in the **second part** some case studies, which deal mainly with two periods. The first of these will be that of Prehistory, because in recent decades a great number of researchers place in this period the beginnings or origins of mathematical thought. These proposals are based on the interpretation of some archaeological elements as the first cases in which it can be observed that human beings used some kind of geometric knowledge for construction tasks –e.g. megalithic monuments–, or used tools whose particular shape could foster the development of geometric notions –e.g. lithic tools. However, and relying fundamentally on our distinction in three levels, we will defend that none of the prehistorical materials or activities exemplifies the beginnings of the development of geometric or protogeometric knowledge. In our view, we do not have enough evidence to state that the particular shapes of these material elements implied the availability of some basic knowledge about the spatial forms or their characteristics –nor do we have enough data to claim that the possession of geometric knowledge was necessary to elaborate the type of constructions we find in this period.

We rather consider that, from the Neolithic period on, there is a series of elements that could be considered as the cognitive and cultural bases for the development of protogeometric knowledge. Among these, the construction of places with a marked ritual nature was fundamental, for two main reasons: on the one hand, because it was possible to accumulate in them, and progressively improve, materials with symbolic content; on the other, because this kind of construction favored the division and specialization of labor, so that the rituals remained in the hands of a small group of the population.

The second period of interest is that of Ancient History, and we will focus mainly on the cases of three great civilizations in the Eurasian continent, which are Mesopotamia, ancient Greece and Early China. We will show in detail how in each of these civilizations this kind of knowledge was given shape, from the Neolithic to the end of Ancient History. We will find in fact cultural contributions that testify to the appearance of forms of protogeometry, but we will also see –in some of these cases– the transition to non-utilitarian considerations and the emergence of forms of geometry, in the strict sense.

Finally, in the **third part**, we will carry out a comparative analysis of the previous case studies. In this way, we intend to show and analyze the similarities and differences that exist both in the archaeo-historical development of (proto)geometric knowledge, and in the very content of these mathematical practices. That is, we will analyze how the theoretical elements established in the first part of this dissertation are configured and related in each of the particular cases we have presented.

From this comparative analysis we will draw the following conclusions. First, our analysis shows that in each of these civilizations the agents responsible for shaping this kind of knowledge used a whole series of cognitive tools –e.g. diagrams or technical

language– and technical tools. In addition, these agents developed their knowledge following particular goals, such as solving practical problems, or developing general mathematical methods or procedures. Therefore, and contrary to the main conclusions of the CKS theory, these case studies show that the development of this kind of knowledge is always culturally influenced. Second, and related to the above conclusion, our analysis shows that there were various ways of shaping (proto)geometric knowledge in the past. However, and this time against the hellenophilic conception, the preference for one or another of these forms would, for the most part, be evidence of our own biases when we approach the ancient history of mathematics. That is, we consider that it is methodologically wrong to analyze the mathematical practices of the past assuming that they have to resemble our current practices, or a type of mathematics that we consider nowadays as the only correct or paradigmatic one. Our approach is plural and contextual, and it reveals that there were different ways of developing (proto)geometric knowledge. What is interesting is to observe how in each of these civilizations spatial forms and figures were studied and analyzed, and how symbolic frameworks were established to connect and further develop this knowledge.

Thus, this work shows that there exists a rich and varied history of the development of protogeometric and geometric knowledge in Antiquity. To understand this development, it is necessary to analyze in detail the way in which a whole series of elements –agents, tools, institutions and socio-historical contexts– contributed to give shape to such knowledge. We would consider, in this way, that there is no single correct way of doing mathematics in ancient times that has to resemble Greek developments, but also that our innate cognitive abilities are not the only motor of mathematical cognition and cultural development. We argue, in this way, that there is not a unique common origin of mathematics, but multiple origins that will have to be analyzed and considered comparatively when rewriting, far from hellenophilic conceptions, the ancient history of mathematics.

Keywords: geometric cognition, protogeometry, mathematical tools, evolution of geometric knowledge, comparative archaeology and history, history of geometry.

Introducción

Una de las preguntas centrales para la historia y filosofía de las matemáticas se relaciona con la propia definición de aquello que llamamos *matemáticas* o *conocimiento matemático*. Esta pregunta, lejos de ser trivial, es una cuestión compleja que puede abordarse desde diferentes perspectivas. Por un lado, desde un punto de vista comparativo y general, podríamos preguntarnos cuáles son aquellas características que nos servirían para diferenciar el conocimiento matemático del de otras áreas del saber, como podría ser el conocimiento científico o filosófico. Por otro lado, cabría preguntarse si existe, o incluso si es necesaria, una definición de conocimiento matemático que se adecúe a los desarrollos que tuvieron lugar en períodos tan distintos y distantes como son la Historia Antigua y la Edad Contemporánea. Finalmente, y dentro de un período concreto, también podríamos preguntarnos si los desarrollos matemáticos de distintas culturas o civilizaciones tendrían que ajustarse a una definición "universal" de qué son las matemáticas.

En la actualidad estas preguntas están generando un importante y rico debate que no compete únicamente a la historia y filosofía de las matemáticas, sino a diversas disciplinas como la antropología, la arqueología, las ciencias cognitivas, la educación matemática, las etnomatemáticas o la psicología, por nombrar algunas de las más importantes para el presente trabajo. Además, como veremos a lo largo de los próximos capítulos, el trabajo interdisciplinar entre estas y otras áreas afines es crucial para obtener una imagen lo más completa e informada posible acerca de qué es aquello que denominamos matemáticas (cf. Ferreirós 2016; Adams et al. 2017; Everett 2017).

Este sería el contexto general en el que se sitúa el presente trabajo de investigación. Sin embargo, no es la propia pregunta "¿Qué son las matemáticas?" la que hemos tratado de responder, sino algunas de las ramificaciones que se derivan de la misma.

Una primera ramificación de esta pregunta general estaría relacionada con la división del campo de las matemáticas en sus distintas áreas. Esta pregunta, al igual que planteamos al inicio de esta introducción, es una cuestión compleja que podría analizarse desde distintos ángulos. En primer lugar, se podría analizar desde las ciencias cognitivas y áreas afines si los seres humanos usan las mismas capacidades cognitivas y biológicas en relación con los números, por un lado, y con las formas geométricas, por otro –por nombrar dos casos clave para nuestro trabajo, y que veremos con más detalle en los capítulos primero y segundo–. En segundo lugar, se podría investigar desde áreas como la psicología del desarrollo si los infantes tienen mayores dificultades a la hora de comprender y usar números y las operaciones que podemos realizar con ellos, que a la hora de hacerlo con figuras geométricas y sus operaciones (cf. Campbell 2005; Robinson et al. 2019). En último lugar, desde la arqueología e historia se puede analizar si distintas áreas de las matemáticas como la aritmética y la geometría se desarrollaron en paralelo, conjuntamente, si se consideraban dos campos del conocimiento plenamente independientes, etc. (cf. Struik 1987; Joseph 2011).

De hecho, mostraremos posteriormente que en los estudios actuales en ciencias cognitivas y prehistoria de las matemáticas existe un mayor énfasis y preocupación por las cuestiones relativas a números y aritmética que por las cuestiones relativas a la geometría; incluso en algunas ocasiones se usa el apelativo *matemáticas* o *matemático* como sinónimo de aritmética.

La segunda ramificación se relaciona con los *orígenes* de este tipo de conocimiento. De nuevo, esta pregunta podría considerarse desde distintos ángulos. En primer lugar, podríamos preguntarnos por los orígenes filogenéticos de las capacidades biológicas y cognitivas que se relacionan con nuestra comprensión, elaboración y enseñanza de las matemáticas; es decir, la cuestión principal que esta aproximación trata de responder se relaciona con el momento de la evolución en el que estas capacidades y habilidades surgieron. En segundo lugar, nuestro interés podría estar en los orígenes ontogenéticos de las matemáticas; esto es, el momento durante nuestro desarrollo psicológico en el que comenzamos a comprender y manejar cuestiones de carácter matemático (cf. Dehaene & Brannon 2011; Schemmel 2016a; Hohol 2020). En último lugar, también podríamos investigar los orígenes arqueo-históricos de las matemáticas, relacionados con el estudio del momento o momentos en la historia en que los seres humanos comenzaron a desarrollar y enseñar a futuras generaciones este tipo de conocimiento (Keller 2004a; 2006; Campos Almeida 2009; 2011).

El objeto de la presente tesis se relaciona principalmente con la segunda de estas ramificaciones. Como su propio título indica, nuestro interés está en *los orígenes del conocimiento geométrico*. Por supuesto, para tratar este tema necesitamos abordar algunas de las cuestiones de la primera de las ramificaciones; es decir, responder al menos tentativamente a la pregunta sobre qué es aquello que denominamos ‛geometría’, o al menos ofrecer algunas de sus características principales que nos permitan analizar y comprender cómo y por qué surgió este tipo de conocimiento en el pasado.

Además, en el título de este trabajo también se ven reflejadas algunas de nuestras asunciones teóricas, que iremos defendiendo y desarrollando a lo largo del mismo. Por un lado, hablamos de *orígenes* y no origen, ya que defendemos una visión pluralista acerca de la génesis de este tipo de conocimiento (cf. Netz 2003; Chemla 2014a); es decir, consideramos que no existe un solo origen del que surgieran las diferentes *aproximaciones* o *formas* de hacer matemáticas. En este trabajo nos centramos principalmente en las matemáticas de los períodos de la Prehistoria e Historia Antigua en parte del continente Euroasiático.

Por otro lado, investigaremos estos orígenes desde una aproximación interdisciplinar: en este título hablamos de *una aproximación cognitiva, epistemológica y arqueo-histórica*. Como veremos detenidamente a lo largo de los primeros capítulos, existen actualmente áreas de investigación que priorizan sus propios resultados a la hora de investigar estos orígenes, y obvian o rechazan los de otras áreas. Esta incomunicación se da tanto desde las ciencias a otras áreas como la historia y la filosofía, así como desde la propia filosofía hacia los resultados y discusiones que actualmente están surgiendo en áreas como la cognición matemática o la psicología del desarrollo. Como argumentaremos posteriormente, creemos que para conseguir una imagen lo más nítida posible acerca de estos orígenes es crucial el trabajo conjunto de todas estas áreas.

Por lo tanto, esta tesis tendrá como objeto de estudio el análisis interdisciplinar de los orígenes arqueo-históricos y cognitivos de un campo o área de las matemáticas concreto, que es la geometría. Para ello, usaremos principalmente las herramientas y análisis propios de la filosofía de las prácticas matemáticas (Ferreirós 2016; Giardino 2017; Carter 2019). En particular, consideramos que para entender qué es y cómo surgió el conocimiento geométrico en el pasado es crucial analizar quienes fueron los agentes o comunidad de agentes encargados de desarrollar, enseñar y utilizar este conocimiento. Por otro lado, habrá que analizar las herramientas que esta comunidad usó para desarrollar este conocimiento, tales como diagramas, tipo de lenguaje técnico, creación de unidades de medición, representaciones visuales de las distintas figuras espaciales o geométricas, así como las metas que persiguieron. Por último, consideraremos seriamente las habilidades cognitivas involucradas a la hora de crear y usar este tipo de conocimiento por aquella comunidad de agentes.

Otra de las características fundamentales de la filosofía de las prácticas matemáticas es su atención a la propia historia de las matemáticas. En particular, en este trabajo seguimos una aproximación contextual al estudio de la prehistoria e historia antigua de las matemáticas (cf. Netz 1999; Cuomo 2001; Hoyrup 2002; Robson 2008; Chemla 2014b). Es decir, consideramos que para entender el tipo de conocimiento que cada comunidad de agentes elaboró en el pasado es necesario entender el contexto socio-cultural y político general en el que trabajaron. De esta manera, nos alejamos de caracterizaciones actuales de la geometría, y lo que pretendemos es entender qué tipo de conocimiento desarrolló cada comunidad en su propio contexto histórico, a qué necesidades culturales respondía, qué consideración tenía este tipo de conocimiento por la sociedad, qué términos técnicos fueron usados y por qué, la valoración y posible patronazgo de la clase que ostentara el poder para su institucionalización, etc.

Para llevar a cabo este estudio, dividiremos este trabajo en tres partes. En la primera parte, titulada *Fundamentos teóricos*, queremos hacer una presentación general de los estudios actuales que tratan acerca de lo que se ha denominado nuestra "cognición geométrica", y su relación con el surgimiento y desarrollo de las matemáticas en nuestra especie. Posteriormente, presentaremos nuestro "nuevo programa de investigación" en contraposición a algunas de las corrientes principales de estos estudios. En la segunda parte, titulada *Casos de estudio en el continente Euroasiático*, analizaremos cómo surgió el conocimiento protogeométrico y geométrico durante la Prehistoria, así como en relación a tres civilizaciones de la Historia Antigua, que son Mesopotamia, la Grecia antigua y la Antigua civilización china. Por último, realizaremos un análisis comparativo de los casos de estudio anteriormente presentados en una tercera parte, titulada precisamente *Análisis Comparativo*.

Más concretamente, la parte I de la tesis se divide en dos capítulos. En el primero de ellos llevamos a cabo una muy breve introducción de carácter histórico a la cuestión general del ʿespacioʾ y la ʿgeometríaʾ. Mostraremos cómo se han ido configurando las nociones de espacio y geometría desde la antigüedad hasta nuestros días, apoyándonos para ello en una serie de autores o períodos históricos clave –la mayoría pertenecientes al mundo intelectual occidental–. Este breve recorrido histórico nos permitirá mostrar que existieron diversas maneras de conceptualizar el espacio y la geometría, así como sus posibles relaciones, en los diversos períodos (cf. Torretti 1984; Gray 1989; Magnani 2001; Wagner 2006). Este fenómeno pondría de relieve que las propias concepciones que podamos tener de ʿespacioʾ y ʿgeometríaʾ están influenciadas por su propio contexto histórico y filosófico. Por otro lado, presentaremos con cierto detalle las reflexiones que dos grandes matemáticos y filósofos como Hermann von Helmholtz y Henri Poincaré desarrollaron acerca de las relaciones entre espacio, geometría y cognición. En último lugar, hablaremos de los trabajos que actualmente se están llevando a cabo dentro de los llamados "Estudios en cognición matemática", desde los que se analiza de qué manera percibimos y comprendemos diferentes objetos y relaciones matemáticas (cf. Campbell 2005).

El segundo capítulo comienza donde termina el primero. Es decir, nos centraremos en una de las aproximaciones o grupos de investigación más importante en relación al estudio de nuestra cognición geométrica, conocida como la teoría CKS (Spelke 2000). Esta es una aproximación innatista que defiende una concepción universal del conocimiento geométrico. Resumido muy brevemente, consideran que el conocimiento geométrico surge en todos los seres humanos de manera independiente a su contexto socio-cultural y prácticas que estos realicen; esto se debe a que estas autoras defienden que el desarrollo de tal conocimiento depende de nuestra biología y habilidades cognitivas innatas, y no de las prácticas culturales que realicemos. Además, este tipo de aproximaciones vincula lo que denominan 'Geometría natural' o 'Intuiciones geométricas innatas' con la geometría euclidiana (Dehaene et al. 2006; Spelke et al. 2010). Mostraremos, sin embargo, de qué manera se ha criticado esta aproximación innatista desde diversas áreas como las ciencias cognitivas, la psicología, la educación matemática o la filosofía de las prácticas matemáticas, y qué otras propuestas alternativas se han desarrollado respecto al origen y desarrollo del conocimiento geométrico.

La presentación de estas críticas y propuestas alternativas nos servirá como marco general en el que presentaremos con cierto detalle nuestro "nuevo programa de investigación" respecto a los orígenes de la geometría. Una de las ideas fundamentales de esta propuesta es la distinción de *tres niveles de competencia* en relación con los orígenes y evolución del conocimiento geométrico, principalmente, desde una perspectiva arqueo-histórica. Esta distinción se apoya en una serie de consideraciones clave tanto para la filosofía de las prácticas matemáticas como para la arqueología e historia cognitiva. Muy brevemente, distinguimos entre un primer nivel al que denominamos de "cognición visoespacial", el cual podría considerarse innato –aunque esta es una cuestión que no tratamos en este trabajo–. El segundo y tercer nivel serían el del conocimiento protogeométrico y geométrico, respectivamente (Giardino 2016; Ferreirós & García-Pérez 2018; 2020).[1] Esta distinción nos parece importante ya que una de las críticas que

[1] La filósofa Valeria Giardino (2016), con la que hemos trabajado estrechamente durante estos años, ha propuesto una distinción similar en tres niveles en relación con nuestra cognición geométrica.

hacemos a la propuesta CKS es la confusión entre este primer nivel, relacionado con cómo percibimos y codificamos el espacio de acuerdo a nuestras capacidades cognitivas, con el tercer nivel, en el que la geometría a nivel teórico e ideal es desarrollada. Además, el surgimiento y desarrollo de este tipo de conocimiento tanto protogeométrico como geométrico no es universal ni innato, sino que depende de toda una serie de consideraciones socio-culturales y cognitivas como es el uso y desarrollo de herramientas cognitivas, la construcción de nichos socio-cognitivos e instituciones, la existencia y mantenimiento de las estructuras necesarias para cultivar y pasar a futuras generaciones este tipo de conocimiento, etc. (Schemmel 2016a; Beller et al. 2018; Pantsar 2019; Núñez 2021).

Tras esta primera parte, en la que hemos desarrollado los presupuestos teóricos de nuestra aproximación al estudio arqueo-histórico de los orígenes del conocimiento geométrico, pasamos a la segunda parte del trabajo. En ella, llevaremos a cabo una presentación detallada de los casos de estudio.

El tercer capítulo se vertebra en torno a la pregunta, ¿se desarrolló el conocimiento protogeométrico y geométrico durante la Prehistoria? Para responderla, comenzaremos presentando qué han dicho otros autores acerca de la cuestión de lo que se ha denominado "Prehistoria de las Matemáticas". Para llevar a cabo este tipo de estudios, la primera de las ramificaciones de las que hablamos anteriormente es fundamental, ya que diversos investigadores desde la prehistoria e historia de las matemáticas, así como desde las etnomatemáticas, han tratado de ofrecer una concepción de qué son las matemáticas alejada de caracterizaciones formales y de la influencia de nuestros propios desarrollos matemáticos actuales (cf. Ascher 1999; Gerdes 2003; Keller 2004a; Joseph 2011). De esta manera, diversas prácticas y elementos culturales de la Prehistoria son "interpretados matemáticamente", situando en este período el origen u orígenes de este tipo de conocimiento.

Haremos una presentación general de los estudios en prehistoria de las matemáticas dividiéndolos en dos tipos de trabajos. Por un lado, historias generales de las matemáticas, así como trabajos de prehistoriadores e historiadores de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XX (p. ej. van der Waerden 1983; Struik 1987; Boyer 1991). Por otro lado, mostraremos de qué manera se investiga actualmente la cuestión de la

---

Particularmente, y como veremos con más detalle en el capítulo dos, esta autora distingue entre: 1) extraer invariantes; 2) utilizar mapas; y 3) comprender la geometría abstracta.

prehistoria de las matemáticas (p. ej. Malafouris 2010; Everett 2017; Overmann 2019). Tras esta presentación general, y con base en nuestra distinción en tres niveles de competencia, presentaremos cinco elementos clave para sistematizar los estudios en prehistoria de las matemáticas. Una de las consecuencias principales de la aplicación de estos elementos al estudio general de la prehistoria de las matemáticas será la distinción, fundamental, de los períodos Paleolítico y Neolítico. Consideramos que no existen indicios que nos permitan hablar de los orígenes del conocimiento protogeométrico durante estos períodos. Sin embargo, durante el Neolítico surgirán algunos elementos y prácticas culturales que pueden ser considerados como las bases cognitivas y culturales para el posterior desarrollo de la protogeometría.

A continuación, nos centraremos en el análisis de cómo surgió y se desarrolló el conocimiento protogeométrico y geométrico en tres civilizaciones de la antigüedad: Mesopotamia (Cap. 4), la Grecia antigua (Cap. 5) y la Antigua civilización china (Cap. 6). Todos estos capítulos seguirán una misma estructura de análisis y presentación. En primer lugar, analizaremos el impacto que las posturas helenofílicas han tenido sobre el estudio de estas tradiciones de la antigüedad –esto es, posturas que consideran que la geometría se originó en Grecia, con Euclides principalmente, y que todo conocimiento de la antigüedad que no sea equiparable al euclidiano no debería considerarse como plenamente matemático (cf. Pingree 1992)–. En segundo lugar, presentaremos cómo surgió y se desarrolló el conocimiento protogeométrico en cada una de estas civilizaciones. Además, haremos una presentación del contexto socio-cultural y político general, y su posible influencia en el desarrollo de este tipo de conocimiento. Este análisis lo dividiremos en tres etapas:

- En primer lugar, nos centraremos en el período Neolítico de cada una de estas civilizaciones, donde veremos algunos de los elementos que nos permiten hablar de la emergencia de ciertas habilidades, capacidades, herramientas y prácticas que servirán de base para el posterior desarrollo de este tipo de conocimiento;

- en segundo lugar, el período en el que surgirá y se establecerá el conocimiento protogeométrico. En el caso de la civilización mesopotámica, nunca se desarrolló el conocimiento geométrico, lo que sin embargo no resta ningún valor histórico al tipo de prácticas y conocimiento que desarrollaron y que, como veremos, era mucho más complejo de lo que se le tiende a atribuir (cf. Hoyrup 2002; Friberg 2007a; Robson 2008; Yuste 2013);

- en tercer y último lugar, veremos cómo surgieron las matemáticas en Grecia y la Antigua civilización China. En el caso griego, nos detendremos en la exposición y análisis de tres autores principalmente: Tales, Euclides y Herón de Alejandría (cf. Netz 1999; Cuomo 2001). Elegimos estos tres casos ya que cada uno de ellos elaboró un tipo de conocimiento (proto)geométrico ligeramente diferente, y mostraremos por qué es interesante subrayar estas distinciones en una misma civilización. En el caso de la Antigua civilización china haremos una presentación general del contenido de algunas obras matemáticas de la misma (cf. Li & Du 1987; Martzloff 1997), principalmente los *Nueve capítulos sobre los procedimientos matemáticos* (Chemla & Guo 2004), así como el contexto general en el que éstas se usaron y desarrollaron (Cullen 2009; Volkov 2018a).

Tras presentar estos casos de estudio, llegamos a la tercera y última parte de este trabajo, el análisis comparativo. Esta parte se compone de un solo capítulo, en el que analizamos comparativamente, en primer lugar, la cuestión general del estudio sobre la prehistoria de las matemáticas; en segundo lugar, mostramos la diversidad de contextos socio-culturales y políticos en los que surgió este tipo de conocimiento, así como los diversos usos y metas perseguidas en cada una de estas tradiciones matemáticas. Este capítulo terminará mostrando algunas consecuencias que nuestro análisis comparativo tiene para los estudios actuales en cognición geométrica. Una de las conclusiones generales que podemos extraer de este estudio es la no-universalidad[2] de este tipo de conocimiento, y en relación con esta, defenderemos una visión pluralista y enculturada de los orígenes de este tipo de conocimiento.

Dicho de otro modo, lo que queremos enfatizar es que no podemos esperar que todos los grupos humanos crearan un mismo tipo de conocimiento y prácticas asociadas

[2] Generalmente, se llama asunción universalista o de la universalidad a aquella que asume que, si encontramos similitudes en los desarrollos de diferentes culturas humanas, estas se deben principalmente a nuestras características biológicas, genéticas o cognitivas, subrayando principalmente la importancia de los caracteres innatos para que esta similitud se produzca. Además, solo cuando se subrayan las diferencias entre estos grupos humanos es cuando se introduce la importancia que la cultura pueda tener en nuestro desarrollo (cf. Kline et al. 2018).

a éste; y, menos aún, considerar que el apelativo de "matemáticas" se aplique únicamente a aquél conocimiento que sea equiparable al griego. Lo crucial para la historia de la matemática antigua, y su análisis comparativo, será precisamente ver en qué contexto socio-cultural y político específico surgió este conocimiento geométrico, en manos de qué grupo o comunidad, qué tipo de problemas tanto prácticos como teóricos viene a resolver, así como la manera en la que cada cultura le dio forma. Y es precisamente por esta cuestión por la que preferimos hablar de *orígenes*, de nuevo en plural, de las matemáticas.

Antes de terminar esta introducción, queremos señalar muy brevemente que los estudios históricos comparativos y contextuales de las matemáticas antiguas se han revitalizado, y como señalan algunos autores, están revolucionando este campo de conocimiento en los últimos años (cf. Cullen 1995; Cuomo 2001; Netz 2003; Robson & Stedall 2009). Estos autores, al igual que haremos nosotros en el presente trabajo, tratan de entender y analizar el surgimiento y desarrollo de cada práctica o cultura matemática dentro de su propio contexto socio-cultural y político, con su propio lenguaje y procedimientos, y no analizándolas a la luz de nuestras matemáticas actuales o en comparación con un supuesto ideal matemático deductivo al estilo euclidiano.

Para terminar, conviene señalar que durante los años en los que este trabajo ha sido desarrollado he publicado una serie de artículos y capítulos de libro en los que algunos de estos temas han sido presentados. Consideramos que es importante reflejarlos en esta introducción por el aval que puede representar la publicación en revistas con arbitraje, y puesto que esta obra se ha beneficiado indudablemente del trabajo e ideas de mis co-autores, así como de los comentarios de los revisores. Estos son:

- **García-Pérez, M. J.** 2023. "Los orígenes prehistóricos del conocimiento geométrico", en J. Ferreirós & M. de Paz (eds.), *La génesis de la geometría*. Madrid: Plaza y Valdés.
- Dal Magro, T. & **García-Pérez, M. J.** 2023. "Demostrar es diagramar: la práctica euclídea", en J. Ferreirós & M. de Paz (eds.), *La génesis de la geometría*. Madrid: Plaza y Valdés.
- Ferreirós, J. & **García-Pérez, M. J.** 2020. "Beyond natural geometry: on the nature of proto-geometry." *Philosophical Psychology*, 33(2): 181-205.
- Dal Magro, T. & **García-Pérez, M. J.** 2019. "On Euclidean diagrams and geometrical knowledge." *Theoria*, 34(2): 255-276.

- **García-Pérez, M. J.** & Dal Magro, T. 2019. “Un análisis comparativo del uso de diagramas en dos prácticas matemáticas de la antigüedad.” *Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 51(152): 5-31.
- Ferreirós, J. & **García-Pérez, M. J.** 2018. “¿“Natural” y “euclidiana”? Reflexiones sobre la geometría práctica y sus raíces cognitivas.” *Theoria*, 33(2): 325-344.

PARTE I

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Capítulo 1

Estudios cognitivos acerca del espacio y la geometría: una breve introducción histórica

En este capítulo vamos a presentar una serie de temas clave para la historia del pensamiento humano, como ha sido la cuestión de la naturaleza de nuestro espacio físico, nuestra manera de percibirlo, así como el desarrollo del conocimiento geométrico y su posible uso para caracterizar este espacio y nuestra percepción del mismo. Cada uno de estos temas ha tenido un amplio desarrollo histórico y han sido fundamentales para diversos campos de conocimiento como la filosofía, la matemática o la psicología.

Por un lado, los estudios sobre percepción espacial han disfrutado de un "largo y prestigioso pedigrí" en la historia general de la psicología (Wagner 2006, 1-29); por otro lado, la geometría ha sido considerada desde la antigüedad hasta finales del siglo XVIII como paradigma y fundamento de certeza (Houzel 1992), y ha estado siempre presente en las discusiones filosóficas. De hecho, como señala Magnani (2001), precisamente por su consideración como fundamento de certeza, el conocimiento geométrico "ha interpretado a menudo el papel de laboratorio para los experimentos conceptuales de los filósofos dedicados a la ideación de teorías del conocimiento poderosas" (p. vii).

Tratar cada uno de estos temas en detalle, así como las distintas relaciones que se han establecido entre estos en diferentes períodos históricos, nos llevaría demasiado lejos de nuestro objetivo. Por esta razón, hemos decidido analizar estas cuestiones de la siguiente manera.

En primer lugar, haremos una breve presentación histórica acerca de cómo la geometría fue vinculándose con el espacio físico, presentando con algo más de detalle el surgimiento de las geometrías no-euclidianas y de qué manera estas tuvieron un impacto en nuestra propia concepción del espacio físico y cómo es percibido (sec. 1). En segundo lugar, centraremos nuestra atención en dos investigadores interdisciplinares del siglo XIX y principios del XX que trataron de manera extensa las cuestiones de 'Espacio, Geometría y Cognición'. Estos son Hermann von Helmholtz, por un lado, y Henri Poincaré, por otro (sec. 2).

En último lugar, veremos de qué manera se han investigado las bases cognitivas del conocimiento matemático en los trabajos actuales sobre cognición matemática;

particularmente, nos centraremos en una propuesta innatista que ha tenido un importante impacto en esta área de conocimiento, que es la propuesta CKS –*Core Knowledge Systems* o Sistemas Nucleares de Conocimiento–.

1. Caracterización y problematización del espacio desde la geometría

En esta sección vamos a ver de qué manera el conocimiento geométrico ha ido vinculándose históricamente con cuestiones espaciales desde finales del Renacimiento hasta el surgimiento y establecimiento de las geometrías no-euclidianas. Esta será una presentación y revisión muy general de algunos de los momentos y pensadores clave de la historia de la geometría en el mundo occidental.

1.1 Geometría y espacio

En primer lugar, tenemos que señalar que el objeto de estudio de la geometría en la Grecia antigua no fue el espacio, ni siquiera cuestiones espaciales generales, sino las características de figuras geométricas, como círculos o cuadrados, polígonos o sólidos regulares, y su relación con otras figuras o elementos geométricos, como puntos o líneas.[1] Los matemáticos y pensadores griegos no necesitaron explicitar ni considerar el espacio en el que estas figuras y elementos geométricos se situaban.[2] Este tipo de geometría se ha denominado en la literatura como ʻciencia de las magnitudes', la cual dominará la práctica geométrica occidental hasta el siglo XVI (cf. Mueller 1981, 14-16; Torretti 1984, 24-27; De Risi 2015; 2016a).[3]

Para Mueller (1981, 15-16) este interés por las figuras geométricas particulares se relaciona con la limitación de usar solo regla y compás impuesta en esta práctica diagramática, señalando que "la demostración de que se puede realizar toda una serie de

---

[1] Lo veremos con más detalle en el capítulo 5.

[2] Gray (1989, 26-38) considera que tuvo que existir un espacio plano subyacente a estas figuras, denominado por Mendell (2015) ʻespacio ingenuo', ya que para llevar a cabo las operaciones geométricas es preciso que estas existieran o se situaran en un mismo espacio plano. Sin embargo, no existen datos matemáticos ni filológicos que apoyen esta interpretación (cf. Mendell 2015).

[3] En la edición de los seis primeros libros de los *Elementos* de Playfair (1846) se define geometría como "ciencia que tiene por objeto la medición de magnitudes. Las magnitudes se pueden considerar en tres dimensiones, –longitud, anchura, altura o grosor– (p. 5).

construcciones con regla y compás es claramente uno de los propósitos de los primeros libros de los *Elementos*" (p. 16). Proclo también enfatizó esta naturaleza constructiva de la geometría euclidiana en relación con los tres primeros postulados, los cuales nos enseñan precisamente a construir u operar con los diagramas. Por ejemplo, el postulado 1 nos dice que podemos "trazar una línea desde un punto a otro punto cualquiera" (cf. Morrow 1992; Ferreirós 2016, 127-137).

Pasamos al siglo XVI, en el que se usará por primera vez el término *spatium* en un tratado geométrico; particularmente, en la obra del filósofo neoplatónico Patrizi de Cherso (1529-1597), quién afirmará en su obra *Sobre una Nueva Geometría* (1586) que "el tema general de las matemáticas es el espacio" (De Risi 2015, 8). La novedad de esta obra es epistemológica más que matemática. Por un lado, porque sus habilidades como matemático fueron escasas, y trató en su obra solo algunos resultados más bien básicos de la obra de Euclides; por otro lado, porque la gran novedad que introdujo fue la de considerar al espacio tridimensional de manera autónoma, ontológicamente hablando, a los cuerpos y materia que en él se sitúan, y sustituyendo así las magnitudes cuantificadas por el espacio cuantificado como objeto de estudio de la geometría (cf. De Risi 2015, 2016b).[4]

Esta caracterización del espacio como extensión cuantitativa sitúa a Patrizi a medio camino entre las consideraciones geométricas de la antigüedad y las de la modernidad, en las que el espacio se concebirá como una estructura y la geometría como su ciencia, siendo Leibniz (1646-1716) el primer autor que así lo concibe (cf. Torretti 1984, 28-29; De Risi 2007; 2018).[5]

Para entender esta concepción del espacio como estructura es interesante presentar, brevemente, la discusión que Leibniz mantuvo con los newtonianos acerca de

---

[4] Otros filósofos o matemáticos de este período trataron estas cuestiones en términos similares, como Bernardino Telesio, Tommaso Campanella o Giordano Bruno (cf. Torretti 1984, 28; De Risi 2015; 2016b). Estas ideas tienen un antecedente en el judío mallorquín Hasdai Cresques, cuya obra de 1410 insiste en la idea de un espacio vacío tridimensional que es el receptáculo de los cuerpos (cf. Torretti 1984, 28).

[5] Houzel (1992, 4-5) señala que durante este período tiene lugar otro hecho clave para esta historia, que es la aplicación de la geometría al estudio físico, ya fuera por ingenieros y matemáticos como Carnot o Poncelet, o por físicos como Kepler o Newton. Por citar un ejemplo, Kepler consideraba que la astronomía formaba parte de la física, y su estudio tenía que llevarse a cabo mediante la aplicación de conceptos geométricos; como afirma el propio Kepler, "vemos que los movimientos [de los planetas] ocurren en el tiempo y el espacio y que la fuerza [que los une al sol] emana de su fuente y se difunde a través *de los espacios del mundo*. Todas estas son cosas geométricas" (Kepler 1609 *apud* Torretti 1984, 23).

la naturaleza del espacio. Esta polémica la encontramos en la correspondencia que Leibniz y Clarke mantuvieron en los años 1715-1716, este último en defensa de la concepción newtoniana (Alexander 1956; Rada 1980).

Newton sostuvo la existencia del espacio absoluto, el cual es independiente a los objetos, existió antes que la materia y seguirá existiendo aún si esta es eliminada. Para Leibniz, sin embargo, el espacio es *relativo* a la coexistencia de los cuerpos y materia en él situados (Pooley 2013). Por ejemplo, en su cuarta respuesta a Clarke afirma que "si no hubiera criaturas, el espacio y el tiempo no existirían más que en las ideas de Dios" (Rada 1980, 84); o en la quinta, donde dice que "el espacio no es otra cosa más que un orden de existencia de las cosas que se manifiesta en su simultaneidad" (Rada 1980, 106).[6]

En relación con esta concepción del espacio cabría hablar del *Analysis Situs*, término con el que se hace referencia al conjunto de investigaciones filosóficas y matemáticas de Leibniz sobre el desarrollo, formalización y fundamentos de la geometría (De Risi 2007, 127-295; 2018). El objeto de estudio principal del *Analysis Situs* no son las figuras o elementos geométricos, sino las relaciones de posición entre figuras o puntos. De esta manera, el espacio se podría definir como el sistema de todas las relaciones posibles entre las posiciones de los objetos. Como resume De Risi (2018), "aquí, por primera vez en la historia de las matemáticas, encontramos definiciones geométricas sobre el espacio, seguidas de axiomas y teoremas sobre él y la primera demostración teniendo como objeto las propiedades del espacio mismo" (p. 253).[7]

En último lugar, vamos a presentar al filósofo Immanuel Kant (1724-1804), quien representa la culminación de los intentos de autores anteriores, como Descartes, Newton o Leibniz, de establecer las relaciones entre espacio físico, geométrico y perceptual (Friedman 2015).[8] Además, su postura fue muy influyente en los siglos posteriores, donde

[6] McDonough (2021) ejemplifica esta concepción relativa del espacio con un árbol genealógico, el cual no existe de manera independiente a los miembros de la familia que conforman dicho árbol; sin embargo, los miembros de la familia *no* son el árbol genealógico, sino que este es un sistema abstracto de relaciones que existe entre estos miembros familiares. El espacio relativo de Leibniz es precisamente esta *estructura* abstracta de relaciones de coexistencia entre los cuerpos en él situados.

[7] En años posteriores habrá una extensa discusión entre los defensores de la geometría como estudio de las figuras *en* el espacio y los que la consideran como estudio *del* espacio en sí mismo, esta última en línea con las ideas de Leibniz (cf. De Risi 2018).

[8] No hemos podido presentar por cuestiones de espacio los trabajos acerca de nuestra percepción espacial y visual. Esta historia también se remonta a la antigüedad, con Euclides y Aristóteles, y tendrá un desarrollo muy importante en el mundo árabe medieval (Meyering 1989, 21-69). A partir del siglo XVII esta área

filósofos, fisiólogos, matemáticos o psicólogos tratarán de argumentar tanto a favor como en contra de esta concepción kantiana (cf. Hatfield 1990; 2006; Friedman 2015).[9]

En primer lugar, Kant defendió al comienzo de sus investigaciones una postura relacionista cercana a Leibniz. Sin embargo, a partir de 1768 elaborará una propuesta novedosa en la que defenderá la anterioridad del espacio respecto a las cosas espaciales, vinculada esta sobre todo con nuestra percepción (Hatfield 1990, 67-108; 2006). En su disertación de 1770, *Sobre la forma y los principios del mundo sensible y el mundo inteligible*, presentada al asumir la cátedra de la Universidad de Königsberg (cf. Torretti 1967, 146-179; 1984, 29-33), afirmará que “el espacio no es algo objetivo y real, tampoco una sustancia, ni un accidente, ni una relación; es, más bien, subjetivo e ideal” (Kant 1770 *apud* Hatfield 2006, 74).

Sin embargo, para este trabajo nos vamos a centrar en la exposición que hace de estas cuestiones en la *Crítica de la razón pura* –1ª ed. de 1781 y 2ª ed. de 1787–; particularmente, es en la Estética Trascendental donde Kant expone dos cuestiones clave que vamos a presentar (cf. Torretti 1967, 146-221; Allison 2004, 99-132).

En primer lugar, Kant afirma que el espacio no es un concepto empírico ni tiene existencia por sí mismo, sino que es una representación necesaria, *a priori* y universal que sirve de base para nuestras intuiciones externas, tal y como ya hizo en su disertación de 1770 (cf. Hatfield 1990, 87-98; 2006). Como resume Torretti (1967),

---

tendrá un desarrollo notable, con autores como Descartes y su noción de geometría natural (cf. Hatfield 2015), Berkeley, Hume, etc. (cf. Hatfield 1990, 21-66; 2015).

Por otro lado, creemos que es importante remarcar el hecho de que Thomas Reid (1710-1796) publicó en 1764 *Investigación sobre la mente humana según los principios del sentido común*, en la que trató, entre otros temas, la ‘geometría de los visibles’. En este trabajo consideró que nuestra percepción se caracterizaba por un tipo de geometría esférica, en la cual no se sostenía, por ejemplo, el axioma de las paralelas. Este autor defendió, así mismo, que esta geometría del espacio perceptual era tan válida como la euclidiana (cf. Gray 1989, 71; Hatfield 1990). Sin embargo, la aceptación de la geometría no-euclidiana en el ámbito matemático no fue general hasta los años 1860-1870, y en el ámbito filosófico incluso en este período seguía considerándose sospechosa y contraintuitiva. Lo que queremos remarcar es que, aunque en este trabajo estemos subrayando las posibles relaciones entre espacio, geometría y cognición o percepción, estas áreas no siempre se comunicaron efectivamente o trabajaron estrechamente.

[9] De hecho, algunos investigadores siguen identificando nuestra percepción del espacio visual con la geometría euclidiana (cf. Wagner 2006, 44-47). Por otro lado, en la sección 3 presentaremos una serie de propuestas actuales en las que se identifica nuestra ‘cognición geométrica’ con la geometría euclidiana, tomando a pensadores como Platón, Descartes o Kant como sus referentes filosóficos –ver nota 42–.

> espacio y tiempo no son entes –a la manera de enormes receptáculos– que tengan existencia por sí mismos, ni tampoco sistemas de relaciones meramente abstraídos de las cosas espaciales y temporales; sino que son «formas de nuestra sensibilidad», condiciones propias de nuestra facultad de conocer (p. 62)[10]

En segundo lugar, Kant considera que la geometría euclidiana se basa en esa representación intuitiva y *a priori* del espacio, de modo que sus proposiciones son sintéticas y *a priori*. Con esto, lo que se está equiparando es precisamente el espacio físico con la geometría euclidiana y con nuestra percepción del mismo, afirmando de hecho que no es posible que existan *otras* geometrías distintas a la euclidiana, ya que estas no podrían representar este espacio intuitivo y *a priori* (Torretti 1967, 179-214; Allison 2004, 116-118). No podemos decir mucho más de esta concepción kantiana del espacio y la geometría, ya que como señala Torretti (1967),

> por desgracia Kant no nos explica nunca cómo la «intuición pura» del espacio «guía» las demostraciones de la geometría, ni siquiera de qué modo nos constriñe a adoptar unos axiomas en vez de otros. Se limita a dar uno que otro ejemplo elegido con bastante cautela, de verdades que conocemos por intuición pura: que el espacio tiene tres dimensiones, que la recta es la distancia más corta entre dos puntos, que dos rectas no pueden determinar una figura;[11] entre estos ejemplos no aparece nunca el quinto postulado de Euclides. Se dirá que la explicación que pedimos no hace falta, pues estas verdades no pueden tener otra fuente (p. 192)

Esta será una propuesta ampliamente debatida en los años posteriores, sobre todo en relación con el surgimiento y demostración de la consistencia de las geométricas no-euclidianas, tal y como veremos en nuestra exposición de Helmholtz y Poincaré.

1.2 El surgimiento de las geometrías no-euclidianas

[10] Allison (2004, 104-106) caracteriza esta propuesta kantiana como psicológica y epistemológica. Psicológica ya que hace referencia a nuestras capacidades cognitivas en relación a cómo nos representarnos las apariencias externas en el espacio; y epistemológica ya que afirma que el espacio es necesario para la representación de las apariencias externas.

[11] Este último aparecía como un axioma en muchas ediciones de los *Elementos*.

El surgimiento de las geometrías no-euclidianas causó una verdadera revolución en las matemáticas, sacudiendo los cimientos de certeza sobre los que supuestamente descansaba el conocimiento geométrico, y abriendo la posibilidad a que otras geometrías pudieran describir el espacio físico y perceptual (Houzel 1992).

Para tratar este hecho histórico tenemos que remontarnos a la geometría griega; particularmente, al quinto postulado de los *Elementos* de Euclides –quinto siguiendo la edición de Heiberg (1883-1885)–, denominado ʻPostulado de las Paralelasʼ. Dice,

> Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos[12]

Este quinto postulado es de una naturaleza muy diferente a los otros cuatro, los cuales son sencillos y evidentes, y desde su establecimiento son numerosos los matemáticos que han tratado de probar su validez.

Al igual que hicimos en la sección anterior, vamos a presentar algunas de las aportaciones clave en torno a esta cuestión, comenzando con los tratamientos de Saccheri (1667-1733) y Lambert (1728-1777), así como la tesis doctoral de Klügel (1739-1812), quién concluyó tras analizar 28 intentos de prueba de la validez del postulado de las paralelas que "la aparente contradicción que estos presentan no es el resultado de una prueba rigurosa, ni la consecuencia de las definiciones de líneas rectas y curvas, sino más bien algo derivado de nuestra experiencia y el juicio de nuestros sentidos" (Klügel 1763 *apud* Bonola 1955, 51).

Saccheri fue el primer matemático que trató de mostrar la validez de este postulado de manera indirecta –por reducción al absurdo– en su libro *Euclides liberado de todo defecto*, publicada el mismo año de su muerte. Para ello, tomó como base las primeras 26 proposiciones del libro I de los *Elementos*, en las que no se emplea el quinto postulado, y otros principios como el postulado arquimediano y un principio de continuidad, para tratar de demostrar que la negación del quinto postulado era incompatible con estos principios (Bonola 1955, 22-44; Torretti 1984, 45-48; Gray 1989, 60-68).

[12] Seguimos la traducción de María Luisa Puertas Castaños publicada en Gredos (2000). Por otro lado, queremos señalar que existe una formulación más sencilla de este postulado, que suele denominarse ʻAxioma de Playfairʼ –aunque aparece ya en Proclo–, y dice: "En un plano, dada una línea y un punto que no está en ella, a lo sumo se puede trazar por el punto una línea a la línea dada" (cf. Gray 1989, 87).

Para su argumento usó el conocido como "cuadrilátero de Saccheri" (Img. 1.1), construido con el segmento recto AB, y los lados AD y BC iguales entre sí y perpendiculares a AB. Formuló tres hipótesis respecto al mismo: 1) la 'hipótesis de los rectos', esto es, si los ángulos C y D son rectos, entonces AB = CD; 2) la 'hipótesis de los obtusos', es decir, si los ángulos C y D son obtusos, entonces AB > DC; y 3) la 'hipótesis de los agudos', esto es, si los ángulos C y D son agudos, entonces AB < DC.

La tarea que se propuso Saccheri era la de demostrar la incompatibilidad de las hipótesis de los obtusos y los agudos con la geometría euclidiana, y la compatibilidad de la hipótesis de los rectos. De hecho, demostró la incompatibilidad de la hipótesis de los obtusos, pero al tratar de hacer lo mismo con la de los agudos llevó a cabo algunas consideraciones guiadas más por su propia intuición acerca de la naturaleza de la línea recta y validez del quinto postulado que por el propio razonamiento matemático –en relación sobre todo con las líneas asintóticas, esto es, líneas que se acercan cada vez más, pero no se cruzan– (cf. Gray 1989, 68).[13]

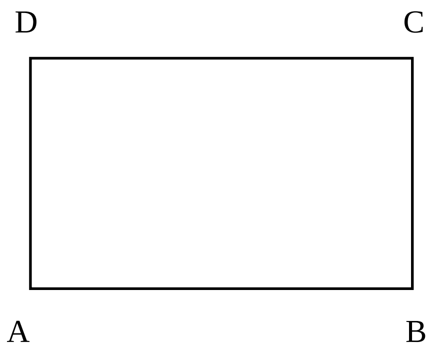


Imagen 1.1 Cuadilátero de Saccheri.

Posteriormente, Lambert escribió en 1766 *Teoría de las paralelas*, publicada póstumamente en 1786. En ella presentará un cuadrilátero con tres ángulos rectos, y tres hipótesis acerca del cuarto ángulo siendo o bien recto, o bien obtuso, o bien agudo. Lambert, a diferencia de Saccheri, consideró que la hipótesis de los obtusos podría ser cierta si "consideramos triángulos *esféricos* en lugar de planos" (Stäckel & Engel 1895 *apud* Torretti 1984, 50); y, por analogía, la hipótesis de los agudos podría serlo en una esfera *imaginaria* –esto es, una esfera con un número imaginario por radio–, lo cual le permitió encontrar un modo simple de generar teoremas de la geometría no-euclidiana.

[13] Bonola (1955) cita algunas de las afirmaciones de Saccheri, el cual consideraba que "la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque es repugnante para la naturaleza de la línea recta" (p. 43).

Sin embargo, Lambert también rechazó estas hipótesis y la posibilidad de desarrollar geometrías no-euclidianas, o suspendió su juicio sobre las mismas ya que no llegó a publicar nada sobre estas cuestiones en vida, basándose también en su intuición de cómo debían comportarse las líneas y cómo tenía que ser el espacio tomando como cierto el postulado de las paralelas. Es decir, que la geometría esférica era obviamente válida, pero no era relevante para el problema de cómo se comportan las líneas rectas; mientras que el comportamiento contraintuitivo y extraño de las líneas en el espacio hiperbólico rozaba lo contradictorio (Bonola 1955, 44-51; Torretti 1984, 48-51; Gray 1989, 70-76). Con todo, el escrito de Lambert parece haber influido de manera importante en Gauss y en otros autores, sobre todo de habla alemana.

Esta situación cambia con el próximo matemático que vamos a presentar, Gauss (1777-1855), ya que en este momento "no es suficiente con sentirse infeliz con las 'geometrías' alternativas; uno debería ser capaz de dar una refutación rigurosa de ellas" (Gray 1989, 83).[14] Se considera generalmente que para 1816 Gauss ya estaba convencido de la consistencia matemática de la geometría no-euclidiana, aunque no publicó nada sobre ello por miedo al "clamor de los beocios" (cf. Gray 1989, 86-87); esto es, por la resistencia que existía a aceptar esta nueva geometría así como las críticas que podía recibir por parte de otros matemáticos, pensadores y científicos (Bonola 1955, 64-75; Gray 1989, 86-90; 97-105; Houzel 1992).[15]

Es precisamente en este contexto en el que nos encontramos con los dos grandes protagonistas de esta historia, que son el oficial de la armada austríaca y matemático húngaro János Bolyai (1802-1860), hijo del también matemático y amigo de Gauss, Farkas Bolyai; y el ruso Nikolái Ivánovich Lobachevskii (1792-1856). Cada uno de estos matemáticos llegó a resultados muy similares de manera independiente (Bonola 1955, 84-121; Torretti 1984, 53-67; Gray 1989, 106-128).

[14] Otros investigadores de interés que no vamos a tratar son Legendre y Taurinus. Señalar únicamente que Taurinus también rechazaba esta nueva geometría por ser contraria a nuestra intuición (cf. Bonola 1955, 55-63; Torretti 1984, 51-53; Gray 1989, 78-82). Por otro lado, en torno a los años 1816-1817, Gauss afirmó que no había un año en el que no saliera al menos un libro sobre la cuestión del postulado de las paralelas (cf. Gray 1989, 86).

[15] En su correspondencia con otros matemáticos como Taurinus o Schumacher, Gauss llamó a esta geometría en un primer momento antieuclidiana, posteriormente geometría astral, y finalmente, en una carta a Taurinus del 8 de noviembre de 1824, las denominó por primera vez no-euclidianas (cf. Houzel 1992, 7).

Por un lado, Bolyai estaba seguro desde 1823 de la consistencia de la geometría no-euclidiana, afirmando en una carta a su padre que con sus resultados había "creado un nuevo universo de la nada" (cf. Gray 1989, 107). Viendo la originalidad de sus ideas y resultados, su padre le instó a que las publicara como apéndice de un libro que él mismo iba a publicar en 1831. En 1832 esta obra llegó a Gauss, escribiéndole a Farkas Bolyai que "el camino tomado por tu hijo, los resultados a los cuales él ha sido llevado, coinciden casi por completo con mis meditaciones, las cuales han ocupado mi mente parcialmente los últimos treinta o treinta y cinco años" (cf. Bonola 1955, 100).

Por otro lado, Lobachevskii dio una conferencia ya en 1826 en la universidad de Kazán sobre la posibilidad de la geometría no-euclidiana, y en 1840 publicó en alemán una obra en la que recogerá los resultados de diversos trabajos anteriores sobre este tema, titulada *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas* (cf. Bonola 1955, 85-86).

Sin embargo, la reacción de la comunidad matemática no fue inmediata debido a dos razones principalmente: por un lado, porque parte de los resultados se publicaron en lugares poco accesibles, escritos además por dos personas no muy conocidas en el mundo matemático; por otro lado, todavía en este período la concepción tradicional del espacio y la geometría euclidiana estaba en alza –reforzada además por la influencia de Kant–, lo que llevó a que algunos se resistieran a aceptar la consistencia de dichas geometrías: el clamor de los beocios que Gauss tanto temía (Bonola 1955, 121).[16]

A partir de 1860-1870 estos resultados tendrán un verdadero impacto en las matemáticas. Por un lado, porque matemáticos de diversos países tradujeron estas obras al francés, alemán o italiano, y se comenzó a introducir la cuestión de su consistencia en manuales sobre geometría, ayudando así a su difusión a un público más amplio. Por otro lado, en estos años se publicó la correspondencia entre Gauss y Schumacher, donde se hablaba en favor de esta geometría no-euclidiana, ayudando también a su aceptación el gran peso de la opinión de Gauss (cf. Bonola 1955, 121-128).

[16] De hecho, Lobachevskii propuso realizar una serie de mediciones en relación con la paralaje de las estrellas, formando figuras triangulares de gran tamaño con las que poder comprobar si se ajustaban a la geometría no-eculidiana; esto es, cuyos ángulos no sumaran dos rectos. Por su parte, Gauss realizó mediciones de tres picos de montañas de Hanover, aunque en relación sobre todo con cuestiones cartográficas. Sin embargo, en ambas mediciones la suma de los ángulos de estos triángulos era de 180º (Gray 1989, 121-122).

Hay dos hechos fundamentales que terminaron de ayudar a su aceptación dentro de la comunidad matemática. En primer lugar, Riemann (1826-1866), alumno de Gauss, presentó en 1854 su habilitación *Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría*, publicada póstumamente en 1867. En ella introduce la idea de variedad n-dimensional, dentro de la cual el espacio euclidiano sería una variedad tridimensional con una métrica particular (cf. Ferreirós 2000). Esto sugería que tanto la geometría euclidiana como las no-euclidianas encajaban dentro un marco general de investigaciones –geometría diferencial–, y que eran simplemente diversas alternativas conceptuales, todas igualmente válidas. Riemann reconocía que las observaciones astronómicas encajaban bien con la geometría de Euclides, pero esto –en su opinión– no determinaba cómo es el espacio a nivel atómico o a escala cosmológica.

En segundo lugar, Beltrami (1835-1900) publicó en 1868 *Ensayo de una interpretación de la geometría no-euclidiana*, donde definió un modelo matemático del plano de Lobachevskii o plano hiperbólico –empleando precisamente geometría diferencial–. Simplificando el asunto, podemos decir que Beltrami encontró un modelo del plano no-euclidiano dentro del espacio euclidiano,[17] lo cual implica que, si la geometría en el plano hiperbólico no es consistente, entonces tampoco lo sería la euclidiana –de la cual nadie dudaba– (Bonola 1955, 121-128; Gray 1989, 145-154).

Sin embargo, todavía habría muchas reacciones adversas hacia esta nueva geometría sobre todo en otros campos, como en filosofía (Torretti 1984, 285-294). Podemos ilustrar este fenómeno con el caso de Rudolf H. Lotze (1817-1881), importante filósofo para quien el espacio se correspondía con el espacio de nuestra percepción, y el cual solo podía ser representado mediante la geometría euclidiana. Bajo estas premisas kantianas o neokantianas, este pensador llegó a afirmar que "toda geometría no-euclidiana es un sinsentido" (cf. Klein 1979, 140). Russell caracteriza el pensamiento de Lotze como el de un pensador que no dejó que las ideas y resultados de las matemáticas se impusieran sobre sus ideas y sistema filosófico (Russell 1897/1956, 108).[18]

[17] Inspirados por este trabajo, se propondrán luego los modelos de Klein y de Poincaré.

[18] Para un tratamiento detallado de los argumentos de Lotze, ver (Russell 1897/1956, 93-109).

2. Estudios pioneros acerca de las relaciones entre espacio, geometría y cognición

En este contexto, como hemos podido ver, la concepción kantiana del espacio físico y perceptual fue puesta en duda. El surgimiento de las geometrías no-euclidianas fue uno de los sucesos más importantes que influyeron para que el dogma kantiano comenzara a tambalearse. Además, también es importante remarcar que durante los siglos XVIII y XIX se institucionalizó y sistematizó la metodología experimental y análisis teórico con los que la fisiología y psicología analizaban, comprendían y determinaban cuestiones psicológicas relacionadas, entre otros temas, con nuestra percepción espacial (cf. Hatfield 1990).[19]

Este es el ambiente general en el que se sitúan los pensadores que vamos a presentar a continuación, Helmholtz y Poincaré, quienes trataron de manera interdisciplinar cuestiones filosóficas, físicas y matemáticas sobre el espacio (Heinzmann 2001; de Paz 2011).[20]

2.1 El empirismo neokantiano de Helmholtz

Helmholtz (1821-1894) trabajó durante su carrera en cuestiones de física, fisiología, matemática y epistemología, e inventó algunos instrumentos usados en investigaciones fisiológicas (cf. Cahan 1993). Aunque él mismo se consideraba sobre todo físico, dedicó un mayor número de páginas de sus investigaciones a cuestiones de fisiología de los sentidos y epistemología en relación con la percepción espacial que a física (Lenoir 2006, 141).

En este trabajo nos vamos a centrar en los trabajos epistemológicos de Helmholtz, articulados según DiSalle (1993) en torno a dos controversias: 1) el debate empirismo-nativismo en relación con nuestra percepción espacial; y 2) el estatuto epistemológico de las geometrías no-euclidianas. Nuestra presentación se organizará en torno a estas dos cuestiones.

---

[19] De hecho, Helmholtz fue el director de tesis de Wilhelm Wundt, considerado generalmente como padre de la psicología (cf. Hatfield 1990; Mandler 2007).

[20] En este período existe toda una serie de pensadores que trabajaron sobre estas cuestiones, como el matemático Moritz Pasch o el físico y filósofo Ernst Mach. Sin embargo, creemos que son precisamente Helmholtz y Poincaré los dos investigadores que mejor ejemplifican las cuestiones que queremos tratar.

En primer lugar, queremos señalar que Helmholtz desarrolló estas ideas en cinco artículos escritos entre 1868-1878, como *El origen y significado de los axiomas geométricos* (1876/1996) o *Los hechos en la percepción* (1878/1996) (cf. Heinzmann 2001). El propio Helmholtz consideraba que con sus trabajos lo que estaba haciendo era actualizar a Kant gracias a los desarrollos y sus amplios conocimientos en fisiología y geometrías no-euclidianas (Hatfield 1990; Lenoir 2006).

Antes del surgimiento y desarrollo experimental de la fisiología y psicología, el debate empirismo-racionalismo trataba sobre la posibilidad de alcanzar ciertas verdades de manera independiente a nuestros sentidos; esto es, era una cuestión eminentemente epistemológica. Sin embargo, Helmholtz se acercará a este debate de una manera novedosa, basándose para ello en los resultados de sus investigaciones empíricas con las que tratará de determinar si algunas de nuestras habilidades cognitivas son innatas, o si las adquirimos durante nuestro desarrollo gracias al aprendizaje (Hatfield 1990, 8-11).[21]

En particular, existía una corriente innatista que defendía que nuestra percepción espacial podía explicarse atendiendo únicamente a nuestras características anatómicas o cerebrales. Por ejemplo, el director de tesis de Helmholtz, Johannes Müller, propuso en 1835 la 'ley de las energías nerviosas específicas', con la que pretendía mostrar que el tratamiento de la información sensorial dependía únicamente de la configuración de nuestro sistema nervioso innato; en este sentido, Müller defiende que el ser humano ya nace con visión tridimensional (Hatfield 1990, 152-158; Lenoir 1993).

Helmholtz llevó a cabo una serie de experimentos con los que mostró que estas interpretaciones y aproximaciones innatistas eran inadecuadas. Por nombrar uno de ellos, comprobó en relación a la respuesta de nuestros dedos a descargas eléctricas que la velocidad de transmisión de esta información por los nervios es menor a la requerida por las explicaciones innatistas. Ante esta situación, Helmholtz introduce en su explicación los procesos psicológicos o juicios sobre nuestro razonamiento práctico. Por ejemplo, contrariamente a Müller defendió que nuestra visión al nacer es bidimensional, y que gracias a nuestra *experiencia* con el medio podemos crear una serie de asociaciones e inferencias inconscientes que nos guiarán en futuras actuaciones, creando en base a nuestra experiencia el espacio visual. De esta manera, para entender el desarrollo y

[21] Algunos autores como Mandler (2007, 17) hablan en este sentido del paso del estudio de nuestros pensamientos o mente de las bibliotecas de los filósofos a los laboratorios de los psicólogos.

fundamento de nuestra percepción espacial y visual es clave tomar en cuenta cómo actuamos; esto es, cómo nos movemos por el mundo con nuestros sentidos visual, motor y táctil (cf. DiSalle 1993; 2006; Lenoir 1993; 2006).

Es decir, que la percepción espacial y visual no dependen únicamente de nuestros mecanismos fisiológicos, sino de cómo usamos nuestros órganos sensoriales al movernos y actuar en el mundo. En este sentido, defiende este autor que usamos nuestro ojo no como órgano pasivo que recibe únicamente imágenes, sino como un aparato con el que medimos y experimentamos con el mundo, creando así un mapa de nuestro entorno para poder actuar en él. Además, es importante tener en cuenta que este espacio visoperceptual es construido gracias a nuestra experiencia, a nuestro aprendizaje acerca de las regularidades que gobiernan el mundo (Hatfield 1990, 208-210; DiSalle 1993; 2006; Lenoir 1993; 2006).

En relación con el segundo de los debates, Helmholtz defendió que el espacio es una forma subjetiva y *a priori* de nuestra intuición, en la medida en que nuestra fisiología predetermina la percepción espacial: subjetiva ya que depende de nuestro propio sistema nervioso, y *a priori* puesto que nuestro aparato motor y perceptual nos es dado con anterioridad a que tengamos ninguna intuición espacial. Sin embargo, influenciado por los resultados de Beltrami de los que hablamos anteriormente, Helmholtz defenderá que la geometría euclidiana es solo *una de las posibles* geometrías de las que disponemos para llevar a cabo mediciones físicas. La caracterización de este autor como *empirista neokantiano* se relaciona con el hecho de que para Helmholtz los axiomas de la geometría expresan los resultados de experiencias físicas con cuerpos sólidos y rayos de luz;[22] de ahí que saber qué geometría usar en determinados contextos sea una tarea eminentemente empírica (DiSalle 1993; Heinzmann 2001; de Paz 2011).

Sin embargo, esta postura fue criticada por algunos neokantianos que defendían que las geometrías no-euclidianas eran posibilidades conceptuales que no afectaban al carácter universal y necesario de la geometría euclidiana. Para responder a estas críticas, Helmholtz modificó el concepto de intuición, subrayando que lo importante para tener

[22] Este es el modo científico, y no como teoría matemática del espacio, que Helmholtz defiende de la geometría. En este sentido, el objeto de estudio de esta geometría será el espacio físico, cuyas propiedades se estudiarán principalmente a través del comportamiento mecánico de los cuerpos físicos. Queda así más claro el componente empirista de la posición de Helmholtz (cf. de Paz 2011).

una intuición es la posibilidad de representarnos la serie de impresiones que sentiríamos si habitáramos en un espacio no-euclidiano (Helmholtz 1876/1996; 1878/1996).

En torno a esta última cuestión, Helmholtz subraya que la geometría euclidiana se encuentra fundamentada en la existencia de regularidades físicas, relacionadas sobre todo con la posibilidad de llevar a cabo mediciones espaciales gracias a la existencia de cuerpos lo suficientemente rígidos y rayos de luz. Al realizar estas mediciones espaciales en repetidas ocasiones, y por nuestra experiencia en el mundo, habríamos reforzado un tipo de impresiones espaciales más cercanas a la geometría euclidiana, y de ahí que se haya pensado que esta sea universal y *a priori*. Para ilustrar esta cuestión, nos propone dos experimentos mentales:

1) si existieran **seres bidimensionales** –este experimento mental también lo propusieron Gauss y posteriormente Poincaré–, la geometría que desarrollarían sería diferente a la nuestra, y estaría acorde a su propia experiencia y percepción espacial en su mundo bidimensional (Helmholtz 1876/1996);

2) si de repente **cambiaran nuestras dimensiones** a la vez que las de los objetos y cuerpos del mundo, entre ellos nuestros aparatos de medición, nos sería imposible percibir dicho cambio, ya que todos nuestros instrumentos físicos también habrían cambiado, así como nuestros órganos sensoriales, como ojos y brazos (Helmholtz 1876/1996).

La postura de Helmholtz en torno a esta cuestión podría resumirse como: que sintamos como *necesario* que el espacio es euclidiano se vincula con *nuestra facilidad de intuirlo o visualizarlo* como euclidiano, ya que el comportamiento de los cuerpos es aproximadamente euclidiano, y nosotros nos hemos adaptado a sus leyes. Pero, no es necesariamente euclidiano, ya que no nos es imposible representarnos el conjunto de sensaciones que podríamos tener si estuviéramos en un mundo no-euclidiano; esto es, podemos tener intuiciones acerca del espacio no-euclidiano (DiSalle 1993; 2006). A fin de cuentas, la geometría de Euclides no es una necesidad racional o un producto *a priori* de la intuición, sino la expresión de hechos acerca del mundo, hechos fisiológicos, mecánicos y ópticos, y podemos imaginar perfectamente cómo cambiaría la geometría si las cosas se comportaran de forma diferente.

2.2 El convencionalismo de Poincaré

Poincaré (1854-1912) es uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX, y al igual que Helmholtz también contribuyó a otros campos como la física y la filosofía (cf. de Paz & DiSalle 2014). Para presentar la perspectiva de Poincaré nos vamos a centrar específicamente en los considerados como sus cuatro ensayos filosóficos: *Ciencia e Hipótesis* (1902/1929), *El valor de la ciencia* (1905/1929), *Ciencia y Método* (1908/1929) y *Últimos pensamientos* (1913/1963). Particularmente, algunos capítulos de estas obras tratan sobre geometría y su posible relación con nuestra percepción espacial.[23]

Vamos a dividir las cuestiones tratadas por Poincaré en tres grandes apartados que, como vamos a ver, están íntimamente interconectados: su idea general de convencionalismo, la simplicidad y estrecha relación de la geometría euclidiana con nuestros hábitos, y por último, la idealidad de la geometría y su distinción de nuestra percepción espacial.

En primer lugar, Poincaré argumenta al igual que Helmholtz que los axiomas de la geometría euclidiana no son juicios sintéticos *a priori*, puesto que si lo fueran se habrían impuesto con tanta fuerza en nosotros que nos sería imposible intuir otra geometría que no fuera la euclidiana. Sin embargo, a diferencia de Helmholtz, estos juicios tampoco son puramente empíricos –aunque se basen en hechos experimentales–, ya que los objetos de la geometría, como líneas o puntos, son ideales, a diferencia de los objetos empíricos que son imperfectos; además, si la geometría euclidiana fuera una ciencia experimental estaría sujeta a constantes revisiones, lo cual no se corresponde con lo que podemos comprobar históricamente de este campo (Poincaré 1902/1929, 63-65).

[23] En *Ciencia e hipótesis* dedica la segunda parte del libro al ‘Espacio’, con el capítulo 3, *Las geometrías no-euclidianas*, el 4, *Espacio y geometría*, y el 5, *Experiencia y geometría*; en *El valor de la ciencia* dedica el capítulo 3 a *La noción de espacio*, y el 4 a *Espacio y sus tres dimensiones*; en *Ciencia y método* dedica el libro II a *Razonamiento matemático*, con el capítulo I, *La relatividad del espacio*, el cual fue publicado originalmente en 1907 en la revista de psicología *L’année Psychologique*. Por último, en *Últimos pensamientos*, tenemos el capítulo 2 *Espacio y tiempo*, y el 3, *Por qué el espacio tiene tres dimensiones*. Como el propio Poincaré afirma en estas obras, y podemos ver en la selección de estos capítulos, este fue un tema que estuvo presente durante toda su carrera.

¿Qué son entonces los axiomas de la geometría? Son, precisamente, convenciones;[24] esto es, podemos decidir qué axiomas de la geometría aceptar, o qué tipo de geometría usar –por ejemplo, euclidiana o hiperbólica– dependiendo de en qué contexto la queramos aplicar, o a qué estemos haciendo referencia, evitando siempre que haya contradicciones en los axiomas de la geometría que elijamos o aceptemos. En este sentido, nos dice Poincaré (1902/1929),

> los *axiomas geométricos no son juicios sintéticos* a priori ni hechos experimentales. Son *convenciones*; nuestra elección entre todas las convenciones posibles está *guiada* por hechos experimentales; pero permanece libre y está limitada únicamente por la necesidad de evitar toda contradicción (p. 65, énfasis en el original)

En otras palabras, los axiomas o proposiciones de la geometría no serían empíricos, ni tampoco *a priori*, así como tampoco serían verdaderos ni falsos. Las proposiciones de la geometría se corresponderían con una decisión *conveniente*, la cual está basada en criterios como la simplicidad y comodidad para aplicar la geometría a la experiencia. De esta manera tendríamos *libertad* –que no arbitrariedad– a la hora de elegir las proposiciones de la geometría en base a los criterios que hemos mencionado anteriormente. Esta sería, en resumen, la propuesta convencionalista de Poincaré.

En segundo lugar, aunque tengamos libertad para elegir estos axiomas geométricos, el pensador francés reconoce que la geometría euclidiana es la más simple y cercana a nuestra experiencia cotidiana del espacio, sobre todo en relación con el comportamiento de cuerpos lo suficientemente rígidos y rayos de luz. En relación con esta simplicidad afirma que,

> La geometría euclidiana es y permanecerá la más cómoda:
> 1º Porque es la más simple, y no lo es solamente como consecuencia de nuestros hábitos o de no sé qué intuición directa que tuviéramos del espacio euclidiano; es en sí la más simple, de la misma manera que un polinomio de primer grado es más simple que un polinomio de segundo grado […].

[24] Para Disalle (2006) “los argumentos de Poincaré para el convencionalismo comienzan, de hecho, precisamente donde el argumento empirista de Helmholtz termina” (p. 124). Como podemos observar, Poincaré argumentará contra las ideas de Kant, o en respuesta a las ideas de Kant, así como a las de Helmholtz que acabamos de presentar.

> 2º Porque concuerda bastante bien con las propiedades de los sólidos naturales; esos cuerpos a los cuales se aproximan nuestros miembros y nuestro ojo, y con los que hacemos nuestros instrumentos de medida (Poincaré 1902/1929, 65)

Llega a decir que ha sido por selección natural por lo que nos hemos adaptado a considerar la geometría euclidiana como la más ventajosa, en relación sobre todo a los hábitos que hemos generado según cómo percibimos y actuamos en el mundo (Poincaré 1902/1929, 89; 1908/1929, 420-421). Al igual que vimos con Helmholtz, son estos hechos los que han influido en nuestra consideración de la geometría euclidiana como la más 'natural' o intuitiva a la hora de estudiar matemáticamente el espacio que nos rodea, así como nuestras propias percepciones espaciales. Sin embargo, esta simplicidad y cercanía a nuestras experiencias no la hacen *a priori*, ni la única geometría posible para caracterizar el espacio físico y nuestras percepciones del mismo (Poincaré 1902/1929, 65).

De hecho, señala Poincaré que lo que nosotros consideramos intuitivamente como 'línea recta' está relacionado con nuestra manera de percibir el mundo, sobre todo en relación con los cuerpos rígidos y los rayos de luz. Sin embargo, si viviéramos en otro tipo de espacio, lo que consideraríamos como 'línea recta' se correspondería con una geodésica,[25] debido principalmente a cómo sean nuestras percepciones en ese mundo (Poincaré 1905/1929, 235-237).

Poincaré también empleará diversos experimentos mentales para ilustrar sus argumentos, los dos primeros casi idénticos a los que presenta Helmholtz:

1) si existieran **seres sin grosor**, el tipo de geometría que estos crearían sería diferente a la nuestra, principalmente bidimensional, y relacionada con cómo estos seres perciben su mundo; según el comportamiento de las figuras en ese mundo, su geometría puede desviarse de la euclidiana (Poincaré 1902/1929, 57-58);

[25] Una *geodésica* es la línea de distancia más corta entre dos puntos. Pensemos en el espacio euclidiano: sobre una superficie plana, las geodésicas son rectas, pero sobre una superficie curva no lo son.

2) si **creciéramos en proporción y simultáneamente** tanto nosotros como nuestros instrumentos de medición no seríamos capaces de darnos cuenta de que este cambio ha tenido lugar (Poincaré 1905/1929, 237-239);

3) si existieran **dos mundos diferentes**, A y B, y cada uno de ellos originara un tipo de geometría diferente a la del otro mundo, los habitantes de A pensarían que la geometría de B es errónea, y viceversa. Sin embargo, este tipo de consideración no se relacionaría con la *verdad o falsedad* de estas geometrías, sino con la *percepción* de los habitantes de cada uno de estos mundos y la geometría más adecuada para representar su *entorno* (Poincaré 1908/1929, 417).

En tercer y último lugar, queremos llamar la atención sobre la distinción que Poincaré propone entre geometría del espacio, esto es, cómo percibimos el espacio, y geometría en un sentido matemático.[26] El espacio perceptual dependerá de nuestra percepción visual, táctil y motora, y está construido de acuerdo a la asociación de ideas que obtenemos de nuestra experiencia en el mundo. De ahí que, si viviéramos en otro mundo diferente al nuestro y si tuviéramos unas características físicas diferentes, nuestro espacio perceptual sería otro, y la geometría más conveniente para interpretarlo también (Poincaré 1902/1929, 29; 66-69).

De hecho, Poincaré enfatiza la importancia de nuestra actividad motora para la construcción del espacio, relacionada con las asociaciones psicológicas que hacemos de nuestro espacio restricto –eje de coordenadas de nuestro cuerpo– y el extendido –movimiento de los miembros del cuerpo–. De esta manera, afirma Poincaré que localizar un objeto o punto en el espacio se equipara con representarnos los movimientos a realizar para alcanzarlo, por lo que la noción de espacio, esta vez a diferencia de Helmholtz, no es preexistente a nosotros (Poincaré 1905/1929, 247-248). Afirma que sin nuestro cuerpo no podríamos haber construido la noción de espacio, ya que lo usamos como nuestro propio instrumento de medida para reconstruir, precisamente, el movimiento de los

[26] Sin entrar en detalles –ver capítulo cuarto de *Ciencia e Hipótesis*–, el espacio geométrico es continuo, infinito, tridimensional, homogéneo e isotrópico, mientras que el visual no es homogéneo, solo tiene dos dimensiones, no es isotrópico, etc. De hecho, el espacio táctil y motor –como el mismo Helmholtz mantuvo– están aún más lejos del espacio geométrico.

cuerpos sólidos rígidos (Poincaré 1902/1929, 73; Poincaré 1908/1929, 418). O como dice en otro de sus escritos, "nuestro cuerpo es nuestro primer instrumento de medida" (Poincaré 1913/1963, 17); de hecho, es el instrumento fundamental para construir nuestra noción de espacio.

Entonces, ¿cuál sería la relación entre este espacio perceptual y la geometría? Por un lado, tenemos que tener en cuenta que la geometría trata acerca de sólidos ideales a los que no se puede acceder perceptualmente, como señalamos anteriormente. En relación a esta diferencia, dice Poincaré (1902/1929),

> ¿Qué es un punto en el espacio? Todo el mundo piensa que lo sabe, pero esto es una ilusión. Lo que vemos cuando tratamos de representarnos a nosotros mismos un punto en el espacio es una mancha negra en un papel blanco, una mancha de tiza en una pizarra, siempre un objeto (pp. 89-90)

Pero, aunque sean radicalmente diferentes, es precisamente la experiencia la que nos induce a crear este tipo de concepciones ideales. Esto es, la experiencia o percepciones visoespaciales nos guían a considerar qué geometría es la más conveniente, pero no cuál es la verdadera, ya que nuestra experiencia siempre será con objetos materiales. La conexión entre los objetos materiales e ideales es estipulada, no empírica (Poincaré 1902/1929, 79-81; 1905/1929, 212-214); afirmando por lo tanto que "la experiencia juega un papel indispensable en la génesis de la geometría; pero sería un error concluir de ahí que la geometría es, incluso en parte, una ciencia experimental" (Poincaré 1902/1929, 79).

En este sentido, defiende la idea de una geometría primitiva, relacionada sobre todo con nuestra percepción espacial, la cual sería un tipo de geometría ingenua, tosca y aproximada. Por otro lado, la geometría en un sentido matemático sería precisa, y nacerá de esta geometría primitiva y de nuestra capacidad para construir conceptos matemáticos. Los postulados geométricos han de ser precisos para evitar contradicciones, pero los postulados no serán verdaderos o falsos, sino convenientes para la tarea que queramos realizar (Poincaré 1908/1929, 428).[27] Por lo tanto, concluye Poincaré que "la geometría

[27] Esta idea de una geometría primitiva está estrechamente vinculada con nuestra distinción de los tres niveles de competencia cognitiva en relación con la cognición geométrica, la cual presentaremos en el próximo capítulo. En nuestro caso, hablaremos de la distinción entre protogeometría y geometría en sentido matemático, con distinciones similares a las que vemos aquí defendidas por Poincaré.

es una convención, una especie de arreglo entre nuestro amor a la simplicidad y nuestro deseo de no apartarnos demasiado de los que nos enseñan los instrumentos" (Poincaré 1913/1963, 17-18).

Para terminar esta sección, y antes de pasar a los estudios actuales en cognición matemática, vamos a resaltar los puntos clave para nuestro trabajo de las posturas de estos investigadores:

1) Ambos establecen una clara diferencia entre lo que es el espacio –ya sea preexistente o innato, como propone Helmholtz, o íntimamente relacionado con nuestro cuerpo y acción motora, como defiende Poincaré– y la matematización de ese espacio, que se correspondería con lo que denominamos *Geometría* en un sentido propiamente matemático;

2) Poincaré vinculará de manera explícita un tipo de *geometría primitiva*, o protogeometría en nuestra propia terminología, con nuestra percepción espacial de los objetos que nos rodean. Para pasar, precisamente, de este tipo de conocimiento tosco, ingenuo e imperfecto al tratamiento teórico e ideal de la geometría en sentido matemático será necesaria la participación de nuestra capacidad para construir conceptos matemáticos;

3) para la construcción de esta protogeometría es vital considerar no solo nuestra percepción visual y espacial, sino también nuestra experiencia con el medio, introduciendo nuestras experiencias táctiles y motoras –Helmholtz lo hará sobre todo en relación con el conocimiento geométrico, y Poincaré con el protogeométrico–;

4) además de incluir el conjunto de percepciones visoespaciales, táctiles y motoras, para ambos pensadores el uso de herramientas, ya sean físicas como las reglas, o nuestros propios órganos sensoriales como nuestro ojo o el propio cuerpo, son vitales para el desarrollo de los axiomas de la

geometría. Aunque Helmholtz presentará una visión empirista de los mismos, y Poincaré convencionalista;[28]

5) por último, ambos autores señalan que la geometría euclidiana es solo una de las posibles geometrías de las que disponemos para geometrizar nuestro espacio perceptual. El que nos parezca más intuitiva está relacionado con el hecho de que es la que mejor se adapta a nuestras propias experiencias y manera de percibir el espacio, así como con su simplicidad matemática. Sin embargo, ambos autores optan por una caracterización no universal ni innatista de la misma, sino íntimamente vinculada con nuestro desarrollo y con las prácticas que llevamos a cabo en el mundo.

Estas son algunas de las características más importantes del pensamiento de estos dos autores que, como decíamos, son de los primeros que de una manera precisa, sistemática y explícita investigan las relaciones que pueden existir entre nuestras capacidades cognitivas y la generación de un cuerpo sofisticado de conocimiento matemático, que sería la geometría.

Como hemos mostrado, estos autores surgieron en un contexto histórico determinado, en el que precisamente la aceptación de las geometrías no-euclidianas, así como el desarrollo y establecimiento de métodos empíricos en fisiología y psicología, permitieron que se llevaran a cabo nuevos planteamientos teóricos y experimentales para caracterizar la noción de espacio, nuestra percepción de este, así como su posible matematización.

3. Surgimiento de las ciencias cognitivas y su impacto en los estudios sobre cognición matemática

En esta última sección pasamos de dos autores enmarcados en el contexto en el que la psicología emerge como ciencia, a un área que surge a raíz de la ‘revolución cognitiva’ a mediados del siglo XX en este campo de conocimiento. A partir de dicha revolución

[28] Veremos en los capítulos de la parte II de este trabajo que las herramientas de medición y la creación y estandarización de unidades de medición serán fundamentales para el desarrollo de este tipo de conocimiento en distintas civilizaciones de la antigüedad.

surgió una nueva concepción de los fenómenos psicológicos influenciada por los desarrollos de la teoría de la información, cibernética o ciencias de la computación. Para 1970 esta nueva área estaba bien establecida, contando con un número suficiente de profesionales dedicados a la misma, departamentos, revistas especializadas, etc. (Miller 2003; Hergenhahn & Henley 2014, 592-606).

Desde su emergencia, las ciencias cognitivas adquirieron el compromiso metodológico de investigar el surgimiento y desarrollo de nuestras capacidades cognitivas de manera interdisciplinar. Para ello, los fenómenos cognitivos serían investigados desde seis áreas de conocimiento: por un lado, tres áreas centrales y con mayor peso, que serían la psicología, la lingüística y las ciencias de la computación; por otro lado, tres áreas periféricas, como la antropología, la filosofía y las neurociencias (Miller 2003). Incluso hoy día, si nos fijamos en la descripción de la audiencia y ámbito de los trabajos publicados en dos revistas especializadas en ciencias cognitivas, como *Cognitive Science* o *Trends in Cognitive Sciences*, podemos ver que en ambas se enfatiza la importancia de la colaboración de áreas como la antropología, filosofía o pedagoría para las ciencias cognitivas.[29]

Sin embargo, este ideal interdisciplinar no se ha reflejado en la práctica. Por un lado, Núñez y sus colaboradores (2019) han llevado a cabo una serie de análisis bibliométricos y socio-institucionales con los que han comprobado que las ciencias cognitivas han estado dominadas, generalmente, por la psicología. Por nombrar un ejemplo, de los 1.020 artículos publicados en *Cognitive Science* desde el año 2000 hasta nuestros días, solo el 1% de los autores eran antropólogos, y el 3% filósofos. Por otro lado, en el caso de los estudios en cognición matemática, Beller y colaboradores (2018) enfatizan el ‛reto cultural' al que se enfrenta esta área; esto es, llaman la atención sobre el hecho de que en la agenda investigadora de los estudios en cognición matemática (cf. Alcock et al. 2016) no se incluye generalmente el estudio de las bases culturales de nuestras habilidades y conocimiento matemático.[30]

Como veremos a lo largo de este trabajo, y sobre todo en el próximo capítulo, esta falta de aproximación interdisciplinar a la hora de analizar e investigar nuestras

[29] Ver https://onlinelibrary.wiley.com/page/journal/15516709/homepage/forauthors.html, web de *Cognitive Science*, así como https://www.cell.com/trends/cognitive-sciences/aims-, web de *Trends in Cognitive Sciences*. Consultado el 23/09/2021.

[30] Lo que podría traducirse en la no inclusión de perspectivas e investigadores de áreas como la antropología, arqueología o filosofía.

capacidades cognitivas en relación con el conocimiento matemático tienen un impacto negativo en el tipo de análisis, explicaciones y marcos teóricos propuestos por los científicos cognitivos.

A continuación, vamos a presentar una visión general de los estudios en cognición matemática, y analizaremos con cierto detalle una propuesta particular dentro de este campo conocida como la teoría CKS.[31]

3.1 Primacía de los estudios en cognición numérica o aritmética

Los estudios en cognición matemática tratan de analizar, determinar y entender las capacidades y habilidades cognitivas relacionadas con nuestra forma de comprender y desarrollar el conocimiento matemático. Su enfoque puede variar dependiendo de la pregunta o cuestión que se quiera tratar, como qué áreas del cerebro se vinculan con este tipo de habilidades, trastornos psicológicos que afecten a la comprensión y desarrollo de habilidades matemáticas, impacto del uso de instrumentos o lenguaje en nuestra capacidad matemática, etc. (cf. Campbell 2005).[32]

Los estudios en cognición matemática están teniendo un desarrollo notable dentro de las ciencias cognitivas. Por ejemplo, en los últimos años se han publicado importantes volúmenes generales sobre estas cuestiones, como los editados por Campbell (2005), Dehaene y Brannon (2011), Gilmore et al. (2018), o la serie sobre 'Cognición y Aprendizaje Matemático' editada por Berch, Geary y Koepke, con cinco volúmenes

[31] Somos conscientes de que existen autores o corrientes dentro de la psicología que han desarrollado otras propuestas en relación al desarrollo de nuestras habilidades matemáticas que han sido importantes histórica y teóricamente. En particular, dos ausencias marcadas son las de los psicólogos Jean Piaget (1896-1980) y Lev Vygotsky (1896-1934), autores cuyos trabajos siguen siendo influyentes en estudios sobre desarrollo y educación matemática (Smith et al. 1997), arqueología cognitiva (Wynn 1985), o cuyos desarrollos conceptuales siguen teniendo impacto hoy día, como la noción de "andamiaje cultural" propuesta por Vygotsky que, como veremos, es clave para nuestro trabajo.

[32] Por ejemplo, Campbell (2005) nos presenta algunas preguntas que estos trabajos tratan de resolver, como "¿cómo representa la mente el número y realiza cálculos matemáticos?, ¿qué subyace al desarrollo cognitivo de las habilidades numéricas y matemáticas?, ¿qué factores afectan al aprendizaje de los conceptos y procedimientos numéricos?, ¿cuáles son las bases biológicas del conocimiento del número?, ¿comparten los humanos y otros animales representaciones y procesos numéricos similares?" (p. xiii).

publicados hasta la fecha.[33] Por otro lado, tal y como muestran Gilmore et al. (2018, 2-3), si llevamos a cabo una búsqueda en *Web of Science* de los términos ʽCognición Matemática' o ʽCognición Numérica', se puede comprobar que ha habido un incremento del número de resúmenes en los que alguno de estos términos se incluye, pasando de seis artículos publicados en 1992 a más de 100 en 2016.

Sin embargo, tenemos que resaltar un hecho singular dentro de esta área: aunque estos estudios y área se denomine ʽEstudios en Cognición *Matemática*', el foco de interés principal suele estar en cuestiones relacionadas con el concepto de número y nuestras habilidades aritméticas, existiendo un menor interés y número de trabajos acerca de las habilidades espaciales y su posible vinculación con la cognición geométrica.

Por nombrar algunos casos que ejemplifiquen esta situación, en la obra editada por Campbell (2005) de los 27 capítulos, 23 tratan sobre cognición numérica y ninguno trata específicamente sobre cognición geométrica. Por otro lado, en la obra de Gilmore et al. (2018), de los 11 capítulos, 9 tratan sobre cognición numérica y ninguno sobre geométrica. Además, de los cinco volúmenes de la serie sobre ʽCognición y Aprendizaje Matemático' –ver nota 33–, solo un capítulo trata específicamente sobre geometría, y en otro se trata sobre la teoría CKS en relación con la cognición numérica y geométrica. Por otro lado, también tenemos que señalar que desde 2015 existe una revista dedicada exclusivamente a la cognición numérica, *Journal of Numerical Cognition*, mientras que no existe ninguna dedicada exclusivamente a la cognición geométrica.

Esto también se refleja en las descripciones de esta área tal y como es presentada en estas obras. Por ejemplo, Campbell (2005) dice en el prefacio a su obra que los estudios en cognición matemática son aquellos "interesados por los procesos cognitivos y neurológicos que subyacen a nuestras habilidades numéricas y matemáticas" (p. xiii); o Gilmore et al. (2018), quienes también afirman explícitamente que "en gran medida este trabajo se ha centrado en nuestra habilidad para contar y la aritmética, más que en temas matemáticos más generales" (p. 3).

[33] Estos son: Vol. 1, *Orígenes evolutivos y desarrollo temprano del procesamiento numérico*; Vol. 2, *Desarrollo de la cognición matemática*; Vol. 3, *Adquisición de habilidades aritméticas complejas y conceptos matemáticos de orden superior*; Vol. 4, *Lenguaje y cultura en la cognición matemática*; y Vol. 5, *Los fundamentos cognitivos para mejorar el aprendizaje matemático*. Consultar la información acerca de esta serie en la web de Elsevier, https://www.elsevier.com/books/book-series/mathematical-cognition-and-learning-print, consultada el 23/09/2021.

Podemos concluir que los estudios en cognición geométrica han tenido una menor importancia dentro de esta área, y por lo tanto su desarrollo ha sido más tímido en comparación con los que tratan acerca de nuestra cognición numérica o aritmética. Esto implica, en última instancia, que se han llevado a cabo un menor número de experimentos, así como análisis de las implicaciones teóricas y prácticas de estos.

Sin embargo, existe una propuesta teórica dentro de las ciencias cognitivas que ha prestado especial atención al fenómeno de la cognición geométrica, que es la teoría CKS, llevando a cabo un número importante de estudios empíricos y análisis teóricos en relación a esta. Asimismo, esta propuesta particular posee cierto prestigio o impacto académico dentro de los estudios actuales sobre cognición matemática.

3.2 Presentación general de la teoría CKS

La teoría CKS es una teoría o programa de investigación innatista y modularista que defiende que nuestras habilidades cognitivas están fundamentadas en un número pequeño de módulos o sistemas nucleares de conocimiento innatos.[34] A medida que el sujeto se va desarrollando en las distintas etapas del crecimiento, estos módulos irán combinándose unos con otros, logrando así desarrollar todas nuestras capacidades y logros cognitivos.

En particular, se ha propuesto que son cuatro los sistemas nucleares de conocimiento innatos que poseemos al nacer, dedicados a la representación de 1) objetos y sus interacciones mecánicas; 2) colecciones –*sets* de cuatro o menos cosas– y sus relaciones numéricas de orden, adición y sustracción;[35] 3) agentes, sus acciones y relaciones sociales; y 4) espacio y sus relaciones geométricas (Spelke 2000; Spelke & Kinzler 2007). Otras autoras consideran que son más bien tres las áreas en las que estos módulos tendrían poder representativo y codificador: 1) objetos, pudiendo identificarlos de hasta un tamaño mediano y una distancia media entre ellos, e incluyéndose otras

[34] Ver Hohol (2020, 56-59) para una discusión general acerca de las propuestas modularistas, su evolución conceptual, algunas críticas a las mismas, así como la equivalencia que existe entre la noción de módulo y Sistema Nuclear de Conocimiento.

[35] Algunos investigadores (Núñez 2017; 2021; Pantsar 2019) han llamado la atención sobre la confusión entre nuestra capacidad innata para distinguir aproximadamente cantidades con cuestiones matemáticas sofisticadas y teóricas como “orden, adición y sustracción”. Bajo nuestro punto de vista este tipo de confusiones terminológicas también ocurren en el campo de la “cognición geométrica”. Lo veremos con más detalle en el próximo capítulo.

características de los mismos como sus relaciones y situación espacial, interacciones físicas, etc.; 2) agentes; y 3) números (Carey 2009a).[36]

Por otro lado, algunas de las características generales de estos módulos es que son *automáticos*, procesan la información *rápidamente*, son *específicos* para un dominio o tarea, y son *encapsulados*, esto es, un módulo solo procesa un tipo de información.[37] Estas características hacen referencia principalmente al hecho de que cada uno de estos módulos o sistemas nucleares de conocimiento sería responsable de representar ciertas entidades o procesos, o de solucionar problemas específicos a esas entidades o procesos (cf. Twyman & Newcombe 2010; Horst 2016, 46-56). Por ejemplo, el módulo espacial o "geométrico" (*sic*) sería responsable únicamente de caracterizar y tratar con problemas en relación con el espacio y su configuración geométrica, obviando otras características no geométricas del medio u objetos como serían los colores o texturas (Spelke et al. 2010; Dillon & Spelke 2015).

Por otro lado, a través de una serie de experimentos, que presentaremos posteriormente, se han ofrecido pruebas de que estos módulos están presentes en bebés humanos de manera innata, así como en diferentes animales no humanos como peces, pollos, ratas o incluso insectos (cf. Spelke & Lee 2012; Tommasi et al. 2012). Se infiere de esta manera que estos CKS tienen una larga historia evolutiva, enfatizando sobre todo su antigüedad filogenética y pronto desarrollo ontogenético.

Algunas de las investigaciones dentro de esta propuesta CKS han seguido el conocido como 'Programa de Carey' (Carey 2009a), en el que se establecen tres cuestiones principales para entender nuestro desarrollo cognitivo: 1) determinar los CKS que proveerán los conceptos primitivos sobre los que se fundamentará el conocimiento y funciones cognitivas avanzadas; 2) identificar los cambios que tienen lugar en el desarrollo, los cuales pondrán de manifiesto las diferencias y similitudes entre los sistemas cognitivos de bebés, infantes y adultos; y 3) caracterizar los procesos de cambio

[36] No vamos a discutir las diferencias sutiles que existen entre estas propuestas u otras similares dentro de la teoría CKS ya que independientemente del número de módulos básicos propuestos estos suelen servir para captar y representar cognitivamente fenómenos similares.

[37] Al igual que señalamos en la nota anterior, estas características varían entre una propuesta y otra dentro de la teoría CKS. Twyman & Newcombe (2010, 1317) han llegado a comparar las propuestas modularistas con el relato de Hércules y su lucha contra la hidra, a la cual le aparecían más cabezas cuando aquél se las cortaba; esto es, cuando alguno de estos módulos innatos y sus caracterizaciones se muestran poco convincentes o inadecuados, son sustituidos por otros.

conceptual que causan la emergencia o formación de los conceptos de los infantes a partir de los recursos cognitivos de los bebés (cf. Spelke et al. 2010).

A continuación, nos vamos a centrar en dos de los cuatro módulos propuestos por estas científicas cognitivas, los cuales están vinculados con nuestra cognición matemática. Estos son el CKS numérico o aritmético y el CKS espacial o geométrico, los cuales presentaremos en relación con los tres puntos del programa de Carey.

3.2.1 Teoría CKS y cognición matemática

Antes de analizar estos CKS queremos llamar la atención sobre dos cuestiones generales. En primer lugar, vamos a presentar con mayor detalle y énfasis los experimentos llevados a cabo en relación con el CKS geométrico, ya que este trabajo trata particularmente sobre la cognición geométrica y emergencia del conocimiento geométrico. En segundo lugar, en este capítulo vamos a hacer una presentación general de estos CKS, siendo en el siguiente donde elaboraremos nuestras críticas a dos propuestas particulares en relación con este CKS geométrico.

Cuestión 1

Determinación de los CKS que proveerán los conceptos primitivos sobre los que nuestra cognición avanzada y conocimiento se fundamentarán

CKS Geométrico

Nuestro CKS "geométrico" se compone de dos módulos menores: 1) el *navigational module*, que vamos a denominar en este trabajo NCS –por las siglas *Navigational Core System,* Sistema Nuclear para la Orientación; y 2) el *landmark module,* que vamos a denominar OCS – *Object Core System*, Sistema Nuclear para los Objetos–.

El NCS es usado para la percepción y codificación de la información espacial a gran escala, de entornos principalmente tridimensionales, y empleado sobre todo para orientarnos en el medio. Por otro lado, el OCS es usado para la percepción y codificación de la información espacial a pequeña escala, empleado principalmente para el reconocimiento de formas en dos dimensiones, y la descripción y categorización de objetos manipulables de tres dimensiones.

Una cuestión crucial para las propuestas que trataremos en el próximo capítulo es el tipo de información espacial que cada uno de estos módulos codifica. Particularmente, se ha comprobado experimentalmente que el NCS representa sobre todo distancias –próximo o distante– y relaciones direccionales o sentidos –izquierda o derecha, por ejemplo– cuando nos orientamos por el medio, y obvia la información angular; por otro lado, el OCS representa sobre todo los ángulos y distancias de los objetos y formas a pequeña escala, y obvia la información acerca del sentido (Spelke et al. 2010; Spelke & Lee 2012; Dillon et al. 2013; Dillon & Spelke 2015; Hohol 2020, 53-78).

CKS Numérico

El CKS numérico también se compone de dos módulos menores: 1) el Sistema de Individuación Paralela –PIS, por sus siglas en inglés *Parallel Individuation System*–, también llamado Sistema de Seguimiento de Objetos –OTS, *Object Tracking System*–; y 2) el Sistema Numérico Aproximativo –ANS, *Approximate Number System*–.

El OTS se relaciona con una capacidad innata bautizada en la literatura cognitiva como 'subitizar', que es nuestra capacidad para determinar rápidamente y de manera precisa la cantidad de objetos que tenemos frente a nosotros sin tener que contar de forma consciente. Esta capacidad está restringida a numerosidades discretas, y se limita a dos objetos en recién nacidos, tres en bebés lactantes, y hasta cuatro en adultos.

Por otro lado, el ANS se relaciona con nuestra capacidad para estimar la numerosidad de un conjunto de objetos o elementos sin tener que contar conscientemente, y poder distinguir rápida y espontáneamente entre dos grupos cuál de los dos tiene el mayor tamaño o número de elementos respecto al otro. Como vemos, se relaciona con estimaciones no discretas y nos permite representar aproximadamente el valor cardinal de un conjunto (Xu 2003; Feigenson et al. 2004; Dehaene 2011; Coubart et al. 2014).

Cuestión 2

Identificar los cambios que han tenido lugar durante nuestro desarrollo; esto es, determinar qué información puede codificar un humano adulto que, sin embargo, no puede un bebé

CKS Geométrico

Cada uno de los módulos menores estaría limitado, como ya indicamos brevemente, en cuanto a su poder de representación. Por un lado, ninguno de estos módulos menores es capaz de representar la información a pequeña y gran escala a la vez, sino que cada uno es usado en uno de estos ámbitos específicos; por otro lado, ninguno de los dos módulos menores puede codificar a la vez las *tres propiedades fundamentales de la geometría euclidiana*, que son la de ángulo, distancia y sentido o relaciones direccionales.[38] Como vimos, el NCS no codifica la información angular del medio cuando tenemos que orientarnos o reorientarnos por este, y el OCS obvia la información acerca de la distancia a la hora de reconocer y categorizar objetos y formas espaciales.

Por otro lado, los humanos adultos sí que son capaces de codificar estas tres propiedades, de ahí que podamos afirmar que en algún momento de nuestro desarrollo –cuestión tres– estos módulos se combinan y nos permiten, precisamente, codificar y percibir estas tres propiedades fundamentales del espacio (Spelke et al. 2010; Spelke & Lee 2012; Dillon et al. 2013; Dillon & Spelke 2015; Hohol 2020, 53-78).

CKS Numérico

El OTS está limitado en cuanto a que, por un lado, no nos permite representarnos valores cardinales distintos a uno[39], y por otro, puesto que su poder de representación se limita a tres o cuatro elementos como máximo. Se ha comprobado experimentalmente que, a la hora de elegir entre 1 *vs.* 2, o 2 *vs.* 3 galletas, los infantes elegirán la mayor cantidad de las mismas. Sin embargo, si la elección está entre 3 *vs*. 4 o 2 *vs.* 4, las elegirán de manera azarosa, precisamente por esta limitación.

Por otro lado, el ANS está limitado por una imprecisión en nuestra estimación de las cantidades que se ha podido comprobar que obedece la ley de Weber y Fechner; esto es, "que la discriminación exitosa está determinada por la proporción entre dos números, y no por su diferencia absoluta" (Xu 2003, B23); pongamos un ejemplo para que este último punto quede claro. En experimentos llevados a cabo y analizados tanto por Xu (2003) como por Feigenson et al. (2004), entre otras, se ha comprobado que un bebé de seis meses puede discriminar con éxito entre un conjunto de 8 y otro de 16 elementos, pero no entre uno de 8 y otro de 12. Además, los bebés suelen fallar en su estimación cuando las numerosidades son muy pequeñas. Por último, decir que el límite en la

[38] Este es uno de los puntos que presentaremos con mayor detalle en el próximo capítulo, y es que estas autoras afirman que la geometría euclidiana es "un sistema formal para la caracterización de formas bidimensionales (2D) de acuerdo a *distancia, ángulo*, y relaciones *direccionales* entre sus partes" (Spelke et al. 2010, 864, énfasis en el original).

[39] Tal y como explica Xu (2003), que con el OTS no podamos representarnos valores cardinales distintos a uno significa que este sistema se representaría una colección de dos objetos o elementos como "un objeto, otro objeto", y no como "un objeto, dos objetos".

proporción entre ambas numerosidades aumenta a medida que crecemos (Xu 2003; Feigenson et al. 2004; Dehaene 2011; Coubart et al., 2014); señalando Spelke y colaboradoras (2010, 875) que esta proporción aumenta de .33 en recién nacidos a .88 en adultos; es decir, que la capacidad de discriminación mejora sustancialmente.

Cuestión 3

Caracterizar los procesos de cambio conceptual que han llevado a la formación de los sistemas conceptuales durante nuestro desarrollo

CKS Geométrico

Existen en la actualidad dos hipótesis principales para explicar la unión durante nuestro desarrollo de los dos módulos menores. La primera de las hipótesis afirma que, mediante el uso de herramientas cognitivas como mapas o modelos a escala, esta combinación se produce. Por ejemplo, señalan Spelke y colaboradoras (2010) que “sugerimos que este proceso productivo y combinatorio depende en parte de artefactos exclusivamente humanos y culturalmente variables: imágenes, modelos y mapas” (p. 865). La segunda de las hipótesis sostiene que gracias al lenguaje se produce la unión entre estos dos módulos menores –en la línea de Carey (2009a)–. Esto es, cuando los niños son capaces de producir sistemáticamente expresiones relativas al espacio, tales como distinguir entre izquierda y derecha (Shusterman & Spelke 2005; Pyers et al. 2010). O incluso se combinan ambas hipótesis, y se afirma que la unión de ambos módulos se producirá cuando los niños consigan dominar sistemas simbólicos generales como serían el *lenguaje* y el uso de *mapas* (Landau & Lakusta 2009; Spelke & Lee 2012). No existe en la actualidad consenso científico en relación a estas hipótesis.

CKS Numérico

Algunos investigadores ponen en duda en la actualidad si el OTS es usado a la hora de desarrollar nuestras capacidades numéricas o aritméticas a un nivel simbólico. Por ejemplo, tras llevar a cabo una revisión general de los resultados experimentales, Feigenson et al. (2004) señalan que, “en la actualidad, por lo tanto, no se sabe si el segundo sistema nuclear [OTS] es reclutado en tareas numéricas simbólicas” (p. 311); por otro lado, en la revisión general de la teoría CKS que llevan a cabo Spelke y Lee (2012), señalan que “al menos uno de ellos –el sistema numérico aproximado– contribuye a la maestría de la aritmética simbólica en niños de edad escolar” (p. 2790).

Otros investigadores, sin embargo, consideran que no está tan clara la primacía del ANS y que el OTS no tenga relación con el posterior desarrollo de nuestras habilidades aritméticas a un nivel simbólico. Carey y colaboradores (2017) señalan que "si bien es sin duda importante para el razonamiento matemático, concluimos que el ANS no es la base de los significados de los primeros símbolos explícitos para los enteros positivos" (p. 254). Por otro lado, Cheung y Le Corre (2018) argumentan que podrían ser dos las rutas que nos lleven al conocimiento de las relaciones numéricas, "la operaciones de correspondencia uno-a-uno definidas sobre representaciones de objetos creadas con la individuación paralela, y las comparaciones de los tamaños de las magnitudes mentales creadas con el ANS" (p. 403).[40]

3.2.2 Evidencia experimental de la teoría CKS

A continuación, vamos a presentar los tres tipos principales de experimentos que se han llevado a cabo a la hora de analizar y caracterizar los dos módulos geométricos menores y el tipo de información espacial que cada uno de ellos prioriza.

El primer tipo de experimento se basa en lo que podemos denominar 'Paradigma de la Desorientación'. Consiste en situar al sujeto experimental –que pueden ser niños de entre 18 y 24 meses, así como animales no-humanos como peces, ratas, etc.– en un cuarto con una forma geométrica determinada. A continuación, se le presenta en una de las esquinas de la habitación un premio –ya sea comida o un muñeco, dependiendo del sujeto experimental–. Posteriormente se le saca de la habitación, se le desorienta, y se le vuelve a introducir para ver hacia donde se dirige a la hora de buscar el premio o recompensa que se le había mostrado (Cheng 1986; Lee et al. 2013).[41]

Lo que se pudo comprobar fue que, a la hora de orientarse por la habitación, todos los sujetos experimentales usaron de manera automática y rápida la información "geométrica", como la forma de la habitación, e ignoraron la información de las pistas representacionales de las que disponían, como el uso de figuras o colores diferentes en cada una de las paredes de la habitación. Además, la información usada para la

[40] Ver las revisiones generales de Sinaceur (2016) y Pantsar (2019).

[41] Como la mayoría de experimentos en psicología y ciencias cognitivas, se requiere cierto entrenamiento del sujeto experimental para llevar a cabo este tipo de experimentos, sobre todo en relación con los animales no-humanos. En el capítulo 2 veremos que una de las críticas a los experimentos en los que se dice probar la capacidad cognitiva matemática en animales no-humanos es el entrenamiento excesivo de estos.

reorientación fue tanto la medida como dirección de las paredes –como corresponde al NCS–, y se obvió la información angular de las mismas.

Por último, es a partir de los 5 años cuando los infantes comienzan a usar o confiar más en la información no geométrica, como las pistas representacionales situadas en las distintas paredes de la habitación. Esto pone de manifiesto que los bebés humanos usan la información relativa a formas, y no la representacional, al igual que hacen los animales no-humanos testados en este primer tipo de experimento. Por lo tanto, como animales no-humanos y bebés humanos usaron de manera automática este tipo de información a la hora de reorientarse, quedaría probado su carácter innato y antigüedad filogenética (Cheng 1986; Lee & Spelke 2010; Spelke & Lee 2012).

El segundo tipo de experimento consiste en comprobar si niños y niñas pueden interpretar correctamente un mapa. Particularmente, en estos mapas se representará de manera esquemática y lo más abstracta posible un cuarto con una forma geométrica determinada, representando únicamente figuras en dos dimensiones y evitando los elementos icónicos. Entonces, se les enseña estos mapas a los sujetos experimentales, y se les pide que coloquen el objeto, como un muñeco, en el lugar de la habitación que creen que está representando el mapa.

Se pudo comprobar en este segundo tipo de experimento que los niños y niñas menores de cinco o seis años no consiguieron extraer adecuadamente la información angular del mapa. Es precisamente a partir de esta edad cuando comienzan a extraer de manera fiable la información acerca de direcciones, distancias y ángulos –es decir, que consiguen integrar adecuadamente toda la información geométrica codificada por ambos módulos menores–. Por otro lado, para interpretar estos mapas los niños usan sobre todo la información de dirección y distancia tal y como hacen a la hora de orientarse –correspondiente al NCS– (Dillon et al. 2013; Winkler-Rhoades et al. 2013; Dillon & Spelke 2015; Huang & Spelke 2015).

Otro tipo de experimento relacionado con este consiste en mostrar una imagen de un objeto, más que un mapa de un medio abierto, para ver cómo lo interpretan los sujetos experimentales. Se pudo comprobar que para interpretarlos los sujetos se basaron principalmente en su longitud o distancia e información angular. Esto es, el tipo de información espacial que codificamos con el OCS (Dillon et al. 2013; Dillon & Spelke 2015).

El tercer tipo de experimento está relacionado con una serie de pruebas espaciales dentro del 'Paradigma de detección del Desviado/Diferente', pruebas que se realizan con dos poblaciones con las siguientes características: por un lado, poblaciones con educación formal en matemáticas, habituadas al uso de mapas y otros instrumentos matemáticos como regla y compás, y cuya lengua posee un vocabulario espacial suficientemente rico; por otro lado, grupos sin educación formal en matemáticas, no habituadas al uso de este tipo de instrumentos matemáticos y con un vocabulario espacial pobre, como poblaciones indígenas o de zonas en vías de desarrollo, como los MundUrukú del amazonas brasileño o parte de la población de Senegal (Dehaene et al. 2006; Izard et al. 2011; Van der Ham et al. 2017).

Este tercer tipo de experimento lo vamos a analizar y presentar detalladamente en el capítulo siguiente, ya que a partir de éste se infiere la posibilidad de hablar de la universalidad de las intuiciones geométricas. Muy brevemente, lo que se trata de comprobar es si ambas poblaciones pueden resolver estas tareas espaciales adecuadamente de manera independiente a la educación, uso de instrumentos matemáticos y posesión de suficiente vocabulario en relación con la organización espacial.

Por otro lado, Spelke et al. (2010) hablan de la existencia de una ʽGeometría Natural'[42], fundamentada precisamente en estos dos módulos menores geométricos, y equiparada a la geometría euclidiana, ya que el módulo geométrico codifica las relaciones de distancia, ángulos y relaciones direccionales, que son las relaciones espaciales caracterizadas formalmente por la geometría euclidiana –ver nota 38–. Estas caracterizaciones cognitivas de carácter innatista del conocimiento geométrico serán objeto de crítica, para ofrecer una caracterización alternativa, en el próximo capítulo.

[42] Término que vinculan explícitamente con la concepción de geometría natural de Descartes, y con la tradición innatista del conocimiento matemático en la historia de la filosofía por autores como Platón o Kant (cf. Spelke et al. 2010).

Capítulo 2

Las bases cognitivas y culturales del conocimiento geométrico: un programa interdisciplinar de investigación

Como hemos mostrado anteriormente, la teoría CKS es una de las aproximaciones más influyentes dentro de los estudios actuales sobre cognición geométrica. Sin embargo, esto no quiere decir que sea la única que haya elaborado una caracterización de cómo surge y se desarrolla el conocimiento geométrico y su posible relación con nuestra cognición visoespacial. En este capítulo, vamos a elaborar un programa de investigación alternativo a la teoría CKS, enfatizando el carácter interdisciplinar de este tipo de estudios, y centrándonos en el desarrollo arqueo-histórico del conocimiento geométrico.

Para ello, presentaremos en primer lugar dos propuestas dentro de la teoría CKS que comparten una concepción innatista del conocimiento geométrico: por un lado, la tesis de la universalidad de las intuiciones geométricas; por otro, la propuesta acerca de la 'Geometría Natural' (sec. 1). A continuación, mostraremos algunas de las críticas que se han elaborado en torno a estas propuestas, así como sobre la teoría CKS, desde diversas áreas de estudio (sec. 2).

Tras presentar estas críticas, mostraremos una serie de aproximaciones alternativas a la teoría CKS, las cuales establecen una distinción clara entre nuestras capacidades cognitivas básicas, como la cognición cuántica o visoespacial, y el posterior desarrollo del conocimiento matemático y la cognición numérica y geométrica. Dentro de este marco general desarrollaremos nuestra propuesta acerca de los 'Tres Niveles de Competencia' en relación con la cognición visoespacial y geométrica (sec. 3).[1]

Finalmente, tras caracterizar estos tres niveles, presentaremos cómo se puede llevar a cabo una investigación interdisciplinar de los orígenes arqueo-históricos del conocimiento protogeométrico y geométrico, incluyendo algunos elementos de la filosofía de las prácticas matemáticas y la arqueología e historia cognitiva (sec. 4).

[1] Esta propuesta la hemos elaborado José Ferreirós y yo mismo en una serie de artículos (Ferreirós & García-Pérez 2018; 2020), y también han sido importante las ideas y propuestas desarrolladas por Valeria Giardino (2016), con la que hemos colaborado estrechamente durante estos años.

1. Teoría CKS y el innatismo del conocimiento geométrico

En esta primera sección vamos a presentar dos de las principales hipótesis que se han elaborado acerca de la relación entre nuestras capacidades cognitivas innatas, relacionadas principalmente con la existencia y caracterización del CKS geométrico, y el posterior desarrollo del conocimiento geométrico en un sentido matemático.

1.1 La universalidad de las intuiciones geométricas

Vamos a presentar en primer lugar dos de los principales trabajos en los que se basan los científicos cognitivos para concluir que el ser humano, independientemente de su cultura o formación académica, posee intuiciones geométricas universales.

El primero es el trabajo de Dehaene y colaboradores (2006), en el que comparan cómo resuelven ciertas tareas espaciales los MundUrukú, población indígena de la región amazónica sin educación formal en matemáticas, no habituada al uso de instrumentos matemáticos, y con un vocabulario aritmético y geométrico pobre, con un grupo de control, que son niñas y adultos de Estados Unidos.

La pregunta principal que guía este estudio es "si los principios conceptuales de la geometría son inherentes a la mente humana, estudiando [para comprobarlo] el *conocimiento geométrico espontáneo* de los MundUrukú" (Dehaene et al. 2006, 381, énfasis añadido). Para probar esta hipótesis llevan a cabo dos experimentos, de los que vamos a presentar el primero, basado en el paradigma de detección del desviado/diferente.[2] Particularmente, querían probar con este primer experimento "la comprensión intuitiva de los MundUrukú de los *conceptos básicos de la geometría*, incluyendo puntos, líneas, paralelismo, figuras, congruencia y simetría" (Dehaene et al. 2006, 381, énfasis añadido).

En particular, diseñaron un total de 45 pruebas, de las que vamos a presentar cuatro a continuación (Img. 2.1). La prueba consistía en elegir cuál de las seis imágenes era la desviada o diferente al resto, y por lo tanto, no instanciaba el concepto geométrico

[2] En el segundo experimento se observa cómo la población MundUrukú usa o entiende la información geométrica de un mapa abstracto –segundo tipo de experimentos–. Tanto niños como adultos MundUrukú resolvieron adecuadamente los ejercicios en relación con estos mapas, con un porcentaje de aciertos similar al de niños estadounidenses, y observándose una mejora significativa en el desempeño en esta tarea solo en los adultos estadounidenses (Dehaene et al. 2006).

representado en las otra cinco imágenes. Los MundUrukú respondieron correctamente, por encima de las posibilidades de hacerlo por azar, en 39 de las 45 pruebas.[3]

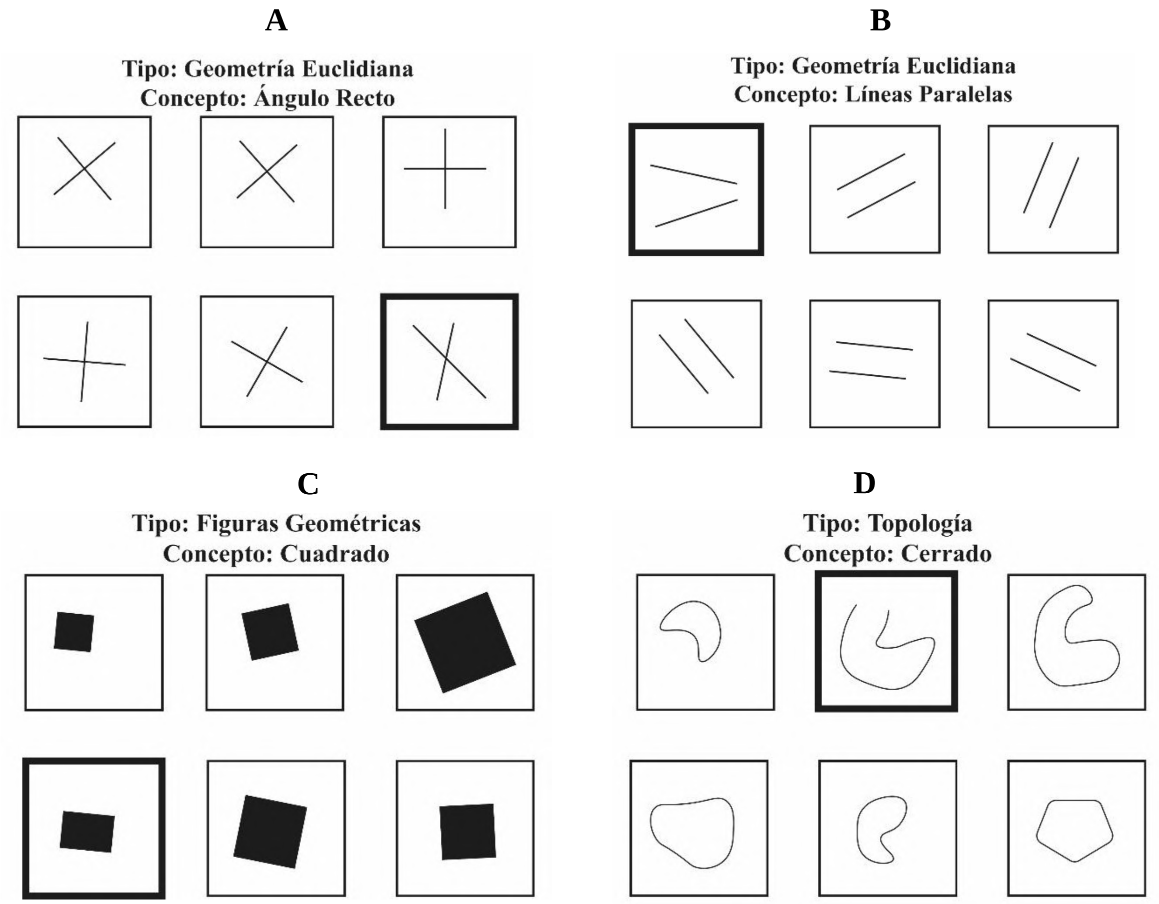


Imagen 2.1 Cuatro de las 45 pruebas realizadas a los MundUrukú y población estadounidense en relación con la geometría euclidiana (A y B), figuras geométricas (C) y topología (D). Se midió tanto el tiempo de respuesta como la proporción de aciertos, que en estos casos es: A, 93% y 17s; B, 66% y 30s; C, 73% y 31s; y D, 77% y 22s (Dehaene et al. 2006, 382).

Estos científicos cognitivos comprobaron que las respuestas de niñas y adultos Mundurkú fueron similares a las de niños estadounidenses, observándose un incremento en los aciertos solo en los adultos estadounidenses. Según estos investigadores, para elegir qué figura es diferente al resto es necesario poseer el concepto representado –líneas paralelas, ángulo recto, etc.–; por otro lado, como la población MundUrukú no posee los recursos culturales para poder responder correctamente a estas pruebas, como educación,

[3] Se incluyeron las siguientes categorías en estas pruebas: topología, geometría euclidiana, figuras geométricas, figuras simétricas, figuras quirales, propiedades métricas, y transformaciones geométricas (Dehaene et al. 2006, 382). Por otro lado, las mayores dificultades tuvieron lugar en las pruebas sobre simetría y propiedades métricas.

vocabulario o herramientas matemáticas, estos resultados pondrían de manifiesto que esta población indígena posee ciertas intuiciones geométricas primitivas de manera innata.

En el segundo trabajo (Izard et al. 2011), realizado también con los MundUrukú, se llevaron a cabo dos experimentos acerca del carácter idealizado y no perceptible de ciertos conceptos geométricos, como líneas que nunca se cruzan, o la suma de los ángulos de los triángulos, complementando así el trabajo de Dehaene y colaboradores (2006).

En el primero de los experimentos, se representaron diversas situaciones 'geométricas' en un mundo plano, así como esférico, con líneas, puntos, o ambos. En relación con estas situaciones se hicieron una serie de preguntas acerca del comportamiento de los distintos elementos geométricos (Img. 2.2). Con este primer experimento lo que se quiso comprobar fue el conocimiento intuitivo que posee esta población sobre líneas rectas.

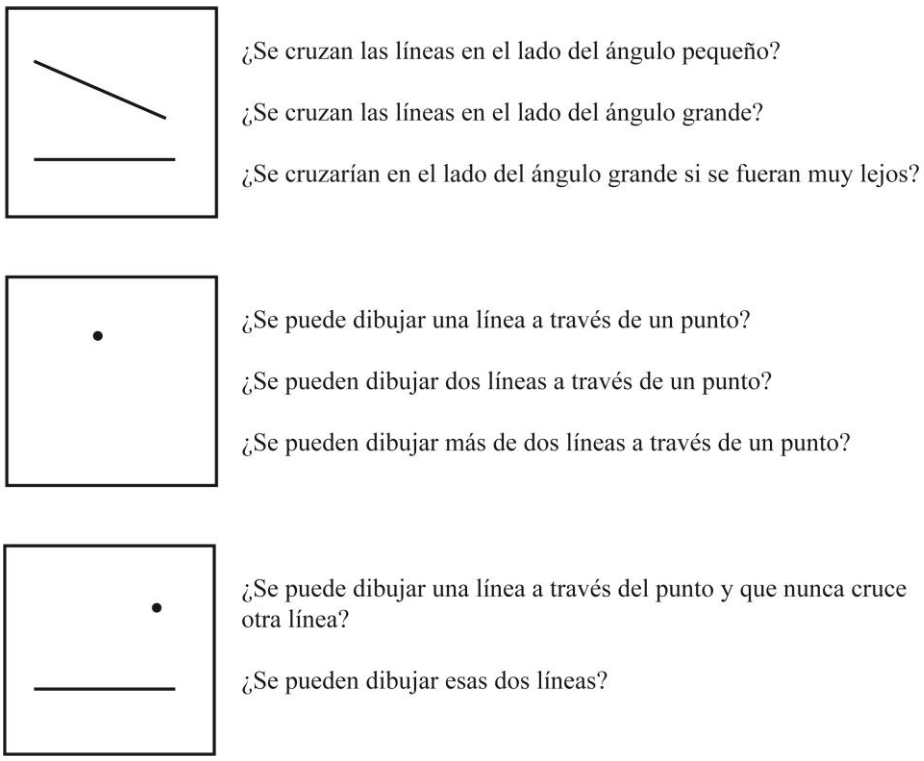


Imagen 2.2 Tres de las 10 situaciones presentadas a los MundUrukú. Para que pudieran comprender mejor lo que se estaba representando con estos dibujos, se comparó el mundo plano con una superficie plana como una mesa, y el mundo esférico se representó con ilustraciones en una pantalla de ordenador.

En el segundo experimento se presentaron triángulos incompletos, con dos vértices y la base, y se pidió a los sujetos experimentales que los completaran en un mundo plano y esférico, tanto con sus propias manos como con un goniómetro. Los triángulos completados por los MundUrukú se ajustaban a los de la geometría euclidiana y esférica, respectivamente, concluyendo así que esta población posee una concepción ideal de triángulo y línea recta (Izard et al. 2011, 9786); es decir, que la suma de los ángulos de los triángulos que "dibujaron" con sus manos o estos instrumentos fue aproximadamente 180º, en el caso euclidiano, y algo más de 180º en el caso esférico.

Al igual que en el trabajo anterior, la población MundUrukú resolvió adecuadamente estas tareas espaciales, respondiendo de manera similar a los niños del grupo de control, que en este caso eran niños de Francia. Por lo tanto, para estos autores queda demostrado que esta población puede razonar, de manera espontánea, acerca de conceptos geométricos ideales de acuerdo a la geometría euclidiana (Izard et al. 2011, 9784), y concluyeron que

> la geometría abstracta podría ser innata aunque emerja solo después de cierto punto en nuestro desarrollo, o puede ser aprendida sobre la base de un tipo de experiencia con el espacio que es tan general que todos los seres humanos se encuentran con ella. No tenemos evidencia que influya en la elección entre estas dos posibilidades (p. 9786)[4]

1.2 La 'geometría natural' como geometría euclidiana

La segunda de las hipótesis dentro de la teoría CKS es la caracterización que Spelke ha elaborado junto a otras investigadoras (Spelke et al. 2010; Spelke 2011; Spelke & Lee 2012) de una 'Geometría Natural' equiparable con la geometría euclidiana.

El argumento principal de esta propuesta es, por un lado, considerar que la caracterización formal del espacio mediante la geometría euclidiana se basa en tres elementos principales: distancia, ángulos y relaciones direccionales o sentido. Por otro lado, cuando nuestros módulos geométricos menores se combinen podrán codificar estas

[4] En este trabajo hablan indistintamente de conocimiento *geométrico* y *protogeométrico*. Por ejemplo, afirman que "la geometría euclidiana, en la medida en que se refiere a objetos básicos como puntos y líneas en el plano, es un universal transcultural que resulta de las propiedades inherentes de la mente humana a medida que se desarrolla en su entorno natural" (Izard et al. 2011, 9785); y posteriormente dicen que "las intuiciones protomatemáticas sofisticadas tanto para la aritmética como la geometría pueden ser reveladas en todos los seres humanos siempre que los conceptos abstractos relevantes sean ejemplificados por situaciones concretas" (Izard et al. 2011, 9786). Como vemos, estos investigadores están confundiendo o fusionando 'conocimiento protogeométrico' y 'conocimiento geométrico', que será una de las críticas que presentemos en la siguiente sección.

tres propiedades espaciales, coincidiendo así con las caracterizadas por la geometría euclidiana. Por lo tanto, podemos hablar de la existencia de una geometría natural innata en el ser humano relacionada con la caracterización del espacio de acuerdo a los tres elementos codificados por nuestro CKS geométrico, los cuales coinciden con los elementos básicos de la geometría euclidiana. Afirmando, de esta manera, que "como el contar, la geometría euclidiana completa se desarrolla en humanos con o sin educación formal" (Spelke 2011, 305).[5]

Además, estas autoras han presentado en dos obras (Spelke 2011; Spelke & Lee 2012) lo que denominan 'tres propiedades llamativas' de los conceptos de la geometría euclidiana, las cuales nos permiten comprender por qué es precisamente la geometría euclidiana la que ha surgido de manera natural en el ser humano.

La primera propiedad es la de la 'Simplicidad del sistema euclidiano', afirmando estas autoras que los conceptos euclidianos "son extremadamente simples: tan solo cinco postulados, junto con algunos axiomas de la lógica, bastan para especificar todas las propiedades de puntos, líneas y formas" (Spelke & Lee 2012, 2785). Esta afirmación es histórica y lógicamente problemática. Si queremos una presentación axiomática de la geometría basada en la lógica elemental hacen falta más de cinco axiomas. Hilbert presentó un sistema con 21 axiomas organizados en cinco grupos diferentes, tales como axiomas de combinación, de congruencia, de continuidad, etc. (Hilbert 1996). Tarski, por su parte, presenta un sistema con 10 axiomas más un esquema (Tarski & Givant 1999) (cf. Ferreirós & García-Pérez 2018). Por otro lado, en relación con los cinco postulados de la geometría euclidiana, algunos autores han señalado que todos los postulados euclidianos excepto el cuarto pueden ser considerados como reglas para la construcción e interpretación de los diagramas, y no como axiomas en un sentido moderno (cf. Ferreirós 2016, 112-152).

La segunda propiedad es la 'Inmensa utilidad de los conceptos Euclidianos', afirmando que estos "son extremadamente útiles: casi todos los logros culturales humanos dependen de estos conceptos, desde la medición del espacio y el tiempo al desarrollo de la ciencia, la tecnología y las artes" (Spelke & Lee 2012, 2785). Esta segunda propiedad

[5] Estas investigadoras no explican en estos trabajos cómo es posible que la geometría euclidiana completa se desarrolle transculturalmente si para que se combinen estos módulos menores hace falta la intervención de sistemas simbólicos como el lenguaje espacial o mapas, los cuales no están presentes o tan desarrollados en algunas poblaciones humanas.

tampoco está bien fundamentada arqueológica e históricamente, como mostraremos detenidamente en los próximos capítulos.

En tercer y último lugar, presentan la propiedad de la 'Idealización de los conceptos euclidianos', afirmando que

> los objetos de la geometría euclidiana van más allá de los límites de la percepción y acción: los puntos son tan pequeños que no tienen tamaño y por lo tanto no pueden ser detectados con ningún aparato físico; las líneas son tan largas que no pueden ser completamente vistas o atravesadas (Spelke & Lee 2012, 2785)

Esta nos parece una propiedad extraña para hablar de la geometría euclidiana como el tipo de conocimiento geométrico que surge de manera natural y espontánea en el ser humano. Creemos, de hecho, que si existiera una geometría natural involucraría figuras visibles, limitadas, y que podamos percibir y actuar con ellas; esto es, un tipo de conocimiento geométrico que estaría alejado completamente del tipo de idealización de la que hablan estas autoras. Por lo tanto, consideramos que la geometría euclidiana es una mala candidata para la caracterización de una supuesta geometría natural.

2. Críticas al CKS geométrico y la caracterización innatista del conocimiento geométrico

En esta sección vamos a mostrar algunas de las críticas principales a la teoría CKS, así como a las caracterizaciones innatistas del conocimiento geométrico que acabamos de presentar. Las agruparemos en tres categorías generales: 1) críticas al diseño experimental; 2) críticas postcoloniales; y 3) imprecisiones conceptuales.

El primer conjunto de críticas trata sobre algunos problemas o consecuencias del diseño experimental de los experimentos que presentamos en el anterior capítulo; esto es, experimentos a partir de los cuales se infiere la existencia y preeminencia del CKS geométrico, así como el uso de manera espontánea y rápida de la información geométrica sobre la no-geométrica.

En primer lugar, tenemos el 'efecto del tamaño de la habitación'. Este efecto fue descubierto por psicólogos y psicólogas del desarrollo que se preguntaron qué pasaría si aumentábamos el tamaño de la habitación en el que los experimentos de reorientación se estaban llevando a cabo. En primer lugar, porque la orientación y reorientación en humanos y animales no-humanos suele ocurrir en espacios abiertos de gran tamaño; y, en segundo lugar, porque consideraban que había que entender con mayor detalle el efecto que el tamaño de la habitación podía tener en los resultados de estos experimentos (Newcombe & Learmonth 2005; Twyman & Newcombe 2010; Twyman et al. 2018).

Descubrieron que al cuadruplicar el tamaño de la habitación usada en los experimentos de la teoría CKS (Img. 2.3), los sujetos experimentales se orientaron usando las pistas visuales o puntos de referencia de la habitación en lugar de la información geométrica; este efecto se comprobó tanto en niños, adultos, como animales no-humanos como palomas, peces y pollos (Newcombe & Learmonth 2005; Twyman & Newcombe 2010; Twyman et al. 2018).[6] De esta manera, se pone en duda la preeminencia del uso de la información geométrica sobre la no-geométrica por nuestro NCS –sistema nuclear para la orientación–. De hecho, Twyman y colaboradores (2018) afirman que a día de hoy está comprobado experimentalmente que el uso de pistas representacionales es más probable que ocurra en cuartos grandes, y el de pistas geométricas en cuartos pequeños.

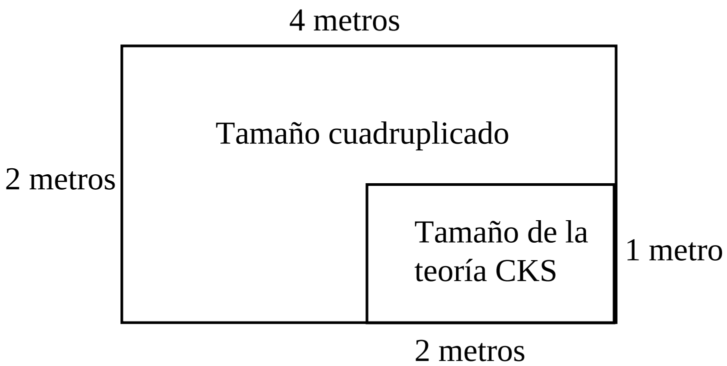


Imagen 2.3 Imagen comparativa de la habitación de 2 m^2 usada por la teoría CKS frente a la de 8 m^2 de los psicólogos del desarrollo. Imagen modificada ligeramente de Newcombe y Learmonth (2005, 232).

En segundo lugar, tenemos el ‘efecto del eje de simetría’. Algunos investigadores han llamado la atención sobre el hecho de que la habitación o localización usada en estos experimentos siempre tiene una forma con un eje de simetría, como un cuadrado, rectángulo, triángulo o rombo (cf. Lew et al. 2010, 491). Experimentaron entonces con

[6] Ninguna de las propuestas teóricas más importantes sobre nuestra cognición espacial tiene una explicación satisfactoria para este tipo de fenómeno, el cual podría estar relacionado con el hecho de que las demandas cognitivas para la reorientación sean diferentes dependiendo del tamaño del cuarto, o porque en la habitación grande se puedan realizar más movimientos y acciones a la hora de reorientarnos (cf. Newcombe & Learmonth 2005, 233; Twyman & Newcombe 2010, 1326-1328).

habitaciones con formas irregulares y sin eje de simetría, comprobando que los sujetos experimentales no usaron la información geométrica para reorientarse (Lew et al. 2010). En relación con estos resultados, estos investigadores creen que “es posible que el éxito con los recintos y formas rectangulares se deba a la naturaleza altamente aprendida de la forma rectangular en el medio construido” (Lew et al. 2010, 495); es decir, debido a la sobreexposición a estas formas en el entorno socio-cultural en el que nos desarrollamos.

En tercer lugar, la relación entre pistas geométricas y representacionales puede ser más compleja de lo que se tendía a pensar. Por un lado, se ha comprobado que algunos animales no-humanos son capaces de usar pistas representacionales (Newcombe & Learmonth 2005; Cheng 2008; Twyman & Newcombe 2010); por otro lado, que puede existir ‘competencia entre pistas’ (Cheng 2008). Esta competencia puede ser de *bloqueo*, esto es, si modificamos las pistas representacionales para hacerlas más evidentes, ya sea agrandando las figuras pintadas en la pared, o pintando una pared entera de un color diferente al resto, estas pueden llegar a *eclipsar* cognitivamente a las pistas geométricas, de tal manera que la única que usemos para la reorientación sean las representacionales. También puede ocurrir el fenómeno contrario, y es que estas pistas incrementen nuestro uso o confianza en las pistas geométricas para reorientarnos, denominado *potenciación o facilitación* (Cheng 2008; Cheng et al. 2013)

En último lugar, tenemos el ‘efecto del entrenamiento’. Por un lado, Twyman y colaboradores (2007) entrenaron a niños y niñas de 4 a 5 años en habitaciones en las que únicamente podían reorientarse usando pistas representacionales. Esto les facilitó que pudieran usar de nuevo estas pistas para reorientarse una vez eran introducidos en habitaciones en las que se combinaba la información geométrica y visual. Por otro lado, Twyman y Newcombe (2010) muestran que un adulto entrenado en un cuarto grande, en el que se reorientará mediante el uso de pistas representacionales, usará de nuevo estas pistas no geométricas para reorientarse en un cuarto pequeño, ya que se ha habituado a ellas. Sin embargo, el efecto contrario no ocurre; esto es, si el entrenamiento tiene lugar en el cuarto pequeño, en el que el sujeto usará las pistas geométricas, una vez introducido en un cuarto grande usará la información representacional. Además, se ha comprobado que tras un intenso entrenamiento con niños de 4 y 5 años estos fueron capaces de integrar la información geométrica y no-geométrica, algo que según la teoría CKS no ocurriría hasta que entrara en escena el uso de sistemas simbólicos como el lenguaje o el uso de mapas (Twyman & Newcombe 2010).[7]

Por lo tanto, estos investigadores concluyen que nuestra reorientación por el medio no se basa únicamente en la información geométrica, sino que el uso de esta información depende de diversas cuestiones, tales como el tamaño o forma de la habitación, el tipo de pistas representacionales usadas, o el entrenamiento recibido (cf. Twyman et al. 2013).

Estas conclusiones tienen consecuencias para la propuesta del CKS geométrico. Por un lado, se ha argumentado que el efecto del eje de simetría contradice la consideración de la antigüedad filogenética del CKS geométrico ya que el medio en el que los animales crecen y han evolucionado es más bien irregular (Lew et al. 2010). Por otro lado, se ha comprobado que la información geométrica y no-geométrica pueden usarse de manera combinada, por lo que también se pone en duda que la información usada espontáneamente para reorientarnos sea la geométrica (Twyman & Newcombe 2010; Twyman et al. 2018). Finalmente, que el entrenamiento previo con otro tipo de información o tamaño de habitación afecte a cómo codificamos la información también es contrario a la propuesta CKS, dado el carácter innato y universal que adscriben a los CKS o módulos.

En segundo lugar, queremos hacer una crítica que podemos enmarcar dentro de las críticas de la psicología Postcolonial (Teo 2005), indígena y cultural (Kim et al. 2006), y relacionada con el uso de sociedades WEIRD en psicología –acrónimo para sociedades occidentales, educadas, industrializadas, ricas y democráticas (Henrich et al. 2010)–. Resumidamente, en los trabajos que hemos presentado en relación con los MundUrukú no se tomaron en cuenta las propias concepciones y caracterizaciones del espacio de estas poblaciones, sino que se les hicieron pruebas relacionadas con nuestras propias caracterizaciones y conceptos espaciales y geométricos.

[7] En un metaanálisis llevado a cabo por Uttal y colaboradores (2013) con 206 trabajos sobre reorientación se pudo comprobar que el entrenamiento ayudaba a mejorar las habilidades espaciales de los sujetos. Por otro lado, Núñez (2017; 2021) señala que los datos experimentales con animales se han sobreinterpretado. Una de las razones es que estos entrenamientos son muy costosos y largos, y hay que crear además un medio artificial en el que estos animales se sientan cómodos. Por ejemplo, algunos monos son entrenados durante cuatro meses, llevando a cabo unas 20.000 pruebas antes de experimentar con ellos (cf. Núñez 2017, 416). Por lo tanto, cabe preguntarse, ¿cómo de espontáneo y rápido actúan estos módulos matemáticos si antes de realizar el experimento se ha sometido a estos animales a 20.000 pruebas?

De hecho, en el material de apoyo de estos trabajos (Dehaene et al. 2006; Izard et al. 2011) se presenta una lista de palabras que podrían considerarse como vocabulario protomatemático adaptado a las circunstancias socioculturales de esta población. Por ejemplo, usan *iroyruy'at* para hablar de objetos esféricos o círculos; *ibucug*, para hablar de curva o línea –remarcan que literalmente hace referencia a su dedo recto–; o *ipidase*, con el que hacen referencia a centro o mitad, y que está relacionado con algunas concepciones cosmológicas de dicha población.[8] Como veremos, este es un punto importante de nuestras críticas y caracterización de nuestra competencia geométrica en tres niveles, donde consideraremos que es más adecuado diferenciar entre el vocabulario protomatemático de esta población y el propiamente matemático que podemos encontrar en las sociedades industrializadas con las que esta población indígena es comparada –ver secciones 3 y 4 a continuación–.

También nos llama la atención que Izard y colaboradores (2011) afirmen que esta población lleva a cabo diversas tareas en las que la orientación es clave, pero que aun así los MundUrukú "no lexicalizan conceptos esenciales de la geometría euclidiana tales como ángulos rectos o paralelismo" (p. 9782). A lo que podríamos responder preguntando, ¿por qué la población MundUrukú tendría que hacerlo?, ¿es necesario para la orientación y organización espacial de su medio este tipo de conceptos que son clave para nuestro propio sistema geométrico?, ¿es una condición necesaria la posesión de este tipo de conceptos euclidianos para la adscripción de conocimiento protomatemático o matemático a una población determinada? Como quedará claro en este capítulo, y sobre todo tras la presentación y análisis de nuestros casos de estudio, nuestra respuesta a estas preguntas es negativa.

En último lugar, vamos a presentar una serie de críticas que hemos denominado 'imprecisiones conceptuales'.[9] Enfatizaremos principalmente dos críticas relacionadas con estas imprecisiones conceptuales o termológicas, que son la de las retroproyecciones y la fusión de conceptos.

---

[8] En el material suplementario de estos trabajos los autores también presentan algunos conceptos que esta población usa para hacer referencia a "figuras", "puntos, líneas y ángulos", "proporciones" y "direcciones y ejes".

[9] Núñez (2021) señala que dentro del campo de la cognición cuántica y numérica ya se hablaba desde hace tres décadas de "caos terminológico" y "aplicación errónea de los términos" (pp. 4-7). Sin embargo, tal y como muestra este autor en su revisión y presentación del problema, "desgraciadamente, la situación no es mejor hoy día. De hecho, hasta cierto punto es incluso peor" (p. 4).

Por un lado, con retroproyecciones hacemos referencia al hecho de que estos investigadores están proyectando conceptos y conocimiento geométrico de nuestra cultura sobre la población MundUrukú –que está en estrecha relación con la crítica postcolonial anteriormente presentada–. Por ejemplo, en los experimentos presentados anteriormente se usan términos pertenecientes a cuerpos teóricos y sofisticados de conocimiento, como 'interior' en un sentido topológico, o 'líneas paralelas' y 'ángulo recto' tal y como se entienden en la geometría euclidiana. Por otro lado, Izard y colaboradores (2011) afirman que, dado que el 87% de los sujetos experimentales respondió correctamente a la pregunta de si es posible dibujar una tercera línea paralela a otras dos líneas paralelas entre sí, estos sujetos "conceptualizan el plano como infinito" (p. 9785).

Sin embargo, en estas pruebas en las que tenemos que decidir qué figura entre seis posibles percibimos como "no cerrada", "no formando un ángulo recto", o poder dibujar una tercera línea "paralela a otras dos", estamos tratando sobre cuestiones perceptivas y manipulativas en relación con figuras básicas como puntos o líneas con las que interactuamos de manera práctica. Es decir, para resolver este tipo de pruebas los sujetos experimentales no necesitan pensar acerca de la noción de curva cerrada en topología o de paralelismo en geometría euclidiana, que son cuestiones abstractas y sofisticadas incluidas en cuerpos teóricos de conocimiento, sino cómo perciben y manipulan estas representaciones físicas.

En relación con esta retroproyección se da también el fenómeno de la confusión de conceptos. Esto es, las pruebas realizadas a los MundUrukú podrían probar que estos poseen *intuiciones aproximadas* sobre paralelismo, ángulos rectos o la forma habitual que poseen figuras básicas como triángulos o cuadrados.[10] Sin embargo, estas son intuiciones perceptivas que podrían servir de base para la construcción de un tipo de conocimiento protogeométrico, que no geométrico, y menos un tipo de conocimiento geométrico equiparable al euclidiano. Esto es, percibir o dibujar líneas paralelas a otras no es

[10] Ver por ejemplo de qué manera esta población usa el término *ibucug* para hablar de curva o línea haciendo referencia a su dedo recto. Esto es, esta población posee algún tipo de conocimiento ingenuo y tosco sobre líneas, su rectitud o curvatura, dirección, etc. Pero este tipo de aproximación protogeométrica no pone de manifiesto que posean intuiciones geométricas en un sentido euclidiano sobre paralelismo ni sobre un supuesto plano infinito, los cuales son conceptos y problemas geométricos de interés para nuestra propia cultura y práctica matemática.

igualable a poseer conocimiento geométrico acerca de paralelismo dentro de la geometría euclidiana.

En resumen, estos científicos cognitivos están usando de manera poco sistemática e imprecisa los conceptos relacionados con nuestra cognición visoespacial básica y la posesión de conocimiento geométrico. Como hemos mostrado, tienden a usar de manera intercambiable conceptos propios de nuestra cognición básica con conceptos pertenecientes a la geometría en un sentido propiamente matemático, confundiendo o fusionando por lo tanto el nivel relacionado con nuestra cognición visoespacial básica con el nivel en el que se desarrolla el conocimiento matemático en sentido abstracto, exacto y sofisticado.[11]

Este tipo de cuestiones son tratadas detalladamente en estudios de educación matemática (Duval 1998; Battista 2007; Battista et al. 2018; Sinclair et al. 2018), en los que se distingue claramente entre ʽrazonamiento espacial’ y ʽrazonamiento geométrico’, así como los objetos tratados en cada tipo de razonamiento, que serían: 1) objeto físico, como una puerta; 2) sensorial, las activaciones sensoriales al ver la puerta; 3) perceptual, entidad mental percibida al ver la puerta; 4) conceptual, el significado consciente que le damos al objeto perceptual; y 5) definición del concepto, que es la especificación explícita y simbólica del objeto conceptual, como establecer que la puerta es un rectángulo, por qué es un rectángulo, y sus medidas particulares (cf. Battista 2007, 844).

El punto clave de estas distinciones es que estos investigadores han comprobado que el paso de un razonamiento espacial a uno geométrico es más problemático de lo que parece a primera vista. Por ejemplo, los alumnos son incapaces de reconocer si un triángulo es rectángulo si este se orienta de una manera no estándar, o son incapaces de generalizar las características de una figura determinada a todas las figuras de la misma clase (cf. Duval 1998; Battista 2007; Battista et al. 2018). De esta manera, remarcan que una de las mayores dificultades se da en relación con el salto cognitivo que hay entre el razonamiento visual y el geométrico, señalando que “uno de los problemas de enseñar geometría es la incapacidad de la mayoría de alumnos para superar este hueco” (Duval 1998, 46). Esto es, incluso con la asistencia de profesores, enseñanza de un lenguaje

[11] Investigadores como Núñez (2017; 2021) y Pantsar (2019) argumentan que en los trabajos de cognición numérica se suelen usar intercambiablemente conceptos como ʽnumerosidad’ y ʽnúmero’, o ʽsistema numérico aproximado’ y ʽcompetencia aritmética’. Critican, al igual que acabamos de hacer nosotros, que se están fusionando o igualando el nivel de cognición básica relacionado con la distinción de cantidades con el nivel sofisticado de posesión de conocimiento matemático.

espacial teórico, y el uso de herramientas en las aulas, los alumnos son incapaces a veces de pasar de este razonamiento espacial al geométrico en un sentido teórico e ideal.

Por lo tanto, es problemático que los científicos cognitivos de la teoría CKS asuman la existencia de un tipo de conocimiento o intuiciones geométricas transculturales por el hecho de que ciertas poblaciones indígenas puedan resolver problemas espaciales perceptuales y prácticos, que estarían más bien relacionados con lo que estos investigadores denominan razonamiento espacial, así como con objetos sensoriales y perceptuales más que con definiciones de conceptos. De hecho, sería más interesante preguntar a los propios MundUrukú qué consideran ellos mismos que están construyendo cuando cierran con sus manos una figura triangular, o cuando eligen una figura como distinta a las demás, para saber qué tipo de razonamiento y conocimiento poseen más que adscribirle nuestros propios conceptos y conocimiento geométrico.

3. Propuestas alternativas acerca de la emergencia del conocimiento matemático y su relación con nuestras habilidades cognitivas básicas

En esta sección vamos a presentar, en primer lugar, una serie de propuestas teóricas y resultados experimentales que llevan a cabo análisis más cuidadosos acerca del desarrollo del conocimiento matemático y sus posibles bases cognitivas que la teoría CKS. En segundo lugar, desarrollaremos nuestra propia aproximación, en la que distinguiremos tres niveles de competencia en relación con el desarrollo, en nuestro caso arqueo-histórico, del conocimiento protogeométrico y geométrico.

3.1 Algunas aproximaciones actuales en torno a la cognición visoespacial y cuántica

En primer lugar, vamos a exponer un experimento llevado a cabo por un grupo interdisciplinar de trabajo conformado tanto por filósofos como por científicas cognitivas (Hamami & Mumma 2013; van der Ham et al. 2017; Hamami et al. 2020). Estos investigadores introducen en sus investigaciones cognitivas cuestiones filosóficas actuales sobre la práctica diagramática y euclidiana.

En el experimento que vamos a presentar, van der Ham y colaboradores (2017) usan el paradigma de detección del desviado/diferente en relación con la distinción entre información exacta y co-exacta (Img. 2.4) con dos poblaciones: la holandesa, que es la población de control, y la senegalesa, similar a la MundUrukú, aunque en esta ocasión la dividieron en dos subgrupos, aquella que había recibido varios años de educación y la que no.[12]

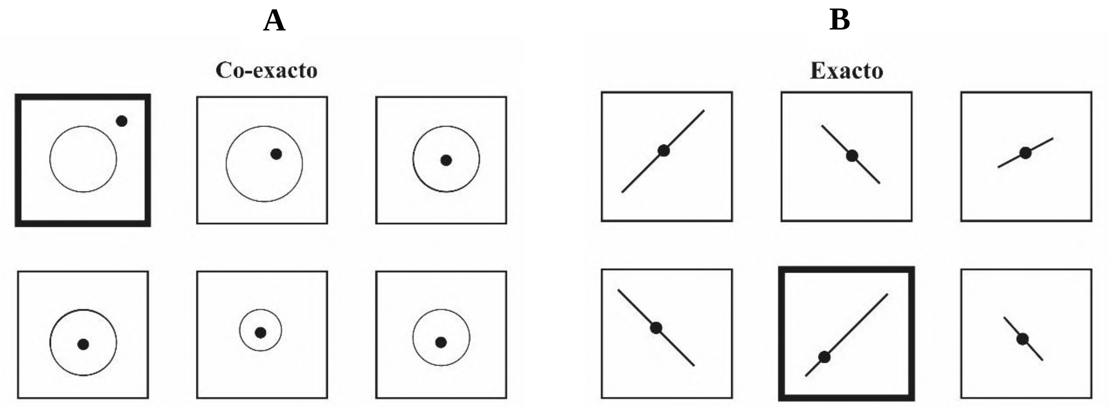


Imagen 2.4 Dos de las 18 pruebas acerca de la información co-exacta (A) y exacta (B) realizadas en el experimento de van der Ham y colaboradores (2017).

Comprobaron que todos los participantes resolvieron estas tareas adecuadamente, aunque la población holandesa lo hizo con mayor eficacia. Además, los participantes resolvieron significativamente mejor los problemas en relación con la información co-exacta que la exacta.[13] Esto podría mostrar que los aspectos co-exactos son más fiables, perceptivamente hablando, que los exactos, pudiendo ofrecer así una explicación cognitiva de por qué en la práctica euclidiana la única información que puede extraerse del diagrama es la co-exacta (cf. van der Ham et al. 2017).

Aparte de la introducción de cuestiones filosóficas actuales en la investigación cognitiva, el punto que queremos resaltar de este trabajo es que estos investigadores introducen un matiz importante respecto a los trabajos anteriormente presentados, y es que para van der Ham y colaboradores (2017) estos resultados "proveen evidencia empírica de que las intuiciones de las *relaciones espaciales* prominentes en la teoría de

---

[12] Llevaron a cabo 26 pruebas tomando como base la distinción entre información exacta y co-exacta, que es la que vamos a presentar, y la distinción entre información coordinada y categórica. Por otro lado, en el quinto capítulo veremos con más detalles la diferencia entre estos dos tipos de información. En pocas palabras, información co-exacta es aquella que podemos extraer directamente del diagrama, y exacta es la información prescrita textualmente (cf. Manders 2008a).

[13] Pruebas co-exactas: 80% de los senegaleses y 95% de los holandeses las resolvieron adecuadamente; exactas: 50% de los senegaleses y 70% de los holandeses.

la geometría de Euclides son universales" (p. 276, énfasis añadido). Vemos, de esta manera, que estos autores dicen probar la universalidad de las *relaciones espaciales* y no del *conocimiento geométrico*, distinción que como veremos es clave para nuestra propia propuesta.

Por otro lado, algunos investigadores en educación matemática establecen una distinción similar entre razonamiento espacial y geométrico. De hecho, el razonamiento espacial servirá como base para el posterior desarrollo del geométrico, y lo definen como "la habilidad de reconocer, generar, inspeccionar, operar y reflexionar sobre objetos espaciales, imágenes, relaciones, movimientos y transformaciones" (Battista et al. 2018, 196). En el razonamiento geométrico, por otro lado, realizamos las acciones y habilidades mencionadas en relación con el razonamiento espacial sobre conceptos formales o teóricos, como medición de longitud, ángulo, área, volumen, paralelismo, etc. (Battista 2007; Battista et al. 2018; Sinclair et al. 2018).[14] Proponen definir la geometría como

> una actividad compleja que no solo involucra formas o el uso y creación de imágenes visuales, sino que en su lugar involucra centralmente la conjunción entre ver y decir; esto es, entre visualización y el lenguaje para afirmar y deducir propiedades (Sinclair et al. 2018, 234)

De esta manera, hay que tener en cuenta cómo hablamos de estas figuras u objetos geométricos mediante sistemas simbólicos de representación con los que los conceptualizamos y tratamos idealmente (cf. Battista 2007). Para ver de manera más clara esta diferencia, señalan Battista y colaboradores (2018)

> definir un cuadrado como un polígono de cuatro lados que tiene cuatro ángulos rectos y todos los lados de la misma longitud y paralelos crea un concepto basado en una propiedad ideal que precisamente describe las relaciones espaciales críticas que existen entre los lados y ángulos en la clase de formas que etiquetamos como cuadrados (p. 198)

Además, no solo es importante la definición de las propiedades ideales de los objetos geométricos mediante un lenguaje simbólico, sino también su construcción. Esta

[14] Estos dos tipos de razonamiento no son excluyentes, sino que pueden usarse simultánea o secuencialmente. Además, pueden operar sobre las características intrínsecas –un objeto particular o sus partes– o extrínsecas –relaciones entre objetos, u objetos con el medio o marco general en el que están situados–, teniendo propiedades dinámicas o estáticas (Battista 2007; Battista et al. 2018; Uttal et al. 2013).

actividad nos permite descomponer las diversas figuras geométricas en sus elementos básicos, como líneas y puntos, y razonar acerca de las relaciones que pueden existir entre las diversas figuras y elementos geométricos (cf. Sinclair et al. 2018).

Enfatizan tres elementos clave del pensamiento geométrico: 1) visualización; 2) construcción con herramientas matemáticas; y 3) razonamiento matemático en torno a las propiedades ideales (cf. Duval 1998; Battista 2007); estos tres elementos "están estrechamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría" (Duval 1998, 38).

Otro punto interesante de este tipo de trabajos es que en estos se realizan entrevistas en las que se pide a los sujetos experimentales, principalmente niños y niñas, no solo que dibujen o muevan estas figuras geométricas, sino que se les *pregunta explícitamente* qué les motiva a realizar una acción y qué piensan acerca de las figuras sobre las que trabajan. Veámoslo con uno de los ejemplos citados en el trabajo de Battista (2007) –RE es el niño que está llevando a cabo las acciones e Int el investigador–

> **RE:** El rectángulo es como el cuadrado, excepto porque los cuadrados no son tan grandes. Sin embargo, los rectángulos son grandes.
> **Int:** ¿Qué necesita una forma para ser un rectángulo?
> **RE:** Todos los lados no son iguales. Estos dos [lados opuestos] y estos dos lados [los otros lados opuestos] tienen que ser iguales.
> **Int:** ¿Qué te parece 10 en dos lados y 9 en los otros dos?, ¿haría esto un cuadrado?
> **RE:** Algo así como un rectángulo.
> **Int:** ¿Sería también un cuadrado?
> **RE:** [moviendo la cabeza en señal negativa] No es un cuadrado. Porque si haces un cuadrado, no irías 10 hacia arriba, luego girarías y harías 9 en este sentido, y girarías y harías 10 en este sentido (está haciendo referencia a acciones que hay que hacer con el programa LOGO para construir esta figura). Eso no es un cuadrado (p. 870)

Nos interesan dos cuestiones en relación con esta entrevista. En primer lugar, la primera de las afirmaciones pone de manifiesto el razonamiento espacial de este niño –incluso protogeométrico podríamos decir en nuestra terminología–, ya que nos está hablando de cómo un rectángulo y un cuadrado, perceptivamente, son muy similares, excepto por el mayor tamaño del rectángulo –haciendo referencia seguramente al hecho de que tenga los lados iguales dos a dos, y no todos, pudiendo dar así la sensación de que es más grande que un cuadrado–. Este tipo de razonamiento espacial podría ser el mismo que es usado por los MundUrukú a la hora de resolver las tares espaciales. Es decir, deciden qué figura es perceptiblemente diferente al resto, pero sin poseer explícitamente ni haber construido necesariamente un concepto geométrico de dicha figura.

En segundo lugar, vemos de qué manera el niño sí que muestra la posesión de cierto conocimiento geométrico básico cuando el investigador le hace preguntas acerca de por qué la figura que hay en la pantalla es un rectángulo y no un cuadrado, por muy pequeña que sea la diferencia entre los lados. Como vemos, para argumentar su respuesta este niño hace referencia a la definición conceptual de qué es un cuadrado y un rectángulo, así como a las acciones que puede llevar a cabo en LOGO. Como habíamos señalado, es importante preguntar al sujeto experimental por qué decide que una figura espacial es diferente, o no instancia un concepto geométrico determinado, para poder comprobar con más seguridad si posee conocimiento protogeométrico o geométrico, o si está haciendo uso de su razonamiento visoespacial.

Por otro lado, la filósofa Valeria Giardino (2016) distingue tres niveles de competencia en el campo tanto de la aritmética como de la geometría. En el primero de los casos tendríamos: 1) distinguir numerosidades; 2) contar; y 3) comprender la aritmética formal. Por otro lado, en el caso de la geometría distingue entre: 1) extracción de invariantes espaciales; 2) uso de mapas u otras herramientas cognitivas; y 3) comprensión de la geometría abstracta. Como veremos a continuación, nuestra propuesta es comparable a la de Giardino, siendo la mayor diferencia entre ambas que la nuestra está orientada al estudio del desarrollo arqueo-histórico del conocimiento protogeométrico y geométrico, mientras que la de esta filósofa se vincula con los resultados de las ciencias cognitivas en un sentido más bien ontogénico o filogenético.

En el campo de la cognición numérica nos vamos a centrar en la propuesta de Núñez (2017; 2021), quién llama la atención sobre el caos terminológico que existe actualmente en el campo de los estudios en cognición matemática. Particularmente, este autor distingue nuestras precondiciones biológicas evolutivas, como serían el ANS o el OTS, y nuestra cognición numérica, la cual se desarrolla gracias a la influencia de ciertas prácticas y herramientas culturales.[15] De esta manera, distingue entre 'Cognición

[15] Este autor muestra una analogía con el caso del *snowboarding*. Señala que existen algunas precondiciones biológicas evolutivas, como la regulación del equilibrio motor, que nos permiten hacer este deporte. Sin embargo, nadie diría que esta precondición biológica surgió para hacer *snowboarding* ni puede explicar ella sola su emergencia. De la misma manera, el ANS y OTS son precondiciones biológicas evolutivas importantes para el posterior desarrollo de conocimiento matemático, pero no se puede afirmar que el ANS

Cuántica'[16], que serían las habilidades cognitivas involucradas en la percepción y codificación de cantidades, y que da lugar a caracterizaciones imprecisas, poco rigurosas y aproximadas del concepto de número. Por otro lado, tendríamos la 'Cognición Numérica y Aritmética', donde se codifica propiamente el concepto de número; esto es, un concepto riguroso, preciso y sofisticado. Por lo tanto, los experimentos con niños humanos y multitud de animales no-humanos estarían probando la posesión de cognición cuántica, que no numérica.

Para evitar este tipo de confusiones, Núñez (2017; 2021) presenta, por un lado, siete características con las que establece de manera general y no exhaustiva lo que considera un criterio mínimo de 'número': 1) se cuantifica de manera exacta y discreta; 2) es abstracto, alejado de la cuantificación de estímulos específicos; 3) tiene un sentido cardinal; 4) tiene un sentido ordinal; 5) es relacional; 6) es combinatorio, operable; y 7) nos referimos a él de manera simbólica. De esta manera podremos distinguir si los resultados experimentales son acerca de la cognición numérica y la posesión del concepto de número, o acerca de la cognición cuántica y la percepción de cantidades.

Por otro lado, Núñez (2017; 2021) afirma que el desarrollo del lenguaje y otros sistemas simbólicos son necesarios, pero no suficientes, para el desarrollo de la cognición numérica y el concepto de número. Este tipo de sistemas simbólicos tendrán que acompañarse de una preocupación y prácticas culturales que apoyen que este tipo de conocimiento se desarrolle; esta es, por lo tanto, una aproximación enculturada a nuestra cognición matemática.[17]

No vamos a entrar en más detalles acerca de estas caracterizaciones o alternativas críticas a la teoría CKS. Lo que hemos querido presentar es una especie de marco de trabajo general que, en los últimos años, está tratando de sistematizar los conceptos

---

y el OTS traten sobre conceptos numéricos o aritmética, ya que al igual que el *snowboarding*, precisan de ciertos elementos culturales para su desarrollo.

[16] Núñez (2017, 419) propone cognición cuántica en lugar de cuantitativa ya que esta podría confundirse con la capacidad de realizar mediciones y tratamientos matemáticos del medio. Por otro lado, en psicología del desarrollo también se han propuesto diferencias similares entre nuestras 'Habilidades Simbólicas Aproximadas' y 'Habilidades Numéricas Exactas' (Newcombe et al. 2019).

[17] Esta aproximación mantiene que el surgimiento de nuestra cognición matemática está culturalmente mediada. Es decir, es necesario que el agente o comunidad de agentes desarrollen cierto tipo de herramientas y prácticas culturales que sirvan como andamiaje de este tipo de cognición. De esta manera, se consigue superar la discontinuidad conceptual entre nuestras capacidades cognitivas básicas y la cognición matemática (Núñez 2017; 2021; Fabry 2019; Pantsar 2019).

involucrados en los estudios de nuestra cognición cuántica o visoespacial y su relación con la cognición matemática.

3.2 De la cognición visoespacial básica a la posesión de conocimiento geométrico: una caracterización en tres niveles de competencia

En esta sección vamos a presentar nuestra propia propuesta, la cual toma como base e influencia teórica las aproximaciones que acabamos de presentar. Además, tenemos que enfatizar que nuestra aproximación está centrada, principalmente, en el estudio arqueo-histórico y cognitivo del desarrollo del conocimiento protogeométrico y geométrico.

Veamos con detalle nuestra caracterización de los tres niveles.

Nivel 1, Cognición visoespacial

En este nivel consideramos de qué manera los agentes perciben y codifican de manera *rápida* y *espontánea* la información visoespacial –equiparable a la ʿextracción de invariantes espaciales' propuesta por Giardino (2016)–, dando lugar a la posesión de intuiciones *vagas* e *imprecisas* sobre esta información. Este tipo de capacidades cognitivas sí podrían ser consideradas *universales*.

Por lo tanto, este nivel se relaciona principalmente con los procesos y habilidades cognitivas que están relacionadas con nuestra percepción y codificación de la información visual y espacial. En revisiones generales sobre cognición espacial (cf. Uttal et al. 2013; Newcombe 2018) se muestra que en la actualidad existe cierto consenso científico en cuanto a la distinción de dos dominios principales de nuestra cognición visoespacial: 1) a pequeña escala, vinculada principalmente con el reconocimiento de objetos y su categorización, donde es importante también tener en cuenta la manipulabilidad de estos; 2) a gran escala, relacionada con cómo nos orientamos por el medio.[18] Además, se incluye como un elemento clave para comprender y caracterizar este tipo de cognición nuestro aparato motor, usado tanto para manipular estos objetos como para movernos por el medio. Por ejemplo, en la actualidad se ha comprobado que nuestro sistema visual y

[18] Newcombe (2018) distingue particularmente tres tipos de cognición espacial: a pequeña y gran escala, y una tercera en la que incluye el uso de herramientas simbólicas con las que representamos el espacio.

habilidades motoras dependen de las interacciones sensomotoras y exploración activa del medio por parte del agente (cf. Engel et al. 2015).[19]

Una cuestión compleja en relación con este primer nivel es la de determinar qué aspectos de nuestra cognición visoespacial son necesarios para el posterior desarrollo del conocimiento protogeométrico y geométrico. Hoy día no hay consenso acerca de este tema. De hecho, otros investigadores que también proponen un primer nivel de cognición básica en sus caracterizaciones (Giardino 2016; Núñez 2017; 2021; Pantsar 2019) argumentan que este primer nivel *no trata de cuestiones que puedan considerarse como matemáticas*, ya que estamos considerando la percepción automática o bien de cantidades o bien de elementos y figuras espaciales básicas. Por eso, para tratar acerca de los orígenes arqueo-históricos y cognitivos de la protogeometría y geometría, los dos niveles siguientes son los que nos interesan.[20]

Nivel 2, Conocimiento protogeométrico

En este segundo nivel se formarían algunos conceptos protogeométricos básicos, como el de ʽcírculo', ʽcuadrado', o ʽtriángulo', y se obtendría un tipo de conocimiento y resultados aproximados acerca de estos conceptos protogeométricos. Este tipo de conocimiento se

[19] Este tipo de propuestas nos recuerda a las aproximaciones de Helmholtz y Poincaré. Específicamente, acerca de la concepción de nuestros órganos sensoriales no como órganos con los que percibimos pasivamente sino como instrumentos que usamos para explorar y medir el medio que nos rodea; de hecho, Poincaré consideró nuestras acciones motoras como fundamento de nuestra construcción del espacio.

[20] En el caso de la cognición cuántica existen diversas aproximaciones teóricas para explicar el paso de la cognición cuántica a la numérica, tales como la propuesta del *bootstrapping* de Carey (2009a; 2009b), que defiende que es necesaria la intervención del lenguaje simbólico para pasar de un nivel a otro. Por otro lado, la ʽTeoría del Reciclaje Neuronal' propone que ciertas zonas cerebrales evolucionadas para un dominio específico pueden ser útiles para otras tareas en función del contexto cultural en el que el sujeto se desarrolla. Por ejemplo, el sistema de reconocimiento de caras y objetos es usado para la lectura de símbolos (Dehaene 2005). Por último, la ʽTeoría de la Reutilización Neuronal' defiende que las diversas áreas cerebrales pueden tener preferencias funcionales, pero no están especializadas (Anderson 2014). De esta manera, al vernos expuestos o tratar en repetidas ocasiones con numerales o colecciones de manera concreta, se incrementan las posibilidades de que diversos sistemas dispares se conecten, como los responsables de la subitización, procesamiento de palabras numéricas, sistema motor y visual para el control de los dedos, etc. En pocas palabras, las prácticas y herramientas culturales determinan qué coaliciones neuronales se acabarán formando (Fabry 2019; Jones 2020).

vincula principalmente con la solución de problemas prácticos o técnicos, como la medición del área de superficies rectangulares y similares, construcción de edificios, la aplicación del teorema de Pitágoras a casos particulares, consideraciones sobre la simetría de cuadrados y rectángulos respecto a su diagonal, etc. Como vamos a ver en los siguientes capítulos, el surgimiento de este nivel se relaciona con una diversidad de *prácticas, preocupaciones y herramientas culturales*. Por lo tanto, este segundo nivel *no puede ser universal*, ya que depende precisamente del tipo de andamiaje cultural creado en cada contexto sociocultural.[21]

Las características principales de este segundo nivel son:

1) La información espacial percibida espontáneamente en el nivel anterior recibe aquí un nombre particular con el que tratarla; esto es, percibimos un *cuadrado* o forma *cuadrangular*, y le adscribimos tal nombre y unas características básicas a este tipo de figuras –cuatro lados más o menos iguales, ángulos más o menos rectos, etc.–. Creamos así un **lenguaje común**, **concepto** o **categoría** con el que comunicarnos y definir aproximadamente estas formas espaciales y sus características principales;

2) la información o propiedades espaciales de las figuras o conceptos protogeométricos puede ser representada **externamente** mediante el uso de *herramientas cognitivas particulares*. Estas representaciones serán **públicas** y **comunicables**; aparecen propiamente hablando los *diagramas*, que son usados para resolver los problemas protogeométricos dentro de las diversas prácticas matemáticas particulares (cf. Giardino 2016);

3) además, estas son herramientas concretas, por lo que sus propiedades espaciales pueden ser **manipuladas** de manera más fácil y fiable que nuestras propias sensaciones o percepciones espaciales. En este sentido se considera de qué manera los sujetos representan esta información **explícita** y **activamente**, y no cómo perciben la información espacial de manera espontánea. Por otro lado, la

[21] Con 'andamiaje cultural' hacemos referencia al hecho de que ciertas prácticas y elementos culturales pueden complementar nuestras capacidades biológicas o cerebrales, e incluso influir directamente en su evolución o desarrollo.

información espacial que con estas herramientas representamos puede ser **controlada** colectivamente, y las herramientas mismas podrán ser **acumuladas** y **heredadas** por las siguientes generaciones. Será importante, hasta cierto punto, poseer un nivel de **especialización** en el uso de tales herramientas y lenguaje, y la **regularización** de las formas usadas en tales representaciones;

4) este tipo de representación externa nos permite, además, **razonar con y sobre** las propiedades espaciales de estas herramientas cognitivas, proveyendo a los agentes la oportunidad de **mejorar** este conocimiento colectivamente. Además, se podrán llevar a cabo distintas **operaciones protogeométricas** y repetirlas todas las veces que queramos para mostrar la validez de este tipo de conocimiento –esto es, no es que un sujeto particular perciba o codifique cierta forma como un cuadrado, sino que una forma determinada será un cuadrado por cómo ha sido definida y cómo es usada esta figura en el conjunto de prácticas protogeométricas de una comunidad–;

5) se crea así un **marco simbólico** que permite a los agentes establecer y desarrollar este tipo de conocimiento protogoemétrico común (cf. Ferreirós 2016). La prioridad, como dijimos anteriormente, está en el establecimiento y desarrollo de un conocimiento aproximado acerca de las propiedades de estas figuras y representaciones, así como de sus relaciones y partes que componen a cada una de las mismas –por ejemplo, descubrir las relaciones entre triángulos y rectángulos, o círculos y cuadrados–.

En este segundo nivel tenemos que decir que las **instituciones** tuvieron un papel fundamental –veremos su definición posteriormente–, tanto en el establecimiento como desarrollo de las herramientas y prácticas para establecer este conocimiento protogeométrico. De esta manera, en algunos escenarios socio-históricos se aceleró la búsqueda por establecer y mejorar este tipo de conocimiento en relación con las necesidades particulares de cada cultura y las instituciones creadas en su seno.

Nivel 3, Conocimiento geométrico

En este nivel estaríamos considerando los desarrollos geométricos en un sentido propiamente matemático. En este sentido, los agentes considerarán problemas *teóricos* más que prácticos, dando preferencia a una serie de valores *epistémicos* más que técnicos, como la búsqueda de la abstracción, exactitud, generalidad, etc. Por ejemplo, aquí se desarrolla el teorema de Pitágoras o procedimiento *gou gu* –que es como se denomina un procedimiento similar al teorema de Pitágoras en las matemáticas de la Antigua civilización china– acerca de todos los triángulos rectángulos.

Este tercer nivel estaría vinculado, por ejemplo, con la geometría euclidiana, la cual se corresponde con un tipo de conocimiento propiamente matemático. Sin embargo, contrariamente a lo que concluyen los proponentes de la teoría CKS anteriormente expuesta, no creemos que este tipo de conocimiento sea universal. Lo veremos con más detalle a partir de los casos de estudio que presentaremos posteriormente.

Las **características principales** de este tercer nivel son:

1) El lenguaje es más **especializado** que el que teníamos en el nivel anterior. Además, en este nivel es importante ofrecer una definición, explícita o implícita, de las propiedades de las figuras geométricas dentro del sistema general de conocimiento geométrico, en el que también son definidas las relaciones entre los distintos elementos geométricos, y las relaciones entre distintas figuras o elementos geométricos;

2) al igual que en el nivel anterior, estamos considerando un tipo de conocimiento **público** y c**omunicable** sobre propiedades y conceptos geométricos; a diferencia del nivel anterior, aquí consideramos el uso de los diagramas y distintos elementos dentro de un aparato simbólico más **rico o desarrollado**. Además, los agentes no tratan aquí con las características perceptibles o físicas de los conceptos geométricos, sino más bien teóricas o abstractas. Las características relevantes de las herramientas cognitivas usadas en este nivel no son sus propiedades físicas, sino **interpretativas** (Giardino 2014) –aunque, como veremos con el caso de Mesopotamia, esta característica también está presente en el nivel 2 de conocimiento protogeométrico–;

3) uso **más sofisticado** de las herramientas cognitivas, que limitarán las operaciones posibles a realizar sobre y con los elementos y figuras geométricas, para así evitar

ambigüedades y maximizar el acuerdo entre los agentes. Este conocimiento geométrico también se acumulará, y mediante su enseñanza a futuras generaciones se irán añadiendo nuevos problemas, métodos de resolución, definiciones, aproximaciones teóricas, etc;

4) manipulación **más fiable** y **controlada** de las herramientas e información geométrica, con definiciones **más claras**. Se sabe **exactamente** qué es un cuadrado y qué es un rectángulo, no fijándonos en sus características físicas o perceptivas, sino en sus propiedades **abstractas, teóricas** o **ideales**;

5) marco simbólico **más sofisticado**, donde se llevan a cabo sistematizaciones de los elementos y conceptos geométricos, así como el conocimiento geométrico elaborado. Además, el conocimiento sobre figuras geométricas particulares se introducirá en **cuerpos** o **sistemas complejos** de conocimiento. Se prioriza la búsqueda por un tipo de conocimiento general –sobre todos los triángulos o círculos, y no sobre uno particular– y preciso.

Además, estos conceptos protogeométricos y geométricos tendrían las siguientes características: 1) las propiedades espaciales son tratadas de una manera aproximada –nivel 2–, y posteriormente de manera exacta, rigurosa y general –nivel 3–; 2) son abstractos puesto que no hacen referencia a objetos específicos, y cuando hacen referencia a objetos específicos –canales o graneros en las matemáticas chinas– es para formular problemas y métodos que son propiamente matemáticos, generales o teóricos –nivel 3–; 3) son relacionales, ya que la manera en la que definimos ciertos elementos –líneas, círculos, etc.– afectará a las relaciones entre los diferentes objetos geométricos y protogeométricos; 4) son combinatorios u operables, diferentes elementos pueden ser combinados para crear un nuevo objeto geométrico, y podemos llevar a cabo diferentes operaciones con estos; 5) nos referimos a ellos simbólicamente, no de acuerdo a cómo son dibujados o percibidos –sobre todo nivel 3–.[22]

[22] Hemos tomado como referencia para elaborar esta lista estudios tanto de ciencias cognitivas (Núñez 2017; 2021) como de educación matemática (Duval 1998; Battista 2007; Battista et al. 2018; Sinclair et al. 2018).

Como hemos podido observar, en el nivel 1 consideramos de qué manera perciben los agentes espontáneamente la información espacial, dando lugar así a intuiciones vagas e imprecisas de dicha información. Para pasar al segundo nivel tenemos la "brecha de la referencia simbólica" (Núñez 2017; 2021), ya que hace falta el uso de herramientas simbólicas con las que representar externamente la información espacial, que será tratada en este segundo nivel por una comunidad de agentes. Se creará de esta manera un lenguaje común con el que poder determinar algunos de los conceptos protogeométricos, sus elementos, relaciones, así como herramientas cognitivas que pueden ser manipuladas y compartidas por esta comunidad. Por último, para pasar al tercer nivel tenemos la 'Brecha de la referencia Teórica', puesto que los conceptos protogeométricos pasarán a ser definidos y tratados teórica e idealmente. Se elaborarán sistemas simbólicos más complejos, y el conocimiento generado se insertará en un cuerpo de conocimiento sofisticado. Además, se da primacía a valores epistémicos como la generalidad, abstracción o exactitud.[23]

4. Los orígenes arqueo-históricos de la protogeometría y geometría

Hasta ahora, este trabajo ha tratado acerca de cómo en las ciencias cognitivas actuales ha existido la preocupación principal por caracterizar la antigüedad filogenética de nuestras capacidades cognitivas relacionadas con la percepción del espacio, así como su desarrollo ontogenético. Sin embargo, tal y como hemos indicado, en este trabajo nos vamos a centrar principalmente en los niveles 2 y 3, y más concretamente, en su desarrollo arqueo-histórico en el continente Euroasiático.

En este sentido, vamos a complementar los estudios cognitivos con trabajos acerca de las posibles bases arqueológicas, históricas y filosóficas de este tipo de conocimiento. Como algunas investigadoras han manifestado, esta relación de trabajo no puede ser unidireccional. Es decir, tiene que haber una colaboración en igualdad de condiciones, donde las humanidades y ciencias sociales tomen modelos y resultados experimentales de los científicos cognitivos y los apliquen a sus casos de estudio, e igualmente, los

[23] Tenemos que volver a llamar la atención sobre el hecho de que la mayoría de trabajos en cognición geométrica se centran exclusivamente en los valores epistemológicos presentes en los *Elementos* de Euclides. Sin embargo, mostraremos con nuestros casos de estudio que diversas prácticas matemáticas persiguieron valores epistemológicos diferentes de acuerdo a las metas que persiguieron.

análisis y propuestas teóricas de las humanidades y ciencias sociales sean tomadas en cuenta por los científicos cognitivos (Nersessian 1995; Sutton & Keene 2017).[24]

4.1 Algunos elementos clave de la filosofía de las prácticas matemáticas y la arqueología e historia cognitiva

En esta sección vamos a mostrar de qué manera algunas de las propuestas dentro de la filosofía de las prácticas matemáticas y la arqueología e historia cognitiva pueden complementarse y aportar algunas ideas clave para nuestro trabajo. Además, en las próximas secciones presentaremos con más detalle algunos de estos elementos, como la construcción de nichos e instituciones (sec. 4.2) y el uso de herramientas cognitivas (sec. 4.3).

La filosofía de las prácticas matemáticas es un área reciente dentro de la filosofía de las matemáticas cuya principal asunción teórica es que para entender qué es la matemática tenemos que analizar y caracterizar qué hace un matemático cuando hace matemáticas. Para ver una presentación general de las diversas cuestiones y aproximaciones dentro de esta área se puede consultar el libro editado por Mancosu (2008), o las monografías publicadas por Ferreirós (2016) o Wagner (2017).

Recientemente, la filósofa Carter (2019) ha elaborado una clasificación de las diferentes facetas, o posibles intereses, entre los filósofos y filósofas de la filosofía de las prácticas matemáticas. Tendríamos: 1) centrada en los agentes, esto es, qué se hace cuando se hace, se aprende o se enseña matemáticas; 2) focalizada en la historia del conocimiento matemático, donde el interés principal está en analizar de qué manera se ha ido formando y evolucionando este tipo de conocimiento a lo largo de su desarrollo;[25] y 3) centrada en cuestiones epistemológicas acerca de las propias prácticas matemáticas.

A la hora de definir qué es una práctica matemática, cuál es el método de trabajo más apropiado para el análisis de los casos de estudio, o qué cuestiones epistemológicas son clave para la filósofa de las prácticas matemáticas, cada filósofo o grupo de

[24] Esto es lo que Nersessian (1995) denomina como el ‘círculo virtuoso’ que debe darse cuando la comunicación es efectiva entre estas dos áreas de conocimiento (p. 196).

[25] Para Carter (2019, 13-14) la diferencia entre un historiador y un filósofo de las prácticas matemáticas es que los primeros se interesan por lo particular, mientras que los segundos se interesan por extraer lecciones generales a partir del estudio de casos históricos particulares.

investigación lo puede llevar a cabo de una manera diferente. De esta manera, algunas autoras (Giardino 2017; Carter 2019) han llamado la atención sobre la pluralidad existente en la propia práctica filosófica de los investigadores dedicados a estos temas, subrayando incluso la propia desconexión que existen entre las distintas áreas.

Sin embargo, nos llevaría muy lejos presentar detalladamente estas distintas aproximaciones al estudio de las prácticas matemáticas. Por eso, lo que vamos a presentar a continuación son algunos de los elementos teóricos relevantes para nuestro trabajo basándonos principalmente en dos autores dentro de la filosofía de las prácticas matemáticas. Por un lado, la historiadora y filósofa Karine Chemla (2014a; 2014b) defiende una concepción centrada en las 'Culturas Matemáticas'.[26] Lo interesante de su propuesta es que los agentes, las técnicas y herramientas que estos usan para el desarrollo del conocimiento matemático, y sus preocupaciones epistemológicas, son clave para entender cada cultura matemática. Chemla y colaboradores (2016) lo expresan de manera más concisa subrayando la importancia de dos elementos principales: 1) elementos materiales, como textos o herramientas matemáticas; y 2) elementos inmateriales, como valores epistemológicos. En el centro estarían los agentes, que son quienes dan forma a estas culturas a lo largo de los diferentes períodos históricos.

Por otro lado, el filósofo e historiador José Ferreirós defiende que el conocimiento matemático proviene de las interacciones que se producen entre nuestros recursos cognitivos y prácticas culturales, enfatizando el papel principal que tiene el agente, que es el que hace tales interacciones posibles (Ferreirós 2016, 3). Ferreirós (2016) afirma explícitamente que su aproximación a las prácticas matemáticas está basada en tres elementos principales: 1) el agente está en el centro de sus consideraciones filosóficas, tomando seriamente sus capacidades cognitivas; 2) la práctica matemática propia de este agente cuando hace matemáticas, y la relación de esta con las prácticas culturales generales en las que se encuentra; y 3) el hecho de que este tipo de conocimiento ha evolucionado a lo largo de la historia.

En segundo lugar, la arqueología e historia cognitiva es un área reciente cuyo interés principal es analizar la relación que los agentes pudieron tener en el pasado con diversos medios o artefactos, así como las instituciones a las que pertenecieron. Estudiando dichas relaciones se podría llegar a comprender cómo se desarrollaron en el

[26] Para una discusión acerca de la procedencia y características de esta noción, ver nota 5 de Chemla y colaboradores (2016, 3).

pasado diferentes capacidades y prácticas cognitivas (Abramiuk 2012; Sutton & Keene 2017). Algunos investigadores las consideran como las últimas en añadirse al conjunto de disciplinas que conforman las ciencias cognitivas (Xygalatas 2014).

Su objeto de estudio puede ser muy variado, como la historia cognitiva de las matemáticas (Netz 1999) o de las ciencias (Nersessian 1995), por nombrar dos casos;[27] así como su aproximación dependiendo precisamente de este objeto de estudio. Tenemos: 1) análisis de las capacidades cognitivas del pasado mediante el estudio de los restos materiales y en comparación con nuestras capacidades cognitivas actuales (cf. Abramiuk 2012, 141-152); 2) análisis experimental con sujetos actuales para ver qué regiones del cerebro utilizan en la elaboración de herramientas o realización de prácticas culturales del pasado, infiriendo de estos resultados empíricos las capacidades cognitivas que plausiblemente estuvieron presentes en nuestros antepasados (cf. Stout et al. 2015); y 3) análisis cuantitativo del registro arqueológico e histórico; por ejemplo, analizando la evolución de cómo se usó o usaron ciertos términos a lo largo de diferentes períodos históricos (cf. Netz 1999).

Presentaremos a continuación los elementos principales que diversos arqueólogos e historiadores cognitivos han caracterizado como los más relevantes a la hora de estudiar la emergencia y evolución del conocimiento matemático en el pasado. Por un lado, Overmann (2013; 2016a; 2016b) ha investigado extensamente la aparición y evolución del concepto de número y las prácticas cognitivas asociadas a este en la Prehistoria –ver capítulo 3–. Esta autora considera que no puede entenderse la aparición del concepto de número en el pasado sin analizar de qué manera ciertas herramientas y prácticas culturales le sirvieron de andamiaje cultural. De hecho, tras analizar los datos y trabajos etnográficos en relación con 33 poblaciones de cazadores-recolectores, Overmann (2013) muestra cómo en las culturas con un nivel bajo de cultura material no se llegaron a desarrollar sistemas numéricos para contar más allá de cinco.[28]

Por otro lado, Netz (1999) analiza desde la historia cognitiva el desarrollo de las matemáticas en la Grecia antigua. Su análisis se sustenta en dos elementos principales: 1)

---

[27] Abramiuk (2012, 1-20) y Wynn (2016) hacen una breve historia de la arqueología cognitiva, y Eidinow & Martin (2014) de la historia cognitiva.

[28] Los indicadores de nivel de la cultura material son los del trabajo de Hayden y Villeneuve (2011): densidad de población, movilidad, posesión de propiedades, almacenamiento de comida, estratificación socio-económica, intercambios, excedentes y actividades sociales asociadas, e indicadores de estratificación social y religión (cf. Overmann 2013, 23).

cómo se usaron ciertos recursos cognitivos, tales como diagramas o un lenguaje técnico por ciertos agentes; y 2) considerar que estos primeros elementos no son universales ni históricamente neutros; es decir, las considera herramientas y prácticas que se han ido construyendo de manera histórica, contextual, y donde ciertas instituciones pudieron influir en su desarrollo (pp. 6-7).

Estos son los elementos más importantes dentro de las diversas propuestas y aproximaciones teóricas que existen en estas dos áreas. De esta manera, consideramos que para investigar arqueo-históricamente los orígenes del conocimiento geométrico, serán importantes los siguientes elementos: 1) considerar que la geometría, o el conocimiento geométrico, es un tipo de conocimiento creado y utilizado por el agente o agentes encargados precisamente de *hacer* y *usar* las matemáticas; 2) el marco socio-cultural y político, así como institucional, en el que las diversas prácticas o culturas matemáticas surgieron, no asumiendo *a priori* que existe un tipo de conocimiento geométrico universal de acuerdo a una serie de capacidades cognitivas innatas, sino más bien *diversas* prácticas matemáticas socio-culturalmente situadas; y 3) las herramientas que usan estos agentes a la hora de crear, usar, y enseñar este conocimiento geométrico, tales como diagramas, textos, tipo de lenguaje específico, lugares dedicados a desarrollar y enseñar este tipo de conocimiento, etc.

Con vistas a unificar y estructurar estos elementos con aquellos que son discutidos actualmente por los científicos cognitivos y otros investigadores interesados en la cognición matemática, como arqueólogos e historiadores cognitivos, vamos a presentar con más detalle estos elementos, que hemos enmarcado dentro de las nociones de ʽconstrucción de nichos cognitivos e institucionesʼ y ʽherramientas cognitivasʼ.

4.2 Construcción de nichos cognitivos e instituciones

La teoría de construcción de nichos niega que todos los procesos evolutivos dependan exclusivamente de la evolución genética. Un hecho fundamental considerado por estos investigadores es que todos los organismos, en mayor o menor medida, pueden afectar a su propia evolución y a la de otros organismos a través de la modificación de sus nichos. Por lo tanto, algunos seres vivos, y en especial el ser humano, pueden llegar a ser corresponsables de su propia evolución a través de esta modificación activa del medio (Odling-Smee et al. 2003).

El punto clave para nuestro trabajo es la consideración de que existe una compleja coevolución en la que nuestras capacidades cognitivas y logros culturales se afectan y determinan unos a otros (Colagè & d'Errico 2020). Como afirma Laland (2017) "las mentes humanas no están construidas simplemente *para* la cultura; están construidas *por* la cultura" (p. 30; énfasis en el original).

En este trabajo nos interesa una propuesta particular dentro de la teoría de construcción de nichos, que es la de la 'construcción de nichos cognitivos' (Clark 2006; Sterelny 2012). Con esta idea a lo que se está haciendo referencia es al conjunto de transformaciones, tanto físicas como epistémicas, que se pueden llevar a cabo en el medio de tal manera que nos ayuden, o sirvan de andamiaje cultural, para razonar y crear nuevos espacios de razonamiento. Un ejemplo clásico es la de la modificación del medio para la enseñanza en época prehistórica. Lo que se analiza es de qué manera nuestros antepasados modificaron activamente el medio para organizarlo para la enseñanza de actividades cruciales para la supervivencia, como la manufactura de herramientas líticas. De esta manera, el "tutor" colocaba herramientas en las diferentes etapas de la construcción para hacer más fácil y evidente el aprendizaje a los "alumnos" (cf. Sterelny 2003; 2012).

Este nicho cognitivo, tal y como las herramientas y prácticas culturales, puede pasar a la siguiente generación. Por lo tanto, los cambios realizados en el medio se irán acumulando y, plausiblemente, mejorando a lo largo de las generaciones (Sterelny 2003; 2012; Clark 2006; Odling-Smee & Laland 2011; Fabry 2017). Así mismo, los nichos cognitivos que más nos interesan en este trabajo son aquellos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de prácticas culturales (Sterelny 2012, 35-43; d'Errico & Banks 2015; Gärdenfors & Högberg 2017). Lo veremos con más detalle con los casos de estudio.

Muy ligada a los nichos cognitivos está la noción de **institución**, que se puede definir como "las restricciones creadas por los humanos para estructurar las interacciones políticas, económicas y sociales. Estas consisten en restricciones informales (sanciones, tabúes, costumbres, tradiciones y códigos de conducta) así como reglas formales (constituciones, leyes, derechos de propiedad)" (North 1991, 97).

Esta noción de institución ha sido aplicada al estudio de los cambios que tuvieron lugar en la Prehistoria, tales como el paso de sociedades igualitarias de cazadores-recolectores a la emergencia de sociedades jerarquizadas durante el Neolítico (Powers et al. 2016).[29] Por otro lado, se cree que las instituciones fueron creadas en el momento en el que ciertos agentes o grupos de estos comenzaron a acumular capital gracias a los excedentes alimenticios derivados del paso de una economía cazadora-recolectora a una de producción agrícola y ganadera. Esta acumulación de capital vino acompañada, como se puede ver en el registro arqueológico, de un incremento de la violencia intragrupal y con otros grupos humanos, lo que empujó al ser humano a establecer una serie de reglas con las que estructurar todas las interacciones y comportamiento social, que son precisamente las instituciones, así como la emergencia de la figura del líder (Sterelny 2014; 2016). Este fenómeno se relaciona así mismo con la división y especialización del trabajo, así como con la aparición de los edificios y especialistas rituales. Estos dos elementos, como veremos a lo largo de los próximos capítulos, son importantes a la hora de estudiar los orígenes del conocimiento matemático.

4.3 Herramientas cognitivas para la práctica matemática

En esta sección vamos a presentar con detalle una de las modificaciones del nicho cognitivo que lleva a cabo el ser humano y que ya mostramos que era clave para el surgimiento y desarrollo del conocimiento protogeométrico: las herramientas cognitivas. Son dos las propiedades fundamentas de las herramientas cognitivas según Heersmink (2013): 1) son *objetos físicos* fabricados por el ser humano; y 2) son usadas para *contribuir de manera funcional* a realizar alguna tarea cognitiva. Estas herramientas cognitivas, por lo tanto, serán construidas de tal manera que su estructura informacional nos pueda servir a la hora de llevar a cabo diversas tareas cognitivas.

Por otro lado, una herramienta pragmática o con funciones pragmáticas es aquella que no contribuye, o su función o utilidad principal no se orienta, a llevar a cabo tareas cognitivas, como por ejemplo una silla, un hacha o una botella (Kirsh and Maglio 1994; Heersmink 2013; Sinha 2015). Algunas herramientas pueden tener ambas funciones dependiendo del uso que le demos. Por ejemplo, si usamos una cuerda para atar dos tablas de madera, la cuerda tendrá una función pragmática. Sin embargo, si hacemos nudos a

[29] Este es un patrón general en el registro arqueológico y etnográfico, aunque no universal. Johnson y Earle (2000) muestran diversos ejemplos, como los Machiguenga, del área amazónica de Perú, o los Nganasan, del norte de Siberia. Estas culturas han desarrollado la domesticación u horticultura, pero no han evolucionado a sociedades más grandes ni complejas, sino que continuaron con un estilo similar al del nivel familiar de los cazadores-recolectores (pp. 90-120).

esta cuerda a una misma distancia, y es usada para la construcción, entonces su función puede ser cognitiva, ya que la importante es la estructura informacional –unidades de medición– de la cuerda.

En relación con este tipo de herramientas, Donald (1991) fue uno de los primeros investigadores que enfatizó la importancia del uso de lo que él denominó ʽexogramas', que son herramientas con las que almacenar la información externamente. Para este autor, el hecho de elaborar y desarrollar herramientas con contenido simbólico es clave para el surgimiento de las teorías, ya que nos permiten reflexionar más allá del medio inmediatamente percibido. En la actualidad, algunos arqueólogos han retomado este tipo de análisis, y señalan la importancia de los ʽSistemas Artificiales de Memoria' – AMS en adelante–, los cuales pueden servir como andamiaje cultural para la emergencia del pensamiento simbólico en el pasado (d'Errico 1998).

Además, será importante tener en cuenta en nuestros casos de estudio de qué manera se puede modificar el medio epistémico, simplificar ciertas demandas cognitivas, así como mejorar nuestras propias capacidades biológicas con estas herramientas. Por ejemplo, nuestra memoria individual y limitada puede convertirse, mediante el uso de algunas herramientas cognitivas, en un tipo de memoria externa, colectiva, y heredable a futuras generaciones (Sterelny 2003, 150-153; 2012, 26-45).

Por otro lado, algunos autores han incluido en la categoría de herramientas cognitivas el lenguaje. Es decir, de qué manera pueden usarse las palabras como cualquier otra herramienta cognitiva para estructurar nuestros pensamientos de manera más eficiente, manipular la información que poseemos, etc. Son consideradas así mismo como puentes entre el agente y el medio (Clark 2006; Borghi et al. 2013; Sinha 2015). Este tipo de aproximaciones al lenguaje son interesantes para nuestro trabajo ya que, como veremos, el lenguaje sirvió para la estabilización y regularización de los términos geométricos, así como para crear un marco simbólico de trabajo.

Para finalizar, vamos a remarcar tres propiedades fundamentales del uso de herramientas cognitivas para entender la emergencia del conocimiento protogeométrico, y posteriormente geométrico, en nuestros casos de estudio. En primer lugar, estas herramientas permiten la creación de cierta memoria colectiva. Esto es, los contenidos simbólicos expresados con estas herramientas podrán ser comunicados a otros agentes de la misma población, así como a otras alejadas geográficamente, gracias a que estas herramientas pueden transportarse fácilmente. Esta creación de una memoria colectiva externa a nuestra memoria biológica individual es importante, ya que permite que el conocimiento protogeométrico y geométrico sea elaborado, controlado y mejorado colectivamente.

En segundo lugar, estos pueden acumularse y transmitirse de generación en generación con mayor facilidad, ya que son objetos externos, físicos. De esta manera, puede darse el fenómeno de la acumulación cultural (Fabry 2017; Legare 2017), que es clave para entender los orígenes y, sobre todo, desarrollo de este tipo de conocimiento. Como veremos en los próximos capítulos, será sobre todo a partir del Neolítico cuando los AMS se irán refinando e incluirán cierto contenido simbólico, y se crearán también las estructuras sociales donde acumular y mejorar este conocimiento, como los centros rituales. Acumulamos así no solo un tipo de conocimiento, sino todo el repertorio cultural asociado a este conocimiento, como habilidades matemáticas, uso de herramientas específicas, normas para saber qué es correcto y qué no, formas eficientes de enseñar este tipo de conocimiento, etc. (cf. Sterelny 2012; Fabry 2019).

En tercer lugar, mejoran nuestras capacidades cognitivas. Esto es, nos permiten ahorrar ciertos costes cognitivos. Un ejemplo es el uso de los diagramas en la práctica matemática, los cuales nos permiten estructurar los problemas a resolver, manipular su contenido matemático, comunicarlo con facilidad a otros agentes, controlar la veracidad de este tipo de conocimiento intersubjetivamente, etc. (Giardino 2014). Además, estas herramientas cognitivas son importantes para la estabilización de la práctica protogeométrica y geométrica, ya que nos permiten razonar con y sobre las propiedades espaciales de manera más directa y manipulable, siendo esenciales para la articulación de los propios conceptos geométricos, así como desarrollarlos de manera más precisa y sistemática.

Consideramos de esta manera que el uso de diversas herramientas cognitivas, como diagramas o cierto lenguaje protomatemático y matemático limitado, ayudaron a formar este nicho cognitivo en el que se creó toda una nueva forma de razonar y pensar acerca de las formas espaciales, con especial interés en la elaboración de un nuevo marco simbólico. Lo veremos a continuación de manera detallada con los casos de estudio que presentaremos en la segunda parte de este trabajo.

PARTE II

CASOS DE ESTUDIO

Capítulo 3

Una posible sistematización de los estudios en prehistoria de las matemáticas

1. La primacía de la "concepción helenofílica" en los trabajos en historia de las matemáticas

Como hemos visto, es habitual que las científicas cognitivas citen la obra de los *Elementos* de Euclides en sus trabajos sobre "cognición geométrica". Para ilustrar este fenómeno, recordemos la segunda de las propiedades que Spelke y Lee (2012) presentan para afirmar que los conceptos euclidianos, y por lo tanto la geometría euclidiana, es la candidata idónea para caracterizar la llamada ʽGeometría Natural'. Esta segunda propiedad es la que denominamos como ʽInmensa Utilidad de los Conceptos Euclidianos', y hacía referencia a que los conceptos euclidianos son extremadamente útiles, dependiendo casi todos los logros culturales humanos, tales como la medición del espacio o el desarrollo de la tecnología y la ciencia, de estos.

El hecho de dar prioridad a los desarrollos científicos y matemáticos del mundo griego respecto a otras civilizaciones ha sido denominado por Pingree (1992) como ʽHelenofilia', término con el que se refiere a los siguientes cuatro síntomas,

> El primero de estos es que los griegos inventaron la ciencia; el segundo es que descubrieron un camino hacia la verdad, el método científico, el cual estamos ahora siguiendo exitosamente; el tercero es que las únicas ciencias reales son aquéllas que comenzaron en Grecia; y el cuarto (¿y último?) es que la verdadera definición de ciencia es exactamente lo que los científicos están haciendo ahora, siguiendo un método o métodos esbozado por los griegos, aunque nunca completamente entendidos o utilizados por ellos (p. 555)

Estos síntomas están presentes en las propuestas que afirman que la geometría griega es la única que caracteriza correctamente lo que es el conocimiento geométrico, así como la consideración de que este conocimiento es el que sirve como fundamento para el posterior desarrollo de las ciencias y la tecnología. De esta manera, se obvia en la investigación cognitiva el conocimiento arqueo-histórico anterior a los *Elementos*, o al menos se considera que no es relevante para el estudio del surgimiento del conocimiento geométrico. Los defensores de este tipo de propuestas consideran que en el mundo griego se elaboró hace más de 2.000 años un tipo de conocimiento geométrico que ha permanecido como paradigma de lo que es *la geometría* a lo largo de la historia, y que este se elaboró gracias o fundamentado en nuestra "cognición geométrica" innata; esto es, los conceptos básicos de la geometría euclidiana están íntimamente relacionados con cómo percibimos y codificamos el espacio.[1]

Este tipo de aproximación en la que se subraya la centralidad de los desarrollos de la Grecia antigua no solo ocurre en ciencias cognitivas, sino que es un fenómeno general en la historia de las ciencias. Por nombrar algunos ejemplos, Russo (2004) afirma

> el período comprendido entre finales del siglo cuarto a finales del segundo a.e.c. fue testigo, en los países de habla griega, de una explosión de conocimiento objetivo sobre el mundo externo. Si bien la cultura griega ya había alcanzado un alto grado en arte, literatura y filosofía en la era clásica anterior, es en el llamado período Helenístico en el que vemos por primera vez –en cualquier parte del mundo– la aparición de la ciencia tal y como la entendemos ahora (p. 1)

Más adelante, en una sección en la que investiga de qué manera las matemáticas mesopotámicas o egipcias pueden ser consideradas como precursoras de las matemáticas helenísticas, señala que "las *ciencias* matemáticas, en el sentido que le hemos dado a la palabra, surgen en el período Helenístico" (Russo 2004, 31; énfasis en el original). El matemático inglés Hardy mantuvo una posición similar a esta, afirmando que "los griegos fueron los primeros matemáticos que aún son 'reales' para nosotros hoy día. Las matemáticas orientales pueden ser una curiosidad interesante, pero las matemáticas griegas son lo real" (Hardy 1940/1992, 12).

Finalmente, en historia de la psicología algunos autores como Robinson (1995; 2013) han defendido que la psicología nació en Grecia y que todos los desarrollos posteriores son críticas o mejoras de esta, afirmando que "si hay un sentido defendible en

---

[1] En este sentido, Spelke y colaboradores (2010) sostienen que "durante 2500 años, el sistema de geometría que ha parecido más natural a los humanos adultos es la geometría euclidiana plana: un sistema formal para la caracterización de formas en dos dimensiones (2D) de acuerdo con las relaciones de distancia, ángulo y relaciones direccionales entre sus partes" (p. 864). Como mostraremos posteriormente, otras civilizaciones desarrollaron un tipo de conocimiento protogeométrico o geométrico que no se ajustaría a esta caracterización euclidiana, alejándose así de la supuesta naturalidad de este sistema geométrico.

el que toda la filosofía, como afirmó Whitehead, es una nota a pie de página de Platón, mucho en la historia de la psicología es una nota a pie de página de Aristóteles" (Robinson 1995, vii).[2]

Este tipo de afirmaciones han sido criticadas por su visión eurocéntrica del desarrollo del conocimiento matemático o científico. En el caso de la historia de las matemáticas, Joseph (2011, 4-24) o Gerdes (2003, xiii-xv) presentan una revisión detallada y crítica de este fenómeno. En relación con la historia de la psicología, Kurt Danziger (1996; 2013) o Thomas Teo (2005; 2013) han criticado esta visión continuista, presentista y colonialista de la historia de la psicología. Una de las conclusiones generales que presentan estos investigadores es que este tipo de propuestas reduccionistas han perjudicado que se desarrolle una concepción multicultural y contextual de la historia de la psicología.

En este capítulo, nos centraremos específicamente en el caso de la "Prehistoria de las matemáticas". La pregunta principal que queremos responder en este capítulo es si es posible hablar de los *orígenes prehistóricos* del conocimiento geométrico. Para ello, mostraremos en primer lugar dos propuestas alternativas a las tesis helenofílicas y eurocentristas (sec. 2). En segundo lugar, haremos una presentación crítica de algunas de las propuestas que se han elaborado acerca de la posible existencia de conocimiento matemático en la Prehistoria (sec. 3). Por último, desarrollaremos una sistematización tentativa de la prehistoria de las matemáticas (sec. 4). De esta manera, queremos establecer un marco interdisciplinar de trabajo en el que investigaciones arqueológicas, cognitivas y filosóficas trabajen conjuntamente para esclarecer los orígenes prehistóricos de las matemáticas.

2. Algunas aproximaciones contrarias a la concepción helenofílica

De entre las diversas aproximaciones contrarias o alternativas nos centraremos en dos de ellas por la influencia que han tenido en los estudios en prehistoria de las matemáticas. Por un lado, veremos de qué manera se ha pretendido ampliar el concepto de lo que puedan considerarse ʽmatemáticas' en el campo de las etnomatemáticas. Por otro lado,

[2] Estos son algunos ejemplos que hemos elegido para ilustrar un fenómeno que, como decimos, ha sido general en la historia de las ciencias. Para más detalles ver el número especial de *Isis*, Vol. 83 Nº 4, *Las Culturas de la Ciencia Antigua*.

presentaremos la tesis van der Waerden-Seidenberg, en la cual se aboga por un origen de las matemáticas anterior a Grecia.

En primer lugar, mostraremos algunas de las propuestas principales de la etnomatemática. Investigadores como Ascher (1991), D'Ambrosio (1990; 2013) o Zaslavsky (1999) consideran que las propuestas que equiparan conocimiento matemático únicamente con conocimiento basado en un modelo deductivo e ideal al estilo de los *Elementos* son histórica y culturalmente reduccionistas. Señalan que dicha concepción ha llevado a la marginalización e incluso olvido de ciertas culturas cuyo conocimiento o prácticas no se ajusten al modelo griego u occidental de conocimiento matemático.

Como argumenta Ascher (1991), no solo deberíamos analizar teorías matemáticas bien formadas o conceptos matemáticos completamente desarrollados, sino también las 'ideas matemáticas' de distintas culturas o grupos humanos. Estas ideas "involucran números, lógica, o configuraciones espaciales y, en particular, la combinación u organización de estas en sistemas o estructuras" (Ascher 1991, 185); concluyendo a partir de esta definición que

> el concepto de número es un universal humano. Además, todos los grupos humanos viven en el espacio y, de una forma u otra, crean un orden culturalmente compartido de ese espacio a medida que se comunican y funcionan conjuntamente dentro de él (p. 194)

De esta manera, la matemática griega dejaría de ocupar el lugar privilegiado que algunos investigadores le conceden, y podríamos elaborar trabajos más inclusivos, transculturales y con una diversidad más rica de fuentes materiales y escritas. Veamos cómo este tipo de aproximaciones etnomatemáticas han interpretado matemáticamente ciertas prácticas culturales comúnmente marginadas o ignoradas en la historia convencional de las matemáticas.

Por un lado, Ascher (1991) analiza matemáticamente algunas prácticas culturales relacionadas con la realización de dibujos en la tierra por parte de los Bushoong (pp. 32-37) y los Tshokwe (pp. 37-43). En particular, veamos el caso de un *sona* o dibujo realizado en la tierra sin levantar el dedo, de manera continua (Img. 3.1). La conclusión a la que llega es que "lo más importante para la historia es que la figura, una curva plana cerrada simple, determina dos regiones de las cuales es el límite común. Esto es lo que los matemáticos occidentales llaman el *Teorema de la curva de Jordan*" (p. 39; énfasis en el original).

Esta autora reconoce que esta interpretación la está llevando a cabo con vocabulario y símbolos matemáticos propios de nuestras prácticas matemáticas y no de las de esta cultura. Sin embargo, al explicitar tales relaciones matemáticas, le podemos conferir a esta práctica un rango de pensamiento lógico o matemático que no se le suele atribuir. Esto es, estaríamos haciendo emerger las ideas matemáticas propias de esta práctica que, comúnmente, suelen pasar inadvertidas.

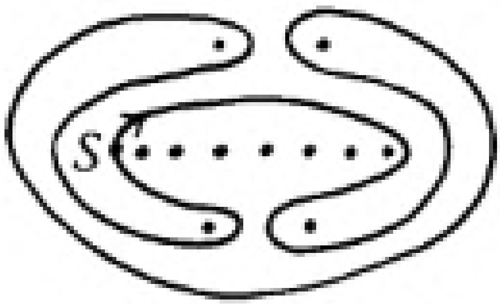


Imagen 3.1 *Sona* realizado por los Tshokwe como representación de su campamento (Ascher 1991, 38).

Por otro lado, Gerdes (1997; 2003) se ha centrado en el estudio de ciertos elementos culturales de Mozambique. La conclusión a la que llega es que la manipulación y uso de patrones geométricos en prácticas como tejer, construcción de cestas, en el arte o en el juego liberan el pensamiento matemático de una manera práctica (Gerdes 2003, 167-171).[3] Por ejemplo, muestra de qué manera aparecen conceptos y relaciones geométricas, tal y como el teorema de Pitágoras, en la práctica de tejer cestas (Img. 3.2). Dice este autor

> quizás en este sentido el resultado más sorprendente de esta investigación yace en la explicación de cómo, a partir de patrones de tejidos generalizados, paso a paso, intramatemáticamente, pudo ser descubierta la relación que hoy día denominamos como Teorema de Pitágoras, con su conexión directa con los triples pitagóricos. La posibilidad de

[3] Struik presenta en el prólogo a la obra de Gerdes (2003, vii-xi) una revisión de los diversos argumentos acerca de cómo el conocimiento geométrico surgió en nuestra especie, presentando cuatro posibles propuestas: i) aquéllas que dan prioridad a cómo el ser humano observó patrones geométricos en la naturaleza, como en telas de arañas o movimientos de astros; ii) debido al impulso ritual o religioso, como propone Seidenberg; iii) a través del trabajo; y iv) a través del juego. La característica común de todas estas propuestas es que nos permiten, tal y como propone la etnomatemática, concebir que el conocimiento matemático emergió en diversas civilizaciones o culturas diferentes a la griega.

formular este tipo de hipótesis refuerza la tesis sobre la unidad de la humanidad con respecto al despertar del pensamiento geométrico (p. 171)

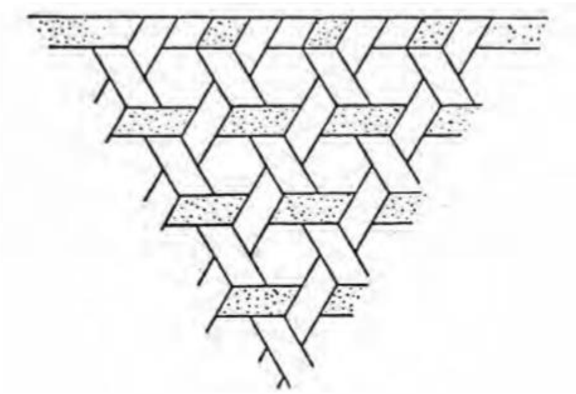


Imagen. 3.2 Patrón hexagonal regular usado a la hora de tejer cestas. Para Gerdes (2003) este tipo de actividades pudieron dar lugar al descubrimiento de los ángulos rectos, hexágonos, así como relaciones entre diferentes figuras como los hexágonos y triángulos (p. 27).

De esta manera, los investigadores en etnomatemática han tratado de ampliar nuestra concepción, demasiado estrecha y eurocéntrica, de lo que puede ser considerado como matemáticas. En ciertas ocasiones es ambigua la relación entre 'ideas matemáticas' y lo que generalmente entenderíamos como 'matemáticas'. Sin embargo, lo que sí queda claro es que para estos investigadores toda población humana o civilización posee conocimiento matemático, ya que poseen ciertos elementos culturales o prácticas a través de las cuales se estructura el espacio, se ordenan elementos, o se desarrollan ciertas relaciones lógicas entre ellos.

En sentido opuesto a la etnomatemática vamos a presentar una segunda propuesta que trata de desplazar geográfica y temporalmente el origen de las matemáticas. Decimos opuesto a la etnomatemática debido a que, en lugar de ampliar el concepto de matemáticas, lo que los investigadores de esta segunda tendencia argumentan es que el verdadero origen de las matemáticas se encuentra en civilizaciones anteriores a la griega, manteniendo así una visión reduccionista de la emergencia de la geometría. Esta tesis ha sido denominada como la 'Tesis van der Waerden-Seidenberg' (Campos Almeida 2009) ya que fueron estos dos investigadores los primeros en defenderla. Podemos resumir esta tesis en tres ideas principales.

En primer lugar, estos dos autores muestran que existe cierta similitud entre los resultados y métodos matemáticos de civilizaciones tan diferentes, así como separadas geográfica y temporalmente, como la china, griega, india y mesopotámica. La hipótesis más probable para explicar tal coincidencia es que existiera un origen único y común a todas estas tradiciones matemáticas. Como veremos a continuación, cada uno de estos autores propone un lugar y período diferente en el que situar tal origen.

En segundo lugar, Seidenberg (1961; 1962; 1981) argumenta en una serie de artículos que el origen tanto de la geometría como de la práctica de contar están vinculados con ciertas prácticas rituales de la India. Por un lado, la geometría nace en relación con una serie de reglas usadas para la construcción de altares para la celebración de rituales, las cuales encontramos en los *Śulbasūtras*; por otro lado, la práctica de contar se vincula tanto con las asociaciones realizadas entre deidades y números, como con las palabras usadas para numerar a los participantes de estos rituales.

En tercer lugar, van der Waerden (1983) remonta los inicios de la matemática a la Prehistoria, particularmente al Neolítico y la Cultura del vaso Campaniforme. Van der Waerden llega a esta conclusión tras analizar la construcción de algunos de los monumentos más importantes de esta cultura, tales como Stonehenge o Woodhenge, argumentando que para su construcción hizo falta el uso de ternas pitagóricas y el Teorema de Pitágoras. [4] Lo veremos con más detalle en la próxima sección.

Por lo tanto, estas dos propuestas elaboran una aproximación alternativa acerca de la emergencia del conocimiento matemático. Por un lado, la etnomatemática muestra que ampliar el concepto de aquello que puede ser considerado como matemáticas podría enriquecer y ampliar nuestras concepciones históricas y culturales sobre la emergencia y evolución de este tipo de conocimiento; por otro, la tesis van der Waerden-Seidenberg pone en duda que la matemática griega fuera la precursora del desarrollo del conocimiento geométrico, desplazando tal origen a otras civilizaciones o culturas anteriores. No vamos a presentar nuestras críticas a estas dos propuestas ya que las elaboraremos a lo largo de las siguientes secciones.

3. Estudios en prehistoria de las matemáticas I: historias generales de las matemáticas y primeras aproximaciones arqueo-históricas

En esta sección mostraremos de qué manera se han definido las características generales para considerar como genuinamente matemáticas ciertas herramientas o prácticas de

[4] Basándose en los descubrimientos anteriores de Thom y Thom (1978), Hawkins (1973) y, principalmente, los de Wood (1978) (*apud* van der Waerden 1983, 16-17).

sociedades prehistóricas en dos tipos de obras. Por un lado, en historias generales de la matemática; por otro, en trabajos arqueológicos que tratan directamente acerca de la existencia de prácticas matemáticas en este período de mediados y finales del siglo XX.

Expondremos en primer lugar las ideas presentadas en los capítulos introductorios de historias generales de la matemática como los de Struik (1987), Boyer (1991), Cooke (2013), o Scriba & Schreiber (2015), en los que se suele tratar el tema general de la ʻPrehistoria’, ʻComienzos’ u ʻOrígenes’ de las matemáticas.[5]

En estos capítulos introductorios se suelen presentar dos fuentes en relación con el conocimiento matemático en la Prehistoria. En primer lugar, exponen una serie de resultados de la psicología que demuestran la antigüedad filogenética y pronto desarrollo ontogenético del pensamiento matemático en nuestra especie. Ya criticamos en el capítulo anterior este tipo de concepción innatista y universal del conocimiento matemático, la cual es presentada en estas obras como válida y científicamente probada.[6]

La segunda fuente de conocimiento que sirve como base para estos capítulos introductorios son, precisamente, las segundas obras que vamos a presentar en esta sección. Esto es, los trabajos de algunos arqueólogos que comenzaron a interpretar matemáticamente ciertas herramientas y construcciones monumentales prehistóricas. En estos trabajos se suelen establecer dos categorías de conocimiento matemático en la Prehistoria.

En primer lugar, aquellos elementos que nos permiten constatar la utilización de números para contar, lo que ha llevado a algunos investigadores a afirmar que en la prehistoria se desarrollaron la aritmética y el concepto de número. Habitualmente fue el hueso de Dolní Věstonice el que se consideró como el primer objeto en el que se ve reflejado el uso de números en la Prehistoria.[7] En segundo lugar, se argumenta que el uso y elaboración de “patrones geométricos” en prácticas de tejer, decoraciones cerámicas, o

---

[5] Cooke (2013) titula a esta sección introductoria como ʻprotomatemáticas’ en un sentido cercano al de ʻideas matemáticas’ propuesto por Ascher (1991).

[6] Por ejemplo, Boyer (1991, 1-2) cita algunos experimentos realizados con cuervos a partir de los cuales se concluye que estos pueden distinguir *conjuntos* de hasta cuatro *elementos* –esto es, el OTS–; o Cooke (2013, 14-16), que muestra los experimentos con los que Pávlov consiguió que un perro *distinguiera* una elipse de un círculo.

[7] Por ejemplo, Ifrah (2000) argumenta respecto a este hueso que “el propósito de estas muescas sigue siendo un misterio, pero este hueso (cuyas marcas son sistemáticas, y no están motivadas artísticamente) es uno de los documentos aritméticos más antiguos que nos ha llegado” (p. 62).

construcción de monumentos megalíticos y prácticas arqueoastronómicas pondrían de manifiesto la emergencia del pensamiento geométrico. A continuación, vamos a presentar y analizar con cierto detalle algunos de los casos de estudio más representativos de cada una de estas categorías.

En primer lugar, vamos a presentar un artefacto arqueológico que ha suscitado un mayor debate en la literatura especializada que el hueso de Dolní Věstonice, y es en términos generales análogo a este.[8] Estamos hablando del hueso de Ishango (Img. 3.3), un hueso de babuino descubierto por el investigador belga Jean de Heinzelin en 1960 en el área africana de Ishango (de Heinzelin 1962) y datado en el 20.000 a.e.c. Este hueso tiene un total de 167-168 muescas distribuidas en tres columnas.

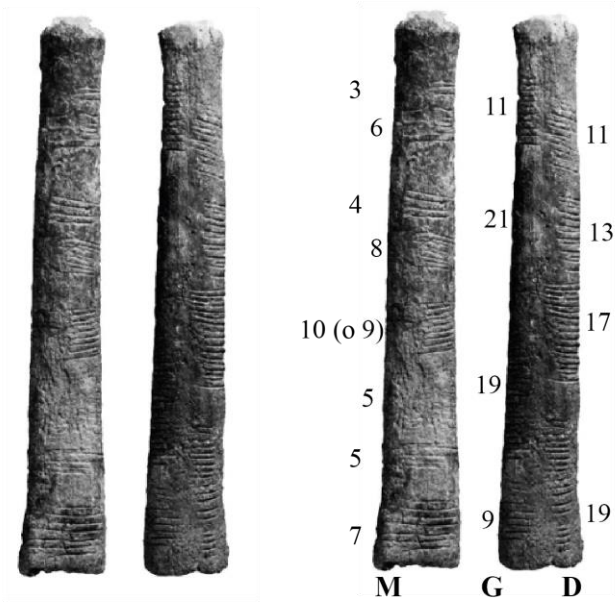


Imagen 3.3 A la izquierda, fotografía del hueso de Ishango (licencia cc del usuario Matemáticamente.it, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Osso_di_Ishango.jpg). A la derecha, distribución de las marcas en las columnas M, G y D.

Algunos autores afirman que este artefacto podría ser considerado como el primer objeto de la humanidad en el que encontramos la prueba de que nuestros antepasados llevaban a cabo algún tipo de práctica de contar. Aunque este tipo de interpretación es plausible, en la actualidad se sigue debatiendo la posibilidad de que las marcas fueran realizadas con otra intención que no fuera la de contar (cf. Keller 2015). Por otro lado, Bogoshi et al.

[8] El citado hueso de Dolní Věstonice posee 55 marcas en total, y en un primer momento se sugirió que estaban agrupadas en dos conjuntos de 30 y 25 marcas cada uno –ver González Redondo et al. (2010)–.

(1987) afirman que este hueso podría ser el primer artefacto matemático de la humanidad, e incluso se han mantenido posiciones más radicales. Por ejmplo, Plester y Huylebrouck (1999) dicen que las columnas G y D suman 60 marcas, o lo que es lo mismo, 5×12, mientras que la columna M sumaría 48 marcas, que sería 4×12; por lo tanto, concluyen que este hueso pondría de manifiesto que esta población desarrolló un tipo de sistema numeral con base 12. Finalmente, el propio de Heinzelin (1962) afirma que los números de la columna D representan los números primos entre 10 y 20, lo que manifestaría que esta población tuvo algún tipo de conocimiento sobre estos números.[9]

En segundo lugar, tenemos el análisis del uso de ciertas relaciones o "patrones geométricos" en la construcción de monumentos megalíticos. Hawkins (1964) o van der Waerden (1983), entre otros, se han centrado específicamente en el caso de Inglaterra, siendo los casos más estudiados los de sitios tan emblemáticos como Stonehenge (3100-2000 a.e.c.) o Woodhenge (2500-2000 a.e.c.).

Además de afirmar que estos monumentos megalíticos tienen una clara función arqueoastronómica[10], estos autores concluyen tras analizar su plano arquitectónico que para su construcción fue necesario el conocimiento de ciertos conceptos y relaciones geométricas, como el uso de ternas pitagóricas, triángulos equiláteros, o el conocimiento explícito del teorema de Pitágoras.

Van der Waerden (1983), uno de los defensores de la hipótesis acerca del origen del conocimiento geométrico en la Cultura del vaso Campaniforme, afirma explícitamente que "en los anillos de piedras megalíticas hemos encontrado claras indicaciones de actividades astronómicas así como matemáticas" (p. 31). Particularmente, este autor argumenta que en los planos arquitectónicos de monumentos megalíticos europeos encontramos triángulos rectángulos que cumplen con la relación establecida en el teorema de Pitágoras (van der Waerden 1983, 17-22). De esta manera, dice que queda probada la existencia de una ʻmatemática neolíticaʼ originada en sociedades Indo-europeas que posteriormente se extenderá a toda Europa, China e India.

[9] Ver Huylebrouck (2019) para una presentación general de las diferentes interpretaciones que se han hecho de este objeto, así como una defensa postcolonial similar a la de los etnomatemáticos presentados anteriormente. Por otro lado, tanto Joseph (2011, 30-35) como Keller (2015) muestran una visión crítica sobre las interpretaciones aritméticas que se han realizado de este objeto.

[10] Lo cual ha sido criticado por diversos arqueoastrónomos, ya que estos autores ignoran el contexto socio-histórico, así como la posible relación con el paisaje, de este tipo de monumentos (cf. Ruggles 2015).

Por ejemplo, argumenta en relación al sitio de Woodhenge que al medir y doblar los lados de los triángulos ABC y ABD (Img. 3.4) estos medirán 12, 35 y 37 yardas megalíticas –una medida estándar que este autor cree que fue usada por diversas sociedades prehistóricas–. Esto es, medidas que se corresponderían con una terna pitagórica.

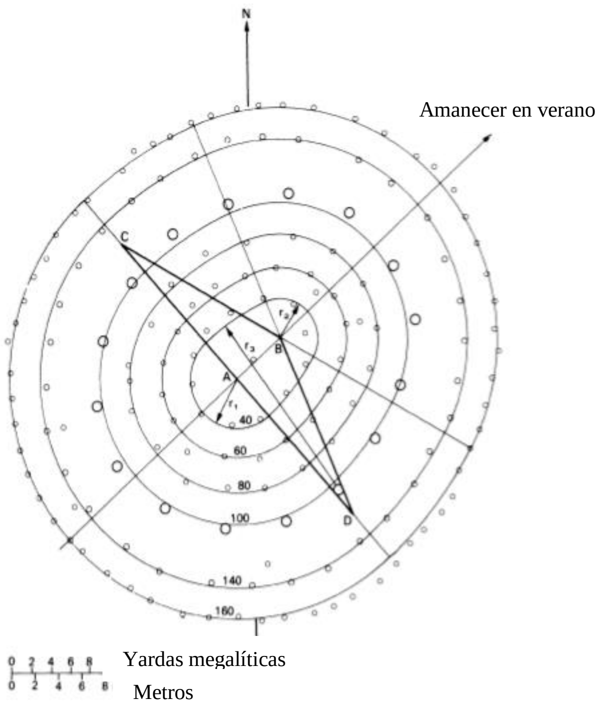


Imagen 3.4 Plano de Woodhenge presentado por van der Waerden (1983, 21), que toma de Wood (1980).

Vamos a presentar a continuación dos de las críticas principales a este tipo de propuestas. La primera concierne específicamente a las historias generales de las matemáticas, en las que encontramos una ‘asunción ingenua’ de los resultados en psicología. Es decir, que los historiadores citados anteriormente suelen asumir como demostrados y aceptados por la comunidad científica resultados acerca de nuestra “cognición matemática” que, como hemos mostrado, siguen siendo objeto de intensos debates en ciencias cognitivas, así como en otras áreas de conocimiento como la filosofía o la antropología.

La segunda de las críticas que queremos exponer es común a ambas fuentes, y coincide además con una de las críticas que ya presentamos en el capítulo anterior: las retroproyecciones. Con esta crítica nos referimos a cómo estos autores estarían imponiendo o proyectando sobre poblaciones prehistóricas el conocimiento y prácticas matemáticas que poseemos en la actualidad, o que fueron desarrolladas posteriormente por otras civilizaciones como la griega o la china.

En relación al hueso de Ishango podemos observar de qué manera al contar el número de marcas en cada columna, así como en cada colección de marcas, estos autores afirman que esta población usó un sistema numérico con base duodecimal, o incluso que poseían conocimiento acerca de los números primos. De esta manera, estamos imponiendo o interpretando este tipo de herramientas con nuestro propio conocimiento teórico y sofisticado acerca de los números naturales. En el segundo de los casos nos encontramos con el mismo fenómeno. Dibujar triángulos rectángulos que cumplan con la relación establecida en el teorema de Pitágoras dice más de nuestro propio conocimiento geométrico que el de estas civilizaciones del pasado.[11] Lo que estamos haciendo es buscar, con nuestra concepción matemática contemporánea, o incluso de civilizaciones antiguas como la griega, relaciones geométricas que nos son familiares, y así poder concluir que estas ya fueron descubiertas o desarrolladas por estas poblaciones.

4. Estudios en prehistoria de las matemáticas II: estudios actuales en arqueología

Esta sección se dividirá en dos partes. En primer lugar, analizaremos los trabajos sobre prehistoria del concepto de número; en segundo lugar, mostraremos los que tratan acerca de la prehistoria de la geometría. Como mostramos en los capítulos anteriores, existe una tendencia general en las ciencias cognitivas de investigar con mayor énfasis nuestra cognición numérica frente a la geométrica. Este mismo fenómeno también tiene lugar en los trabajos actuales en prehistoria de las matemáticas.

4.1 Prehistoria del concepto de número

Los investigadores interesados en el estudio de las raíces prehistóricas del concepto de número han presentado tres posibles fuentes o conjuntos de materiales arqueológicos que

[11] Knorr (1985) realiza una revisión crítica a la obra de van der Waerden, argumentando que tanto Thom como van der Waerden tuvieron que seleccionar qué elementos del plano considerar para poder formar las figuras geométricas tan habituales para nosotros. El propio Knorr muestra que, considerando otros elementos alternativos nos encontraríamos con otro tipo de relaciones geométricas, y además los triángulos rectángulos desaparecerían. Es decir, la existencia de este tipo de configuraciones o figuras geométricas no es algo que surgiera o fuera usado de manera natural por los constructores del pasado, sino que depende más de nuestra propia concepción y práctica matemática.

podrían constatar la emergencia y evolución del pensamiento aritmético en la Prehistoria. Tenemos: 1) material etnográfico y arqueológico que muestra el uso de dedos para contar; 2) artefactos con marcas usados presumiblemente para contar; y 3) uso de ornamentación personal.

En primer lugar, que los humanos usen sus dedos y otras partes de su cuerpo para contar es un hecho bien documentado y estudiado tanto etnográfica como cognitivamente (cf. Bender & Beller 2012; Overmann 2014). A partir de estos datos, algunas arqueólogas y antropólogos han argumentado que en el pasado el uso de los dedos seguramente precediera al uso de herramientas para contar. Por un lado, el antropólogo Caleb Everett (2017, 39-44) señala que en todo el mundo se han encontrado cuevas con huellas de manos pintadas sobre las paredes. Las primeras pinturas de este tipo son de Indonesia, de hace 40.000 años, y existen otros casos en Sudamérica y Europa. Este uso extensivo de manos y dedos como elementos pictóricos refleja la importancia que pudieron tener para nuestros antepasados.

Por otro lado, la arqueóloga cognitiva Karenleigh Overmann (2014) analiza las huellas de manos realizadas en las grutas de Cosquer y Gragas (Francia), constatando que la mayoría se pueden considerar como signos de dedos –esto es, dibujos de las manos en las que encontramos uno o varios dedos erguidos–, y algunas pueden incluso interpretarse como posibles representaciones de números enteros (Img. 3.5). El argumento principal de esta autora es que la forma en la que se representaron estos signos de dedos recuerda a la manera en la que usamos generalmente los dedos para contar; por otro lado, dado el amplio material etnográfico y cognitivo acerca de la primacía del uso de nuestros dedos a la hora de contar, no es de extrañar que fueran usados de esta manera por nuestros antepasados.[12]

En segundo lugar, tenemos los artefactos con marcas que pueden ser interpretadas como incisiones hechas para contar o representar cantidades. En esta categoría se incluirían los huesos de Ishango y Dolní Věstonice. Además, en los últimos años se han estudiado algunos casos anteriores como los artefactos de Abri Blanchard y Abri Cellier, de hace 28.000 años, la placa de Taï de hace unos 14.000 años (Overmann 2013; 2016a;

[12] Sin embargo, se ha argumentado que las pinturas de dedos correspondientes con los números del 1 al 5 no suelen aparecer en este orden, y ni siquiera hay una combinación clara entre las huellas que estarían representando cantidades frente al conjunto total de huellas de manos. Por lo tanto, estos datos son débiles para afirmar que estas pinturas rupestres representen el uso de los dedos para contar (cf. Overmann 2014).

2016b), o un hueso con 29 incisiones encontrado en la cueva Border (Sudáfrica) de 44.000–42.000 años (d’Errico et al. 2012). Estos datos han llevado a algunos investigadores a establecer en el Paleolítico Superior Europeo –hace 42.000 años– el momento en el que estos instrumentos pudieron comenzar a ser usados para contar o representar cantidades (d’Errico et al. 2017).

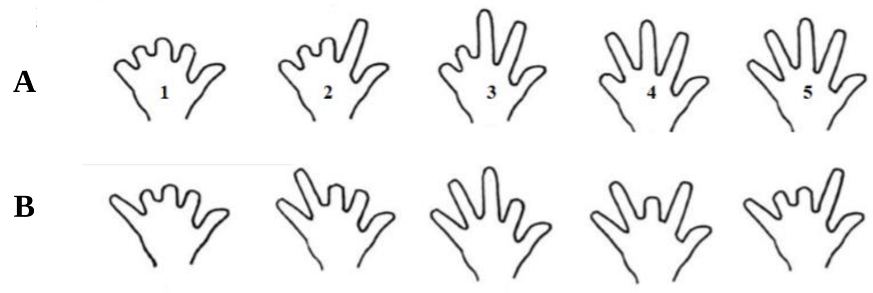


Imagen 3.5 Huellas de manos de las grutas de Cosquer y Gragas, de unos 27,000 años de antigüedad. A: aquéllas que se han considerado que podrían representar los números del 1 al 5; B: otras huellas consideradas como signos de dedos. Imagen ligeramente modificada de (Overmann 2014).

Sin embargo, existen dudas en la investigación arqueológica actual acerca del uso exacto de estos instrumentos, que no solo pudieron usarse para representar cantidades, sino también para la decoración, la adivinación, como instrumentos musicales, protocalendarios, etc. (d’Errico & Cacho 1994; Reese 2002; De Smedt & De Cruz 2011).[13]

Una de las diferencias principales de estos estudios en relación con los realizados en períodos anteriores es que en los últimos años algunos investigadores han elaborado una serie de criterios para poder distinguir de manera más sistemática qué tipo de artefactos podrían representar cantidades o posibles notaciones.

En primer lugar, tenemos el **criterio de la intencionalidad**. Esto es, que algún sujeto de manera intencional realizara estas incisiones o marcas y no que surgieran por acciones naturales o como consecuencia de trabajar sobre estas rocas con otras

[13] Everett (2017, 34-38) señala que en diversas partes del mundo parece haber una fijación con el conjunto de 29-31 marcas. Esto podría constatar, como algunos autores han defendido, que lo que se contara fueran precisamente algunos patrones celestes -ciclos lunares-, lo que les sería útil para controlar la migración de animales, así como saber qué días serían los más visibles por la noche (cf. De Cruz 2006).

herramientas (Overmann 2016b; d'Errico et al. 2017). En segundo lugar, el **criterio experimental**. Este criterio hace referencia a los estudios experimentales que tienen que realizarse para determinar si estas marcas fueron realizadas por el mismo sujeto o por más de uno, si fueron realizadas con la misma herramienta, en el mismo período de tiempo, la dirección y espacio entre estas, etc. (d'Errico & Cacho 1994; d'Errico et al. 2017). En tercer lugar, más que un criterio vamos a presentar la **'Teoría del Compromiso Material'** (Malafouris 2013), que defiende que aunque estas marcas no se realizaran para representar cantidades, pudieron aun así servir para desencadenar un tipo de interacción material que sirviera como fundamento para un desarrollo posterior de conceptos numéricos.[14]

En tercer y último lugar tenemos el uso de ornamentación personal, específicamente el uso de cuentas de collar (Img. 3.6).[15] Estas han sido relacionadas con el surgimiento del pensamiento simbólico en nuestra especie y lo que en prehistoria y estudios en evolución humana se conoce como los inicios del comportamiento humano moderno (d'Errico et al. 2005; Bouzouggar et al., 2007).

El argumento principal es que estos artefactos se pudieron usar para representar algo más allá del propio objeto, como distinguir el estatus social dentro de las poblaciones, o qué miembros pertenecían a un grupo concreto (Kuhn & Stiner 2007). Stiner (2014) señala que en un primer momento estas cuentas no se modificaron de manera intencional –criterio 1– sino que se usaban tal y como se encontraban en el entorno. Posteriormente se empezaron a seleccionar activamente qué conchas cumplían con ciertos criterios –tales como color o forma– para ser usados como marcadores sociales y se comenzaron a modificar activamente.

Lo interesante para nuestro trabajo es que algunos investigadores (Wynn et al. 2016a) han considerado que estas cuentas se pudieron unir con una cuerda y ser usadas para medir el tiempo y desarrollar algún tipo de pensamiento ordinal. Particularmente, pudieron instanciar una línea numérica y así mostrar un orden estable de los numerales, relación acumulativa entre los numerales, así como ofrecer la posibilidad de aplicar fácilmente la operación 'más 1'. De esta manera, Overmann (2019) afirma que el uso de

[14] Según Overmann (2016a) da igual si estamos hablando de marcas hechas con propósitos decorativos o para representar cantidades, puesto que ambas servirían para que interactuáramos con ciertas propiedades de los conceptos numéricos.

[15] Estas aparecen para algunos autores entre el 100.000-70.000 a.e.c. (d'Errico et al. 2009), o entre el 90.000-45.000 a.e.c. (Stiner 2014).

números al menos de una manera restrictiva –esto es, hasta 20– ya estaba presente hace 75.000 años, coincidiendo con el uso de estas cuentas de collar de la cueva de Blombos. Concluyendo, por lo tanto, que estos podrían ser uno de los artefactos de la Prehistoria que más ha influido en el surgimiento de la "cognición numérica" (Overmann 2013; 2016a; 2016b).

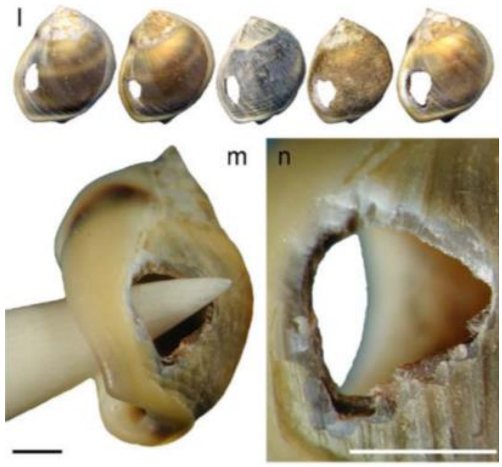


Imagen 3.6 Cuentas hechas a partir de los caparazones de *Nassarius kraussianus* encontradas en la cueva de Blombos (Sudáfrica) (d'Errico et al. 2005).

Por otro lado, Everett (2017, 240-247) señala que en algunos yacimientos arqueológicos se han encontrado grandes cantidades de cuentas, lo que indicaría que se les concedía un importante valor cultural, e hipotetiza que su acumulación y valor cultural pudo conducir a sus pobladores a contarlas para tener cierto control sobre ellas, y establecer una conexión entre número de conchas y número de dedos de la mano.

Concluimos esta primera parte en la que, al igual que haremos con la siguiente, nos limitamos a hacer una breve presentación del tipo de material que se considera que podría dar cuenta de la emergencia del conocimiento matemático en la Prehistoria. En la próxima sección llevaremos a cabo un análisis crítico de estos estudios, y presentaremos una posible sistematización de los mismos.

4.2 Prehistoria de la geometría

Como hemos mencionado en diversas ocasiones, los estudios en cognición matemática han puesto un mayor foco en nuestra cognición cuántica y emergencia de la cognición numérica frente a la visoespacial y su relación con la emergencia de la cognición geométrica. Este mismo fenómeno ha tenido lugar en los estudios en prehistoria de la geometría. No sabemos exactamente por qué, pero podemos hipotetizar que podría deberse, al menos en el campo de la prehistoria, a un hecho paradójico. Por un lado, no existe registro arqueológico que muestre de una manera tan clara la elaboración de conocimiento geométrico en el pasado como ocurre con el caso de la prehistoria del concepto de número.[16] Por otro lado, son numerosas las prácticas y elementos arqueológicos que pueden constatar de alguna manera la aparición del conocimiento geométrico.[17]

Creemos que parte del problema en el campo de la prehistoria de la geometría tiene que ver con el uso indiscriminado en la literatura especializada de los términos ‛espacial’ y ‛geométrico’. Por ejemplo, es común encontrar referencias tanto a la organización ‛espacial’ o ‛geométrica’ de ciertos monumentos megalíticos, así como elementos decorativos con patrones ‛espaciales’ o ‛geométricos’. Esta confusión viene acompañada de la dificultad de establecer una conexión clara entre estos elementos arqueológicos de carácter espacial y el subsecuente desarrollo del conocimiento geométrico en un sentido protomatemático o matemático. No es el objetivo de esta sección encontrar una repuesta a este fenómeno, sino reflexionar sobre el mismo con el objetivo de presentar el marco general en el que se encuentra actualmente este campo.

Para presentar el numeroso registro material y actividades relacionadas con nuestra cognición visoespacial en el pasado las vamos a dividir en dos grupos: 1) aquéllas relacionadas con nuestra cognición visoespacial a pequeña escala, considerando principalmente la manufactura de herramientas líticas y el arte prehistórico; y 2) la cognición visoespacial a gran escala, considerando principalmente la organización espacial de monumentos megalíticos.

En relación con la manufactura de herramientas líticas, son diversas las capacidades cognitivas que pueden estudiarse en relación a su fabricación. Por ejemplo, el foco puede estar en entender la relación de nuestra cognición técnica y la involucración de los diferentes tipos de memoria (Wynn et al. 2016b), el papel del lenguaje y el planeamiento de acciones (Hecht et al. 2015), la importancia del contexto social y el

[16] Es decir, al estudiar la incisión de marcas en distintos soportes materiales se suele afirmar que indudablemente demuestran que nuestros antepasados llevaron a cabo algún tipo de práctica de contar.

[17] Como dibujos de patrones geométricos en cerámica, monumentos megalíticos, arte cavernario, manufactura de herramientas, celebración de rituales, orientación de tumbas y monumentos prehistóricos, etc. (cf. Dzbynski 2013).

aprendizaje durante su fabricación (Lycett et al. 2016), o su relación con nuestra cognición espacial (Wynn & Coolidge 2016).

Una cuestión que en mayor o menor medida está presente en todas estas aproximaciones se relaciona con el hecho de que, si tenemos en cuenta la clasificación de los modos de producción de herramientas líticas propuesta por Clark (1969), se puede observar que existe una clara evolución en la complejidad de la fabricación y formas de estas herramientas (Img. 3.7).[18] Este fenómeno puede deberse a una habilidad técnica y capacidades cognitivas relacionadas con la percepción espacial a pequeña escala más desarrolladas. Estaríamos hablando, en este sentido, de coevolución de nuestras habilidades técnicas y cognitivas, así como culturales (Colagè & d'Errico 2020).

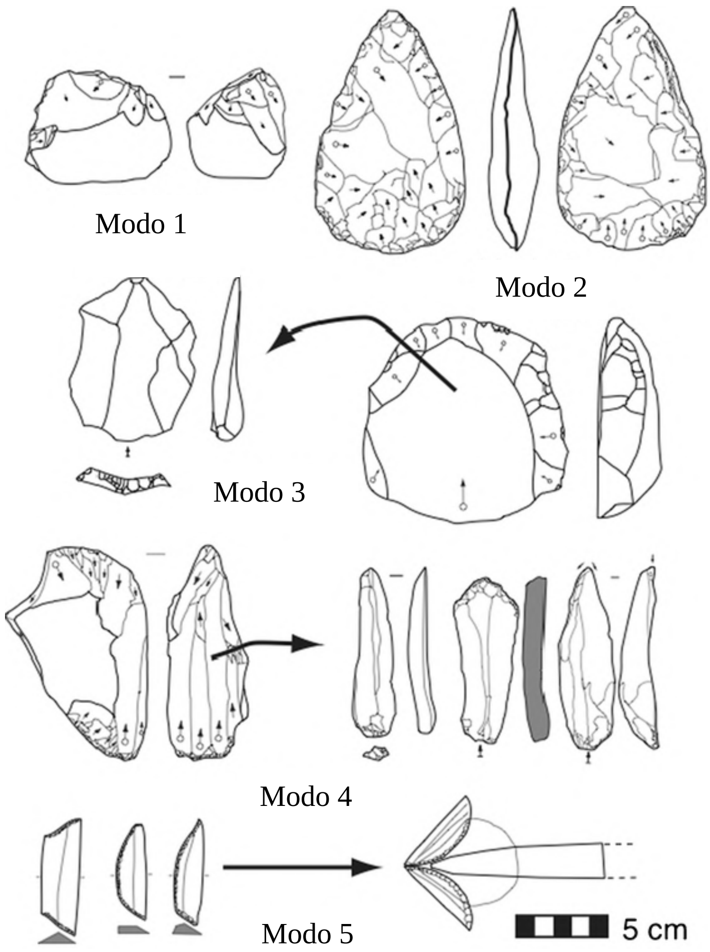


Imagen 3.7 Clasificación de los modos de producción de Clark (cf. Shea 2013, 153). El modo 1 sería el modo Olduvayense, principios del Paleolítico Inferior (2.6-2.5 Ma). El modo 2 el achelense, finales del Paleolítico Inferior (1.7-0.13 Ma). El modo 3 el musteriense, Paleolítico Medio (125.000 años). En el modo 4 tenemos cuchillas con forma de prismas, Paleolítico Superior (40.000 años). El modo 5 se compone de microlitos y herramientas compuestas, Paleolítico Superior Tardío y Mesolítico (40.000-12.000 años).

[18] Hoy día es habitual usar esta clasificación para el estudio de los modos de producción de herramientas líticas, aunque algunos autores han propuesto una versión mejorada acorde con los datos arqueológicos de los últimos años (cf. Shea 2013); por otro lado, esta evolución de la manufactura lítica no se corresponde con el material arqueológico hallado en China –ver los apéndices 5 y 7–. Lo veremos con más detalle en el capítulo 7, cuando analicemos comparativamente todos los casos de estudio presentados.

Sin embargo, existen pocos autores que hayan investigado de manera sistemática la implicación de esta coevolución cognitiva y cultural para la emergencia del conocimiento geométrico. Entre ellos, está el investigador francés Olivier Keller (2004a; 2006) y el investigador brasileño Manoel de Campos Almeida (2009; 2011). En este trabajo vamos a presentar únicamente las conclusiones del primero de estos autores, ya que el segundo dedica menos capítulos que traten específicamente sobre prehistoria de la geometría, y en estos capítulos, elabora una serie de propuestas similares a las de Keller.

Keller (2004a; 2004b; 2014) afirma que una de las maneras de acercarnos a este estudio es mediante el análisis de las asunciones geométricas no formuladas en relación al diseño y construcción de las herramientas líticas. En particular, considera tres elementos principales para entender la "Gestación de la Geometría": 1) la roca que se trabaja o modifica para crear estas herramientas, considerada como una hoja en blanco sobre la que aplicar las diversas técnicas de manufactura;[19] 2) la estructuración de este espacio, es decir, cómo trabajamos la superficie de la roca para crear estas herramientas; y 3) el objeto o herramienta ya acabada, en la que podemos ver de qué manera se han plasmado diversas formas o propiedades geométricas, tales como la simetría que encontramos en las hachas de mano achelenses –modo 2–, o las diversas formas espaciales que encontramos en los microlitos geométricos –modo 4 y en mayor medida modo 5–.

Teniendo en cuenta estos tres elementos, lo que el investigador francés defiende es que se puede constatar que existe una mayor complejidad en la manipulación de estas herramientas, así como de las formas espaciales obtenidas, desde el modo 1 al modo 5. No es lo mismo el segmento simple que se obtiene cuando las dos superficies de las herramientas olduvayenses intersecan –modo 1–, que la simetría altamente estandarizada de las hachas de mano achelenses –modo 2–. De la misma manera, con el modo 3 tendríamos una preparación de la superficie a trabajar llevada a cabo antes de producir el dibujo de la línea, mientras que en el modo 2 la línea simétrica de la herramienta se obtiene a medida que vamos fabricando el artefacto.

[19] Considerar la roca como una hoja en blanco es criticado por la teoría del compromiso material (Malafouris 2013) y por autores con una aproximación fenomenológica (Jones 2007, 6-15). Estas aproximaciones critican que se ignore el impacto que puede tener la propia forma de la roca sobre nuestra manera de manipularla para fabricar herramientas, así como sobre nuestra propia cognición.

La conclusión a la que llega este autor es que en el diseño y elaboración de las formas de estas herramientas se está aplicando conocimiento geométrico, si entendemos este tipo de conocimiento como estructuración del espacio de acuerdo a una forma geométrica preconcebida. Esto es, el sujeto tiene una roca o espacio de trabajo –elemento 1– el cual quiere estructurar de acuerdo a una forma geométrica que este ya tiene en su mente, y que aplica de forma manual –elemento 2– para finalmente producir una herramienta lítica con dicha forma geométrica deseada –elemento 3–. De esta manera, se encuentran en este período las primeras reflexiones de "naturaleza geométrica" que servirán como fundamento para el posterior desarrollo de los conceptos geométricos.[20]

El análisis de Keller está en sintonía con la aproximación etnomatemática. Lo que se estudia es de qué manera, en la manufactura de estas herramientas líticas, podemos constatar la aparición de ciertas asunciones no formuladas de "ideas geométricas", tales como líneas simétricas o formas como triángulos o círculos. La propuesta principal se basa en que los sujetos que fabricaron estas herramientas, para poder realizarlas de manera sistemática, tuvieron que poseer estas ideas geométricas antes de plasmarlas en la propia forma final de las herramientas.

En segundo lugar, y siguiendo dentro de la cognición visoespacial a pequeña escala, presentaremos algunos resultados relacionados con el arte prehistórico. Este tipo de manifestaciones artísticas han sido analizadas desde diversas perspectivas dentro de la arqueología cognitiva. El debate principal dentro de estos estudios se centra en la cuestión de determinar si el arte prehistórico tiene relación o algún impacto en el desarrollo de nuestra capacidad simbólica.

Podemos ejemplificar esta discusión con un debate reciente sobre el posible carácter representacional de grabados prehistóricos sobre diversos medios, como rocas, cáscaras de huevos, huesos, etc. (Img. 3.8). Por un lado, se considera que estos grabados no son simbólicos ni representacionales, sino que pueden explicarse en base al sistema visoespacial de nuestros antepasados y otros fenómenos cerebrales como nuestras emociones (Martín-Loeches 2016), o con un interés protoestético en los "patrones geométricos", y que dependen esencialmente de cómo procesamos cerebralmente la

[20] El etnomatemático Ubiratàn D'Ambrosio (2013) afirma en la misma línea que en el momento en el que nuestros antepasados comenzaron a fabricar herramientas líticas podemos encontrar la primera manifestación matemática de nuestra especie (pp. 25-26); o dicho de otro modo, es en ese momento en el que nuestra mente matemática se revela (p. 42).

información visual (Hodgson 2019a; 2019b). Por otro lado, una serie de investigadores defiende que estos grabados, de acuerdo a una serie de resultados experimentales, se pueden considerar como simbólicos y plenamente representacionales (Mellet et al. 2019).[21]

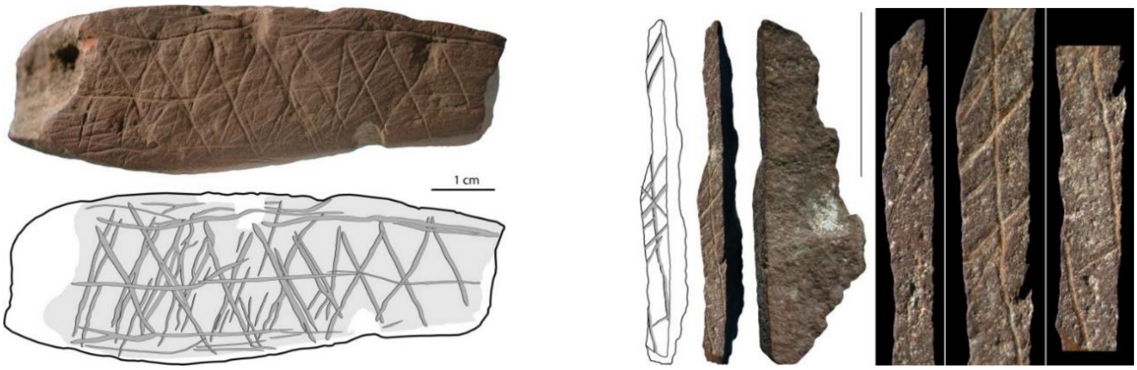


Imagen 3.8 Ejemplos de los grabados encontrados en la cueva de Blombos (Sudáfrica) de la Edad de Piedra Media (Henshilwood et al. 2009).

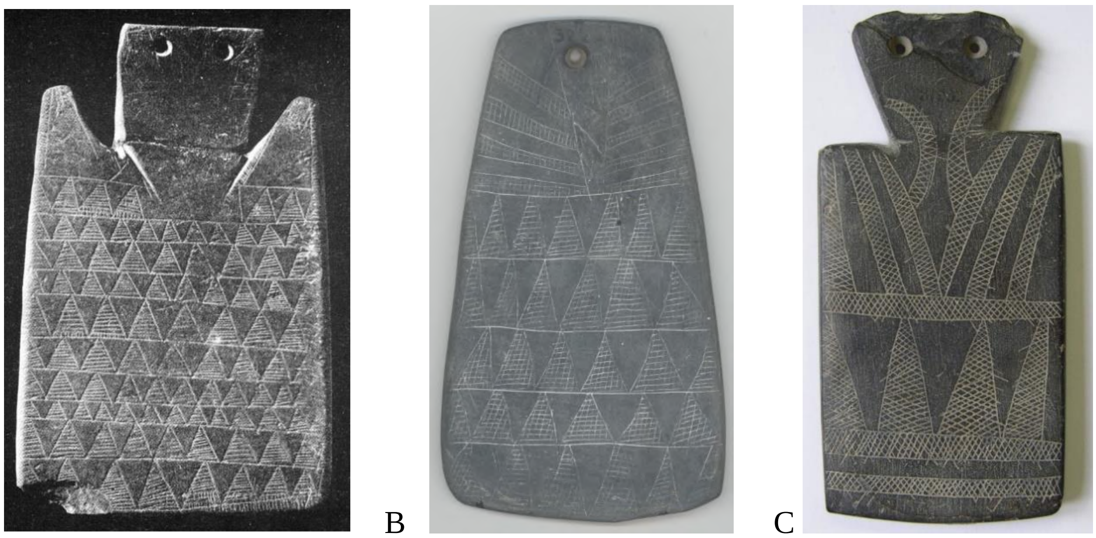
En relación con el desarrollo del conocimiento geométrico, Keller (2004a; 2004b; 2014) señala que existe un cambio cualitativo en el arte paleolítico respecto a la manufactura de herramientas, y es que en este caso líneas, puntos y figuras “geométricas” se representan directamente sobre una superficie. Uno de los puntos clave de su argumentación es que las líneas dibujadas en este tipo de manifestaciones culturales marcan un límite entre el interior y el exterior del dibujo, agilizándose así el pensamiento geométrico. De esta manera, los “conceptos geométricos” básicos como puntos, líneas o volúmenes llegan a nuestra mente a través de estos símbolos y abstracciones.

Además, este autor señala que la imperfección con la que son dibujadas las “figuras o relaciones geométricas” no es motivo para no hablar de ellas como plenamente geométricas en un sentido práctico. El punto clave para este autor es que nuestros antepasados fueron capaces, al dibujar estas figuras, de representar un rectángulo como una figura simétrica sobre su diagonal, siendo esta una de las características principales o definitorias de esta figura. Concluye entonces que “las personas del Paleolítico Superior, por lo tanto, inventaron la superficie de representación, la figura en general

[21] Para una revisión del debate y las diversas posiciones respecto al mismo, ver la introducción del capítulo de Martín-Loeches (2016) o el trabajo de Tylén et al. (2020).

junto con sus elementos (líneas y puntos), y ciertas figuras básicas, tales como el rectángulo y el círculo" (Keller 2004b, 18).

Para clarificar esta idea, vamos a presentar con más detalle un caso de estudio concreto que puede ser representativo. Este es el caso de las placas grabadas provenientes del Suroeste de la Península Ibérica y que se realizaron durante el Neolítico tardío (3500-2000 a.e.c.). Lo interesante de este tipo de placas (Img. 3.9) es que algunas de ellas contienen diseños con "patrones geométricos" repetitivos y estandarizados, y la propia tabla tenía diversas formas, como rectangulares o trapezoidales (cf. Lillios 2008).[22]



A B C

Imagen 3.9 A: Número de catálogo: 709. Tipo: azada. B: Número de catálogo: 16. Tipo: Clásico. C: Número de catálogo: 351. Tipo: *strappy*. Todas las referencias de las fotos originales están en el catálogo online de estas tablas, https://iberian.its.uiowa.edu/browse.php?by=type, consultado el 21/04/2020.

Dos son los elementos de estas tablas que queremos resaltar en nuestra presentación. Por un lado, se han propuesto diversas interpretaciones acerca de su uso, desde un sistema de escritura ideográfico, objetos heráldicos, amuletos usados en prácticas rituales, u objetos que contenían información genealógica (Jones 2007, 168-173; Lillios 2008; García Rivero & O'Brien 2014). Por otro lado, y este es el punto principal para nuestro trabajo, en la literatura arqueológica se denominan a los motivos representados en estas tablas como "geométricos".

[22] Existe una base de datos *online* de todas las tablas, más de 1.100 catalogadas –consultado el 21/04/2020–, bajo el nombre de ESPRIT, *The Engraved Stone Plaque Registry and Inquiry Tool*, https://iberian.its.uiowa.edu/index.php.

¿Cuál sería la conclusión que podríamos elaborar tomando en cuenta la aproximación de Keller? Que este tipo de material arqueológico pone de manifiesto el despertar del pensamiento geométrico en nuestra mente. Podríamos afirmar que las figuras que vemos en estas tablas, así como las relaciones geométricas de simetría o congruencia, pueden ser consideradas como plenamente geométricas en un sentido práctico. Esto es, aunque estos triángulos estén imperfectamente dibujados, son triángulos[23], ya que la figura está compuesta por tres lados; además, también vemos representadas las relaciones de congruencia y simetría. Por lo tanto, al menos de manera práctica, estaríamos hablando de "pensamiento geométrico".

En tercer y último lugar, y en esta ocasión dentro de la cognición visoespacial a gran escala, vamos a presentar algunas investigaciones en relación con la 'Arqueología del Paisaje' (Anschuetz et al. 2001; Thomas 2001). En este contexto el término 'paisaje' no hace referencia únicamente al medio natural en el que vive el ser humano, sino que también puede ser entendido de acuerdo a otros cuatro posibles significados interconectados, tales como: 1) cómo este medio natural es estructurado y organizado por los humanos que lo habitan; 2) cómo este medio es percibido de acuerdo a creencias, valores culturales y diversas actividades que lo transforman desde un medio físico-natural a un medio con sentido para tal población; 3) el lugar donde llevar a cabo las diversas actividades para la supervivencia; y 4) como una construcción dinámica, esto es, una población recibe un paisaje construido o modificado por sus ancestros, el cual podrán modificar y dejar así un nuevo paisaje a sus descendientes (Anschuetz et al. 2001, 160-161). Este tipo de consideraciones acerca del paisaje conecta de cierta manera con la tesis del compromiso material. Un paisaje no es un tipo de hábitat natural ajeno a sus pobladores, sino que es importante tomar en cuenta cómo este es percibido, cómo afecta a nuestra propia percepción del mismo, y cómo puede ser modificado activamente por el sujeto que lo habita.

Lo más relevante para nuestro trabajo es cómo los pobladores del pasado modificaron este paisaje a través sobre todo de la construcción de monumentos megalíticos. Dentro de esta aproximación a la arqueología del paisaje queremos presentar

[23] Como veremos en la próxima sección y a lo largo de los próximos capítulos, esta conclusión nos parece infundada arqueo-históricamente. Por ejemplo, en la antigua civilización china se desarrolló un tipo de conocimiento geométrico en un sentido matemático, y sin embargo no desarrollaron el concepto de triángulo, y ni siquiera de ángulo. Afirmar que estas poblaciones poseyeron los "conceptos geométricos" de triángulo o círculo por ser capaces de dibujar y manipular estas formas espaciales nos parece infundado.

dos categorías complementarias del estudio de este tipo de construcciones. Por un lado, se pueden estudiar o analizar las formas espaciales de estos edificios. Por otro, la posible orientación de estos monumentos, la cual puede haberse llevado a cabo en relación al paisaje circundante, a las ideas cosmológicas de la población que los construyó, así como a ciertos patrones astronómicos. Este último fenómeno se estudia en el campo de la arqueoastronomía –que definiremos posteriormente–.

En el primero de los casos, autores como Bradley (1998) o Thomas (2001) argumentan que los monumentos megalíticos pudieron haberse construido como un elemento que permitiera dominar el paisaje, construyéndolos por lo tanto en lugares centrales para la población.[24] No tenemos constancia de ningún trabajo que haya analizado de manera sistemática si existe una forma preferente a la hora de llevar a cabo este tipo de construcciones de manera transcultural. Sin embargo, Bradley (1998; 2012) ha analizado a lo largo de los años de qué manera el círculo, o una forma más o menos circular, ha sido la composición arquitectónica básica de gran parte de monumentos prehistóricos en Gran Bretaña entre el 3000 y el 1500 a.e.c. Entre estos monumentos tenemos construcciones tales como crómlech, tumbas de corredor o círculos de piedra. Para ello, se siguieron tanto la imitación del paisaje circundante, de los accidentes geográficos, así como un esquema simbólico o cosmológico común. Por lo tanto, al menos en el caso de la Prehistoria de Gran Bretaña, podemos ver que hubo una fijación de sus pobladores por representar este tipo de forma espacial básica de acuerdo a diferentes criterios.

Por otro lado, investigadores como Keller (2006) o Groenewoudt (2011) señalan que se puede apreciar el paso de estas formas circulares a rectangulares o cuadradas en la Edad de Bronce –lo que Groenewoudt (2011) denomina "paisajes rectilíneos" (p. 12)–, llamando la atención sobre el hecho de que "en un período de tiempo relativamente corto, el paisaje se volvió mucho más 'cultural' y planificado, y su estructura principal cambió drásticamente" (Groenewoudt 2011, 7). Aunque no se sabe exactamente por qué tuvo lugar este cambio, algunos investigadores creen que este estuvo impulsado por el paso a un modo de subsistencia sedentario y basado en la economía agrícola, por lo que tuvieron que ocupar extensiones más grandes y mejor estructuradas de terreno que en períodos anteriores (cf. Groenewoudt 2011).

[24] No es nuestra intención discutir las posibles funciones de estos monumentos. Para una discusión de este tema ver Bradley (1998), Anschuetz et al. (2001) o Jones (2007).

La segunda de las categorías trata acerca de la posible orientación de monumentos, edificios, e incluso enterramientos o prácticas funerarias (Bradley 1998; 2012). En relación a este fenómeno surgió a partir de los años 70' del siglo pasado la arqueoastronomía, cuyo interés principal es el estudio de cómo nuestros antepasados percibían y estudiaban el cielo. Esto es investigado principalmente a través del análisis de la orientación con patrones astronómicos de ciertos edificios y monumentos prehistóricos (Ruggles 2005; 2015).[25]

La arqueoastronomía surgió, en parte, como una reacción crítica a los estudios que se estaban llevando a cabo desde una perspectiva o corriente estadística acerca de la orientación arqueoastronómica de monumentos megalíticos en Gran Bretaña. Esto es, autores como Hawkins o Thom, cuyas obras ya hemos criticado anteriormente, realizaron análisis estadísticos para ver si existía alguna correlación entre la orientación de diversos monumentos megalíticos y los patrones astronómicos visibles para sus constructores. Tras sus investigaciones, estos autores concluyen que sus constructores poseyeron indudablemente conocimiento astronómico –y matemático–.

Este tipo de conclusiones se consideran por lo general infundadas o erróneas desde un punto de vista arqueológico y arqueoastronómico. Una de las cuestiones principales que han criticado de este tipo de estudios ha sido que los investigadores de esta corriente estadística ignoran por completo el contexto socio-cultural en el que estos monumentos megalíticos fueron construidos (Ruggles 2005; 2015). Sin embargo, esto no quiere decir que no exista una posible orientación astronómica de este tipo de construcciones. Por ejemplo, algunos investigadores han realizado recientemente un estudio sistemático acerca de la orientación arqueoastronómica de gran parte de los monumentos megalíticos del mediterráneo (Hoskin 2001; Hoskin & Belmonte 2002).

A continuación, vamos a presentar dos casos de estudio representativos que nos sirven para ilustrar las características de este tipo de construcciones que podrían ser

[25] Como podemos ver en la obra editada por Selin (2000), muchas culturas de todo el mundo, tanto prehistóricas como de la antigüedad, y poblaciones de cazadores-recolectores de hoy día, hacen uso de cierto conocimiento astronómico para cuestiones de vital importancia como la elaboración de calendarios, la celebración de rituales, la caza, etc. Por otro lado, Robbins (2000) revisa el material arqueológico que puede constatar la relación del ser humano con el cielo en el pasado, y concluye que no están claras las relaciones entre material arqueológico o modificación del paisaje y astronomía en el Paleolítico, siendo en el Neolítico cuando este tipo de prácticas comienzan a aparecer de manera más clara y general.

relevantes para nuestro trabajo. Con este fin, presentaremos los casos de Göbekli Tepe (Sanliurfa, Turquía) y el dolmen de Menga (Antequera, España).

En primer lugar, tenemos el conjunto monumental de Göbekli Tepe, construido sobre un túmulo de 300 m de diámetro entre los milenios X-XI a.e.c. y que consta principalmente de dos tipos de construcciones o edificios bien diferenciados. Por un lado, edificios redondos u ovalados, de unos 10-20 m de diámetro interior y paredes que miden hasta 2.5 m, con pilares con forma de 'T' que pueden medir hasta 4 m; y por otro, edificios rectangulares de entre 29 m^2 los más grandes y 5 m^2 los más pequeños, y que poseen los mismos pilares con forma de 'T' de hasta 2 m (Img. 3.10).[26]

Imagen 3.10 Excavación de Göbekli Tepe, con los edificios monumentales circulares rodeados de los edificios cuadrados o rectangulares. Foto del instituto arqueológico alemán (Dietrich et al. 2019).

En todo el recinto monumental hay diversos motivos simbólicos, lo que ha llevado a algunos investigadores a argumentar que Göbekli Tepe fue un centro ritual (Schmidt 2010; Dietrich et al. 2012). Por otro lado, Dietrich y colaboradores (2019) sostienen, tras

[26] Hasta 69 son los pilares hallados en todo el conjunto arqueológico, mayormente con motivos de animales, aunque también con formas antropomórficas con manos y brazos, así como algunos motivos abstractos (Dietrich et al. 2019).

analizar los instrumentos y restos de alimentos encontrados en los edificios circulares, que es posible que en estos edificios se llevaran a cabo festines para el fortalecimiento de lazos intragrupales entre distintos grupos de cazadores-recolectores de la zona. Sin embargo, hace falta desarrollar más líneas de investigación que integren los diferentes aspectos del monumento megalítico para poder llegar a conclusiones más firmes acerca de la función y uso de este conjunto monumental.[27]

Vamos a presentar brevemente una hipótesis que defiende que este conjunto monumental puede ser considerado como el primer observatorio astronómico de la historia, siendo los motivos simbólicos de las columnas (Img. 3.11) representaciones de los asterismos visibles desde el lugar en el que estas fueron erigidas (Sweatman & Tsikritsis 2017). Estos autores basan sus conclusiones en una serie de análisis estadísticos que emparejan los diversos elementos arquitectónicos de Göbekli Tepe, especialmente las columnas, con patrones astronómicos, ignorando así el contexto socio-cultural y material de este edificio. Por citar una de las críticas a esta concepción estadística, Notroff y colaboradores (2017) señalan que muchos de los pilares que estos autores consideran para su estudio arqueoastronómico no se encuentran en su posición original, por lo que la posible correspondencia pilar-asterismo no tiene fundamento arqueológico. Por otro lado, también es posible que todo el conjunto megalítico poseyera techo, siendo entonces improbable su funcionamiento como observatorio astronómico (Notroff et al. 2017).

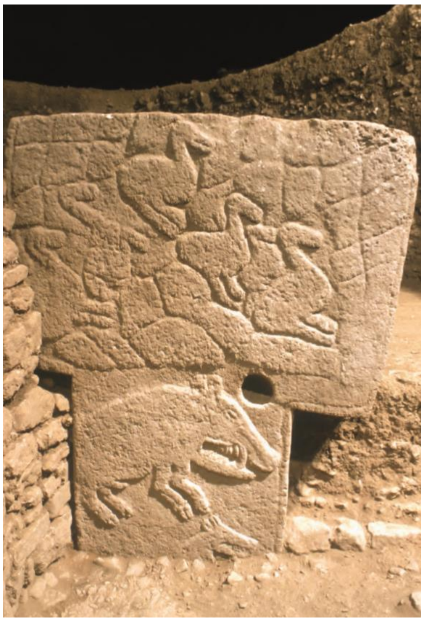


Imagen 3.11 Pilares con forma de ‘T’ excavados en Göbekli Tepe. Izquierda: jabalí y zorro con paisaje sobre estos. Derecha: representación de un zorro (Peters & Schmidt 2004).

[27] Investigadores como Banning (2011) han defendido, sin embargo, que los edificios circulares eran casas o habitaciones decoradas, y todo el conjunto sería un lugar para vivir, y no un centro ritual monumental.

En segundo lugar, vamos a presentar el Dolmen de Menga (Img. 3.12), monumento megalítico construido en torno al 3800–3600 a.e.c. en el sur de la península ibérica (García Sanjuán & Lozano Rodríguez 2016). Lo interesante de este monumento es que está orientado hacia el noroeste, acimut 45º, lo cual representa una anomalía respecto al conjunto de monumentos arqueoastronómicos del mediterráneo, de los cuales el 95% están orientados entre 55º–125º (Hoskin 2001). Esta anomalía respecto a su orientación puede explicarse analizando el contexto paisajístico en el que fue construido, ya que se puede constatar que este está orientado hacia la "Peña de los enamorados" (Img. 3.13), formación rocosa que recuerda al rostro de un ser gigantesco acostado (Hoskin & Belmonte 2002, 94).[28]

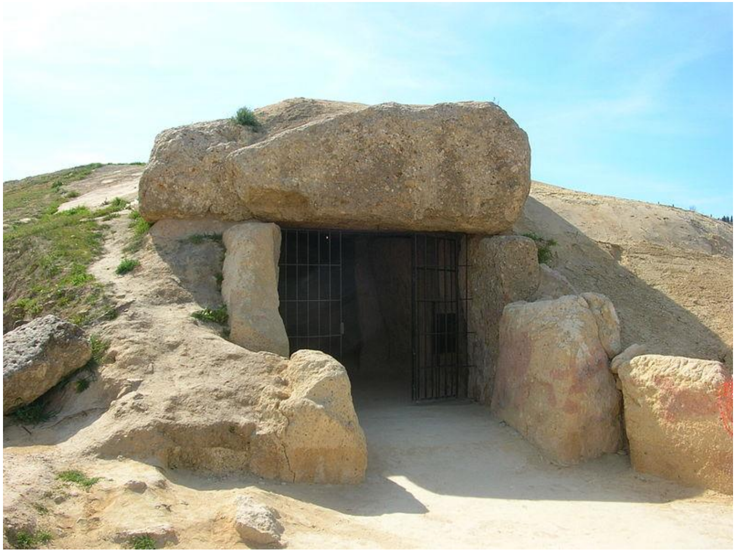


Imagen 3.12 Dolmen de Menga visto desde el exterior. Fotografía del usuario Grez (Wikipedia: Wikipedia commons), https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dolmen_de_Menga_Antequera.JPG consultado el 24/04/2020.

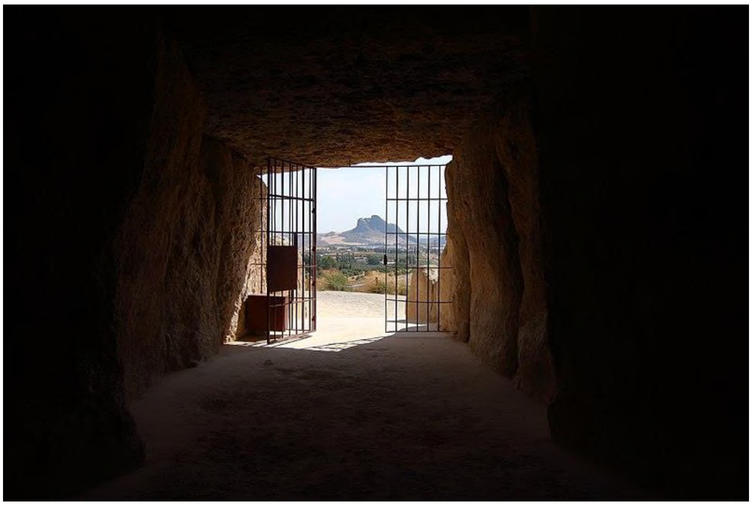


Imagen 3.13 Peña de los enamorados vista desde el interior del dolmen. Fotografía del usuario Malopez21, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dolmen_de_Menga,_Pe%C3%B1a_de_los_enamorados_desde_el_interior_del_dolmen.jpg, consultado el 24/04/2020.

[28] No es necesario conferirle a este accidente geográfico ninguna connotación ritualística, como su forma de rostro de gigante, para constatar su prominencia respecto al paisaje que rodea este monumento megalítico.

La hipótesis acerca de la importancia de dicha peña respecto a su orientación ha sido reforzada posteriormente, al encontrar en esta formación rocosa una intensa actividad de poblaciones neolíticas y de la Edad de Bronce. Una de las más importantes son las pinturas rupestres encontradas en el abrigo de Matacabras, que coincide con el eje axial del dolmen (García Sanjuan & Wheatley 2009; 2010; Rogerio-Candelera et al. 2018). Esto ha llevado a algunos autores a concluir que "la inusual orientación de Menga podría explicarse como una referencia simbólica a un foco de actividad ritual previamente existente que, en el momento en el que se inició la construcción de Menga, todavía era de gran importancia ideológica" (García Sanjuan & Wheatley 2010, 30). Sin embargo, con los datos actuales no se puede confirmar esta hipótesis, aunque permanece como una explicación plausible de su inusual orientación (Rogerio-Candelera et al. 2018).

Keller (2006) considera que este tipo de construcciones son relevantes para el estudio de los orígenes prehistóricos del "pensamiento geométrico" en dos sentidos. Por un lado, en cuanto al estudio de su plano arquitectónico. Por otro, habla de la importancia de tomar en cuenta que a comienzos del Neolítico las poblaciones humanas empiezan a construir campamentos, dando paso así a poblaciones sedentarias. Este fenómeno posibilitará el estudio y establecimiento de ciertos ciclos –estudio del movimiento de los astros, sucesión de las estaciones durante el año, etc.– los cuales también quedarán plasmados en la manera en que ciertos edificios se orientan respecto a algunos patrones astronómicos.

Respecto a estos casos de estudio, este autor establece una diferencia principal con los "elementos geométricos" del Paleolítico, y es que en esos casos estábamos considerando el trabajo local del espacio, lo que daba lugar principalmente a la elaboración de una geometría plana. Sin embargo, con este tipo de construcciones neolíticas lo que surge es una verticalización de las consideraciones espaciales[29], sobre todo en relación a cómo se construyen estos monumentos megalíticos y lugares para habitar. Se abre camino, en palabras de Keller, para la creación de una geometría tridimensional estándar.

Para mostrar a qué hace referencia con esta idea del nacimiento de la geometría tridimensional, presenta un análisis en relación con la planta arquitectónica de diversos yacimientos arqueológicos de Oriente Próximo (Keller 2006, 16-17; 26-47). La

[29] Con verticalización del espacio hace referencia al levantamiento de los muros para la construcción de estos edificios.

conclusión principal a la que llega es que a través de las diversas “figuras geométricas” usadas en este tipo de construcciones podemos constatar el surgimiento de ciertos “elementos geométricos” como el paralelepípedo –vinculado especialmente con la elaboración de ladrillos y el uso de plantas cuadradas–, las pirámides, conos, cilindros, esferas, etc. Esto es, se usan elementos arquitectónicos cuya forma es la de una figura geométrica tridimensional, a diferencia de las figuras planas usadas en el Paleolítico.

De la misma manera, la monumentalidad de estos edificios es un elemento importante a tener en cuenta por la siguiente razón. Al estudiar la planta arquitectónica de estos conjuntos monumentales, el autor muestra de qué manera los edificios circulares y con planta rectangular o cuadrangular tienen una forma geométrica casi perfecta. Sería posible dibujar un círculo casi perfecto sin mayores herramientas que una cuerda atada a un palo, y la hacemos girar sobre este cuando se trata de un dibujo a pequeña escala. Sin embargo, es prácticamente imposible hacerlo con los círculos, cuadrados y rectángulos de grandes dimensiones. Por lo tanto, si no fue posible hacerlo de manera práctica, con ningún tipo de herramienta que conozcamos de estos períodos, es claro para este autor que fue necesario que sus constructores poseyeran otro tipo de conocimiento; particularmente, acerca de las propiedades geométricas de las figuras usadas para su construcción.

Por otro lado, Haklay y Gopher (2015; 2019; 2020) han investigado mediante el análisis formal arquitectónico la estructura de diversos monumentos megalíticos también de Oriente Próximo. La conclusión a la que llegan estos autores es que en estos monumentos megalíticos encontramos una alta precisión en la construcción y planeamiento de estos edificios, para la cual es necesaria la conceptualización de ideas geométricas en relación sobre todo con el concepto de círculo, semicírculo, y centro del círculo, así como diversos métodos para su realización. Por mencionar un ejemplo, afirman que la simetría que encontramos en Göbekli Tepe pone de relieve que sus constructores y planificadores tenían conocimiento acerca de ciertos principios geométricos.

5. Una posible sistematización de los estudios en prehistoria de las matemáticas

Tras la revisión general que hemos presentado en las secciones anteriores sobre los trabajos en prehistoria de las matemáticas, tenemos ahora un objetivo doble. Por un lado, mostrar una serie de críticas acerca del estado actual de este campo; por otro, elaborar un conjunto de criterios generales que podrían servir para establecer cierta sistematización en esta área de conocimiento.

En primer lugar, queremos señalar que en la mayoría de trabajos acutales en prehistoria del concepto de número se ha asumido y puesto en práctica un tipo de investigación interdisciplinar. En este sentido, estos autores defienden que para entender la emergencia y desarrollo del conocimiento matemático en el pasado, el registro arqueológico tiene que ser analizado junto a toda una serie de presupuestos antropológicos, cognitivos y evolutivos en relación al desarrollo y evolución de nuestra especie.

Sin embargo, en estos trabajos se siguen confundiendo los niveles relacionados con nuestras habilidades cognitivas cuánticas con los niveles relacionados con el desarrollo de conocimiento matemático. En el caso de la prehistoria del concepto de número, tenemos por un lado los huesos en los que se habían realizado un número determinado de marcas, los cuales han sido considerados como "los primeros casos de notación numérica" (d'Errico et al. 2017); por otro lado, se afirma que el uso de cuentas de collar unidas mediante una cuerda sirvieron para "comprender el concepto de número" (Overmann 2016a).

En el caso de la prehistoria de la geometría, diversos elementos como la elaboración de herramientas líticas simétricas o la construcción de plantas arquitectónicas circulares o rectangulares son considerados para afirmar que en estos períodos emergió el "pensamiento geométrico", así como "conceptos geométricos". Si tenemos en cuenta la clasificación en tres niveles propuesta en el capítulo anterior, podemos aclarar las siguientes cuestiones:

- Acumular y usar marcas realizadas sobre diversos materiales estaría relacionado con la percepción y codificación de cantidades (nivel I) y posiblemente con el desarrollo de prácticas básicas de contar (nivel II);

- usar cuentas de collar para contar estaría también relacionado con la percepción y codificación de cantidades (nivel I), y de nuevo, posiblemente con el desarrollo de prácticas de contar en un sentido básico (nivel II);

- percibir la simetría, o elaborar una herramienta con forma simétrica, estaría relacionado con nuestra cognición visoespacial a pequeña escala (nivel I);

- dibujar figuras que nosotros reconocemos y denominamos como ʿtriánguloʾ o ʿcírculoʾ tanto en el arte prehistórico como en las plantas arquitectónicas de monumentos megalíticos está relacionado con nuestra cognición visoespacial a pequeña y gran escala (nivel I);

En este mismo sentido, el antropólogo Everett (2017, 29-44) ha propuesto hablar de ʿNumerales Prehistóricosʾ en lugar del concepto de número o sistemas de notación numérica en la prehistoria. De esta manera, estaríamos hablando de un tipo de numerales que son usados de manera manipulativa en situaciones simples (nivel II), una práctica distinta y bastante alejada del posterior desarrollo del concepto de número, e incluso diferente al uso de numerales en un sentido abstracto o simbólico.

En la misma línea, el filósofo Peter Damerow (1999) sostiene que todos los elementos culturales desde el Paleolítico hasta el final del Mesolítico solo ponen de manifiesto la existencia de una "cuantificación pre-aritmética", o protoaritmética. En este sentido, la información cuántica del registro arqueológico está relacionada con comparaciones directas de cantidades y tamaños, lo cual estaría también bastante alejado de un uso teórico de los números propio del nivel III de nuestra cognición numérica.

Por otro lado, en la literatura especializada existe un conjunto de trabajos que se ha dedicado a investigar arqueológica y paleoantropológicamente la ʿintegración visoespacialʾ (Bruner & Iriki, 2016; Bruner et al. 2016; Bruner et al. 2018). Esto es, de qué manera diversas actividades de nuestros antepasados, tales como la manufactura de herramientas líticas o la manera de moverse y modificar el espacio, pudieron afectar tanto a nuestra cognición visual y espacial, así como a su integración.

Hemos querido presentar brevemente estas tres formas de aproximarse al estudio del pasado para mostrar de qué manera se pueden investigar elementos relacionados con las bases cognitivas de la cognición matemática, tales como la percepción y codificación de cantidades, o prácticas relacionadas con la percepción y modificación del medio, sin tener que hablar de elementos correspondientes al nivel III de nuestra cognición matemática. Esto es, considerar el impacto de estas herramientas materiales o prácticas sobre nuestra cognición cuántica o visoespacial (nivel I), o su uso en prácticas simples de contar, organizar espacialmente el medio, representar formas simples de manera externa y posibilitar la manipulación de las mismas (nivel I y II), sin asumir que estas impliquen la posesión del concepto de número o de conocimiento geométrico (nivel III).

A continuación, vamos a presentar los cinco elementos que, desde nuestra perspectiva, podrían ser útiles para llevar a cabo una sistematización de la prehistoria de las matemáticas.

El primer elemento sería subrayar la *importancia que tiene la cultura material sobre nuestra cognición*. Aunque parece un requisito trivial, puesto que los datos de los que disponemos para hablar de las raíces prehistóricas de las matemáticas son mayormente el registro material, queremos subrayar su importancia dado el debate existente en los estudios en cognición matemática sobre el impacto de la cultura material sobre nuestras capacidades cognitivas; o, sobre todo, cómo esta cultura material es obviada por algunos estudios actuales en cognición matemática.

En segundo lugar, consideramos que nuestras *habilidades cognitivas y la cultura coevolucionan*. Como han mostrado Colagè & d'Errico (2020), diversas innovaciones relacionadas con prácticas simbólicas, tecnológicas o para la subsistencia surgieron en épocas diferentes en cada región del mundo, y estas aparecen y desaparecen del registro arqueológico en una misma región de estudio. Este fenómeno tiene sentido si consideramos que nuestras capacidades cognitivas y nuestra cultura coevolucionan, y no puede ser explicado desde un marco de trabajo en el que se considere que la evolución biológica prima sobre la cultural.

En tercer lugar, proponemos una *interpretación contextual* de la emergencia y evolución de los instrumentos que sirven para comprender la prehistoria de las matemáticas. En el registro arqueológico puede comprobarse que no existió una respuesta universal de los seres humanos a la hora de desarrollar instrumentos con los que codificar información cuántica, organizar espacialmente el medio, o representar formas básicas. Las respuestas o prácticas culturales de los grupos humanos en el pasado dependen de un conjunto de elementos, en el que tenemos que considerar sus habilidades biológicas y cognitivas, pero también el *stock* cultural del que disponen, el entorno en el que estas poblaciones habiten, sus recursos disponibles, preocupaciones culturales particulares, etc.[30]

[30] El segundo y tercer elemento pueden ejemplificarse con los datos que muestran Colagè & d'Errico (2020) en su estudio. Los llamados por ellos 'sistemas de notación', y que nosotros preferimos denominar como numerales prehistóricos, surgieron en Europa hace unos 70.000 años, mientras que en África lo hicieron hace 40.000, y en Asia y Oriente Próximo hace 10.000 años. Esta es solo una de las 29 innovaciones culturales que analizan en su trabajo, y el patrón general de emergencia es desigual para las cuatro regiones y franjas temporales consideradas. Por lo tanto, solo una aproximación contextual y coevolucionista sería

Estos tres primeros elementos que hemos presentado pueden considerarse como mayoritariamente aceptados, o como la base teórica que comparten gran parte de los investigadores que trabajan en temas relacionados con las raíces prehistóricas del conocimiento matemático. A continuación, vamos a presentar dos elementos que, de alguna manera, han estado también presentes en estos trabajos, pero que vamos a reinterpretar, o a incluir dentro de nuestra concepción general de los tres niveles relacionados con la emergencia y desarrollo de la cognición geométrica.

En cuarto lugar, tenemos el *uso de Sistemas de Memoria Artificiales* –SMA–, sobre todo en relación con la distinción que establecimos entre herramientas pragmáticas y cognitivas. Para entender la emergencia de la protogeometría, no solo se debe constatar la aparición de estas herramientas cognitivas en el registro arqueológico, sino que habría que probar o mostrar que estas se usaran explícita y activamente para representar información espacial con la cual operemos y obtengamos algún conocimiento aproximado acerca de las mismas. Es decir, no basta con atestiguar cómo en el registro arqueológico aparecen ciertas herramientas cognitivas con una forma espacial determinada, sino que sería preciso analizar si con estas herramientas se generó algún tipo de conocimiento, aproximado e impreciso, sobre las propias formas espaciales.

En quinto y último lugar, hay que dar cuenta de la *acumulación cultural de estas herramientas*. Es decir, para comprender las raíces prehistóricas del conocimiento protogeométrico no basta con encontrar las herramientas más antiguas en las que se represente algún tipo de información espacial, o de qué manera una misma práctica cultural aparece en diversas poblaciones de distintos puntos del planeta. Lo crucial para desarrollar una visión general de la emergencia de la protogeometría, y además poder trazar sus raíces prehistóricas, sería investigar de qué manera estas herramientas, así como el conocimiento que se genera con ellas, va acumulándose y mejorándose a lo largo del tiempo.

Una vez presentados estos cincos elementos para sistematizar los trabajos en prehistoria de las matemáticas llegamos a la siguiente conclusión: ninguno de los datos arqueológicos presentado por los investigadores de esta área de trabajo nos permite concluir que el conocimiento matemático (nivel III) se desarrollara en la Prehistoria.

capaz de explicar por qué surgieron de esta manera todas estas innovaciones culturales frente a otras propuestas centradas exclusivamente en criterios biológicos.

Esto es, no podemos concluir a través del estudio del material arqueológico presentado en este capítulo, ni las prácticas culturales relacionadas con este, que el concepto de número, ni de figura geométrica, ni el conocimiento propiamente matemático emergiera en la Prehistoria. Considerando la caracterización del nivel III expuesta en el capítulo anterior, podemos afirmar que ninguna población del pasado remoto desarrolló consideraciones teóricas de las formas espaciales de las herramientas cognitivas ni ningún tipo de marco simbólico en el que ordenar o sistematizar el posible conocimiento matemático que desarrollaran.

Podríamos entonces realizar una pregunta que, al menos teóricamente, tiene más sentido: ¿se puede atestiguar la emergencia de las protomatemáticas a través de estos estudios interdisciplinares en la Prehistoria? Para responder a esta pregunta, vamos a analizar con algo más de calma de qué manera los elementos presentados por los prehistoriadores de la geometría podrían dar cuenta del origen de este tipo de conocimiento.

El primero de los elementos que presentamos fue la relación entre la evolución de la manufactura de herramientas líticas y la posibilidad de que despertara nuestro "pensamiento geométrico". En este sentido, como la mayoría de investigadores afirma, estas herramientas fueron usadas de manera pragmática; esto es, en actividades que modifican principalmente el medio físico.[31] Entre estas actividades tendríamos el despedazamiento de huesos, cortar carne, cavar hoyos, poder cazar a una mayor distancia, etc. Por lo que la forma geométrica particular de estas herramientas, o la mayor complejidad que fueron adquiriendo, está relacionada con el desarrollo de nuestra percepción visoespacial y habilidades motoras, una mayor cognición técnica, etc. (nivel I). Desde nuestro punto de vista, la evolución de la manufactura de herramientas líticas no atestiguaría el desarrollo o emergencia del conocimiento protogeométrico (nivel II).

En relación con el arte prehistórico, ya indicamos que existe una extensa discusión acerca de la posibilidad de considerarlo como representacional o simbólico. Sin embargo, no toda representación simbólica de figuras o relaciones espaciales demuestra la posesión o emergencia del conocimiento protogeométrico. Basándonos en el material arqueológico y etnográfico, no puede concluirse que estas formas espaciales del arte parietal y mobiliar

[31]Aunque algunos autores afirman que la forma simétrica de las hachas de mano pudieron tener valores estéticos asociados (Kohn & Mithen 1999; Mithen 2003). Sin embargo, este posible uso simbólico no tiene relación alguna con el uso simbólico de herramientas cognitivas en un sentido protogeométrico.

fueran usadas para estudiar las propiedades espaciales de estas figuras, ni siquiera de una manera imprecisa ni rudimentaria. Es decir, los cuadrados, triángulos, o líneas paralelas representadas sobre los diversos soportes materiales se usan como motivos estéticos o culturales, no para obtener conocimiento acerca de las propiedades de las figuras mismas, ni de sus relaciones.

Además, como ha señalado Watkins (2004), la mayoría del arte prehistórico, así como elementos arqueológicos analizados en relación a la prehistoria del concepto de número, son herramientas o manifestaciones con un contenido simbólico demasiado restringido o individual como para poder formar parte de un sistema de representación simbólica. En nuestro caso de estudio, las diversas figuras representadas en el arte prehistórico están aisladas o sujetas a la superficie de representación en la que se elaboran. De esta manera, el uso restringido de estas representaciones simbólicas difícilmente podría llevar al desarrollo de un marco simbólico en el que entender los conceptos protogeométricos y estudiar las relaciones entre distintas figuras.

En tercer y último lugar, tenemos la construcción de monumentos megalíticos, en relación a los cuales es particularmente relevante para nuestro trabajo el uso prominente de plantas arquitectónicas circulares, cuadrangulares o rectangulares construidas de una manera perfecta, o que se asemeja fielmente a cómo entendemos matemáticamente estas figuras.

Respecto a este punto, tenemos que señalar que existen trabajos etnográficos que han analizado específicamente cómo se llevan a cabo este tipo de construcciones en sociedades de cazadores-recolectores actuales. Específicamente, el trabajo de los antropólogos Thiering y Schiefenhövel (2016) es esclarecedor. Estos han analizado la práctica cultural de los *Eipo,* la cual consiste en la construcción de sus casas sagradas con una forma circular con un tamaño y forma bien definida, y que podríamos caracterizar como perfectamente circular. La conclusión a la que llegan estos investigadores difiere de la propuesta de los etnomatemáticos y arqueólogos que hemos presentado en este trabajo. Estos antropólogos comprobaron que esta población no posee, y ni siquiera necesita, ningún concepto abstracto de círculo en un sentido geométrico para poder construir este tipo de edificios. Por otro lado, el filósofo Matthias Schemmel (2016a, 21-40; 2016b) defiende que la elaboración de estas ʻformas espaciales perfectas' están encarnadas en las prácticas culturales propias de esta población, particularmente, en sus prácticas rituales –lo que este autor denomina como un control mítico del espacio–. Para desarrollar este tipo de control mítico o ritual del espacio no es necesaria ni la posesión de conocimiento matemático, ni de un lenguaje técnico, y ni siquiera de instrumentos de medición.

De esta manera, estos autores subrayan la importancia de analizar y comprender de qué manera los rituales pudieron influenciar en la elaboración de herramientas simbólicas con formas geométricas, así como en la construcción de conjuntos arquitectónicos con una orientación, tamaño y forma determinada. Este tipo de trabajos podría dar una explicación que se ajustara mejor a los datos arqueológicos y etnográficos, sin necesidad de asumir la existencia de conocimiento protogeométrico o uso de conceptos matemáticos en poblaciones del pasado. Por lo tanto, la manera en que estos conjuntos arquitectónicos fueron diseñados o construidos podría ser explicada sin asumir la existencia del segundo nivel.

Son dos las características relevantes de los rituales para comprender la posible importancia de este tipo de construcciones para nuestro trabajo. En primer lugar, como señalan Watkins (2004) y Fogelin (2007), este tipo de construcciones arquitectónicas, que surgieron principalmente en el Epipaleolítico y Neolítico, pudieron servir tanto para la realización de rituales como para el almacenamiento de los símbolos usados en estos rituales. Además, estos símbolos estarían materializados en diversas herramientas cognitivas que pudieron ser manipuladas y controladas de una manera más directa, y cuyo acceso estaría limitado a un número reducido de la población. Precisamente por esta limitación en cuanto a su uso y creación era tan importante tener un lugar concreto en el que almacenarlos o utilizarlos.

En segundo lugar, Bell (1997, 139-164) presenta seis características que podrían definir las prácticas rituales, no teniendo por qué un ritual particular cumplir con todas ellas, ni con la misma intensidad que otros rituales pueden hacerlo. Estas características hacen referencia al formalismo, tradicionalismo, invarianza, gobernanza bajo reglas, simbolismo sacro e interpretaciones de estas prácticas. Estas características explicarían por qué las formas espaciales materializadas en herramientas rituales y construcciones megalíticas se elaboraron de manera tan rigurosa y fiel a los “conceptos geométricos” que nosotros vemos que estas podrían estar representando o encarnando. Es decir, para su construcción se seguirían una serie de pasos bien definidos y cuyo orden y ejecución tuvieron que ser llevados a cabo a la perfección para que el ritual se hubiera realizado correctamente.

Por lo que podemos afirmar que ninguno de los materiales arqueológicos presentado por estos investigadores, sobre todo pertenecientes al Paleolítico, pone de manifiesto la posesión de conceptos geométricos, conocimiento matemático, y ni siquiera de conocimiento protogeométrico. Como veremos con más detalle en los capítulos siguientes, será precisamente en el Neolítico donde comiencen a surgir ciertas prácticas culturales y herramientas cognitivas que pongan de manifiesto las bases cognitivas y culturales para el desarrollo del conocimiento protogeométrico.

Por lo que los estudios acerca de los orígenes prehistóricos de la protogeometría y geometría tienen que ver con dos cuestiones. En primer lugar, con la aparición en la prehistoria del comportamiento simbólico de nuestra especie. Dentro de este comportamiento simbólico es de especial relevancia el desarrollo de herramientas cognitivas para almacenar y poder usar información de manera externa. En segundo lugar, el hecho de externalizar esta información es la que permitió que fuese compartida y posiblemente mejorada por un mayor número de sujetos, así como que esta pudiera ser transportada geográficamente entre poblaciones, y acumulada temporalmente.

Adaptando la idea de Beller et al. (2018) sobre la prehistoria del concepto de número a nuestro trabajo, lo importante de los estudios sobre prehistoria de la geometría no es constatar la emergencia de conceptos geométricos, sino presentar y analizar actividades culturales y cognitivas que pueden fundamentar el camino histórico hacia el desarrollo de la cognición geométrica. Entre estas, podríamos citar nuestra habilidad para representar formas espaciales de forma externa, manipularlas, adscribirles contenido simbólico o ver las relaciones espaciales entre distintas figuras o formas. Se crean así las *condiciones neuronales* y *andamiajes culturales* (Colàge & d'Errico 2020) que servirán como fundamento para el posterior desarrollo del conocimiento protogeométrico.

Capítulo 4

El surgimiento del conocimiento protogeométrico en Mesopotamia

1. Consideraciones generales sobre las matemáticas mesopotámicas y su lugar en la historia

En esta primera sección nos queremos centrar en el impacto que las posturas helenofílicas han tenido en la consideración general de las matemáticas mesopotámicas y el lugar que estas han ocupado en la historia general de las matemáticas. Particularmente, resaltaremos tres de las asunciones principales en relación con esta civilización.

En primer lugar, en historias generales de las matemáticas o historiadores no expertos en Mesopotamia –ver p. ej. la obra de Scriba & Schreiber (2015)–, se suelen confundir los desarrollos matemáticos mesopotámicos con los babilónicos. Sin embargo, Mesopotamia hace referencia a la región geográfica en la cual este tipo de conocimiento fue desarrollándose durante los varios milenios que duró el período cuneiforme (cf. Radner & Robson 2011)[1] y con matemáticas babilónicas [o paleobabilónicas] nos referimos a un período específico de las matemáticas Mesopotámicas, del 2000 al 1600 a.e.c.

Es cierto que la mayoría de tablas protomatemáticas de la civilización mesopotámica, y algunas de las más citadas por historiadores y filósofos de las matemáticas, provienen del período Paleobabilónico. Sin embargo, es importante comprender la conexión de estas tablas protomatemáticas con el conocimiento que fue acumulándose en períodos anteriores, y cómo influenció en desarrollos posteriores.

En segundo lugar, es común que se argumente que estas matemáticas fueron creadas principalmente para resolver problemas prácticos tales como la construcción, la agrimensura o la contabilidad. Se especula, por lo tanto, que este tipo de conocimiento pudo surgir por acumulación de conocimiento empírico, o que fue fruto de una metodología basada en el ensayo y error. De esta manera, este conocimiento no posee el estatus abstracto y teórico, ni el nivel de autonomía necesario para ser considerado como

[1] Oriente Próximo es la región geográfica que abarca desde Turquía a Pakistán, mientras que Mesopotamia es una subregión que ocuparía su centro, correspondiéndose a rasgos generales con Iraq, parte del Noroeste de Siria, y parte del Sureste de Turquía.

propiamente matemático, sobre todo en comparación con lo que encontramos en la civilización griega (Russo 2004, 31-33).

En tercer y último lugar, a pesar del carácter eminentemente práctico y no-matemático de estos desarrollos, algunos historiadores subrayan la importancia de una serie de resultados ‘sorprendentes’. Dos de los más citados o comentados son, por un lado, la tabla Plimpton 322, de la cual se ha especulado que podría ser un ejemplo de matemáticas ‘puras’ y que ejemplifica el desarrollo de una teoría de números, series trigonométricas, u otros resultados matemáticos “avanzados”. Por otro lado, en la tabla YBC 7289 tenemos un diagrama con una aproximación bastante precisa a $\sqrt{2}$.

Sin embargo, los investigadores que proponen este tipo de interpretación suelen obviar el contexto socio-cultural, así como matemático, en el que estos resultados o procedimientos son elaborados. La interpretación de estos investigadores suele ser históricamente pobre y sesgada, aislando ciertos resultados matemáticos del contexto general en el que estos se desarrollaron y usaron –ver Robson (2001; 2007; 2008, 268-290)–.

Estas son las asunciones principales que han llevado a diversos historiadores a considerar los desarrollos mesopotámicos como no matemáticos. Además, es habitual que se considere que los resultados y procedimientos de estas matemáticas son triviales, o incluso poco relevantes para la historia general de las matemáticas.

2. La emergencia del conocimiento protomatemático en Mesopotamia

A lo largo de esta primera parte presentaremos algunos de los principales desarrollos protomatemáticos de Mesopotamia, así como el contexto socio-cultural y político en el que estos emergieron. Para ello, vamos a dividir la amplia historia de Mesopotamia en tres períodos clave. En primer lugar, presentaremos algunos elementos del período Neolítico de Oriente Próximo; en segundo lugar, mostraremos de qué manera se vinculan los orígenes de las protomatemáticas mesopotámicas con la fundación de las primeras ciudades; y en último lugar, analizaremos detalladamente cómo se desarrolló este tipo de conocimiento en el período en el que las tablas matemáticas florecieron, que es el período Paleobabilónico.

2.1 El Neolítico en Oriente Próximo (10.000-4000 a.e.c.)

2.1.1 Contexto socio-cultural y político

En la literatura especializada se suele distinguir el período Neolítico de períodos anteriores en base a dos características fundamentales: nuevas formas de subsistir y de habitar el medio. Vamos a mostrar a continuación por qué estas características podrían ser de interés para el estudio de la historia de las matemáticas en Mesopotamia.

A partir del 10.000 a.e.c. algunos grupos humanos en Oriente Próximo comenzaron a producir sus propios alimentos mediante la agricultura y, posteriormente, la ganadería. Este nuevo modelo de subsistencia se vincula estrechamente con la aparición de los primeros asentamientos sedentarios, precisamente la segunda de las características.[2] Como consecuencia de estas nuevas prácticas y forma de vida, el terreno necesario para la supervivencia de las poblaciones disminuyó considerablemente respecto a períodos anteriores, y se comenzó a construir casas de mayor tamaño y más cercanas entre sí (Nissen 1988; van de Mieroop 2016; 10-18). En este contexto encontramos algunas actividades y herramientas relacionadas con la cultura visual mesopotámica, las cuales podrían considerarse como las bases prehistóricas del conocimiento protogeométrico que surgirá en períodos posteriores.

Por un lado, en relación a las viviendas queremos subrayar dos elementos de interés. En primer lugar, se pasa de la construcción de paredes apilando barro a la fabricación de bloques o ladrillos de arcilla rectangulares; en segundo lugar, sobre todo a partir del Neolítico Cerámico, la forma habitual de estas casas pasa de ser circular a ser rectangular. Este cambio pudo estar vinculado con la necesidad de diferenciar las funciones de cada habitación, relacionado principalmente con el requerimiento de almacenar víveres o útiles para el trabajo agrícola en una de estas. Por otro lado, también fue habitual en la mayoría de asentamientos de Oriente Próximo que se construyeran edificios ‘públicos’, los cuales solían tener un papel o función ritual, religiosa o política (McMahon 2005; Gates 2011, 17-22; van de Mieroop 2016, 10-14).

Como consecuencia de la acumulación de excedentes agrícolas, ganaderos, así como bienes generales, surge la necesidad de protección de los mismos –sobre todo a

[2] Estos fueron cambios que se desarrollaron de manera gradual. Por ejemplo, se ha comprobado que la agricultura, recolección y caza coexistieron como formas complementarias de subsistencia en algunos asentamientos neolíticos (Nissen & Heinen 2009, 7-13; McMahon 2005).

partir del período Cerámico–. Esto condujo, presumiblemente, al acercamiento de los asentamientos más pequeños a los más grandes en busca de protección, a la creación de instituciones para la vigilancia del cumplimiento de las reglas comunes, así como a la aplicación de castigos cuando fuera necesario. Este fenómeno dará lugar a las sociedades de jefatura, en la que los asentamientos más pequeños se situaban alrededor de un asentamiento más grande (Nissen 1988, 39-43; McMahon 2005; Nissen & Heinen 2009, 15-20;).[3] En consecuencia, la población comenzó a crecer, y la división del trabajo y la producción especializada de herramientas se acentuó.

Finalmente, la manufactura de cerámica surgirá a partir del VII milenio a.e.c. para almacenar víveres de manera segura, o como utensilio de cocina y alimentación (Nissen & Heinen 2009, 7-13). Lo interesante para nuestro trabajo es el hecho de que su superficie sirvió para plasmar la identidad social, familiar o étnica de los diversos asentamientos (McMahon 2005). Podemos ver, por ejemplo, las diferencias notorias entre los períodos Samarra (5500 a.e.c.), Halaf (5000 a.e.c.) y El Ubaid (4500 a.e.c.) (Img. 4.1).

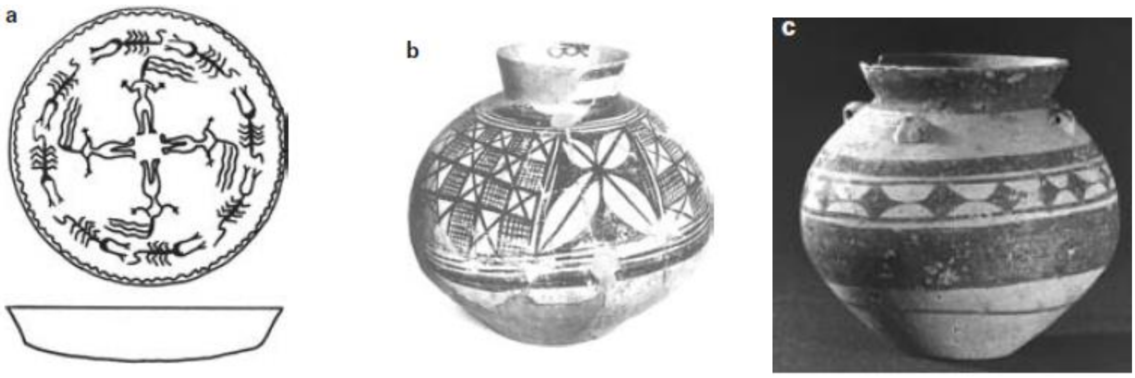


Imagen 4.1 A: cuenco abierto del período Samarra con patrones circulares y cruz central; B: cerámica de Halaf con líneas concéntricas; C: “patrones geométricos” que siguen la curvatura del objeto en el período El Ubaid, consecuencia de la introducción de la mesa giratoria para su elaboración (Nissen & Heinen 2009, 16-18).

2.1.2 Las bases cognitivo-culturales del conocimiento protomatemático

Ya vimos en el capítulo anterior las razones por las que consideramos que este tipo de actividades y herramientas no ponen de manifiesto la emergencia del conocimiento protogeométrico, aunque sí son importantes para analizar sus bases cognitivas y

[3] En el sur de Mesopotamia, por ejemplo, los asentamientos centrales podían tener unas 10-15 hectáreas, mientras que los pequeños tenían entre 0.5-2 hectáreas (van de Mieroop 2016, 17).

culturales. Entre ellas, es crucial tener en cuenta que durante el Neolítico florecen los lugares de culto o centros rituales (Rollefson 2005), los cuales fueron usados en algunas ocasiones como representación simbólica del poder de las instituciones, y fueron clave para la elaboración y acumulación de material con contenido simbólico (Verhoeven 2002; Watkins 2004; 2006). De esta manera, se crea un nuevo nicho socio-cognitivo más rico simbólicamente que el que encontramos en el Paleolítico (Sterelny & Watkins 2015), y en el cual el ser humano desarrolla un control mítico y cargado simbólicamente del espacio (Schemmel 2016a).

Por lo que, aunque las herramientas y actividades hasta ahora presentadas no pongan de manifiesto la emergencia de la protogeometría en Oriente Próximo, creemos que es importante investigarlas en relación con el surgimiento de nuevos nichos socio-cognitivos en los que los seres humanos dotan de sentido simbólico a su manera de relacionarse, entender y ʽconstruir' el espacio.

A continuación, vamos a presentar un tipo de herramientas denominadas de diversas maneras, tales como *calculi*, piezas o fichas de arcilla, las cuales han sido citadas y analizadas extensamente en la historia de las matemáticas mesopotámicas en relación con la emergencia del conocimiento protoaritmético (Hoyrup 2007; Robson 2008, 28-40; Roque 2012, 35-49; Yuste 2013, 29-32). En este trabajo vamos a seguir la definición de Bennison-Chapman (2019) de estas herramientas como "piezas o fichas de arcilla" por razones que veremos a continuación.[4]

Una de las mayores expertas en el estudio de estas piezas es Denise Schmandt-Besserat (1992a; 1992b; 2010). Esta autora afirma que existen cuatro etapas bien diferenciadas en la elaboración y desarrollo de estas piezas –ver apéndice 1–. En esta sección solo trataremos la primera de las etapas (ca. 7500-3100 a.e.c.), en la cual existieron seis tipos principales de piezas planas –discos, tetraedros, cilindros, conos, esferas y ovoides–. Estas fueron usadas sin apenas sufrir cambios en gran parte de Oriente Próximo durante esta etapa (Img. 4.2).[5]

En su análisis, Schmandt-Besserat argumenta que no existe evidencia acerca del uso de estas piezas para el comercio, pero sí para el control de los bienes comunales y su

[4] Las define como artefactos pequeños que han sido elaborados manualmente con una forma claramente geométrica, y que pueden ser planas o tener algunas marcas decorativas o perforaciones –ver apéndice 1–.

[5] En investigaciones recientes se ha constatado su uso en algunos lugares a partir del Neolítico Temprano (X milenio a.e.c.) (Bennison-Chapman 2019).

redistribución. Es decir, estas piezas se usaron para contar la cantidad de alimentos producidos, los que se iban acumulando, así como los que entraban y salían en los lugares en los que estos se almacenaban (Schmandt-Besserat 1992a; 1992b; 2010).[6]

Imagen 4.2 Piezas de arcilla simples de Iraq, 5000 a.e.c. Imagen de (Schmandt-Besserat 2010, 29).

Estas piezas fueron usadas para contar de manera concreta un tipo específico de bien u objeto mediante una correspondencia uno-a-uno entre las piezas que se usaban y los objetos a contar. Schmandt-Besserat (2010, 28-29) pone el ejemplo del uso de la pieza con forma de ovoide para contar jarras de aceite. Si tenemos tres piezas con esta forma, serán tres las jarras de aceite contadas. Por lo tanto, no se representaron números más allá de la conexión física que se establecía entre las piezas y los objetos a contar; o, como señala Damerow (1999), no se desarrolló o emergió aquí una noción abstracta de número.

Diversos investigadores en arqueología cognitiva han analizado de qué manera este tipo de objetos puede atestiguar la emergencia del "concepto de número" en el Neolítico (Malafouris 2010; 2013, 106-118; Overmann 2016a; 2016b; 2019). Estos trabajos analizan la interacción entre nuestras habilidades cognitivas numéricas y un elemento material, que serían estas piezas de arcilla. De esta manera, se visualizan y manipulan conceptos y propiedades numéricas. Como señala la propia Schmandt-Besserat (2010), "puesto que estos eran objetos pequeños, fáciles de manipular, las piezas

[6] Sin embargo, Bennison-Chapman (2019) ha llevado a cabo recientemente una serie de estudios en los que muestra que no hay correlación entre la aparición de estas piezas y el lugar en el que se encuentran. Esto es, se han encontrado en asentamientos pequeños y grandes, en sociedades igualitarias o estratificadas, o en sociedades agrícolas y cazadoras-recolectoras. Por lo tanto, no puede afirmarse que este tipo de objetos fueran un componente esencial de los primeros asentamientos sedentarios del Neolítico de Oriente Próximo.

facilitaron el contar. Con estas piezas era fácil añadir, restar, multiplicar y dividir moviendo y removiendo contadores manualmente" (p. 33).

Sin embargo, Benison-Chapman (2019) muestra que diversos trabajos recientes en arqueología ponen de manifiesto que, incluso en el III milenio a.e.c. no había un uso uniforme de estas piezas –ver también Robson (2008, 33-35)–. Es decir, aunque a finales del Neolítico existiera un uso generalizado de las mismas, el significado que se les daba a cada una de ellas se restringía a un ámbito local. No existía, por lo tanto, un uso uniforme de las cantidades o mercancías que cada pieza podía representar. Además, en el registro arqueológico no ha podido constatarse que existiera un conjunto idéntico de piezas común a la mayoría de asentamientos, lo que refuerza las dudas de esta investigadora acerca de su uso generalizado para contar.

Por otro lado, estas piezas se han encontrado en una variedad de contextos, tales como hogares, vertederos, lugares administrativos, y en algunos edificios con claro uso ritual como santuarios o enterramientos (cf. Bennison-Chapman 2019; Palka 2021). Por lo tanto, es posible que algunas piezas se usaran para otras actividades no relacionadas con prácticas de contar, como por ejemplo para jugar, en rituales, como ofrendas ceremoniales, marcadores de estatus social, etc.

Por lo que podemos ver que no existen evidencias claras de que estas piezas fueran usadas exclusivamente para contar en relación a la administración agrícola, sino que pudieron usarse para multitud de actividades. Además, no poseían un significado uniforme, sino que este dependía del contexto tanto local como temporal.

Por lo tanto, llegamos a la misma conclusión que alcanzamos anteriormente: el concepto de número o la aritmética no emerge en el Neolítico de Oriente Próximo. Lo que sí podría poner de relieve esta práctica cultural es el desarrollo de una cuantificación pre-aritmética –como afirma Damerow (1999)–; esto es, el desarrollo de nuestras capacidades cognitivas cuánticas, no numéricas, en relación a esta práctica concreta de contar (nivel II).

2.2 La emergencia de la proto-matemática en Mesopotamia (4000–2000 a.e.c.)

2.2.1 Contexto socio-cultural y político

Analizar detalladamente los cambios socio-culturales y políticos que tuvieron lugar en los 2000 años que comprenden desde el comienzo del período Uruk hasta el colapso de

Ur III es una tarea que excede los límites de este trabajo. Por esa razón, nos centraremos en los principales cambios y desarrollos que tuvieron lugar en el período Uruk, en el que podemos constatar la emergencia del conocimiento protomatemático en Mesopotamia.[7]

El período Uruk (4000–3000 a.e.c.) se denomina así por Uruk, ciudad del sur de Mesopotamia.[8] Los principales cambios que marcan el comienzo de este nuevo periodo se relacionan con el desarrollo, por primera vez en la historia, de las ciudades. En particular, esta ciudad tenía un tamaño de 250 ha, esto es, diez veces el tamaño del mayor de los asentamientos del período de El Ubaid. Además, esta no ejercía poder sobre uno o varios asentamientos menores de su alrededor, sino que mantuvo una relación jerárquica de poder con todo un conjunto de aldeas y pueblos, algunos de ellos formando el área rural que, posiblemente, abastecía con productos agrícolas y ganaderos a esta ciudad (Nissen 1988; Nissen & Heinen 2009).

Del conjunto de desarrollos socio-culturales y políticos que llevan a arqueólogos e historiadores a hablar de un nuevo período nosotros nos centraremos en aquellos que podrían vincularse con la emergencia y evolución del conocimiento protomatemático. En primer lugar, hay un cambio radical en la producción artística a partir del 3200 a.e.c., donde el gobernante o rey pasó a ocupar un lugar central en estas obras, representándolo realizando algún tipo de hazaña como cazar leones o alimentar animales. Lo que estas obras tratan de poner de relieve es la importancia de esta nueva figura política en la organización social de las ciudades (Nissen & Heinen 2009, 30-33).

En segundo lugar, tenemos el desarrollo de la arquitectura monumental. Los templos, y la religión en general, eran una parte central del estado directamente involucrados en las actividades administrativas y económicas. El templo de Eanna –la casa del cielo– asociado a la diosa Inanna disponía por ejemplo de diversas áreas destinadas a labores diferentes a las de culto, como a la producción de artesanía; además, el 80% de las tablas encontradas en este templo trataban sobre temas administrativos y

[7] En el capítulo 7 sí hemos tratado los elementos más importantes del resto de períodos. Además, en el apéndice 2 mostramos los cambios socio-culturales y desarrollos protomatemáticos más importantes del resto de períodos que no hemos podido tratar en esta sección. Por otro lado, Robson (2008) presenta en la tabla 1.1 de su libro un resumen de los principales desarrollos matemáticos mesopotámicos entre los milenios IV-II a.e.c. (p. 5).

[8] Aunque apenas hay datos arqueológicos de los 700-800 años que transcurren desde el final del período El Ubaid hasta el final del período Uruk tardío, sí se dispone de un abundante registro arqueológico e histórico de la ciudad de Uruk a partir del 3200 a.e.c. (Nissen & Heine 2009, 21-22).

económicos (Nissen 1988, 95-103; Nissen & Heinen 2009, 23-33; van de Mieroop 2016, 24-29). Por otro lado, la monumentalidad de estos edificios ha sido interpretada como un tipo de manifestación arquitectónica con la que se legitimaban las funciones centrales tanto de reyes como de los propios templos. Es decir, su gran tamaño pudo haber sido usado como muestra de poder de la autoridad religiosa y política sobre el pueblo (Trigger 1990, *apud* McMahon 2005, 29-30).[9]

En períodos anteriores, la elaboración y uso de representaciones simbólicas estuvo generalmente en posesión del conjunto de la sociedad –uso de cuentas de collar en el Paleolítico, o decoración cerámica en el Neolítico–. Sin embargo, en este período la nueva clase política o religiosa comienza a usar y limitar el acceso a las nuevas formas de representación simbólica con las que dar forma a la identidad de esta nueva sociedad. Como señala Yoffee (2005)

> ciertos individuos, la élite emergente, comenzaron a restringir el acceso a la tecnología de la manufactura de los símbolos y también a los medios y significados de comunicación como festines y ceremonias. El control de estos símbolos y el conocimiento esotérico se convierte en dominio de poder en estas aldeas tempranas (p. 229)

Esta jerarquía social también se refleja en uno de los primeros textos producidos en Uruk tardío, conocido como la *Lista Estándar de las Profesiones*. En este texto se describe en el nivel más alto al "rey-sacerdote" (van de Mieroop 2016, 30), y por debajo del mismo se establecían, ordenadas jerárquicamente, toda una serie de profesiones y rangos que van desde altos oficiales, oficiales o especialistas, hasta el último lugar ocupado por trabajos simples (Nissen 1988, 80-81; van de Mieroop 2016, 29-30).

En relación a los últimos puestos de esta lista de profesiones tenemos el próximo elemento que vamos a presentar, la producción en masa de los cuencos con borde biselado. Estos útiles no poseían ningún elemento decorativo o simbólico sobre su superficie puesto que eran objetos puramente utilitarios, producidos de esta manera para

[9] Yoffee (2005) muestra que la planta arquitectónica de los templos del conjunto arquitectónico de Eanna y los templos del período El Ubaid son similares, siendo la diferencia más notable entre ambos la monumentalidad que poseían los templos del período Uruk (p. 211).

alimentar al numeroso grupo de trabajadores encargados de diversas labores en esta sociedad, como la construcción de edificios monumentales.[10]

Todos estos elementos muestran que en este período surge y se instaura una *sociedad altamente jerarquizada*, con el rey y los templos acumulando el capital simbólico, y una especialización del trabajo claramente definida. En este contexto general surge una figura clave para analizar y entender la emergencia y desarrollo de las protomatemáticas, que es la del administrador o escriba. Estos administradores trabajaban en los templos de Uruk, lugar en el que recibían y posteriormente redistribuían los alimentos procedentes del entorno rural. La economía se comenzó a complejizar, y para lidiar con cuestiones administrativas y económicas este grupo social comenzó a crear diversas herramientas y mecanismos con los que registrar y controlar la entrada y salida de estos bienes. En este trabajo centraremos nuestra atención en dos de estas herramientas, que serían la escritura, por un lado, y la elaboración y posterior estandarización del sistema metrológico.

2.2.2 La emergencia de las proto-matemáticas

En primer lugar, y continuando la exposición de la sección anterior, vamos a mostrar las siguientes tres etapas en el proceso de invención de la escritura según la hipótesis de Schmandt-Besserat (1992a, 1992b, 2010), cuya primera etapa ya explicamos –invención de las piezas de arcilla simples y su posible uso en tareas contables–.

En la segunda etapa, con el surgimiento de las ciudades se incrementaron las actividades y productos económicos que controlar, elaborándose para ello durante el IV milenio a.e.c. alrededor de 300 piezas de arcilla complejas, algunas de las cuales tenían marcas o perforaciones en su superficie. En la tercera etapa, a partir del 3500 a.e.c., se crean los sobres de arcilla huecos con forma de esfera (*bullae*), usados para almacenar las piezas de arcilla simples y complejas, y en cuya superficie se comenzó a imprimir tanto el sello del administrativo involucrado en las transacciones, como las piezas que el propio sobre contenía en su interior –ver apéndice 1–. Para ello, se presionaban las piezas de

[10] Algunos autores creen que la capacidad de estos cuencos era la correspondiente a una jornada de trabajo, y por ello mismo, el signo que se usó posteriormente para “asignación” o “distribución” fue el de este mismo cuenco junto a una boca comiendo (Nissen and Heinen 2009, 33-34; van de Mieroop 2016, 21-22). Esta interpretación, sin embargo, no es compartida por todos los investigadores (cf. McMahon 2005, 32).

manera ordenada sobre la superficie del sobre –esto es, agrupando en una misma línea pictogramas que representaban el mismo bien– (Schmandt-Besserat 1992a; 1992b; 2010).

Estos sobres ofrecían información redundante, ya que las piezas que contenía en su interior y las impresas en su exterior era la misma. Por lo tanto, una vez la escritura se estableció, los sobres junto a las piezas de arcilla lisas y complejas se abandonaron en favor de la escritura de signos pictográficos sobre la superficie de tablas redondas o planas. Esta es la última etapa, donde nace o se inventa la escritura proto-cuneiforme (Schmandt-Besserat 1992a, 1992b, 2010).[11]

Robson (2008, 37-40) distingue tres fases en esta cuarta etapa. La primera la denomina ʽnúmero-ideográfica', en la cual se presionaban las piezas de arcilla sobre la superficie de las tablas para representar la cantidad de bienes u objetos contados. En segundo lugar, tenemos la fase ʽUruk IV' en la que se elaboraron unos 900 signos para palabras y cinco sistemas diferentes para contar, relacionados sobre todo con transacciones domésticas o del templo. En algunas ocasiones el frente de la tabla se dividía en celdas, y se registraba cada ítem a contar por separado. Sin embargo, los números seguían representándose con piezas de arcilla presionadas sobre la superficie. Por último, en la fase ʽUruk III' los signos para números han perdido mayormente su esencia pictórica y sus formas se estandarizan –ver sección 4 del apéndice 1–.

Diversos historiadores de las matemáticas mesopotámicas (Hoyrup 2002, 311-316; 2007; Robson 2007; 2008, 40-44; 263-265) han remarcado el papel fundamental de la escritura para la formación de un estado burocrático y centralizado, así como para el desarrollo gradual de las protomatemáticas. Estos dos campos están estrechamente vinculados debido a que en este período la clase culta, es decir, letrada y ducha en protomatemáticas, se corresponde precisamente con la de los administradores del templo. Estos se encargaban de mantener un control cuantitativo de las tierras, la agricultura y ganadería, el trabajo diario de los trabajadores, etc.

Este fenómeno se refleja en la dificultad de distinguir entre ejercicios matemáticos o registros contables en las más de 5000 tablas provenientes de Uruk. La característica principal de los documentos modelo, tabla protomatemática principal de este período, es

[11] Robson (2008), nota 21 del capítulo 2, presenta un revisión general acerca de la importancia de estas piezas para la invención de la escritura, así como algunas aproximaciones críticas a esta propuesta. Por otro lado, Bennison-Chapman (2019) muestra que estas piezas de arcilla se siguieron usando hasta el I milenio a.e.c., y no hasta el IV a.e.c. tal y como afirma Schmandt-Besserat; es decir, que se usaron junto a la escritura, lo que pone de manifiesto que estas piezas pudieron haber desempeñado una función similar a la escritura.

que no aparecen el nombre ni el sello del escriba, usando además números *bonitos* (Hoyrup 2002, 313); es decir, números que no implicaran aplicar procedimientos excesivamente largos o complicados.

Por otro lado, a partir de Uruk III se crean y estandarizan los sistemas metrológicos, incrementándose hasta 60 los signos pictográficos. Para llevar a cabo esta estandarización se expandieron las unidades metrológicas existentes introduciendo unidades más grandes o pequeñas. Por ejemplo, se expandieron siguiendo una estructura sexagesimal las unidades básicas para medir longitudes –*nindan* (6 m), derivada posiblemente del uso de varas o cañas para medir terrenos por los agrimensores– y áreas –*iku*, representando el área de un campo de tierra arable, y derivado posiblemente del terreno necesario para alimentar a una familia o clan– (Hoyrup 2002, 15-18; 2009, 20-25; Damerow 2016, 98-100) (Img. 4.3).[12]

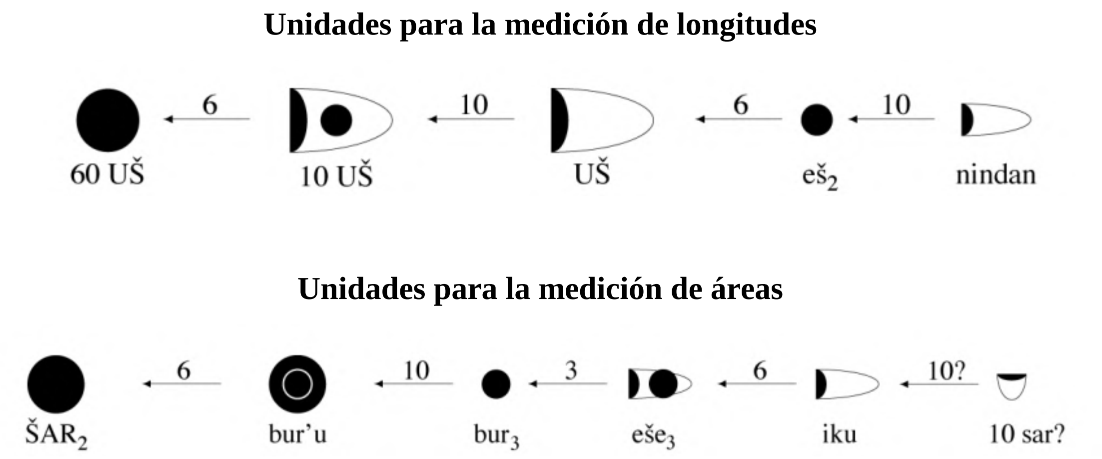


Imagen 4.3 Estandarización de las unidades de medición de áreas y longitudes (Damerow 2016, 99).

Sin embargo, se usaron signos pictográficos idénticos para representar unidades distintas, por lo que este sistema metrológico seguía dependiendo del contexto de aplicación. Por ejemplo, se usa el mismo símbolo para representar el *nindan* y el *iku*, una cuña pequeña (Img. 4.3).[13] Igualmente, el segundo símbolo usado en la medición de longitudes, el

[12] Esta estandarización continúa llevándose a cabo durante períodos posteriores, siendo clave la decisión política tomada en el período Ur III de implantar el sistema sexagesimal y posicional –ver apéndice 2 y capítulo 7–, lo que permitió la unificación de los distintos sistemas metrológicos (Hoyrup 2009).

[13] En la imagen se muestra una cuña pequeña rotada 90° hacia la derecha antes del *iku* representando 10 *sar*. Esta unidad es añadida por Damerow (2016, 99, nota 14) entre signos de interrogación ya que es posible que esta unidad fuera usada en una tabla, pero no tenemos más evidencias textuales de la misma.

círculo pequeño que representaría 1 *eš*$_2$, es igual al tercer símbolo usado para la medición de longitudes, 1 *bur*$_3$ (Img. 4.3). Sería imposible saber a qué unidad hacemos referencia con estos símbolos metrológicos si no sabemos el contexto específico en el que estos se aplican, ya que una cuña pequeña podría representar la medición tanto de longitudes como de áreas.[14]

Esta estandarización metrológica evidencia la emergencia de la protogeometría, ya que con la creación y estandarización de estas unidades metrológicas se podría decir que se estaba elaborando una estructura matemática que permitía medir áreas, longitudes y volúmenes; [15] esto es, por primera vez en la historia disponemos de fuentes textuales que evidencian de qué manera la noción de espacio, así como algunas propiedades de figuras geométricas, se comenzaron a conceptualizar de manera más abstracta, general y operacional que en períodos anteriores. Como señala Schemmel (2016a)

> a través de la aplicación del sistema sexagesimal posicional, con los procedimientos generales para adición, sustracción, multiplicación y división, y en combinación con un sistema abstracto de unidades definido por sus relaciones internas, la estructura métrica del espacio se vuelve más general y unificada (p. 39)

Por otro lado, tenemos la fórmula del agrimensor, creada en el III milenio a.e.c. por los agrimensores que necesitaban computar el área de campos con forma de polígono irregular. Para llevar a cabo esta tarea asumían que, si quitaban el área de un lado del campo y la añadían al lado contrario, el área total se mantendría igual. Concretamente, se añadían triángulos y cuadriláteros en las esquinas donde no llegaba el campo, y se quitaban del lado opuesto –triángulos considerados como la mitad de un cuadrilátero, con el que compartía la diagonal–. En particular, lo que se hacía operacionalmente con esta fórmula era tomar la longitud media de cada par de lados opuestos y multiplicarlos, como veremos a continuación. Esta fórmula fue muy útil para la medición de terrenos, y era

[14] Ver el apéndice A del libro de Robson (2008, 291-297) donde la autora presenta algunos de los sistemas metrológicos más importantes desde el período Uruk hasta el I milenio a.e.c. Hoyrup (2009, 20-25) muestra un estudio detallado de la sistematización de las metrologías centrándose en el período protoliterario.

[15] Las mediciones de longitud y área dependían la una de la otra, mientras que la de volúmenes era independiente. Esta última se usó para la medición de capacidades, desde la que tenían los cuencos para la alimentación –ver nota 10 de este capítulo– hasta la que poseían grandes silos (cf. Damerow 2016).

correcta para rectángulos y aproximada para el resto de figuras (Hoyrup 2002, 229-249; Damerow 2016).[16]

A continuación, presentaremos dos tablas protomatemáticas para ilustrar los métodos, procedimientos, y forma en la que se conceptualizó protogeométricamente el espacio en los períodos considerados en esta sección. En primer lugar, representando una tabla típica del período Ur III, tenemos W 20044,20 (Img. 4.4) considerada como una de las tablas matemáticas[17] más antiguas de esta civilización (Robson 2008, 29-31).

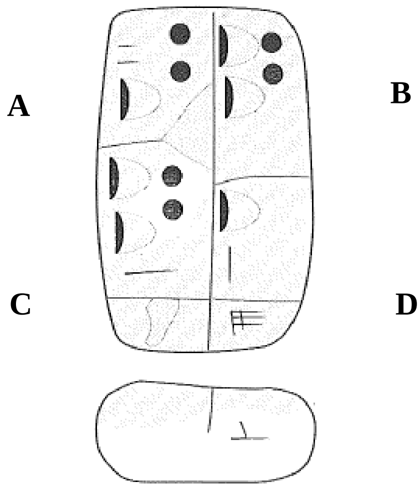


Imagen 4.4 Tabla W 20044,20, donde hemos añadido una serie de letras con fines explicativos. Imagen de (Robson 2008, 30).

El problema en esta tabla ejemplifica un tipo de problema conocido como ʽproblemas sobre áreas', en los cuales había que encontrar el área de un campo cuadrilátero irregular aplicando la fórmula del agrimensor. Podemos ver que la superficie de la tabla está dividida en cuatro celdas, con dos tipos de símbolos en cada una de ellas. Por un lado, o bien líneas horizontales (4A y 4C) o bien verticales (4D), usadas para representar la longitud y anchura del campo cuya área se quería calcular; por otro lado, los símbolos usados para representar las unidades de medición del sistema Uruk III. La cuña representa 60 unidades de longitud, mientras que el círculo representaría 10.

[16] En el período Ur III, sobre todo a partir del rey Šulgi, esta fue una herramienta de crucial importancia para medir el área de los terrenos irregulares que el mandatario ofrecía a los oficiales por sus servicios.

[17] A lo largo de este capítulo intercambiaremos los adjetivos "protomatemática" y "matemática" en relación tanto a tablas, procedimientos, o tipo de conocimiento de esta civilización para respetar la terminología usada por los historiadores de las matemáticas mesopotámicas. Sin embargo, como veremos posteriormente, consideramos que todo el conocimiento desarrollado en Mesopotamia se corresponde con conocimiento protomatemático.

Particularmente, en esta tabla se está representando la siguiente información: celda 4A, 60 + (10+10) horizontal; celda 4B, (60+60) + (10+10) [vertical]; celda 4C, (60+60) + (10+10) horizontal; y celda 4D, 60 vertical. Se aplica entonces la fórmula del agrimensor: (80+140) /2 × (140+60) /2 = 11,000 varas cuadradas (Robson 2008, 29-30).

En segundo lugar, tenemos IM 58045, excavada en el santuario del templo del dios Enlil en Nippur y perteneciente al período Acadio Antiguo. Este problema trata sobre hallar el área del trapezoide bisecado aplicando la fórmula del agrimensor. En este caso, la tabla posee un diagrama[18] en el que se muestra una visión cualitativa del trapezoide (Img. 4.5); es decir, este no es un diagrama preciso de los datos cuantitativos del problema, sino que ofrece una visión general de las relaciones espaciales que podrían ser relevantes para la resolución del problema planteado (Robson 2008, 64-67).

Es importante tener en cuenta las siguientes conversiones metrológicas, pertenecientes a los Períodos Dinástico Temprano y Acadio Antiguo, para entender la información cuantitativa de la tabla (ver Robson 2008, 293).

- 1 codo = 3 manos–doble (50 cm)
- 1 semilla–codo = 2 codos (1 m)
- 1 junco = 3 semilla–codos (3 m)

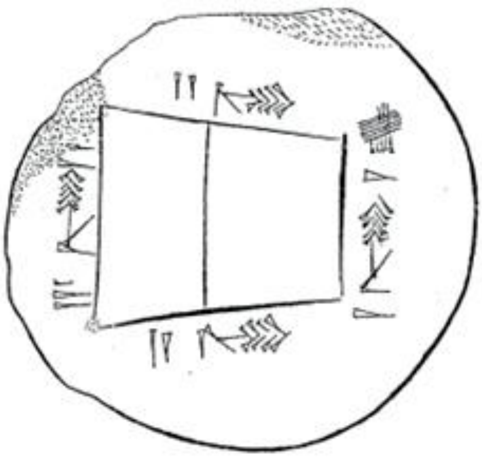


Imagen 4.5 Tabla IM 58045. Imagen de Robson (2007, 76), quien toma el dibujo de este diagrama de Aage Westenholz, en Friberg (1987-90, 541).

[18] Antes del período Acadio Antiguo no existe ninguna tabla protomatemática en la que se use un diagrama (Robson 2008, 45).

La línea vertical que divide la figura en dos es interpretada por Robson (2007, 76) como si estuviera marcando la longitud media de los lados verticales; esto es, cada lado vertical mide dos juncos, lo que equivaldría a 12 codos, por lo que la media de ambos lados verticales sería de 12 codos. Si aplicamos la fórmula del agrimensor tendríamos: 12 codos (vertical) × (17 codos + 7 codos) / 2 horizontal –ver diagrama y hacer la conversión de juncos a codos–, lo que daría un área de 144 codos cuadrados, o 1 *sar*, o un junco al cuadrado (Robson 2007, 76; 2008, 64).[19]

Por otro lado, en el período Ur III se empezaron a realizar los primeros mapas a gran escala de los terrenos y planos de edificios –ver apéndice 2–. Al igual que en los diagramas, estos ofrecen información cualitativa, y es la información textual la que ofrece los datos cuantitativos de manera exacta. Es característico que en estos mapas se represente el terreno con triángulos y cuadriláteros, relacionado con el uso extendido de la fórmula del agrimensor, ya que con estas figuras geométricas era más sencillo ʿpartir' el terreno irregular en formas geométricas regulares para quitar de un lado y añadir al lado contrario (Robson 2008, 60-64).[20]

Tanto el uso de la fórmula del agrimensor como la estandarización de las unidades metrológicas nos permiten hablar de la emergencia del conocimiento protogeométrico en esta civilización. Estos elementos no se relacionarían con la percepción pasiva de las relaciones espaciales del medio u objetos con los que los agentes interactúan, sino con la elaboración por parte de un grupo social específico, los administradores, de un nuevo nicho socio-cognitivo. En este, se comenzaron a usar ciertas herramientas cognitivas y lenguaje para representar externamente las formas espaciales, estudiar sus propiedades, o las relaciones entre distintos elementos –por ejemplo, la relación de un triángulo con la diagonal de un rectángulo–.[21]

---

[19] Ver la tabla A.2 de unidades metrológicas del período Dinástico Temprano y Acadio Antiguo, y la tabla A.3 de las unidades de Ur III y Paleobabilonia –las unidades para áreas eran las mismas para todos estos períodos–. Un junco equivale a 12 codos, por lo que un junco al cuadrado, equivalente a un *sar*, equivaldría a 144 codos, que es precisamente la solución.

[20] En relación al mapa MS 1984 –ver apéndice 2– Robson (2008, 61) señala que las áreas centrales con forma de cuadrilátero fueron calculadas de dos maneras diferentes, lo que para esta autora podría ser un indicio de que algunos escribas podrían haber sabido que la fórmula que usaban no era exacta.

[21] Schemmel (2016a, 2016b) ha propuesto, en una línea similar a la nuestra, que estas características –fórmula del agrimensor y estandarización de las metrologías– nos hacen ver que en este período pasamos del control mítico del espacio propio del Neolítico a un control administrativo, afirmando que este "implica una metrización del espacio y lleva a un tipo de protogeometría" (Schemmel 2016a, 15).

Por lo tanto, podemos decir que el establecimiento de una sociedad jerarquizada con una clara división del trabajo fue importante para el desarrollo y establecimiento de la protogeometría en esta civilización; en particular, creemos que fue muy influyente la división que estas sociedades establecieron entre labores pragmáticas, como la agricultura o trabajos de construcción, y labores epistémicas, como las que llevaban a cabo los administradores en la elaboración de las diversas herramientas cognitivas con las que facilitar los trabajos administrativos y económicos.[22] Este segundo tipo de labores o actividades, además, estuvieron restringidas a un pequeño grupo de la población, como fueron los administradores de los templos o los escribas.

2.3 Período Paleobabilónico (2000-1600 a.e.c.)

2.3.1 Contexto socio-cultural y político

Tras el colapso de Ur III en el 2003 a.e.c. viene el período Paleobabilónico (2000–1600 a.e.c.), caracterizado por el establecimiento de un conjunto de ciudades–estado con estructuras sociales y políticas similares en toda Mesopotamia, las cuales estuvieron en constantes guerras, conquistas y labores diplomáticas con el fin de someter a otros territorios (Kuhrt 2000, 94-140; van de Mieroop 2016, 90-91). Entre las ciudades–estado más importantes tenemos Eshnunna, Mari, Isin, Larsa o Babilonia. Uno de los mandatarios más conocidos es el rey Hammurabi, quién en 1760 a.e.c. conquista y unifica los estados del centro y el sur bajo su dominio, el del reino de Babilonia. Otro hecho característico de este período es que los sucesivos reinos o estados que se formaban o dominaban al resto no lograban durar en el tiempo, lo mismo que ocurrió con la unificación de Hammurabi (Kuhrt 2000, 94-96; Robson 2008, 86).[23]

Mientras que palacios y templos seguían encargándose del control y administración de bienes y terrenos, también tiene lugar en este período una ʽprivatización parcial’ de la economía. Es decir, diversos grupos de trabajadores, como artesanos o

[22] Schemmel (2016a, 34-35; 2016b) propone una división similar a la nuestra entre labores físicas e intelectuales.

[23] En este trabajo, como dijimos anteriormente, este va a ser el último período de la civilización mesopotámica que presentemos y analicemos. En el apéndice 3 hemos resumido algunas de las características y elementos más importantes de los períodos posteriores que consideramos que merecen la pena al menos mencionar. Ver también (Robson 2007, 154-179).

escribas, comenzaron a trabajar de manera autónoma para ciudadanos o instituciones que necesitaran sus productos o servicios. De esta manera, estos trabajadores ganaban un dinero extra y las instituciones solo pagaban de acuerdo al tiempo que se les requiriera (van de Mieroop 2016, 98-100). En este contexto, la actividad intelectual de los escribas dejó de estar vinculada y sujeta necesariamente a las autoridades centrales, lo que permitió que comenzaran a experimentar con sus herramientas de trabajo. En relación a la escritura, por ejemplo, se inventa la escritura cursiva, o se usan signos abreviados que facilitan y agilizan la escritura (cf. Hoyrup 2002; Robson 2008).

Por otro lado, los escribas eran los únicos ciudadanos que leían y escribían en sumerio, una lengua en desuso en este período, aumentando el nivel de especialización. De hecho, estos escribas recibían una educación intensa y prolongada para aprender a usar sus herramientas y adquirir los conocimientos necesarios para comprender o dominar toda la variedad de textos que conformaban el saber de la cultura cuneiforme (Veldhuis 2011; Delnero 2015). En nuestro trabajo analizaremos cómo se estructuró y exploró el potencial del conocimiento y herramientas protomatemáticas (Damerow 2016).

Antes de analizar la función de las escuelas y la educación escriba, es importante tener en cuenta la distinción de los tres estratos sociales involucrados en la formación del conocimiento matemático propuestos por Robson (2008, 23-26). En una esfera interior, tendríamos precisamente las instituciones de enseñanza, lugares clave para la elaboración, acumulación y transmisión de este conocimiento.[24] La esfera exterior se vincula con la manera en la que los conceptos protomatemáticos de número, medición o espacio influyeron en la vida social y desarrollos culturales de las diversas ciudades-estado. Por último, en una esfera intermedia tendríamos el trabajo de los escribas profesionales.

Veremos en primer lugar el papel de los que conformaron esta esfera interior. En general, la educación escriba durante este período se realizó en escuelas privadas, situadas generalmente en las casas de personas cultas, y en las cuales solía haber un número bajo de estudiantes (cf. Foster 2005; van de Mieroop 2016, 123-126). La educación estaba dividida entre una fase elemental y otra avanzada. En el caso de las matemáticas, en la fase elemental se comenzaba con la memorización tanto de series metrológicas estándar

[24] La mayoría de tablas protomatemáticas que han sobrevivido son copias que los alumnos realizaban como parte de su educación escriba, u obras que los maestros componían con propósitos pedagógicos (Hoyrup 2002, 314-316; Friberg 2007a, vi-vii; Yuste 2013, 43-45). Ver por ejemplo la tabla 4.2 en la que Robson (2008, 93) presenta un conjunto de lugares entre el c. 1860-1650 a.e.c. en los que se han encontrado tablas protomatemáticas. Si se analizan los datos, se puede observar que todas pertenecían al ámbito escolar.

como, posteriormente, tablas de multiplicación y división; en la fase avanzada se aprendía cálculo y cuestiones matemáticas supra-utilitarias –las definiremos a continuación– (Robson 2008, 97-102; 2009).[25]

Hoyrup (1980; 2017) ha subrayado a lo largo de los años la importancia de la institucionalización de la educación y su impacto en la elaboración de las matemáticas.[26] Esta institucionalización comienza en el período Dinástico Temprano, aunque es precisamente en el Paleobabilónico cuando tiene un mayor desarrollo. Como señala Hoyrup (1980) "de acuerdo a mi hipótesis, la creación de las matemáticas en Sumeria fue un producto específico de la institución de la escuela donde eran capaces de crear conocimiento, de crear herramientas para formular y transmitir conocimiento, y para sistematizar conocimiento" (pp. 16-17, énfasis en el original).

En estas escuelas se aprendía, por lo general, más gramática, literatura o matemáticas de la que era necesaria para el trabajo profesional que estos alumnos desempeñarán posteriormente. Esto ha sido interpretado por algunos investigadores como una cuestión ideológica; es decir, la educación era usada como marcador social con el que los escribas se identificaban y distinguían de otros grupos (cf. Delnero 2015).

En el caso particular de las matemáticas, tenemos lo que Hoyrup (2002, 366-368; 2007; 2009) ha denominado como la aparición del ideal humanista.[27] Es decir, los propios escribas mostraban el virtuosismo que poseían manejando las herramientas de su profesión –como leer, escribir o calcular– para alcanzar una buena posición respecto al conjunto de escribas y el propio estado, así como legitimar su lugar en esta sociedad y su importancia dentro de las estructuras institucionales.[28] Robson (2001, 171), por otro lado, afirma que estos escribas humanistas que surgen en el II milenio a.e.c. son el resultado de la combinación de dos tradiciones anteriores: la del álgebra de los agrimensores, por un lado, y la de la cultura burocrática contable, por otro.

---

[25] Aunque estas características se corresponden con los datos de la Casa F de Nippur, diversos investigadores argumentan que existen características comunes a todas las escuelas y educación impartida durante este período en Mesopotamia (Robson 2009; Veldhuis 2011; Delnero 2015).

[26] Este autor entiende institucionalización como "un conjunto relativamente estable de reglas y expectativas establecidas" (Gibson 1980, 28 *apud* Hoyrup 1980, 11). Esta es una definición similar a la que presentamos en el segundo capítulo.

[27] De la palabra sumeria *nam.lú.ulù*, traducido como "la condición de ser humano" (Hoyrup 2009).

[28] Veremos a lo largo de esta sección de qué manera se vincula este ideal humanista e importancia del virtuosismo de los escribas con el desarrollo de las matemáticas supra-utilitarias.

En relación a la esfera exterior, se suele analizar de qué manera la justicia divina se relacionaba con la medición y metrología.[29] En diversas estelas, murales u obras literarias de este período se puede observar o leer cómo diversas divinidades, sobre todo diosas, se representaban entregando instrumentos para medir, como varas o cuerdas, a los reyes. De esta manera podemos observar que las matemáticas eran conceptualizadas como regalo de las diosas a los reyes y escribas, los cuales se encargaban de impartir justicia mediante la distribución equitativa de recursos o reparto justo de tierras (Robson 2008, 115-124; 2009). Como señala Robson (2008)

> los problemas sobre la manipulación de líneas y áreas para encontrar cantidades desconocidas encapsularon la esencia misma de la justicia metrológica: resolviendo puzles abstrusos sobre el espacio medido, el verdadero escriba demostraba su capacidad técnica y aptitud moral para defender la justicia y mantener la estabilidad social y política en defensa del rey y dios (p. 266)

2.3.2 Desarrollos protomatemáticos Paleobabilónicos

A continuación, presentaremos la esfera más relevante para nuestro trabajo: las tablas protomatemáticas elaboradas por escribas cultos o matemáticos. Sin embargo, antes de entrar en detalles, creemos que es necesario mostrar algunas características más acerca de la evolución del lenguaje cuneiforme.

Como dijimos, las tablas protomatemáticas del período Uruk estuvieron escritas en escritura proto-cuneiforme. Posteriormente, a mediados del III milenio a.e.c. se introduce la escritura cuneiforme, la cual guarda alguna relación con el sistema de signos anteriores. A finales del III milenio a.e.c. se introduce por decisión político-administrativa el sistema sexagesimal y posicional, el cual ayuda a la sistematización de los signos usados para el cálculo (Damerow 1999; Robson 2008, 75-83; Hoyrup 2009; Roque 2012, 44-60) (Img. 4.6).

En el período Paleobabilónico todos los cálculos se llevaban a cabo con este sistema sexagesimal y posicional, el cual puede ser considerado como abstracto en el sentido de que el concepto de número ha sido separado de los objetos o mediciones que se llevaban a cabo. Además, las relaciones entre símbolos han sido definidas

[29] De hecho, la palabra sumeria para justicia era *niğ$_2$-si-sa$_2$*, que significa "rectitud, igualdad, cualidad de cuadrado"; y la acadia era *mīšarum*, que significa "sentido de hacerlo recto" (Robson 2008, 124).

matemáticamente, con una metodología cuya aplicación no depende del contexto particular de aplicación (Damerow 1999).[30]

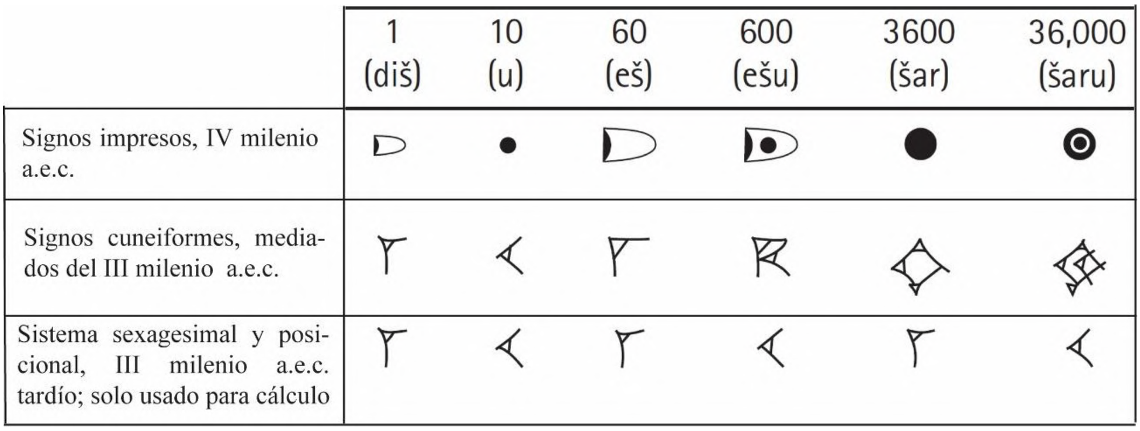


Imagen 4.6 Evolución desde la escritura proto-cuneiforme al desarrollo de un sistema sexagesimal y posicional. Imagen ligeramente modificada de Robson (2008, 76).

Según Robson (2005; 2008, 84), esta nueva herramienta abrió el camino en el II milenio a.e.c. a las matemáticas supra-utilitarias, aunque no es suficiente para explicar la explosión de este tipo de matemáticas. Estas pueden ser definidas como “matemáticas que formalmente parece como si pudieran servir en la práctica escriba, pero cuya sustancia va más allá de lo que nunca podría ser necesitado” (Hoyrup 2019, 693). Es decir, problemas sobre cuestiones prácticas, expresadas en un lenguaje ordinario, y con técnicas aparentemente prácticas, pero que metodológicamente lidiaban con cuestiones matemáticas complejas e incluso abstractas (Robson 2008, 87-90). Como por ejemplo, dividir una cantidad de líquido entre un número de trabajadores mayor al número de habitantes de la ciudad en la que el problema fue planteado, o dividir un terreno cuyo tamaño excedía al de cualquier terreno conocido por investigaciones arqueológicas (Hoyrup 2002, 9-10).

Otro caso es el de la tabla BM 96954 + BM 102366 + SÉ 93, perteneciente al período Paleobabilónico tardío y encontrada en Sippar (Robson 1999, 218-230; Friberg 2007a, 198-202). Los tres fragmentos de tabla formarían un texto de tres columnas cuyo tema principal es la medición de grano en relación con contenedores con distintas formas, como de cono[31], pirámide completa o pirámide truncada. Se puede argumentar que estas

[30] Lo que este autor denomina como “aritmética fundamentada en símbolos con sistemas simbólicos independientes del contexto” (Damerow 1999, 52).

[31] Este es el único problema paleobabilónico sobre un cono y un cono truncado (Friberg 2007a, 198-202).

cuestiones eran vitales para determinar el volumen de los contenedores en los que almacenar el grano tras la cosecha. Sin embargo, al examinar estas tablas, se observa que las preguntas se complejizan, llegando a preguntar cuestiones acerca de la suma de la longitud y la punta del prisma, o la diferencia entre la longitud y el grosor. Este segundo tipo de cuestiones no eran útiles para los agricultores o administradores del templo, sino que aluden a cuestiones propiamente matemáticas con las que los escribas trataban de mejorar y probar sus métodos matemáticos (Robson 1999, 181-182; Hoyrup 2019).

A continuación, presentaremos los tres grandes géneros de textos protomatemáticos de este período: 1) textos con tablas; 2) cálculos y apuntes escolares; y 3) textos con problemas. El primero de los géneros, *textos con tablas*, puede ser subdivido en tres categorías generales:

- 1a) **Listas de coeficientes**. Estas listas contenían constantes absolutas para diversos temas y se usaban para la resolución de problemas (Robson 1999, 14-15). Tenemos coeficientes usados para cálculos geométricos, como la relación entre diámetro y área del círculo, constantes prácticas fijadas por convención, como la cantidad de ladrillos a producir diariamente por un trabajador, o coeficientes metrológicos usados para la conversión de unidades. En las ocho listas de coeficientes del período Paleobabilónico los coeficientes geométricos son los segundos que más aparecen (27%), por detrás de los usados para la medición cuantitativa (35%) (Robson 1999, 17-25). Los coeficientes geométricos hacen referencia al área de una figura respecto a su componente definitorio, y en general se distinguen dos grupos, los usados para figuras simples, como círculos y triángulos, o los usados para figuras complejas que dependen del conocimiento que ya poseamos sobre las figuras simples (Robson 1999, 55-56; 185-186).[32]

- 1b) **Catálogos**. Listan un conjunto de variantes numéricas para resolver o plantear un conjunto de problemas (Robson 2008, 87). Por ejemplo YBC 4692, catálogo de 24 conjuntos de parámetros en relación a problemas sobre rectángulos (Robson 2008, 324); o una de las tablas que más discusión ha generado a lo largo de los años, Plimpton

[32] Robson (1999, 56) lista todos los coeficientes geométricos en la tabla 3.2 de su obra. Ejemplos de estos coeficientes serían el del diámetro del círculo respecto a su circunferencia, que valía 0;20, o 3 en nuestra notación decimal, o el coeficiente del área de un triángulo, que es igual a la mitad de la anchura por su altura perpendicular (Robson 1999, 34-43).

322, catálogo de 15 conjuntos de parámetros para problemas sobre la "regla de la diagonal" –ver capítulo 7–.[33]

- 1c) **Documentos modelos**. Conjunto de documentos como contratos legales, planos de campos o mediciones de canales, los cuales eran copiados cuidadosamente por los estudiantes como parte de su educación escriba (cf. Robson 1999, 12-13).

El segundo de los géneros es el de los *cálculos y apuntes escolares*.[34] Estas tablas suelen ser pequeñas y con forma lenticular, y en ellas se pueden encontrar anotaciones de estudiantes sobre operaciones, diagramas[35], e incluso contenido vinculado a otro texto. Algunas de estas tablas tienen signos de haber sido borradas o reutilizadas en repetidas ocasiones (Robson 1999, 10-12).

A continuación, vamos a presentar dos tablas pertenecientes a este género. En primer lugar, tenemos la tabla UM 29-15-709 de Nippur, la cual tiene un diagrama de un triángulo casi idéntico tanto en el anverso como en el reverso (Img. 4.7). En ambos diagramas está anotado un lado (54) y el lado superior (57;30), y dentro del propio triángulo se indica su área (25 52;30). La diferencia entre ambos diagramas es que debajo de la altura del triángulo del reverso están anotados dos números, 27 y 1. El número 27 estaría indicando el resultado de dividir un lado del triángulo entre dos (54 / 2 = 27), y que al multiplicarlo por el lado superior nos daría el área del triángulo; esto se debe a que el coeficiente para calcular el área de un triángulo consistía en multiplicar la mitad de la anchura por su altura perpendicular –ver nota 32– (Robson 1999, 40-45; 2000, 29-30).

En segundo lugar, tenemos la tabla TMS I hallada en la ciudad de Susa, y que son apuntes escolares con un diagrama de un triángulo simétrico y círculo que lo circunscribe (Img. 4.8). Un triángulo simétrico, como veremos posteriormente, se construye con dos triángulos rectángulos. En el caso de esta tabla, los lados de estos triángulos miden 50-

---

33 Esta autora defiende que esta tabla no pudo ser una lista completa de triples pitagóricos, como algunos investigadores han propuesto, ya que no se ha encontrado ningún duplicado de la misma, lo que sería esperable si esta tabla tuviera la importancia que se le concede. Para una exposición de las diversas propuestas acerca de Plimpton 322, y las bases históricas y filológicas en las que esta autora se apoya para considerarla un catálogo, ver (Robson 2001; 2008, 110-115).

34 Ver la tabla 1.1 de Robson (1999, 11) y B.10 de Robson (2008, 321-323).

35 Unas 150 tablas pertenecientes a esta segunda categoría están acompañadas por un diagrama (Robson 2008, 45-46).

40-30 –una configuración que esta civilización usó en diversas ocasiones, como veremos en el capítulo 7– (Hoyrup 2002, 274-275). Lo interesante es que, tal y como señala Friberg (2007a, 42-43), este es un diagrama muy preciso, manifestando que ciertos escribas tendrían un buen manejo de instrumentos matemáticos como la regla y el compás. Podemos ver también que junto a cada parte relevante de las figuras se les ponía el nombre o número adecuado, y los números indicando el área o volumen se ponían en el interior de las mismas –como se ha podido comprobar también en la tabla UM 29-15-709–.

Anverso Reverso

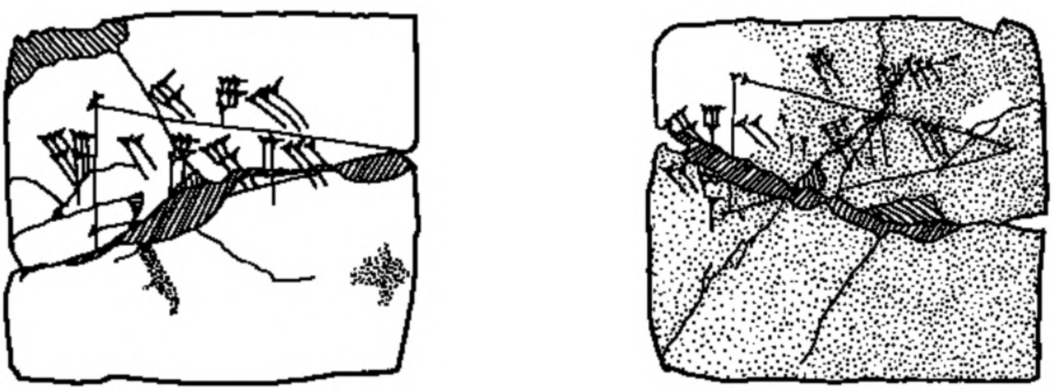


Imagen 4.7 Tabla UM 29-15-709, con diagrama y números inscritos en él. Imagen de (Robson 2000, 29-30), tabla nº 12.

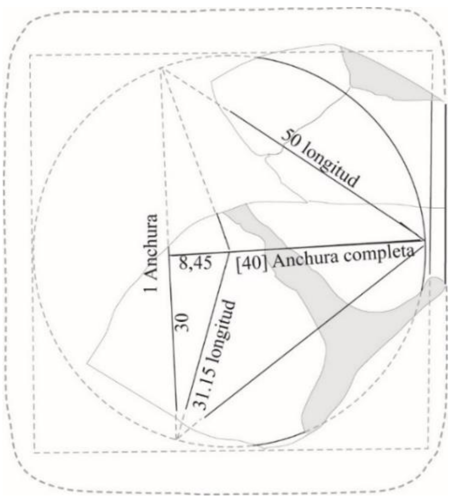


Imagen 4.8 Anverso de la tabla TMS I. Las partes en gris y línea discontinua representan partes que están dañadas o perdidas. Imagen de Friberg (2007a, 42) con los datos propuestos por Hoyrup (2002, 265).

En tercer y último lugar, los *textos con problemas*, uno de los tipos de tablas más abundantes y que más información nos ofrecen acerca de los desarrollos protomatemáticos de este período.[36] En general, existen ciertas características comunes a la mayoría de textos con problemas[37]:

- Suelen comenzar con una pregunta en primera persona del singular. La solución se presenta como una serie de instrucciones en imperativo o segunda persona del singular, y se suele terminar con “este es el procedimiento” o “el procedimiento”. En la pregunta se ofrece toda la información para resolver el problema, excepto los coeficientes a usarse;

- no se muestra generalmente cómo se lleva a cabo cada operación particular. A veces mencionan el cambio de una unidad metrológica a otra mediante una lista o tabla metrológica como un paso más. El resultado de cada paso se usa para calcular el siguiente paso, o se reserva para usarse posteriormente;

- pueden contener la respuesta a la pregunta, el método de resolución, o un diagrama situado en la parte inferior izquierda de la tabla al cual no se hace referencia explícita;

- el lenguaje utilizado suele ser condensado, estructurado, con un vocabulario limitado y predecible, en el que se usan logogramas para dar facilidad y velocidad a la hora de escribir y leer estos textos;

- no hay deducciones, teoremas ni demostraciones. Usan un método inductivo, donde las soluciones de problemas particulares se usan como ejemplos genéricos a partir de los cuales se infieren generalizaciones;[38]

- estas tablas podían contener de uno a cientos de problemas, los cuales podían estar agrupados temáticamente, en antologías, o no existir una relación clara entre ellos.

[36] Existen unas 160 tablas de este género (Robson 2008, 87), ver la tabla B.11 (Robson 2008, 11).

[37] Estas características han sido propuestas por diversos investigadores (Robson 1999, 7-9; 2008, 87-90; Hoyrup 2002, 8-10; Yuste 2013, 43-44); en este trabajo presentamos algunas de las más importantes.

[38] Aunque no existan teoremas, sí que existen algunas reglas de aplicación general. Piénsese por ejemplo en el caso de la fórmula del agrimensor, la cual se aplica a diversas figuras geométricas (cf. Hoyrup 2007).

Robson (2007) distingue tres tipos de textos con problemas: 1) geometría de la línea, que tratan sobre formas, áreas y volúmenes; 2) "álgebra métrica", que serían problemas sobre encontrar las cantidades desconocidas por medio de técnicas como completar el área; y 3) problemas que presentan un escenario de trabajo realista, como construcción de canales o división de terrenos, y que requieren para su resolución el conocimiento de constantes o implican la medición cuantitativa.[39] Vamos a presentar y analizar a continuación dos ejemplos relacionados con la geometría de la línea y uno sobre álgebra geométrica, ya que son los géneros más relevantes para nuestra investigación, y tratar en detalle cada género excedería los límites de nuestro trabajo.

En primer lugar, en relación a la geometría de la línea vamos a mostrar la tabla de procedencia desconocida BM 15285, la cual contenía 40 problemas, de los que se conservan 31 total o parcialmente completos (Img. 4.9). Los seis primeros tratan sobre cuadrados y círculos, los seis siguientes sobre cuadrados y triángulos rectángulos, y del 24 en adelante sobre figuras más complejas –ver discusión sobre términos geométricos a continuación– (cf. Robson 2007). En los propios diagramas pueden observarse a veces líneas guías dibujadas suavemente que dividen el diagrama en un cuadrado grande formado por 16 cuadrados pequeños. En otros diagramas se ve un punto en el centro del círculo, lo que prueba que para trazar esta figura se hizo uso del compás. No hay respuestas numéricas en estos diagramas (Robson 1999, 208-217; 2007, 93-99; 2008, 47-50; Friberg 2007a, 126-133).

A medida que el texto avanza, los problemas se van complejizando, y a veces se describe una misma figura de diversas maneras –como en los problemas II y IV, o VII y VIII–, lo que podría interpretarse como una forma en la que los profesores mostraban a los alumnos que un mismo diagrama podía ser usado de diversas maneras, o interpretarse en más de un sentido (Friberg 2007a, 132; Robson 2008, 109-110). A continuación, podemos ver dos de estos diagramas junto a los textos en los que se dan los datos iniciales y la pregunta a responder (Img. 4.10).

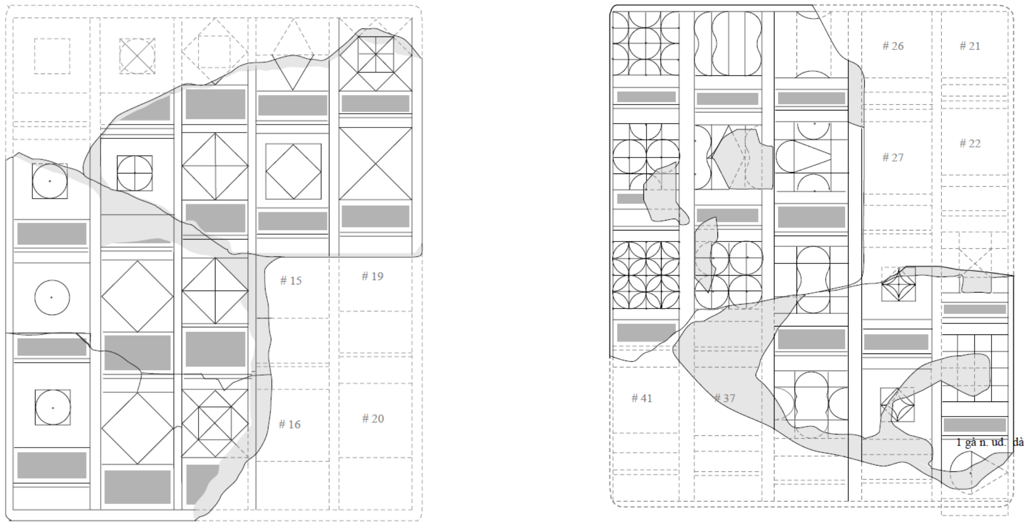
El segundo de los ejemplos es el texto Db_2-146, procedente de Eshnunna, posiblemente del c. 1780 a.e.c. (Hoyrup 2002, 257-261; Robson 2007). En las dos

[39] Cada autor puede dividir estas categorías en subcategorías diferentes, o puede ofrecer una subdivisión de los textos con problemas de diferentes maneras. Nosotros hemos optado por seguir a la clasificación propuesta por Eleanor Robson.

primeras líneas se dan los datos iniciales, la diagonal (1 15) y área (45) de un rectángulo, y en la tercera se hace la pregunta, ¿cuáles son la longitud y anchura de este rectángulo?

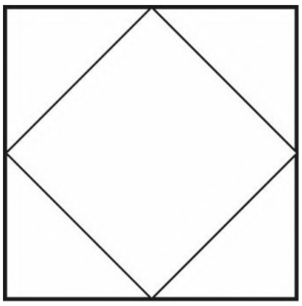
C. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

P. 1-4 4-8 9-12 13-16 17-20 38-41 34-37 30-33 26-29 21-25



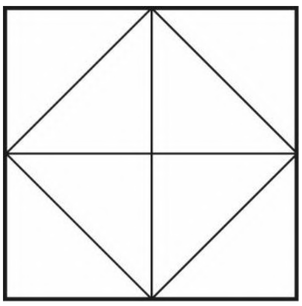
Anverso Reverso

Imagen 4.9 Tabla BM 15285, con el número de columnas (C.) y problemas (P.). La tabla al completo debió de medir unos 30 × 50 cm. Imagen de Friberg (2007a, 127-128).



Problema #7

El lado-cuadrado es 1 *UŠ*. Dentro de él he dibujado un segundo lado-cuadrado. El lado-cuadrado que yo he dibujado toca el lado-cuadrado exterior. ¿Cuál es su área?



Problema #10

El lado-cuadrado es 1 *UŠ*. Dentro de él he dibujado 8 cuñas. ¿Cuáles son sus [áreas]?

Imagen 4.10 Problemas #7 y #10 de BM 15285, siguiendo la traducción al inglés de Robson (2007, 94). El corchete del problema 10 indicaría que esa palabra no aparece en la tabla, y son los traductores e historiadores quienes proponen qué palabra ocuparía ese hueco.

El procedimiento comienza en la línea 4 pidiéndonos que tomemos la diagonal de este rectángulo y la dibujemos, para posteriormente "hacerlo sostener" o "cuadrarlo";[40] esto es, construir un cuadrado cuyo lado es la diagonal (Img. 4.11). En la línea 5 aparece el área de este cuadrado (1 33;45), y en la línea 6 nos dicen que nos guardemos este número para usarlo posteriormente.[41]

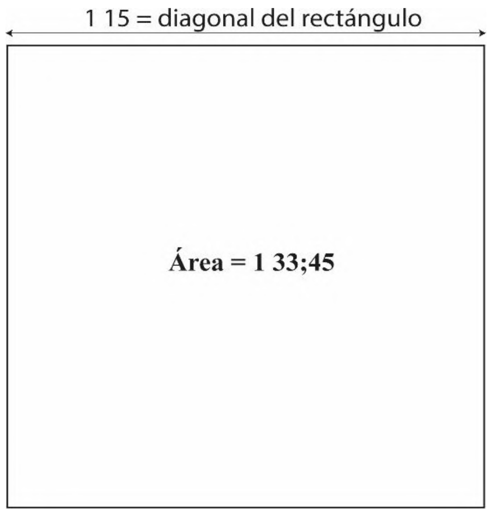


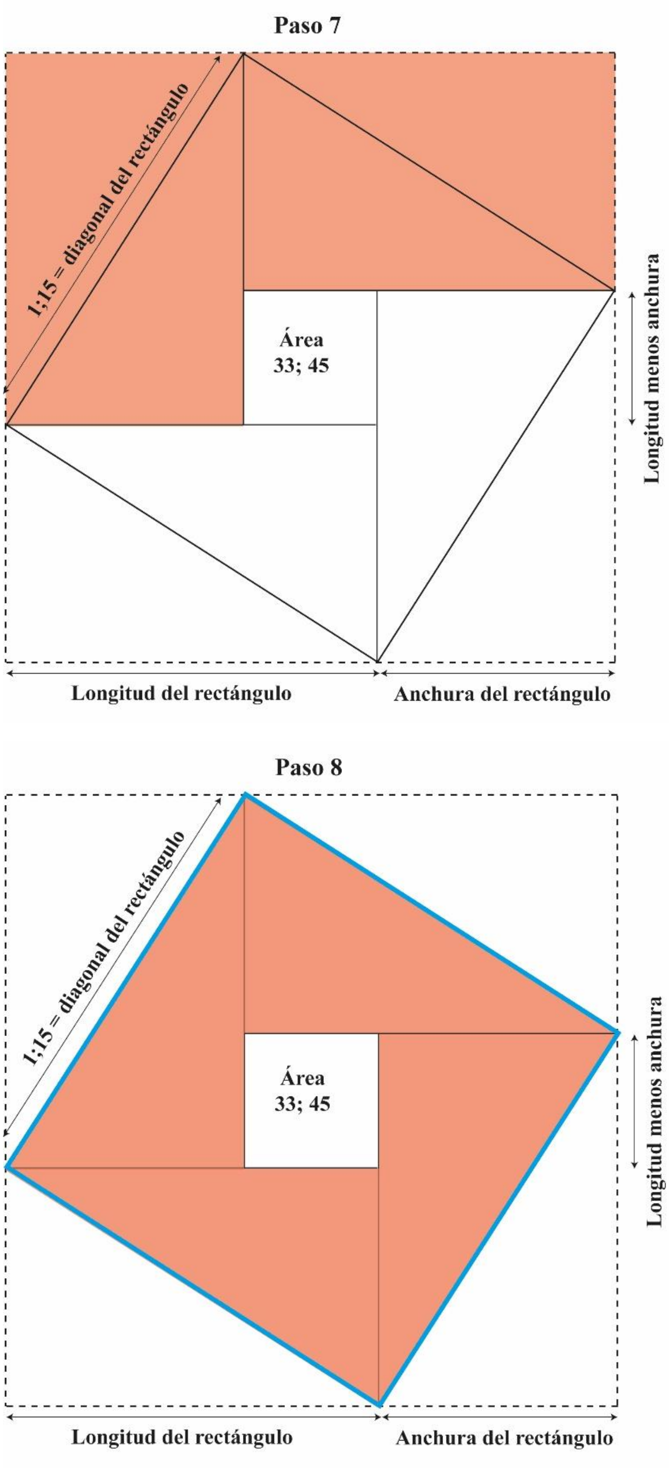
Imagen 4.11 Diagrama de la situación descrita en las líneas 4-6 del problema Db_2-146.

En la línea 7 multiplicamos el área del rectángulo inicial por dos (45 × 2 = 1 30). Entonces, en el paso 8 cortamos del área del cuadrado que construimos anteriormente el área de este rectángulo, que nos daría un área de 33;45. En el próximo diagrama (Img. 4.12) podemos ver estas operaciones representadas. Podemos observar que al multiplicar el área del rectángulo inicial obtendríamos los dos rectángulos rojos (Img. 4.12 A). Entonces, si cortáramos estos rectángulos por la diagonal, y movemos los cuatros triángulos rectángulos dentro del cuadrado que construimos anteriormente –de lado la diagonal del rectángulo inicial, dibujado en azul (Img. 4.12 B)–, habrá un área central, la cual se

[40] Término acadio *šutakūlum*, esto es, combinar, cuadrar, o hacer que los lados que estemos considerando se sostengan el uno al otro. Ver la discusión posterior acerca de los términos geométricos.

[41] La traducción de esta línea es problemática. La traducción propuesta por Hoyrup (2002) es, "1° 33´ 45´´ tu mano lo debería sostener" (p. 258). Esto podría significar que guardemos los números a nuestra disposición para usarlos posteriormente; sin embargo, en la línea 11 se habla acerca de números "en tu mano" y números "en la superficie sobre tu mano", lo que hace pensar a este investigador que quizás esta expresión haga referencia a una pieza de arcilla sobre la que se escribían estos números para usarlos posteriormente (Hoyrup 2002, 258-259).

corresponderá precisamente a la que se obtiene al restar las dos áreas que el procedimiento nos indica en el paso 8 –área del cuadrado de lado la diagonal menos el área del rectángulo multiplicada por dos–, igual a 33; 45.



A

B

Imagen 4.12 Diagrama representando los pasos 7 y 8 del problema Db_2-146. Diagramas similares han sido utilizados en otros procedimientos, como BM 13901 #8, AO 8862 #3 o YBC 6504 #2 (Hoyrup 2002, 260). Imagen modificada de (Hoyrup 2002, 59).

En estos diagramas (A y B) podemos observar de qué manera se han utilizado métodos de cortar y pegar, donde las figuras geométricas y sus partes son manipuladas como si las estuviéramos cortando, moviendo y pegando.

A continuación, en el paso 9 se nos indica que cojamos el lado de este cuadrado central (15), que se correspondería con la longitud menos la anchura (Img. 4.13), y que calculamos dividiendo dicho lado entre dos. En el paso 10 bisecamos este cuadrado para obtener la mitad de su lado, 7;30. Levantamos entonces este cuadrado sobre sí mismo, obteniendo así el cuadrado gris situado en la esquina superior del cuadrado central (Img. 4.13), y calculamos su área (0;00 56;15). Sumamos en el paso 11 las áreas correspondientes al cuadrado gris y el rectángulo inicial (45 56;15).

Para entender qué se está haciendo aquí, mirar el diagrama a continuación (Img. 4.13). En primer lugar, uno de los datos iniciales es que el área del rectángulo inicial era 45. Esta área se correspondería al rectángulo blanco de la esquina superior derecha, más el rectángulo azul. Podemos observar que este rectángulo azul es exactamente igual al rectángulo amarillo que hemos dibujado dentro del rectángulo blanco de la esquina inferior derecha.[42] Por lo tanto, el rectángulo blanco de la esquina superior derecha más el rectángulo amarillo tendrían un área de 45, y si le sumamos el área del cuadrado gris central, construiríamos un cuadrado cuya área es 45 56;15 –paso 11–.

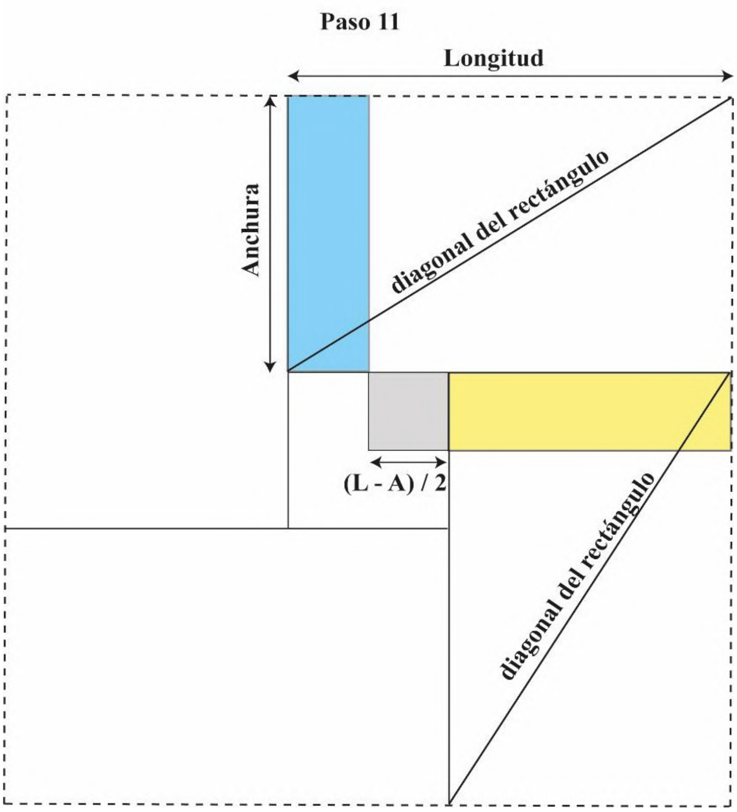


Imagen 4.13 Últimos pasos del problema Db_2-146. Imagen ligeramente modificada de (Hoyrup 2002, 260).

Entonces, como sabemos el área de este nuevo cuadrado que hemos formado, podemos calcular cuánto mide su lado, que sería 52;30. Por lo tanto, la longitud del rectángulo

[42] Tanto el rectángulo azul como el amarillo, como podemos observar, estarían formados por: 1) anchura del rectángulo inicial; y 2) mitad del lado del cuadrado central.

inicial se correspondería con la suma del lado de este cuadrado que acabamos de formar, más la longitud del rectángulo azul del diagrama anterior (Img. 4.13), que como podemos observar mediría lo mismo que el lado del cuadrado gris; esto es, 7;30. Entonces, sabemos ya que la longitud del rectángulo inicial valdría 1 (52;30 + 7;30). Si a esta longitud le restamos 15 –suma de los dos lados del cuadrado gris central, o lado del cuadrado central que resultó de la resta de las áreas realizadas en los pasos anteriores–, obtendríamos la anchura, que sería 45.

Posteriormente, en los pasos 17 al 25 se comprueba que esta solución es correcta reformulando el problema a la inversa; esto es, si la longitud del rectángulo es 1 y su anchura 45, ¿cuánto medirían su diagonal y área? Y se comprueba entonces si se llegan a los datos iniciales, y así mostraría el profesor a los alumnos por qué este procedimiento era correcto (Hoyrup 2002, 257-261). Lo veremos con más detalle en el capítulo 7.

En segundo lugar tenemos el "álgebra métrica", género correspondiente a la mitad del corpus de textos con problemas paleobabilónicos (Friberg 2007a), y que han sido analizados detalladamente por Hoyrup (2002). Una de las conclusiones principales de este autor es que para resolver problemas de este tipo se usaron métodos geométricos ingenuos de cortar y pegar;[43] esto es, las magnitudes conocidas y desconocidas se representaban en un diagrama y se manipulaban activamente las líneas y áreas medibles, mediante las cuales se identifican y manipulan si es necesario las superficies equivalentes en el diagrama para encontrar el número desconocido –ver los diagramas 4.12 y 4.13–.

Por lo tanto, las figuras no se construirían a medida que vamos avanzando en el problema, sino que se presupone que existen con anterioridad y se manipulan para comprobar la corrección de cada paso. Este es por lo tanto un método analítico en el que son claves la conservación del área de las figuras y la asunción de que la suma de las áreas parciales es igual al área total; esta asunción pudo surgir en relación con la práctica de

[43] Para comprender este subconjunto de textos son precisas algunas aclaraciones. En primer lugar, Hoyrup (1980) considera que la geometría se relaciona con "problemas donde el interés en la forma visual parece definir el problema" (p. 89, nota 58); y álgebra con "todos los problemas del tipo "a mi cuadrado añado ½ de mi lado: 20''" (p. 89, nota 58). En la intersección de estas dos áreas estaría el álgebra métrica, ya que "en todos ellos se extrae el valor de la incógnita a partir de una configuración geométrica concreta. No hay formalización, ni establecimiento de ecuaciones ni reglas que obedecer, salvo las estrictamente geométricas" (Yuste 2008, 55). Por otro lado, el apelativo de geometría ingenua lo propuso tras pensar en otros como visual, intuitiva o heurística, pero prefiere ingenua ya que hace referencia al hecho de que no se discute bajo qué condiciones las transformaciones que se llevan a cabo son válidas (Hoyrup 1990).

medir, ya que si medimos diversas áreas parciales y las unimos para formar una nueva figura se podría comprobar empíricamente que la suma de las áreas parciales se corresponde con el área de la nueva figura (Hoyrup 2002, 96-107; Damerow 2016). Veamos un ejemplo.

La tabla YBC 6967, posiblemente de Larsa, trata sobre encontrar un par de números recíprocos –esto es, cuyo producto sea 60– conociendo la diferencia entre ambos.[44] En este caso seguiremos la traducción al inglés y explicación de Robson (2008, 113) junto al diagrama e interpretación de Hoyrup (2002, 55-58).[45]

1. [Un recíproco] excede su recíproco por 7. ¿Cuáles son [el recíproco y su recíproco?]

En este primer punto la información que nos da el problema es que dos números cuyo producto es 60, que será el área del rectángulo que forman, tienen una diferencia entre ellos de 7 (Img. 4.14).

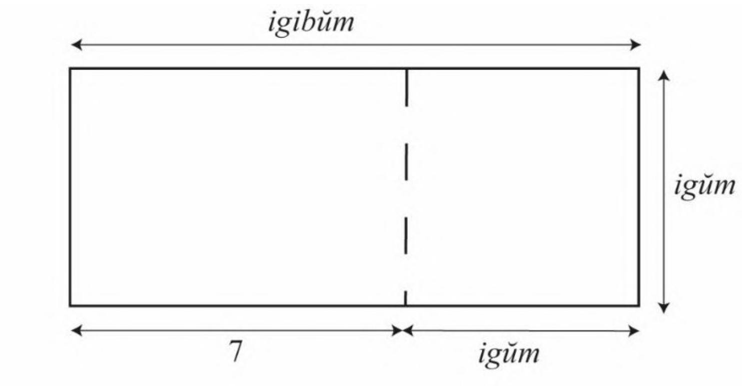


Imagen 4.14 Diagrama del paso 1 de YBC 6967, en el que tenemos un rectángulo con lados *igŭm e igibŭm*, por lo que su área es igual a 60. Diagrama modificado ligeramente de (Hoyrup 2002, 56).

2. Tú: rompe por la mitad el 7 por el que el recíproco excede a su recíproco: 3;30 (vendrá). Combina 3;30 y 3;30: 12;15 (vendrá).

[44] Este tipo de problemas se denominan como *igŭm-igibŭm*, esto es, 'el *igi* y su *igi*'; o lo que es lo mismo, dos números que son mutuamente recíprocos (Hoyrup 2002, 35; Roque 2012, 69-70).

[45] Seguimos la numeración de Robson (2008, 113), la cual no se corresponde con la usada en la tabla paleobabilónica. Por ejemplo, la línea 1 se correspondería con los pasos 1, 2 del anverso; la 2 se correspondería con los pasos del 3 al 7 del anverso, etc., según la traducción de Hoyrup (2002, 55-56).

En este segundo paso “rompemos por la mitad” la diferencia de 7 entre los recíprocos, por lo que tendríamos dos rectángulos con anchura 3;30 (Img. 4.15 A). A continuación, movemos uno de los dos rectángulos de anchura 3;30, y formamos un gnomon cuya área seguirá siendo 60, ya que al mover partes de la figura el área se conserva. Se puede observar que, junto a este gnomon, hemos creado un cuadrado con lados 3;30 y 3;30, cuya área será igual a 12;15 (Img. 4.15 B).

A

B

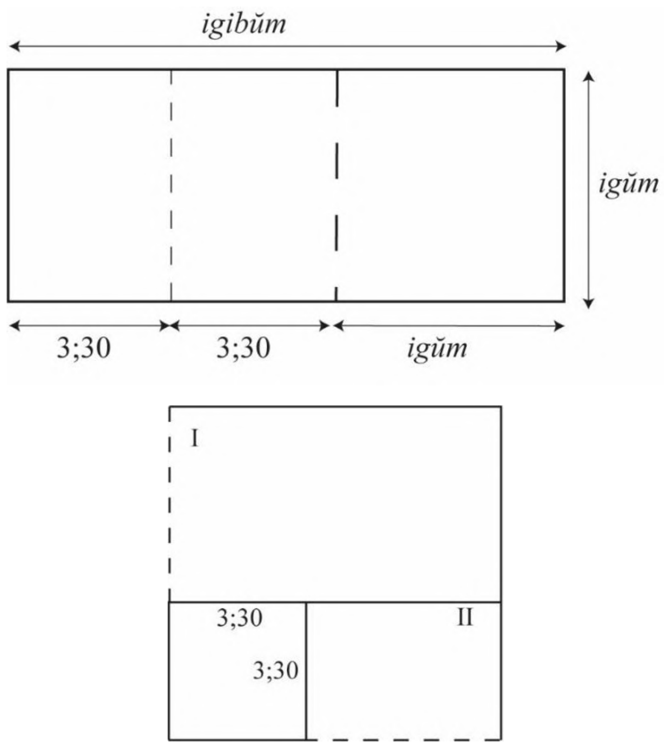


Imagen 4.15 Diagrama del paso 2 de YBC 6967. Imagen de (Hoyrup 2002, 56).

3. Añadir [1 00, el área,] al 12;15 que surgió para ti; 1 12;15 (vendrá). ¿Cuál es [el lado-cuadrado de 1] 12;15? 8;30

Si añadimos el área que ya teníamos –que era 1, o 60– a la nueva área que hemos formado, tendremos un cuadrado con un área total de 1 12;15. Por lo tanto, conociendo su área, podemos calcular cuánto mide el lado de este nuevo cuadrado grande (Img. 4.16), que valdrá 8;30.

4. Pon [8;30 y] 8;30, su equivalente, y corta 3;30, el cuadrado-combinado, de uno (de ellos); añade (3;30) a uno (de ellos). Uno es 12, el otro es 5. El recíproco es 12, su recíproco es 5.

En el último paso volvemos a colocar el rectángulo que habíamos movido para formar el gnomon, de longitud 3;30, y lo sumamos al lado del cuadrado grande que formamos anteriormente cuyo lado medía 8;30. De esta manera, obtendríamos que el *igibŭm* vale 12 (8;30 + 3;30). Por otro lado, si al cuadrado grande que hemos formado de lado 8;30 le restamos la longitud del rectángulo que retiramos, obtendríamos entonces el *igŭm*, que valdría 5 (Img. 4. 16).

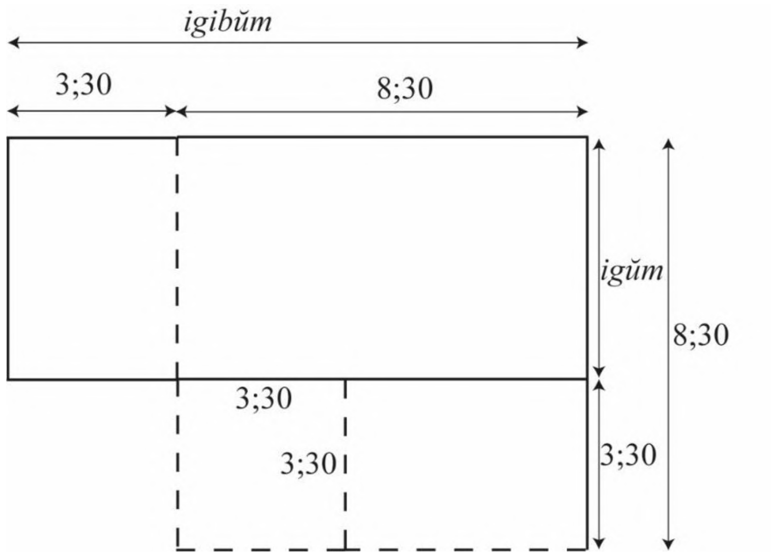


Imagen 4.16 Diagrama del paso 3 y 4 del procedimiento YBC 6967. Imagen de (Hoyrup 2002, 56).

Tenemos que señalar que estos diagramas son reconstrucciones que han realizado los historiadores e historiadoras, ya que los posibles diagramas que acompañaran a los textos con problemas, en general, no nos han llegado. Sin embargo, Hoyrup (2002, 103-107) tiene la hipótesis de que posiblemente se dibujaran y manipularan estos diagramas en pizarras de polvo o en la propia arena. Por otro lado, a través de la investigación del vocabulario involucrado en estos procedimientos este autor ve reforzada su hipótesis acerca del uso de estos diagramas, como mostraremos a continuación.

Cada uno de estos tipos de tablas protomatemáticas tenía una función pedagógica específica. Las grandes colecciones de problemas acompañadas de soluciones podrían ser equivalentes a libros de textos, los cuales podían estar acompañados por soluciones modelos. En los apuntes escolares los estudiantes realizaban cálculos y usaban diagramas, y con las listas de coeficientes se podía aplicar un coeficiente particular en un paso del procedimiento, o usar las tablas metrológicas que se aprendían de memoria. Por otro lado, los catálogos eran usados por los maestros para elegir problemas idénticos o similares para enseñar correctamente los procedimientos para resolver cada tipo de problema (Robson 1999, 177-179; 2001).[46] Vemos así que existió un estrecho vínculo entre la emergencia y desarrollo del conocimiento protomatemático y la educación escriba paleobabilónica.

Por último, presentaremos cómo se conceptualizaron algunas figuras geométricas, así como la manera en la que se usaron algunos términos técnicos para llevar a cabo las distintas operaciones de los procedimientos protomatemáticos. Comenzaremos presentando los principales términos usados para figuras geométricas:[47]

- **Cuadrado** (***mitḫartum***). Este puede traducirse más acorde a su contexto histórico como lado-cuadrado, ya que con este término los escribas hacían referencia tanto al lado del cuadrado como a su área (Robson 2007, 68). Ver los problemas #7 y #10 de BM 15285 (Img. 4.10).

- **Rectángulo** (***şiliptum***). Este término podía hacer referencia tanto al rectángulo como a su diagonal. Según Yuste (2013, 72-73) con este término también estaríamos hablando de la diagonal de triángulos rectángulos (hipotenusa), de trapecios rectos, rectángulos y cuadrados. Ver YBC 6967 (Img. 4.14).

- **Triángulo** (***santakkum***). Usado para hablar sobre todo de triángulos rectángulos; esto es, triángulos que son la mitad de un rectángulo. Por otro

---

[46] Aunque existiera un repertorio estándar de ejercicios elementales, funciones pedagógicas específicas de cada tipo de tabla, y un tamaño y forma estandarizada de las propias tablas, las funciones y tamaños de estas podía variar entre escuelas, ciudades y períodos (Robson 2008, 97-106). Cada escuela pudo desarrollar, por decirlo así, un modo canónico de exposición y desarrollo de lo que se enseñaba (Hoyrup 2002, 359-362; 2007).

[47] Las fuentes consultadas han sido Robson (1999; 2007; 2008), Hoyrup (2002), Friberg (2007a) y Yuste (2013). Por otro lado, Kilmer (1990) muestra algunos términos en su contexto matemático y sus posibles usos en ambientes no matemáticos, como en el arte, y Friberg (2007b, 443-446) muestra hasta 21 grupos de figuras geométricas, entre las que encontramos las aquí expuestas, así como pirámides de diversas formas, cubos, conos, conos truncados, etc.

lado, un triángulo simétrico es el que está formado por dos triángulos rectángulos idénticos colocados espalda con espalda (Img. 4.8). El triángulo equilátero sería un caso especial dentro de los triángulos simétricos. Este término incluye figuras que hoy día no consideramos como triángulos, ya que uno de sus lados podía ser curvo.[48]

- **Círculo** (***kippatum***).[49] Con este término estaríamos hablando tanto del área del círculo como de la circunferencia –al igual que ocurre con cuadrados y rectángulos–. Los diagramas con círculos no suelen mencionar el diámetro (*tallum*) ni el radio (*pikrum*). Podemos ver un ejemplo en YBC 7302 (Img. 4.17).[50]

- **Semicírculos** (***uskarum***). Una mejor traducción acorde a su contexto sería "segmento de círculo", ya que en algunos problemas como MLC 1354 la figura sobre la que se trabaja son 2/3 de un círculo, y no un semicírculo. Sin embargo, en listas de coeficientes siempre hace referencia a semicírculos. En problemas sobre semicírculos sí aparece el radio, aunque este es conceptualizado como transversal corto de la figura, el cual es perpendicular al diámetro.

Por otro lado, existe un conjunto de figuras que no encuentran su contraparte en nuestra práctica matemática actual, o que son "ajenas a las matemáticas modernas" (Robson

---

[48] Sin embargo, no poseían el concepto de ángulo como cantidad medible. Sí distinguían entre ángulos prácticamente rectos y oblicuos, siendo los primeros los que fueron usados en la fórmula del agrimensor como (prácticamente) perpendiculares a la anchura. Se puede afirmar que, al menos intuitivamente, tenían un concepto de ángulos similares (Hoyrup 2002, 227-228; Friberg 2007a, 73-76; 151).

[49] Existe un mayor número de tablas sobre cuadrados o rectángulos que sobre círculos (Hoyrup 2002, 52; 282-292; Friberg 2007a).

[50] Como dijimos anteriormente, en las listas de coeficientes se usaba la aproximación $\pi = 3$. Sin embargo, en listas de coeficientes no geométricos se usaron mejores aproximaciones. En la tabla YBC 8600, para calcular la capacidad de un contenedor cilíndrico, se usa una aproximación de $\pi = 3\ 1/8$ (Powell 1984 *apud* Robson 1999, 37). Esto es, la precisión de este coeficiente era importante para resolver problemas prácticos (Robson 2001, 181, nota 14). Por otro lado, Robson (2008) indica que esta figura no es generada mediante la rotación del radio sobre su centro, sino que era considerada como "la figura rodeada por una circunferencia" (p. 66).

2007, 94), y las cuales guardan relación con la propia cultura visual mesopotámica. Entre estas, tenemos un cuadrilátero irregular con uno o más lados curvos, denominado *pūt alpim* y traducido como "ceja de buey", o la figura formada por dos segmentos de un tercio de círculo, denominada *īn alpim*, traducida como "ojo de buey" (Robson 1999, 45-48; 2007, 68).[51]

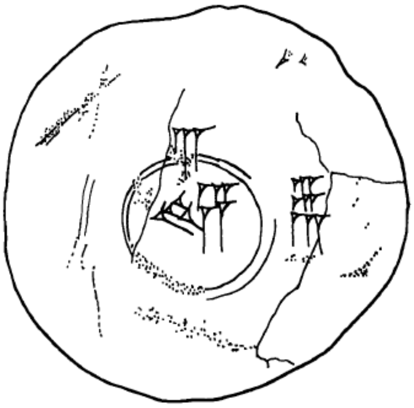


Imagen 4.17 Tabla YBC 7302. Imagen de (Robson 2008, 66).

A continuación, mostraremos algunos de los términos técnicos usados para llevar a cabo distintas operaciones en esta práctica matemática.

- 2 tipos de **adición**: **a)** simétrica, expresada como X *u* Y *kamārum*, que podría traducirse como "sumar X e Y", o "acumular". Operación aritmética usada para añadir medidas de números de distintas unidades, como longitudes, áreas, días, trabajadores, etc; **b)** asimétrica, expresada como X *ana* Y *wasābum*, y traducida como "añadir X a Y", y se usa sobre todo para operaciones concretas. Lo que se añade es absorbido, por decirlo así, por la entidad que se incrementa (Hoyrup 2002, 19-20; Robson 2007; Yuste 2013, 46-47).

- 2 tipos de **sustracción**: **a)** X *ina* Y *nasāhum*, traducido como "quitar X de Y", o "cortar de" o "arrancar". Operación contraria a *wasābum*, esto es, quitar una

[51] Existe un conjunto de términos de figuras geométricas que evidencian la importancia de la cultura visual mesopotámica para el estudio de las mismas (cf. Robson 2008, 45-53). Como señala Kilmer (1990), "la geometría habría estado originalmente desarrollada por los artesanos que producían los diseños, más que por los "pensadores abstractos" que reflexionaban sobre principios matemáticos y geométricos" (pp. 88-89).

parte de alguna entidad; **b)** A *eli* B *itter*/*iter*, operación mediante la cual hacemos una comparación, y se comprueba cuánto excede A a B. También se puede comparar con *matûm*, operación con la que se comprueba cuanto es B más pequeño que A (Hoyrup 2002, 20-21; Robson 2007; Yuste 2013, 47).

- 4 tipos de **multiplicación**: a) entre dos números, que es la que podemos encontrar en las tablas de multiplicación, y que se representa por el logograma A.RÁ, que podríamos traducir como "veces", o si decimos X A.RÁ Y podríamos traducirlo como "X pasos de Y"; b) *našûm*, que podría traducirse como levantar o aumentar. Usado para la multiplicación de constantes técnicas y conversiones metrológicas, calcular volúmenes desde la base y altura, o determinar áreas si estas no implican construir un rectángulo; c) X *u* Y *šutakūlum*, traducido literalmente como "hacer que X e Y se sostengan la una sobre la otra", "combinar X e Y", y que puede traducirse por rectangularización o cuadrar. Lo que hacemos es construir una superficie rectangular o cuadrangular al hacer que una línea se sostenga sobre la otra, siendo esta una operación geométrica; d) *esēpum*, que podría traducirse como "doblar", "duplicar", o "repetir". Esta sería una operación de multiplicación en la que tendríamos una repetición concreta (Hoyrup 2002, 21-27; Robson 2007; Yuste 2013, 47-48).

- **Proyección, *wāsītum***. Con esta operación lo que se lleva a cabo es la transformación de un lado de un cuadrado en un rectángulo, añadiéndole una línea de longitud siempre 1, formando así el área de este nuevo rectángulo (Hoyrup 2002, 51-55; Robson 2007; Yuste 2013, 48).[52]

- Para el **área** de cuadrados y rectángulos se usa *a.sà*, que puede ser traducido como campo o área abierta, pero que en términos técnicos en relación con la práctica matemática se traduce como superficie o volumen, dependiendo del contexto (Hoyrup 2002, 33-37).

[52] Este nombre-verbo en la cultura mesopotámica estaba vinculado con algo que sobresalía o era prominente en un edificio. Sin embargo, en el ámbito matemático hace referencia a esta operación específicamente geométrica (Hoyrup 2002, 51).

No hemos presentado todas las figuras o términos usados para realizar estas operaciones. [53] Lo que hemos querido hacer es subrayar la importancia de los estudios filológicos e históricos de esta nueva ola de historiadores e investigadores sobre las matemáticas en Mesopotamia. Para estos es importante ofrecer una traducción y estudio histórico más afín a la propia práctica de los escribas, el contexto socio-cultural y político en el que estos vivían, así como los materiales usados para elaborar este tipo de conocimiento.[54]

[53] En el apéndice 4 mostramos cinco tablas en las que aparece el uso del círculo en problemas de "Figuras inscritas en figuras" o "figuras con figuras" (Friberg 2007b, 189-219). Se han hallado casos de tablas de mano con rectángulos inscritos en círculos (MS 3050), círculos inscritos en cuadrados (MS 2985), triángulos equiláteros inscritos en círculos (MS 3051), círculos inscritos en hexágonos (MS 1938/2), hexágonos o heptágonos inscritos en círculos (TMS 2), etc. Hemos querido presentar este último apéndice en relación con las protomatemáticas mesopotámicas puesto que como señalamos en el segundo capítulo, en el nivel II de conocimiento protogeométrico comienzan a realizarse operaciones sobre y entre los diversos elementos y figuras protogeométricas. Es decir, en este nivel se estudian y exploran las relaciones protogeométricas existentes entre las diversas figuras y sus elementos, considerándolas o incorporándolas así dentro de un marco simbólico general –aunque todavía tosco y poco desarrollado–, y no únicamente como figuras *solitarias*.

[54] Ver la evolución de los trabajos en historia de las matemáticas mesopotámicas presentada por Hoyrup (2002, 1-10), Yuste (2013, 23-29) o la tabla 1.2 de Robson (2008, 6).

Capítulo 5

El surgimiento del conocimiento protogeométrico y geométrico en la Grecia antigua

1. Consideraciones generales sobre las matemáticas griegas y su lugar en la historia

A diferencia de lo que ocurre con la historia de las matemáticas mesopotámicas o chinas, la historia de las matemáticas griegas ha sido amplia y exhaustivamente investigada.[1] Por esta razón, hemos preferido mostrar en esta sección algunas de las ideas principales que podemos inferir a partir de lo que sabemos hoy día sobre los matemáticos y conocimiento matemático pre-euclidiano (Tabla 5.1).

Si nos fijamos en la cuarta columna de la tabla, podremos observar que no nos han llegado apenas tratados o documentos matemáticos de este período. Por lo tanto, resulta complicado llevar a cabo un estudio y caracterización del tipo de conocimiento desarrollado por estos autores. Sin embargo, a grandes rasgos podríamos distinguir un primer período protogeométrico, en el que se incluirían a los tres primeros autores de la tabla, y un período geométrico compuesto por el resto de investigadores.

Veamos de qué manera algunos investigadores han considerado este primer período protogeométrico con el caso de Russo (2004), quien argumenta

> durante estos dos siglos y medio [período de las matemáticas helénicas] la cultura griega asimiló los resultados egipcios y mesopotámicos y los sometió a un agudo análisis racional, estrechamente relacionado con la investigación filosófica. La tradición griega nombra a dos pioneros en estas investigaciones: Tales, quién supuestamente empezó desarrollando, al comienzo del siglo VI a.e.c., la geometría que había aprendido en Egipto, y Pitágoras, quién fundó su famosa asociación política y religiosa durante la segunda mitad del mismo siglo (p. 33)

[1] Tenemos trabajos importantes desde finales del siglo XIX y principios del XX, como la obra de Gow (1884) o el trabajo clásico de Heath (1921a, 1921b). Posteriormente, a mediados del siglo XX, tenemos obras notables como los dos volúmenes de Thomas (1957a, 1957b) o la obra de Dantzig (1955). De la actualidad podemos citar la colección editada por Christianidis (2004).

Tabla 5.1: Historia General de las Matemáticas Griegas pre-euclidianas				
Autor	**Lugar**	**Obras notables**	**Fuente**	**Referencias**
Tales (siglo VII a.e.c., ≈ 620 a.e.c.)	Mileto (costa oeste de la actual Turquía).	*Astrología naútica* (?), *Sobre el solsticio* (?) y *Sobre el equinoccio* (?)	Ningún registro original. Lo citan autores posteriores como Diógenes Laercio, Simplicio o Plutarco.	Kirk et al. (2008), O'Grady (2016) y Hahn (2017).
Pitágoras (siglos VI-V a.e.c.)	Samos (isla situada en el mar Egeo, cerca de la costa de Asia Menor). Se establece posteriormente en Crotona (sur de Italia, en el golfo de Tarento).	No escribió nada. Estudio de los números figurales, teorema de Pitágoras, dogma de los pitagóricos "todo es número" (?)	Autores tanto del pasado como de la actualidad han discutido extensamente sobre la posibilidad de que Pitágoras no hubiera realizado ningún estudio matemático.	Kirk et al. (2008), Burkert (1972) y Zhmud (2012).
Oinópides (siglo V a.e.c.)	Quíos (isla situada en el mar Egeo, cerca de la península de Karaburun, Turquía). Posiblemente desarrolló su labor matemática en Atenas.	Proclo le atribuye las proposiciones 12 y 23 del libro I de los *Elementos*. Su importancia reside en ser el primero en resolver estos problemas teóricamente, por medio de regla y compás, y subrayar la importancia del uso de estos instrumentos en las matemáticas.	Ninguna de sus obras han sobrevivido. Comentarios de Proclo por mediación de la *Historia de la Geometría* de Eudemo.	Heath (1921a), Bulmer-Thomas (1974), Morrow (1992).
Hipócrates (siglo V a.e.c.)	Quíos (isla situada en el mar Egeo, cerca de la península de Karaburun, Turquía). Posteriormente se fue a Atenas.	Famoso por su cuadratura de la lúnula, así como por escribir unos *Elementos* al estilo euclidiano. Es, plausiblemente, el primer matemático griego.	Ninguna de sus obras han sobrevivido. Proclo le atribuye ser el primero en escribir matemáticas al estilo euclidiano. Parte de su trabajo en la cuadratura de las lúnulas ha sobrevivido en el *Comentario a la Fisica de Aristóteles* de Simplicio.	Heath (1921a), Morrow (1992), Netz (1999), Cuomo (2001).
Arquitas (siglo IV a.e.c.)	Tarento (ciudad al sur de Italia, situada en el golfo de Tarento).	Primer matemático que resuelve el problema de la duplicación del cubo, estudios de matemáticas y música.	Su trabajo nos ha llegado a través de un comentario de Eutocio al libro II de *Esfera y Cilindro* de Arquímedes. Esta solución fue criticada por Proclo por hacer uso de elementos mecánicos o prácticos.	Heath (1921a), Morrow (1992), Cuomo (2001), Huffman (2005).
Eudoxo (siglo IV a.e.c.)	Cnido (ciudad en la antigua región de Caria, Turquía). Viajó y vivió en diversos lugares, como Atenas o Cícico, noroeste de Anatolia).	Discípulo de Arquitas y Platón, posiblemente miembro de la academia. Considerado, junto a Teeteto como el mejor matemático del siglo IV a.e.c. Creó la teoría de las proporciones, posteriormente expuesta en los libros V y VI de Euclides, el método exhaustivo y ofreció una solución al problema de doblar el cubo.	Ninguna de sus obras nos han llegado. Se conocen sus resultados matemáticos por autores posteriores, como Arquímedes, Diógenes Laercio, la crítica de Plutarco por usar métodos mecánicos al igual que Arquitas, o en el *Comentario sobre el Phaenomena de Arato y Eudoxo* de Hiparco	Heath (1921a), Morrow (1992), Cuomo (2001).

En relación a esta idea de Russo queremos comentar, sobre todo en relación con Pitágoras –de Tales hablaremos a continuación–, que en los últimos años se ha debatido la posibilidad de que este autor no participara ni desarrollara resultados matemáticos importantes (Burkert 1972).[2] Nuestra postura es que, dadas las fuentes y registros actuales sobre estos autores, no es posible afirmar que sometieran el anterior conocimiento protomatemático a ningún análisis racional ni filosófico. De hecho, ni siquiera podemos estar seguros de que desarrollara ningún tipo de conocimiento protomatemático o matemático.

Siguiendo la interpretación de algunos investigadores de las matemáticas griegas (Szabó 1978; Netz 1999, 306-312; Asper 2009), es común que el inicio de las matemáticas teóricas se sitúen entre el 440-360 a.e.c. en los alrededores de Atenas. Específicamente, Hipócrates de Quíos es considerado el primer matemático que presenta este tipo de conocimiento de manera axiomático-deductiva, separándose por tanto de sus motivaciones y aplicaciones prácticas, e hizo un uso matemático de los diagramas.[3]

Por otro lado, se ha sugerido que la aplicación o desarrollo de un aparato deductivo para el conocimiento matemático se vio influenciado por el surgimiento y desarrollo de la filosofía griega. Szabó (1978) fue uno de los primeros investigadores en explorar esta posibilidad, afirmando que Euclides con su obra quería evitar el tipo de dificultades sobre las que los Eleáticos ya habían teorizado y llamado la atención. En esta línea, Bernard (2003) argumenta que los textos matemáticos se usaron dentro de la práctica de la retórica, mostrando de esta manera cómo se podían solucionar determinados problemas y convencer a los demás mediante argumentos válidos. O Cuomo (2001), que subraya que la mayoría de población griega vivía en democracia, donde se celebraban discusiones y debates públicos que pudieron influenciar en la búsqueda de la verdad, generalidad, y elaboración de argumentos válidos. Este tipo de práctica y valores epistémicos pudieron

[2] Netz (1999) afirma que "Pitágoras el matemático pereció finalmente en 1962 e.c." (p. 272), haciendo referencia al año de publicación original de la obra de Burkert. Para propuestas contrarias respecto a Tales y Pitágoras ver Hahn (2017), y en relación a Pitágoras y la posibilidad de que incluso demostrara el teorema que lleva su nombre ver Zhmud (2012).

[3] Netz (1999) hipotetiza que los diagramas matemáticos no se importaron de otras prácticas como la agrimensura o arquitectura, sino que surgieron de manera abrupta en el siglo V a.e.c en relación con el desarrollo del conocimiento geométrico. Por otro lado, Hahn (2017) cree que el uso de diagramas puede encontrarse en prácticas de períodos anteriores, como en la arquitectura y en la construcción de túneles.

ser importados o considerados en relación con el desarrollo del conocimiento matemático, aunque esta cuestión sigue siendo debatida hoy día.

En relación con Arquitas y Eudoxo queremos llamar la atención sobre el hecho de que estos investigadores hicieron uso de algunas herramientas mecánicas para resolver uno de los problemas clásicos del mundo griego: la duplicación del cubo.[4] Lo que nos interesa de esta cuestión es precisamente la crítica que ambos autores recibieron por introducir este elemento mecánico en la investigación geométrica.

Para analizar este punto vamos a presentar brevemente a uno de los filósofos que más ha influido en la caracterización de las matemáticas griegas. Estamos hablando de Platón[5], el cual trató en diversas obras sobre la cuestión del conocimiento matemático.[6] Nosotros nos vamos a centrar en la división del conocimiento matemático que Platón establece entre aritmética y logística, así como entre geometría y estereometría. Ambos campos pueden distinguirse de acuerdo a su objeto de estudio: 1) aritmética y geometría estudiarían las propiedades de número y figuras geométricas de manera general e ideal; 2) logística y estereometría estarían centradas en el estudio de cuestiones prácticas, tales como la agrimensura, arquitectura o actividades comerciales (Cuomo 2001, 24-31).

En el siguiente extracto de la *República* podemos ver cómo Platón da una mayor importancia al estudio abstracto e ideal de la geometría respecto a su contraparte práctica:

> - En ese caso, si la geometría obliga a contemplar la esencia, conviene; si en cambio obliga a contemplar el devenir, no conviene.
> - De acuerdo en que afirmemos eso.
> -En esto hay algo que no nos discutirán cuantos sean siquiera un poco expertos en geometría, a saber, que esta ciencia es todo lo contrario de lo que dicen en sus palabras los que tratan con ella.

---

[4] Los tres problemas clásicos del mundo griego eran el de “la cuadratura del círculo”, “la duplicación del cubo” y “la trisección de un ángulo” (cf. Knorr 1986).

[5] Sin lugar a dudas, muchos otros filósofos griegos trataron en sus obras acerca del estatuto e importancia del conocimiento matemático, siendo otra de las figuras clave Aristóteles. Lloyd (1970, 1979) o Cuomo (2001) han tratado este tema.

[6] Uno de los pasajes más citados en la literatura histórica, filosófica y científica es el que aparece en el *Menon*. En este pasaje se muestra cómo un esclavo sin conocimiento matemático previo puede llegar a una conclusión matemáticamente correcta únicamente mediante las preguntas de Sócrates y apoyándose en el dibujo de la figura sobre la que estaban discutiendo (Fowler 1999, 3-27). Esta idea es la que, como vimos anteriormente, es tomada como base filosófica por algunas teorías innatistas como la teoría CKS.

- ¿Cómo es eso?
- Hablan de un modo ridículo, aunque forzoso, como si estuvieran obrando o como si todos sus discursos apuntaran a la acción: hablan de 'cuadrar ', 'aplicar', 'añadir' y demás palabras de esa índole, cuando en realidad todo este estudio es cultivado apuntando al conocimiento.
-Completamente de acuerdo.
- ¿No habremos de convenir algo más?
- ¿Qué?
- Que se la cultiva apuntando al conocimiento de lo que es siempre, no de algo que en algún momento nace y en algún momento perece.
-Eso es fácil de convenir, pues la geometría es el conocimiento de lo que siempre es (Platón, *República,* 527a-b, traducción en la edición de Gredos, 1988, de Conrado Eggers Lan).

Esta concepción platónica ha sido tomada a lo largo de la historia como el ideal de conocimiento geométrico perseguido por los geómetras griegos de la antigüedad. Dentro de este ideal, el uso de herramientas no estaba permitido, ya que estas podían corromper la belleza y verdad de este tipo de conocimiento.

Por ejemplo, Plutarco (siglo I e.c.) toma el marco interpretativo platónico para asegurar que geometría es equivalente a un tipo de conocimiento ideal, abstracto, y que tiene que alejarse de cuestiones prácticas o mecánicas para preservar su estatus puro. Bajo esta aproximación criticará a Arquitas y Eudoxo por haber corrompido este campo de conocimiento mediante la introducción de instrumentos mecánicos, los cuales mezclaron o llevaron los elementos sensibles al campo de lo inteligible.[7]

Sin embargo, no podemos olvidar que esta es la interpretación platónica de Plutarco, la cual no tiene por qué ser un reflejo fidedigno de lo que ocurría en tiempos de Platón respecto al estatuto de la geometría, o de la consideración general acerca de las pruebas basadas en instrumentos mecánicos de geómetras como Arquitas o Eudoxo.

Este tipo de aproximación ha sido criticada en tiempos recientes por diversos investigadores. Por un lado, Asper (2009) señala la existencia de ‛dos culturas matemáticas’ en Grecia. Con esta idea quiere llamar la atención sobre la sobreabundancia de estudios históricos y filosóficos centrados en matemáticas teóricas, con autores canónicos como Euclides, Apolonio o Arquímedes. Este fenómeno, señala este autor, ha

[7] Ver su obra *Vidas Paralelas*, especialmente *Vida de Marcelo* 14.9-14.11, traducción en la edición Gredos (2006) de Paloma Ortiz.

llevado a olvidar que existía otra cultura matemática griega, que es precisamente la que se encargaba de cuestiones vitales como la agrimensura o prácticas de contar relacionadas con actividades comerciales o estatales.

Por otro lado, investigadores como Cuomo (2001), Lloyd (2012) o Tybjerg (2004) creen que no existieron solo dos culturas matemáticas sino una pluralidad de prácticas matemáticas interrelacionadas. Por ejemplo, Cuomo (2001, 39-50) señala que las matemáticas prácticas seguramente tuvieran un mayor peso social de lo que se le suele conceder, ya que estas pudieron usarse para la resolución de conflictos, asegurar un reparto justo de bienes y tierras, organización de ciudades, etc. No por estar orientadas a cuestiones prácticas y del día a día eran concebidas por los agentes que las usaban y desarrollaban como menos objetivas o convincentes que las matemáticas teóricas.

Por otro lado, autores de períodos tardíos como Herón –el cual presentaremos en la sección 3.3– o Papo de Alejandría no encajan en el ideal griego de matemáticas puras e ideales. Estos autores trataron de sistematizar y comentar el conocimiento matemático que legaron, hacerlo más accesible al público, y no tenían preocupaciones ʽpuristas' como Platón o Plutarco (Cuomo 2001, 256-261; Tybjerg 2004; Lloyd 2012).

Creemos que es interesante terminar esta sección con una última cita del libro *Colecciones Matemáticas* de Papo de Alejandría, ya que refleja bien la crítica de los autores de esta visión pluralista de las matemáticas griegas

> la geometría no está lastimada de ninguna manera, sino que es capaz de dar contenido a muchas artes al asociarse con ellas, de hecho, siendo la madre de las artes, no se lastima al tratar con la construcción de instrumentos y la arquitectura; de hecho no se ve perjudicada al estar asociada con la división de la tierra, gnomónica, mecánica y escenografía, al contrario, parece que favorece a estas artes y que es debidamente honorada y adornada por ellas también (*Colecciones Matemáticas*, Libro VIII, traducido en Cuomo (2001, 229)

2. Neolítico en Grecia (6500–4000 a.e.c.)

2.1 Contexto socio-cultural y político

En el Neolítico Temprano de Grecia se puede observar en el registro arqueológico que las labores agrícolas y ganaderas sustituyeron al anterior modo de subsistencia basado en la caza y recolecta de alimentos –introducidas presumiblemente desde Oriente Próximo–, los asentamientos fijos comenzaron a establecerse, y la cerámica empezó a estar presente en la mayoría de estos asentamientos (Demoule & Perlès 1993; Perlès 2004). Veamos con detenimiento algunas de las innovaciones introducidas en el Neolítico que podrían ser importantes para nuestro trabajo.

En primer lugar, se considera que la manufactura de herramientas líticas en Grecia fue menos compleja que en otras regiones. Sin embargo, es característico del caso griego la fijación por ciertos materiales como el sílex, e incluso raros o especiales como la obsidiana y las conchas marinas. Así mismo, la cerámica fue un tipo de bien que se elaboró de manera abundante, y a diferencia de otras regiones la mayoría de estos útiles no fueron usados para la alimentación o almacenaje de alimentos, sino para la celebración de rituales. También es característico de esta cerámica que se decorase en su mayoría con "patrones geométricos" (Demoule & Perlès 1993; Perlès & Vitelli 1999; Perlès 2004, 208-221) –ver Imagen 5.1–.

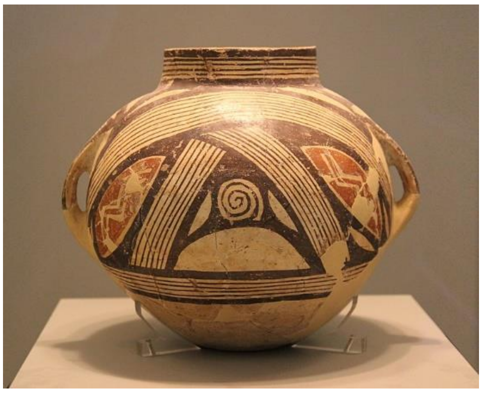
A  **B** 

Imagen 5.1 A: Cerámica usada posiblemente para guardar fruta hallada en la cueva Franchthi (5800-5300 a.e.c.), imagen con licencia cc del usuario Zde, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fruitstand,_Neolithic_pottery,_Franchthi_Cave,_AM_of_Nafplio,_202057.jpg; B: vaso fabricado con arcilla y decoración policromada hallado en Dímini, Magensia (5300-3300 a.e.c.). Imagen con licencia cc del usuario Gary Todd, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Clay_vase_with_polychrome_decoration,_Dimini,_Magnesia,_Late_or_Final_Neolithic_(5300-3300_BC).jpg.

La elaboración de todo este tipo de bienes –útiles rituales o bienes fabricados con materiales raros o de prestigio– vino acompañado de una mayor división y especialización del trabajo. En el registro arqueológico queda patente que solo una pequeña parte de la población se encargaba con mayor intensidad que el resto a fabricar estos útiles, así como mejorar las técnicas de trabajo. En el caso griego incluso se habla de la figura de los 'especialistas artesanales itinerantes', los cuales eran expertos artesanos que iban visitando los diversos asentamientos para ofrecer sus habilidades altamente especializadas, o algún tipo de herramienta hecha con material no disponible para ese asentamiento (Demoule & Perlès 1993; Perlès 2004, 208-221; Souvatzi 2008, 56-61).

Sin embargo, esta división del trabajo no vino acompañada de la emergencia de sociedades más complejas, ni del aumento de la desigualdad social o política. Lo único evidente en el registro arqueológico es que estos especialistas tuvieron una mayor importancia socio-económica para estas sociedades, ya que en sus tumbas se encuentra un mayor número de útiles. Sin embargo, esta diferencia en el patrón de enterramiento no implica la jerarquización de la sociedad, ni el establecimiento de estructuras institucionales hereditarias (Perlès & Vitelli 1999; Perlès 2004, 283-297).

Otro fenómeno característico de esta civilización fue el interés que se prestó a la organización espacial de diversos elementos, como las viviendas, el propio asentamiento, y la relación de unos asentamientos con otros. Por un lado, las viviendas se construyeron con formas cuadradas o rectangulares, con una división clara y regular de los distintos espacios, y en algunos asentamientos incluso se ha observado que las cuatro esquinas de las viviendas se orientaron con los puntos cardinales –como se ve en el caso de Sesklo, en Tesalia (Souvatzi 2008, 76-106)–. Por otro lado, se ha comprobado que algunos asentamientos también se construyeron con una clara orientación y de manera muy regular distinguiendo espacios para el trabajo artesanal, espacios para las viviendas, un espacio central para la celebración de rituales o festines, e incluso vías para el tránsito de personas (cf. Kotsakis 1999; Souvatzi 2008, 205-243). Finalmente, los asentamientos de gran parte de Grecia se construyeron a distancias regulares entre ellos, y la mayoría no tenía muros, sino fosos (Demoule & Perlès 1993; Halstead 1999).[8]

Estas características han conducido a diversos investigadores del Neolítico griego a argumentar que existió un tipo de existencia pacífica y muy social entre los diversos asentamientos. Por lo general, se considera que las familias e incluso asentamientos al completo se organizaron conjuntamente para trabajar en las distintas labores agrícolas, y para la fabricación de los diversos útiles se apoyaron en este grupo de artesanos itinerantes (cf. Halstead 1999; Kotsakis 1999).

[8] Por nombrar un caso ilustrativo, en Tesalia se han hallado unos 300 asentamientos con una distancia media entre ellos de 5 km (Souvatzi 2008, 51-61).

Lo que no se han hallado todavía, y puede que no existieran, son grandes edificios públicos usados para la celebración de rituales. Se cree que, en su lugar, lo que estas poblaciones llevaban a cabo eran festines con los que se afianzaban los lazos intragrupales, y los cuales fueron conducidos, presumiblemente, por una persona con cierto nivel de especialización en su preparación y celebración. Además, en el mundo griego también es característico la elaboración de útiles rituales que eran usados a nivel familiar, como las estatuillas antropomórficas y zoomórficas características del Neolítico de esta región (cf. Demoule & Perlès 1993; Perlès & Vitelli 1999, Perlès 2004, 254-293).

2.2 Las bases cognitivo-culturales del conocimiento protomatemático

Esta sección va a ser muy corta ya que, en general, el caso del Neolítico griego nos conduce a las mismas conclusiones y argumentos que ya hemos establecido en los capítulos anteriores. Esto es, creemos que este es un período clave de transición en el que encontramos algunos elementos que pudieron dar forma a las bases cognitivas y culturales del posterior desarrollo del conocimiento protogeométrico.

De entre estos elementos, en la cultura griega hemos podido observar que existió una preocupación especial por la organización espacial, la cual se llevó a cabo de manera estructurada. Por otro lado, también hemos mostrado que la división y especialización del trabajo comienza a instaurarse en el seno de estos asentamientos, los cuales dependían unos de otros a la hora de contar con los conocimientos y productos de estos artesanos especialistas y especialistas rituales –encargados de realizar principalmente festines y danzas–.

3. Historia plural de las matemáticas griegas

En la historia de las matemáticas griegas también ha existido la tendencia general de prestar una atención desigual al desarrollo de este conocimiento en el pasado. Es decir, se ha prestado una mayor atención a autores clave como Euclides o Apolonio frente a otros matemáticos griegos, conduciendo así a la creación del mito de que existía un ideal griego de un tipo de matemáticas axiomático-deductivas y completamente separadas de consideraciones prácticas o mecánicas.

Por esta razón, no presentaremos en este capítulo los diversos elementos materiales y prácticas correspondientes a la cultura visual griega, como la creación de mapas y estandarización de unidades de medición, orientación de ciertos edificios de importancia cultural, etc. En este capítulo hemos preferido centrarnos en el análisis y presentación de tres autores de la tradición griega –Tales, Euclides y Herón–. Lo hacemos para desmitificar, en primer lugar, el papel mesiánico adscrito a Tales como el reformador del conocimiento práctico de egipcios y mesopotámicos (sec. 3.1); y en segundo lugar, para mostrar que las matemáticas euclidianas no fueron las únicas matemáticas desarrolladas y valoradas en esta civilización, para lo que presentaremos con cierto detalle algunos resultados y consideraciones de Herón (sec. 3.3). Mostraremos de esta manera el carácter plural de esta tradición matemática.

3.1 Tales de Mileto: el surgimiento de la protogeometría

El primero de los autores que vamos a tratar es Tales de Mileto, considerado por gran parte de la tradición histórica, filosófica e incluso literaria como el primer filósofo, científico y matemático del mundo griego. Aunque no nos ha llegado ni una sola línea escrita por Tales, son numerosas las fuentes que lo citan por su importancia para todos estos campos de conocimiento, como Heródoto, Diógenes Laercio, Platón, Proclo, etc.[9]

En relación con su faceta de matemático es común hacer referencia a dos hechos clave: 1) se afirma que Tales aprendió matemáticas de los agrimensores egipcios cuando viajó a esta región;[10] y 2) Tales analizó críticamente las matemáticas egipcias, las cuales consideraba erróneas por su carácter práctico, y quiso mejorarlas para poder establecer principios matemáticos generales (O'Grady 2016, 249-251).

Este tipo de argumentación es común de aproximaciones helenofílicas a la historia de las matemáticas, en las que se considera que las matemáticas egipcias y mesopotámicas son meramente prácticas, aunque útiles para resolver problemas del día a día de estas dos civilizaciones. Pero, este conocimiento pasará a ser propiamente matemático gracias al

---

[9] Como puede verse en la Tabla 1, se han adscrito tres posibles obras a Tales. O'Grady (2016) opina que es posible que escribiera *Astrología Náutica*, ya que aparece reflejado en diversas fuentes; por otro lado, Kirk y colaboradores (2008, 123-126) muestran que diversos autores de la antigüedad ponen en duda que Tales escribiera tal obra. Para consultar todas las fuentes que citan a Tales ver (Kirk et al. 2008, 111-139; O'Grady 2016, 8-28; Hahn 2017).

[10] O'Grady (2016, 253-267) muestra en el apéndice A los datos de los que disponen los historiadores para saber que este viaje tuvo lugar.

filtro crítico y racional al que los griegos lo sometieron. En relación con Tales, Artmann (1999) afirma que

> el supuesto origen egipcio de la geometría nos parece implausible: no sabemos de ningún texto egipcio que sustancie esta afirmación, pero ocurre varias veces en las fuentes griegas. Tales, un hombre sabio proverbial, es caracterizado como el intermediario entre los "bárbaros" y los griegos. Pitágoras obtiene el crédito por la transformación decisiva de las matemáticas en una ciencia abstracta (pp. 13-14)

En relación con este tipo de afirmaciones, Fowler (1999, 279-283) argumenta que es tan poca la información fiable que tenemos respecto a matemáticos como Tales, que es cuanto menos dudoso afirmar categóricamente su papel decisivo en esta *transformación revolucionaria* griega del conocimiento matemático. De hecho, es curiosa la manera en la que las aproximaciones helenofílicas hacen este tipo de afirmaciones cuando, realmente, no tenemos ningún documento histórico ni arqueológico que lo atestigue, sino fuentes secundarias.

Por otro lado, se suele afirmar que Tales fundó la 'Escuela de Mileto', de la cual formaron parte Anaximandro de Mileto, discípulo de Tales, y Anaxímenes de Mileto, discípulo de Anaximandro (Kirk et al. 2008; O'Grady 2016; Hahn 2017). Parece que durante este período comenzaron a formarse escuelas o comunidades de investigadores, creando así un contexto socio-cultural propicio para la enseñanza, discusión, así como transmisión del conocimiento que elaboraran.

En cuanto a sus protomatemáticas, la tradición filosófica y matemática posterior a Tales le adscribe cinco resultados de los que, como ya hemos señalado, no nos ha llegado ni una sola línea o diagrama. Una de las fuentes en la que más información encontramos relativa a estos resultados es en el *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, escrita por Proclo –siglo V e.c; esto es, 1000 años después de Tales–.[11]

En el apartado en el que está discutiendo las *Definiciones* (156-158) de Euclides, Proclo dice que fue Tales quién demostró que un círculo es bisecado por su diámetro, lo que se correspondería con la definición 17 del libro I de los *Elementos*.[12] Este resultado

[11] Seguimos la traducción al inglés de Morrow (1992).

[12] Def. 17: "un diámetro de un círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales."

pudo ser alcanzado de manera empírica, al percibir cómo las dos mitades de un círculo coinciden al doblarlo por su diámetro.[13]

En segundo lugar, Proclo (250-251) afirma que Tales se dio cuenta de que los ángulos de la base de los triángulos isósceles son ʽsimilares', término arcaico que se sustituirá posteriormente por el de ʽigualdad'. Este resultado se corresponde con la proposición I.5 de los *Elementos*.

Proclo adscribe otros dos resultados matemáticos a Tales, basándose en la *Historia de la Geometría* de Eudemo. En primer lugar (299-300) le adscribe la proposición I.15, si dos rectas se cortan hacen los ángulos del vértice iguales entre sí; sin embargo, Proclo señala que si bien descubrió esta proposición, no la probó científicamente.[14] También le atribuye la proposición I.26 (352-353), esto es, si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado iguales, estos triángulos serán iguales.

Este último resultado es clave para otra de las hazañas matemáticas adscritas a Tales. Según Diógenes Laercio –siglo III e.c.–, Plinio –siglo I e.c.– y Plutarco –siglos I-II e.c.–, Tales fue capaz de medir la altura de una pirámide y la distancia de un barco en el mar respecto al observador situado en tierra. Plutarco, en el *Banquete de los siete sabios,* lleva a cabo una de las presentaciones más completas de este hecho,

> también a ti te admira [el rey Amasis] por otras cosas, pero sobre todo se sintió profundamente complacido con tu manera de medir la pirámide, ya que sin ningún trabajo y sin utilizar instrumento alguno, sino colocando de pie un bastón en el límite de la sombra que proyectaba la pirámide, habiéndose formado dos triángulos con la intersección de los rayos del sol, demostraste que la sombra guardaba con la otra sombra la misma relación que la pirámide con el bastón (147a, traducción de Concepción Morales Otal y José García López en la edición de Gredos (1986))

Respecto a esta hazaña queremos hacer dos comentarios. En primer lugar, los traductores de esta obra señalan que Plutarco ha olvidado algo de lo que Diógenes y Plinio sí dieron cuenta, y es que la sombra de la pirámide tenía que ser medida a la hora a la que la sombra

[13] O'Grady (2016) y Hahn (2017, 26-41) consideran que Tales usó diagramas en su práctica matemática. Durante este período se usaron diagramas en tareas como la construcción de templos y túneles, por lo que no es improbable, argumenta Hahn principalmente, que estos estuvieran presentes en matemáticas.

[14] En este sentido, Proclo dice (65-66) que Tales atacó algunos problemas de manera general y otros empíricamente.

de Tales fuera igual a la altura de su cuerpo. En segundo lugar, es curioso ver que Plutarco, quien criticó a Eudoxo y Arquitas por la introducción de instrumentos mecánicos en la geometría, afirme que Tales no usó “instrumento alguno” para esta tarea. Pero claro, podríamos preguntarnos qué consideración merece el bastón clavado a la tierra con el cual se miden las sombras. Bajo nuestro punto de vista, por poco sofisticado que pueda parecer, este bastón ha de ser considerado también como un instrumento. En definitiva, lo que queremos enfatizar de nuevo son los sesgos o prejuicios que tuvieron estos propios autores de la antigüedad en base a sus propias ideas o aproximaciones filosóficas.

En quinto y último lugar, Diógenes Laercio señala en *Vida de los filósofos ilustres*, libro I.24, que Tales fue el primero que inscribió un triángulo rectángulo en un círculo.

En relación con estos resultados, Kvasz (2008, 23-29; 2020) considera que son arcaicos y poco generales; aun así, pueden ser considerados como los primeros pasos en Grecia hacia una concepción ideal de los objetos geométricos. Sin embargo, no tenemos muy claro a qué hace referencia este autor con esta idea, ya que como señala posteriormente, Tales pudo alcanzar el conocimiento o resultados geométricos que se le adscriben mediante la manipulación y percepción directa de un objeto particular. Además, el lenguaje utilizado por Tales no es general sino particular, y no existía una cadena de proposiciones demostradas deductivamente.

En segundo lugar, Heath (1921a, 130-135) llama la atención sobre la diversidad de términos que las distintas fuentes emplean a la hora de presentar los resultados de Tales. Se dice que este ʻdemostró’, ʻafirmó’, ʻdescubrió pero sin probar científicamente’, etc. Es decir, tenemos una serie de fuentes secundarias que muestran que la ruptura que Tales supuso respecto al conocimiento protogeométrico de civilizaciones anteriores como la egipcia o mesopotámica no fue tan clara o revolucionaria.

Nuestra conclusión es que, aún si aceptamos como válidas las afirmaciones acerca de este autor de las fuentes secundarías, no sería correcto histórica ni filosóficamente denominar al tipo de conocimiento que este autor formuló como ʻgeométrico’. En todo caso, Tales elaboró un tipo de conocimiento todavía protogeométrico ya que este no era general, no elaboró un marco simbólico en el que vincular los resultados, y además la mayoría de estos resultados se basaron en un ʻprincipio de simetría’ que se fundamentó sobre todo en la percepción y manipulación directa de las formas geométricas y sus relaciones.

3.2 Euclides: la emergencia del conocimiento geométrico deductivamente organizado

En esta sección vamos a presentar la obra matemática griega más leída, investigada y citada por una diversidad de académicos del pasado y el presente. Estamos hablando de los *Elementos* de Euclides. Aunque esta obra haya sido clave para entender la emergencia y evolución del conocimiento matemático en Grecia, y en el mundo occidental en general, no tenemos dato alguno sobre su autor, ni la obra original ha llegado a nuestros días. Se cree que Euclides pudo trabajar en Alejandría durante el siglo III a.e.c., siendo los *Elementos* compilados durante este período. La edición más antigua que se conoce se remonta al siglo VI e.c., influenciada por los comentarios de Proclo y Teón de Alejandría. Además, la edición actual es fruto del trabajo de una gran cantidad de editores (Heath 1908, 91-113; Cuomo 2001, 127-135; de Risi 2016c).

Respecto a esta obra, queremos remarcar en primer lugar dos cuestiones. Por un lado, Euclides solo permite usar rectas y círculos –regla y compás– para la construcción de objetos geométricos y la realización de las operaciones matemáticas pertinentes, tradición que posiblemente comenzó Oinópides de Quíos. Por otro lado, esta obra tiene una clara organización deductiva. En el libro I, por ejemplo, Euclides demuestra en una secuencia deductiva las 48 proposiciones que lo componen a partir de las 23 definiciones, 5 nociones comunes y 5 postulados –edición de Heiberg (1883-1885)–, más los diagramas y proposiciones que va probando.[15]

Las tres características más relevantes de esta obra para nuestro trabajo serían: 1) el uso de letras para conectar texto y diagrama; 2) la distinción entre información exacta y co-exacta; y 3) la consideración de las definiciones y postulados como reglas de interpretación y construcción de los diagramas.

En primer lugar, tal y como muestra Netz (1999), el uso de letras para conectar diagrama y texto es una característica común de las matemáticas griegas de la antigüedad. Su uso sigue un conjunto de convenciones explícitas necesarias para comprender, construir y razonar de manera efectiva con los diagramas. Estas son introducidas mediante

[15] Esta es una característica que, como veremos en el capítulo 7, no encontramos en otras tradiciones matemáticas de la antigüedad. Sin embargo, comparar negativamente a otras tradiciones matemáticas por no asemejarse a esta obra griega nos parece una aproximación infundada histórica y filosóficamente a la hora de analizar el surgimiento y desarrollo de este tipo de conocimiento en la antigüedad.

la práctica del ʽbautismo' (Netz 1999, 68-83); esto es, las letras individuales se conectan con objetos individuales –generalmente representarían puntos–. Cuando diversos elementos han sido bautizados, entonces pueden formarse los nombres con varias letras, y representarían a los objetos geométricos mediante sus puntos de conexión. Esta práctica sigue una secuencia alfabética, y la repetición de una letra o conjunto de letras representa al mismo objeto a lo largo de la prueba. Así mismo, se pueden cambiar los nombres asignados siguiendo un orden lineal y ciertas restricciones que este mismo autor presenta.

En segundo lugar, Manders (2008a; 2008b) propuso la distinción en relación con la práctica euclidiana entre información exacta y co-exacta. La primera sería la que puede extraerse directamente del texto, como la igualdad entre segmentos, ángulos y otras magnitudes, o relaciones de congruencia y proporcionalidad; la segunda se refiere a la que se extrae del diagrama, aspectos diagramáticos que permanecen estables bajo pequeñas deformaciones o mejoras del diagrama, como relaciones parte-todo de regiones o puntos de intersección.[16]

Un ejemplo clásico de la interacción de estos tipos de información en la práctica euclidiana puede verse en I.1 –primera proposición del primer libro de los *Elementos*–, donde tenemos el segmento dado AB, y lo que hace es construir el triángulo equilátero ABC trazando para ello dos círculos.

- **Información exacta**: "siendo el punto A el centro del círculo CDB, AC es igual a AB". Información proporcionada por el propio texto que no sería estable bajo deformación del diagrama.

- **Información co-exacta**: "desde el punto C, en el cual los círculos se cortan el uno al otro". El punto de intersección sería un aspecto co-exacto del diagrama, el cual aparecerá aún si deformamos los círculos (Img. 5.2).

[16] Aunque no vamos a entrar en detalles, queremos al menos mencionar que el análisis de Manders ha sido usado como base para formalizar los *Elementos* (Avigad et al. 2009); por otro lado, como señalamos en el capítulo 2, algunos investigadores han llevado a cabo pruebas experimentales en relación con esta distinción entre información exacta y co-exacta, comprobando que generalmente la información co-exacta es más fiable para los sujetos experimentales que la exacta, y que si la información exacta no está perfectamente representada genera desacuerdos. Este tipo de experimentos podría poner de manifiesto las bases cognitivas de la práctica euclidiana (van der Ham et al. 2017; Hamami et al. 2020).

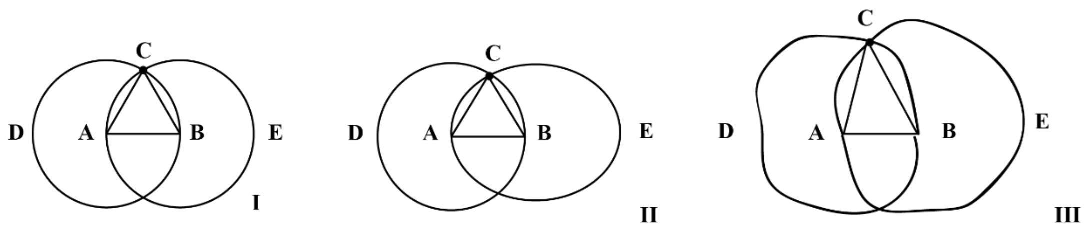


Imagen 5.2 Como puede observarse en I, II y III la información co-exacta, como que A sea interior al círculo, o que aparezca el punto de intersección C, es estable bajo deformación del diagrama.

Manders (2008a; 2008b) remarca además dos características de la construcción diagramática. En primer lugar, el diagrama está sujeto a las atribuciones exactas. Es decir, si la información exacta dice que tracemos una línea recta, sabemos que esta línea es recta aunque no la dibujemos perfectamente recta. En segundo lugar, la disciplina diagramática. Esto es, la habilidad de la geómetra para producir diagramas lo suficientemente buenos para poder reconocer los aspectos co-exactos que surgen durante la demostración. Esta habilidad es clave ya que un diagrama exageradamente deformado no permitiría inferir correctamente los aspectos co-exactos, y se aprende mediante la presentación, inspección y sustitución de los diagramas malos cuando sea necesario, así como comprobando si la información relevante para la demostración es estable.

En tercer lugar, las definiciones euclidianas se podrían entender como elementos usados para enseñar a un posible estudiante a leer los diagramas, razonar con ellos y entender sus implicaciones dentro de la práctica euclidiana (Ferreirós 2016, 112-152). La estudiante aprenderá a reconocer y manipular un objeto geométrico no por representarlo de manera precisa, sino porque comprende su definición, y sabe interpretar el diagrama de acuerdo a las mismas.[17] De hecho, reconocemos un punto en esta práctica no por poder representarlo de manera precisa –tarea imposible ya que punto es aquello que no tiene partes–, sino porque comprendemos la definición y sabemos interpretar el diagrama de acuerdo a la misma.

[17] En relación con este punto, es interesante resaltar dos características del uso de diagramas propuestos por Saito y Sidoli (2012): 1) sobre-especificación, esto es, representar más regularidad entre los objetos geométricos de la que el argumento de la demostración requiere; y 2) indiferencia a la exactitud visual, es decir, que los diagramas no son precisos gráficamente en relación con la exactitud con la que describe el texto, como por ejemplo dibujar líneas desiguales que textualmente se describen como iguales.

En este sentido, se llama la atención sobre el hecho de que estos diagramas no tienen que entenderse como una representación visual de la información textual de los *Elementos*, sino que hay que considerar cómo estos son construidos, interpretados y manipulados activamente dentro de esta práctica matemática particular (Giardino 2013; 2017; Ferreirós 2016).

Por otro lado, la construcción y manipulación del diagrama se constreñiría y controlaría por los tres primeros postulados, los cuales permiten a un posible interlocutor aceptar o rechazar los movimientos diagramáticos e información que puede ser inferida a partir de ellos. Concretamente, el primer postulado permitiría dibujar una línea recta entre dos puntos dados, el segundo extender una línea recta indefinidamente, y el tercero dibujar un círculo desde un punto y con un radio dado (cf. Ferreirós 2016, 112-152).

Se poseerían así los recursos para controlar la construcción e interpretación de los diagramas, mejorar su fiabilidad, y resolver posibles desacuerdos en relación con la apariencia del diagrama. Para interpretar estos diagramas adecuadamente en las demostraciones es necesario saber cómo manipularlos de acuerdo a las prescripciones textuales y reconocer los aspectos co-exactos relevantes que emergen durante su manipulación. En este sentido afirma Ferreirós que, "el geómetra actuará (dibujando) y razonará (infiriendo) consecuentemente, empleando el diagrama no como es dado empíricamente, sino tal y como es concebido" (p. 144).

Una vez presentadas estas características de la práctica euclidiana vamos a ver de qué manera quedan ejemplificadas en las demostraciones I. 37 y III.4 de los *Elementos*. Para este análisis vamos a seguir la propuesta de Proclo (203-204) de caracterizar las proposiciones euclidianas, tanto teoremas como problemas, con estos seis elementos: *protasis* (enunciación), *ekthesis* (presentación o exposición), *kataskeuē* (construcción), *diorismos* (especificación), *apodeixis* (parte central de la demostración) y *sumperasma* (conclusión), junto a los elementos que ya hemos caracterizado anteriormente.[18]

En primer lugar, tendríamos la enunciaión *–protasis–* de la proposición que se quiere probar en términos generales, que en el caso de I.37 sería "los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí" (p. 65). Esta proposición está ejemplificada en los *elementos* por un diagrama concreto, el cual vamos a mostrar de qué manera se va manipulando durante la demostración. En segundo lugar,

[18] En algunas pruebas pueden faltar algunos de estos seis elementos, aunque la enunciación, prueba y conclusión siempre aparecen (Heath 1921a, 370-371).

tenemos la presentación –*ekthesis*–, donde se especifica lo dado con datos o figuras particulares, y se prepara para que sea usado posteriormente en la demostración; y la especificación –*diorismos*–, donde se vuelve a afirmar qué se quiere probar, pero en este caso en conjunción con los términos y figuras particulares introducidas en la exposición (Img. 5.3).

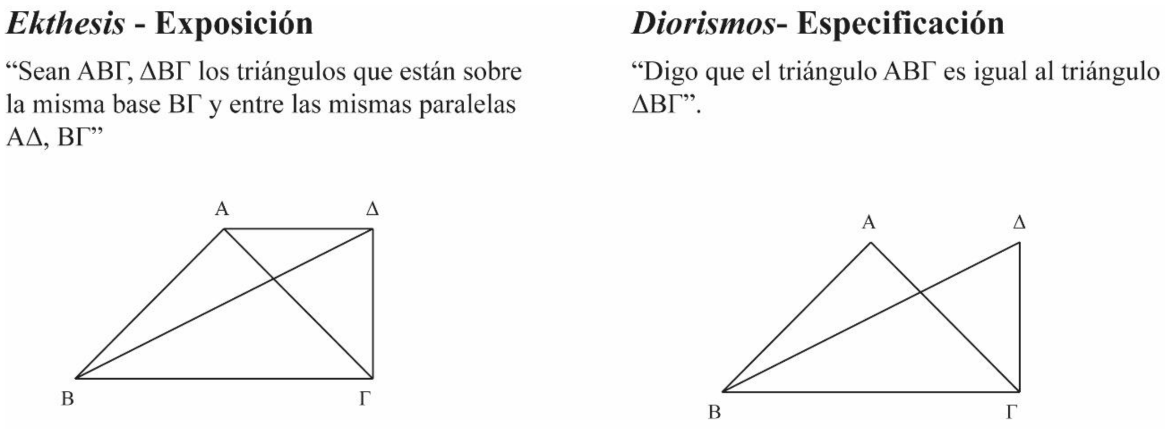


Imagen 5.3 Exposición y especificación en la prueba I. 37.

Como vemos, las figuras geométricas son introducidas a través del uso de letras, con las que se nombra a estos objetos geométricos a través de sus elementos clave o puntos de conexión. Por ejemplo, el triángulo ΑΒΓ es denominado así por sus vértices, Α, Β y Γ. La prueba prosigue con la construcción. El o la geómetra comenzará entonces a manipular activamente el diagrama, siguiendo para ello las indicaciones textuales, ciñéndose al uso de regla y compás, o rectas y círculos, reglas de construcción de los postulados, y el conocimiento probado anteriormente. En este caso particular (Img. 5.4), Euclides construye dos paralelogramos sobre los triángulos iniciales gracias a lo que se ha probado anteriormente, específicamente en I.31, así como por la posibilidad de prolongar ΑΔ en ambas direcciones gracias al postulado 2, "y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta", y al postulado 1, "postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera".

Posteriormente, comienza la demostración. Para nuestra presentación, la hemos dividido en dos partes principales. En la primera de ellas (Img. 5.5 A) Euclides muestra que los dos paralelogramos son iguales, gracias a lo ya demostrado en I.35. En la segunda parte (Img. 5.5 B) mostrará que los triángulos que presentó en la exposición serán la mitad de cada uno de estos paraleologramos, gracias a lo demostrado en I.34. Entonces, como ambos triángulos son la mitad de cosas iguales, ambos triángulos son iguales. Y terminaría la prueba I.37 con la conclusión –*superasma*–, que dice “por consiguiente, los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí Q.E.D.”

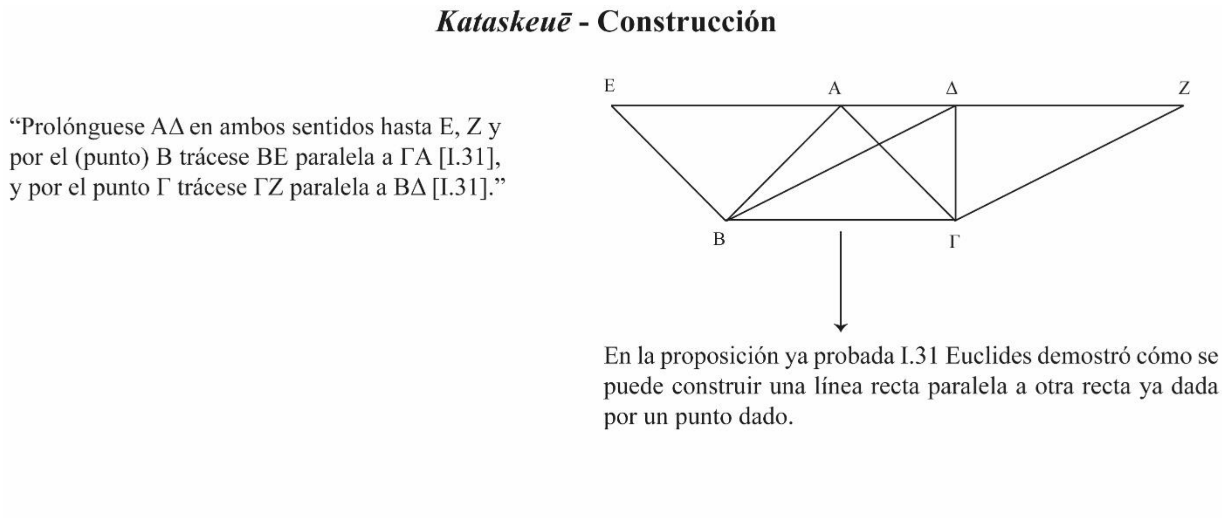


Imagen 5.4 Construcción en I.37.

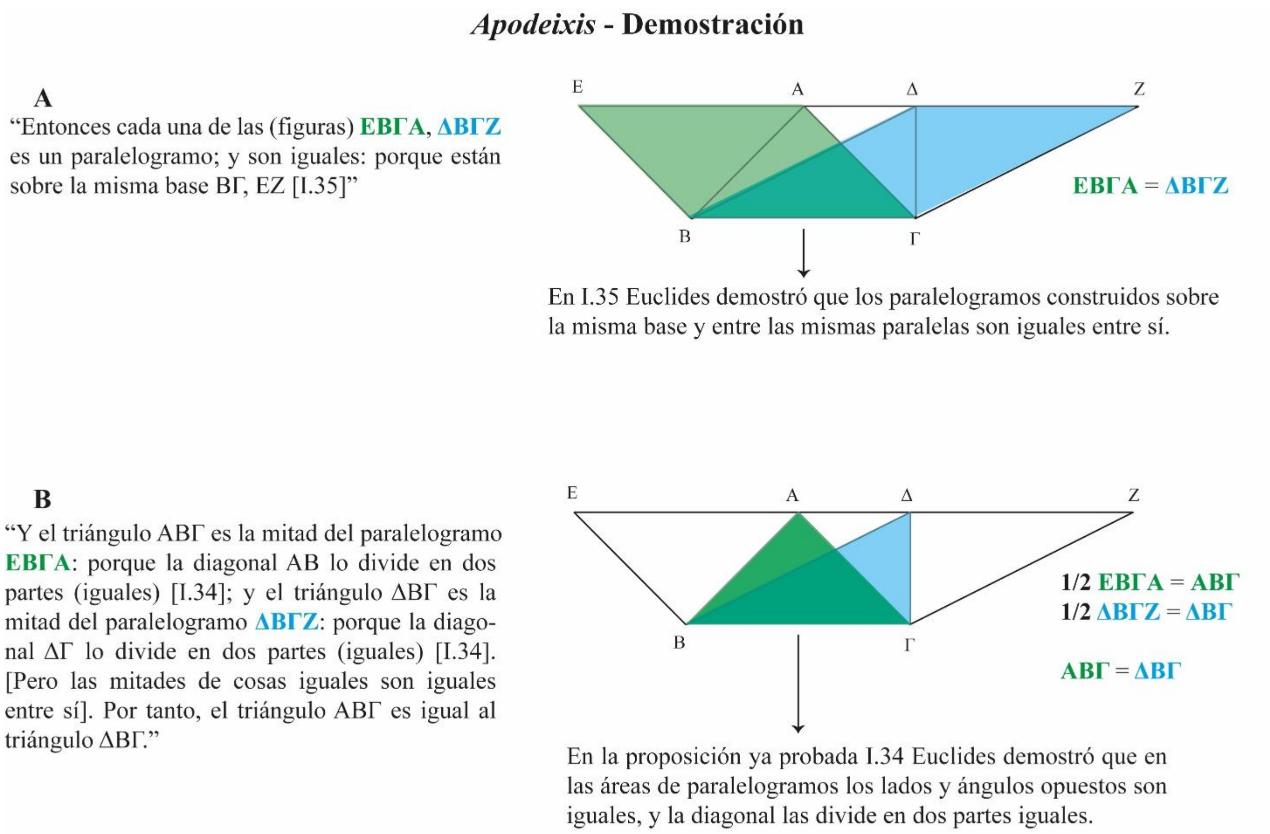


Imagen 5.5 Demostración en I.37.

Creemos que es importante volver a subrayar la importancia de considerar que esta práctica demostrativa estaría formada por la combinación entre estos dos tipos de información, textual y diagramática, y de qué manera es clave para analizar y entender esta práctica matemática las acciones que el sujeto lleva a cabo con el diagrama, que se convierte así en otra herramienta más de trabajo (cf. Giardino 2013). Por ejemplo, a lo largo de la prueba I.37 es necesario, tras la construcción, que el geómetra reconozca la emergencia de los dos paralelogramos en el diagrama y que vea el lado ΒΓ o ΑΓ, que antes eran considerados como lados de un triángulo, como lados del nuevo paralelogramo. Este tipo de habilidad para reconocer dichos aspectos diagramáticos durante la demostración son una parte esencial de la práctica euclidiana.

Por otro lado, aunque ya desde I.1 se venía usando la figura del círculo para construir líneas iguales a una dada, es en el capítulo III en el que esta figura será tratada con más detenimiento (Heath 1921a, 380-383).[19] En este capítulo, como decimos, se tratará sobre el círculo, algunos de sus elementos como líneas tangentes a un círculo o segmentos de círculo, así como la situación en la que varios círculos se tocan o cortan entre sí. Por otro lado, Mueller (1981, 177-204) señala lo que denomina algunas "perplejidades de este capítulo", como que solo cuatro de las 37 proposiciones que lo componen serán usadas en capítulos posteriores, o que en la definición III.10 se defina "sector de círculo", que no será usado en toda la obra. Para este autor esto pudo deberse a que estas figuras o relaciones no sean importantes para la propia obra de los *Elementos*, sino para otros textos matemáticos o discusiones matemáticas de la época.

Para presentar III.4, a diferencia de lo que hemos hecho con I.37 –y lo que haremos con I.46 en el capítulo 7–, en esta ocasión no vamos a presentar la prueba al completo, sino sus puntos principales. En esta proposición dice, "si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales".[20]

La prueba comienza usando lo demostrado en III.1, que es cómo hallar el centro de un círculo dado. Entonces, habiendo hallado dicho centro, trazamos desde el mismo la línea ΖΕ, siendo Ζ el centro y Ε el punto en el que las rectas ΑΓ y ΒΔ se cortan (Img. 5.6);

[19] En el capítulo IV también será clave la figura del círculo, aunque en esta ocasión se tratará en relación a figuras rectilíneas que se inscriban o circunscriban en él (Heath 1921a, 384-425).

[20] Esto es, se demuestra lo contrario que se demostró en III.3, "si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales".

y, de acuerdo a lo demostrado en III.3, si ZE pasa por el centro, cortaría a estas dos rectas en ángulos rectos. Es decir, que los ángulos ZEA y ZEB serían ambos rectos, lo que contradice lo que estamos viendo en el propio diagrama, ya que podemos observar –información co-exacta– que uno es mayor al otro, o más bien, que el ángulo ZEA está contenido en el propio ángulo ZEB. Por lo tanto, es imposible la situación que queríamos probar, y por lo tanto, queda demostrado lo contrario. A saber, si dos rectas que no pasan por el centro se cortan, no se dividirán en partes iguales.

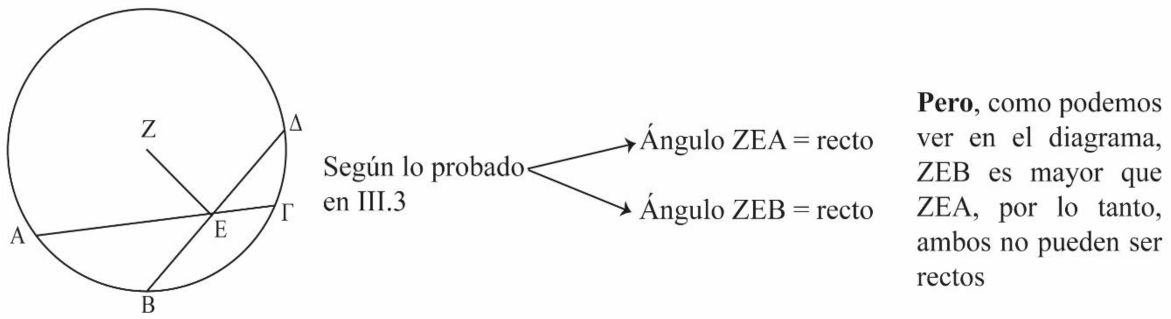


Imagen 5.6 Diagrama de la proposición III.4 y breve explicación de la prueba.

Vemos así de qué manera los diversos elementos que presentamos anteriormente en relación con la práctica matemática euclidiana son utilizados en la práctica demostrativa. Por ejemplo, cómo las letras son usadas para referirnos a los diversos elementos y figuras geométricas siguiendo un orden determinado, cómo los postulados permiten llevar a cabo construcciones en el propio diagrama, la estructura deductiva característica de esta obra queda también ejemplificada en esta prueba, cuya demostración requiere que se usen proposiciones probadas anteriormente, así como las definiciones y nociones comunes establecidas por Euclides al comienzo de cada libro. Por otro lado, podríamos ejemplificar la distinción entre información exacta y co-exacta en esta prueba de la siguiente manera:

- **Información exacta**: que "el ángulo ZEA es recto" proviene directamente del texto, y no es un tipo de información que podamos extraer directamente del diagrama ya que si este fuera deformado, dejaríamos de "ver" o "percibir" el ángulo como recto.

- **Información co-exacta**: que el ángulo ZEB es mayor al ángulo ZEA. Este es un tipo de información que extraemos directamente del diagrama y que permanecerá estable bajo deformación o mejoras del mismo (Img. 5.7) –

siguiendo la disciplina diagramática de la que hablamos anteriormente–. En este caso, el geómetra tiene que ser capaz de reconocer estos aspectos co-exactos de manera independiente a las posibles deformaciones del diagrama. Además, es importante que el agente que realiza esta demostración sepa construir y manipular dicho diagrama de acuerdo a los tres postulados de construcción mencionados anteriormente, para así poder interpretar y manipular activamente el diagrama.

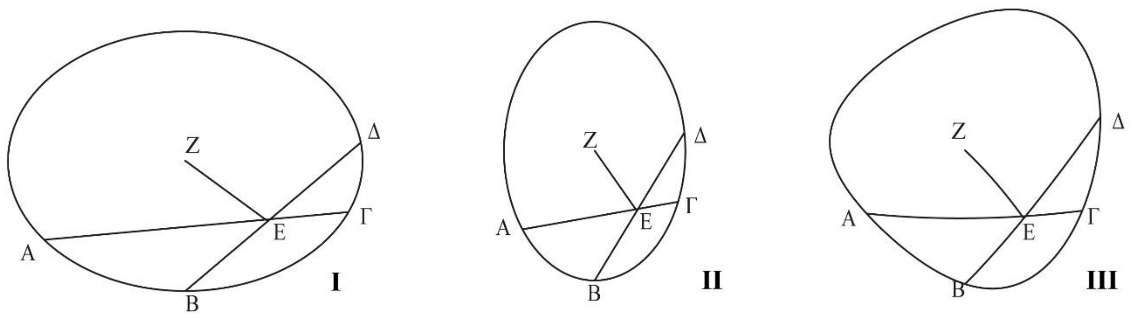


Imagen 5.7 Estabilidad de la información co-exacta en las sucesivas deformaciones del diagrama.

Para terminar con nuestra exposición vamos a mostrar la manera en la que se conceptualizaron ciertas figuras y conceptos geométricos, así como el uso de términos técnicos para llevar a cabo las operaciones geométricas. Para ello, nos vamos a centrar específicamente en los cuatro primeros libros de los *Elementos*.

En primer lugar, en la obra de Euclides encontramos una fuente de información que no está disponible en las protomatemáticas mesopotámicas ni chinas, que son las definiciones. Gracias a estas, tenemos muy claro la manera en la que los distintos elementos, figuras y relaciones geométricas fueron conceptualizados por este matemático (Netz 1999, 89-94). Existen, entre estas definiciones, lo que Tannery denomina como "absurdidades interesantes" (*apud* Szabó 1978, 231), como la definición de línea recta, o la definición de rectángulo, las cuales no se usarán en toda la obra de los *Elementos*.[21]

Vamos a comenzar presentando cómo se definen algunas figuras geométricas. Para introducir las figuras de círculo, figuras triláteras o cuadriláteras, Euclides define anteriormente límite en I.13 como "aquello que es extremo de algo" y figura como "lo contenido por uno o varios límites" (I.14).

[21] Tanto para Tannery como Szábo esto se puede deber a que Eulcides no sea el autor de esta parte, sino que procedieran de períodos u obras anteriores, y Euclides lo tomó sin alterar.

- **Círculo** (**I.15**). Figura plana comprendida por una línea, su circunferencia, tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto dentro de la figura, son todas iguales entre sí;[22] ese punto dentro del círculo se define en I.16 como el centro del círculo, y posteriormente definirá su diámetro (I.17) y el semicírculo (I.18). Sin embargo, los griegos no poseían una definición o término técnico para hacer referencia al radio, al cual se referían quizás de manera más descriptiva como "la línea recta desde el centro" (Heath 1921a, 381).

- **Figuras triláteras o triángulos** (**I.20-I.21**). Euclides distinguirá estas figuras de acuerdo a sus lados y ángulos. En el primer caso, tendremos los triángulos equiláteros, con sus tres lados iguales, isósceles, con dos de ellos, y escalenos, con sus tres lados desiguales. En el segundo caso, tendríamos triángulos rectángulos, que poseerían un ángulo recto, obtusángulo, con uno obtuso, y acutángulo, con sus tres lados agudos. En total, son siete los tipos de triángulos que existen según esta definición: el equilátero, que es siempre acutángulo, y el isósceles y escaleno, que podrían ser o bien rectángulos, o bien acutángulos, o bien obtusángulos (Proclo 168).

- **Figuras cuadriláteras** (**I.22**). Al igual que con las figuras triláteras, Euclides definirá una serie de cuadriláteros de acuerdo a sus lados y ángulos. En este caso, cuadrado sería un cuadrilátero equilátero y rectangular, mientras que el rectángulo sería rectangular pero no equilátero, y el rombo equilátero, pero no rectangular.

Tras presentar las definiciones, Euclides mostrará en las proposiciones cómo se construyen algunas de estas figuras. En este sentido, Szabó (1978) señala

> se nos ha dicho correctamente que en la geometría antigua las únicas figuras que podrían decirse que *existen* eran aquellas obtenidas de manera constructiva, y que los postulados

[22] El círculo es según Proclo la más simple y perfecta de las figuras (147); sin embargo, como la circunferencia es una línea doblada sobre sí misma, esta no tendrá límites, como sí tendrían otras líneas como por ejemplo la línea recta, cuyos límites serían sus dos extremos (102-103). Por otro lado, Puertas Castaños señala que Platón ya había definido esta figura de manera similar, afirmando que "redondo es aquello cuyos extremos están en todas las direcciones a igual distancia del medio" (p. 12).

fueron pensados para garantizar la existencia de ciertas formas básicas (líneas rectas, círculos y puntos de intersección) (p. 276)

Por señalar algunos ejemplos, Euclides demuestra cómo puede ser construido un triángulo equilátero a partir de una recta finita dada (I.1), y posteriormente, cualquier triángulo dadas tres rectas (I.22). También mostrará como trazar un cuadrado a partir de una recta dada (I.46), o cómo hallar el centro de un círculo (III.1).[23]

Para terminar, algunos autores han señalado que las nociones comunes se presentaron para establecer o describir las propiedades vinculadas con la relación de igualdad, las cuales podrían estar justificadas de manera práctica; esto es, por cómo podemos percibir de manera directa lo que cada una de estas nociones comunes establece (Szabó 1978, 289-302), como que dos cosas iguales a una misma cosa sean iguales entre sí (N.C. 1), o que si dos cosas iguales se quitan a otra cosa igual los restos son iguales (N. C. 2). Por lo tanto, estas nociones comunes no necesitarían de mayor justificación matemática dado que podemos reconocer su validez perceptivamente. Por otro lado, de Risi (2020) señala que las nociones comunes cuarta y quinta no son necesarias para ningún teorema de los *Elementos*, aunque podrían tener naturaleza diagramática.

Esta sería una presentación general y no exhaustiva de la manera en la que Euclides define algunos de los elementos, figuras, y relaciones geométricas clave para su práctica demostrativa y el conocimiento matemático que establecerá. Usará, para ello, un vocabulario limitado y técnico, el cual se ha separado o, usando la metáfora presentada anteriormente en relación con Tales, cristalizado del lenguaje común (cf. Netz 1999; Ferreirós 2016, 137-139; Kvasz 2020).

3.3 Herón de Alejandría: la pluralidad de la práctica matemática griega

[23] Euclides usará diferentes términos a la hora de trazar diferentes figuras geométricas. Por ejemplo, al comenzar la prueba I.2 Euclides nos dice que hay que trazar una recta desde el punto A al punto B, para lo cual usa el verbo *epedseúchthō* –unir–; sin embargo, cuando se traza una línea recta de manera general usará *ágō* (Puertas Castaños 2000, n. 24); por otro lado, para construir un triángulo usará el verbo *synístasthai* (n. 32), *anagrápsai apó* para construir un cuadrado a partir de un lado, y *gráphesthai* para describir un círculo (n. 61).

El último autor que vamos a presentar es Herón de Alejandría, matemático del cual no conocemos su cronología con seguridad, como ocurre con la mayor parte de autores griegos presentados en este trabajo. Sin embargo, podemos asegurar que su labor matemática tuvo lugar en el siglo I e.c. (Tybjerg 2004; Acerbi 2008) .

Herón es un investigador clave para entender la evolución del conocimiento matemático en los países de habla griega por tres razones principalmente: 1) muestra de qué manera trabajaba la comunidad matemática en este período; 2) explicitó en los prefacios a sus obras sus consideraciones acerca de este campo de conocimiento; y 3) trabajó sobre una diversidad de temas, poniendo de manifiesto que no existía una única visión de qué eran las matemáticas al estilo platónico o euclidiano. Veamos con detenimiento estos tres puntos.

En primer lugar, Herón hace diversas alusiones y comentarios tanto a investigadores del pasado como a algunos de sus resultados e instrumentos matemáticos. Por ejemplo, se cree que fue el primer matemático que comentó los *Elementos* de Euclides; además, hace referencia a resultados de autores anteriores como Eratóstenes o Arquímedes [24], y reflexiona acerca del uso de ciertos instrumentos como la regla deslizante y su eficacia para la demostración de la duplicación del cubo, citando a Arquitas, Eudoxo o Apolonio (Cuomo 2001, 161-168; Tybjerg 2004; Acerbi & Vitrac 2014, 15-39).

Estas referencias ponen de manifiesto, por un lado, la vinculación e historia común de las matemáticas desde el período Helenístico hasta los desarrollos de períodos tardíos; por otro lado, la consideración de obras o resultados canónicos lleva a Herón a usarlos sin necesidad de volver a demostrarlos, ya que estos fueron probados por una autoridad en la materia –como Arquímedes o Euclides–. En definitiva, lo que queremos subrayar es que a partir de las múltiples referencias de la obra de Herón se puede inferir que existía en el mundo de habla griega una tradición y comunidad matemática que compartía una historia común con autores y obras del pasado.

En segundo lugar, Herón escribió en algunos prefacios acerca de sus metas, intereses, influencias, vinculación con otras áreas de conocimiento y público al que iban dirigidas cada una de sus obras. De esta manera, poseemos un documento histórico que nos permite inferir las aspiraciones y consideraciones que el propio Herón poseía de sus

[24] Tybjerg (2004, 30-31) muestra detalladamente las obras, resultados o autores que Herón cita en cada uno de sus trabajos –notas 6-8–.

diversos desarrollos matemáticos. Lo veremos con detenimiento en la exposición de *Métrica* que realizaremos a continuación.

En tercer lugar, escribió sobre una amplia variedad de temas, desde geometría a tratados sobre construcción de catapultas o autómatas, escritos sobre agrimensura, etc. (Tybjerg 2004; Acerbi & Vitrac 2014, 22-26;); en este sentido, Herón fue lo que hoy día denominamos un investigador interdisciplinar o, como señalan algunos investigadores, un autor enciclopedista (Acerbi & Vitrac 2014, 39). Estaba interesado principalmente en la ampliación, corrección y mejora de obras y resultados anteriores, así como la búsqueda de aplicaciones de las matemáticas a otras áreas de conocimiento.

Por esta razón, encontramos en las matemáticas heronianas pruebas geométricas axiomático-deductivas, ejemplos numéricos relacionados con mediciones, o la descripción y uso de instrumentos mecánicos. Esto es, una mezcla entre pruebas geométricas deductivas al estilo euclidiano, intereses mecánicos como Arquímedes, y cuestiones de la práctica profesional de las matemáticas como las usadas en agrimensura o arquitectura.[25] Todos estos elementos son parte esencial de su práctica matemática, la cual no encajaría en la visión platónica que diferenciaba entre matemáticas teóricas y prácticas. En su lugar, el estudio de este autor nos lleva a desarrollar una visión más pluralista de las matemáticas en el mundo griego, tal y como señalamos al final de la sección anterior. Como señala Tybjerg (2004)

> El trabajo de Herón no puede ser visto ni como una aplicación de las matemáticas Euclidianas-Arquimedianas a problemas prácticos, ni como una formalización de métodos prácticos. Sin embargo, este limbo en el que los académicos han dejado a Herón es exactamente lo que hace su trabajo central para repensar las matemáticas antiguas (p. 31)

A continuación, nos vamos a centrar en su obra *Métrica*, compuesta por tres libros, cada uno precedido de un prefacio. El primer libro trata sobre medición de superficies y se compone de 39 problemas, el segundo sobre medición de volúmenes con 20 problemas, y el tercero sobre división de figuras tanto planas como sólidas y contiene 23 problemas (Acerbi & Vitrac 2014, 41-43). Algunos investigadores como Tybjerg (2004, 38) señalan que esta obra podría estar compuesta de material de las tradiciones tanto euclidiana-

[25] Acerbi y Vitrac (2014) distinguen hasta trece tipos de técnicas demostrativas y argumentativas usadas por Herón, como prueba geométrica pura, algoritmo de cálculo, prueba geométrica con valores numéricos, análisis, síntesis, etc. (pp. 57-59).

arquimediana como de Oriente Próximo, aunque esta cuestión todavía se sigue debatiendo. A continuación, vamos a analizar algunas de las proposiciones y prefacios de esta obra. [26]

En primer lugar, en el prefacio al primer libro Herón asume el origen egipcio de la geometría como ciencia usada para la medición de terrenos. Posteriormente, nos dice, esta tuvo que ser ampliada para tratar también con cuerpos sólidos y cuestiones afines, para lo cual autores como Eudoxo o Arquímedes tuvieron que desarrollar nuevos métodos. Herón considerará que su obra se incluye en esta tradición, con la que pretende reunir el conocimiento útil de períodos anteriores y completarlo con sus propios desarrollos. A continuación, Herón remarca que usará el término ‛unidad’ para los cálculos, con vistas a ofrecer una técnica general de medición válida para cualquier unidad de medición.

En cuanto a este primer libro, los 39 problemas que lo componen pueden ser divididos en dos bloques: 1) las proposiciones 1-25 tratan sobre áreas de figuras rectilíneas; y 2) las proposiciones 26-39 tratan sobre la medición de áreas con contorno al menos parcialmente curvilíneo como círculos, elipses, superficies de cilindros, etc. (Acerbi & Vitrac 2014, 43-48).

Vamos a presentar a continuación algunas proposiciones de este libro para ofrecer una visión general de la práctica matemática de Herón. El primer problema trata con un “dominio oblongo” ΑΒΓΔ, con AB de 5 unidades y ΓΔ de 3 unidades. Entonces da el resultado, 15 unidades, siendo este un paralelogramo rectangular –definido tal y como lo hace Euclides en la definición 1 del libro II–, y explica el procedimiento: dividir el lado AB en sus 5 unidades, y lo mismo con ΓΔ y sus 3 unidades. Entonces, podemos observar fijándonos en los puntos de intersección entre ambas líneas que el dominio completo queda dividido en 15 unidades (Img. 5.8).

Herón comienza con esta primera prueba debido a la estructura deductiva general de este tratado, y es que este primer resultado es clave para poder comenzar en I.2 con el caso más simple en relación con triángulos, que es el triángulo rectángulo. Los datos de I.2 son el triángulo rectángulo ΑΒΓ, con el ángulo recto B, el lado AB de 3 unidades y el BC de 4 unidades. El problema consiste en encontrar el área e hipotenusa de dicho triángulo.

[26] Seguimos la traducción de *Métrica* al francés de Acerbi y Vitrac (2014).

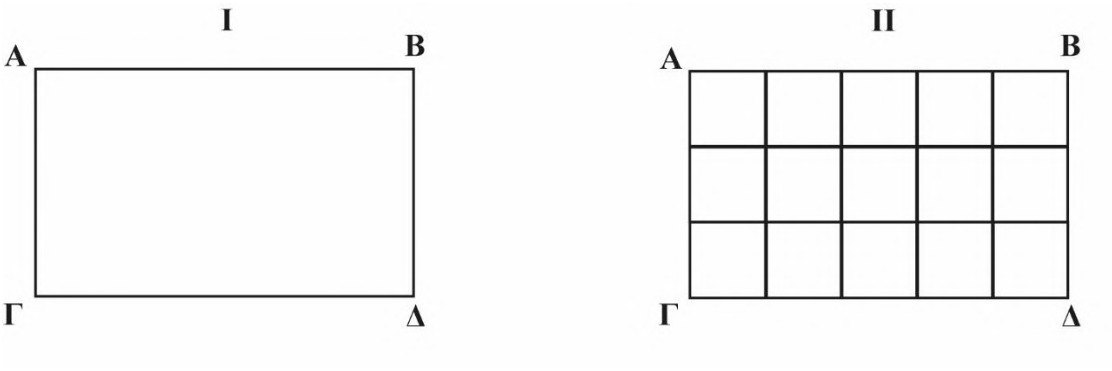


Imagen 5.8 Diagrama del problema I.1 de *Métrica* (Acerbi & Vitrac 2014, 150)

Completamos entonces el paralelogramo ΑΒΓΔ; es decir, a partir del triángulo ΑΒΓ construimos el paralelogramo ΑΒΓΔ, que es el dominio oblongo rectangular del problema anterior. Calculamos su área como ya probamos en I.1, y que daría como resultado 12. Entonces, como el triángulo ΑΒΓ es la mitad del paralelogramo –ya probado en I.34 de los *Elementos*–, el área del triángulo será 6. Como este es un triángulo rectángulo, sabemos que los cuadrados sobre ΑΒ y ΒΓ son iguales al cuadrado sobre ΑΓ –ya probado en I.47 de los *Elementos*–. La suma de los cuadrados de ΑΒ y ΒΓ son 25 unidades, por lo que el cuadrado en ΑΓ también, y entonces sabemos que el lado medirá 5 unidades.

A continuación, Herón pasa a explicar el método que ha empleado.[27] Lo que hay que hacer es multiplicar el 3 por el 4 y tomar su mitad para obtener el área del triángulo. Para hallar la hipotenusa, multiplicamos cada lado por sí mismo y lo sumamos, lo que nos dará 25 unidades, la suma de los cuadrados de los lados. A este resultado le aplicamos la raíz cuadrado, y obtenemos la hipotenusa, que medirá 5 unidades.

Por otro lado, en I.37 Herón muestra cómo medir el área de un cono isósceles si lo desarrollamos; esto es, si lo cortamos y abrimos su superficie como si fuera plana (Img. 5.9). Los datos de este problema son: lado ΑΒ igual al lado del cono, que son 10 unidades; diámetro de la base del cono de 14 unidades; y arco ΒΓ igual a la circunferencia del cono, 44 unidades.[28] Entonces, hace mención al hecho de que Arquímedes demostró en *Sobre*

---

[27] Como señalan Acerbi y Vitrac (2014, 153) en la nota 13 de su traducción, con este método Herón está haciendo referencia a las operaciones aritméticas que se han llevado a cabo con los datos que tenemos del problema a resolver, en la cual se ha eliminado cualquier referencia a objetos geométricos.

[28] Para calcular la circunferencia del cono Herón usa algo ya demostrado en I.26 donde, al igual que en esta proposición, usará algunos resultados de Arquímedes. Por ejemplo, para calcular el perímetro de un círculo relativo a su diámetro toma la aproximación que Arquímedes estableció en su obra *Sobre Plíntides y Cilindros*, que sería mayor que la que hay entre 211875 / 67441, y menor que 197888 / 62351. Sin embargo,

la Medida del Círculo que todo sector de una circunferencia es la mitad del rectángulo contenido por el arco del sector circular y por el radio del círculo. En este caso, el rectángulo será de 44 unidades –arco– por las 10 unidades –radio–, lo que daría 440 unidades. Entonces, la mitad de este será 220 unidades, que sería la superficie de este cono isósceles.

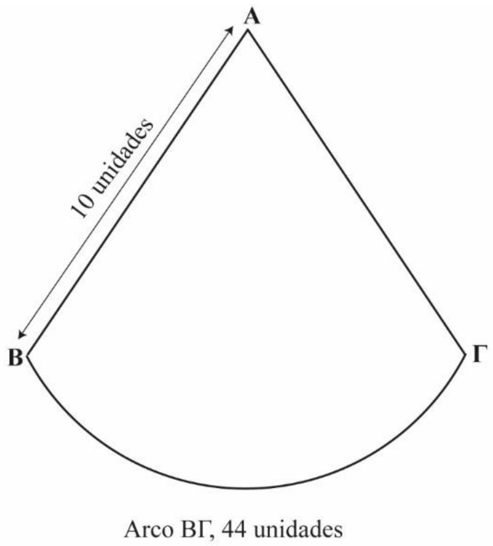


Imagen 5.9 Diagrama que acompaña al problema I.37 de *Métrica* (Acerbi & Vitrac 2014, 240).

Pasamos entonces al libro II, que tratará sobre medición de volúmenes. En el prefacio Herón comienza afirmando que ya ha tratado sobre este tema en el primer libro, en relación con la medición de superficies esféricas o cilíndricas, y que igualmente autores anteriores a él se han dedicado a este tema, como Arquímedes. Sin embargo, dice que las volverá a presentar para aquél lector al que le pueda interesar. Tras esta justificación del propósito de este capítulo, Herón muestra su método para medir cuerpos sólidos, basado en la medición de los tres elementos constituyentes de estas figuras: base, altura y profundidad, si el cuerpo es hueco, y base, altura y espesor, si es sólido.

Herón dice explícitamente que estos números no pueden ser aplicados con facilidad a la hora de realizar mediciones, por lo que los reduce a la relación 22/7. De esta manera, para hallar el arco de este cono desplegado lo que hace este autor es multiplicar el diámetro de la circunferencia (14) por 22, y dividir el resultado por 7, que es lo que nos daría las 44 unidades que establece como dato de este problema. Además, Herón usará tanto en I.26 como en I.37 los mismos valores para calcular esta relación (cf. Acerbi & Vitrac 2014, 213-215; 240-241).

A continuación, pone un ejemplo de cómo calcular el volumen tomando el caso de un cuerpo sólido rectilíneo rectangular de 3 unidades de ancho, 4 de largo, y 10 de espesor. El volumen de este sólido será de 120 unidades, resultado al que llega multiplicando entre sí el ancho, largo y espesor. Para explicar por qué usa este método, caracteriza esta figura como una sucesión de planos de 1 unidad de espesor paralelos a la base (Img. 5.10). Entonces, para calcular el área de la figura sumaríamos estos planos, o lo que es lo mismo, multiplicar entre sí ancho, largo y espesor (3 x 4 x 10). Es importante tener en cuenta, como remarca Herón, que estos planos tienen que formar un ángulo recto con la base. De hecho, otras figuras sólidas, como un cilindro, se medirán de la misma manera siempre y cuando levantemos su base a una altura determinada como una sucesión de planos que forman un ángulo recto respecto a la base (cf. Acerbi & Vitrac 2014, 248-251).[29]

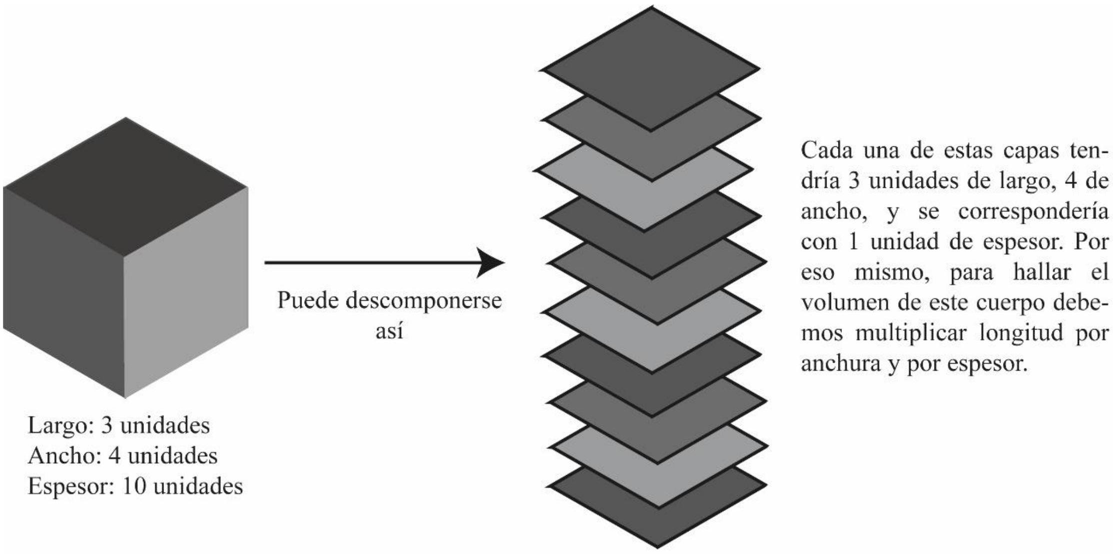


Imagen 5.10 Herón muestra cómo es posible dividir el sólido original en planos o intervalos unitarios.

Con fines ilustrativos vamos a analizar II.4, cuyos datos son: tenemos un prisma cuya base es el paralelogramo ΑΒΓΔ, siendo ΑΒ 10 unidades y ΒΓ 8, y su cima ΕΖ perpendicular al plano. Por otro lado, la línea recta desde ΕΖ hasta el plano ΑΒΓΔ es de 5 unidades. Lo primero que hay que hacer es completar el sólido paralelepípedo tal y como mostramos a continuación (Img. 5.11), lo que dará lugar a un prisma el doble de grande que el sólido cuya área queremos calcular. Por lo tanto, el método es tan sencillo

[29] Al final del prefacio Herón llama la atención sobre su método, el cual se basa en la traslación de la base siempre paralela a sí misma a través de una línea imaginaría, la altura por ejemplo, que elevemos a partir de un punto de contacto (cf. Acerbi & Vitrac 2014, 250-251).

como multiplicar los datos iniciales entre sí (10, 8 y 5 unidades), lo que nos daría un resultado de 400. Este resultado se divide por la mitad, obteniendo así el volumen del prisma paralelogramo ΑΒΓΔ con ΕΖ como cima.

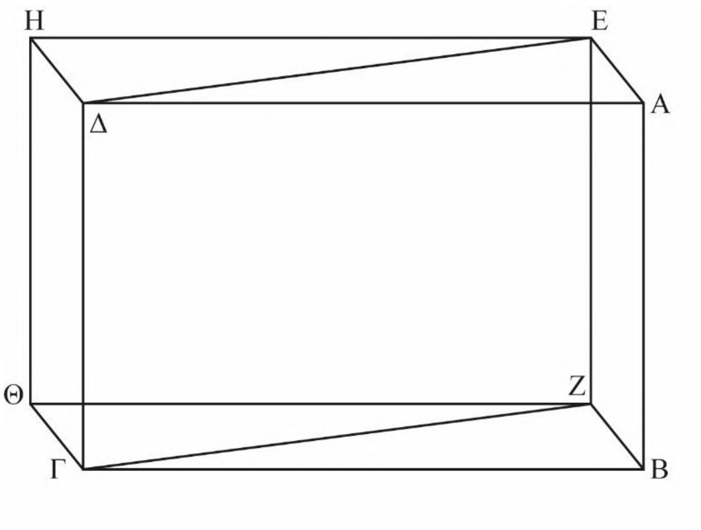


Imagen 5.11 Diagrama que acompaña a la prueba II.4 (Acerbi & Vitrac 2014, 258).

Por último, en el libro III tratará Herón sobre la división de figuras. Comienza hablando en el prefacio sobre la necesidad y utilidad de un reparto justo de las tierras, tarea anteriormente solucionada de manera tosca e insatisfactoria, aunque útil, por la naturaleza. Es decir, etnias más grandes ya poseían de manera natural un mayor terreno de tierra, y la división de las ciudades se llevaba a cabo de acuerdo al mérito de cada grupo social. Pero, y este es un punto clave en el pensamiento de Herón, tenemos una herramienta que puede servir de manera más fiable y precisa a esta tarea, que es la geometría. De este modo, afirma el pensador alejandrino

> si uno quisiera dividir los terrenos de acuerdo a una proporción dada, de modo que, por así decirlo, ni un solo grano de mijo de la distribución proporcional exceda o pierda la proporción dada, habría que hacer uso únicamente de la geometría; en ella hay por un lado una aplicación igual, y por otro lado la justicia mediante la distribución proporcional, y la demostración de estas cosas [es] incontestable, lo que ninguna de las otras técnicas o ciencias puede prometer (Herón, *Métrica*, Prefacio al libro III, Acerbi & Vitrac 2014, 309).

De este último capítulo no vamos a presentar ninguna proposición particular, ya que creemos que con la presentación general que hemos realizado de *Métrica* podemos establecer lo siguiente:

- Presenta una estructura deductiva que seguirá durante todo el trabajo, comenzando por los casos más simples, los cuales podrá usar posteriormente, así como el conocimiento matemático ya establecido por autores anteriores –el cual a veces cita de manera explícita, y otras no–;

- integra en una misma obra procedimientos que podríamos denominar 'puramente geométricos', con mediciones y cálculos con ejemplos numéricos concretos. Cada uno de estos procedimientos juega un papel demostrativo en esta práctica matemática;

- usa en numerosas ocasiones los métodos del análisis y la síntesis. En el caso particular de Herón, en el análisis –prueba geométrica– se asumiría la solución y se investigarían sus consecuencias, mientras que en la síntesis se resuelve el problema con lo obtenido en el análisis –cálculos aritméticos– (Tybjerg 2004);

- tiene una preocupación pedagógica, ya que pretende resumir el conocimiento que existía acerca de un tema para que pudiera ser entendido por cualquiera que quisiera acercarse a la materia. Por otro lado, lleva a cabo mejoras en procedimientos prácticos, como hemos podido observar en el prefacio al libro III, en el que asegura que los métodos para medir terrenos pueden ser más fiables, precisos y con un mayor poder demostrativo si se adecuan a la caracterización demostrativa de la geometría.

Por estas y muchas otras razones que no hemos presentado en esta sección Herón ha tendido a ser caracterizado en la historia de las matemáticas griegas como un matemático práctico centrado en cuestiones profesionales de la matemática. Sin embargo, diversos investigadores creen que esta caracterización es histórica y filosóficamente débil, ya que se está aplicando un supuesto universal de lo que debería ser un matemático griego –basado este, principalmente, en Euclides– a autores de diversos períodos y contextos socio-culturales (Cuomo 2001; Tybjerg 2004; Acerbi & Vitrac 2014, 26-31).

Capítulo 6
El surgimiento del conocimiento protogeométrico y geométrico en la Antigua civilización china

1. Consideraciones generales sobre las matemáticas chinas y su lugar en la historia

En esta sección vamos a mostrar dos de las asunciones principales que se han mantenido acerca de las matemáticas de la Antigua civilización china[1] y su lugar en la historia general de las matemáticas. En primer lugar, es común comparar los desarrollos y práctica matemática china con la griega, mostrando de qué manera la primera de estas no encaja con el ideal deductivo y teórico de la segunda.

Por ejemplo, Siu (1993) muestra de qué manera Matteo Ricci (1552–1610), quien tradujo por primera vez los primeros seis libros de los *Elementos* al chino, consideró que al carecer las matemáticas chinas de pruebas matemáticas al estilo euclidiano estas se alejaban del estilo canónico de hacer matemáticas –consultar también Martzloff (1997, 3–8)–. Por otro lado, Cullen (1995) señala que es una práctica común de algunos historiadores de las matemáticas el tratar de mostrar que si bien estas matemáticas no poseían pruebas deductivas al estilo euclidiano, sí que poseían algún tipo de prueba similar, tratando de esta manera de concederles el estatuto de conocimiento plenamente matemático al hacerlas encajar con el modelo matemático griego y sus intereses y prácticas particulares.

En segundo lugar, algunos autores afirman que las matemáticas chinas son de carácter práctico y al servicio del trabajo burocrático, agrimensor o comercial de esta civilización; o lo que es lo mismo, que no se pueden considerar plenamente matemáticas ya que no cumplirían con el estándar de ciencia abstracta y deductiva (cf. Cullen 1995; Chemla 2017). Por ejemplo, hablando de las personas encargadas de desarrollar este tipo de conocimiento, Solís y Sellés (2005) afirman que

[1] Con "Antigua civilización china" se hace referencia al período que comprende desde el surgimiento de la humanidad en Asia Oriental, hasta el final de la dinastía Han (220 e.c.) (cf. Li 2013). En nuestro caso, incluiremos también parte del período de los Tres Reinos.

> Aunque sus procedimientos eran refinados y sus argumentaciones suficientes para colegas cooperativos, nunca desarrollaron explícitamente los procedimientos de demostración ni las refutaciones por reducción al absurdo que tanto encantaban a los griegos; nunca compusieron *elementos* ni llevaron a cabo un análisis epistemológico, lógico y deductivo de las matemáticas. La subordinación de las habilidades de los funcionarios a los intereses prácticos del buen gobierno no estimuló el espíritu agónico, inquisitivo y radical de los griegos. El escenario del saber chino no es el ágora, donde ciudadanos iguales y sin autoridad superior (no son esclavos de nadie) tratan de tapar la boca al contrario con un *q.e.d.* (*quod erat demonstradum*), sino la sala de audiencias en la que los cortesanos dan prudentes consejos prácticos a un emperador que sostiene el cielo (p. 59)

Como señala Chemla (2015), una de las características fundamentales de las matemáticas chinas que ha llevado a este tipo de afirmaciones ha sido su carácter algorítmico –ver sección 3–; es decir, en la práctica matemática china los procedimientos solían consistir en listas de operaciones a llevar a cabo para resolver los problemas. Se considera que estos fueron creados por burócratas cuyo único objetivo era seguir esta lista de operaciones prescritas por el texto sin llevar a cabo ningún tipo de análisis teórico de la base matemática subyacente a tales procedimientos. De esta manera, esta práctica matemática quedaría relegada a un tipo de saber de segunda clase y eminentemente práctico respecto a otros desarrollos plenamente matemáticos.

Como veremos a lo largo de este capítulo –y sobre todo en el análisis comparativo del próximo capítulo–, este tipo de asunciones y afirmaciones se han realizado desde un prisma helenofílico en el que los historiadores o filósofos tienden a minusvalorar el conocimiento desarrollado en la civilización china por no ser lo que hicieron los griegos –como vemos claramente en la cita anterior de Solís y Sellés–; sin embargo, como hemos señalado en diversas ocasiones en este trabajo, creemos que lo realmente interesante es analizar esta tradición matemática en su propio contexto socio-histórico y político, comprendiendo qué tipo de métodos y conocimiento generaron sin que tenga este que adecuarse a ningún ideal de cómo deben de ser las matemáticas.

2. La emergencia del conocimiento protogeométrico en China

A continuación, presentaremos los principales desarrollos protogeométricos de la Antigua civilización china, así como el contexto socio–cultural y político en el que estas emergieron, centrándonos en dos períodos: 1) desde el comienzo del Neolítico hasta el surgimiento de las primeras sociedades complejas en el Neolítico Tardío;[2] y 2) en relación con las dos primeras dinastías de esta civilización.[3]

2.1 El Neolítico en China (6500-2000 a.e.c.)

2.1.1 Contexto socio–cultural y político

En primer lugar, queremos señalar que en el contexto de China[4] también se incluye un período de transición entre el Paleolítico y el Neolítico, tal y como ocurre con el Epipaleolítico en Oriente Próximo. En este período comenzaron a emerger algunas de las características que sirven para definir el Neolítico –modo de vida sedentario, economía basada en la producción agrícola y ganadera, etc.–. En el contexto particular de China, algunos autores hablan de neolitización (cf. Liu & Chen 2012, 44–46) o Transición del Paleolítico al Neolítico (Chen & Yu 2017). Lo más relevante de este período es que se es la primera región del mundo donde se comenzaron a fabricar útiles de cerámica –19000/18000 AP[5]–; esto es, unos 10.000 años antes de que la agricultura se estableciera en esta región (Wu et al. 2012; Chen & Yu 2017).

En relación con este período, será útil tener en cuenta su división en tres fases: Neolítico Temprano (6500–5000 a.e.c.), Neolítico Medio (5000–3500 a.e.c.) y Neolítico Tardío (3500–2000 a.e.c.) (Shelach–Lavi 2018, 17). Generalmente, en las comunidades desde el Paleolítico hasta el Neolítico Temprano existió cierta estabilidad social y demográfica, siendo estas sociedades o bien igualitarias, o bien poco estratificadas (Peterson & Shelach 2012; Peterson & Lu 2013). Sin embargo, a partir del Neolítico

[2] En el apéndice 5 hemos presentado brevemente el período Paleolítico en China.

[3] Al final de esta tesis hemos incluido un glosario de los términos chinos más importantes usados durante este capítulo.

[4] Lo que hoy conocemos como República Popular de China (RPC) no coincide exactamente con el territorio del que vamos a tratar a continuación. Sin embargo, es habitual en este campo hablar de “arqueología de China” o “culturas de China” como una etiqueta útil para referirnos a los territorios y culturas de los que hablaremos durante este capítulo.

[5] AP es el acrónimo de Antes del Presente, datación usada a menudo en geología, arqueología y ramas afines, haciendo referencia a “años antes de 1950”. En este caso, 19000 AP serían 19000 años antes de 1950, o lo que es lo mismo, 17050 a.e.c.

Medio surgen las primeras sociedades complejas (Wang & Wu 2021), con una serie de características que son de interés para nuestro trabajo (cf. Liu & Chen 2012):[6]

- Crecimiento demográfico y del número y tamaño de los asentamientos;
- emergencia de las primeras sociedades complejas y con cierta estratificación social[7], así como especialización y división del trabajo;
- construcción de centros rituales o ceremoniales de carácter monumental;
- elaboración de útiles rituales y bienes de prestigio, los cuales se depositaban en las tumbas de ciudadanos de la élite –élite en algunos casos solo ritual, en otros política o económica, y en otras ocasiones en todos los ámbitos–;

Estas características del Neolítico Medio se incrementarán en el período Tardío. Esto es, los asentamientos crecieron en tamaño y número, aumentó la densidad de población, mayor especialización y división del trabajo, mayor intercambio de bienes de prestigio entre asentamientos, incremento de la complejidad social y jerarquización, etc. (Liu & Chen 2012, 213–252; Shelach–Lavi 2015, 127–160).[8]

El poder político y ritual estaba cada vez más restringido y controlado por la élite, un grupo reducido de estas poblaciones que influenciaron en la emergencia de la división y especialización del trabajo. Algunos autores han mostrado, además, que existe correlación entre la mayor centralización política y económica con el control, producción y auto–consumo por parte de las élites de los bienes de jade (cf. Liu 2003); de hecho,

[6] En términos generales estas características son comunes al norte, centro y sur de China, aunque en el sur los cambios ocurrieron más tarde en el tiempo (Chi & Hung 2008; Jiao 2013; Shelach–Lavi 2015, 103–126). Como señala Jiao (2013), en las sociedades del sureste de China hubo una menor población, así como número y tamaño de asentamientos en comparación con los del norte. Además, hay evidencia muy limitada de sociedades estratificadas antes del 2350 a.e.c. Cuando existan diferencias importantes entre las diferentes regiones de China las explicitaremos.

[7] Shelach–Lavi (2015, 95) señala que estratificación social haría referencia a la creación de huecos verticales entre los individuos en relación a su prestigio, poder político o riqueza personal; la complejidad social está relacionada con la diversificación horizontal y especialización de individuos e instituciones.

[8] De nuevo, estos serían los patrones generales que tienen lugar en el paso del Neolítico Medio al Tardío, lo cual no siempre tuvo lugar en todas las regiones o culturas. Por citar un ejemplo, en el noreste de China la cultura Xiaoheyan (3000–2200 a.e.c.) sucede a la Hongshan, teniendo lugar un declive importante en la densidad de población y nivel de complejidad social, pasando incluso a una economía de cazadores–recolectores (cf. Liu & Chen 2012, 234–236).

tenemos que señalar que el jade fue uno de los materiales más importantes para estas élites en una gran variedad de asentamientos durante estos períodos. Algunas autoras incluso hablan de la Cultura del Jade en China (3500–2000 a.e.c.) precediendo a la Edad de Bronce (cf. Childs–Johnson 2020).[9]

2.1.2 Las bases cognitivo–culturales del conocimiento protogeométrico

En esta sección presentaremos las prácticas y útiles relacionadas con la cultura visual, espacial y simbólica de este período. Para ello, nos vamos a centrar en seis culturas[10] particulares de estos períodos: las culturas Hongshan, Yangshao y Lingjiatan pertenecientes al Neolítico Medio; y las culturas Liangzhu, Longshan y Erlitou, pertenecientes al Neolítico Tardío.

Comenzaremos presentando algunas de las características principales de la cultura Yangshao (5000–3000 a.e.c.), en el norte de china. Esta cultura pone de manifiesto las características mencionadas anteriormente. Desde su período Temprano al Tardío su población, asentamientos y área ocupada crecieron, pasando de ser una sociedad igualitaria, con casas de tamaños similares, pocas diferencias en los enterramientos, y producción económica igualitaria, a estar altamente estratificada, con clara diferenciación del trabajo, edificios monumentales usados para celebraciones rituales o ceremoniales, y grandes diferencias en los patrones de enterramiento (Peterson & Shelach 2010; 2012). En particular, queremos resaltar dos características de interés para nuestro trabajo de esta cultura.

Por un lado, en cuanto a su organización espacial, cuatro de las ciudades excavadas de su período Temprano fueron construidas con forma circular o elíptica en torno a una plaza central. Lo podemos ejemplificar con el caso de la ciudad Jiangzhai (Fases I y II), construida con tal forma, pero que además se construyó siguiendo otro patrón espacial: las puertas de todas las viviendas, salvo alguna excepción, se orientaron a la plaza central (Peterson & Shelach 2010; 2012).

---

[9] Las tres culturas más importantes en relación a la producción y consumo del jade fueron la Hongshan, Liangzhu y Longshan (Liu 2003; Childs–Johnson 2009; 2020), las cuales presentaremos a continuación.

[10] Cuando hablamos de culturas estamos haciendo referencia a un grupo o grupos de asentamientos a lo largo de una región geográfica y período de tiempo, las cuales suelen compartir un mismo conjunto de artefactos y prácticas sociales.

Por otro lado, en la tumba M45 hallada en la ciudad Xishuipo, se halló un esqueleto rodeado de tres mosaicos elaborados con conchas y moluscos, así como los restos del posible sacrificio de tres adolescentes (Img. 6.1). En particular, la figura situada al este ha sido interpretada como un dragón, la del oeste como un tigre, y la del norte como la osa mayor o un hacha. En relación a su disposición, algunos autores han argumentado que esta podría ser la tumba de un sacerdote con cierto conocimiento astronómico (Pankenier 2013, 38–40); o de un chamán junto a los animales que le acompañaban cuando se comunicaba con el mundo sobrenatural (Chang 1988 *apud* Liu & Chen 2012, 196).[11] Sin embargo, investigadores como James (1993) creen que este tipo de interpretaciones están retroproyectando representaciones pictóricas propias de culturas posteriores en el tiempo a este enterramiento. La figura del este podría ser un cocodrilo más que un dragón, los cuales estaban presentes en esta región. Por otro lado, el mosaico del norte representaría una bellota o un hacha. En lo que sí concuerdan estas tres interpretaciones es en la indudable importancia que este sujeto tendría para su comunidad.

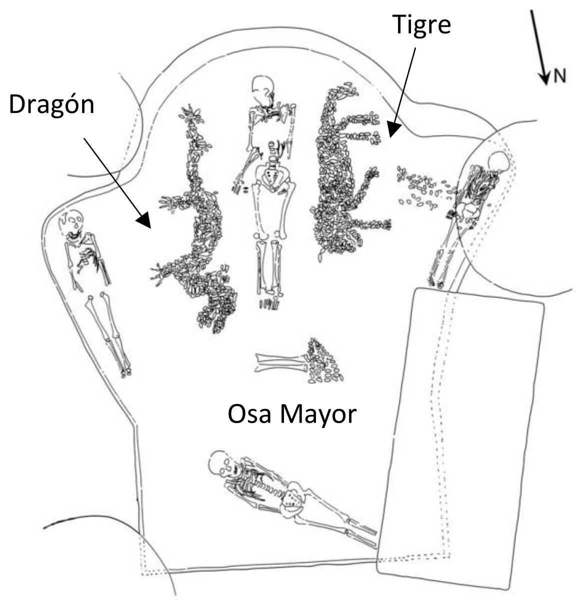


Imagen 6.1 Tumba M45 de Xishuipo (Shelach–Lavi 2015, 85).

En segundo lugar, la cultura Hongshan (4500–3000 a.e.c.) es una de las primeras sociedades complejas que surgen en el noreste de China (Liu & Chen 2012, 172–183; Shelach–Lavi 2015, 83–86), de la que también nos interesan dos características.

[11] Para Liu y Chen (2012, 196) estas dos primeras interpretaciones no son contradictorias, ya que los chamanes podían poseer conocimiento astronómico para comunicarse o viajar al mundo sobrenatural.

Por un lado, en esta cultura se puede diferenciar una “zona periférica”, donde habitaba la población, de una “zona central”, que es donde se construyeron lugares rituales monumentales. En general, en la zona central se ha encontrado una mayor cantidad de jades, y de mayor calidad, que en la zona periférica. Además, todas las comunidades produjeron sus bienes de manera supra-local, aunque cada una tenía su propio sistema político. La cohesión social de todos estos grupos interdependientes se mantuvo gracias a la celebración de rituales conjuntos en la zona central, pudiendo compartir todos ellos un conjunto de creencias (Peterson et al. 2010; Peterson & Lu 2013; Drennan et al. 2017a; 2017b).

Para ilustrar este lugar central, podemos presentar Niuheliang (3650-3150 a.e.c.), uno de los centros rituales más grandes excavados en China, el cual estaba compuesto por 16 lugares rituales situados a lo largo de 50 km^2. Estos lugares rituales se compusieron de diversas estructuras, como altares, túmulos con forma circular o cuadrada, plataformas, y tumbas para las personas con cierta importancia o papel en estos rituales (Img. 6.2) (Peterson et al. 2010; Peterson & Lu 2013; Shelach–Lavi 2015, 79–90). Algunos investigadores creen que este tipo de centros rituales monumentales pudieron servir como lugar de peregrinaje en los que diversas comunidades acudían a celebrar ritos o ceremonias compartidas como base para mantener la cohesión social (Drennan et al. 2017a).

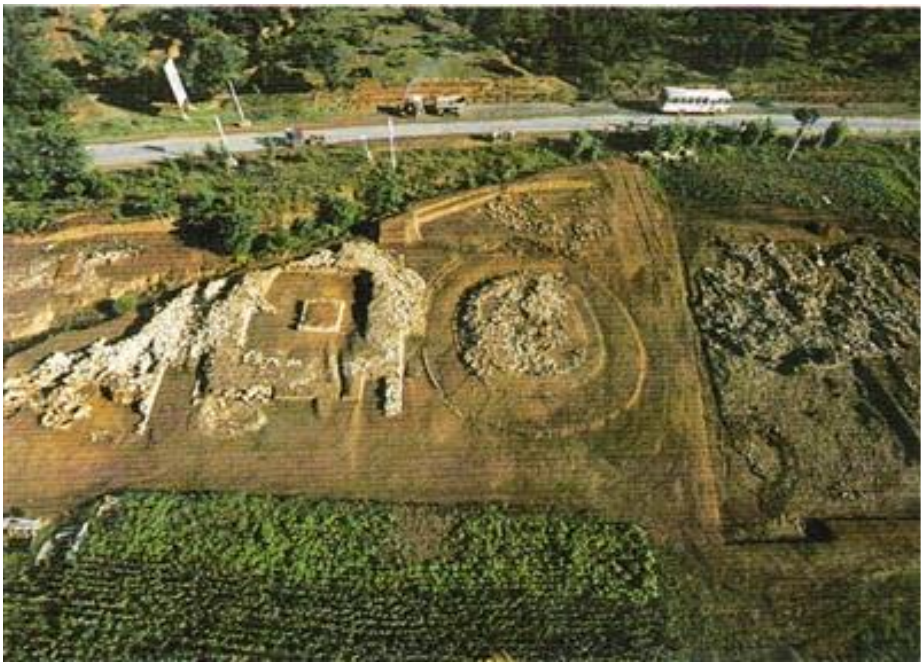


Imagen 6.2 Altares con forma circular y rectangular de la localidad 2 en Niuheliang. Imagen de http://www.hongshanren.com/history, consultada el 20/08/2018.

Por otro lado, la mayor parte de bienes de prestigio con carácter ritual de esta cultura se han hallado en las tumbas situadas en los altares de piedra o alrededor de los mismos. Este fenómeno pone de manifiesto la importancia ritual o religiosa que tuvieron las personas enterradas aquí (cf. Peterson et al. 2010; Peterson & Lu 2013). En particular, se han hallado unos 250 objetos de jade en 30 localizaciones, teniendo estos diferentes motivos como animales –dragones, tortugas o pájaros–, figuras humanas, o discos *bi* (cf. Childs–Johnson 1991; 2020). Algunos de estos objetos se fabricaron cuidadosamente, con una alta precisión en la elaboración de su forma circular (Img. 6.3), lo que manifestaría que en esta cultura esta industria estaba altamente especializada.[12]

Imagen 6.3 Jade con forma de disco y dos perforaciones superiores, presumiblemente usadas para colgarlo. Colección Edward and Louise B. Sonnenschein del Instituto de Arte de Chicago. https://www.artic.edu/artworks/70606/squarish–disk–with–rounded–corners, visitado el 6/04/2020.

Investigadores como Shelach (2002, 73–84) o Drennan et al. (2017b) señalan que estas dos características –construcción de centros rituales monumentales y patrones bien diferenciados de enterramiento– no son suficientes para hablar de una estratificación social alta o gran complejidad social, como la que veremos en las culturas del Neolítico

[12] La primera cultura que comienza a elaborar bienes de jade es la cultura Xinglongwa (6.200–5.200 a.e.c.), situada en el noreste de China, región en la que las diversas culturas establecerán una relación especial con el uso de este material para fabricar bienes de prestigio o ritual; sin embargo, fue la cultura Hongshan la que fundamentó la llamada "tradición del jade" en Asia (Liu 2003; Childs–Johnson 2009; 2020; Tang et al. 2020).

Tardío. Argumentan que en esta cultura sí que se estableció una clara jerarquía ritual, pero que esta tenía poco o ningún poder o influencia a nivel político o económico.

En tercer lugar, tenemos la cultura Lingjiatan (3600-3300 a.e.c.), la cual dio una gran importancia a la elaboración de útiles de jade. La mayoría de estos se han encontrado en tumbas situadas en los centros rituales, con no menos de 100 objetos en cada tumba, así como herramientas usadas para elaborar dichos útiles y fragmentos de jade descartados durante la elaboración de los mismos. Un ejemplo ilustrativo puede ser la tumba 07M23 (Img. 6.4), en la que se hallaron 200 piezas de jade, 97 de piedra, 31 vasijas de cerámica y una pieza de turquesa (Chi & Hung 2008; Childs–Johnson 2009; Wang 2017, 11–15; Zhao 2020; Wang & Wu 2021).

Imagen 6.4 Tumba 07M23 del distrito 2 de Lingjiatan. Imagen de (Wang & Wu 2021, 3).

Algunos de estos útiles de jade, especialmente los que tienen forma de animales o patrones complejos, pudieron incluso tener un posible significado cosmológico (Liu & Chen 2012, 204–207; Shelach–Lavi 2015, 111–123; Childs–Johnson 2020); de hecho, Pankenier (2013, 184–188) afirma que una placa realizada con un caparazón de tortuga pudo ser un modelo sofisticado del cosmos (Img. 6.5).[13]

Al igual que en el caso de Hongshan, no existía entre las comunidades de esta cultura un sistema político general ni jerarquización política ni económica (Wang 2017,

[13] Posteriormente veremos por qué consideramos que este tipo de útiles rituales, durante este período en particular, no puede ser considerado como un modelo sofisticado del cosmos.

67–75; 168–180). Lo que sí queda claro es que estos centros rituales, situados en el centro de las zonas con mayor densidad de población, eran clave para el mantenimiento de la cohesión social de estas comunidades (Wang 2017; Wang & Wu 2021).

Imagen 6.5 Superior izquierda, ave con dos cabezas de cerdo por alas, y figura en su centro. Superior derecha, placa con diseño geométrico complejo y estrella octogonal en su centro (Wang 2017, 24). Inferior, placa realizada sobre caparazón de tortuga considerada por Pankenier (2013) como modelo del cosmos, y por Liu (2004, 65–66) como instrumento para la adivinación. Imagen de (Liu 2004, 66).

A continuación, vamos a presentar brevemente las características principales de las culturas pertenecientes al Neolítico Tardío, período en el cual se puede constatar la emergencia de las primeras sociedades complejas en China.

Comenzamos con la cultura Liangzhu (3300–2000 a.e.c.), en la cual la ciudad de Liangzhu ejercía un liderazgo político, social y religioso respecto a los asentamientos de su alrededor, y marcaba la pauta de qué objetos de jade y motivos de los mismos eran los más importantes simbólica y ritualmente –de hecho, en esta ciudad se encontraron los útiles de jade más elaborados de esta cultura (Fang 2020)–. Por lo tanto, esta cultura también mantuvo su estabilidad y cohesión social a través de los rituales (Qin 2013; Liu et al. 2020; Zhao 2020).

Esta es una de las culturas más importantes en cuanto a la producción y consumo de bienes de jade, los cuales representan el 90% de bienes hallados en las tumbas, siendo más numerosos y sofisticados que los de cualquier cultura anterior, y en la cual se estandarizó su producción y consumo (cf. Childs–Johnson 2020; Fang 2020). En particular, se pueden distinguir tres clases sociales de acuerdo al número de útiles de jade depositados en sus tumbas: 1) élite, en cuyas tumbas se depositaron más de 100 de estos bienes; 2) clase media de artesanos y militares, con 40-30 bienes; y 3) trabajadores comunes, con ningún bien de jade o una decena como máximo.[14] Por citar un ejemplo, en la tumba nº 20 del cementerio de Fanshan se hallaron en una tumba perteneciente a alguien de la élite 583 objetos, entre los cuales 499 eran útiles de jade. Entre estos, se encontraron 4 tubos *cong*, 43 discos *bi* y 25 hachas *yue* de jade y 24 de piedra (Qin 2020).

Precisamente los tres objetos de jade que acabamos de mencionar fueron los más importantes para esta sociedad, mientras que para nuestro trabajo nos centraremos en los tubos *cong* y discos *bi*.[15] El primero de ellos tenía generalmente una forma exterior cuadrada o rectangular y un círculo interior, y es considerado el útil ritual más importante de esta cultura (Qin 2020). En su parte externa se representaba siempre un mismo motivo, un ser humano en la parte superior y un animal en la inferior (Img. 6.6), que ha sido interpretado por algunos autores como el alter ego de los chamanes y su función como vínculo entre el cielo y la tierra (Liu & Chen 2012, 236–242), o como representación de la dominación del ser humano sobre la naturaleza (Zhao 2020).

Por otro lado, otro de los objetos rituales de gran importancia, y que aparece generalmente depositado en las tumbas de personas pertenecientes a la élite, son los discos *bi* (Img. 6.7). Algunos autores consideran que estos pudieron usarse para representar la riqueza de la persona que los poseía (Fang 2020), o como representación

[14] No existió apenas diferencia entre la cerámica usada por estos grupos, remarcando así la importancia de los bienes de jade como marcadores sociales (Qin 2020).

[15] Estos son los únicos tres objetos de jade que aparecen en los sitios o conjuntos de sitios (6 en total) analizados y presentados en la tabla 4.1 por Fang (2020, 118). Por otro lado, como señala Zhao (2020) son más de 40 los tipos de objetos que se fabricaban en jade, y era común que se grabaran ciertos motivos en estos, siendo los principales la relación entre humano y animales, pájaros y dragones. Estos motivos se fueron volviendo más precisos en el período Medio y Tardío de esta cultura, y dejaron de usarse en objetos decorativos para ser usados solo en útiles rituales (cf. Childs–Johnson 2009).

del cielo o el sol (Teng 2000), aunque no hay consenso en cuanto a su posible significado.[16]

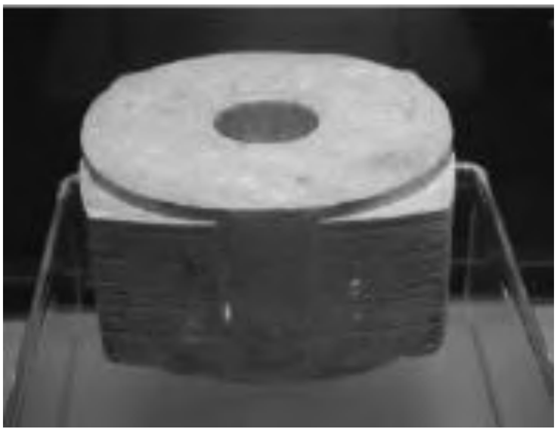
A  B 

Imagen 6.6 A: tubo *cong*, procedente de (Shelach–Lavi 2015, 148); B: tubo *cong* encontrado en la tumba nº 20 de Fanshan (Qin 2020, 57).

A  B 

Imagen 6.7 A: disco *bi* de la tumba nº 20 de Fanshan (Qin 2020, 67); B: discos *bi* de mala calidad encontrados en la misma tumba (Qin 2020, 68).

Por último, queremos señalar que la producción de jade estaba controlada, supervisada, y los productos finales eran usados por la élite. El control y uso de esta industria era manifestación y fuente del control ritual, político y económico de la clase dominante de esta cultura. Esta élite era precisamente la que marcaba el patrón ideológico a seguir por

[16] Aunque para llegar a esta conclusión este autor se basa en la información que aparece en el *Zhou bi*, obra escrita durante la dinastía Han; esto es, miles de años después de la existencia de esta cultura.

todos los asentamientos de esta región, y así las controlaba y unificaba bajo una sola ideología ritual (Qin 2013; 2020).[17]

En quinto lugar, tenemos la cultura Longshan (3000–1900 a.e.c.). En esta cultura los asentamientos se distribuyeron siguiendo una jerarquía territorial, de tal manera que los de mayor tamaño, muchos de ellos amurallados, se rodearon de un gran número de asentamientos pequeños (Sun 2013; Zhao 2013).[18] Además, en los propios asentamientos existía una clara organización espacial, viviendo el grueso de la población en viviendas de 25 m^2, la élite de menor rango en casas el doble de grande y con el doble de cuartos, y la élite en zonas palaciales de varios miles de metros cuadrados y amuralladas respecto al resto de la población (Liu & Chen 2012, 222–226; Li 2013, 30–35; He 2018).

De esta cultura nos interesa el centro monumental Taosi (2600–2000 a.e.c.) de unas 300 ha, con un claro uso ritual, y que algunos investigadores incluso consideran como el primer observatorio astronómico de China. En particular, nos interesa la estructura IIFJT1, de 1 ha y que se componía principalmente de una estructura central de tres plantas y 12 columnas frente a dicha estructura (Img. 6.8) (He 2013; 2018). Analizando la forma y orientación de esta construcción, algunos autores consideran que esta población pudo tener un concepto preciso de medición y el concepto de un cielo circular (He 2013; 2020; Pankenier 2013, 28). Por otro lado, analizando la disposición de las columnas se ha determinado que la columna E1 no pudo ser usada para hacer observaciones solares, aunque sí lunares, y las columnas E2–E12 fueron usadas para realizar observaciones solares.[19] Sin embargo, Pankenier (2013) también señala que "el diseño del complejo, con sus doce intervalos uniformemente espaciados muestra una falta de comprensión o falta de preocupación por la variabilidad en el progreso diario del sol a lo largo del horizonte a través de las estaciones" (p. 28). Este tipo de cuestiones, entre

---

[17] Fue habitual que los talleres de producción de estos objetos se situaran cerca de la zona residencial de la élite. En Liangzhu se ha excavado el taller de Tangshan, que estaba centrado específicamente en los retoques de los objetos de jade. Esto muestra, por un lado, el control e importancia de estos útiles para esta clase, así como la mayor especialización y división del trabajo (Qin 2013; 2020).

[18] Zhao (2013) muestra que hasta la fecha se han encontrado 70 asentamientos con murallas en este período Tardío, lo que podría ser considerado como un indicador de los cambios sociales, sobre todo en relación a las crecientes guerras por el poder, así como a nivel territorial y organizativo.

[19] Estas columnas estaban orientadas de tal manera que sus aperturas apuntaban a la cresta de la montaña Chongshan. De hecho, Sun (2015) dice que la columna E2 apuntaba directamente al pico de esta montaña, lo que puede significar que estas se orientaran respecto a este accidente geográfico más que en relación a posibles observaciones astronómicas.

otras “anomalías astronómicas” (Pankenier 2013, 28–29) de esta construcción nos hacen dudar del claro uso astronómico que algunos autores le confieren.

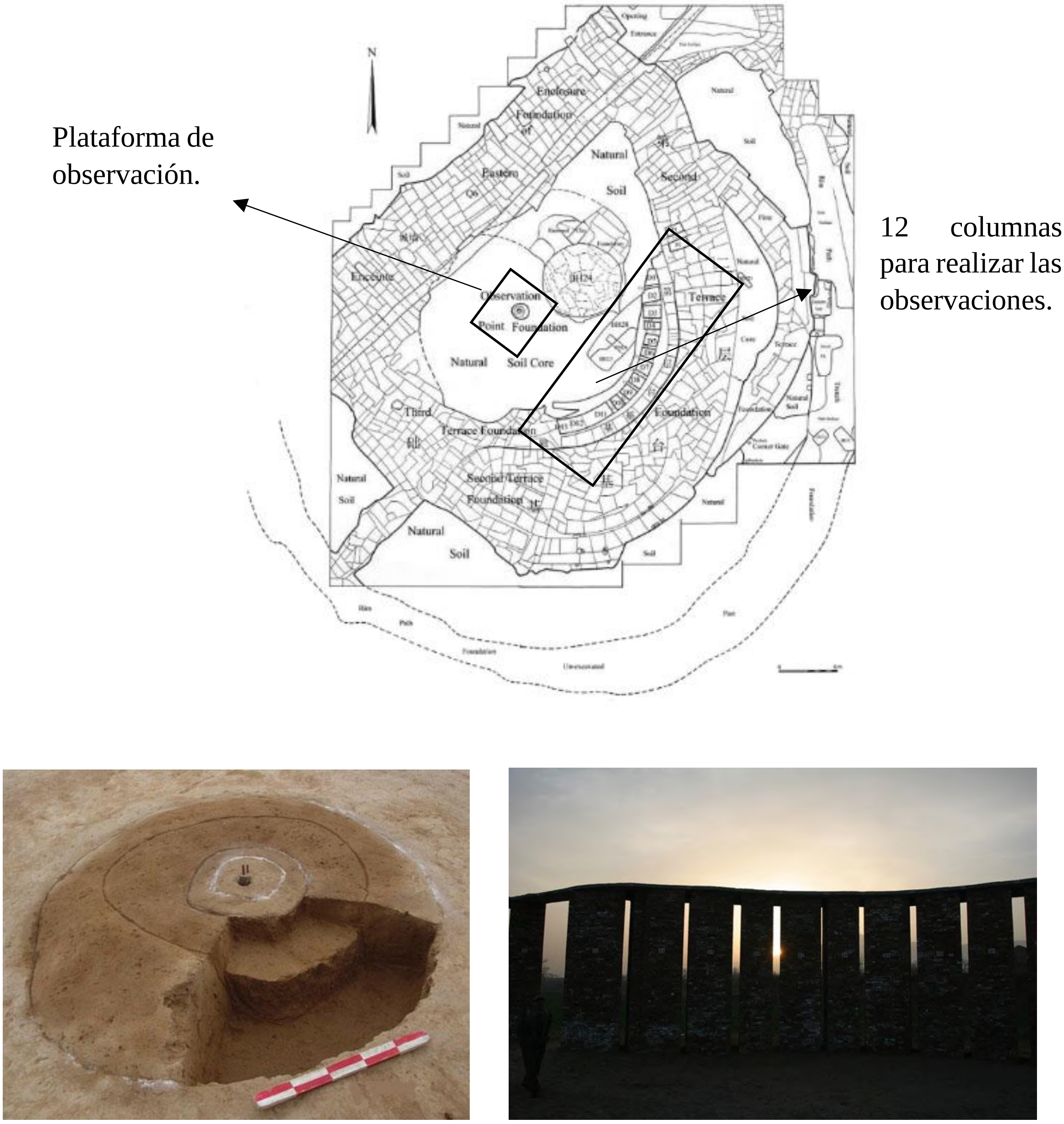


Imagen 6.8 Superior: Plano de Taosi (He 2018, 25); inferior izquierda: plataforma central; inferior derecha: reconstrucción hipotética de las 12 columnas (Sun 2015).

Así mismo, en la tumba IIM22, cercana a este complejo ritual, se halló un palo de unos 180 cm con 43–44 marcas de tres colores –negro, rosa y verde claro– que se distribuyeron siguiendo un patrón. Esto ha llevado a algunos investigadores a interpretar este objeto como la base de un instrumento para realizar mediciones (Img. 6.9). De hecho, algunos arqueólogos han hecho simulaciones en Taosi, y han observado que la sombra proyectada en este palo en el solsticio de verano coincidía con una de las franjas rosa (Img. 6.9), aunque es demasiado pequeño para ser usado en el solsticio de invierno (Li 2015). De nuevo, esto divide a la comunidad arqueológica, ya que su posible utilización para realizar observaciones astronómicas no queda tan clara.

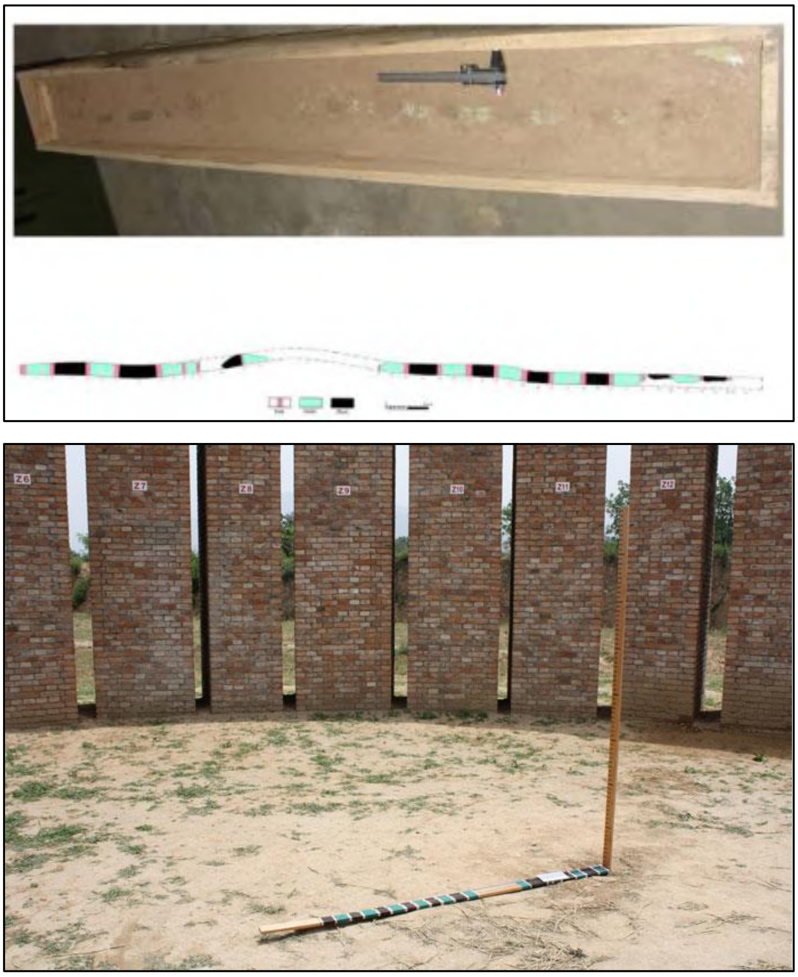


Imagen 6.9 Superior: palo de tres colores tal y como fue hallado en la tumba y su reconstrucción (He 2018, 28); inferior: simulaciones con las que se comprobó su posible uso como gnomon (Li 2015, 2101).

En último lugar tenemos Erlitou (ca. 1.900–1.500 a.e.c.), ciudad de la que se han excavado unas 300 ha pero que se cree que pudo tener 400 ha en total (Xu 2013). Existe un extenso debate sobre si esta ciudad pudo ser la capital de la dinastía Xia, aunque sigue sin existir evidencia arqueológica clara –solo existe evidencia textual de períodos posteriores– (Liu & Xu 2007; Li 2013, 48–53; Xu 2013).

Erlitou era la ciudad principal, la cual ejercía una jerarquía regional sobre los 200 asentamientos más pequeños que se distribuían a intervalos regulares rodeando esta ciudad principal (Xu 2013; 2018). Esta ciudad no estaba amurallada, mientras que los centros regionales cercanos sí que lo estaban, pudiendo así haber formado una especie de protección militar para la capital (Liu & Chen 2012, 259–274; Xu 2018). Su área palacial, de unas 12 ha, sí que se amuralló, y fue zona exclusiva de la élite. Al sur de la ciudad se construyeron los talleres artesanales dedicados a la producción de útiles de prestigio de bronce y turquesa, y al norte un área ritual (Liu & Xu 2007; Liu & Chen 2012; Xu 2013). Esta cuidadosa planificación urbanística refleja la importancia del poder ritual para esta cultura, la clara división y especialización del trabajo, así como el control de la élite sobre la producción y consumo de los útiles rituales y de prestigio (Zhang et al. 2019).

Además, en esta cultura fue importante la fabricación de vasos ceremoniales de bronce, creándose así un nuevo sistema de control político, económico y religioso, el cual puede ser considerado como precursor del tipo de rituales del posterior período dinástico (Xu 2013; Xu & Liu 2020).

En último lugar, algunos investigadores han tratado de determinar si los palacios fueron construidos siguiendo una planificación astronómica o ritual precisa. Entre estos, se ha visto que los palacios uno, dos, cuatro y siete se construyeron situándose en el eje N–S, afirmándose precisamente que se comienza de esta manera a seguir un patrón palacial regular (cf. Liu & Xu 2007).

Como hemos afirmado en diversas ocasiones, este período Neolítico lo consideramos como un período de transición en relación con el surgimiento del conocimiento protogeométrico por las siguientes cuestiones. En primer lugar, podemos observar de qué manera se domina y estructura cultural o ritualmente el espacio mediante la construcción de lugares rituales de carácter monumental. Como ya señalamos, estos lugares son clave para la producción, almacenamiento y uso de útiles con valor ritual y posible contenido simbólico, tal y como los discos *bi* o tubos *cong*, los cuales además se fabricaron con formas espaciales circulares y cuadradas precisas.

En segundo lugar, estos útiles rituales son herramientas cognitivas con las que se pudo manipular de forma más directa, y representar externamente, ciertas formas espaciales clave para estas culturas, como son el círculo y el cuadrado, así como la relación entre círculo y cuadrado reflejada en los tubos *cong*. Sin embargo, no se puede inferir a partir del uso y elaboración de tales herramientas la posesión por parte de estas culturas de conceptos protogeométricos aproximados. Esta es una primera aproximación, de carácter ritual y tosca, a estas figuras o formas espaciales.

En tercer y último lugar, hemos podido observar que algunos edificios fueron construidos con una orientación particular. Sin embargo, para elaborar este tipo de construcciones tampoco hizo falta desarrollar ningún tipo de conocimiento protogeométrico aproximado, ni crear unidades de medición abstractas o prácticas. Este tipo de organización espacial se llevó a cabo dentro de lo que denominamos en los capítulos anteriores como "control mítico del espacio" (cf. Schemmel 2016a).

2.2 La emergencia de la protogeometría durante el período dinástico

2.2.1 Contexto socio–cultural y político

Este período Dinástico incluye desde los comienzos de la dinastía Shang hasta la finalización de la dinastía Zhou. No vamos a decir nada de la dinastía Xia ya que no hay datos arqueológicos que confirmen su existencia.

En primer lugar, durante la dinastía Shang (1554–1046 a.e.c.) crece la densidad de población, así como el tamaño y número de asentamientos respecto a períodos anteriores. Por otro lado, la división y especialización del trabajo también se acentúa, y la actividad ritual se concentró en la zona palacial, bajo el control y consumo de la élite dominante. Los patrones de enterramiento ponen de manifiesto una mayor estratificación social, con más divisiones de clases que en períodos anteriores, así como una división territorial más marcada entre la zona palacial y la destinada al resto de la población (Keightley 1999; Li 2013, 66–111).[20]

En este período comienza la Edad de Bronce ya que este material comenzó a explotarse y usarse de manera intensa. Este será, durante este período dinástico, el material con el que se elaborará la mayoría de bienes rituales (cf. Bagley 1999). Durante este período se comenzaron a hacer pequeñas inscripciones en su superficie, las cuales serán más numerosas y complejas durante la dinastía Zhou –(cf. Bagley 1999; 2018; Rawson 1999)–.[21]

Otra de las prácticas rituales clave de esta civilización es la piromancia o adivinación con fuego. Esta práctica comenzó en torno al IV milenio a.e.c., alcanzando altos niveles de estandarización y sofisticación en el período tardío de la dinastía Shang.

[20] Véase el caso de Zhengzhou, con una muralla interior cubriendo un área palacial de unas 300 ha, y una muralla exterior que incorporaría un área de 1.500-2.500 ha (cf. Shelach–Lavi 2015, 194–205); por otro lado, Anyang –capital de esta dinastía– tenía unas 2.400 ha, con un complejo palacial compuesto por 53 edificios de gran tamaño divididos en tres sectores (Li 2013, 66–71). Para una revisión general de los patrones de asentamientos y la jerarquía territorial en este período, ver Yuan (2013).

[21] Thorp (2006, 208–213) muestra que la mayoría de estas inscripciones durante la dinastía Shang contenían caracteres simples para hacer referencia a linajes o términos indicativos de rango, y que los textos complejos eran más bien escasos.

Esta técnica se usó en diversos contextos (cf. Flad 2008); sin embargo, en este trabajo nos vamos a centrar en los llamados "Huesos Oraculares", de los que se han hallado unos 12.000 ejemplares (cf. Eno 2009), y de los que podemos resaltar las siguientes características generales:[22]

- Esta práctica se llevó a cabo en dos tipos de huesos principalmente: de búfalo o ganado en general, debido a sus grandes dimensiones, o en caparazones de tortugas, con posible significación cosmológica;[23]

- había diferentes especialistas para cada tarea, tales como la limpieza y preparación de los huesos, la supervisión del proceso, registrar la adivinación, etc. (Keightley 1985; 1999). Por otro lado, el rey era la autoridad suprema en esta práctica, siendo el único que podía comunicarse directamente con los espíritus (Allan 1991, 1–13);

- en los primeros periodos las adivinaciones se llevaron a cabo el día cuyo nombre coincidía con el nombre que se le había dado póstumamente a los ancestros, mientras que en los últimos períodos se implementó un calendario estricto con cinco sacrificios principales (Thorp 2006, 182–185);

- el proceso general consistía en aplicar una fuente de calor sobre el hueso, para posteriormente numerar y leer en conjunto las grietas que aparecían de acuerdo a la pregunta o petición formulada a los espíritus. Existían tres categorías principales de adivinación: 1) sobre ofrendas rituales; 2) sobre el futuro; y 3) sobre calamidades que han recaído sobre el rey, su pueblo o su tierra (Allan 1991, 103–124);

[22] Esta es una técnica que fue evolucionando en contenido, forma de realizarse, y personas implicadas durante los cinco periodos que se suelen distinguir en la literatura especializada (Keightley 1985; Eno 2009). Por otro lado, Thorp (2006) señala que usar los términos "adivinación" y "oraculares" en relación a esta práctica puede ser confuso y llevar a interpretaciones incorrectas; en su lugar, sería mejor seguir su nombre en chino moderno: *Jiaguwen*, que podría traducirse como "escritos en caparazones y huesos", o *buci*, "los textos de las grietas" (pp. 172–173).

[23] Ver Allan (1991, 101–103) o Pankenier (2013, 184–189).

- el registro de la adivinación seguía una estructura fija: 1) prefacio, con la fecha y nombre del adivinador; 2) cargo, con la pregunta en cuestión o el texto principal de la inscripción; 3) pronosticación, donde el rey o adivinador dan la interpretación de lo que el oráculo ha respondido, y que al igual que la verificación, no aparece en todos los huesos oraculares; y 4) verificación, donde se anota qué ha ocurrido tras la pronosticación (Thorp 2006, 179–182).[24]

Existía, por otro lado, una jerarquía de los espíritus que habitaban el mundo sobrenatural Shang. El primer puesto lo ocupa *Di* o *Shang Di*, el dios supremo. Este tenía poder sobre los fenómenos naturales y humanos, se le pedían lluvias, buenas cosechas o protección durante campañas militares, y no se le solían ofrecer sacrificios directos (Campbell 2018, 105–111). El segundo lugar lo ocupaban deidades o poderes naturales como el río, la montaña o el viento (Keightley 2000, 3–5), por lo que "el paisaje no era meramente la localización de las características naturales, sino que estaba habitado por los espíritus, y el funcionamiento exitoso del estado Shang y la buena fortuna de la corte real tendrían que garantizarse consiguiendo su cooperación" (Li 2013, 100).[25] Los siguientes puestos los ocupaban diferentes ancestros, como los lores, ancestros predinásticos, dinásticos, y en último lugar algunas mujeres dinásticas (Keightley 1999). Los reyes Shang al morir ascendían como divinidades a ocupar un puesto junto a *Di*, y estos reyes podían viajar entre el mundo sobrenatural y humano para traer bendiciones o maldiciones, dependiendo de si se habían celebrado los sacrificios adecuados o los rituales en un tiempo propicio. Por esta razón el culto y celebración de rituales en honor a los ancestros fueron pilares fundamentales de esta sociedad, ya que eran estos ancestros los que se comunicaban o transmitían los mensajes a *Di* (Bagley 1999; Wang 2000, 37–43; Li 2013, 99–103).

Por otro lado, el territorio Shang no estaba claramente delimitado geográficamente, sino que este tenía que reclamarse mediante conquistas, celebración de rituales, viajes personales del rey a sus territorios, etc.[26] Así mismo, los diversos

---

[24] Una limitación de estas fuentes escritas es que la mayoría provienen de Anyang y estaban escritas desde la óptica del rey, sus preocupaciones y preguntas particulares –sobre todo relacionado con los sacrificios a los ancestros que había que hacer– (Bagley 2018).

[25] Keightley (2000, 7–8) señala que a partir de los huesos oraculares es difícil establecer una separación clara de estos fenómenos naturales en términos mundanos o espirituales.

[26] Este es el carácter "ambulante" o "itinerante" de los reyes Shang, caracterización propuesta en primer lugar por Keightley (*apud* Wang 2000, 38). Ver también Campbell (2018, 29–30).

territorios centrales bajo dominio Shang eran gobernados por familiares o clanes relacionados genealógicamente con los reyes Shang, legitimándose su poder por cuestiones rituales o religiosas ya que al estar emparentados con el rey, compartían la línea ancestral común (Keightley 1999; Campbell 2018, 145–156).

En último lugar, algunos investigadores constatan en diversas prácticas relacionadas con los huesos oraculares la emergencia de una proto–burocracia. Por un lado, en algunos huesos se puede ver el registro de ciertos bienes, tales como huesos enviados por otras regiones, enemigos capturados, número de víctimas necesarias para un sacrificio, etc. (Keightley 1985, 1999).[27] Por otro lado, el rey comenzó a delegar diversas tareas estatales a sectores cada vez más especializados, tales como planificar, preparar y abrir nuevos terrenos para la labranza[28], inspección de trabajos públicos, relaciones diplomáticas con estados vecinos, etc. Sin embargo, el rey seguía ocupando el puesto central de esta estructura general, controlando y supervisando en última instancia cada una de las tareas y cuestiones sociales, económicas y rituales de esta dinastía (Keightley 1999; Wang 2014, 180–182).[29]

El siguiente período Zhou (1046–256 a.e.c.) se divide en tres períodos principales: 1) período Zhou Occidental (1046–771 a.e.c.); 2) período de Primavera y Otoño (770–453 a.e.c.); y 3) período de los Reinos Combatientes (453–221 a.e.c.). Estos dos últimos se engloban dentro del período Zhou Oriental (Shelach–Lavi 2015, 264–268).[30]

Los mandatarios de esta dinastía aseguraban ser los Hijos del Cielo que habían recibido el Mandato del Cielo para gobernar y reestablecer la norma ritual, ya que la anterior dinastía Shang había ofendido a los espíritus por comportarse fuera de dicha

[27] Ver por ejemplo *HJ* 116b, donde dice "Wo trajo 1.000 (conchas); la Dama Jing preparó ritualmente 40 (de estas). (Registrado por el adivinador) Bin", o *HJ* 7771, "En el octavo día, decapitar 2.656 personas" (Wang 2014, 182).

[28] Wang (2014, 181–182) señala que hay un carácter en los huesos oraculares para la figura del agrimensor de los terrenos –citando la obra de Chen Banghuai (1959)–.

[29] De hecho, al final del período Shang el rey es el único que aparece como adivinador en las inscripciones, lo que podría poner de manifiesto su afán por controlar todas las esferas de poder (Keightley 1999, 236–247); incluso pudo haber asumido el título de dios supremo (cf. Wang 2000, 58–60). Por otro lado, Li (2008, 24–30) muestra que las funciones burocráticas que emergieron en este período estuvieron sobre todo ligadas al contexto religioso. Por último, Eno (2009, 85–89) considera que esta caracterización proto–burocrática no está exenta de críticas.

[30] Esta dinastía es la que más tiempo ha durado en la historia de China, y para muchos pensadores, por ejemplo Confucio, su período Occidental es considerado como la edad de oro de esta civilización (Li 2018).

norma. Esto es, fundamentaron su conquista y ascenso al poder mediante la legitimidad religiosa. De esta manera, los reyes Zhou se convirtieron en los únicos capaces de comunicarse directamente con los dioses, pasando de la deidad *Di* anterior a la nueva deidad, que era el propio cielo (*tian*) (Wang 2000, 57–63; Pankenier 2013, 235–238).[31]

En cuanto a la red de territorios bajo su control y forma de gobierno, Li (2008, 294–299) ha propuesto la noción de "Estado de Asentamientos Delegatorios por Orden de Parentesco"; esto es, el rey Zhou tenía control directo sobre una región geográfica limitada, y en el resto de regiones tenía un mandato indirecto al delegar el poder a otros linajes estrechamente vinculados a los Zhou. Este control mediante linajes hereditarios era efectivo por diversas cuestiones, tales como las técnicas administrativas compartidas y poder ritual impuesto a todo el territorio.

Como ya señalamos anteriormente, los vasos rituales o ceremoniales con inscripciones son más numerosos y complejos en este período, y nos permiten entender cómo los Zhou controlaron burocrática y ritualmente sus territorios (cf. Li 2008).[32] Una de las inscripciones más importante y numerosa de este período son las denominadas "Inscripciones de Nombramiento" (Li 2008, 104; Kern 2009, 162–163). En estas se registraba la ceremonia celebrada en la corte en la que el rey asignaba las tareas y puestos administrativos a sus oficiales. De entre este cuerpo de oficiales, el más importante es el de "Los Tres Supervisores": el Supervisor de la Tierra, de la Construcción, y de los Caballos, este último a cargo de asuntos militares (Li 2008, 235–270; 2018). Existieron muchos otros puestos para las tareas de este nuevo estado altamente burocratizado y centralizado, los cuales veremos con más detalle en el próximo capítulo.

De esta manera, la institucionalización de las tareas de este cuerpo de burócratas desplazó paulatinamente a los adivinadores y sus prácticas rituales del lugar central que ocupaban en el control y organización del estado (Li 2008, 60–70).[33] Por otro lado, la escritura también dejó de estar en manos únicamente de la religión, y pasó a ser una

[31] Ver la nota 80 de Wang (2000, 58) acerca de los diversos investigadores que han mostrado que este dios Zhou pudo ser una asimilación del dios supremo *Di*.

[32] Entre los años 899–859 a.e.c. tiene lugar una "revolución ritual", de acuerdo a Rawson (1999), en la que se uniformizan las formas e inscripciones de estos útiles, las cuales seguían un modelo común de expresiones, contenido y forma –ver también (Kern 2009)–.

[33] Tal y como señala Kern (2009), el espacio religioso y su papel fue acomodándose a propósitos administrativos y políticos a lo largo de la dinastía Zhou Occidental.

herramienta clave para ejercer el control burocrático en todo el territorio (cf. Li 2008, 111–114).

El siguiente período es el de Primavera y Otoño, cuyo nombre se deriva de los *Anales de Primavera y Otoño*, texto con entradas de lo que ocurría cada año en el estado Lu entre los años 722–481 a.e.c. Este ha sido considerado por algunos investigadores como la edad de oro de la aristocracia hereditaria, ya que al debilitarse el poder central Zhou surgieron en torno a 200 ciudades–estado gobernadas por diversos linajes aristocráticos que acumularon el poder sociocultural, político y económico, volviéndose más autónomas e independientes políticamente (cf. Pines 2009; Sanft 2020). Estos gobernantes locales y diversas ciudades–estado trataron de crear un sistema de múltiples estados que convivieran pacíficamente, ya que eran demasiado pequeñas y poseían poco poder militar para conquistar a las demás, llegándose a crear algunas leyes interestatales y códigos diplomáticos (Lewis 2006, 141-150; Sanft 2020).

De esta manera, este período estuvo marcado por la lucha de diferentes clases –aristocracia, ministros o sabios– por obtener el poder político y conseguir así llevar a cabo sus propias reformas estatales a través de sus doctrinas filosóficas, burocráticas, cosmológicas, etc. Sin embargo, los reyes Zhou nunca perdieron su título como Hijos del Cielo, y estas otras clases siempre estuvieron al servicio de los reyes o gobernantes estatales (Pines 2009, 14–24).

El último de los períodos es el de los Reinos Combatientes, en el cual la anterior aristocracia hereditaria fue reemplazada por monarcas que integraron territorial y burocráticamente siete pequeños estados principales, junto a algunos estados menores, y en los cuales designaron a oficiales para la realización de diversas tareas estatales de acuerdo a sus propios méritos y no por parentesco con los monarcas. Este período está marcado por las guerras continuas entre estos pequeños estados por conquistar a los demás (Pines 2020a, 2020b).

En este último período la clase de los sabios (*shi*) ocupó el puesto ocupado anteriormente por los aristócratas. Esta era una clase heterogénea formada por intelectuales y militares al servicio del estado, los cuales solían estar entrenados en las Seis Artes. Esta educación estaba compuesta de: ritos, música, tiro con arco, equitación, literatura o caligrafía y matemáticas (Pines 2009, 116–117).[34] Esta clase justificó su

[34] Aunque estas seis artes fueron establecidas como ideal de educación en *Los Ritos de Zhou*, libro seguramente compilado en el Período Han Occidental (cf. Lee 2000, 172–173).

distanciamiento de la clase trabajadora en labores manuales ya que se consideraban como un grupo clave para la formación de los estados (Lewis 2006, 150–153). Su principal tarea era el cultivo de la mente –conocer el camino, la vía (*dao*)–, tarea que también tenían que realizar los monarcas o mandatarios para encontrar el fundamento ético, cosmológico o burocrático del poder político, y poder justificar la conquista y poder de uno de estos estados sobre los demás (Pines 2009, 119–125).

Por otro lado, este ha sido considerado el período de las "Cien Escuelas de Pensamiento", ya que emergieron figuras filosóficas de peso y escuelas asociadas a estos, tales como Confucio y el confucianismo, Mozi y el mohismo, el legalismo, etc. Estas discutieron extensamente acerca de cuestiones éticas, métodos para mantener la cohesión social, cómo debían entenderse las relaciones de poder entre reyes y súbditos, etc.[35] Precisamente el ambiente de debilitamiento de la autoridad central de los reyes Zhou, y la existencia de diversos sistemas políticos, influyeron en el desarrollo de esta pluralidad de escuelas y formas de pensamiento durante este período (Pines 2009; 2018).

Por otro lado, estos estados necesitaban controlar y conocer perfectamente los recursos humanos y materiales de los que disponían para defenderse y atacar a los otros estados, para lo cual comenzaron a elaborar códigos legales, censos de población, "Reportes Anuales" en los que se comparaban las previsiones de los recursos y trabajos de los que se pensaba disponer con los que realmente se habían producido ese año, mapas catastrales, informes sobre la calidad de las herramientas y animales del campesinado, etc. Estos estados trataron de maximizar la producción de los recursos, así como conocer detalladamente los medios de los que disponían (Pines 2020a, 2020b; Sanft 2020).[36]

2.2.2 Las bases cognitivo-culturales del conocimiento protogeométrico

---

[35] Csikszentmihalyi y Nylan (2003) señalan que esta noción de escuelas de pensamiento para el período de los Reinos Combatientes es problemática y más acorde al posterior período Han. Por otro lado, Goldin (2011) muestra la diversidad de interpretaciones del término *jia*, tales como "escuelas de pensamiento", "linaje" o "especialista". Es decir, hay que entenderlo más bien como un maestro enseñando a una serie de alumnos o discípulos más que como un conjunto de pensadores que seguían una doctrina filosófica bien demarcada y con objetivos intelectuales comunes.

[36] Por ejemplo, en una sección de la *Crónica de Zuo* (siglo IV a.e.c.) se describe un censo del estado Chu en el 548 a.e.c. en el que se registraron las cantidades de armaduras y armas, se proporcionaron detalles de la tierra arable, montañas, designación de áreas para impuestos especiales, cantidades de tierra dañadas por agua, etc. (cf. Lewis 1999, 26–27).

En esta sección vamos a presentar una serie de prácticas, concepciones y actividades que ponen de manifiesto las posibles bases cognitivo–culturales y, posteriormente, la emergencia del conocimiento protogeométrico en este período dinástico.

Queremos dejar claro, en primer lugar, que son numerosas las prácticas y actividades que podrían ser de interés para nuestro trabajo ya que las cuestiones cosmológicas, íntimamente relacionadas con la ordenación simbólica y espacial del territorio, son un elemento integral de la cultura China desde la antigüedad (Schwartz 1985; Wang 2000; Pankenier 2013). Sin embargo, analizarlas con detalle excedería los límites de este trabajo, de manera que presentaremos aquí las que consideramos de mayor interés para entender la posterior emergencia del conocimiento protogeométrico y geométrico.

En primer lugar, ya vimos que desde el Neolítico ciertas estructuras –tumbas o edificios importantes– se orientaron de acuerdo a patrones celestes (Pankenier 2013, 83–88), fenómeno que se realizará de manera más sistemática y consistente con una orientación particular –norte–sur con algunos grados de desvío– durante la dinastía Shang para las tumbas, edificios importantes, murallas, puertas, etc. (cf. Thote 2009; Pankenier 2013, 98–123).[37] Para llevar a cabo este tipo de alineaciones astronómicas, Wheatley (1971, 423–426) considera que pudieron bisecar el ángulo entre la salida y puesta del sol[38], mientras que Pankenier (2013, 100-108) cree que se usó algún dispositivo de observación junto a una plomada para conectar estrellas del norte celestial y poder conocer la dirección del norte verdadero.

Por otro lado, las ciudades y edificios solían construirse con forma cuadrada o rectangular (Pankenier 2013, 98–123; Wheatley 1971); mientras que la mitad de las 12 tumbas de Anyang se construyeron con forma de cruz –como la del carácter *ya* 亞– situando sacrificios en sus cuatro esquinas y apuntando hacia su centro, y en algunas inscripciones se sugiere que los templos Shang y Zhou se construyeron con esta forma –aunque faltan datos arqueológicos para demostrarlo– (Allan 1991, 75–101; Wang 2000, 39–46).

[37] Orientación que comenzó a dejar de ser tan importante a partir del período de Primavera y Otoño, y aún menos en el período de los Reinos Combatientes, durante el cual la construcción de las ciudades estaba más influenciada por la necesidad de acomodar a una población que no paraba de crecer (Meyer 2020).

[38] Este es el método que aparece en los *Ritos de Zhou*, y que Wheatley (1971) traduce como "Erigían un poste, tomaban la plomada con él [para asegurar su verticalidad], y entonces observaban su sombra. Describían un círculo, y registraban la sombra del sol a su salida y puesta" (p. 426).

También es importante un concepto político–geográfico y cosmológico clave de esta dinastía, el concepto *sifang*, que puede traducirse como "cuatro lados", "cuatro regiones" o "cuatro distritos" (Wheatley 1971; Allan 1991, 74–86; Keightley 1999; Wang 2000, 26–37).[39] Esta concepción hacía referencia a dos cuestiones interconectadas: 1) la dinastía Shang consideraba a su capital y región geográfica como el centro, el cual estaba rodeada por cuatro regiones, que serían los sistemas políticos o pueblos ajenos a esta dinastía. Además, el poder político y ritual se situaba precisamente en el centro, donde habitaba el rey; y 2) en un sentido cosmológico o simbólico, ya que en los huesos oraculares y diversas prácticas rituales la dirección a la que el rey iba a viajar, o a cazar, así como la dirección de la que provenían diferentes fenómenos meteorológicos o desastres naturales era fundamental, sobre todo para saber cómo contrarrestar o influenciar a las fuerzas que mandaban tales fenómenos (Keightley 2000, 81–93; Wang 2000, 26–37).

Otra práctica que surge en conexión con la adivinación y celebración ritual son los calendarios. Estos fueron un instrumento clave para la dinastía Shang ya que ciertos sacrificios y celebraciones tenían que realizarse en un momento o día determinado, o en períodos regulares como una vez por semana. Además, los ancestros se nombraban póstumamente como un día de la semana y había que celebrar rituales en su honor el día específico por el que había sido nombrado (Keightley 1999; 2000, 29–42;). Este calendario tenía un ciclo de 60 días, compuesto de diez días, denominados los troncos celestes, los cuales eran combinados con otros doce signos que eran las ramas terrenales –ver tabla 6.1– (Keightley 2000, 17–25; Wang 2000, 46–54; Pankenier 2013, 155–162). Aunque este era sobre todo un calendario ritual de poco interés para el resto del pueblo, y más bien tosco y poco sofisticado (Keightley 1999).

En cuanto a la conquista de la dinastía Zhou a la Shang podemos señalar dos cuestiones de interés. En primer lugar, esta fue una conquista tanto militar como ritual e ideológica. Esto es, la conquista militar vino acompañada de la justificación religiosa acerca de las malas prácticas rituales Shang, y de su posición única como Hijos del Cielo con un mandato que cumplir. Tras esta conquista los Zhou afirmaron ser los soberanos de "Todo bajo el Cielo", siendo esta su manera de absorber y transformar la anterior

[39] Wang (2000, 26) muestra las diferencias que conlleva cada una de estas traducciones: podría hacer referencia a las cuatro direcciones cardinales (Wheatley), a una configuración cuadrada más que lineal (Allan), o al concepto que esta autora y Keightley usan, como concepto político–cosmológico.

concepción *sifang*, situándose no como un centro rodeado de cuatro regiones, sino como una nueva dinastía con un mandato que llegaba a todas las regiones bajo su control (cf. Wang 2000, 57–73).

	jiă 甲	*yǐ* 乙	*bǐng* 丙	*dīng* 丁	*wù* 戊	*Jǐ* 己	*gēng* 庚	*xīn* 辛	*rén* 壬	*guǐ* 癸
zǐ 子	1		13		25		37		49	
chǒu 丑		2		14		26		38		50
yín 寅	51		3		15		27		39	
mǎo 卯		52		4		16		28		40
chén 辰	41		53		5		17		29	
sì 巳		42		54		6		18		30
wǔ 午	31		43		55		7		19	
wèi 未		32		44		56		8		20
shēn 申	21		33		45		57		9	
yǒu 酉		22		34		46		58		10
xū 戌	11		23		35		47		59	
hài 亥		12		24		36		48		60

Tabla 6.1 Ciclo *ganzhi* tomado de Keightley (2000, 144). En la columna de la izquierda tenemos los nombres de las 12 ramas terrenales, y en la primera fila de los 10 troncos celestes. Su combinación formaba el ciclo de 60 días. Podemos ver un ejemplo de cómo se usaba este calendario en el siguiente hueso oracular: Fragmento de (*Heji*, 36976): 乙未卜貞:今歲受年. Crujido el día ***yiwei*** (día **32** si vemos la tabla), adivinando: este año recibirá cosecha (siguiendo la traducción de Wang 2000, 34).

En segundo lugar, Pankenier ha analizado arqueoastronómicamente este suceso histórico, y ha llegado a la conclusión de que hubo un fenómeno astronómico singular que pudieron interpretar los Zhou como este mandato o señal del Cielo para llevar a cabo esta conquista. Particularmente, en la sección del cielo visible a los Zhou en el 1.059 a.e.c. fueron visibles los cinco planetas conocidos en este periodo (Pankenier 2013, 194–204; Li 2018).

En cuanto al desarrollo de la burocracia queremos resaltar dos fenómenos de interés. Por un lado, los Supervisores de la Tierra y de la Construcción se encargaban de tareas como la división y medición de los campos o la correcta orientación de edificios;

sin embargo, no existe mucha información en las inscripciones de las tareas específicas que hacían (Li 2008, 306–307). Wang (2014) señala, además, que en este período las transacciones de tierras entre la élite era una actividad común, para lo cual se tuvieron que elaborar mapas catastrales (pp. 196–199). Así mismo, en el período Zhou Occidental existía una habitación en el palacio real denominada “la Cámara de los Mapas”, aunque sería un tipo de práctica todavía emergente y poco técnica.[40]

Por otro lado, el Procedimiento de los Nombramientos tenía que ser llevado a cabo de acuerdo a ciertos patrones espaciales y cosmológicos. Por ejemplo, tenía que tener lugar a la salida del sol y con el rey mirando al sur. Además, el sujeto que iba a ser nombrado se situaba en el patio mirando hacia al norte en dirección al rey, y los oficiales de alto rango a su derecha, que era la posición superior (Li 2008, 103–111). Esto es lo que podríamos denominar como la importancia del “simbolismo espacial” asociado a las tareas estatales y burocráticas.

Los siguientes períodos los vamos a tratar en conjunto, aunque tenemos que decir que algunas de las características más relevantes para nuestro trabajo surgieron durante el periodo de Primavera y Otoño, pero se desarrollaron de una manera más organizada y sistematizada durante el posterior período de los Reinos Combatientes.

Nos vamos a centrar, principalmente, en la manera en la que tres grupos sociales trataron de reinterpretar las cuestiones cosmológicas, políticas y sociales –todas ellas interrelacionadas– en su lucha por alcanzar posiciones de poder en este período. Estos fueron: 1) sabios, académicos o intelectuales; 2) oficiales encargados de temas burocráticos y administradores, interesados sobre todo en cuestiones políticas; y 3) sabios de lo natural y en temas de ocultismo, entre los que incluiríamos a astrólogos, expertos rituales, protocientíficos, etc. (cf. Wang 2000, 78-80).[41]

Como ya señalamos anteriormente, el surgimiento y desarrollo de estos grupos está íntimamente relacionado con el debilitamiento de la anterior jerarquía ritual en la que el saber y enseñanzas estaban centrados en los cultos ancestrales y en manos de un reducido grupo de expertos. También la escritura dejó de estar en poder únicamente del rey y de este grupo de adivinadores, y pasó a ser una herramienta más de este nutrido y

[40] Existen dos inscripciones en bronce en las que se hace mención a esta Cámara de los Mapas (Shaughnessy 1999, 326).

[41] Esta autora añade un cuarto grupo que no vamos a presentar que es el de los expertos en temas militares.

plural grupo de expertos en diversas materias (Lewis 1999, 39–53). Aunque, como señala Lewis (1999)

> las personas entraban en la realidad política como sirvientes del gobernador, el estatus se definía en relación a él, y los escritos eran acreditados a través de su conexión con él. Las leyes, sellos, recuentos, y monedas venían del gobernador, mientras que los registros, mapas, casos legales, reportes y declaraciones volvían a él. Aunque el gobernador era la fuente de *autoridad* en los escritos, él no era el *autor* (p. 35, énfasis en el original)

Los textos de estos grupos serán la nueva fuente de autoridad y justificación político–religiosa (Wang 2000, 101–114), cambiando el foco desde la concepción *sifang* de los Shang y el mandato del cielo Zhou hacia "conocer la vía del cielo", mediante la cual se podrían armonizar los ritmos terrestres con los celestes, y evitar los días o tiempos de mal augurio para realizar ciertas acciones. También se elaboraron diversas teorías cosmológicas y rituales para dar sentido y justificación a los cambios sociales e institucionales.[42]

2.2.3 El surgimiento del conocimiento protogeométrico

A continuación, vamos a presentar algunas de las consideraciones y prácticas que desarrollaron cada uno de estos grupos tal y como se refleja en los textos que elaboraron en el periodo Zhou Oriental. Vamos a comenzar presentando las ideas del grupo de los sabios.

En primer lugar, vamos a presentar a Mencio (*Mengzi*), filósofo confuciano que vivió en el siglo IV a.e.c., y que en su obra trató cuestiones morales, acerca de la naturaleza del ser humano, y también acerca de cómo recaudar impuestos y dividir los terrenos. Específicamente, en el capítulo 3A –siguiendo la traducción y comentarios de Van Norden (2008)–, Mencio señala que un gobierno benevolente debe establecer de manera clara e igualitaria los límites de los campos para que oficiales y gobernadores

[42] Por nombrar un ejemplo, con la teoría de las cinco fases o elementos se trató de fundamentar y justificar el ascenso de uno de los estados como la nueva dinastía que gobernara. Wang (2000) afirma que "tal cosmología dinámica proveyó un patrón lógico y racional para el cambio social, formando una estructura simbólica para la competición de poder y que ratificara el cambio drástico que tenía lugar en las relaciones de poder" (p. 77).

corruptos no se aprovechen de posibles desigualdades en el cultivo y cobro de impuestos. Presenta su sistema del campo–pozo, en el que propone dividir el campo en nueve terrenos, de tal manera que el terreno del centro se cultive por ocho familias y su producción se destine al estado, y los otros ocho terrenos serían para el consumo de cada familia (van Norden 2008, 66–68).[43]

Por otro lado, una de las corrientes filosóficas o de pensamiento más importante para nuestro trabajo se encuentra en el Mohismo, escuela filosófica bien organizada en torno a los siglos IV–III a.e.c. y que seguía las enseñanzas de Mozi. Esta escuela se opuso radicalmente al confucianismo, aunque nunca alcanzó el apoyo ideológico e institucional que alcanzaría este en períodos posteriores. La obra de Mozi fue compuesta por sus discípulos, una antología de 71 capítulos de los que han sobrevivido 53. De esta nos interesan los "capítulos dialecticos" o "capítulos lógicos", compuestos en torno al 325–250 a.e.c. por la escuela mohista tardía. En estos capítulos se tratan temas técnicos relacionados con el espacio y el tiempo, así como temas de óptica, lenguaje, lógica, etc. (Graham 1989, 33–53; Johnston 2010, xi–lxxxii; Fraser 2020).

Antes de entrar en los capítulos dialecticos, queremos presentar algunas cuestiones de dos capítulos anteriores. En el capítulo 1 "Sobre la necesidad de estándares"[44] expone que en el mundo artesanal las herramientas son importantes ya que estas son el estándar que define correctamente a las figuras geométricas, afirmando en el punto 1 que "los artesanos hacen objetos cuadrados según el cuadrado, objetos circulares según el compás; dibujan líneas rectas con la línea del carpintero y encuentran la perpendicular con una plomada".[45] Posteriormente, en el libro 7 Mozi compara el trabajo del filósofo con el de los artesanos, afirmando que para él la voluntad del cielo es como el compás para los constructores de ruedas y los cuadrados para los carpinteros. Esto es,

[43] Para que este sistema fuera justo se tiene que poseer un sistema de mediciones y división del terreno estándar y bien desarrollado. El propio carácter usado para denominar a este sistema, *jing* 井, es representative de cómo funcionaba este sistema.

[44] Vamos a seguir la división de los capítulos presentada en la base de datos "Chinese Text Project", https://ctext.org/. Iremos señalando de quién es cada traducción, así como la dirección de la misma.

[45] En la filosofía mohista existe una clara influencia o interés por las habilidades técnicas, lo que podría deberse, para autores como Graham (1989, 34), a que Mozi pudo haberse dedicado a labores artesanales y ser una persona de bajo rango. Por otro lado, este tipo de herramientas, como veremos posteriormente, están muy vinculadas con dos figuras mitológicas de esta civilización, Fu Xi y Nü Wa.

su estándar es la voluntad del cielo, al igual que las herramientas son el estándar con el que los artesanos determinan si objetos particulares son circulares o cuadrangulares.[46]

Los capítulos dialécticos, por otro lado, son los más difíciles en cuanto al vocabulario que usa o su falta de una unidad temática (cf. Johnston 2010, 372–373). En estos se tratarán cuestiones espaciales más teóricas. De hecho, Boltz y Schemmel (2016) consideran que el conocimiento presentado en estos capítulos es teórico en cuanto a que estos autores llevan a cabo un análisis de las representaciones lingüísticas del conocimiento elemental e instrumental en relación con cuestiones espaciales y temporales, entre otras. Nosotros consideramos, de igual manera, que esta obra representa uno de los tratamientos más complejos en período pre-imperial de ciertas nociones protogeométricas.

Vamos a exponer a continuación los pasajes que consideramos clave para entender estas consideraciones mohistas acerca del espacio y la protogeometría. Particularmente, vamos a presentar el Canon I del libro 10, siguiendo la traducción y comentarios de Graham[47] –la letra "C" representa al Canon y la "E" la Exposición del Canon–:

I.41: C: extensión espacial se extiende por diferentes lugares; E: ʽEste y Oeste' cubren norte y sur;

I.53: C: nivelado/plano es de la misma altura;

I.54: C: De la misma longitud es cuando el uno exhausta al otro al ponerse los dos rectos; E: las mismas longitudes del poste y marco de la puerta son rectos;

I.58: C: recto/en un curso recto es alineado;

I.59: C: un círculo consiste en las mismas longitudes desde un centro; E: un círculo: un compás lo describe hasta que las líneas se unen;

I.60: C: un cuadrado es donde los lados y ángulos son cuatro y regulares; E: Un cuadrado: una regla de carpintero establece los puntos de encuentro;[48]

[46] Traducción al inglés de W. P. Mei, en https://ctext.org/mozi/book–7, consultado el 12/06/2021. Particularmente, esto aparece en: 1) la voluntad del cielo I, 7; 2) la voluntad del cielo II, 9; y 3) la voluntad del cielo III, 6.

[47] Ver https://ctext.org/mozi/book–10, consultado el 12/06/2021.

[48] En I.59 y I.60 hemos seguido la traducción de Johnston (2010, 422-425). Boltz y Schemmel (2016, 133) lo traducen como: I.59: C: ʽcírculo' implica un solo centro, siendo de la misma longitud; E: cuando se dibuja con un compás, es la forma más simple; I.60: C: ʽrectángulo' implica que las esquinas del marco

I.62: C: el punto de partida es la unidad sin dimensión que precede a todas las demás;

I.71: C: un estándar es lo que está como que algo es así; E: una idea, un compás, un círculo, los tres pueden servir como estándar.

B.64[49]: C: cuando las cosas se unen bajo un criterio esto completa una clase –por ejemplo, la recolección de cuadrados–. La explicación se encuentra en la "cuadratura"; E: Uno: cuando los cuadrados completan una clase todos tienen el criterio, aunque puedan ser diferentes; si algunos son de madera y algunos de piedra esto no daña el que puedan ser agrupados conjuntamente como cuadrados. Completan una clase como "cuadrados". Todas las cosas son así.

Más que hablar del posible significado de cada uno de los puntos que hemos presentado, complicados de entender por los diversos traductores y sinólogos que han trabajado en este texto, queremos hablar de un tema general. Como podemos observar, hay cierta base empírica o práctica en la manera en la que este autor o escuela define los conceptos de figuras geométricas básicas como el cuadrado o el círculo. Sin embargo, podemos ver de qué manera defiende la idea de la existencia de algo así como un concepto teórico de "cuadrado" o "círculo", el cual no depende del material en el que esta forma sea construida, sino que sea construida de acuerdo a unos estándares, que son precisamente los que les proporcionan los instrumentos con los que realizar dichas formas. Por otro lado, también hemos visto cómo la noción de "recto" se trata de forma empírica, como estar nivelado, poniendo además el ejemplo del marco y el poste de la puerta para que entendamos qué quiere decir con rectitud. Como señalan Boltz y Schemmel (2016)

> El *Canon Mohista* documenta reflexiones sobre las representaciones lingüísticas de conocimiento instrumental, pero no su representación simbólica o diagramática, tal como la construcción de figuras complejas que puedan ser dibujadas con regla y compás. Esto significa que es más filosófico que matemático (p. 142)

cuentan cuatro y están cerradas; E: cuando lo dibujamos con la escuadra del carpintero, es la forma más simple.

[49] Traducción, interpretación y organización presentada por Johnston (2010, 548–549).

De esta manera, se puede observar en este texto un análisis más teórico acerca de las formas espaciales, aunque sin llegar a desarrollar una matemática a nivel teórica, sino más bien un tipo de conocimiento protogeométrico en el que hay una concepción teórica de estas figuras, aunque muy cercanas todavía a cuestiones prácticas.[50]

En segundo lugar, vamos a presentar cómo la escuela legalista[51] abordó algunas cuestiones en relación con la división del terreno y la estandarización y uso correcto de las unidades de medición. Los primeros fragmentos de textos que han sobrevivido de esta tradición son de la obra *El libro de Lord Shang*, de Shang Yang. La mayoría de los capítulos se compusieron probablemente antes del siglo IV a.e.c., algunos escritos por el propio Shang Yang y otros por sus seguidores (Pines 2017, 51–54; 2018). Vamos a ver de qué manera este texto fundamenta la acción política sobre: 1) el sistema administrativo; y 2) la guerra y la agricultura (Pines 2017, 67–68).

Por ejemplo, en los capítulos 2 y 3, "Órdenes para Cultivar los Páramos" y "Agricultura y Guerra", se muestra cómo habría que establecer leyes y dar órdenes para el cultivo de terrenos y el establecimiento de los impuestos en relación al grano que se fuera a producir (Pines 2017, 123–140); por otro lado, en el capítulo 6, "Calculando la Tierra", señala que es necesario conocer la medición exacta de la tierra y el número de la población para poder saber si hay que abrir más terrenos o traer a población inmigrante para trabajar los terrenos. También presenta lo que denomina "estándar de utilización de la tierra", mostrando qué proporción del terreno debería ser usado para distintos fines, como 1/10 para pueblos, 4/10 para tierras fértiles, etc. así como la medición exacta del terreno necesaria para mantener al ejército –100 *li* cuadrados sirven para 10.000 soldados– (Pines 2017, 157–159). En el capítulo 14, "Cultivando la Autoridad", señala que los reyes anteriores establecieron escalas y pesos, así como pies y pulgadas, y que estos son esenciales para el correcto funcionamiento del estado, alejándose así de

---

[50] Aunque esta obra es una excepción en este período. Es decir, esto son unos pocos capítulos en los que se dedica poco espacio a los temas espaciales y protogeométricos, no hay un tratamiento sistemático ni general de diversas figuras geométricas –los casos son casi siempre acerca de círculos y cuadrados–, y fue una corriente de pensamiento con limitado impacto y continuidad histórica.

[51] Goldin (2011) consideran que el uso del término "legalista" es impreciso, ya que no abarca todos los posibles significados de *fa* más allá de su uso como "ley". Por otro lado, dice que este es un término anacrónico que se usó en el período imperial, así como en la actualidad, para referirse a un conjunto de pensadores que no tenían por qué compartir una misma forma de pensamiento.

deliberaciones subjetivas sobre estos temas, los cuales llevan a la corrupción (Pines 2017, 193–197).[52]

Por otro lado, en el capítulo "Siete Estándares" del *Guanzi*, un compendio heterogéneo de diversos textos compuesto en torno a los siglos IV–II a.e.c., se especifican los estándares que un gobernador debería conocer (Pines 2018). En particular, nos interesan para nuestro trabajo los puntos 3 y 7

> [3] Pie y pulgada, la tinta y línea del carpintero, compás y escuadra en L, las escalas, las medidas de volumen y el nivelador de grano, son llamados "estándares" (*fa*)
> […]
> [7] Consistencias, pesos, medidas, densidades, distancias, cantidades, son llamados "estadísticas" (Graham 1989, 274).

En último lugar, una de las obras legalistas más importantes es el *Han Feizi*, escrito en torno al siglo III a.e.c. por Han Feizi, príncipe del estado Han (韓, no confundir con la dinastía Han) (Watson 2003, 1–4). De este libro vamos a resaltar un párrafo de la sección 6, "Sobre tener Estándares" (Watson 2003, 21–28), que nos parece que es el que mejor puede resumir la postura legalista en relación a los estándares y uso correcto de las unidades de medición. Dice

> Aunque un carpintero hábil sea capaz de juzgar una línea recta solo con su ojo, siempre tomará sus mediciones con una regla; aunque un hombre de sabiduría superior sea capaz de manejar los asuntos solo con su ingenio innato, siempre buscará orientación en las leyes de los reyes anteriores. Estira la plomada y la madera torcida se podrá aplanar rectamente; aplica el nivel, y los baches y huecos se pueden eliminar; equilibra la balanza, y lo ligero y lo pesado se pueden ajustar; saca los frascos de medición, y las discrepancias de cantidades se pueden corregir. De la misma manera, uno debería usar las leyes para gobernar el estado, resolviendo todos los asuntos basándose únicamente en ellas.
>
> La ley no hace más excepciones para los hombres de alta posición que la plomada se dobla para acomodarse a un lugar torcido en la madera (Watson 2003, 28)

[52] Pines (2017, 18) señala que en registros paleográficos se ha encontrado una reforma de las unidades de medición de volumen por Shang Yang en el 344 a.e.c. –siendo este el ejemplo más antiguo de una unidad hecha estándar, ver también (Loewe 2016, 179–180)–.

Podemos ver que la elaboración de útiles de medición y la división precisa de los campos eran vitales para el correcto funcionamiento del estado. Con estos, se pretendía evitar la corrupción tanto en las clases altas como bajas, así como mantener un registro lo más detallado posible de los recursos humanos y económicos de los que se disponía para poder llevar a cabo una defensa o ataque en el momento que fuera preciso.

El tercer y último grupo que vamos a presentar es el de los denominados "sabios de lo natural y ocultistas" (Harper 1999). Este era un grupo heterogéneo de expertos en diversas prácticas, tales como la astrología, la celebración de rituales, la elaboración de calendarios, cuestiones protocientíficas, numerología[53], etc.

Para presentar a este grupo nos vamos a centrar en el *Manuscrito de seda de Zidanku 1* –anteriormente denominado *Manuscrito Chu de seda*–, del período de los Reinos Combatientes (Lewis 2006, 261–263; Li 2017). Este manuscrito está compuesto por tres textos y una serie de figuras, denominado la *Ordenanza de las cuatro estaciones*. Tenemos por un lado los textos A y B formando el cuadrado central, uno escrito en dirección contraria al otro, y por otro el texto C que acompaña a las figuras de las deidades (Img. 6.10). El conjunto de figuras son dos: 1) doce figuras que representan los doce meses, cuyas cabezas excepto la de uno están mirando al centro; y 2) cuatro árboles en las cuatro esquinas, representando las cuatro estaciones (Li 2017).

El texto A trata sobre el año, y se divide en tres partes: 1) sobre signos agoreros; 2) sobre desastres naturales relacionados con las irregularidades de la luna durante el año; y 3) el daño que pueden sufrir las personas al ignorar el año. En el texto B se cuenta la leyenda de Fu Xi y la aparición de las estaciones. En el texto C tenemos indicaciones hemerológicas[54] para los meses –actividades permitidas y prohibidas en cada mes– (Li 2017).

Una característica interesante de este manuscrito es su carácter funcional u operacional (Dorofeeva–Lichtmann 2004); es decir, no se puede entender como un conjunto de caracteres estáticos, sino que hay que entender el conjunto texto–figuras, así

[53] A partir de los Reinos Combatientes este grupo comenzó a usar los números para interpretar y entender el mundo, dividirlo, así como describirlo. Por ejemplo, tenemos la dualidad *yin yang*, la tríada hombre–cielo–tierra, las cuatro estaciones, las cinco fases, las seis líneas de los hexagramas, etc. (Lewis 1999, 241–284; Wang 2000). Sin embargo, como señalan Harper (1999) o Wang (2000, 78–92), este tipo de configuraciones se desarrollaron de una manera más sistemática en el posterior período Imperial.

[54] La hemerología hace referencia al estudio de los días propicios y malos para ciertas actividades, dependiendo del día, mes o año en el que estas iban a ser desarrolladas (cf. Harper & Kalinowski 2017).

como la dirección en la que lo movemos, como un todo, y de una manera eminentemente dinámica. Es más, la disposición espacial y movimiento que hay que realizar con este texto recuerda a Dorofeeva–Lichtmann (2004) a las tablas cósmicas o astrolabios (*shi*), las cuales se componían de un círculo que había que mover y hacerlo coincidir con un cuadrado exterior en el que se marcaban los grados y subgrados (Img. 6.11). Estos, se cree, representaban las nociones de cielo circular y tierra cuadrada, y pudieron haber sido usados para cuestiones astrológicas y hemerológicas; es decir, a medida que vamos leyendo el texto tendríamos que ir girándolo, por lo que estaríamos moviendo también las representaciones de las estaciones y los meses, lo cual pudo tener algún uso o interpretación astrológica o cosmológica.[55]

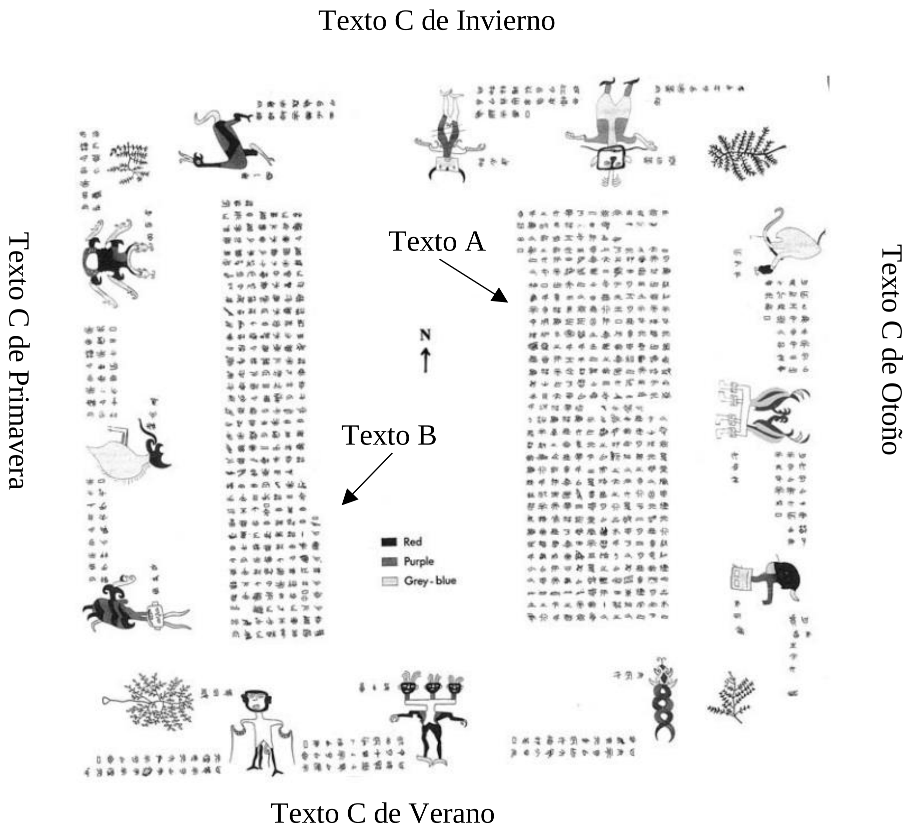


Imagen 6.10 Imagen de la disposición del texto y las figuras del *Manuscrito de seda de Zidanku 1*. Reproducida por Dorofeeva–Lichtmann (2004, 19) de Barnard (1972, 2–3).

[55] Hay que tener en mente, tal y como señala Dorofeeva–Lichtmann (2004) en la nota 49 de su trabajo (p. 39), que las tablas cosmográficas más antiguas pertenecen al período Han, y que la concepción del cielo como círculo y la tierra como cuadrado también aparecen explícitamente en textos del período Han.

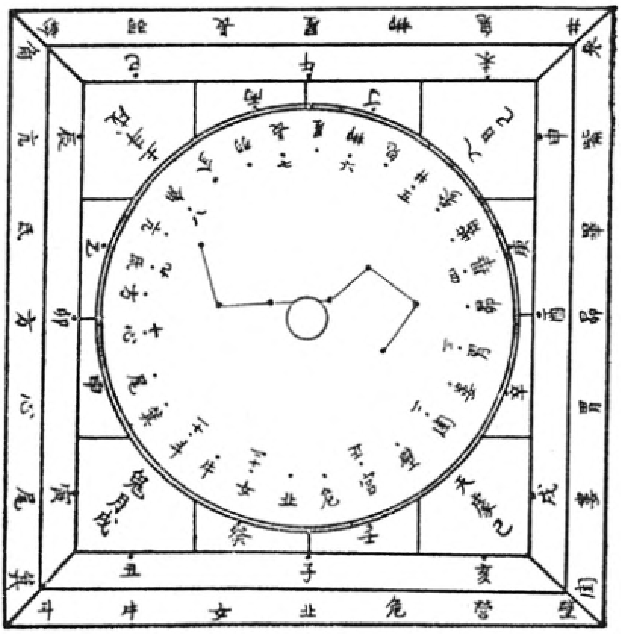


Figura 6.11 Tabla cosmográfica, con el círculo representando el cielo y el cuadrado la tierra, y la figura del medio representando la Osa. Imagen de Dorofeeva–Lichtmann (2004, 335) citando a Field (1992, 96).

Las características que queremos subrayar a partir de este texto, para hablar en general del grupo de sabios de lo natural, son dos: 1) por un lado, los números y calendarios fueron un tema importante en relación con distintas actividades, ya fueran de carácter ritual–cosmológico, así como protocientíficas o incluso médicas (cf. Harper 1999); y 2) había una cuidada disposición espacial de los textos y figuras, así como diagramas –que no hemos presentado, pero pueden consultarse en Harper (1999) o Wang (2000)– que se usaron para representar conceptos o aproximaciones cosmológicas.

3. El surgimiento del conocimiento protogeométrico y geométrico durante el período Imperial

En este apartado vamos a presentar el último periodo histórico de interés para nuestro trabajo, el cual abarcará desde el establecimiento del primer gobierno Imperial en la historia de esta civilización hasta el final del período de los Tres Reinos.[56] Para ello, haremos en primer lugar una breve presentación de los principales cambios socio–

[56] Los estudios sobre estos períodos se basan en materiales y manuscritos hallados en contextos arqueológicos y en las denominadas *Historias estándares*, como las *Memorias históricas*, el *Libro de Han*, o el *Libro de Han Posterior* (cf. Loewe 2006, viii–xv), entre muchas otras obras.

culturales y políticos. A continuación, mostraremos algunas prácticas y elementos relacionados con la cultura visual y espacial de esta cultura. En último lugar, presentaremos la evolución del conocimiento protogeométrico y geométrico durante estos períodos.

3.1 Contexto socio–cultural y político

En el año 221 a.e.c. el estado Qin conquistó al último de los estados de los Reinos Combatientes y unificó el territorio de China bajo el gobierno del primer imperio de esta civilización.[57] Para distinguir esta nueva forma de gobierno el rey Qin pasó a denominarse a sí mismo emperador[58], nombrándose “Primer Emperador” para dar comienzo así a una sucesión de emperadores que gobernaría China durante milenios (Bodde 1986; Lewis 2007, 1–4; Puett 2008; Pines et al. 2014; Sanft 2018).

Con este nuevo título el emperador quería poner de relieve su nueva posición como único gobernante de todo el territorio unificado, o como expresará en las estelas que erigió, siendo gobernante de “todo bajo el cielo” (Bodde 1986; Pines 2009, 107–111). Para ello se llevaron a cabo diversas acciones, entre las que destacamos las siguientes.

En primer lugar, se reestructuró el territorio movilizando a los linajes poderosos a otras ciudades para menoscabar la influencia y lealtad de los súbditos de sus territorios, evitando así posibles levantamientos. Además, dividió el territorio en 36 comandancias, cada una gobernada por tres representantes del gobierno central –un gobernador civil, un comandante militar y un inspector imperial– (Bodde 1986; Puett 2001, 145–146; Loewe 2006, 37–41; Sanft 2018).

En segundo lugar, se uniformizaron diferentes elementos y prácticas culturales, como la escritura, las leyes, así como las unidades de medición y pesos –lo veremos con más detalle posteriormente–. Se impuso así un marco legislativo, económico y social

[57] Para ello llevaron a cabo diversas reformas socio–políticas basadas en las propuestas de pensadores legalistas como Shang Yang o Fan Sui, con las cuales movilizaron a toda la población para la guerra y la agricultura, y concentraron todo el poder en la figura del emperador (Lewis 2007, 38–39).

[58] Este término ha sido traducido como “Dios Augusto” (Puett 2008), “Emperador Augusto” (Bodde 1986, 53), o simplemente “Emperador” (Lewis 2007, 51–52). Con este término el emperador quería vincularse y situarse como sucesor tanto de los emperadores legendarios de la mitología china como de ciertas deidades de dinastías anteriores (Puett 2001, 142–144; Pines 2014).

común desde el gobierno central, el cual facilitaba la comunicación fluida entre todos los territorios (Bodde 1986; Lewis 2007, 53–55; Sanft 2014, 46–76; 2018).

Además, el emperador empleó una gran cantidad de recursos materiales y humanos en proyectos monumentales, tales como carreteras que comunicaran todo el territorio, los comienzos de la gran muralla, ciudades de gran tamaño, la armada de terracota, etc. (Bodde 1986; Lewis 2007, 55–60; Pines et al. 2014; Sanft 2014, 101–113; 2018). Por último, en el año 213 a.e.c. mandó quemar todos los libros académicos confucianos a excepción de los situados en la biblioteca imperial. Esto se llevó a cabo porque los consejeros, principalmente legalistas, consideraban que los académicos confucianos usaban el pasado para criticar el presente, sobre todo comparando al Primer Emperador y su gobierno con la dinastía Zhou (Bodde 1986; Nylan 2001, 27–31; Pines 2009, 180–184; 2014). Como señala Lewis (2007, 53–54), esta medida también sirvió para uniformizar y controlar el pensamiento académico y político.[59]

A pesar de los esfuerzos por imponer su poder político–militar y unificar todo el territorio, esta dinastía colapsó rápidamente tras la muerte del Primer Emperador en el 210 a.e.c. (Leung 2018). Han surgido diversas interpretaciones acerca de este fenómeno, relacionándolo con cuestiones morales como la tiranía y represión ejercidas por el emperador, su rechazo a las tradiciones, empleo de muchos recursos humanos y materiales en un corto espacio de tiempo, o las tensiones territoriales con los antiguos estados debido al intento de subyugarlos al poder del gobierno central (Bodde 1986; Shelach 2014).

Tras morir el emperador surgieron revueltas entre los años 210–202 a.e.c. en distintos puntos del imperio en las que algunos reinos lograron reestablecer su poder. Es en este clima en el que Liu Bang funda la dinastía Han y se instaura como la próxima dinastía imperial en el 202 a.e.c. (Loewe 1986a). Esta dinastía se dividirá en un período Occidental o Anterior (202 a.e.c.– 9 e.c.) y uno Oriental o Posterior (25–220 e.c.), los cuales estarán separados por el reinado de Wang Mang con la dinastía Xin (9–23 e.c.).

La dinastía Han Occidental tomó las bases ideológicas, económicas, sociales, así como la estructura burocrática y legislativa de la dinastía Qin, adaptando a su propia realidad histórica muchas de sus ideas, títulos, leyes, calendario, etc. (cf. Loewe 2006;

[59] De hecho, Liu Hui menciona en su prefacio que la obra de los *Nueve capítulos* sufrió este mismo destino (Chemla & Guo 2004, 127); ver la discusión y análisis de Chemla y Zou (2018) sobre la posibilidad de que esto ocurriera, sobre todo por la posible vinculación de esta obra con los *Ritos de Zhou*.

Lewis 2007; Pines et al. 2014; Leung 2018). Como señala Loewe (1986a), la dinastía Qin se puede considerar como algo experimental y novedoso en la historia de China, mientras que la dinastía Han se encontró con el terreno allanado en cuanto a la aceptación de un gobierno imperial por parte de la población y la élite.

Para poder centrar sus esfuerzos en la reconstrucción del imperio, se dividió el territorio en comandancias gobernadas directamente por el emperador, y en 10 reinos gobernados por los reyes que ayudaron a esta dinastía a acceder al poder (Leung 2018). En años posteriores se fue minimizando el poder de estos reyes de diversas maneras, ya fuera sustituyéndolos por familiares del emperador, dividiendo sus territorios entre los distintos herederos, o acusándolos –por motivos reales o falsos– de estar envueltos en complots contra el emperador (Loewe 1986a; 2006, 37–46; Puett 2001, 150–169; Lewis 2007, 16–24).

La estructura gubernamental se dividía en dos niveles, gobernantes de nivel superior, y nueve ministros entre los que estaban el director ceremonial, director de palacio, de transporte, o de agricultura. Aunque la mayoría de la población de estos territorios, al estar conformada por campesinos, solo tendría contacto con gobernantes de bajo rango encargados del cobro de impuestos o resolución de cuestiones legales a nivel regional (Loewe 1986a; 1986b).

Para formar parte del gobierno se seguía un sistema de recomendaciones mediante el cual los propios gobernadores recomendaban a otras personas a las que consideraban aptas para los diferentes puestos, o incluso para entrar a la Academia Imperial –instaurada sobre el 124 a.e.c. por Wu Di–, en la cual se preparaban para los exámenes para entrar a formar parte del gobierno (Loewe 1986b; 2006, 73–76).[60] Las enseñanzas de la academia se estructuraron en torno a los llamados cinco clásicos confucianos – *Los Anales de Primavera y Otoño, Documentos*, *Odas*, *Ritos* y *Cambios*–, controlando y uniformizando así el pensamiento intelectual y político al limitar el acceso al gobierno a académicos que conocieran el canon confuciano, y no otras corrientes de pensamiento (cf. Nylan 2001; Pines 2012, 86–89, Leung 2018).[61]

---

[60] Se estima que al final del período Han Occidental unos 3.000 estudiantes atendían la Academia Imperial (Wang 2000, 181–182; Nylan 2001, 35).

[61] Aunque esto no significaba que la única escuela de pensamiento existente fuera el confucianismo, ya que el estado incluso patrocinó otras formas de pensamiento como el taoísmo o el budismo (cf. Lewis 2009, 197–205; Pines 2012, 89–97). Por otro lado, Nylan (2009) señala que es un error considerar que estas sociedades –Qin y Han– se basaron en la promoción del talento por méritos de los estudiantes o

Este período Occidental llega a su fin el 9 e.c., cuando Wang Mang funda la dinastía Xin –cuya traducción es "nueva"–. Este emperador, versado en artes ocultas, llevó a cabo reformas para volver a las tradiciones antiguas y alejarse de las políticas legalistas anteriores. De hecho, justificó su ascenso al trono como un cambio del Mandato del Cielo; esto es, ofreciendo una fundamentación cosmológica (Bielenstein 1986; Loewe 1986a).

Sin embargo, esta dinastía tuvo un destino similar a la dinastía Qin, y es que en el 23 e.c. Wang Mang y sus altos cargos fueron asesinados debido a una serie de revueltas lideradas por la élite y los ciudadanos que habían sufrido catástrofes naturales y hambrunas. Posteriormente, Liu Xiu restaura la dinastía Han en el 25 e.c., de quién la historiografía afirma que sí poseía el mandato del Cielo, comenzando así la dinastía Han Oriental (25–220 e.c.).[62] Se restauró y devolvieron las tierras a la nobleza Han y se retomaron algunas instituciones, títulos y prácticas de la dinastía Han Occidental como muestra de continuidad (Bielenstein 1986; Loewe 1986a; 2006, 179; Lewis 2007, 16–30; Leung 2018; Tse 2018).[63] Este período está marcado por las luchas de poder entre distintos grupos, tales como las emperatrices viudas y sus parientes varones contra los emperadores, o los eunucos.[64]

Los años finales de esta dinastía, y comienzo del posterior período de los Tres Reinos (220–280 e.c.) estuvo marcada por las batallas y ocupaciones del trono de distintos gobernantes que usaron sus armadas privadas para hacerse con el poder. Sin embargo, ninguno de los implicados conseguirá tras años de guerra esta unificación, y el imperio quedará dividido en tres reinos, que son los de Wei, Wu y Shu-Han (de Crespigny 1991).

gobernadores, afirmando que "durante Qin y Han, los determinantes principales del estatus y ocupación de una persona parecen haber sido siempre su nacimiento, género y riqueza" (p. 743).

[62] De Crespigny (2017) hace una presentación minuciosa de todos estos sucesos ordenados cronológicamente y con los actores y facciones principales implicadas.

[63] Aunque, como señalan Bielenstein (1986) o Tse (2018), esta idea de continuidad entre una dinastía y otra era una estrategia propagandística, ya que no había un vínculo de sangre con los anteriores emperadores.

[64] Estos grupos estuvieron involucrados en muchas batallas por el poder ya que, como señala Tse (2018, 190), desde la muerte del emperador He (105 e.c.) hasta el último emperador de la dinastía Han se sucedieron 10 emperadores, teniendo el mayor 15 años en el momento de hacerlo y 100 días el más joven. Estos emperadores solían estar influenciados, o incluso controlados, por las emperatrices viudas y otros familiares, y una vez adultos, llevaban a cabo complots junto a los eunucos y otros grupos para recuperar su poder (cf. Bielenstein 1986; de Crespigny 2017, 442–448).

Cada uno de los emperadores fundamentó su posición como emperador de distintas maneras. Cao Cao se llevó consigo al emperador Xian bajo su protección, mostrando de esta manera ser un defensor de la anterior dinastía Han. Su hijo Cao Pi ascendió al trono al abdicar Xian, y fundó la dinastía Wei (de Crespigny 1991; 2019a; Lewis 2009, 225–233). Por otro lado, Liu Bei fundó la dinastía Shu–Han en base a sus lazos con la anterior dinastía Han, y Suan Quan argumentó que Cao Cao era un usurpador, y que como la anterior dinastía Han había desaparecido él había recibido el Mandato del cielo para ser emperador, fundando la dinastía Wu (de Crespigny 1991; 2019a; 2019b; Farmer 2019).

Estos imperios fueron fundados por señores de la guerra que defendieron con sus armadas privadas sus territorios de las amenazas del bandidaje, grupos religiosos, guerras con otros territorios, etc. Por lo tanto, los imperios que formaron estuvieron gobernados por personas entrenadas e interesadas en cuestiones sobre todo militares, lo que les llevó a mantener en los puestos gubernamentales más importantes a militares –aunque promovieran la cultura o cuestiones académicas, pero los académicos no podían alcanzar puestos altos de poder–, lo que llevó a un manejo deficiente de los recursos estatales. Además, la lealtad de los ciudadanos estaba depositaba sobre todo en los primeros emperadores o su sucesor inmediato, por lo que al morir estos las élites aprovecharon para llevar a cabo complots o golpes de estado contra el gobierno (de Crespigny 1991; Lewis 2009, 31–37). Por ejemplo, en el estado Wei la familia Sima aprovechó la muerte prematura de los sucesores de Cao Cao para dar un golpe de estado en el 249 e.c., fundando en el 266 e.c. la dinastía Jin, la cual conseguirá unificar China de nuevo en el 280 e.c., finalizando así este período (Lewis 2009, 31–37; de Crespigny 2019a).

3.2 Las bases cognitivo–culturales del conocimiento protogeométrico

En esta sección vamos a presentar algunos elementos de la cultura visual y espacial que, de alguna manera, pudieron estar vinculados con la emergencia y desarrollo del conocimiento protogeométrico. Para ello, dividiremos la sección en tres apartados. En el primero y segundo nos centraremos en los desarrollos, más a nivel teórico o intelectual, de los elementos cosmológicos y relacionados con el establecimiento y estandarización de las unidades de medición. En el tercero presentaremos de qué manera en algunas construcciones, materiales o manuscritos se encarnaron estas ideas.

En primer lugar, las dinastías Qin y Han Occidental fundamentaron su poder dinástico en su fuerza militar, la aplicación de castigos por medio de leyes, así como la unificación cultural forzosa de sus territorios (cf. Pines 2014; Pines et al. 2014). A partir del interregno de Wang Mang, y durante la dinastía Han Oriental y período de los Tres Reinos, se retoman nociones cosmológicas como el Mandato y Voluntad del Cielo, se rescata a la deidad propia de la dinastía Zhou, y se considera al emperador como Hijo del Cielo (de Crespigny 1991; Wang 2000, 129–216; Lewis 2007, 185–189).

Esto se ve reflejado en las estelas erigidas por el Primer Emperador, cuyo texto trataba sobre cómo había conseguido unificar el territorio y traer paz y prosperidad a ʽtodo bajo el cielo', sin mencionar a ninguna deidad en las mismas (Pines 2012, 19–24; 2014). Además, los ritos y cultos celebrados durante su mandato, celebrados a deidades naturales como ríos o montañas, o los sacrificios *feng* y *shan* celebrados en la montaña sagrada Tai, estuvieron desprovistos de su carácter u obligación moral para el emperador, el cual tras sus conquistas e imposición de una ley universal se consideró a sí mismo como un dios (Wang 2000, 141–143; Lewis 2007, 52–57).

Por otro lado, no existieron templos ancestrales ni en la capital Qin, en Xianyang, ni en la capital Han Occidental en Chang'an[65], caracterizadas por Lewis (2006) como "ritualmente vacías" (p. 170).[66] La dinastía Han Oriental, por su parte, construyó su capital en Luoyang –ciudad vinculada con la dinastía Zhou– siguiendo las prescripciones del *Registro de los Artesanos*, posteriormente incluido en el los *Ritos de Zhou*. Por ejemplo, la ciudad tenía que tener forma rectangular y 12 puertas, se alinearon diversos edificios y la propia planificación de la ciudad con elementos cosmológicos, y se construyó un templo ancestral. Además, se reestablece el culto al Cielo, y se prohíben los templos ancestrales en otras regiones que no fueran la capital, ya que solo el Hijo del Cielo era digno de ofrecer sacrificios a su padre celestial, el Cielo, o a sus ancestros imperiales (Lewis 2006, 169–186; 2007, 88–101).

A partir de Wang Mang y la dinastía Han Oriental la teoría de los cinco elementos se usó para justificar el cambio de dinastía mediante la idea del cambio de Mandato del Cielo y cuestiones morales relacionadas con la Voluntad del Cielo. Por ejemplo, Wang

[65] Esta capital fue elegida por cuestiones estratégicas, tales como mejores defensas naturales o mejor acceso a suministros (Loewe 1986a).

[66] En este sentido, Lewis (2006) señala que en las crónicas de Zuo ʽcapital' se definía como "ciudad con un templo ancestral", mientras que en el diccionario *Shi ming* de la dinastía Han se define como "donde está el asiento del emperador" (p. 177).

Mang justificó su ascenso al trono estableciendo, por un lado, un vínculo genealógico con el emperador mitológico Huang Di, y por otro, comenzó a interpretar diversos fenómenos como presagios auspiciosos que mostraban la voluntad del Cielo para que él recibiera el Mandato para gobernar (Wang 2000, 143–171).

En segundo lugar, existen tres fuentes para estudiar la estandarización de las unidades de medición: 1) textos incluidos en las historias estándares (cf. Loewe 2016, 168–197); 2) textos inscritos en vasijas o instrumentos para medir, que veremos posteriormente con más detalle (cf. Loewe 2016, 153–154); y 3) textos matemáticos o legales en los que este tipo de mediciones se usaron (Loewe 2016, 147–150). Por ejemplo, se dice en una inscripción del Primer Emperador que este

> estableció su propio título como *Huangdi* e inmediatamente después decretó una orden a los cancilleres [Wei] Zhuang y [Wang] Wan para que estandarizaran las medidas de longitud y capacidad, regular las que no eran uniformes, o eran defectuosas o susceptibles de duda; en todos los casos debían de ser claramente uniformes (traducción de Loewe 2016, 181)[67]

Han surgido diversas interpretaciones en relación a por qué esta estandarización fue tan importante como para incluirla en estelas, edictos e historias estándares. Entre estas, se ha propuesto la de cobrar los impuestos de manera uniforme en todo el imperio, que fuera una forma más de unificación cultural, una muestra del control del gobierno central sobre sus súbditos, o una forma de comunicar un tipo de conocimiento común, el de las propias unidades, a todo el territorio (cf. Sanft 2014, 72–76).

Para llevarlo a cabo, se siguieron los siguientes pasos. En primer lugar, se establecieron unidades de medición precisas.[68] En segundo lugar, se fabricaban los objetos con esas unidades, en los cuales se incluía el carácter *lü* –estatutos–, con el que se certificaba que este objeto se había fabricado según las regulaciones impuestas por el gobierno central. En tercer lugar, estas unidades eran enviadas a todas las oficinas del

[67] Se han encontrado unos 58 objetos en los que este edicto fue inscrito (cf. Sanft 2014, 57–65). Por otro lado, en las *Memorias Históricas* hay una inscripción del año vigésimo octavo en el que se afirma que tales unificaciones han sido llevadas a cabo de manera exitosa (cf. Loewe 2016, 181).

[68] Estas se establecieron, según Loewe (2016), de la siguiente manera: "la longitud seguía la de la flauta cuyas propiedades musicales eran identificables en una escala de doce unidades; el espacio en la flauta que era requerido para albergar un número dado de granos de mijo determinaba la unidad de volumen; el peso de esos granos formaba el estándar del peso" (p. 168).

imperio para que se impusieran; además, se revisaban anualmente, y se castigaba al que no usara las establecidas por el gobierno central (Sanft 2014, 48–68; Loewe 2016, 155–179).[69] Sin embargo, durante el período Han Oriental y de los Tres Reinos no siempre se usaron o invirtieron tantos esfuerzos en mantener estas unidades de medición estandarizadas (cf. Loewe 2016, 162–167).

Pasamos entonces a la última parte de esta sección, en la que nos vamos a centrar en cómo se reflejaron algunos conceptos cosmológicos o prácticas de medición y actividades afines en diversos elementos materiales y textuales.

Tenemos por un lado la Sala Luminosa, edificio que encarnaba algunos conceptos cosmológicos por su propia forma, los cuales "demuestran el trabajo del Universo" (Hung 2007, 192). Por un lado, se alternaba el uso de la planta circular y cuadrada, simbolizando al Cielo y la Tierra; por otro, se usaron también relaciones numerológicas para su construcción, tales como el número de puertas, ventanas o salas, las medidas de las mismas, etc. (Hung 2007; Loewe 2016, 109–114).[70] Además, las acciones que el emperador llevaba a cabo en este edificio ayudaban o simbolizaban el correcto funcionamiento del cosmos, como al moverse por las diferentes salas imitando el paso de los meses y estaciones. Por lo tanto, aparte de representar conceptos cosmológicos con la forma de sus elementos arquitectónicos, también servía para que los aspectos cosmológicos, rituales y políticos se combinaran o realizaran mediante las acciones del emperador en este edificio (Lewis 2006, 260–273).

Para hablar de los próximos elementos –representaciones pictóricas, diagramas, herramientas, etc.– nos vamos a centrar en aquellos que han sido hallados en tumbas en recientes investigaciones arqueológicas. En primer lugar, tenemos que señalar que durante este período tuvieron lugar dos cambios fundamentales en las prácticas funerarias: 1) en los sarcófagos o paredes de las tumbas se realizaron en algunas ocasiones

[69] De hecho, en el *Estatuto Qin dieciocho* –'Estatuto sobre comprobaciones'–, se establece por ley el máximo desvío permitido de cada medición (Peng 2020 137–138); o en las tiras de bambú pre-Qin *Xiaolü*, de Shuihudi, también tenemos regulaciones sobre el máximo de desviación, y los diferentes castigos de acuerdo a cuánto se desviaban del estándar (cf. Zou 2007).

[70] En el texto del siglo I a.e.c. *Los Registros Históricos del Anciano Dai sobre los Rituales*, particularmente en el capítulo "Sala Luminosa", se establece la correspondencia entre planta cuadrada y Tierra, y techo circular y Cielo (Lewis 2006, 267–268).

representaciones de la relación entre Cielo–Tierra–Humanos;[71] y 2) en estos períodos tanto la tumba como los bienes depositados se relacionaban con la vida de la persona enterrada. En particular, nos interesan sobre todo las tumbas de gobernantes regionales a los cuales se les enterró con los textos y materiales que usaron para sus tareas burocráticas, legales, etc. (Pirazzoli–T'Serstevens 2009; Thote 2017).[72]

El primero de los casos se compone de representaciones pictóricas de deidades, regiones geográficas, y las relaciones o resonancia entre Cielo, tierra y hombres (Bray 2007; Hung 2007). De este conjunto de representaciones nos gustaría llamar la atención sobre la aparición de Fuxi y Nüwa, representados desde el período Han Occidental hasta el de los Tres Reinos en diferentes materiales, como en sarcófagos, manuscritos, paredes de tumbas, etc. (Zhao 2019). Fuxi es considerado el inventor de los trigramas, la escritura, los números y la tecnología. Además, estas deidades solían ser representadas de la siguiente manera: Fuxi sosteniendo una regla con forma de T o regla de carpintero, usada para trazar un cuadrado y por lo tanto vinculado con la Tierra, y Nüwa con un compás, instrumento usado para trazar círculos, y por lo tanto vinculada con el Cielo (Img. 6.12) (Lewis 1999, 197–209; Pankenier 2013, 384–403; Zhao 2019).[73]

En el segundo de los casos, nos vamos a centrar sobre todo en las representaciones gráficas denominadas *tu*, que puede traducirse como diagramas –incluso diagramas matemáticos, como veremos a continuación–, con dos posibles usos según Bray (2007): 1) para explicar procesos cósmicos, poseyendo poder simbólico o ritual; y 2) para representar u organizar conocimiento secular, con funciones principalmente didácticas.

Dentro de la primera categoría podemos destacar los diagramas *shi*[74] y los diagramas encontrados en los Libros sobre Días. Los *shi* fueron usados sobre todo en la dinastía Han en contextos astrológicos y calendáricos, aunque también se pudieron usar

[71] Un tema que no vamos a tratar por falta de espacio es, precisamente, el de la importancia que se dio en estos períodos a la consonancia entre el ámbito celeste, terrenal y humano. Por ejemplo, diversas construcciones se realizaron imitando patrones celestes, se intentaba interpretar cómo se desarrollarían guerras o cosechas de acuerdo al movimiento de astros, etc. (cf. Sivin 1995; Pankenier 2013).

[72] De entre los seis tipos de textos que se suelen hallar en estas tumbas, nos interesan dos: 1) textos técnicos, incluyendo textos protomatemáticos, que analizaremos en la próxima sección; y 2) mapas (cf. Thote 2017).

[73] Además, en los prefacios de obras matemáticas clásicas de esta civilización, como el *Zhou bi* o los *Nueve capítulos*, los comentaristas del siglo III también hablaron sobre la relación, sobre todo de Fu Xi, con los hexagramas y las matemáticas.

[74] Traducido en la literatura de diversas maneras, tales como astrolabio, tablero cósmico, artefacto mantico, modelo cósmico y cosmógrafo, etc. (cf. Kalinowski 2012/2013; Li 2017, 271).

para adivinación, interpretación de sueños, etc. Con estos diagramas se podían establecer conexiones entre aspectos temporales –meses, estaciones, etc.– y espaciales –los cinco sectores del mundo, la posición de las 28 casas estelares, etc.– (cf. Kalinowski 2012/2013) –ver imagen 6.11 y 6.13 –.

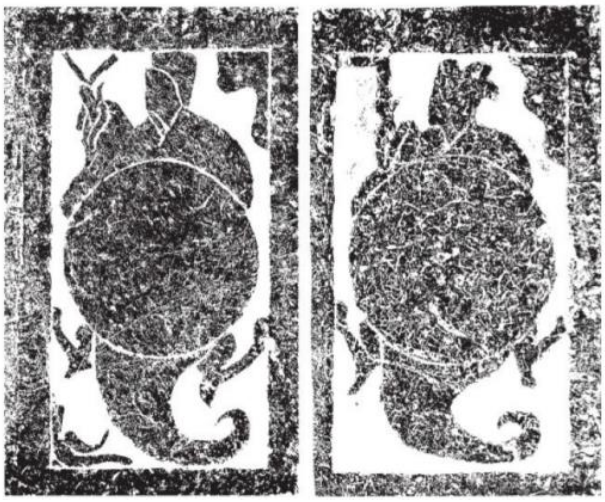


Imagen 6.12 Fuxi y Nüwa sosteniendo el compás (izq.) y la regla de carpintero (drcha.), proveniente del período Han Oriental (II siglo e.c.). Imagen de (Gao 2001, *apud* Zhao 2019, 20).

Por otro lado, en la actualidad se conocen seis Libros sobre Días, definidos como colecciones de información hemerológica y alguna no hemerológica acerca de rituales o magia, y relacionados con cuestiones numerológicas, astrológicas y calendáricas (Harper & Kalinowski 2017; Li 2017). Además del día para llevar a cabo una actividad o celebración, también se podía preguntar sobre orientaciones espaciales y si estas eran auspiciosas o no (cf. Kalinowski 2017). En estas obras se han encontrado 30 diagramas, siendo el libro *Kongjiapo* el que más tiene, con 13 diagramas, y el más importante es el manuscrito *Zhoujiatai 1*, que cuenta con ocho diagramas bien elaborados y de gran tamaño (cf. Kalinowski 2017, 179–180). De entre estos podemos ver el diagrama "Veintiocho casas horarias" que se encuentra en el manuscrito *ZJTA.8*, usado para determinar la orientación de la osa mayor en cada una de las veintiocho horas del día para los 12 meses (Img. 6.13);[75] o el diagrama de difícil clasificación "Emplazamiento de puertas en el compuesto–casa" hallado en el manuscrito *SHDA.39* en Shuihudi. Con este diagrama se representan los muros de una vivienda con un cuadrado, y se indica por

[75] Ver el suplemento 4.5 de Kalinowski (2017, 200–206) en el que se listan todos los diagramas de acuerdo a su clasificación por tipos.

ejemplo la localización de los animales, y debajo del diagrama hay predicciones acerca del destino de la familia (Img. 6.14).

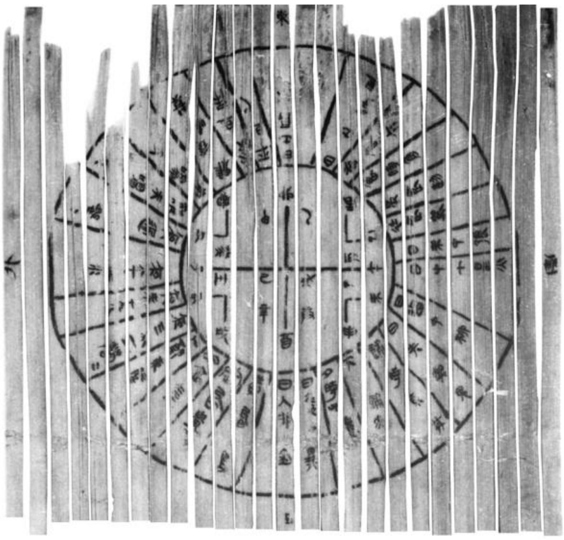


Imagen 6.13 Diagrama "Veintiocho casas horarias", con un círculo rodeando al diagrama de la Corte del día central, y el círculo exterior dividido en 28 segmentos con las 28 casas estelares y sus periodos horarios (Kalinowski 2017, 182).

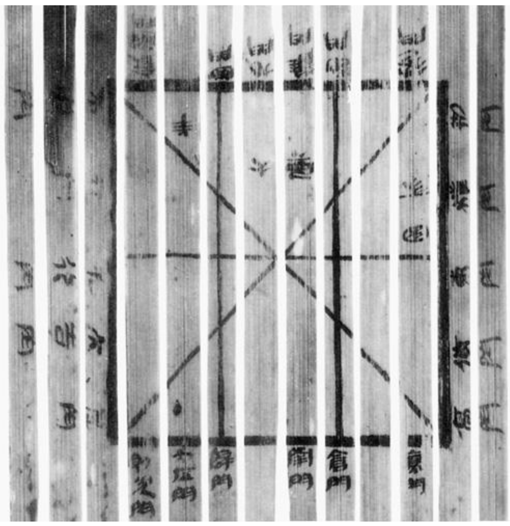


Imagen 6.14 Diagrama "Emplazamiento de puertas en el compuesto–casa" del manuscrito *shda.39* (Kalinowski 2017, 179).

De estos diagramas podemos destacar su elaboración mediante figuras simples como círculos, cuadrados, ángulos rectos y líneas que dividían generalmente al diagrama en un número determinado de partes según su uso. Además, ninguno de estos diagramas era considerado o percibido por sus características estáticas, sino por cómo eran usados de manera dinámica y activa para conectar las cuestiones espaciales y temporales de interés para estos especialistas técnicos, y poder determinar así los días auspiciosos para diversas actividades, las direcciones importantes, etc. (cf. Lewis 2006, 273–281; Kalinowski 2017).

Pasamos a la segunda de las categorías, que son los *tu* usados para representar información secular. De estos, los que nos interesan presentar aquí son los mapas. En primer lugar, tenemos que señalar que en obras como *Los ritos de Zhou* se afirma que los mapas eran instrumentos cruciales para el control de los recursos, asuntos legales, división del terreno, etc. De hecho, desde la dinastía Han se establecieron oficinas para documentar y cartografiar los territorios tanto celestes como terrestres (cf. Hsu 1993; Wang 2014, 199–204; Thote 2017).

En segundo lugar, en hallazgos arqueológicos recientes se han encontrado diversos mapas. Por ejemplo, en la tumba Fangmatan 1 –siglo III a.e.c. – se han hallado, aparte de varillas para contar usadas presumiblemente para la adivinación y una regla *chi* de madera, cuatro tablas de pino rectangulares en las que hay siete mapas, uno al frente de una de las tablas, y el resto por delante y por detrás de las otras tres. Cada mapa ofrece información sobre cuestiones administrativas, económicas, topográficas y militares del territorio Qin. Se usaron diferentes símbolos para representar la información, como cuadrados para los asentamientos importantes, un símbolo parecido a un pabellón para pueblos, líneas para carreteras y ríos, etc. (Hsu 1993; Thote 2017).

Por otro lado, en la tumba nº 3 de Mawangdui (168 a.e.c.) se han hallado tres mapas elaborados en seda, un mapa topográfico, uno militar y la planificación de los fundamentos de una prefectura. Al igual que en los anteriores, se usaron diferentes símbolos para representar diversos accidentes geográficos, carreteras, asentamientos o templos (Hsu 1978; Wang 2014, 199–204). Además de usar diferentes símbolos, como círculos para los asentamientos, triángulos para los cuarteles generales, etc. –ver la tabla 3 con todos los símbolos en (Hsu 1978, 53)–, algunos de estos símbolos se acompañaron de algún tipo de información, como distancia de un asentamiento a otro lugar, número de casas y si estas estaban habitadas o no, etc. (Img. 6.15).

El uso de estos mapas se conecta directamente con el desarrollo de campos protocientíficos como la cartografía y geografía, áreas que estaban íntimamente relacionadas con el uso de figuras y símbolos para hacer representaciones abstractas del territorio y sus características. De hecho, algunos autores vinculan el desarrollo de estos mapas con otros desarrollos técnicos, como el uso del procedimiento *gou gu* –que veremos en el capítulo 7– o el uso del gnomon (cf. Hsu 1978).

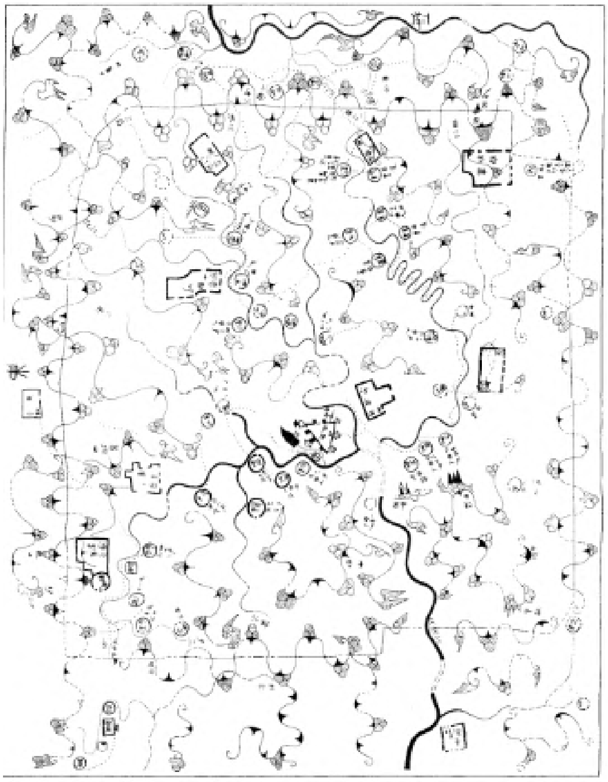


Imagen 6.15 Mapa militar hallado en la tumba nº 3 de Mawangdui, tomado de (Hsu 1978).

En último lugar, en relación con las herramientas usadas para las mediciones, algunas de estas se hallaron en las mismas tumbas en las que encontraron los libros de días, como en la tumba nº 168 de Fenghuangshan, en cuyo inventario figuraba una "cesta para cálculos", la cual contenía monedas, 30 varillas para contar y una escala de pesos de bronce (cf. Thote 2017). En otras tumbas se han encontrado bolas o discos de hierro o bronce atados a cuerdas que servirían de pesos o reglas de pie con marcas para la división de pulgadas y subdivisiones en décimas (cf. Loewe 2016, 185-216).[76] En algunos de estos instrumentos se incluyeron inscripciones, ya fueran sobre la capacidad o unidad de medición que encarnaban, decretos para la estandarización de las unidades de medición, etc.

De entre estos objetos, uno de los más famosos es el *Jialiang* (Img. 6.16), el cual poseía cinco cámaras que coincidían con las mediciones estándares determinadas por Wang Mang (Loewe 2016, 145–146). Posee varias inscripciones, y en una de ellas se habla de cómo Wang Mang llevó a cabo la estandarización de estas unidades de medición de acuerdo a la tradición antigua (cf. Loewe 2016, 217–236).

[76] En algunas inscripciones se nombra a las personas involucradas en su elaboración, como artesanos o supervisores (cf. Loewe 2016, 188–189).

Imagen 6.16 *Jialiang* en el Museo Nacional del Palacio de Taipei, imagen del usuario Jason22 en Wikipedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Xinmang_jialiang.JPG, consultada el 7/08/2021.

3.3 Emergencia y evolución de las (proto)matemáticas en China

En esta sección vamos a presentar en primer lugar una caracterización general del conocimiento (proto)matemático en esta civilización. En segundo lugar, expondremos cómo se desarrollaron las matemáticas en dos tipos de fuentes: por un lado, en los manuscritos hallados recientemente en contextos arqueológicos; por otro, en algunos de los textos matemáticos clásicos que nos han llegado hasta nuestros días, centrándonos principalmente en los comentarios de Liu Hui a los *Nueve capítulos sobre los procedimientos matemáticos –Nueve capítulos–*.

3.3.1 Una caracterización general del campo de las matemáticas en China

Son pocos los datos arqueológicos o textuales que nos informen de cómo el conocimiento matemático era considerado socialmente en este período, o del contexto general en el que se desarrolló o enseñó. Por ejemplo, en ninguna fuente se menciona a autores que desarrollaran algún método matemático ni que se dedicara exclusivamente al campo de las matemáticas. Por otro lado, en el capítulo 30 del *Libro de Han* se clasificaron todos los libros de la colección imperial por temas, y no existe ningún apartado dedicado exclusivamente a las ʽmatemáticas' (cf. Cullen 2009; Volkov 2018a).

Lo que sí poseemos en algunas historias estándares son breves menciones sobre la importancia de saber leer y hacer cálculos para ser un buen gobernador. Esto no es de extrañar, ya que como hemos mostrado a lo largo de este capítulo algunos gobernadores regionales y del gobierno central estuvieron involucrados en tareas como la construcción, cobro de impuestos, desarrollo de estadísticas en relación con la población y recursos, medición de diversos bienes, etc. Por otro lado, una parte de los puestos del gobierno estuvieron ocupados por gobernadores u oficiales dedicados a temas relacionados con la astronomía, astrología, música, etc. Por lo que podemos ver que era necesario para este cuerpo de funcionarios gubernamentales poseer conocimiento, al menos desarrollado a un nivel práctico, de matemáticas básicas (Cullen 2009; Dauben 2013; 2014).

De hecho, Dauben (2013) afirma que sería extraño hablar de estos funcionarios como ʻmatemáticosʼ tal y como los concebimos hoy día, ya que su prestigio social y fuentes de ingresos provenían precisamente de la aplicación de este tipo de conocimiento a otras tareas, tales como la elaboración de calendarios, supervisión de trabajos públicos, etc. Esta vertiente práctica no cambiará hasta el período de los Tres Reinos, cuando el confucionismo pierde su lugar prominente en la educación imperial y otras escuelas y textos filosóficos de la antigüedad vuelven a ser enseñados y estudiados cuidadosamente, tales como el mohismo o el taoísmo. Es en este contexto cultural en el que, por ejemplo, Liu Hui desarrolla sus comentarios a los *Nueve capítulos*, en los cuales vemos que hay un interés por el desarrollo de mejores explicaciones y métodos matemáticos (Dauben 2013).[77]

Por mostrar algunos ejemplos, Zou (2007) ha analizado algunas tiras y escritos hallados en la tumba nº11 de Shuihudi (dinastía Qin), en las que se tratan temas de interés burocrático como el reparto de comida de acuerdo al estatus social –había que repartirlo de manera proporcional–, la planificación de la construcción de murallas o ciudades teniendo en cuenta la cantidad de trabajadores y tiempo necesario –teniendo que calcular el volumen de los edificios o la distancia entre la localización del edificio y zona de escombros–, etc. Este tipo de cuestiones pudieron ser tratadas, señala este autor, de manera tosca y práctica en estos contextos burocráticos, pero es posible que sirvieran como el germen para el posterior desarrollo de métodos matemáticos.[78] Bajo nuestro punto de vista este tipo de habilidades y conocimiento por parte de los funcionarios, al menos en estos períodos, pertenecen al segundo nivel de conocimiento protomatemático.

[77] Ver la traducción y comentarios de Chemla y Guo (2004) a los *Nueve capítulos*, en la que comentan todas las posibles influencias y citas de obras filosóficas que podemos encontrar en los comentarios de Liu Hui, quién usó fuentes como el *El libro de los Cambios*, conceptos mohistas, taoístas, etc.

[78] Zou (2007) muestra que en estas tumbas se han encontrado estatutos en los que se establecían castigos si las previsiones acerca de la construcción fallaban por más de dos días de diferencia con la estimación, castigo el cual pudo influenciar en la búsqueda de métodos matemáticos más eficaces.

Por otro lado, en relación con la conexión íntima que existió entre matemáticas y astronomía no vamos a decir mucho puesto que es un tema muy amplio cuya exposición excedería los límites de este trabajo. Para ilustrarlo al menos, podemos ver la conversación entre Chen Zi y su discípulo Rong Fang en la sección #B del *Zhou Bi*, en la que podemos ver la relación que existía entre estas dos áreas,

> #B1 Hace mucho tiempo, Rong Fang preguntó a Chen Zi ʽMaestro, he escuchado recientemente algo acerca de su Vía. ¿Es realmente cierto que su Vía es capaz de comprender la altura y tamaño del sol, el [área] iluminada por su resplandor, la cantidad de su movimiento diario, las cifras de sus distancias mayores y menores, la extensión de la visión humana, los límites de los cuatro polos, las casas en las cuales las estrellas están ordenadas, y la longitud y anchura del cielo y la tierra?’
> #B2 ʽEs verdad’ dijo Chen Zi.
> #B3 Rong Fang preguntó ʽaunque no soy inteligente, Maestro, me gustaría que me favoreciera con una explicación. ¿Se le puede enseñar esta Vía a alguien como yo? ’
> #B4 Chen Zi respondió ʽSí. Todas estas cosas pueden ser alcanzadas mediante las matemáticas. Tu habilidad en matemáticas es suficiente para entender estos asuntos si los reflexionas con sinceridad’ (traducción de Cullen 1996, 176–177)

En cuanto a la educación matemática, algunos investigadores creen que sobre el 300 a.e.c. ya pudieron existir escuelas matemáticas privadas, aunque no hay indicios claros de las mismas hasta la unificación imperial, sobre todo a partir de la dinastía Han (cf. Lee 2000; Volkov 2014; 2018a). Igualmente, existen muy pocas referencias acerca de cómo era esta educación matemática. Una de ellas es la que mencionamos anteriormente en relación con los *Ritos de Zhou* y las seis artes, donde se incluía a las matemáticas, hablando en algunos casos de *jiu shu*, que podemos traducir como “nueve [tipos de operaciones] con números” o “nueve números” o “nueve procedimientos numéricos” (Li & Du 1987, 19–24; Volkov 2014). Por otro lado, en el *Libro de los Ritos* se afirma: “enseña al de seis años números y direcciones, . . . al de nueve cómo trabajar los días y fechas. El de diez estudia con un maestro y vive alejado de casa aprendiendo historia, escritura y matemáticas” (Li & Du 1987, 22).

A continuación, vamos a hablar de dos herramientas cruciales para el desarrollo de este tipo de conocimiento y su puesta en práctica, que son las unidades de medición y las varillas para contar.

No vamos a hacer una presentación de todas las unidades de medición, pero queremos mencionar que algunas de estas tuvieron una caracterización decimal –como las de capacidad y longitud–, y otras tuvieron una caracterización más heterogénea –como las unidades usadas para los pesos–.[79]

Por ejemplo, las unidades de **medición de longitud**, tal y como aparecen en el *Libro de Han*, son las siguientes,

10 *fen* 分= 1 *cun* 寸; 10 *cun* 寸= 1 *chi**尺; 10 *chi* 尺= 1 *zhang* 丈; 10 *zhang* 丈= 1 *yin* 引
*1 *chi* equivaldría a 23.1 cm, aunque varió de un período a otro su longitud estándar

Además, en los textos matemáticos analizados por Chemla y Ma (2020) y Peng (2020) aparecen otras unidades más pequeñas, tales como li 釐 (10 *li* = 1 *fen*), y hao 毫 (10 *hao* = 1 *li*). Por otro lado, en las tablas del capítulo 1 del *Sun Zi* –siglos III-V e.c. – se añadieron dos longitudes más, el *si* 絲 (10 *si* = 1 *hao*), y el *hu* 忽 (10 *hu* = 1 *si*). De esta primera unidad dice el autor de esta obra que se correspondía con el diámetro de un hilo de seda (Lam & Ang 2004, 113–115; 191). Las unidades menores que el *cun* eran demasiado pequeñas como para que tuvieran algún valor práctico, y se elaboraron con seguridad para poder expresar la parte decimal del *cun* (Lam & Ang 2004, 115). Estas unidades se usaron para medir, principalmente, longitudes de extensiones verticales como alturas, profundidades y "triángulos rectángulos" –puesto que esta forma geométrica surgió, seguramente, en relación con la sombra del gnomon– (Chemla & Ma 2020, 254–257).

También se desarrollaron unidades de medición de longitudes que no tuvieron un desarrollo decimal, relacionadas principalmente con la **medición de áreas de superficies planas horizontales**, tales como,

bu 步 (1 *bu* = 6 *chi*; 300 *bu* = 1 *li*; 240 *bu* = 1 *mu*); *mu* 畝 (100 *mu* = 1 *qing* 頃) y *li* 里 (1 *li* = 175 *mu* o 1 *mu* 75 *qing*).

En cuanto a un sistema no decimal, tendríamos por ejemplo el **sistema para medir pesos**,

[79] Consultar Loewe (2016) Chemla y Ma (2020), y sobre todo el Anexo 2 "Convenciones para números, valores de medición y unidades de medición en los Textos Chinos – Proyecto *SAW*–" de Michel & Chemla 2020 (539–543). Todas las unidades presentadas en este capítulo, excepto que indiquemos lo contario, la hemos tomado de este anexo.

24 *zhu* 銖 = 1 *liang* 兩; 16 *liang* = 1 *jin* 斤; 30 *jin* = 1 *jun* 鈞; 4 *jun* = 1 *dan* 石

Por último, no había una unidad determinada para medir volúmenes, sino que se usaban las establecidas para la longitud, a la que se añadía el término *ji* que hacía referencia al número–producto –este mismo fenómeno ocurría con la medición de áreas explicada anteriormente, donde se habla de "240 *bu* del número–producto/área". Se hace referencia así al hecho de que esta unidad se relacionaba expresamente con la forma geométrica en la que se medía el volumen. Este fenómeno puede verse reflejado tanto en las propias vasijas de medición –como las elaboradas por Shang Yang o Wang Mang–, como en los manuscritos y textos matemáticos clásicos (cf. Chemla & Ma 2020). Por lo que esta se considera una unidad de medición teórica, ya que no puede ser directamente medida, sino que tenía que ser computada, señalando Chemla y Ma (2020) que "podemos ver *cómo* el volumen se determinó a través de la computación, y no a través de la medición directa. El entrelazamiento de la geometría y la computación era esencial para la práctica de medición de grano" (p. 254, énfasis en el original).

Por otro lado, como mencionamos anteriormente, algunos autores hablaban del posible origen de los números en el contexto de la adivinación, sobre todo en relación con el uso de varillas para la construcción de hexagramas tal y como se establece en el *Libro de los Cambios*.[80] En el contexto de las matemáticas estos instrumentos se denominaron tiras de bambú (*ce* 策), fichas de bambú (*chou* 籌) o un término que, como veremos, aparece en algunos títulos de las obras matemáticas de esta civilización, que es el de varillas para contar (*suan* 算/筭), pudiendo todos referirse al mismo instrumento.

Se cree que estas varillas se portaban atadas entre sí, formando con 271 piezas un conjunto hexagonal, y cuando fuera necesario hacer un cálculo se usaban las mismas sobre una superficie plana como una mesa, una estera o una tela –este último caso

[80] Una referencia temprana de estas aparece en el *Lao zi*, donde se afirmaba que aquéllos que sabían calcular no necesitaban hacer uso de estas varillas para contar (cf. Li & Du 1987, 6–8). Por otro lado, Volkov (2018b) señala que "uno no puede decidir si las varillas mencionadas en los textos más antiguos o encontradas durante excavaciones arqueológicas fueron usadas para computaciones matemáticas, conteos uno–a–uno, adivinación, o prácticas mágicas o rituales" (p. 148).

mencionado por Liu Hui[81]–; y una vez realizado el cálculo se anotaba el resultado. Con estas varillas se podían representar números enteros, fracciones, números negativos[82], así como diversas operaciones como suma, multiplicación, división, extracción de raíces cuadradas, etc. (Img. 6.17) (Li & Du 1987, 8–19; Martzloff 1997, 179–211; Lam & Ang 2004, 4–91; Volkov 2018b).[83]

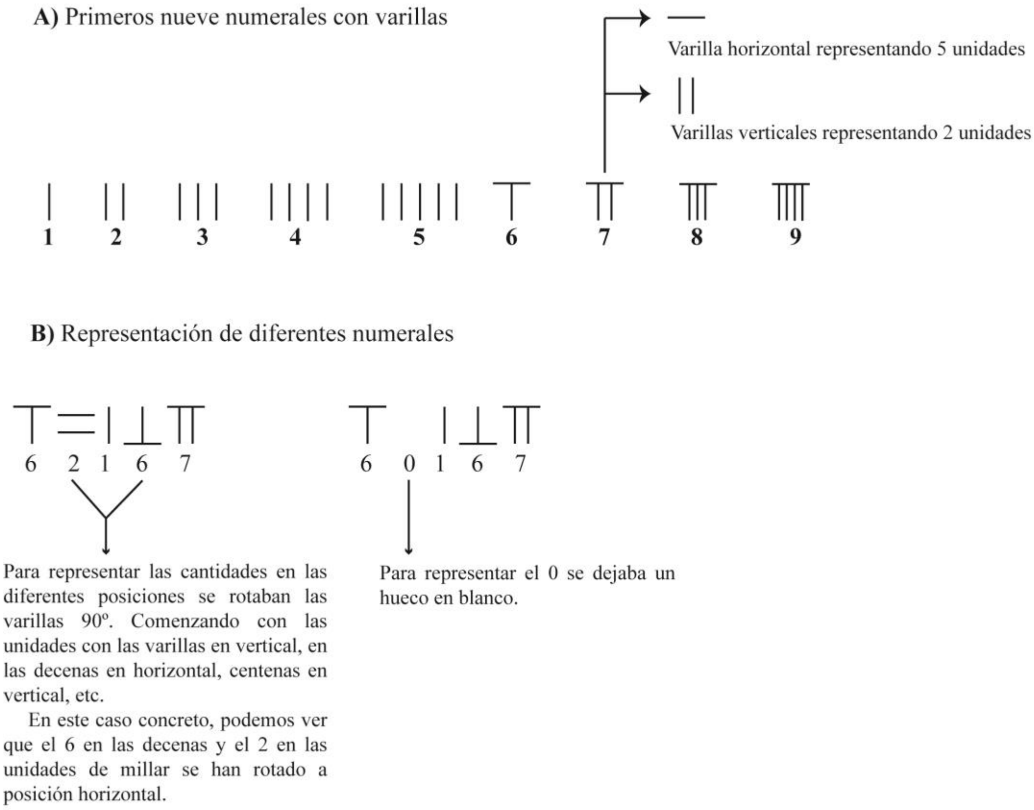


Imagen 6.17 Uso de las varillas para contar para representar números (cf. Lam & Ang 2004, 1–3).

Este instrumento fue uno de los más importantes en relación con el desarrollo de las matemáticas de períodos posteriores, ya que a partir de su uso se inventó o desarrolló en esta civilización la notación decimal con valor posicional, en la que todo número podía

[81] En el manuscrito *Suan shu* (Chemla & Ma 2011) y los *Nueve capítulos* (Chemla & Guo 2004, 15–20) se usa la prescripción “poner” (*zhi*) los números sobre la superficie de cálculo. Es probable que estas varillas y un sistema decimal se usaran al menos desde el siglo III a.e.c.

[82] Liu Hui dice que para representar números positivos se pudieron usar varillas negras, vinculadas con el sur y el *Yang*, y varillas rojas para representar números negativos, vinculadas con el norte y el *Yin*. Por otro lado, el uso de las varillas en posición horizontal se dice que representaban las ramas terrenales, y las que estaban en posición vertical los troncos celestiales (cf. Volkov 2018b).

[83] En el apéndice 6 hemos representado cómo se llevaban a cabo algunas de estas operaciones.

representarse con un máximo de cinco varillas, y dejando un hueco vacío para el cero (*kong*, traducido como vacío) (Lam & Ang 2004, 48–50). El uso de estas varillas permitió el desarrollo de los procedimientos matemáticos de manera sencilla y eficiente, así como de notaciones para otras cuestiones matemáticas, como para las fracciones, relacionada esta con la manera en la que el numerador (*zi*) acababa encima del denominador (*mu*) al realizar una división (Lam & Ang 2004, 79–81). De ahí que estas autoras afirmen que "escribir acerca de los métodos matemáticos que resultaron del uso del sistema numeral con varillas es de hecho emprender la enorme tarea de escribir la mayor parte de la historia de las matemáticas tradicionales en China" (Lam & Ang 2004, 160).

3.3.2 Evolución del conocimiento (proto)geométrico desde los manuscritos hasta el desarrollo de los textos matemáticos

En primer lugar, vamos a presentar algunos manuscritos que se han hallado en contextos arqueológicos, específicamente en tumbas, y que están revolucionando el campo de la historia de las matemáticas chinas (cf. Chemla & Ma 2011):

- *Suan Shu* (算術), traducido como *Procedimientos matemáticos*, hallado en la tumba M77 de Shuihudi y copiado a comienzos de la dinastía Han Occidental, antes del 157 a.e.c. De este libro se tiene poca información todavía.

- *Shu* (數), traducido como *Matemáticas*, [*Procedimientos*] *Numéricos* o [*Libro sobre*] *Números*, perteneciente a la dinastía Qin. Algunos investigadores creen que esta obra pudo ser un prototipo de los *Nueve capítulos* (cf. Chemla & Ma 2011, 160).

- *Suan shu shu* (筭數書), traducido como *Libro sobre procedimientos matemáticos* (Chemla & Guo 2004), *Libro sobre números y computaciones* (Dauben 2008) o *Escritos sobre cálculos* (Cullen 2004)[84], perteneciente al período Han Occidental, 186 a.e.c.

[84] Ver los apéndices donde se discute el título de esta obra en Cullen (2007, 41–42) y Dauben (2008, 167–169). En este trabajo vamos a referirnos a él como *Libro sobre procedimientos*.

Estos manuscritos se escribieron en tiras de bambú que se ataban entre sí con una cuerda, apareciendo el título en el reverso de una de las tiras, el cual pudo ser su título o una etiqueta usada para describir su contenido general –interpretación principalmente de Cullen (2004; 2007)–. En las tumbas en las que se hallaron se encontraron también otros manuscritos, relacionados con las distintas labores de los ocupantes de estas tumbas, que seguramente fueron gobernadores regionales. Por ejemplo, se encontraron textos sobre estatutos y leyes o regulaciones administrativas (cf. Morgan & Chemla 2018).

En primer lugar y muy brevemente, el manuscrito *Shu* se compone de 231 tiras, con 73 problemas y 60 métodos. Sus problemas han sido ordenados de acuerdo a 10 categorías, entre las que podemos destacar: 1) problemas sobre producción de campos de arroz y cálculo de impuestos; 2) problemas sobre calcular el área de la tierra agrícola; 6) problemas sobre anchos pequeños –ver capítulo 4 de los *Nueve capítulos* a continuación–; 7) problemas sobre calcular volúmenes; 8) un problema sobre *gou gu* –"triángulos rectángulos"–; 10) estándares de medición (Dauben 2014, 29).

De este manuscrito vamos a presentar únicamente el problema de las tiras [0304] y [0457], que dice así:

> Supongamos que hay una [pieza de] madera circular enterrada en el suelo, cuyo tamaño es desconocido, pero cortándola a una profundidad de 1 *cun* da una cuerda de 1 *chi*; se pregunta, ¿cómo de grande es la circunferencia de la [pieza circular de] madera? Dice: la mitad de la cuerda es 5 *cun*, multiplícala por sí misma y usa la profundidad de 1 *cun* como el divisor, dividiéndolo da el resultado en *cun*, añádelo de nuevo a la profundidad [del corte] da el diámetro de la madera (traducción de Dauben 2014, 29)

Este es el único problema que Dauben (2014) categoriza como "problema sobre *gou gu*". Si lo leemos, nada nos muestra por qué, pero si analizamos el problema 9.9 de los *Nueve capítulos* vemos que es prácticamente idéntico, y este se resuelve explícitamente aplicando el procedimiento *gou gu* (Dauben 2014, 29–30; Chemla & Zou 2018, 99–100).[85]

[85] En los *Nueve capítulos* la situación es la de un tronco de madera de sección circular y dimensiones desconocidas incrustado en un muro. Si lo serramos a 1 *cun* de profundidad, la sierra recorre 1 *chi* –mismos datos–, y se pregunta: ¿cuánto valdrá el diámetro? Liu Hui comenta que él toma el trayecto de la sierra como base (*gou*), el diámetro como hipotenusa (*xian*), y la profundidad de la sierra como la mitad de la

En segundo lugar, el *Libro sobre procedimientos* está escrito en 190 tiras de bambú, compuesto por unas 69 secciones independientes según Cullen (2004; 2007), de las cuales 16 tienen contenido relacionado con figuras geométricas. Este manuscrito parece ser una colección de resultados de diversas fuentes y autores, no muy sistematizado y con un lenguaje técnico poco avanzado (Cullen 2004, 9–15; Dauben 2008, 94).[86] Se cree que perteneció a un gobernador local, en cuya tumba se hallaron otros 7 manuscritos –sobre leyes, calendarios, medicina, deportes, etc.– (cf. Morgan & Chemla 2018, 154). Se usó presumiblemente como guía para burócratas, con sus resultados y procedimientos estrechamente relacionados con cuestiones prácticas, aunque algunos de sus resultados eran generales y en ciertos procedimientos se puede ver un interés por la propia estructura matemática del procedimiento.[87]

Para hacer una presentación general de esta obra, vamos a seguir la división en 14 grupos[88] de Cullen (2004), de los cuales 3 tienen como tema principal cuestiones geométricas:

- **Grupo 12 Formas y Volúmenes**: cálculo de los volúmenes de varias formas tridimensionales, como rampas para túneles, muros, conos, conos truncados o cilindros. Su contenido es, en cierta manera, paralelo al del capítulo 5 de los *Nueve capítulos* (Cullen 2004, 89–102; Dauben 2008, 153–159);

- **Grupo 13 Círculo y Cuadrado**: cálculos sobre la relación entre círculo y cuadrado. Este contenido no aparece en los *Nueve capítulos*, sí en cierta manera

diferencia entre altura e hipotenusa (Chemla & Guo 2004, 715). Ver los comentarios y representación geométrica de este problema en (Chemla & Guo 2004, 882–883).

[86] Por ejemplo, se usó una variedad de términos para hablar de fracciones, o se proponen dos fórmulas para hallar el volumen de un cono cada una presentada con un lenguaje diferente, lo que podría poner de manifiesto que fueron escritas por personas diferentes (Cullen 2007; Dauben 2008, 103–104). Además, hay una variedad de formas de referirse a la operación de la división, que no hacen referencia a un procedimiento específico, sino a una concepción general de la misma (Chemla *en preparación*).

[87] Ante esta situación señala Cullen (2004) que "la pregunta intrigante y no contestada que se presenta entonces es quién podría haber sido la audiencia para ese virtuosismo matemático, qué criterios utilizó la audiencia para decidir qué contaba como buenas matemáticas, y qué recompensas tenía el tener una buena reputación para la habilidad matemática más allá de la llamada del deber oficial" (p. 13).

[88] Por dar una idea general del resto, podemos mencionar el Grupo 1, Operaciones Elementales, 5, Cambio en Impuestos, 9, Conversión de granos u 11, Regla de la falsa posición (Cullen 2004, 3–7; 2007).

en el *Zhou bi*. Se toma 7/5 como aproximación a $\sqrt{2}$, y 3 como valor de π (Cullen 2004, 103–105; Dauben 2008, 160–161);

- **Grupo 14 Lados y áreas con números mixtos**: cálculos en relación con los lados o áreas de rectángulos mediante la división y no por medio de raíces cuadradas, conversión de las unidades de área. Contenido relacionado con el capítulo 1 y 4 de los *Nueve capítulos* (Cullen 2004, 105–111; Dauben 2008, 161–167).

Como resumen general, tenemos que decir que en esta obra hay poca variedad de figuras geométricas planas de las que se calcula el área, sobre todo círculos y cuadrados, a diferencia de otros manuscritos como *Shu* u obras posteriores como los *Nueve capítulos*; por otro lado, tampoco existe un procedimiento general para la extracción de raíces cuadradas, cúbicas, cálculo del volumen de la esfera, etc. (cf. Cullen 2004; 2007; Dauben 2008). [89] Esta obra puede ser considerada como una obra de transición entre el conocimiento protogeométrico y geométrico, ya que sus resultados siguen siendo aproximados, y no están incorporados en un cuerpo sofisticado de resultados y conocimiento; sin embargo, tal y como hemos visto anteriormente, es cierto que en algunos de sus resultados y problemas se pueden ver los comienzos del interés, todavía tímidos, por las cuestiones teóricas y propiamente matemáticas de estos procedimientos.

A continuación, vamos a presentar dos de los textos clásicos de las matemáticas chinas. En primer lugar, no vamos a tratar en detalle el *Zhou bi suanjing* –traducido como *El canon del gnomon de la dinastía Zhou* (Cullen 1996)–, ya que las matemáticas de esta obra están mejor ejemplificadas y presentadas de manera más sistemática en los *Nueve capítulos*, en la que están todos los procedimientos del *Zhou bi* excepto el denominado "principio de la sombra" (Cullen 1996, 74). Escrito en parte en prosa –como vimos anteriormente con la conversación entre Cheng Zi y Shan Gao–, y en parte técnica. En esta obra se exponía la teoría cosmográfica *gaitian*, definida como aquella en la cual "un cielo como un paraguas rota en un eje vertical sobre una tierra esencialmente plana" (Cullen 1996, xi). Se puede ver en la sección #A6[22p] del *Zhou bi*, que dice "el cuadrado

[89] Tres nombres de problemas individuales de este manuscrito –*fang tian*, *su mi*, y *shao guang*– son los nombres de los capítulos 1, 2 y 4 de los *Nueve capítulos*, respectivamente (cf. Dauben 2008).

pertenece a la tierra, y el círculo pertenece al cielo. El cielo es un círculo, y la tierra es un cuadrado" (Cullen 1996, 174).[90]

Esta obra se componía de textos escritos entre los siglos I a.e.c. al I e.c; además, lo escribieron distintos autores con distintos propósitos, y algunas partes del texto no están conectadas con las demás, como la sección #C, donde se trata brevemente sobre las relaciones entre círculo y cuadrado (Cullen 1996, 181–182; Cullen 2007).

Es posible que en esta obra apareciera por primera vez el procedimiento *gou gu* –análogo al teorema de Pitágoras[91]– de manera explícita. Este aparece en la sección #A, a la cual añadirá Zhao Shuang en el siglo III e.c. el "diagrama de la hipotenusa" (Img 6.18), con el que va a explicar por qué este procedimiento es correcto, y hacerlo entendible a los lectores. [92] Dice,

> de acuerdo con el diagrama de la hipotenusa, debes multiplicar la base y altura juntos para hacer dos de las áreas rojas. Dóblalo para hacer cuatro de las áreas rojas. Multiplica la diferencia de la base y la altura por sí misma para hacer el área central amarilla. Si se añade [tal] diferencia [a las cuatro áreas rojas], se completa el área de la hipotenusa (traducción de Cullen 1996, 208)

En segundo lugar, vamos a presentar los *Nueve capítulos sobre procedimientos matemáticos*[93]. Existen diversas propuestas acerca de su fecha de composición, algunas

---

[90] En estos períodos existieron tres escuelas principales que discutieron estas cuestiones cosmológicas o cosmográficas, tales como la *gaitian* ejemplificada en el *Zhou bi*, la *huntian* o esfera celestial, y la *xuan ye*, que sostenía que el cielo era ilimitado. La teoría *huntian* acabó reemplazando a la *gaitian*, ya que esta última no podía explicar los movimientos del sol, la luna y las estrellas (Fengxian 2018).

[91] Cullen (1996, 77–80) señala que en la matemática china nunca se usa el término 'triángulo', sino que se habla sobre las relaciones entre un "gancho horizontal" –lado pequeño, *gou*–, una "pierna" –lado largo, *gu*–, y uniendo sus finales una "cuerda de arco" –hipotenusa, *xian*–. Tampoco se usa el concepto de ángulo (Cullen 1996, 92). Por otro lado, el historiador de las matemáticas Qian Baocong señala que "[los chinos de la antigüedad] no sabían cómo usar ángulos. . . pero podrían haber tenido una noción general de ellos" (Lih 1991 *apud* Volkov 2007, 425).

[92] Se cree que las obras originales no contenían diagramas –*tu*–, sino que fueron añadidos por los comentaristas. Según Chemla (2010) "son usados para hacer explícito el "significado *yi* 意" de operaciones" (p. 314, nota 21). Hablaremos algo más de los diagramas y sus características en el próximo capítulo.

[93] Otras traducciones al título de esta obra son *Procedimientos matemáticos bajo nueve títulos* (Cullen 2004), *Procedimientos computacionales en nueve categorías* (Volkov 2007), o *Nueve capítulos sobre el arte de las matemáticas* (Dauben 2013).

de ellas de carácter más bien mitológico. La hipótesis más probable es que se compusiera durante el interregno de Wang Mang, ya que este emprador restauró los ritos de Zhou, los cuales se conectan con la composición en 9 capítulos de esta obra (cf. Dauben 2013, 206-211; Chemla & Zou 2018, 98); por otro lado, este emperador introdujo el cambio de la unidad de medición *dan* por la *hu* –que aparece en la vasija de medición presentada anteriormente, ver imagen 6.16–, que es la usada en los *Nueve capítulos*.[94]

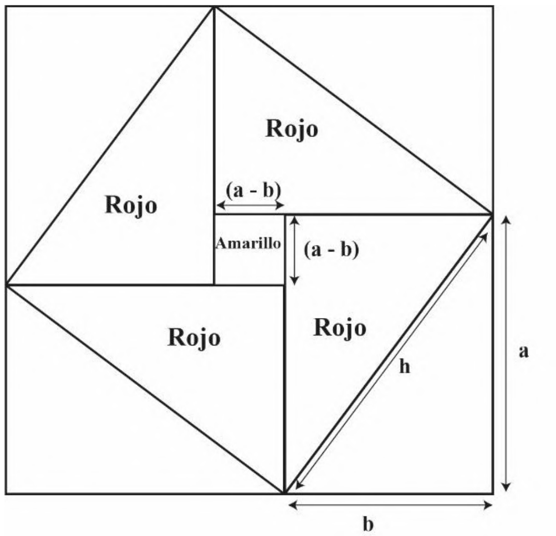


Imagen 6.18 Reconstrucción del diagrama *xian* presentada por Cullen (1996, 209).

Esta obra contiene 246 problemas tratados en 9 capítulos[95], los cuales siguen, generalmente, una misma estructura, que es la de presentar primero el problema, se da la solución a continuación, y por último se expone el procedimiento[96] para llegar a esa solución. Vamos a presentar una visión general de los capítulos en los que se trata de manera directa cuestiones en relación con figuras geométricas.

---

[94] Las ediciones más antiguas de las que se dispone de esta obra y sus comentarios son del siglo XIII y XV (Chemla & Guo 2004, 71–79; Dauben 2013).

[95] El nombre del capítulo generalmente coincide con el nombre de la primera operación que aparece en el capítulo, exceptuando el caso del capítulo 2, que coincide con el nombre de la tabla que se adjunta al comienzo de la misma, y el capítulo 5, cuyo título parece hablar más bien del tema general de todo el capítulo (cf. Chemla & Zou 2018).

[96] Chemla y Guo (2004, 21–26) señalan que usan indistintamente 'procedimiento' y 'algoritmo' entendiéndose ambos como "listas de operaciones" (Chemla & Guo 2004, 21).

- **Capítulo 1**: Campos rectangulares (*fang tian* 方田). Con el subtítulo "para tratar los territorios de tierras cultivadas"

En este capítulo se calcula el área[97] de diversas figuras planas, las cuales se dividen en dos grupos: 1) figuras planas rectilíneas, tales como el campo rectangular (1.1–1.2), triangular (1.25–1.26), oblicuo (1.27–1.28) y trapezoidal (1.29–1.30); y 2) figuras planas con lados curvilíneos, que incluirían el campo circular (1.31–1.32), con forma de bóveda circular (1.33–1.34), segmento circular (1.35–1.36) y con forma de anillo (1.37–1.38) (cf. Chemla &Guo 2004, 131–197).[98]

- **Capítulo 4**: Ancho pequeño (*shaoguang* 少廣). Con el subtítulo "para tratar los números–productos (*ji*) y las áreas (*mi*), del cuadrado y el círculo"

En este capítulo se trata de determinar una dimensión de una figura geométrica, como el lado de un cuadrado o cubo, o la circunferencia de un círculo o esfera, sabiendo su área o volumen. Este es, según Chemla & Guo (2004, 313) uno de los capítulos más homogéneos y abstractos. En este capítulo se aplica lo que conocemos como mínimo común múltiplo (*jifen*) (4.1–4.11), extracción de raíces cuadradas (4.12–4.16), raíces circulares (4.17–4.18), raíces cúbicas (4.19–4.22) y raíces esféricas (4.23–4.24). A diferencia del texto clásico, Liu Hui calcula la parte decimal al extraer las raíces (cf. Chemla & Guo 2004, 313–385).[99]

- **Capítulo 5**: Evaluar los trabajos (*shanggong* 商功). Con el subtítulo "para tratar las reglas concernientes a los trabajos de excavación y los volúmenes (*ji shi*)"

---

[97] Liu Hui no fue el primero en usar el término de área, pero sí en dar una definición de la misma. Esta la presenta tras el procedimiento del campo rectangular, que dice "las cantidades (*shu*) de *bu* de la anchura y la longitud están multiplicadas la una por la otra, obtenemos los *bu* del producto (*ji*)" (Chemla & Guo 2004, 153); y añade Liu Hui, "este producto (*ji*) es llamado el área (*mi*) del campo. Cada vez que el ancho y la longitud son multiplicados el uno por el otro, lo llamamos su área (*mi*)" (Chemla & Guo 2004, 153).

[98] Li y Du (1987, 40–45) presentan un diagrama de todas las figuras geométricas cuya área o volumen es calculado en los *Nueve Capítulos*, presentando un total de 22.

[99] Parte de este capítulo también aparece en el *Libro de los procedimientos*, pero en esta obra se usan términos técnicos para diversas operaciones como "comunicar" o "igualar" (cf. Chemla & Guo 2004, 321–322). Ver el procedimiento de la extracción de raíces cuadradas en el apéndice 6.

En este capítulo se ofrecen 14 fórmulas para calcular el volumen de diversos sólidos (Tabla 6.2). Según Chemla y Guo (2004, 391–394) fue en este contexto en el que se introdujo el método de verificación por bloques estándares –*qi*, ver nota 103–, con tres categorías principales: el cubo, el *qiandu* y el *yangma*, todos con su longitud, anchura y altura iguales a 1 *chi* (Chemla & Guo 2004, 391–407) –ver la figura que presentan en la página 405, donde se muestra cómo todas las figuras tratadas en este capítulo se pueden obtener mediante distintas divisiones o cortes del cubo, lo mostraremos también a continuación–.[100] En este capítulo se usan procedimientos presentados en capítulos anteriores (cf. Chemla & Guo 2004, 387–457).

- **Capítulo 9**: Base (*gou*) y altura (*gu*) (*gougu* 勾股).[101] Con el subtítulo "para tratar lo alto y lo profundo, lo ancho y lo lejano"

Este capítulo se compone de 24 problemas, cinco de los cuales están escritos con terminología abstracta en relación con la base y altura de un "triángulo rectángulo" (9.1–9.3; 9.14–9.15). Por otro lado, el conjunto de problemas se puede dividir en dos categorías generales: 1) aquéllos en los que se usa la relación *gou gu*, que serían los problemas 9.1–9.12, y 9.24; y 2) aquéllos en los que se hace uso del concepto de *lü* en el dominio de "triángulos rectángulos" (9.13–9.23) (cf. Chemla & Guo 2004, 661–745). Además, se incluyen diversas configuraciones geométricas en relación con este procedimiento, entre las que podemos mencionar un rectángulo inscrito en un círculo (9.4), un cuadrado y un círculo inscritos en un "triángulo rectángulo" (9.14–9.15) o triángulos similares y cuadrados (9.16–9.18). Por otro lado, también hará una lectura geométrica del procedimiento de "supongamos"[102].

---

[100] Comenta Liu Hui respecto al problema 5.14 que si cortamos de manera oblicua un cubo obtenemos dos *qiandu*, y respecto a 5.15 afirma que si lo hacemos a un *qiandu* una de las partes hace un *yangma*, y la otra un *bienao* (Chemla & Guo 2004, 429–431).

[101] Particularmente, *gou* se usará para designar el lado más corto, y *gu* el más largo, tal y como señala Liu Hui en su comentario a los problemas 9.1–9.3 (Chemla & Guo 2004, 705).

[102] Este procedimiento es introducido en el capítulo 2, "Mijo pequeño y granos pelados", que sería a grandes rasgos equivalente a la que conocemos como 'regla de tres'. Merece la pena llamar la atención que Liu Hui afirmó acerca de este procedimiento que "este es un procedimiento universal" (Chemla & Guo 2004, 223).

Nombre	Figura geométrica		Nombre	Figura geométrica
Muralla (*cheng*), pared baja (*yuan*), dique (*ti*), fosa (*gou*), foso (*qian)* y canal (*qu*) (5.2–5.7; 5.26)	Todas se corresponderían con un prisma con base trapezoidal		*Bienao* (5.16)	Tetraedro con una longitud menor y mayor, pero no anchura superior
Baodao (5.8)	Cilindro o prisma recto con base cuadrada		*Yanchu* (5.17)	Pentaedro con base trapezoidal con la anchura superior, inferior y extrema diferente
Paralelepípedo rectángulo (5.27)	Proceso inverso al propuesto en el problema 5.8		*Chumeng* (5.18)	Prisma triangular
Fangting (5.10)	Pirámide o cono truncado con base cuadrada		*Chutong*, foso curvo, foso con forma de *pan* y barranco oscuro (5.19–5.22)	*Chuntog* diferenciado del *chumeng* en la anchura superior. Estas cuatro formas son análogas y se resuelven con el mismo procedimiento
Fangzhui (5.12)	Cono con base cuadrada o pirámide		*Yuanqun* (5.9; 5.28)	Se corresponde con un *baodao* de base circular
Qiandu (5.14)	Prisma recto triangular obtenido al cortar un paralelepípedo rectángulo		*Yuanting* (5.11)	Cono truncado con base circular
Yangma (5.15)	Pirámide cuadrangular con un ángulo recto		*Yuanzhui* (5.13; 5.23–5.25)	Cono con base circular. En el 5.24 se trata la mitad de un cono y en el 5.25 un cuarto de cono

Tabla 6.2 Todas las formas geométricas que aparecen en el capítulo 5.

Como ya señalamos anteriormente –ver nota 92–, ni el *Zhou bi* ni los *Nueve capítulos* contenían diagramas, sino que fueron introducidos por los comentaristas con fines pedagógicos y explicativos (Cullen 1996, 171; Chemla & Guo 2004, 127). Pedagógicos porque con ellos se quería hacer el contenido matemático de los procedimientos más sencillo a los lectores, y explicativos porque se quería rellenar el vacío explicativo de las obras originales, en las que tras presentar el procedimiento no se explicaba nada, y a veces era complicado saber las razones de por qué el procedimiento era correcto o su fundamentación matemática. Volkov (2007) habla de 'diagramas conceptuales', ya que "su función principal era la de proveer descripciones de las transformaciones geométricas a realizar para justificar los algoritmos matemáticos" (p. 457).

Estos diagramas son designados como *tu*; sin embargo, Liu Hui introduce un segundo tipo de diagramas, o más bien bloques, que serán los *qi*[103] (cf. Chemla 2010). La diferencia es que los primeros se usaron en geometría plana, y los segundos en geometría del espacio, como hemos mostrado en relación con el capítulo 5. Además, para hablar de las operaciones a realizar con los mismos se usaron expresiones que hacían referencia explícita a su manipulación, como "cortar" las figuras, "unirlas", "romper los rectángulos", "colorear", etc. (Chemla 2010). Este tipo de lenguaje ha llevado a autores como Chemla (2010) a considerar que estos diagramas fueran objetos físicos manipulados por los matemáticos al mismo tiempo que llevaban a cabo los procedimientos; por otro lado, Volkov (2007) cree que pudo ser una práctica común en esta tradición la de publicar libros por separado en los que se incluyeran solo los diagramas.

A continuación, vamos a presentar algunos problemas en relación con los capítulos 1 y 5, para dar una idea general de cómo era esta práctica matemática –los del capítulo 9 los veremos con más detalle en el próximo capítulo–. Vamos a comenzar con los problemas 1.25–1.26, en los que se muestra de qué manera calcular el área de un campo triangular. Tenemos los siguientes datos (Tabla 6.3).

Problema	**Anchura**	**Altura (longitud recta)** [104]	**Solución**
1.25	12 *bu*	21 *bu*	126 *bu*
1.26	5 *bu* 1/2 de *bu*	8 *bu* 2/3 de *bu*	23 *bu* 5/6 de *bu*

Tabla 6.3 Datos y soluciones de los problemas 1.25–1.26.

[103] Según Chemla & Guo (2004), *tu* es definido como "el asistente de razonamiento, instrumento de visualización, para la geometría plana" (Chemla & Guo 2004, p. 999); mientras que *qi* es definido como "el asistente de razonamiento, el instrumento de visualización para la geometría del espacio" (p. 967).

[104] Altura denominada como *zheng zong* (正從); esto es, longitud recta.

El procedimiento dice: "cogemos la mitad del ancho y lo multiplicamos por la altura" (Chemla & Guo 2004, 175). Liu Hui comenta que "si cogemos la mitad del ancho" lo que estamos haciendo es rellenar lo que está vacío con lo que excede o sobra para hacer un campo rectangular. Por otro lado, sigue comentando, también podemos coger la mitad de la altura y multiplicarla por la anchura, con lo que estaríamos tomando su valor medio (Chemla & Guo 2004, 175). Estos comentarios podrían estar haciendo referencia a un diagrama particular (Img. 6.19) con el que Liu Hui mostraría la corrección de este procedimiento, vinculando así la medición del área de terrenos triangulares con la de terrenos rectangulares –siendo la del primero la mitad que la del segundo–.[105]

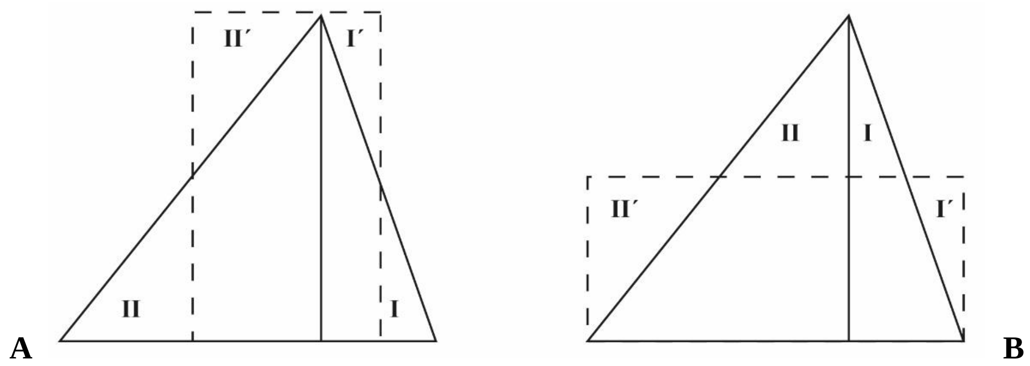


Imagen 6.19 Diagramas a los que puede estar haciendo referencia Liu Hui cuando afirma "rellenar lo que está vacío con lo que excede" (A) y "coger la mitad de la altura y multiplicarla por la anchura para tomar su valor medio" (B). Diagramas propuestos por Chemla y Guo (2004, 768).

Con los siguientes datos (Tabla 6.4), Liu Hui presenta cuatro procedimientos para calcular el área de campos circuales, de los cuales vamos a presentar solo dos ya que los otros dos no volverán a aparecer en el resto de la obra (Lam & Ang 1986; Chemla & Guo 2004, 177-189).

El **primero de los procedimientos** dice: "la mitad de la circunferencia y la mitad del diámetro se multiplican el uno por el otro, obtenemos los *bu* del producto (*ji*)" (Chemla & Guo 2004, 177). Liu Hui comenta que, si inscribimos un hexágono en el círculo, podemos comprobar que el lado del hexágono y el radio del círculo –o mitad-del-diámetro– son iguales (Img. 6.20). Esto se debe, continúa comentando, a que el *lü* de la

[105] Posteriormente también relacionará las áreas del campo trapezoidal con el oblicuo, afirmando que un campo trapezoidal dividido por dos hace dos campos oblicuos, y por eso los procedimientos de ambas formas geométricas son similares (cf. Chemla & Guo 2004, 136–138).

obra original es impreciso, y se corresponde con los valores y relaciones del hexágono más que del círculo –ver nota 106 en (Chemla & Guo 2004, 770-771).–[106]

Problema	Circunferencia	Diámetro	Solución	Solución de Liu Hui
1.31	30 *bu*	10 *bu*	75 *bu*	71 *bu* 103/157 de *bu*
1.32	181 *bu*	60 *bu* 1/3 de *bu*	11 *mu* 90 *bu* 1/12 de *bu*	23 *mu* 70 *bu*

Tabla 6.4 Datos y soluciones de los problemas 1.31–1.32.

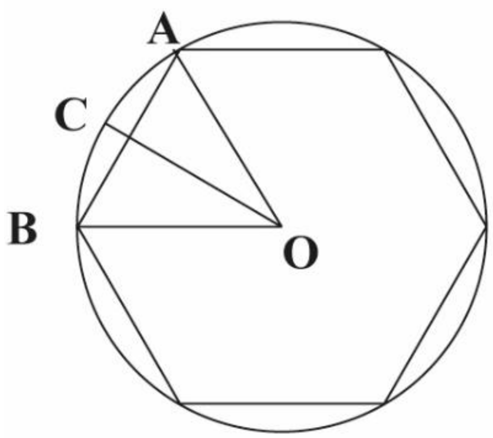


Imagen 6.20 Diagrama en el que se muestra que, si un hexágono está inscrito en un círculo, el lado del hexágono es igual al radio del círculo. Diagrama propuesto por Chemla y Guo (2004, 770).

En primer lugar, para mostrar la corrección de este procedimiento, tenemos que "cortar" el hexágono para formar un dodecágono inscrito en el círculo (Img. 6.21). Este dodecágono se compone de 16 piezas –del I al V y del 1 al 11–, y si movemos sus partes –todas las piezas excepto I y 1– formaríamos un rectángulo cuya altura es el radio del círculo y longitud la mitad de su perímetro. Así, muestra Liu Hui que la fórmula propuesta en el clásico –área del campo como mitad del diámetro, o radio, multiplicada por la mitad de la circunferencia– es correcta (Chemla & Guo 2004, 139).

[106] Como señalan Chemla y Guo en la nota 105 (2004, 770), para explicar este procedimiento, mostrar su corrección, y obtener un *lü* más preciso, Liu Hui no usa los valores que se establecen en el problema. Este sería un ejemplo para estos investigadores de que esta explicación constituye un paradigma, siendo las operaciones usadas aquí interpretadas como válidas en toda su generalidad. Por otro lado, *lü* se ha traducido como "razón" o "proporción" entre la circunferencia y el diámetro (Lam & Ang 1986); aunque Liu Hui señala en relación al uso de este término en 1.18 que "cada vez que se den cantidades en relación unas con otras, se denominan *lü*" (Chemla & Guo 2004, 167).

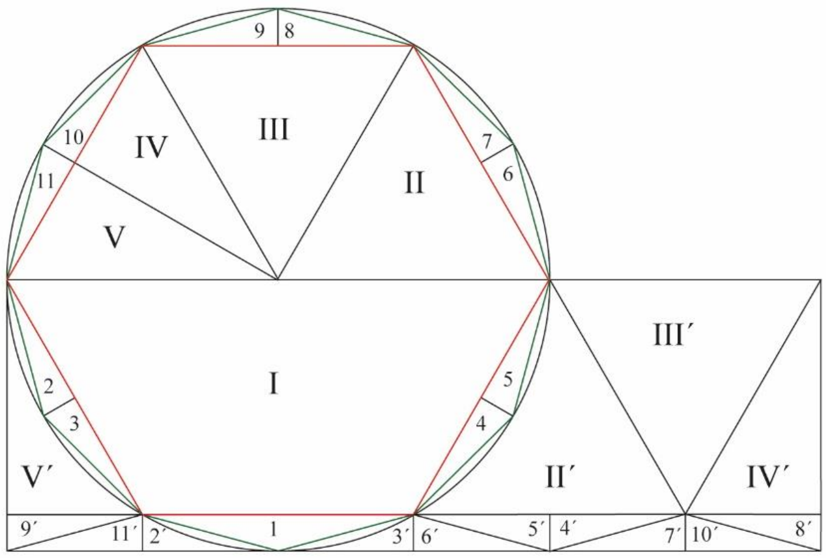


Imagen 6.21 Hexágono (figura roja) que ha sido cortado para formar un dodecágono (figura verde) inscritos en el círculo. Diagrama de Chemla y Guo (2004, 139) al que hemos añadido los colores.

En segundo lugar, para obtener un *lü* más preciso, Liu Hui va a seguir la operación de "cortar" sucesivamente los polígonos inscritos en el círculo –pasando de hexágono a dodecágono, de dodecágono a polígono de 24 lados, etc.–. Esta operación la lleva a cabo porque a medida que vamos cortando el polígono, el área que se pierde entre el círculo y el polígono inscrito es menor, afirmando Liu Hui que llegará un momento en el que estas dos áreas coincidan, y por lo tanto obtengamos un *lü* preciso para el círculo (Img. 6.22). Para calcular este *lü*, podemos dividir este proceso en dos: 1) calcular el lado de los polígonos que vayamos inscribiendo; y 2) calcular su área.

Por un lado, para calcular el lado de los polígonos inscritos en el círculo se hará uso del procedimiento *gou gu*. Si el diámetro del círculo vale 2 *chi*, entonces el lado del hexágono valdría 1 *chi*, igual al radio del círculo. Tomando entonces el radio como hipotenusa y la mitad del lado del hexágono como base –*gou*–, aplicamos el procedimiento *gou gu* para calcular la altura, que la obtendríamos al restar el cuadrado de la base (25 *cun*) al de la hipotenusa (100 *cun*), y le aplicamos la raíz cuadrada, con lo que obtendríamos su altura (Img. 6.23). Entonces, Liu Hui vuelve a aplicar el procedimiento *gou gu*, para lo cual resta al radio OC esta altura recién obtenida, obteniendo el lado del nuevo triángulo (Img 6.24, lado de color verde). Por otro lado, la mitad del lado del hexágono sería la base, y buscamos la hipotenusa, que será precisamente el lado del dodecágono (Img. 6.24). Este procedimiento lo repetirá para polígonos de 24, 48 y 96 lados respectivamente.

Imagen 6.22 Conjunto de diagramas con los que se puede ver de qué manera al ir cortando el polígono inscrito en la circunferencia el área que se pierde entre ambos se reduce.

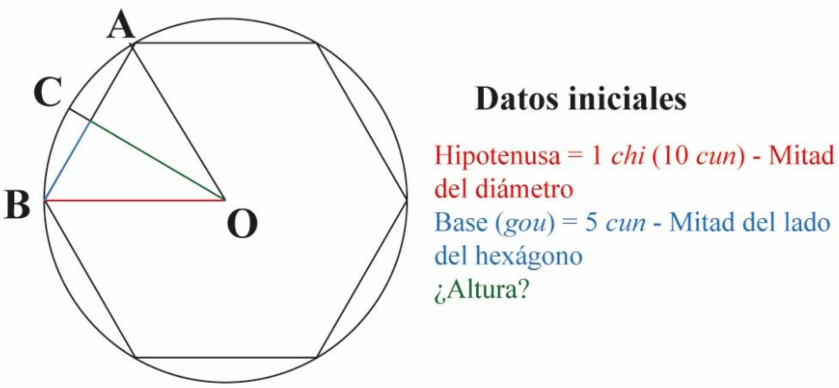


Imagen 6.23 Diagrama ligeramente modificado de Chemla & Guo (2004, 773), en el que vemos cómo se aplica el procedimiento *gou gu* para obtener la altura marcada en verde.

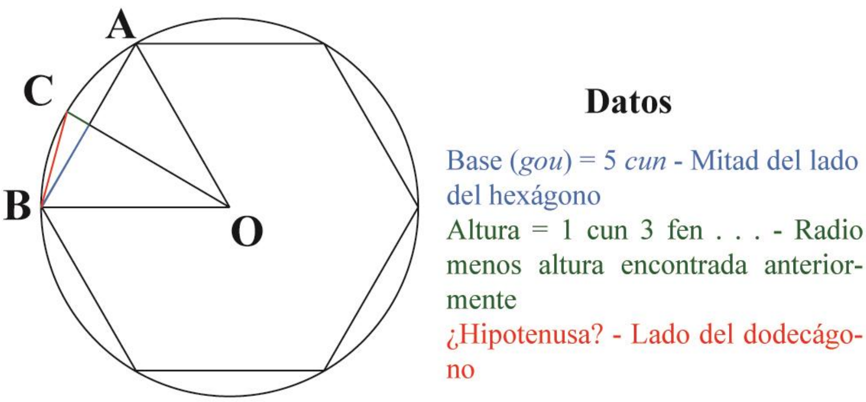


Imagen 6.24 Diagrama ligeramente modificado de Chemla & Guo (2004, 773), en el que vemos cómo se aplica el procedimiento *gou gu* para el lado del dodecágono, marcado en rojo.

Pasamos entonces al segundo paso, calcular las áreas de estos polígonos. Para ello, Liu Hui señala que ha calculado, por ejemplo, el lado de un polígono de 48 lados, este se multiplica por el radio, y posteriormente por 24, lo que nos daría el área del polígono de 96 lados. Hace la misma operación para el polígono de 192 lados. Resta ambas áreas, lo que denomina "área de la diferencia", la dobla, y añade al área que habíamos obtenido del polígono de 96 lados, lo que resultaría en un área que se extendería más allá del círculo. Esta última parte sirve a Liu Hui para decidir quedarse, tras comparar ambas áreas, con la parte entera del área del polígono de 192 lados, 314 *cun*, la cual no desbordaría al círculo, y la toma como *lü* para determinar el área del círculo –ver (Chemla & Guo 2004, 146)–.[107]

Tenemos entonces el área del círculo –314 *cun*–, la cual dividimos por el radio –10 *cun*– y doblamos, lo que nos daría el valor de la circunferencia –6 *chi* 2 *cun* 8 *fen*–. Por otro lado, si cuadramos el diámetro, tendremos un cuadrado cuya área sería de 400 *cun*. Si comparamos ambas áreas, obtendríamos que el *lü* para el círculo es 157 y 200 para el cuadrado. Por lo tanto, si el área de un cuadrado es 200, el área del círculo inscrito valdría 157. Para terminar este proceso, afirma que si sobre la figura de un campo con forma de segmento circular inscribimos un círculo en un cuadrado, y un cuadrado en este círculo (Img.6.25), el área del círculo valdría 157 y la del cuadrado exterior 200 como ya mostramos. Por otro lado, el área del cuadrado interior valdría 100, la mitad del exterior, por lo que si simplificamos estos valores, obtendríamos que el *lü* de la circunferencia es 157 y el del diámetro 50 –esto es, $\pi = 3{,}14$–.[108]

[107] Es decir, Liu Hui ha calculado con esta "área de la diferencia" el área restante que quedaría para que el polígono de 192 lados coincida con el círculo. Posteriormente, dobla esta "área de la diferencia" para obtener un área que desbordaría la circunferencia. Esto le sirve a Liu Hui para decidir qué valor aproximado le sirve como el *lü* más preciso. Particularmente, Chemla y Guo (2004, 145-148) muestran que el área del polígono de 192 lados sería igual a 314 64/625 cun^2, y el área del polígono de 96 lados más el doble del "área de la diferencia" sería igual a 314 169/625 cun^2. Por lo tanto, el valor 314 –que es la parte entera, como podemos observar, de estos dos valores– para el área del círculo es lo suficientemente preciso para los propósitos matemáticos de Liu Hui.

[108] Posteriormente compara sus propios resultados con las medidas que Wang Mang anotó en su vasija *hu*. Cuando hace los cálculos, llega a un *lü* de 1250 para el diámetro y 3927 para la circunferencia ($\pi = 3{,}1416$). Pero dice que por razones prácticas el *lü* presentado anteriormente es más simple y suficiente para sus propósitos. De igual manera, acaba afirmando que, si repetimos el proceso aquí presentado en relación al área de un polígono de 3072 lados, obtendríamos un *lü* igual al que él propone, verificando por lo tanto que

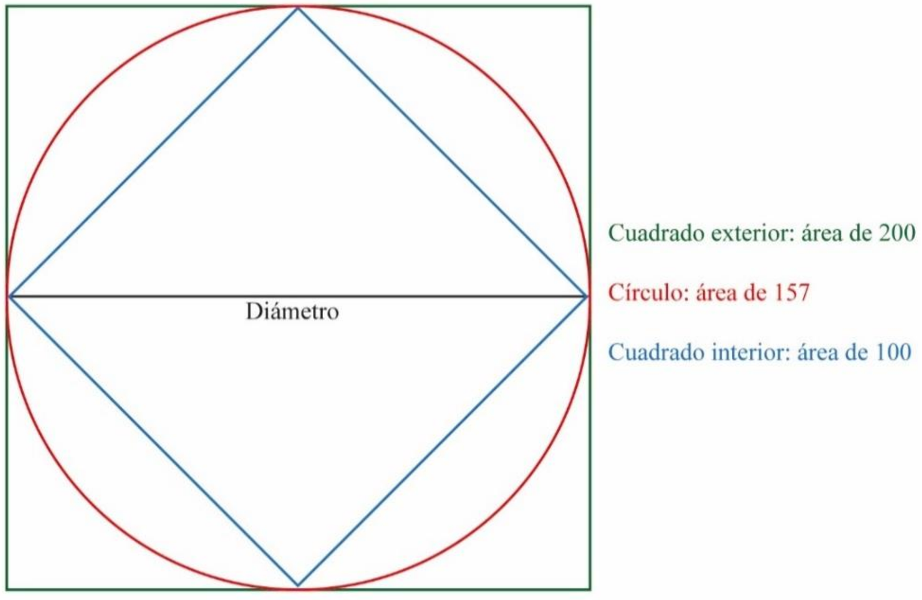


Imagen 6.25 Diagrama ligeramente modificado de Chemla & Guo (2004, 773).

El **segundo procedimiento** dice: "el diámetro y la circunferencia se multiplican el uno por el otro, dividimos por 4." (Chemla & Guo 2004, 187). La explicación a la corrección de este método es corta y sencilla, y es que si multiplicamos diámetro y circunferencia para calcular esta área ambos deberían ser tomados a la mitad, por lo que al multiplicar sus denominadores estos harían 4, y ahí radica la razón de que tengamos que dividir entre cuatro al multiplicar diámetro y circunferencia para hallar su área.

Por otro lado, los problemas I.37-I.38 tratan sobre campos con forma de anillo. Vamos a presentar el primero de ellos, cuyos datos son los siguientes,

Problema	**Circunferencia Interior**	**Circunferencia Exterior**	**Diámetro Transversal**	**Solución**	**Solución de Liu Hui**
I.37	92 *bu*	122 *bu*	5 *bu*	2 *mu* 55 *bu*	2 *mu* 31 *bu* 23/157 *bu*.

Tabla 6.5 Datos y solución del problema I.37

Lo que se nos pide en este problema es que calculemos el área del campo circular o campo con forma de anillo circular, que es el área que se forma entre las circunferencias interior

es lo suficientemente preciso para esta obra –ver la nota 133 de (Chemla & Guo 2004, 774-775) –. El valor 157/50 será, de hecho, el usado en toda la obra.

y exterior. En el clásico se expone el siguiente procedimiento para calcular esta área: "sumamos circunferencias interior y exterior, y tomamos la mitad. Esto es multiplicado por el diámetro transversal, que hace los *bu* del producto (*ji*)" (Chemla & Guo 2004, 195).

Comenta Liu Hui respecto a este procedimiento: "la circunferencia central [circunferencia media entre ambas circunferencias] que produce el corte del campo se toma como longitud" (Chemla & Guo 2004, 195). Entonces, si nos fijamos en el diagrama a continuación (Img. 6.26) veremos por qué calculamos el área de este campo circular de esta manera, y es que si esta circunferencia media se toma como longitud, y el diámetro transversal como base, al multiplicarlos obtendríamos el área del rectángulo que construimos (Img. 6.26), área que será igual a la del campo circular que queríamos calcular –ver nota 192 de Chemla y Guo (2004, 782-783)–. Particularmente, Liu Hui afirma "la circunferencia [media] hace ahora la longitud, el diámetro transversal la anchura, por eso "se multiplican la longitud por la anchura", por lo que se obtiene el producto (*ji*) correspondiente" (Chemla & Guo 2004, 197).

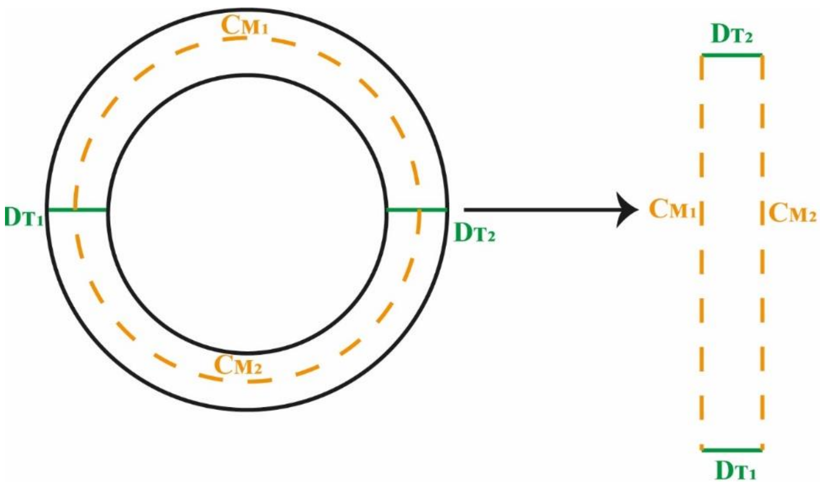


Imagen 6.26 Diagrama que acompañaría a la explicación de por qué el procedimiento para calcular el área del campo circular es correcto. Siguiendo la interpretación de Chemla y Guo (2004, 193-197).

En relación con el capítulo 5, vamos a ver 5.10, donde Liu Hui mostrará en sus comentarios la corrección del procedimiento mediante el uso de los *qi* (Chemla & Guo 2004, 423–425). En primer lugar, en el clásico se nos informa que tenemos una pirámide truncada de base cuadrada –*fang ting*–, con los siguientes datos: lado del cuadrado inferior, 5 *zhang*; lado del cuadrado superior, 4 *zhang*; altura, 5 *zhang*. Y preguntan cuánto sería su volumen. Para calcularlo, el clásico presenta directamente la respuesta, 101.666 *chi* 2/3 *chi*, y a continuación el procedimiento: "los lados del cuadrado superior e inferior se multiplican el uno por el otro, luego cada uno se multiplica por sí mismo, sumamos estos (resultados); multiplicamos esto por la altura y lo dividimos por 3” (Chemla & Guo 2004, 423).

A este procedimiento añadirá Liu Hui su comentario, en el cual dirá que en este capítulo se hace referencia al *qiandu* y *yangma*, los cuales pueden generar un cubo al unirse (Img. 6.27). Entonces, para mostrar la corrección del procedimiento, Liu Hui hará uso de 1 cubo en el centro, cuatro *qiandu* a los lados, y cuatro *yangma* en las esquinas (Img. 6.28) para formar un *fang ting* o pirámide truncada de base cuadrada de 1 *chi* de lado superior, 3 *chi* de lado inferior y una altura de 1 *chi*. Con esta disposición de los *qi* se dispone Liu Hui a mostrar qué estamos calculando en cada paso del procedimiento.

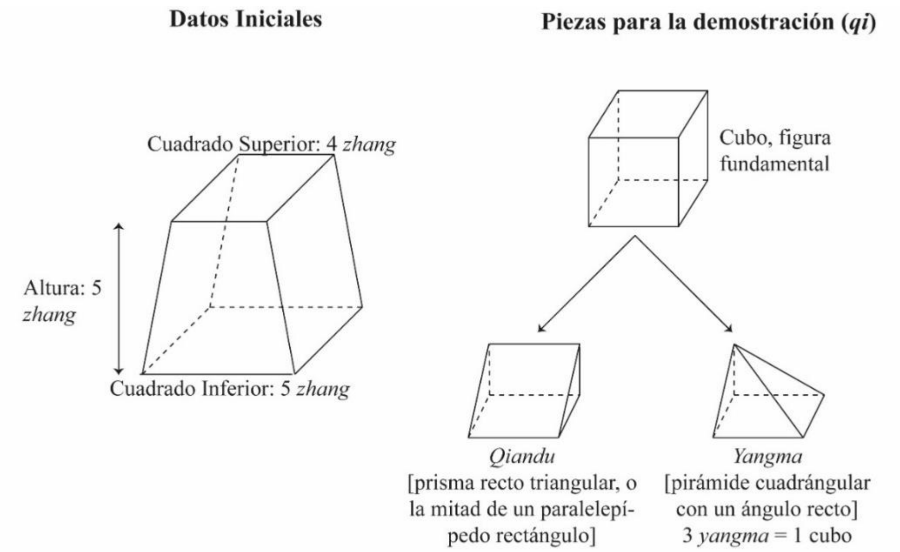


Imagen 6.27 Izquierda: pirámide rectangular truncada o *fang ting*; derecha: las dos piezas fundamentales mencionadas por Liu Hui en su comentario, y su relación con el cubo.

Por un lado, nos dice que con la operación de “multiplicar los cuadrados inferior y superior los unos por los otros” obtendríamos 3 *chi*, ya que el lado superior valía 1 *chi* y el inferior 3 *chi*, y al multiplicar esto por la altura, obtendríamos un volumen de 3 *chi*, correspondiente al cubo central y un ejemplar de cada uno de los cuatro *qiandu*. Por otro lado, si “multiplicamos el lado inferior por sí mismo” son 9, y al multiplicarlo por la altura obtenemos un volumen de 9 *chi*, correspondiente a un cubo central, 2 ejemplares de cada uno de los *qiandu*, y 3 ejemplares de cada uno de los *yangma*; si hacemos lo mismo con el lado superior, obtendríamos un volumen de 1 *chi*, correspondiente a un cubo central. Entonces, cada categoría estaría representada por 3 ejemplares, por lo que si dividimos por 3, obtenemos los *ji* del volumen. Finalizando Liu Hui afirmando que “por lo tanto, se verifica” –y continúa con una segunda demostración que no vamos a presentar en este trabajo–.[109]

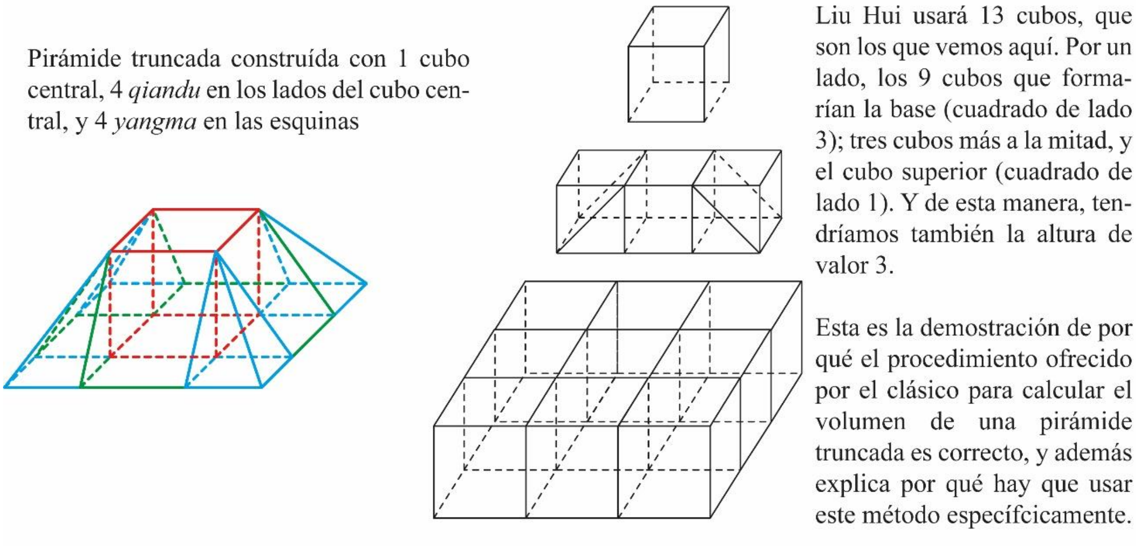


Imagen 6.28 Verificación del procedimiento 5.10 mediante el uso de las figuras –*qi*–. Reconstrucción de Chemla & Guo (2004, 392) modificada ligeramente.

Para finalizar, vamos a presentar brevemente algunas cuestiones en relación con el uso de términos técnicos en China. Lo haremos, como hemos hecho en los capítulos anteriores, en relación sobre todo a cómo se conceptualizaron algunas figuras geométricas fundamentales en esta civilización, así como la manera en la que se prescribieron algunas operaciones geométricas. Nos vamos a basar fundamentalmente en la obra de Chemla y Guo (2004), con especial atención al glosario de términos que estos autores presentan al final de su traducción y comentarios críticos a los *Nueve capítulos* (pp. 897-1035), por lo que tenemos que tener en cuenta que nos estamos refiriendo principalmente a la manera en que estos términos se usaron en el siglo III e.c.

En primer lugar, en relación con las figuras geométricas vamos a ver que estas se definen en relación con sus “dimensiones fundamentales”; esto es, aquellas dimensiones

[109] Si contamos el total de piezas usadas son 27, que son las que dice Liu Hui que ha usado en esta prueba, así como 13 bloques –esto es, 13 cubos que formamos si unimos todas las piezas de *qiandu*, 12 *qiandu* serían 4 cubos, y *yangma*, 12 *yangma* serían 4 cubos–. Por otro lado, se puede observar que Liu Hui no usará los valores del clásico, sino que usa números sencillos para no entorpecer su explicación. Esto podría manifestar que no estaba mostrando la corrección de este problema particular, sino del *procedimiento general* para calcular el volumen de pirámides truncadas de base cuadrada.

que al ser multiplicadas determinan el área de la figura que estamos considerando (Chemla 2005, 128, n. 14).

- **Rectángulo o cuadrado** (***fang***).[110] Las dimensiones fundamentales que definen a esta figura son su anchura, *guang*, y su longitud, *zong*.[111] Por ejemplo, en los problemas 1.1-1.4 se calcula el área del campo rectangular multiplicando su anchura por su longitud. Este término *fang* también se usa para lado del cuadrado, cubo (*lifang*), lado del cubo, o paralelepípedo rectángulo de base cuadrada (cf. Chemla & Guo 2004, 136-138; 921-922). Por otro lado, si se pone el término *fang* antes de otra figura sólida, como un cilindro (*baodao*), lo que estaríamos designando sería que esta figura tiene una base cuadrada. En este caso, *fang baodao* sería un cilindro de base cuadrada –ver más ejemplos en la tabla 6.2 presentada anteriormente–. También se usó el término ***ju***, usado para escuadra y gnomon (Chemla & Guo 2004, 943). En el comentario de Zhao Shuang al *Zhou bi* este dice "*ju*, es un ancho (*guang*) y una longitud (*chang*)" (cf. Chemla & Guo 2004, 943). Aunque no todos los investigadores están de acuerdo en esta traducción (cf. Chemla 2005, 127-128, n. 13).

- **Círculo** (***yuan***).[112] Aparece en el capítulo 1, donde habrá que calcular el área de campos circulares (1.31-1.32), con forma de segmento circular (1.35-1.36), y de anillo (1.37-1.38). En el capítulo 5 se trata la figura del círculo en relación con cuerpos sólidos, al igual que señalamos en relación con el rectángulo, como por ejemplo *yuanqun*, cilindro con base circular (Chemla & Guo 2004,

[110] Término usado también para región, tal y como vimos en la sección 2.2.2 en relación con las cuatro regiones, *sifang*. Allan (1991) señala que la primera vez que se atestigua el uso de *fang* como cuadrado aparece en las inscripciones en bronce del período Zhou Occidental, las vasijas-*ding* cuadradas (pp. 76-77).

[111] *Guang* se usa para designar la dirección este-oeste, y en relación con los diagramas matemáticos, la dimensión horizontal de la figura; por otro lado, *zong* se usa para designar la orientación norte-sur, y en relación con diagramas matemáticos, la dimensión vertical de la figura (cf. Chemla 2005; Volkov 2007). También se puede distinguir si estas caras son rectas (*zheng*) u oblicuas (*xie*) (Chemla & Guo 2004, 1031-1032).

[112] Ni en los *Nueve capítulos* ni en los comentarios de Liu Hui se define esta forma.

1028).[113] El diámetro del círculo se denomina *jing*, usado para diámetro de una esfera, o diámetro transversal en relación con el anillo circular. Zhao Shuang también usará este término para hablar del diámetro de un cuadrado (*fang jing*) (cf. Chemla y Guo 2004, 942). Y su circunferencia sería *zhou* –término también usado para perímetro (Chemla & Guo 2004, 1034)–.[114]

- **Triángulo**. En China no existió un concepto o término para la figura de triángulo. En el caso del capítulo 1, en los problemas I.25-I.26 se usa el término *gui* para hablar de campos triangulares (*gui tian*) (Chemla & Guo 2004, 925-929). Para calcular el área de estos campos, se multiplica la mitad del ancho por la altura. Por otro lado, con el procedimiento *gougu*, como señalan Chemla y Guo (2004), los lados *gou* y *gu* "*definen* el triángulo rectángulo" (p. 926), ya que con la operación se toman los valores de los dos lados del triángulo rectángulo, y se produce el tercero, la hipotenusa (*xian*).

- **Diversidad de términos**. El término ***li*** se puede traducir como "erigir" en relación a cómo se erigen los cuerpos sólidos a medida que avanza el razonamiento geométrico. Entonces, *lifang* y *liyuan* se usan para cubo y esfera, respectivamente. Por otro lado, con ***ping*** hablaríamos de superficies planas en contraposición a las sólidas. Entonces, *pingfang* se usa para hablar de cuadrado, y *pingmi* para hablar de área plana (Chemla & Guo 2004, 951-953; 966-967). Además, tenemos los extremos, ***zhi***, como los descritos en el problema I.32 en relación con los sucesivos polígonos inscritos en el círculo (Chemla & Guo 2004, 1033); o ***zhong***, como centro o intermedio, diferente a

[113] Como vimos anteriormente, en el *Zhou bi* los términos de círculo y cuadrado aparecen relacionados en la sección #C, titulada precisamente "Círculo y cuadrado" (Cullen 1996, 181-182), y en relación con la teoría *gaitian*, "*tian yuan di fang*"; esto es, el cielo es un círculo y la tierra un cuadrado (cf. Cullen 1996).

[114] El diámetro se relaciona con los valores asignados a las figuras de círculo y cuadrado en las obras clásicas, valores que son "mejorados" o analizados teóricamente por Liu Hui como hemos mostrado. Por otro lado, Zhao Shuang afirma que "cuando el diámetro del círculo es 1, su circunferencia es 3; cuando el transversal del cuadrado es 1, su perímetro es 4" (Cullen 1996, 83). Además, si el lado del cuadrado es 5, su diagonal 7. Estos valores, o más bien, relación entre diámetro y circunferencia, o diagonal y lado del cuadrado, se denominan como la constitución interna de estos objetos geométricos (*li*) (Chemla & Guo 2004, 950-951).

zhongping, que es la media de las longitudes de una superficie o sección de un sólido, como en el problema I.26 en relación con el campo triangular (Chemla & Guo 2004, 1034). También se distingue exterior (***biao***) e interior (***li***) de una figura.

A continuación, vamos a presentar algunos de los términos usados para llevar a cabo las diferentes operaciones geométricas en esta obra.

- **Extracción de raíces** (***kai***). La principal para este trabajo, explicada en el apéndice 6, es la extracción de raíces cuadradas (*kai fang*, traducido literalmente como "abrir el cuadrado").[115] En el *Libro de los procedimientos* esta operación se determina como "abrir la longitud", y es una operación que nos permite obtener el valor de dicha longitud si conocemos el área y anchura del rectángulo.

- Tomar la mitad de algo, disminuir la mitad de algo, la mitad de algo (***ban***). Con esta operación lo que haríamos sería tomar la mitad de algo, como en I.26, donde se "toma la mitad de la longitud" o I.32, donde "multiplicamos la mitad del diámetro por la mitad de la circunferencia". También hace referencia a la fracción ½ cuando se da como resultado o se formula en el problema en relación a un entero –cuando tenemos la fracción sola se expresa como se expresan todas las fracciones en esta tradición matemática– (Chemla & Guo 2004, 899).

- **Progresar** (***bu***) y **retroceder** (***zhe***) o **disminuir retrocediendo** (***zhexia***). El primero de ellos hace referencia al movimiento horizontal hacia la derecha de las varillas sobre la superficie de cálculo. El segundo de ellos sería el caso contrario, movimiento horizontal hacia la izquierda sobre la superficie de

[115] Para prescribir la operación de extraer raíces cuadradas, Liu Hui usará *kai fang*, mientras que en el clásico se usaba *kai fang chu*, traduciéndose *chu* como dividir, y será además una de las operaciones que se introducen de manera novedosa respecto a obras anteriores (Chemla *en preparación*). Otros tipos de extracción de raíces serían *kai lifang*, extracción de raíz cúbica, *kai liyuan*, extracción de raíz esférica, o *kai yuan*, extracción de raíz circular (Chemla & Guo 2004, 945-946).

cálculo. También se podría **saltar** (***chao***); esto es, saltar una o dos columnas con la varilla de contar, usado por ejemplo para la extracción de raíces.

- Se distingue entre el sustantivo, o resultado de una operación, y la propia operación o acción de llevar a cabo esa operación. Por ejemplo, tenemos el sustantivo *bing*, suma, y verbo *jia*, agregar. Así mismo, tenemos el sustantivo *cha*, que es la diferencia, opuesto a la acción de sustraer, que sería *jian* (cf. Chemla & Guo 2004, 936).

Estos serían algunos de los términos técnicos que se usaron en China tanto para designar o conceptualizar las diversas figuras geométricas, tanto planas como sólidas, sus elementos, relaciones, así como distintas operaciones en relación a estas, o en relación a otros procedimientos matemáticos como los vinculados con el uso de las varillas para contar y la superficie sobre las que se realizaban los cálculos –ver apéndice 6–. No hemos querido llevar a cabo una discusión o presentación exhaustiva de todos los términos técnicos de esta práctica matemática, lo cual sería una tarea que excedería los limites de este trabajo. Lo que hemos querido subrayar, principalmente, es la manera en la que estos diversos términos comenzaron a adquirir, sobre todo en relación a los comentarios de Liu Hui, un sentido técnico y preciso –para más detalles acerca de la evolución de parte de este vocabulario, se puede consultar el extenso trabajo de Karine Chemla (2010; 2014; 2015; *en preparación*)–.

Parte III

Análisis Comparativo

Capítulo 7
Los orígenes del conocimiento protogeométrico y geométrico: un análisis arqueo-histórico comparativo

En este capítulo, mostraremos qué puede aportar nuestro análisis arqueo-histórico comparativo a los estudios acerca de los orígenes del conocimiento protogeométrico y geométrico. Particularmente, veremos cómo nuestra propia aproximación basada en tres niveles de competencia puede ayudarnos a entender estos orígenes desde dos perspectivas.

Por un lado, desde una perspectiva cognitiva nuestro trabajo puede servir para fundamentar nuestras críticas a las aproximaciones universalistas acerca del conocimiento geométrico. Como señalamos en la introducción, los investigadores dentro de esta postura suelen argumentar que las similitudes que podemos encontrar entre las diversas culturas humanas pueden ser explicadas en base a la similitud que existe en nuestro sistema biológico o cognitivo. En este trabajo hemos presentado con cierto detalle, y criticado, una de estas posturas universalistas dentro de las ciencias cognitivas, como es la teoría CKS.

Precisamente, mostramos en la primera parte de esta tesis que los trabajos actuales en cognición matemática tienden a centrarse únicamente en las similitudes que encuentran en cómo el ser humano percibe y codifica su medio –lo que les lleva a conclusiones acerca de la universalidad de nuestra cognición "aritmética" y "geométrica"–. Sin embargo, nuestra exposición detallada de estos orígenes arqueo-históricos del conocimiento geométrico durante la Prehistoria e Historia Antigua nos ha permitido ver también las grandes diferencias que existen en cómo entendió y configuró cada una de estas civilizaciones este tipo de conocimiento. Por lo tanto, argumentamos que no existe ningún tipo de conocimiento geométrico universal a todas las culturas humanas.

Por otro lado, desde una perspectiva arqueo-histórica y cognitiva, veremos que las similitudes que encontramos entre estas tres tradiciones nos llevan a concluir que la cultura tuvo un papel decisivo en cómo el ser humano percibió su medio, lo conceptualizó, y creó posteriormente un tipo de conocimiento simbólico y teórico acerca de las figuras espaciales, sus elementos y relaciones.

En particular, vamos a llevar a cabo dos análisis comparativos. En primer lugar, realizaremos un análisis diacrónico desde el período Paleolítico hasta el final de la Historia Antigua. De esta manera, veremos cómo el conocimiento protogeométrico y geométrico surgió y se desarrolló en un contexto socio-cultural y político concreto, y en relación con un conjunto de herramientas y metas en cada una de estas civilizaciones (sec. 1).

En segundo lugar, nos centraremos en un caso concreto, aunque no corresponda al mismo período de tiempo en las tres civilizaciones. En particular, nos centraremos en cómo se conceptualizó y usó el 'Teorema de Pitágoras'[1] en cada una de estas prácticas matemáticas, para así poder entender las características particulares de cada una de ellas (sec. 2).

En tercer y último lugar, inferiremos a partir de estos análisis comparativos una serie de consecuencias para los estudios actuales en cognición matemática (sec. 3). Como ya hemos adelantado, nuestras conclusiones servirán como crítica a las caracterizaciones universalistas acerca del conocimiento geométrico, así como en defensa de un análisis contextual y enculturado en relación con estos orígenes.

1. Los orígenes del conocimiento protogeométrico y geométrico: un análisis diacrónico

1.1 La prehistoria del conocimiento protogeométrico

Hemos argumentado anteriormente –ver especialmente capítulo 3– que no encontramos ningún elemento material del período Paleolítico que evidencie los orígenes de la elaboración o posesión de conocimiento geométrico. Vamos a tomar como hilo conductor de nuestras consideraciones respecto a este período la caracterización que Dirk J. Struik (1987) presenta sobre el mismo.

> Nuestras primeras concepciones de número y forma se remontan a tiempos tan remotos como la Edad de Piedra Antigua, el Paleolítico. […]

[1] En cada una de estas civilizaciones recibirá un nombre diferente de acuerdo a cómo se conceptualizaron las figuras y relaciones geométricas dentro de cada práctica matemática, así como de acuerdo al análisis histórico y epistemológico que hoy día realizamos de las mismas. Sin embargo, usamos aquí 'Teorema de Pitágoras' como una etiqueta general para que sepamos rápidamente de qué estamos hablando.

> Poco progreso se hizo en la comprensión de los valores numéricos y las relaciones espaciales hasta la transición de la mera *recolección* de comida a su *producción* […] Con este cambio fundamental, una revolución en la cual la actitud pasiva del hombre hacia la naturaleza se convirtió en una activa, entramos en la Nueva Edad de Piedra, el Neolítico (p. 9, énfasis en el original)

Dos son las cuestiones relevantes que queremos subrayar en relación con esta caracterización. En primer lugar, respecto al Paleolítico este autor habla de "**primeras concepciones de número y forma**", y no de matemáticas o posesión de conocimiento matemático. Esta misma estrategia siguen algunos estudios en etnomatemáticas, en los cuales se distingue entre "ideas matemáticas" y "conocimiento matemático". Sin embargo, existe un problema fundamental respecto a esta afirmación, que es el de caracterizar exactamente a qué estamos haciendo referencia con esta expresión, y cómo se vinculará con el posterior desarrollo del conocimiento protomatemático.

En segundo lugar, este autor habla de 'números' y 'valores numéricos', lo que rápidamente nos lleva a saber qué tipo de materiales podrían servir como base para hablar de los comienzos del uso de números por parte del ser humano. Sin embargo, si hablamos sobre '**formas**' y '**relaciones espaciales**' surge una gran dificultad a la hora de determinar qué elementos y prácticas de la Prehistoria nos servirían para entender el desarrollo del conocimiento propiamente protogeométrico y geométrico en períodos posteriores. Es decir, que existe una amplia variedad de elementos y prácticas de la Prehistoria en las que vemos estas 'formas' y 'relaciones espaciales' –arte prehistórico, decoración de vasijas, evolución de la manufactura lítica, monumentos megalíticos, ordenación territorial, etc.–. Este fenómeno ha llevado, de hecho, a que diversos autores (cf. Ascher 1991; Hacking 2009; Scriba & Schreiber 2015) consideren un conjunto diferente de elementos arqueológicos para caracterizar los inicios de la geometría en este período.

Con vistas a resolver esta dificultad, presentamos al final del tercer capítulo cinco elementos que podrían ser útiles para llevar a cabo análisis más sistemáticos en "prehistoria de la geometría". Estos eran,

- importancia de la **cultura material** para nuestra cognición (1)
- **coevolución** de nuestras habilidades cognitivas y culturales (2)
- **interpretación contextual** de las prácticas y materiales arqueológicos (3)
- desarrollo de los **sistemas de memoria artificiales** –SMA– (4)

- **acumulación cultural** de ciertas herramientas y prácticas asociadas a ellas (5)

En relación con los dos primeros elementos, y considerando algunos resultados actuales en ciencias cognitivas y psicología del desarrollo (cf. Newcombe 2018), la amplia variedad de elementos y prácticas del Paleolítico pueden dividirse en dos categorías generales: 1) aquellos relacionados con nuestra cognición visoespacial a pequeña escala, donde subrayamos la importancia de la evolución de la manufactura lítica, por un lado, y el arte prehistórico, por otro; y 2) aquellos relacionados con nuestra cognición visoespacial a gran escala, sobre todo en relación con la ordenación del territorio y construcción de monumentos megalíticos –ver apéndice 7–.

Veamos cada una de estas categorías con algo de calma. En primer lugar, en relación con el caso de la manufactura lítica, vimos que la mayoría de trabajos en arqueología cognitiva consideran que podemos apreciar en el registro arqueológico la coevolución de nuestras habilidades cognitivas, culturales y técnicas.

Sin embargo, y aquí entraría en consideración el tercero de los elementos de nuestra propuesta, estos trabajos suelen centrarse en la evolución desde el modo I al V en el caso de la Prehistoria de Europa y África –EA–. Y nos preguntamos, ¿puede este modelo ser aplicado a otras regiones del planeta en este mismo período? La respuesta, tomando como caso comparativo el de China –ver especialmente los apéndices 5 y 7– es que no. Esto se debe a que, en el caso de China, en la industria lítica de la región norte, el modo de producción I similar al de EA se mantuvo durante casi todo el período Paleolítico, hasta el 30.000 AP, y nunca llegaron a fabricar herramientas similares a las del modo II, las hachas de mano. En el caso de la región sur, sí se fabricaron herramientas de este modo II, aunque más toscas y menos simétricas que las de EA, y nunca sustituyeron al modo I (cf. Gao 2013; Bar-Yosef 2015).

Este fenómeno no debería conducirnos a concluir que el caso de China manifiesta que esta fue una sociedad con peores habilidades técnicas o un desarrollo cognitivo menos avanzado que el de EA (cf. Belfer-Cohen & Hovers 2010; Bar-Yosef 2015). Lo que queremos enfatizar es la importancia de tomar seriamente en cuenta el propio contexto en el que esta manufactura lítica tuvo lugar, y por qué en este caso no se necesitaron elaborar herramientas líticas más complejas para la supervivencia. En este caso, algunos investigadores han propuesto la "hipótesis del bambú" (Bar-Yosef et al. 2012), afirmando que es posible que estas sociedades paleolíticas construyeran parte de sus herramientas en bambú, para lo cual no se requirió que se elaboraran herramientas líticas más complejas que las pertenecientes al modo I, y además no dejaron rastro en el registro material.

Lo interesante bajo nuestro punto de vista sería analizar, de igual modo que en EA, la coevolución entre nuestras habilidades cognitivas, culturales y técnicas en el propio contexto del caso de China, y posteriormente, compararlo con el caso de EA. De este modo, obtendríamos una mejor representación de los distintos modos en que el ser humano se adaptó a su medio, y qué tipo de habilidades cognitivas y culturales estuvieron involucradas en dicha adaptación.

No vamos a presentar de nuevo el caso del arte prehistórico, ya que llegaríamos al mismo punto que acabamos de señalar. Y es que el caso de China, así como otras regiones del mundo, tuvo un desarrollo diferente al de EA (cf. Taçon 2018).[2] Lo que queremos subrayar en relación con estos dos casos, siguiendo nuestra propuesta, es que esta cultura material (1) puede servir para estudiar cómo coevolucionaron en este período nuestras capacidades cognitivas y culturales (2), considerando además cómo este conjunto de herramientas y prácticas emergieron y se desarrollaron en distintos contextos geográficos y socio-culturales (3).

Continuando con el último punto de la cita de Struik, estamos de acuerdo en que en el período Neolítico tiene lugar un hecho o fenómeno que revoluciona nuestra concepción de la prehistoria de la protogeometría. Para ello, queremos señalar brevemente una serie de cambios que tuvieron lugar en este período, y que consideramos que son importantes para entender la importancia de este período para los estudios en “prehistoria de la geometría” (Img. 7.1).

En particular, consideramos que son tres las esferas o contextos que pueden resultar de interés para nuestro trabajo. En el plano **económico**, se constata el paso progresivo de una economía basada en la caza y recolecta a una economía basada principalmente en la producción de los alimentos. La mayor disponibilidad de alimentos, y un posible cambio en la dieta, tuvieron un impacto positivo en el **crecimiento demográfico** y en la emergencia y establecimiento de nuevas formas de **habitar el medio**.

[2] El arte prehistórico en China se suele dividir, al igual que la industria lítica, en una tradición de arte prehistórico del norte y una del sur. De manera muy general se ha observado que en el norte prevalecen los petroglifos, mientras que en el sur lo más habitual eran las pictografías o pinturas sobre rocas (Taçon et al. 2012; Taçon 2018).

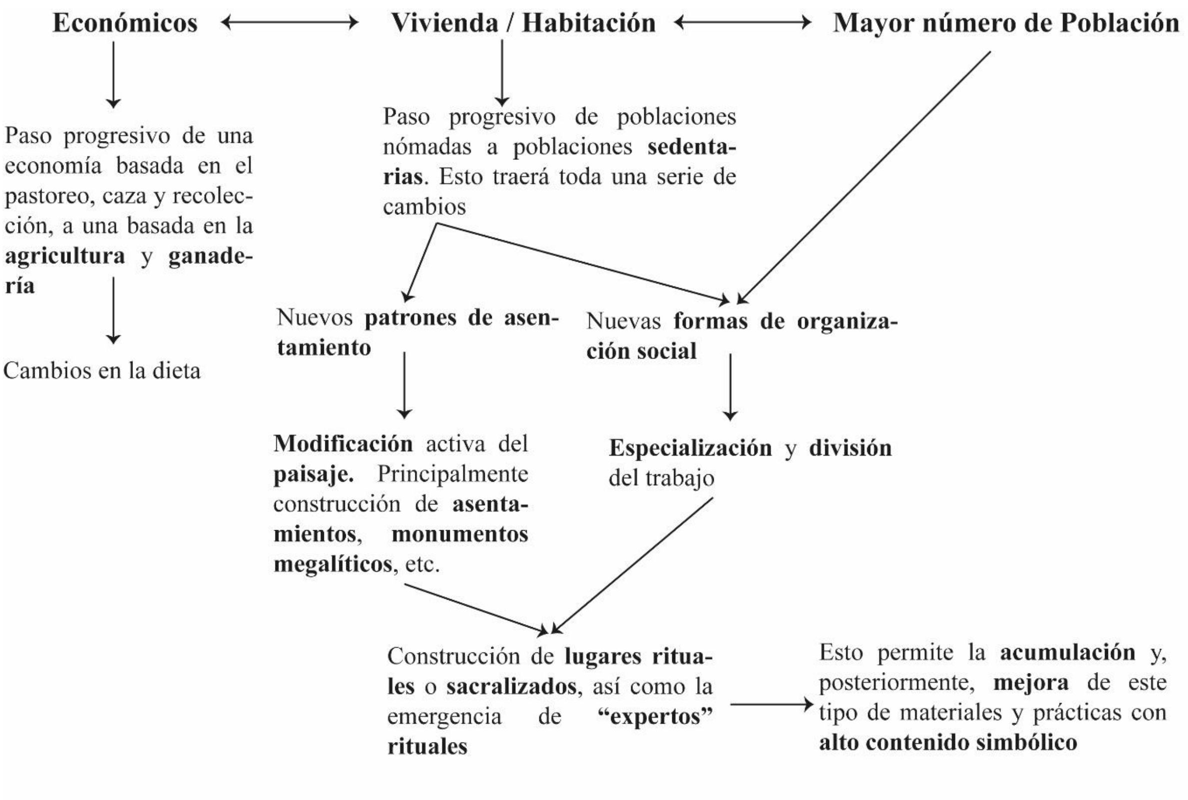


Imagen 7.1 Algunos de los elementos clave que permiten caracterizar al nuevo período Neolítico.

En este nuevo contexto el ser humano comenzó a relacionarse de otra forma con su medio circundante y a dotarlo de nuevos significados. Entre estos, el más importante para nosotros fue la construcción de monumentos megalíticos. Estos monumentos fueron construidos, entre otras cuestiones, para "dominar" y "dotar de sentido" al nuevo espacio, ahora cargado culturalmente, que habitaron los seres humanos. Por otro lado, y este es quizás el punto más importante para nuestro trabajo, estos monumentos megalíticos fueron en la mayoría de los casos lugares con un marcado carácter ritual. Por lo tanto, fue habitual que en estos se concentrara toda la actividad ritual, tanto en la elaboración de útiles como en la realización de actividades rituales.

Este carácter ritual de los monumentos megalíticos se relaciona con un segundo elemento importante para nuestro trabajo, el desarrollo de la división y especialización del trabajo de manera más clara que lo que se constata durante el período Paleolítico. Como hemos señalado anteriormente, la población creció durante el Neolítico, crecimiento que permitió que las diversas labores necesarias para la subsistencia pudieran repartirse en diferentes grupos en cada asentamiento o conjunto de asentamientos.

Habrá, por lo tanto, un grupo reducido de personas cuya actividad principal será precisamente la de elaborar las herramientas con contenido ritual, así como dar forma a los propios rituales o contenidos rituales de estas herramientas –los SMA que mencionamos anteriormente (4)–. Es decir, que se dedicaron principalmente al desarrollo de actividades o cuestiones epistémicas.[3] Estas actividades epistémicas fueron de vital importancia, ya que como señalan algunos investigadores, en el Neolítico no solo se domesticaron plantas y animales, sino que también se tuvo que llevar a cabo una "domesticación social del ser humano" (Hodder 1990); es decir, se tuvo que crear toda una nueva ideología que permitiera a grupos cada vez menos emparentados habitar un mismo espacio y, sobre todo, aceptar unas nuevas condiciones socio-culturales donde la producción alimentaria de unos cuantos serviría para alimentar a todo el conjunto del asentamiento. En particular, este "control mítico del espacio" (Schemmel 2016a) permitió que el espacio anteriormente percibido de forma pasiva y apenas modificado comience ahora a adquirir un sentido para estas poblaciones, para lo cual tendrán que modificarlo activamente.

En último lugar, este nuevo tipo de espacio y especialización del trabajo fueron cruciales para que toda la actividad ritual se concentrara en un solo lugar. De esta manera, las herramientas empleadas y su propio contenido simbólico pudieron ir acumulándose y mejorándose de generación en generación (5). Por lo tanto, las posteriores generaciones comenzaron a heredar no solo las herramientas de la población anterior, sino todo un nuevo nicho socio-cognitivo en el que los seres humanos comenzaron a vivir conjuntamente, y a vivir en un espacio cada vez más estructurado y con mayor significado cultural para sus pobladores.

Sin embargo, consideramos que ninguna de estas herramientas o prácticas del período prehistórico pone de manifiesto la emergencia del conocimiento protogeométrico. Esta conclusión se debe a las siguientes cuestiones, atendiendo a las características principales que establecimos de este segundo nivel de conocimiento protogeométrico en el capítulo dos:

[3] Recordemos que establecimos en el capítulo 2 la distinción entre actividades pragmáticas y epistémicas. Las primeras de estas son, en relación con este período prehistórico, aquellas herramientas o tareas involucradas principalmente en la modificación del medio físico o material. Por otro lado, las herramientas o actividades epistémicas son aquellas relacionadas con la modificación del medio informacional. Por ejemplo, un hacha de mano fue usada principalmente para tareas físicas como cavar hoyos, despedazar comida, etc. Por otro lado, una herramienta ritual se usó para dar forma al conjunto de creencias y valores ideológicos de estas poblaciones; esto es, se modificó principalmente el medio informacional o epistémico.

- No tenemos ninguna prueba que evidencie que la información espacial de las herramientas líticas, arte prehistórico o monumentos megalíticos recibiera un nombre particular con el que tratarla. Siguiendo el caso que expusimos de los Eipo, este tipo de construcciones con tales formas –sobre todo cuadrangulares y circulares– pueden explicarse en base a su carácter ritual (cf. Bell 1997);

- no tenemos tampoco ningún indicio de que las personas que fabricaron y usaron estas herramientas razonaran sobre las propias formas espaciales de las mismas, ni que se llevaran a cabo operaciones protogeométricas;

- no se creó ningún marco simbólico en el que se pudiera desarrollar el conocimiento protogeométrico, dado que el carácter simbólico de estas construcciones y herramientas está demasiado aislado y poco conectado con el conjunto general de las representaciones simbólicas o rituales.

Por otro lado, consideramos que en el período Neolítico surgen una serie de características que nos permiten hablar de las bases cognitivo-culturales que pudieron influir en el posterior desarrollo de este tipo de conocimiento. De nuevo, siguiendo las características de este segundo nivel tendríamos:

- El ser humano comenzará a representar de manera activa y sistemática diversas formas espaciales "favoritas", como círculos y cuadrados, tanto en herramientas como en construcciones monumentales. Esto permitirá que el ser humano no solo perciba rápida y espontáneamente estas formas espaciales –nivel I–, sino que abrirá el camino a que pueda razonar sobre las propias formas espaciales y manipularlas activamente. Se convirtieron, además, en representaciones públicas que se podían compartir con el conjunto de la población, y no únicamente por el agente que percibiera dichas formas de manera subjetiva;

- el ser humano comenzará a concentrar toda la actividad de carácter ritual en un solo lugar, vinculado esto con la especialización del trabajo. De esta manera, un grupo reducido de sujetos comenzará a dedicar su fuerza de trabajo en cuestiones de carácter simbólico, creando así la posibilidad de que estas fueran mejoradas por las siguientes generaciones.

Por lo tanto, concluimos que el tipo de evidencia que se ha utilizado en los trabajos en prehistoria de la geometría lo que evidenciarían sería el desarrollo y evolución hacia un tipo de habilidades técnicas, culturales y cognición visoespacial más compleja, sin llegar al segundo nivel de desarrollo del conocimiento protogeométrico.

1.2 Los orígenes del conocimiento protogeométrico y geométrico en el seno de tres grandes civilizaciones

Continuando con nuestro análisis diacrónico, presentaremos en esta sección una caracterización general del contexto socio-cultural, político e institucional en el que el conocimiento protogeométrico y geométrico emergió a lo largo de la Historia Antigua. Para ello, nos centraremos principalmente en los casos de Mesopotamia y China, los cuales analizaremos comparativamente con el caso griego.[4]

Nuestra decisión de analizar con mayor detenimiento estos casos frente al griego se relaciona con la concepción helenofílica que hemos mostrado que existe en parte de la investigación en historia de las matemáticas. Esto es, la consideración de que las matemáticas griegas desarrolladas por Euclides representan el ideal de aquello que deberían de ser las matemáticas en el pasado. Este tipo de interpretación suele venir acompañado de la consideración de que las matemáticas mesopotámicas y chinas fueron sobre todo de carácter práctico dada su estrecha vinculación con las labores desarrolladas por burócratas o funcionarios estatales. Por lo tanto, creemos que es importante analizar en detalle estos casos para mostrar por qué este tipo de interpretación helenofílica es incorrecta, además de imprecisa arqueo-históricamente.

1.2.1 La emergencia del conocimiento protogeométrico en Mesopotamia

En primer lugar, un fenómeno importante para entender la formación de los primeros estados o unidades socio-políticas más complejas se relaciona con el crecimiento demográfico, así como el mayor número y tamaño de los asentamientos –ver tabla 7.1–.

[4] En el apéndice 8 se pueden ver comparativamente los períodos que hemos analizado en este trabajo de estas tres civilizaciones.

Período	Tamaño aproximado	Población estimada
- Período El Ubaid (6500–4000 a.e.c.)	- Los asentamientos de mayor tamaño tenían, generalmente, entre 9-10 ha. Ejemplo de un asentamiento de gran tamaño, Tel al-Hawa, de unas 15-20 ha	- No existen muchos datos, se estima que en Tel al-Hawa habitaron entre 1.500–4.000 personas
- Período Uruk (4000–3000 a.e.c.)	- Ciudad Uruk, 250 ha; recinto del templo Eanna, 9 ha	- 20.000 habitantes
- Período Dinástico Temprano (2900–2350 a.e.c.)	- En torno al año 2500 a.e.c., el 80% de la población vivía en ciudades de más de 40 ha. La ciudad de Shuruppak pasa de 70 ha a 100 ha desde el periodo Dinástico Temprano I al III	- La ciudad de Shuruppak tuvo una población estimada de 15.000 a 30.000 habitantes

Tabla 7.1 Datos demográficos y de tamaño de asentamientos en Mesopotamia. Fuentes consultadas: Kuhrt (2000); Yoffee (2005); Carter & Philip (2010), y base de datos para la historia global *Seshat*, ver http://seshatdatabank.info/databrowser/, visitada el 11/07/2022.

En el caso mesopotámico, en el período Uruk (4000–3000 a.e.c.) surgió por primera vez la figura de un **líder** que gobernó políticamente al resto de la población.[5] Este fenómeno suele vincularse con el hecho de que los grupos humanos cada vez más numerosos necesitaron de protección tanto interna como externa, así como de una mayor organización social para poder convivir conjuntamente. Es decir, los ciudadanos necesitaban protección frente a otros ciudadanos con los que cada vez estaban menos emparentados por lazos sanguíneos, y frente a otros grupos humanos que pudieran

[5] En el anterior período El Ubaid (6500–4000 a.e.c.) existen "antecedentes" de la figura de líder. Sin embargo, no hay datos arqueológicos que evidencien que durante el mismo emergiera claramente este líder político que gobernara él solo a un asentamiento o grupo de asentamientos, ni se ha documentado que un ciudadano o grupo de ciudadanos acumulara riquezas (cf. Carter & Philip 2010).

invadirlos. Para ello, acudieron a la figura de un líder político, quién los gobernaría y lideraría a cambio de un pequeño pago de sus propias producciones.

Por lo tanto, estos **reyes** o líderes comenzaron a ejercer y retener en ellos mismos, y en algunos casos extendido a sus propias familias, todo el poder. En el período Uruk y Dinástico Temprano (2900–2350 a.e.c.) estuvieron estrechamente vinculados con el poder ritual o religioso, sobre el que fundamentaron la necesidad de su propia figura como vínculo entre los dioses y los ciudadanos –en la tabla *Lu A* que presentaremos a continuación se usó un término que hacía referencia al rey-sacerdote– (cf. Kuhrt 2000, 38-74; van de Mieroop 2016, 21-43).[6]

En relación con este líder, queremos destacar dos cuestiones de interés. Por un lado, junto a esta figura del rey emergió toda una compleja **jerarquía social**, en la que el rey ocupaba la cúspide de la sociedad, y el grueso de la población dedicada a labores agrícolas y de construcción formaban sus últimos escalafones. Esto puede verse reflejado en uno de los primeros textos escritos de esta civilización, la tabla *Lu A* o *Lista Estándar de las Profesiones*, escrita en el período Uruk Tardío (3500-3100 a.e.c.) y que contenía unas 140 entradas.[7] Esta lista pone de manifiesto las relaciones jerárquicas entre las distintas profesiones que surgieron y se consolidaron en este período, con figuras como el "líder de la ciudad", "líder del arado", "líder de los corderos" "cocineros", "sacerdotes", "joyeros", "ceramistas", etc. (Woods 2010, 74; Veldhuis 2011, 74-80).

Además, durante estos períodos los **templos** ocuparon un lugar central en este nuevo sistema de gobierno. Por un lado, siguieron construyéndose estos edificios con carácter monumental, como muestra y representación del propio poder central del emperador en estos estados. De hecho, la figura de este emperador estaba estrechamente vinculada al dios o diosa de cada ciudad, como señala Kuhrt, "todos los aspectos de la vida estaban entrelazados y a la cabeza del ordenamiento político-religioso estaba el propio rey, creado y formado físicamente por los dioses" (p. 50).

El punto más interesante para nuestro trabajo se relaciona con la **función económica** o **administrativa** que estos templos comenzaron a realizar, ya que era

[6] Como señala Trigger (2003, 661-666), el equilibro de poder de estos primeros líderes era muy delicado, y por eso tuvieron que elaborar este tipo de justificación religiosa de su necesidad como líder, así como invertir grandes esfuerzos en difundir su ideología y poder sobre sus súbditos.

[7] Este tipo de texto se incluye dentro de las "listas léxicas"; esto es, largas listas de palabras que pertenecían a una misma categoría, como listas de profesiones, animales, plantas, objetos, ciudades, etc. (Woods 2010, 40-42; van de Mieroop 2016, 34).

habitual que los ciudadanos ofrecieran alimentos y todo tipo de objetos materiales a los dioses, quienes se encargaban de redistribuirlos a la sociedad. Esto queda bien ejemplificado en el *Vaso de Uruk*, una vasija ceremonial en la que se representa a una comunidad entregando sus cosechas a la diosa Inanna (van de Mieroop 2016, 27-30). Sin embargo, sabemos que no fueron los dioses quienes se encargaban de este almacenamiento, registro y distribución de los bienes, sino que surgió una nueva clase social para encargarse de tales labores: los escribas o administradores (van de Mieroop 2016, 60-63).

En los posteriores períodos Acadio Antiguo (2350–2200 a.e.c.) y Ur III (2110–2003 a.e.c.) se consigue por primera vez dominar políticamente bajo un solo gobierno grandes extensiones de tierra. Una de las formas de conseguir dominar casi toda Mesopotamia fue a través de la cesión o regalo de tierras a soberanos locales a cambio de su lealtad al rey. De esta manera, el rey buscaba la centralización del poder en su figura y capital, al que el resto de ciudadanos y ciudades tenían que rendir cuentas. Otra de las herramientas clave para esta nueva forma de gobierno fue la instauración de una **burocracia centralizada** bien desarrollada que controlara todos los procesos del estado. De hecho, como señala van de Mieroop (2016) en relación con Ur III,

> Durante unos setenta años, esta dinastía gobernó Babilonia y regiones adyacentes al este, usando una elaborada burocracia que produjo un gran número de documentos escritos. Virtualmente ningún período de la historia de Oriente Próximo presenta al historiador con tal abundancia y variedad de documentación. De hecho, incluso en toda la Historia Antigua de Grecia y Roma, hay pocos períodos donde encontremos una profusión de material textual similar (p. 79)

Parte de esta centralización estuvo vinculada con los **escribas** y la **educación** de los mismos; esto es, esta nueva comunidad de escribas era precisamente la que se encargaba de administrar y supervisar cada una de las tareas de construcción o gestión de los recursos de este reino. De hecho, el rey daba importancia no solo a la educación de esta nueva clase, sino a la suya propia. En el prólogo a un “código de leyes” del rey Šulgi –período Ur III–, este señala que “en el lugar en el que la gente aprende las artes de la escritura, sumando, restando, contando y haciendo cuentas; terminé todos (los cursos)” (Klein 1981 *apud* Kuhrt 2000, 90). Vemos de esta manera que el rey daba importancia y valor a esta educación y a las herramientas y labores de esta nueva clase.

Además, un punto crucial de esta educación escriba es el momento en el que esta se **institucionaliza**, y por lo tanto ocurren dos fenómenos que a primera vista parecerían contradictorios. Por un lado, el rey se asegura que esta clase esté bien formada y preparada para servirle; por otro lado, esta clase comenzará a separarse cada vez más de las aspiraciones impuestas desde el gobierno central, y a adquirir mayor orgullo por su propia labor, creándose así una especie de "identidad escriba".[8] Esta institucionalización comenzó tímidamente en el período Dinástico Temprano y tendrá su máximo esplendor en el período Paleobabilónico (2000–1600 a.e.c.) (cf. Hoyrup 2009).

Como decimos, esta nueva clase que podríamos denominar como "expertos" o "especialistas técnicos" comenzaron a separarse paulatinamente de las labores desarrolladas en los templos. Su tarea principal fue la de estandarizar, simplificar y uniformizar la realidad socio-cultural con sus herramientas, para así tener un control más férreo por parte del rey de los recursos y población disponible (Kuhrt 2000, 72; Yoffee 2005, 100-102). De entre estas **herramientas**, las más importantes para entender la emergencia y desarrollo de la protogeometría son las siguientes:

- **Mapas**: los primeros mapas que se conocen datan del período Ur III (2110–2003 a.e.c.). El terreno se solía representar con triángulos y cuadriláteros, en relación con la fórmula del agrimensor, priorizando además la representación cualitativa de la superficie a representar para así tener una idea general y rápida de la información relevante (Robson 2008; Baker 2011).

- **Fórmula del agrimensor:** hay una figura fundamental dentro del cuerpo de especialistas técnicos que es la de los agrimensores. Estos se encargaban de medir los terrenos, para lo que crearon alrededor del III milenio a.e.c. la 'fórmula del agrimensor'. Como dijimos, desde el período Dinástico Temprano era habitual el pago con terrenos a oficiales o militares por parte del rey, y el control de los

[8] Por ejemplo, un proverbio de este período dice, "¿es el corazón que no sabe cálculo un corazón que posee sabiduría?" (Alster 1999, 54, 116 *apud* Muroi 2011, 149); lo que pondría de relieve el orgullo e importancia que se daba a la posesión de este tipo de conocimiento en esta civilización.

productos agrícolas era vital para el correcto funcionamiento del gobierno, para lo cual esta fórmula y figura de los agrimensores eran cruciales (Baker 2011).[9]

- **Unidades de medición**: desde el período Uruk III (3100–3000 a.e.c.) los sistemas metrológicos se expandieron, añadiendo a las unidades existentes nuevas unidades tanto mayores como menores. Al comienzo, estas unidades y los símbolos usados para representarlas se vincularon con cuestiones prácticas.[10] Posteriormente, en el período Ur III el rey Šulgi impuso por mandato real el uso del sistema sexagesimal y posicional, de tal manera que estos sistemas metrológicos quedaron unificados (Hoyrup 2009; Damerow 2016; Schemmel 2016a).

Todas estas cuestiones, tanto políticas –imposición gubernamental del sistema sexagesimal– como socio-culturales –separación de los escribas de las cuestiones religiosas, o desarrollo de la identidad y orgullo escriba–, son las que nos sirven para entender el desarrollo del conocimiento protogeométrico en esta civilización. Como se puede observar, no puede entenderse la emergencia y desarrollo de este tipo de conocimiento como algo abrupto, sino que es un proceso de acumulación y mejora tanto de este tipo de conocimiento, como de las bases institucionales que permitieron su desarrollo e instauración.

En el período Paleobabilónico, tras haberse separado la función de estos escribas de los templos, cuando se ha institucionalizado la educación[11], y al haberse impuesto un sistema sexagesimal y posicional a todas las matemáticas, irrumpen con fuerza las matemáticas supra-utilitarias. Esto es, matemáticas que en apariencia se vinculaban con cuestiones prácticas, pero que realmente trataban sobre cuestiones propiamente matemáticas. Este tipo de desarrollos pudieron ser el resultado de una muestra de

---

[9] En este sentido, Baker (2011) señala que las tablas en las que se inscribieron estas mediciones representan “una faceta de la expresión de la ideología real, enfatizando la beneficencia del rey al transferir terrenos reales a manos privadas, o al confirmar derechos de propiedad otorgados previamente” (p. 320).

[10] Por ejemplo, del período Uruk Tardío tenemos la lista léxica *Lista de Palabras D (comida/grano)*, en la que se escribieron signos para números que están asociados a cuestiones como el tamaño de las vasijas o barras de pan (cf. Robson 2008, 32-33).

[11] Tinney (2011) señala que hay tanto continuidad como discontinuidad cuando analizamos el corpus de textos curriculares, aunque para este autor el currículo escolar sumerio tomó su forma sobre todo en los períodos Ur III y Paleobabilónico.

virtuosismo y correcto manejo de las herramientas por parte de los escribas (Robson 2001, 171; 2008).

Veamos, por lo tanto, la importancia de los elementos que habíamos señalado en el capítulo dos en relación con el tipo de trabajo que aquí hemos desarrollado.

En relación con los **agentes** que elaboraron este tipo de conocimiento, podemos ver que a partir del período Uruk los escribas comenzaron a desarrollar toda una serie de herramientas con las que las formas o figuras espaciales comenzaron a ser matematizadas en vinculación con la administración y redistribución de los bienes de los templos. A partir del período Dinástico Temprano y Acadio Antiguo, esta protogeometría sigue desarrollándose impulsada por la burocratización que el gobierno central llevó a cabo de todos los aspectos de la vida de esta civilización, saliendo de esta manera de la esfera de la religión. De hecho, a partir del Período Acadio Antiguo incluso se puede observar que no todas las labores en las que esta clase trabajó estuvieron vinculadas con labores estatales.

Por otro lado, este tipo de conocimiento surge dentro de un **nicho socio-cognitivo** e **institucional** concreto, en relación con el contexto socio-cultural y político que hemos presentado. Lo más interesante para nuestro trabajo es la jerarquización de la sociedad que comenzó en el período Uruk. Se puede ver una mayor división y especialización del trabajo que en períodos anteriores, y una acumulación del capital simbólico y su tratamiento por un grupo reducido de la sociedad, que serán precisamente los escribas. Como hemos señalado, estos escribas comenzarán primero a separarse de la esfera religiosa, y posteriormente no tendrán que dedicar todos sus esfuerzos a cuestiones necesariamente estatales. Además, en el período Dinástico Temprano, la educación escriba comienza a institucionalizarse, y esta clase comenzará a tener orgullo por su propia identidad escriba.

En este contexto, los escribas comenzaron a crear toda una serie de **herramientas** para su labor, tal como diagramas, mapas, sistemas metrológicos, lenguaje protogeométrico para tratar técnicamente las figuras espaciales, uso extendido de la fórmula del agrimensor, etc. Todas estas herramientas fueron uniformizándose, sistematizándose y mejorándose a lo largo de los períodos que hemos presentado en este trabajo, y se fueron englobando o agrupando dentro de un marco simbólico común que permitía que este conocimiento fuera público –al menos para los ciudadanos que acceden a la educación– y transgeneracional.

Además, tenemos que decir que este conocimiento protogeométrico, sobre todo a partir del período Paleobabilónico, era un conocimiento complejo, coherente y conectado, aunque aproximado. Es decir, no es un tipo de conocimiento que emerja por ensayo y error o por acumulación de datos empíricos, sino que surge a partir de la elaboración concienzuda de problemas protomatemáticos por parte de los maestros, la búsqueda por mejorar las herramientas de la profesión, la comprobación de por qué un procedimiento es correcto –ver Db_2-146 a continuación–, el desarrollo de una identidad escriba ligada a las cuestiones protomatemáticas clave para esta civilización, etc.

1.2.2 La emergencia del conocimiento protogeométrico y geométrico en China

En esta civilización también se observa al comenzar el período Dinástico el crecimiento demográfico, así como del número y tamaño de los asentamientos (Tabla 7.2). Es precisamente a partir de la dinastía Shang cuando se instauró la figura del **rey** o **líder**. Este rey será, además, el centro y cúspide del poder ritual o religioso del estado Shang, siendo la única persona capaz de comunicarse con los espíritus, y ocupando una vez que muriera un lugar junto a la mayor deidad de esta civilización, *Di* o *Shangdi*.

Período	**Tamaño aproximado**	**Población estimada**
- Cultura Erlitou (1900–1500 a.e.c.)	- Ciudad Erlitou, 300-400 ha, con un complejo palacial de unas 11 ha	- Entre 18.000-30.000 habitantes
- Dinastía Shang (1554–1046 a.e.c.)	- Zhengzhou, 2.500 ha, con un área palacial de 300 ha	- En Zhengzhou, 100.000 habitantes

Tabla 7.2 Datos demográficos y de tamaño de asentamientos en China. Fuentes consultadas: Xu (2013), Yuan (2013), Shelach-Lavi (2015), y la base de datos para la historia global *Seshat*, ver http://seshatdatabank.info/databrowser/, visitada el 11/07/2022.

Por otro lado, son diversos los factores que evidencian la mayor **jerarquización social**: 1) la separación con murallas de los recintos palaciales de carácter monumental de la élite de la zona de vivienda y trabajo del resto de la sociedad; 2) la diferencia abismal en los patrones de enterramiento de las distintas clases sociales en número y calidad de los útiles con los que se enterraban; y 3) la exclusividad de los reyes de formar parte del paisaje divino de esta sociedad y comunicarse con los dioses y ancestros.

Esta jerarquización social se vincula, así mismo, con una mayor **división** y **especialización** del trabajo. En este período la adivinación con fuego o piromancia será una herramienta ritual fundamental para el desarrollo del estado, para lo cual hizo falta el trabajo de diversos especialistas que se encargaron de diferentes tareas de este procedimiento.

Por otro lado, en algunos de estos huesos oraculares o incluso algunas vasijas de bronce se pueden ver los comienzos, tímidos y poco sofisticados, de una **proto-burocracia** estatal. Entre estos, tenemos la administración de algunos bienes, como los enemigos capturados o los huesos mandados a otras regiones, o incluso en algunas aparecen posibles puestos oficiales, como el "encargado de hacer los documentos" o los comisarios (Li 2008; Wang 2014).[12]

Esta proto-burocracia no llegó a desarrollarse por dos cuestiones principales: por un lado, aunque comenzara a surgir este tipo de trabajo especialista, el rey seguía considerándose el centro del poder y actividad gubernamental. Por otro lado, durante esta dinastía este rey ejerció poder político sobre la región central de su reino, y el resto de territorios eran gobernados de manera independiente a este gobierno central. Por lo tanto, no llegaron a instaurar oficinas ni estructuras gubernamentales en estos territorios. Lo que mantuvo unidas a las regiones durante este período fue el poder ritual central de la dinastía Shang, de tal manera que los reyes difuntos se convertían en ancestros de todas las regiones (cf. Thorp 2006; Eno 2009).

En esta dinastía prevaleció una **concepción mítica del espacio**, de tal manera que diversas tumbas y edificios relevantes se orientaron siguiendo patrones astronómicos, y se conceptualizó incluso el lugar central de esta dinastía en relación con las cuatro regiones que la rodeaban –concepto *sifang*–. El tiempo también comenzó a ordenarse y conceptualizarse por cuestiones rituales, creándose para ello el calendario de 60 días que

[12] Li (2008, 26-29) señala que en esta civilización encontramos grupos de personas que se dedicaban a tareas específicas en relación a cuestiones administrativas, agrícolas, militares o religiosas. Sin embargo, no podemos hablar aún de oficiales con funciones burocráticas bien definidas.

presentamos en el capítulo anterior, el cual era usado sobre todo para cuestiones rituales más que civiles (cf. Keightley 2000; Wang 2000).

En el posterior período Zhou Occidental (1046–771 a.e.c.) esta situación cambia. Por un lado, los reyes Zhou justificaron de manera ritual su conquista, afirmando que habían recibido el mandato del cielo –su divinidad– para convertirse ellos mismos en los *Hijos del Cielo* que gobernarían todo el territorio. Sin embargo, estos reyes nombraron a sus familiares como gobernadores del resto de regiones, creando así una red de vínculos de parentesco con la que poder ejercer poder político sobre todas las regiones bajo su dominio.

Para poder gobernar todas estas regiones, se tuvieron que crear toda una serie de **estructuras institucionales** con las que controlarlas **burocráticamente**, creciendo así el número de oficiales y las funciones que estos tenían que desempeñar.[13] Además, se ha podido comprobar que los mismos puestos gubernamentales se encontraban a distintos niveles y regiones de la administración política –esto es, tanto en el gobierno central dominado por el rey Zhou, como en los gobiernos locales más alejados de esta región central– (cf. Li 2008).[14]

Por otro lado, Li (2008, 305-314) ha llevado a cabo un análisis de los títulos que aparecen en las inscripciones de este período, y distingue hasta 29 puestos gubernamentales, que pueden agruparse por sus funciones a desempeñar:

- Administración de los terrenos y recursos naturales del estado
- Supervisión de los trabajos públicos, como las construcciones
- Cuestiones relacionadas con asuntos militares

[13] Es el duque de Zhou –tercer rey de esta dinastía– quien crea las primeras instituciones gubernamentales, dejando la antigua capital Zhou como base administrativa, y situando su nueva capital cerca de la actual Luoyang, en Chengzhou.

[14] Por ejemplo, el puesto de "supervisor de la tierra" aparece en inscripciones en relación con el gobierno central, en inscripciones de la capital oriental de Chengzhou, en relación con un oficial administrativo en la fuerza militar Zhou, como un administrador local en ciudades grandes, como administrador local de asentamientos, como oficial de estados regionales, etc; además, se llevaron a cabo divisiones jerárquicas en estos puestos según el grado o alcance de sus responsabilidades. Por ejemplo, existió la figura del "Supervisor de los caballos", el "Supervisor de los caballos de la armada" y el "Gran supervisor de los caballos" (cf. Li 2008, 306-308).

- Cuestiones relacionadas con el buen funcionamiento de la corte, así como la protección del rey
- Registro y tratamiento de la información escrita
- Cuestiones religiosas y rituales

Podemos estar seguros, por lo tanto, de que en este período Zhou Occidental el estado burocrático está en pleno funcionamiento, en el cual el rey deja de ser la única figura con poder político –aunque continúe siendo la más importante y central–, y las cuestiones administrativas salen de la esfera religiosa y ritual para situarse en una esfera puramente gubernamental o estatal. Además, esto también tendrá importantes consecuencias para las propias herramientas con las que este nuevo cuerpo de oficiales o gobernadores tuvo que llevar a cabo las tareas que les eran encomendadas. Entre estas, las que más nos interesan son la escritura y los diferentes procedimientos y herramientas usadas para la medición de terrenos.

Sin embargo, esto cambiará en los posteriores períodos de Primavera y Otoño (722–481 a.e.c.) y de los Reinos Combatientes (453-221 a.e.c.). En el primero de ellos, se formarán unas 200 ciudades–estado que tratarán de autogobernarse de manera independiente. En el segundo, tendremos a siete estados principales luchando por hacerse con el control de todos los territorios. Una de las cuestiones más interesantes para nuestro trabajo es la labor que realizaron diversos expertos o especialistas técnicos para ayudar a los gobernadores a llevar a cabo sus planes de conquista o mantenimiento de la paz con otros territorios.

De entre estos expertos, son dos los grupos clave para entender el camino hacia el establecimiento de la protogeometría en esta civilización. Por un lado, los “expertos rituales” o “sabios de lo natural”, quienes continuaron conceptualizando y organizando tanto el espacio como el tiempo, dotando así de cierto simbolismo a figuras espaciales clave –círculo y cuadrado, principalmente–, así como a representaciones numéricas –la dualidad del *ying* y el *yang* o los hexagramas, por poner dos ejemplos–. Por otro lado, la clase de los sabios o filósofos se dedicó a razonar acerca de la función y fundamentación de estos gobiernos.

Además, estos sabios teorizaron acerca de la importancia de que los gobiernos administraran y controlaran de la manera más eficaz posible los recursos de los que disponían, tanto materiales como humanos, para poder mantener la paz en sus propios territorios, así como conquistar a otros cuando fuera propicio. Para llevar a cabo esta tarea, desarrollaron las siguientes herramientas.

- **Mapas**: en inscripciones de la dinastía Zhou Occidental se establecen los límites entre distintas regiones, se menciona la importancia de los mapas en las campañas militares, e incluso se menciona una "habitación de los mapas" ubicada en el palacio real (cf. Shaughnessy 1999; Li 2008). Sin embargo, estos mapas eran más bien de carácter cualitativo. Por citar un ejemplo, en la inscripción *San Shi pan/Ze Ren pan* presentada por Wang (2014, 197-199), la delimitación del mapa se establece en relación a accidentes geográficos o urbanísticos circundantes al mismo, como lagos, ríos, árboles, caminos, etc.

- **División del terreno**: en inscripciones Shang aparece un carácter que parece hacer referencia a algún encargado de medir los terrenos (cf. Wang 2014, 181-182); sin embargo, es en el período Zhou Occidental cuando se instauran de manera sistemática puestos gubernamentales en relación con esta tarea, como el "supervisor de la tierra", "supervisor de las multitudes", "gran supervisor de la tierra", el "supervisor de los pantanos" –encargado de controlar recursos y terrenos naturales–, y el "administrador de los distritos" (cf. Li 2008). Por otro lado, diferentes sabios –Mencio, Mozi y el mohismo, el legalismo, etc.– remarcaron la importancia de dividir el terreno de manera precisa, siendo esta una de las bases de un gobierno benevolente. Por ejemplo, existe un "Estatuto sobre agricultura" compuesto en relación con las reformas gubernamentales de Shang Yang –período de los Reirnos Combatientes– en el que se define el tamaño estándar de los campos y los impuestos que se derivarían de los mismos. Además, se ha hallado un estatuto en la tumba nº 50 en Haojiaping del año 309 a.e.c. del estado Qin. En este, se detallan las medidas y disposición de los caminos de un campo de un *mu* de área –área estándar en el período pre–imperial–, y las medidas que tenían que tener los límites del campo, tanto en anchura como profundidad (Barbieri–Low & Yates 2015, 692-694).

- **Unidades de medición**: al igual que en el caso de la división de los terrenos, la estandarización y establecimiento de unidades de medición fue un tema clave de los diferentes sabios que hemos presentado. Los objetos o textos que ponen de manifiesto los primeros intentos de llevar a cabo dicha estandarización pertenecen principalmente al período de los Reinos Combatientes. Por citar un caso ilustrativo, Pines (2017) muestra que Shang Yang reformó en el año 344 a.e.c. las unidades de medición de volumen, y la convirtió precisamente en el estándar a usar en todo el estado Qin.

De esta manera, este grupo de personas ya no tuvieron que dedicarse exclusivamente a cuestiones rituales o religiosas, como en el anterior período Shang y parte del Zhou, sino que comenzaron a separarse como una clase con una tarea clara: trabajar para un estado que, sobre todo a partir del período de los Reinos Combatientes, había alcanzado un alto grado de centralización y burocratización de todos los procesos. En este sentido, nos parece relevante mostrar cómo resume magníficamente Pines (2020b) estas cuestiones,

> el período de los Reinos Combatientes fue una época de cambios institucionales profundos. El sistema de gobierno poco definido del período de Primavera y Otoño fue reemplazado por un estado territorial altamente centralizado, dirigido por burócratas profesionales que penetraron en la sociedad hasta las aldeas más pequeñas. El nuevo estado, que fue capaz de movilizar completamente sus recursos humanos y materiales, se convirtió en una máquina militar formidable. La unificación forzosa de todo el reino sub-celeste, impensable en el período de Primavera y Otoño, se hizo posible de ahora en adelante (p. 615)

Y así comenzó el posterior período Imperial, con una nueva realidad socio-cultural y política en la que una única persona, el **emperador**, consiguió dominar todos los territorios y gobernarlos bajo su poder político (cf. Pines et al. 2014). Por lo tanto, se puso un mayor esfuerzo en el desarrollo de las herramientas que permitían este control de los territorios.

En relación con el resto de períodos que hemos tratado, podríamos decir que generalmente se considera que en los períodos Qin, Han Occidental y Xin se dio una mayor importancia a las cuestiones de carácter militar o gubernamental, y es en los posteriores períodos Han Oriental y de los Tres Reinos cuando las cuestiones cosmológicas y rituales vuelven a estar en el centro de las preocupaciones estatales.

A continuación, vamos a presentar las herramientas o cuestiones de interés para nuestro trabajo en relación con las clases que más nos interesan, que son la de los sabios y la de los especialistas técnicos.

- **Unidades de medición:** se siguieron desarrollando y uniformizando, adquiriendo algunas un carácter decimal. Se crearon objetos para realizar estas mediciones, y a veces se acompañaron de inscripciones en las que se establecía por estatuto su uso, así como castigos si los oficiales se desviaban de este estándar. Se crearon algunas unidades de medición que no podían tener ningún valor práctico, creadas seguramente para calcular partes decimales (cf. Loewe 2006; Lam & Ang 2004). El emperador Qin comenzó esta labor, que continuaría durante la dinastía Han Occidental. Sin embargo, en los periodos Han Oriental y de los Tres Reinos estas cuestiones no tuvieron tanta centralidad.

- **Mapas**: se han hallado mapas del período Han Occidental en los que diferentes edificios se representaban con distintas figuras, y se añade información cuantitativa de interés, como la distancia entre distintas ciudades, o el número de habitantes en ellas (cf. Hsu 1978).

- **Cuestiones cosmológicas o rituales**: en este período Imperial encontramos de manera clara la relación entre ciertas figuras espaciales –círculo y cuadrado– con cuestiones cosmológicas –cielo y tierra–. Esta asociación aparece en obras cosmológicas como el *Zhou bi*, en relación con deidades como Fuxi y Nüwa, en edificios como la *Sala luminosa*, o en diagramas que acompañaron a libros hemerológicos.

- **Uso de las varillas para contar**: se cree que estuvieron en uso desde el siglo III a.e.c., aunque no está claro si el gobernador que las usó lo hizo en relación a cuestiones matemáticas o rituales (cf. Volkov 2018b). Sin embargo, está claro que estas fueron un instrumento fundamental en el desarrollo de las matemáticas, ya que gracias a ellas se creó e instauró un sistema de notación decimal con valor posicional, creando así un marco teórico en el que poder representar todos los números y operaciones a realizar con ellos (cf. Lam & Ang 2004).

- **Institucionalización de la educación**: aunque se considera que durante el período de los Reinos Combatientes ya pudieron existir escuelas privadas de matemáticas, los datos nos indican que es más posible que estas se instauraran durante el período Imperial. En *Los Ritos de Zhou* –compilado seguramente durante la dinastía Han Occidental– se menciona el ideal de educación de las Seis Artes, siendo una de estas las matemáticas –en concreto se habla de *jiu shu*, que podría traducirse como "nueve procedimientos numéricos" (cf. Li & Du 1987)–. Además, en el año 124 a.e.c. se instauró la Academia Imperial en la que los futuros gobernadores se educarían; concretamente, estos tenían que aprender algo de matemáticas para poder desempeñar sus futuras labores gubernamentales (cf. Loewe 1986b). Por otro lado, sobre todo en el período de los Tres Reinos el confucianismo perdió su centralidad en la educación, de tal manera que otros textos y escuelas de pensamiento comenzaron a ser enseñados en la academia y a cobrar importancia en el panorama intelectual de la época –el propio Liu Hui muestra en sus comentarios que está influenciado por diversas de estas corrientes (cf. Dauben 2013)–.

Creemos que es importante presentar cada una de estas esferas –educativa, práctica y ritual o cosmológica– en las que el espacio comenzó a ser conceptualizado de manera teórica, aplicando incluso conocimiento protogeométrico y geométrico, ya que es difícil saber el contexto exacto en el que este conocimiento emergió y se desarrolló. Es decir, este conocimiento pudo emerger en relación tanto a cuestiones rituales –uso de hexagramas y figuras fundamentales como círculo y cuadrado–, gubernamentales –labores de medición de los terrenos y recursos–, o educativas –libertad para estudiar otras fuentes antiguas por los matemáticos de los Tres Reinos, como Liu Hui–.

A continuación, y al igual que hicimos en el caso de Mesopotamia, vamos a ver los elementos más importantes en relación con la emergencia del conocimiento protogeométrico y geométrico.

En relación con los **agentes**, tenemos que decir que es en el período Zhou Occidental cuando vemos con claridad el trabajo de un grupo de oficiales del gobierno que se dedicaron a tareas de medición y división del terreno, así como cuestiones relacionadas con el registro y control de los recursos. Sin embargo, será precisamente a partir del período Zhou Oriental, y sobre todo a partir del período de los Reinos Combatientes, cuando diversos grupos –como los sabios o los especialistas técnicos y rituales– desarrollaron toda una serie de herramientas teóricas y prácticas para controlar de manera fiable los recursos –terrenos, grano, población, etc.–, así como para elaborar la ideología ritual, cosmológica o militar del estado.

Este tipo de conocimiento surgió en un **nicho socio-cognitivo** e **institucional** concreto. En este caso, durante la dinastía Zhou Occidental los reyes comenzaron a gobernar todo el territorio, para lo cual desarrollaron toda una serie de estructuras burocráticas con las que dominarlos. Este control burocrático centralizado de los territorios y recursos necesitó de la creación de una nueva clase social, los oficiales, que tenían que asegurarse de registrar y comunicarse tanto con la población sobre las decisiones impuestas desde el gobierno central, como con los reyes o líderes superiores acerca de cómo era la situación en los territorios en los que trabajaron. Además, la educación se institucionalizó sobre todo a partir de la dinastía Qin, donde existen registros claros sobre la existencia y funcionamiento de escuelas o academias, y en las cuales fue fundamental la enseñanza de ciertas matemáticas para que los gobernadores que aquí se educaran pudieran servir adecuadamente al gobierno. Además, a partir del período de los Tres Reinos tiene lugar un hecho revolucionario, y es que la centralidad que tenía el confucionismo en la educación fue debilitándose y comenzaron a incluirse las ideas y desarrollos de otras corrientes del pensamiento chino. Este fenómeno creará una especie de libertad de aprendizaje, lo que pudo influir en los desarrollos propiamente geométricos que encontramos en este período en la obra de Liu Hui.

Como señalamos anteriormente, es difícil acotar el conjunto de **herramientas** que fueron importantes para el desarrollo de este tipo de conocimiento. Durante el período Dinástico, sobre todo a partir del período Zhou Oriental, tenemos el uso de varillas para contar, hexagramas, o ciertas figuras fundamentales por parte de los sabios de lo natural, quienes conceptualizaron dichas figuras de manera ritual, aunque más sofisticada que en períodos anteriores. Además, los burócratas u oficiales del gobierno desarrollaron toda una serie de herramientas teóricas y prácticas para conceptualizar el espacio, tal y como las unidades de medición, mapas, uso de varillas para contar, lenguaje protogeométrico con el que hacer referencia a las figuras espaciales, etc. Podemos decir que en este período Dinástico –sobre todo a partir del período de los Reinos Combatientes (453–221 a.e.c.)– esta protogeometría emerge y se instaura con seguridad, y aunque estas herramientas estuvieron estrechamente vinculadas con cuestiones prácticas, comienzan a surgir algunas aproximaciones teóricas a las mismas, como las reflexiones mohistas acerca de las propiedades de algunas formas o figuras espaciales (cf. Boltz & Schemmel 2016).

Por otro lado, durante el período Imperial –esto es, a partir de la dinastía Qin (221–210 a.e.c.)– estas herramientas y prácticas asociadas a las mismas continuaron sistematizándose y uniformizándose. Aparecen los primeros textos propiamente protogeométricos[15], lo que evidencia que se usa un lenguaje técnico para tratar las diversas figuras y sus relaciones, creándose así un marco simbólico común en el que este tipo de conocimiento fuera público y transgeneracional. Tenemos así un tipo de conocimiento complejo, coherente y conectado, aunque durante este período aproximado, con poca unicidad temática, y en el que los diversos métodos protomatemáticos estaban todavía muy vinculados con las prácticas burocráticas y gubernamentales.

Por último, en los comentarios del tercer siglo tanto de Zhao Shuang como Liu Hui se puede observar que existió un desarrollo geométrico pleno. En este caso, sobre todo en relación con los *Nueve capítulos* y los comentarios de Liu Hui, hemos visto la diversidad de figuras y situaciones geométricamente interpretadas, la relación entre figuras y procedimientos matemáticos de capítulos que a primera vista no estarían relacionados –cálculo del área de un campo circular y procedimiento *gou gu*–, unidad temática de los capítulos, búsqueda de resultados más precisos, generalización de los métodos, uso de paradigmas y procedimientos generales no vinculados a ningún valor numérico determinado por la práctica, etc.

1.2.3 Un análisis comparativo con el caso griego

Para llevar a cabo este análisis comparativo, vamos a presentar a continuación la manera en la que el matemático e historiador de la ciencia español Francisco Vera (1970) caracteriza, dentro de una concepción helenofílica, el desarrollo de la ciencia en Grecia.

> Las observaciones astronómicas de los caldeos, la metrología sumeria y las pirámides de Egipto suponen un pensamiento que es científico, aunque carece del rigor lógico que defina al trabajo mental griego, idéntico al nuestro y diferente, por tanto, del oriental, que, al no someter la experimentación a un proceso de abstracción, se detuvo en la puerta de la Ciencia propiamente dicha, cuya historia empieza en Grecia, país privilegiado en el que se verificó la génesis de la Ciencia occidental […].
>
> […] los intelectuales helénicos se vieron favorecidos por el régimen político de la *polis*, que, a diferencia de las tecnocracias orientales, los dejó en libertad de acción, pues que, exentos de tareas manuales, que se confiaban a los esclavos, dispusieron del ocio necesario para meditar (p. 13)

[15] De entre estos, hemos visto los textos recientemente excavados *Shu*, *Suan shu*, o *Suan shu shu*. Ver especialmente la sección 3.3.2 del capítulo 6.

Podemos ver que el punto principal de la tesis de este autor es que el fenómeno histórico que privó a las civilizaciones orientales de desarrollar unas matemáticas abstractas fue la sumisión de este tipo de prácticas y conocimiento al poder estatal y los desarrollos prácticos. Además, este autor añade una segunda cuestión, y es que gracias a que en Grecia los matemáticos eran personas libres de tareas manuales, pudieron dedicarse al estudio meditativo, y de ahí que crearan unas matemáticas abstractas.

Sin embargo, este tipo de aproximaciones lo que muestran es, de nuevo, una visión muy simplificada de un proceso muy complejo que fue desarrollándose a lo largo de varios siglos. En el caso griego, además, se añade la dificultad de la falta de registros escritos o arqueológicos de estos períodos que nos permitan entender precisamente el contexto socio-cultural y político en el que este tipo de conocimiento emergió y se desarrolló. En nuestro trabajo, particularmente, hemos observado que podemos distinguir tres períodos principales en relación con los orígenes del conocimiento geométrico.

En primer lugar, podemos situar entre los siglos VII-V a.e.c. el establecimiento del conocimiento protogeométrico, sobre todo en relación a los posibles escritos protomatemáticos de autores como Tales o Pitágoras –aunque este segundo nunca escribió nada, y estaríamos hablando más bien de la escuela pitagórica que este fundó–. En este período se comienzan a formar algunos conceptos geométricos básicos, como el de círculo, triángulo o ángulo, y fueron estudiadas algunas de sus propiedades y relaciones. Sin embargo, este conocimiento no fue general ni se insertó o elaboró dentro de un marco simbólico, sino que cada proposición trataba sobre una figura geométrica particular –ver el caso de Tales expuesto en el capítulo 5–. Además, tenemos que señalar que en este período las escuelas o academias comenzaron a establecerse, como vimos en relación con Tales y sus discípulos, Anaximandro y Anaxímenes.

En segundo lugar, a partir del siglo V a.e.c. se comenzó a formar el conocimiento propiamente geométrico, con autores como Hipócrates de Quíos. El punto clave de este período es que fue posible que se introdujeran algunas limitaciones respecto a cómo tenía que ser este tipo de conocimiento. Por ejemplo, se pudo limitar el uso de herramientas a la regla y el compás, así como imponer una estructura deductiva general.

En tercer y último lugar, entre los siglos III-I a.e.c. este conocimiento geométrico está ya plenamente instaurado en el centro de la vida cultural griega. Fue entre estos siglos cuando presumiblemente se publicaron los *Elementos* de Euclides. Lo que encontramos en esta obra es un tipo de conocimiento geométrico introducido en un cuerpo sofisticado de conocimiento, el cual era general y deductivo, en el que las interrelaciones entre los distintos conceptos geométricos se establecieron de manera más precisa que en períodos anteriores, y en el que había un uso controlado de los diagramas. Todas estas convenciones tan reguladas y restrictivas estuvieron auto-reguladas según Netz (1999, 74-79), en el sentido de que fueron los propios matemáticos quienes añadían y aceptaban tales restricciones, y quienes la enseñaban al resto de la comunidad matemática.

Este conocimiento matemático seguirá desarrollándose en diferentes direcciones en períodos posteriores, aunque perteneciendo a una misma tradición. En nuestro caso, presentamos cómo Herón de Alejandría, en el siglo I e.c., desarrolló un tipo de matemáticas que se alejaron de un supuesto "ideal griego" de matemáticas puras tal y como Platón las entendió. Particularmente, tomando como base la obra *Métrica*, mostramos que este tipo de conocimiento era matemático porque cumplía las siguientes características: establecimiento de definiciones precisas y teóricas de los objetos geométricos, sus elementos, así como las operaciones a realizar con estos, establecimiento de un marco simbólico general, o uso especializado de los diagramas y otros instrumentos. En este sentido, abogamos por una visión pluralista de las matemáticas griegas.

Tras la presentación de nuestra visión general sobre el desarrollo del conocimiento geométrico en la civilización griega, llegamos entonces a la cuestión planteada por Vera, y que ha sido considerada extensamente en historia de las matemáticas. ¿Se desarrolló el conocimiento matemático en Grecia de manera abstracta gracias a la ociosidad de los matemáticos? La respuesta más adecuada es que no lo sabemos. En la actualidad existen extensos debates sobre las posibles bases socio-cognitivas y políticas que pudieron influir en este desarrollo. Por ejemplo, Knorr (2004) considera que los desarrollos matemáticos estuvieron motivados por cuestiones propiamente matemáticas, y Netz (1999) afirma que los diagramas matemáticos no fueron importados de otras áreas de conocimiento. Por otro lado, diversos investigadores consideran que la filosofía pudo influenciar el desarrollo del conocimiento matemático griego deductivamente organizado, sobre todo en relación con la retórica y la persuasión (Lloyd 1979, 102-115; Cuomo 2001, 31-35; Bernard 2003). Lo que queremos mostrar con esto es, precisamente, que la imagen del contexto en el que este tipo de conocimiento emergió no es tan simple ni sencilla como este tipo de aproximaciones tienden a presentar.[16]

[16] Incluso cabe preguntarse quiénes eran estos matemáticos, ¿era una clase trabajadora distinta a la de los filósofos?, ¿encontraron en el sistema democrático de la *polis* su espacio para poder trabajar en estas

Sin embargo, con las civilizaciones mesopotámica y china ocurre el fenómeno contrario, y es que disponemos de una rica y numerosa fuente de material arqueo-histórico, que sigue creciendo cada año, para estudiar precisamente el contexto en el que este conocimiento emergió. Además, al analizarlas comparativamente podemos comprobar que tuvieron un desarrollo, con sus matices, bastante similar.

1. Cuando emergen los primeros estados en ambas civilizaciones –parte del período Uruk y dinastía Shang–, el espacio fue conceptualizado de acuerdo a una **concepción mítica** del mismo; esto es, se elaboraron toda una serie de concepciones rituales sobre el espacio, simbólicamente cargadas. Posteriormente, a medida que estos estados fueron desarrollándose y comenzaron a gobernar sobre grandes extensiones de terreno, los diversos reyes o gobernantes comenzaron a tener un control más férreo de sus recursos y territorios;

2. posteriormente, pasamos a un **control burocrático** de este espacio, en el que escribas y funcionarios comenzaron a usar y desarrollar el conocimiento protogeométrico. Sin embargo, al estar estrechamente vinculadas con cuestiones administrativas y burocráticas, estas protomatemáticas tuvieron un carácter aproximado –por ejemplo, se daba el valor 3 para la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro–;

3. finalmente, en el período Paleobabilónico vemos que aunque la práctica matemática seguía en este estado protogeométrico, comenzaron a desarrollarse **matemáticas supra-utilitarias** y los escribas comenzaron a mejorar sus propias herramientas; por otro lado, durante el período de los Tres Reinos hubo un ambiente académico de relativa libertad, lo que pudo servir para que diversos investigadores, como Liu Hui, se detuvieran a **analizar teóricamente** el conocimiento protogeométrico que habían recibido de tradiciones anteriores. Por lo tanto, lejos de que este conocimiento fuera usado únicamente por estos burócratas u oficiales, o de que estuviera necesariamente al servicio del estado,

---

cuestiones sin necesidad de dedicarse a labores manuales?, ¿qué ocurrió con ellos una vez desapareció este sistema político?, ¿tuvieron que fundar escuelas para poder continuar viviendo del desarrollo de este conocimiento y su enseñanza? (cf. Netz 1999; Cuomo 2001).

podemos observar que hubo cierto margen de libertad en el que algunos de los agentes que usaron y elaboraron este tipo de conocimiento pudieron desarrollar su ingenio teórico en sus propias investigaciones.

Esta última característica nos sirve para enfatizar el hecho de que la situación que encontramos en Mesopotamia y China puede ser comparable a la que suele adscribirse únicamente al mundo griego. Es decir, se suele hablar de la importancia de la ociosidad que encontraron los matemáticos griegos dentro del sistema democrático de la *polis*. En el caso mesopotámico y chino, como acabamos de mostrar, existió un margen de libertad de acción y estudio para las personas encargadas de desarrollar este tipo de conocimiento. Por lo tanto, podemos observar que el desarrollo del conocimiento (proto)geométrico en estas tres grandes civilizaciones se benefició de la libertad concedida a estas comunidades para que trabajaran en el desarrollo y enseñanza de sus propias herramientas, así como para que se dedicaran al cultivo de la mente alejándose así del desarrollo de tareas manuales; esto es, podemos ver en este análisis comparativo la importancia de la división y especialización del trabajo, de tal manera que esta nueva clase pudiera dedicarse de manera exclusiva a tareas puramente intelectuales y educativas.

Una última similitud que queremos reseñar tiene que ver con la clase letrada y numerada en las civilizaciones griega y china. Como dijimos anteriormente, tenemos pocos datos que nos permitan saber el lugar que estos matemáticos ocuparon en estas sociedades, así como las consideraciones que ellos mismos pudieron tener sobre su papel en estas sociedades. Sin embargo, lo poco que podemos saber es que estos tuvieron que ser personas de clase alta que dispusieran del tiempo y dinero suficiente para poder obtener una educación adecuada en estas materias –ver Netz (1999, 271-282) para el caso griego y Loewe (1986b) y de Crespigny (2017, 326-329; 480-497) para el caso chino–.

Por lo tanto, vemos que existieron similitudes generales en los orígenes y desarrollo del conocimiento (proto)geométrico en estas civilizaciones. Sin embargo, si analizamos con más detalle los sucesos particulares en cada civilización, se pueden observar diferencias importantes en cada práctica matemática. Por ejemplo, no desarrollaron los mismos sistemas numéricos, unidades y sistemas de medición, no usaron los mismos instrumentos matemáticos –como los diagramas o el tipo de lenguaje técnico–, las funciones y tareas de los escribas y funcionarios fueron diferentes, etc.

Esto nos lleva a concluir que no hubo un único camino histórico hacia el desarrollo de este tipo de conocimiento. Existieron contextos socio-culturales y políticos similares, los cuales pudieron influir en el desarrollo de ciertos nichos socio-cognitivos e instituciones con bastantes similitudes. Sin embargo, se pueden apreciar diferencias importantes en la manera en la que los agentes desarrollaron este tipo de conocimiento, así como el conjunto de herramientas que usaron para ello. Por lo tanto, nos alejamos de posturas universalistas, y abogamos por un análisis arqueo-histórico contextual y comparativo de los orígenes del conocimiento protogeométrico y geométrico.

2. La pluralidad de prácticas matemáticas de la antigüedad

Para analizar las prácticas matemáticas que hemos presentado en este trabajo, tenemos que establecer en primer lugar un marco común en el que llevarlo a cabo. Por ello, hemos elegido un resultado o procedimiento particular, relacionado con el llamado "Teorema de Pitágoras" –denominado de manera diferente en cada una de estas civilizaciones–, como elemento útil de comparación. Así, el estudio de un caso paradigmático nos permitirá articular el análisis comparativo.

Hemos elegido este teorema o procedimiento por dos razones principalmente. En primer lugar, porque lo encontramos ejemplificado –con diferencias importantes– en cada una de estas prácticas matemáticas. En segundo lugar, porque este procedimiento aparece en el estadio más "desarrollado" de la protogeometría mesopotámica –esto es, en su período Paleobabilónico, años 2000 a 1600 a.e.c–, así como en las primeras obras que consideramos como plenamente geométricas de China y Grecia –esto es, en los *Nueve capítulos* y en los *Elementos*–.[17] Estas dos razones nos permitirán tener un marco interpretativo común en el que analizaremos comparativamente estas tradiciones matemáticas.

2.1 La "regla de la diagonal" en Mesopotamia

En el caso de Mesopotamia existió un procedimiento análogo al teorema de Pitágoras, al que se ha denominado "regla pitagórica" (Hoyrup 2002, 197; Robson 2008) o "regla de

[17] Los *Elementos* de Euclides son, podríamos decir, la primera obra geométrica *conservada* de la tradición griega. Como hemos dicho en otras ocasiones, es posible que Hipócrates de Quíos ya escribiera una obra dentro de la tradición de los *Elementos* de Euclides. Por otro lado, en el caso de China estamos haciendo referencia a los comentarios realizados en el III milenio de la era común por Liu Hui, y no a la obra original.

la diagonal" (Friberg 2007b, 449-451), ya que en esta práctica matemática no existieron ni se establecieron teoremas. Esta regla se aplicó en relación con la diagonal de un triángulo o sobre todo un rectángulo, figura más estudiada protogeométricamente por esta civilización (Hoyrup 2002, 254-277; 385-387).

Hoyrup (2002, 385-387) y Robson (2008, 109-110) consideran que existen siete tablas de la categoría *textos con problemas* y dos *textos con tablas* en las que encontramos esta regla. Otros investigadores como Damerow (2001) consideran que esta aparece en 16 tablas, y Friberg (2007b, 450) considera que son 16 tablas paleobabilónicas, 4 seleúcidas y 2 tablas de constantes[18]. Además, parece que es clave el lugar geográfico donde estas tablas aparecieron, que es en ciudades periféricas, ya que en estas "la influencia de la tradición agrimensora parece haber sido continua" (Hoyrup 2002, 386).

A continuación, presentaremos dos tablas en las que aparece esta regla, así veremos algunos de los elementos clave que compararemos al final de esta sección. En primer lugar, tenemos la segunda parte de la tabla Db_2-146, siendo esta la primera tabla en la que aparece esta regla en la tradición matemática paleobabilónica (Hoyrup 2002, 386). Como señalamos en el capítulo 4, una vez calculada la longitud y anchura del rectángulo, que es lo que este problema preguntaba, el maestro reformuló el problema a la inversa para así mostrar a sus alumnos por qué este procedimiento era correcto.

Entonces, teniendo como datos iniciales la longitud y anchura de un rectángulo nos preguntamos, ¿cuánto valdrá su diagonal y área? El procedimiento consiste en "hacer sostener" sobre sí mismos la longitud y anchura. Como vimos, "hacer sostener" es una operación de la tradición mesopotámica que pertenece al conjunto de operaciones de multiplicación, que en nuestra tradición matemática podríamos traducir como "cuadrar", y que básicamente consiste en construir un cuadrado cuyos lados midan la longitud dada. Entonces, una vez construidos estos cuadrados suma el valor de ambas superficies, y calcula cuánto mide el lado de este nuevo cuadrado que resulta de la suma de los cuadrados de la longitud y la anchura. Por lo tanto, el lado de este nuevo cuadrado será igual a la diagonal. Por otro lado, para calcular su área o superficie, multiplicará el valor de la longitud por la anchura. Esto lo lleva a cabo con la operación de "levantar" la

[18] Que son TMS III y Plimpton 322. Esta segunda es considerada por Robson (2008, 109-115) como un catálogo de parámetros usados por los maestros a la hora de plantear problemas a sus alumnos en relación con esta regla de la diagonal. Particularmente, se listan los números para la anchura y diagonal de hasta 15 triángulos rectángulos.

anchura y la longitud; esto es, multiplicarlos ya que ambos lados forman el rectángulo cuya diagonal se acaba de calcular (Hoyrup 2002, 257-261; Friberg 2007b, 205-206).

Una cuestión clave de esta tabla es que, tal y como señala Hoyrup, se usan términos generales para hablar de la operación "hacer sostener". Es decir, en las tablas mesopotámicas era habitual hacer referencia a un valor determinado a la hora de prescribir esta operación. Por ejemplo, se podría decir "1, la longitud, hazla sostener" o "45, la longitud, hazla sostener". Sin embargo, en esta tabla lo que el texto nos prescribe es "haz sostener la longitud". Aunque parezca una cuestión trivial, es clave para entender cómo la protogeometría del período Paleobabilónico siguió desarrollándose hacia una caracterización más general y centrada en cuestiones supra-matemáticas, como podría ser la búsqueda o establecimiento de métodos o procedimientos generales.

En segundo lugar, tenemos el problema #9 de la tabla BM 85196. Esta tabla nos parece interesante ya que en ella podremos ver claramente qué son las matemáticas supra-utilitarias. Esto es, en esta tabla se describe una situación que se puede caracterizar de manera general como "vara contra pared". Entonces, a través de una serie de elementos *prácticos*, como son la vara, la pared, y el suelo, se conceptualizará una *situación protogeométrica* determinada. En este caso, un triángulo rectángulo cuyos vértices son: extremo superior de la vara contra la pared, extremo inferior de la vara contra el suelo, esquina donde pared y suelo se tocan. Además, se introduce otro elemento para establecer el problema, que es el hecho de que se ha hecho descender la vara una distancia *d* desde donde estaba situado su extremo superior, avanzando por lo tanto otra distancia *s* su extremo inferior (Hoyrup 2002, 275-276; Friberg 2007a, 46-48).

No vamos a explicar el procedimiento porque consiste básicamente en la aplicación de la regla de la diagonal. Lo hemos querido presentar, sin embargo, porque nos parece característico de esta tradición de matemáticas supra-utilitarias que se desarrollaron extensamente durante este período.

2.2 El procedimiento *gou gu* en los *Nueve capítulos*

Ya mostramos sucintamente algunas de las características generales del capítulo 9 de los *Nueve capítulos*, que es precisamente el capítulo dedicado al procedimiento *gou gu* – aunque este procedimiento aparece, de manera menos sofisticada, en la obra *Shu* (數) recién excavada y perteneciente al período Qin, y su origen pudo estar en la obra astronómica *Zhou bi*–. En esta tradición, como en la mesopotámica, tampoco existieron teoremas. Además, no se solía hablar de "triángulos" o "triángulos rectángulos", sino del lado pequeño (*gou*) y lado grande (*gu*) que juntos determinarían la hipotenusa (*xian*).

A continuación, vamos a mostrar algunos problemas de este capítulo. En primer lugar, vamos a ver los tres primeros problemas y el procedimiento para resolverlos.

> (9.1) Supongamos que la base (*gou*) sea de 3 *chi* y la altura (*gu*) de 4 *chi*. Se pregunta cuánto es la hipotenusa.
> Respuesta: 5 *chi*.
> (9.2) Supongamos que la hipotenusa sea de 5 *chi* y la base (*gou*) de 3 *chi*. Se pregunta cuánto es la altura (*gu*).
> Respuesta: 4 *chi*
> (9.3) Supongamos que la altura (*gu*) sea de 4 *chi* y la hipotenusa de 5 *chi*. Se pregunta cuánto es la base (*gou*).
> Respuesta: 3 *chi*.
> Procedimiento de la base (*gou*) y de la altura (*gu*): base (*gou*) y altura (*gu*) cada uno multiplicados por ellos mismos, sumamos (los resultados) y esto se divide por extracción de la raíz cuadrada, que da la hipotenusa.
>
> De otra manera, la altura (*gu*) se multiplica por sí misma, sustraemos de esto la hipotenusa multiplicada por sí misma. Dividimos el resto por extracción de la raíz cuadrada, que da la base (*gou*).
>
> De otra manera, la base (*gou*) está multiplicada por sí misma, sustraemos de esto la hipotenusa multiplicada por sí misma. Dividimos el resto por extracción de la raíz cuadrada, esto hace la altura (*gu*) (traducción de Chemla & Guo 2004, 705-707)

Liu Hui muestra la corrección de este procedimiento mediante el uso de un diagrama (Img. 7.2), el cual es similar al usado por Zhao Shuang en sus comentarios al *Zhou bi* –ver Img. 6.18–. Afirma Liu Hui,

> la base (*gou*) multiplicada por sí misma hace el cuadrado bermellón, la altura (*gu*) multiplicada por sí misma un cuadrado azul-verde, y hacemos que se compensen lo que sale y lo que entra, que cada uno se ajuste a su categoría[19]; luego, sobre la base de que mantenemos

[19] Este término de categoría (*lei*) no aparece en el clásico, y es introducido específicamente por Liu Hui. El uso de este y otros términos refleja la libertad intelectual de la que hablamos anteriormente de la que pudo disfrutar este matemático. En particular, Liu Hui citará el *Yijing* o *El clásico [Libro] de los cambios* cuando

aquellas (piezas) que quedan sin moverse, generamos por reencuentro el área (*mi*) del cuadrado de la hipotenusa. "Dividiendo esto por la extracción de la raíz cuadrada, esto hará la hipotenusa" (traducción de Chemla & Guo 2004, 705)

En el comentario de Liu Hui vemos que este introduce un diagrama –*tu*–, el cual no aparecía en el clásico, y un razonamiento geométrico, para explicar por qué este procedimiento *gou gu* es correcto; esto es, está mostrando a través del uso de colores y manipulación de las partes del diagrama que el cuadrado de *gou* y el de *gu* son iguales al cuadrado de la hipotenusa. Además, este será un procedimiento *general*, aunque use en este caso números sencillos para no complicar los cálculos.

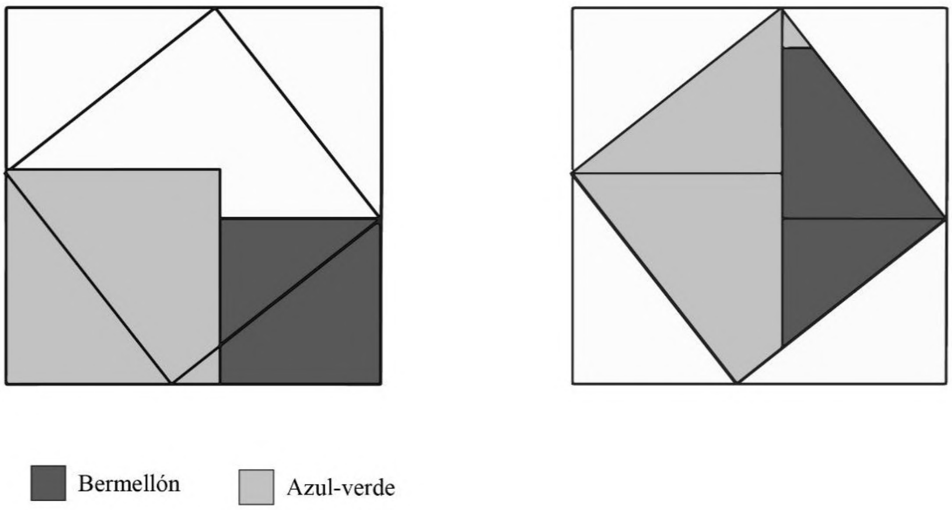


Imagen 7.2 Reconstrucción de Chemla & Guo (2004, 879) del diagrama que acompaña al procedimiento *gou gu* en los problemas 9.1, 9.2 y 9.3.

En el problema 9.6 se nos presenta el procedimiento *gou gu* en relación con una situación aparentemente práctica. Tenemos un estanque cuadrado de 1 *zhang* de lado, con un junco en su centro que sobresale 1 *chi* por encima del nivel del agua, y que al apoyarse en el borde del estanque llega a la altura de la superficie del agua (Img. 7.3 B). La pregunta es,

introduce este término. En esta obra se habla de la recolección o reunión de métodos según su categoría, que es un principio general que también sigue los *Nueve capítulos*, la elaboración de los distintos capítulos agrupando problemas similares; esto es, que pueden ser agrupados bajo la misma categoría. Por otro lado, Liu Hui usa este término para justificar los procedimientos del clásico, de tal manera que no hará referencia a las operaciones particulares de cada problema, sino a la categoría general de los términos implicados en estos procedimientos (Chemla & Guo 2004, 948-949).

¿cuánto mide la profundidad del agua y cuánto la longitud del junco? (Chemla & Guo 2004, 711).

A continuación, el clásico da la respuesta, y posteriormente el procedimiento. En primer lugar, nos pide que multipliquemos la mitad del lado del estanque por sí mismo; luego sustraemos lo que sobresale el junco del agua multiplicado por sí mismo. Dividimos entonces el resto de esta sustracción por el doble de lo que sobresale del agua, obteniendo así la profundidad del agua. Sumamos a este resultado la cantidad de lo que sobresale el junco del agua, y obtendríamos la longitud del junco (Chemla & Guo 2004, 711).

Como mencionamos en el capítulo anterior, es común que el clásico únicamente prescriba el procedimiento para resolver el problema, sin ofrecer ninguna explicación ni justificación. Será precisamente Liu Hui en sus comentarios quién establezca cuál es el razonamiento geométrico en el que podemos fundamentar la corrección de este procedimiento.

En primer lugar, Liu Hui señala que la mitad del lado del estanque será la base (*gou*), la profundidad del agua la altura (*gu*), y la longitud del junco la hipotenusa (*xian*). De hecho, Liu Hui señala que, con la ayuda de la base y la hipotenusa, hacemos aparecer la altura (Img. 7.3).[20] Una vez descrita la "situación geométrica" inicial, el procedimiento comienza multiplicando la base por sí misma, con lo que "hacemos aparecer" el área del *gnomon*, que será la figura fundamental en la que Liu Hui se apoyará para explicar este procedimiento. Lo que hemos hecho aparecer es el área de la base, la cual será posteriormente transformada en un gnomon.[21] Además, multiplicamos lo que sobresale el junco del agua por sí mismo[22] –que es la diferencia entre la hipotenusa y la altura–, y lo sustraemos al gnomon que habíamos formado anteriormente.

[20] Como hemos señalado en otras ocasiones, en la tradición matemática china el triángulo rectángulo no era considerado a la hora de aplicar el procedimiento *gou gu*. Lo que en esta práctica tenemos son dos lados, que al unirlos "hacen aparecer" (*xian*) el tercer lado (cf. Chemla & Guo 2004, 1009-1010).

[21] Como ya dijimos en el capítulo anterior, Liu Hui usará en este capítulo cuatro figuras fundamentales, reducibles a dos. La primera de ellas ya la hemos presentado en relación con los problemas 9.1-9.3 –ver Img. 7.2–. La segunda figura es la del *gnomon*, la cual introduce al final del problema 9.5, y que usará en los problemas 9.6-9.10.

[22] Como señalan Chemla & Guo (2004, 882), aquí la operación de multiplicación por sí mismo es inútil, ya que da como resultado 1. Esto pondría de manifiesto que lo que se está haciendo es presentar un *procedimiento general* independiente a los valores que el propio texto utiliza.

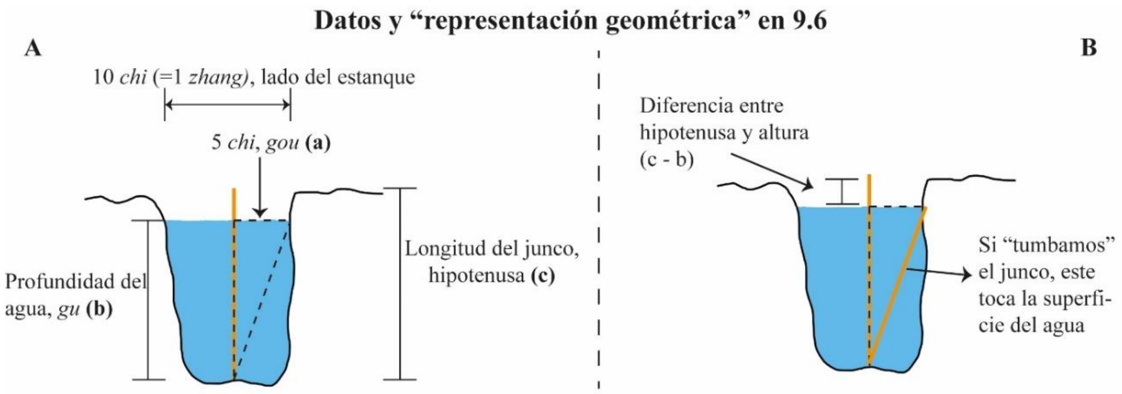


Imagen 7.3 A Datos y "representación geométrica" descrita por Liu Hui en 9.6; B otros datos que aparecen descritos en el problema, y que serán importantes a la hora de resolver el problema.

A continuación, Liu Hui va a presentar un procedimiento que, a diferencia de lo que establece el clásico, nos dará como resultado la longitud del junco (*xian* o hipotenusa), y no la profundidad del agua (Chemla & Guo 2004, 882). Pero una modificación muy simple de su argumento da cuenta del procedimiento original.

En primer lugar, Liu Hui nos dice que la diferencia (c – b) haría la anchura del gnomon, y la profundidad del agua (*gu*, b) la altura. Esto forma los dos rectángulos que podemos ver representados en el siguiente diagrama (Img. 7.4), y que van a facilitar el cálculo del *gu*, la profundidad. Al restar el cuadrado pequeño –o sea, (c – b) al cuadrado– del cuadrado del *gou*, obtenemos un área que es igual a la de los dos rectángulos. Dividiendo entonces por 2(c – b), vamos a obtener el valor de b, el *gu*.[23]

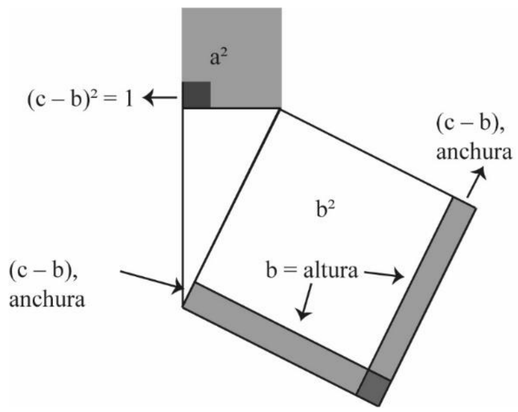


Imagen 7.4 Representación diagramática de la explicación de Liu Hui usando el gnomon.

[23] Podemos modernizar la idea del siguiente modo: sabemos que el cuadrado a^2 es igual al gnomon, por construcción (y por la regla del *gou gu*); pero el gnomon está compuesto de dos rectángulos b·(c – b) más el cuadrado pequeño; es decir, $a^2 = 2b\cdot(c - b) + (c - b)^2$. De aquí surge inmediatamente el procedimiento de los *Nueve capítulos*: despeje el lector, y verá que a^2 - $(c - b)^2$ partido por 2·(c – b) es igual a b.

Finalmente, aunque Liu Hui no lleva a cabo esta operación obvia, si sumamos lo que sobresale el junco del agua (c – b) al valor del *gu* (b), obtendremos el valor de la hipotenusa (c), o lo que es lo mismo, del largo del junco.

2.3 El teorema de Pitágoras en los *Elementos* de Euclides

Euclides demostrará el Teorema de Pitágoras en la prueba I.47. Esta prueba, tal y como ya presentamos en el capítulo 5, comienza con la enunciación (*protasis*) de la proposición que se quiere probar: “en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto”. Esta proposición quedará ejemplificada por un diagrama concreto, el cual irá manipulándose durante la demostración.

En segundo lugar, tendríamos la presentación (*ekthesis*), donde se muestra lo dado, y la especificación (*diorismos*) (Img. 7.5). En esta práctica matemática los diferentes objetos geométricos son introducidos a partir del uso de letras con la que indicamos sus puntos clave de conexión. Por ejemplo, el triángulo ΑΒΓ es denominado así por sus tres vértices, Α, Β y Γ. Además, como todavía no se han construido los cuadrados, estos se denominan en relación a los lados del triángulo; en este caso, tenemos los cuadrados ΒΓ, ΒΑ y ΑΓ.

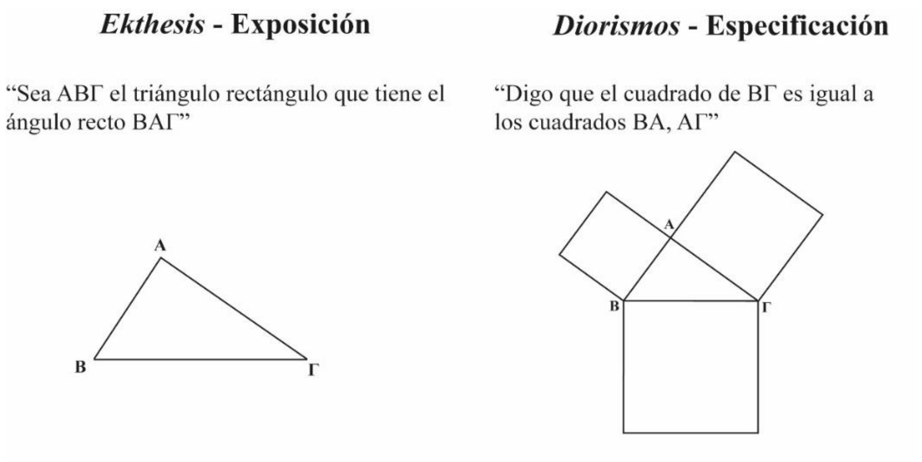


Imagen 7.5 Exposición y especificación de la prueba I.47.

Comienza entonces la construcción. En primer lugar, Euclides tiene que construir los cuadrados sobre los tres lados del triángulo. Para ello, hará uso de lo que se ha probado anteriormente en I.46, que es precisamente cómo trazar un cuadrado a partir de una recta dada. Posteriormente, mediante construcciones permitidas por el postulado 1 –"postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera"–, Euclides traza tres líneas rectas que usará durante la demostración.

La prueba sigue con la demostración (*apodeixis*) –de la cual vamos a presentar los aspectos más interesantes para el posterior análisis comparativo–. En primer lugar, y haciendo uso de la noción común 2, Euclides muestra que como los ángulos ΔΒΓ y ΖΒΑ son iguales, porque ambos son rectos, seguirán siendo iguales si a ambos le añadimos algo igual, que en este caso será el ángulo ΑΒΓ (Img. 7.6 A). Basado en ello, y con lo demostrado en I.4 –conocido como el teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado–, demuestra que los triángulos ΑΒΔ y ΖΒΓ son iguales (Img. 7.6 B).

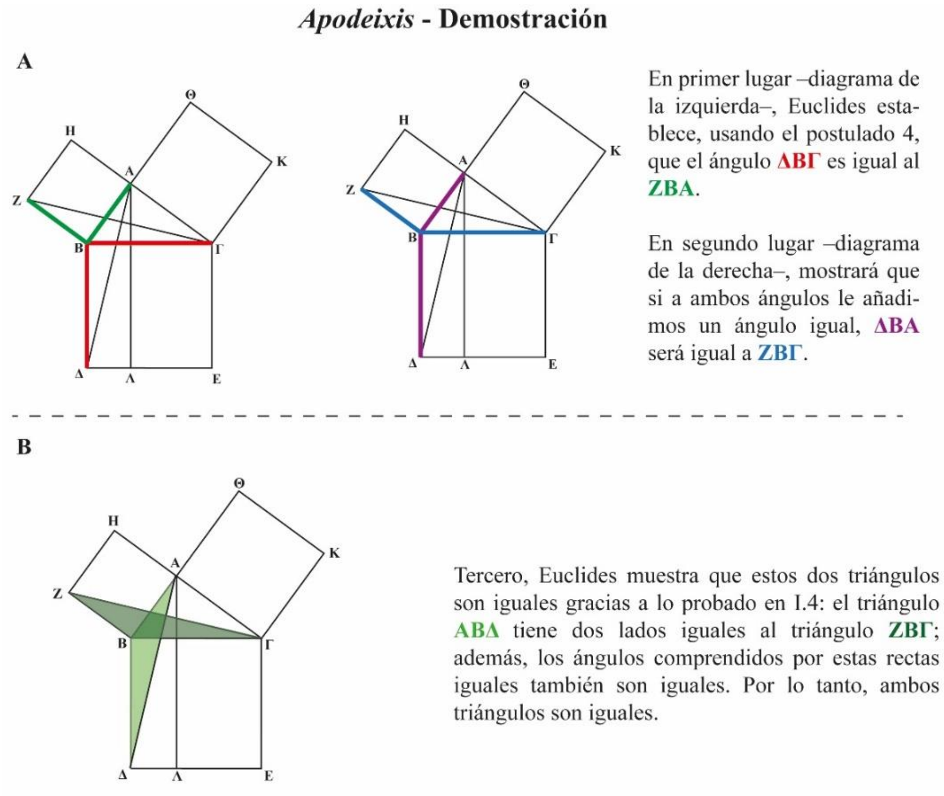


Imagen 7.6 A: Euclides muestra la igualdad de ángulos; B: demostración de la igualdad de triángulos gracias a lo probado en I.4.

La última parte de la demostración la podemos dividir en dos partes. En primer lugar, haciendo de nuevo uso de algo probado anteriormente, en I.41, Euclides muestra que el paralelogramo ΒΛ y el cuadrado ΗΒ son el doble que los triángulos ΑΒΔ y ΖΒΓ, respectivamente; esto puede justificarse con el teorema que afirma que dos triángulos con la misma base y entre las mismas paralelas son iguales –en área, I.37–. Esto le permite, valiéndose de la noción común 2, mostrar que el rectángulo BΛ es igual al cuadrado HB (Img. 7.7 A). Para finalizar, Euclides vuelve a recurrir a la construcción, y trazará dos nuevas líneas para mostrar que, como en el caso anterior, el paralelogramo ΓΛ es igual al cuadrado ΘΓ. De esta manera, afirma Euclides que el cuadrado construido sobre la hipotenusa, BΓ, es igual a los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, BA y AΓ (Img. 7.7 B).

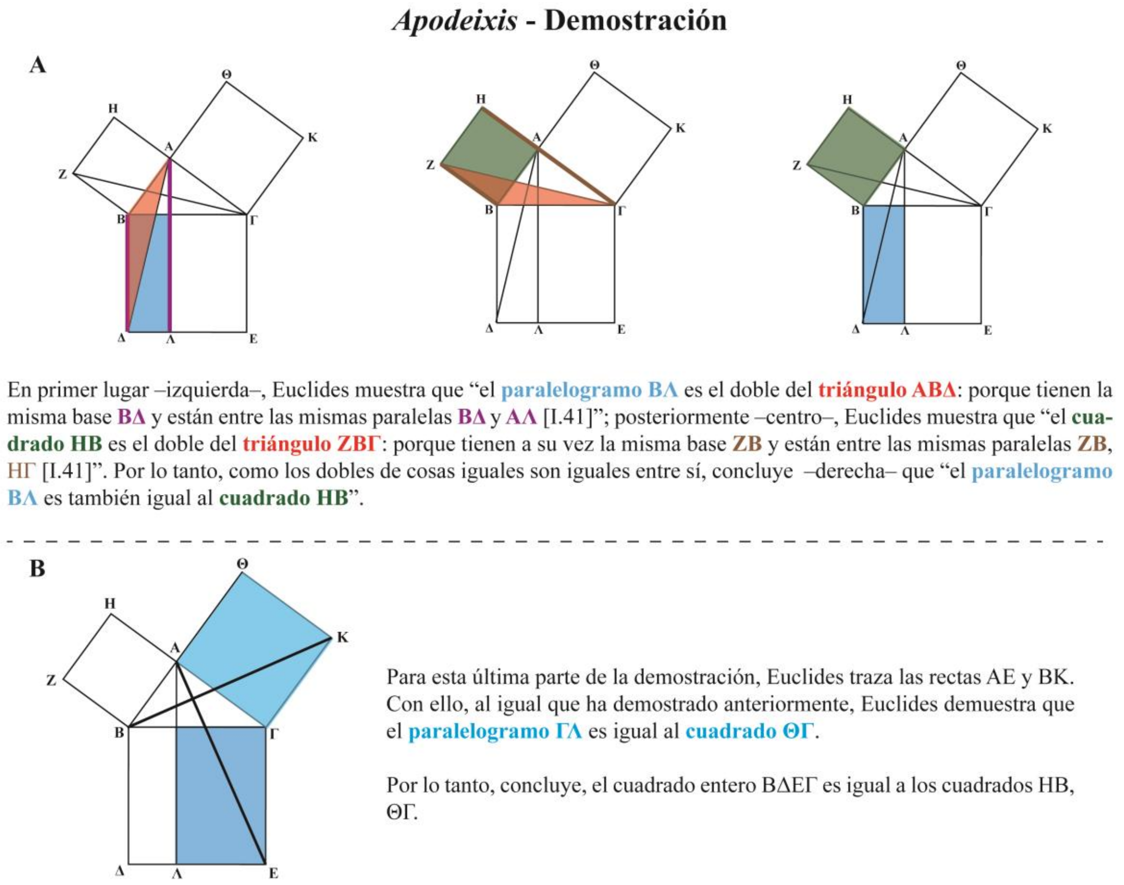


Imagen 7.7 A: Euclides muestra que el paralelogramo BΛ es igual al cuadrado HB; B: demostración de que el paralelogramo ΓΛ es igual al cuadrado ΘΓ.

Llegamos entonces al último elemento de la demostración, que es la conclusión (*sumperasma*), donde Euclides establece que "por consiguiente, en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto [hipotenusa] es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto [catetos] Q.E.D.".

Podemos observar dos cuestiones clave en relación con esta demostración. Por un lado, Euclides se apoyará en el uso de lo que podríamos denominar un "diagrama estático". Es decir, en esta demostración hemos podido comprobar que nada se "mueve", se "corta" o se "pega". Las únicas acciones que realiza Euclides son la de "trazar líneas" –permitido por postulados–, y la de comparar distintos elementos del diagrama, como ángulos o figuras –permitido por postulados, nociones comunes o proposiciones probadas anteriormente–.

Por otro lado, y conectando con esta primera cuestión, podemos observar que la demostración del teorema de Pitágoras puede dividirse en tres etapas principales. En primer lugar, se muestra la igualdad entre ángulos; en segundo lugar, mostrará la igualdad existente entre triángulos. Por último, apoyándose en todo lo anterior, se muestra la igualdad entre paralelogramos (rectángulos) y cuadrados.[24] De esta manera, Euclides ha conseguido demostrar que los cuadrados construidos sobre los catetos son iguales al cuadrado construido sobre la hipotenusa.

2.4 Un análisis comparativo de la diversidad de prácticas matemáticas

A continuación, vamos a presentar un análisis comparativo de los elementos clave que podemos considerar en relación con cada una de estas prácticas matemáticas. Para ello, nos vamos a apoyar fundamentalmente en los ejemplos que hemos presentado en esta segunda sección, aunque en algunas ocasiones aludiremos a ejemplos que han aparecido a lo largo de este trabajo.

En primer lugar, tenemos que hablar de las **herramientas cognitivas** que usaron los agentes a la hora de elaborar, usar y enseñar este conocimiento. En particular, nos centraremos en dos de ellas, que serán los **diagramas** y el **lenguaje técnico**.[25]

Respecto a los diagramas queremos hacer un breve apunte histórico antes de analizar sus similitudes y diferencias. Ni los diagramas utilizados por Euclides, ni por Liu Hui, ni los diagramas representando los procedimientos mesopotámicos de cortar y pegar han llegado hasta nuestros días. Esto pudo deberse a que se realizaran sobre materiales perecederos que no han sobrevivido al paso de los años, como pergamino o papel, e incluso se pudieron utilizar pizarras de arena para realizar estos diagramas a la vez que se seguía el procedimiento o prueba –Mesopotamia y Grecia–, o bloques de un tamaño

[24] Hay que tener en cuenta que estamos realizando un ejercicio de simplificación de una prueba que, por supuesto, se compone de muchas más etapas, cada una de las cuales puede contener distintos elementos, como construcciones, uso de nociones comunes, o comparación entre figuras o sus elementos.

[25] No vamos a analizar comparativamente, en este caso, lo que podríamos denominar **herramientas técnicas**, como sería el compás o las reglas.

estándar, así como papel cuadriculado –China–. Los diagramas que hoy tenemos son reconstrucciones históricas basadas en evidencia textual y filológica (cf. Netz 1999, 13-32; Hoyrup 2002, 103-106; Chemla 2010). Los únicos que nos han llegado son los diagramas que aparecen en las tablas mesopotámicas –ver nota 26–, y de los que hablaremos a continuación como "diagramas estructurales", siguiendo a Hoyrup (2002, 105).

Una de las similitudes respecto a los diagramas es que estos no fueron utilizados en estas prácticas como apoyo o representación visual del problema.[26] Lo importante no es cómo se representó la información protogeométrica relevante en los diagramas, sino **cómo se interpretó** dentro del conjunto de la práctica matemática (Giardino 2013). Íntimamente relacionado con esta característica es la cuestión de que estos diagramas tuvieron que ser **manipulados** por los agentes. Sin embargo, la forma específica de manipulación en cada una de estas prácticas difiere. Lo vamos a presentar a continuación atendiendo a tres características o elementos relacionados con dicha manipulación, como es la relación entre **texto** y diagrama, la **naturaleza estática** o **dinámica** de la práctica diagramática, y por último, los **fines** con los que se usaron estos diagramas.

En primer lugar, hemos podido observar a lo largo de este trabajo que en todas las culturas analizadas los diagramas protogeométricos o geométricos fueron utilizados junto a un **texto**. Por lo tanto, cada una de estas prácticas matemática tuvo que desarrollar toda una serie de elementos con los que unir o conectar estos dos tipos de información –textual y diagramática–. En el caso mesopotámico, esta conexión se llevó a cabo haciendo referencia al elemento particular de la figura a transformar o mover. Por ejemplo, en el caso del problema #9 de la tabla BM85196 se introduce en primer lugar el elemento geométrico o figura: "una vara, 30". Posteriormente, este puede ser manipulado haciendo de nuevo referencia al elemento particular que estamos manipulando: "Tú, haz sostener 30, 15 ves".[27] En el caso de las matemáticas chinas, hemos podido observar una conexión

[26] Excepto en el caso de los "diagramas estructurales" mesopotámicos, que representaban la información inicial del problema –ver imágenes 4.8 o 4.17–. Estos pudieron usarse como apoyo visual para ofrecer al escriba o alumno una visión general de la situación geométrica del problema (Robson 2008, 66-90).

[27] Como señalamos anteriormente, este es un caso de matemáticas supra-utilitarias. En particular, esta vara es introducida para que, junto al suelo y la pared en la que se apoyará, forme la figura de un triángulo rectángulo. Por lo tanto, cuando el texto nos dice "Una vara, 30", el elemento geométrico que está introduciendo es el lado de un triángulo rectángulo. Por otro lado, con la operación "Tú, haz sostener 30, 15 ves", lo que el texto nos está diciendo es que realicemos la operación de multiplicar este lado por sí

texto-diagrama similar a la mesopotámica en el problema 9.6.[28] Sin embargo, esta conexión se llevó a cabo de otra forma, que fue precisamente a través del uso de colores con los cuales se hace referencia a los distintos elementos diagramáticos que aparecen y son manipulados durante el procedimiento –lo hemos visto en los casos 9.1-9.3, por ejemplo–. Finalmente, en la geometría euclidiana esta conexión se llevó a cabo usando letras de una manera muy sistemática y precisa. Con estas letras, el texto hace referencia a los puntos clave de conexión de las distintas figuras geométricas, así como a distintos elementos geométricos –ver I.47–.

En segundo lugar, tenemos la cuestión de la **naturaleza estática** o **dinámica** de estas prácticas diagramáticas. En particular, si nos fijamos en los términos usados en la manipulación de los diagramas en las tradiciones mesopotámica y china, estos términos nos hacen entender que el movimiento era una parte esencial de dichas prácticas. Por ejemplo, se usaron términos técnicos que hacen referencia a "cortar", "abrir", "mover", "hacer sostener", "unir", etc. Sin embargo, en los *Elementos* de Euclides el movimiento no fue esencial para su práctica diagramática.[29] Los diagramas son manipulados siguiendo las indicaciones textuales, ciñéndose al uso de regla y compás –rectas y círculos–, reglas de construcción de los postulados, y al conocimiento probado anteriormente. Por lo tanto, vemos que las prácticas mesopotámicas y china abogan o establecieron un enfoque dinámico del uso de diagramas, mientras que en Euclides este intenta –en la medida que puede– establecer un enfoque estático en el que las figuras o sus elementos no se mueven, sino que están dados en su posición.

En relación con la naturaleza de cada una de estas prácticas diagramáticas, tenemos la cuestión de la posibilidad de deformar dichos diagramas durante su manipulación. Por un lado, era absolutamente necesario que los diagramas dinámicos de las prácticas mesopotámica y china no se deformaran durante su manipulación; esto es,

mismo –lo estamos cuadrando–. Al hacerlo, el texto nos indica "15 ves", que es precisamente el área del cuadrado que hemos construido con el lado del triángulo rectángulo.

[28] Por ejemplo, los elementos o figuras geométricas eran introducidos de la siguiente manera por Liu Hui: "si tomamos la mitad del estanque cuadrado y lo dividimos por 2, obtenemos 5 *chi*, esto hace la base (*gou*)". Posteriormente, estos elementos serán manipulados: "efectuando la multiplicación de la base (*gou*) por ella misma, hacemos aparecer el área (*mi*) del gnomon" (Chemla & Guo 2004, 711).

[29] Excepto en tres pruebas –I.4, I.8 y III.24– en las que se usa el método de superposición; esto es, mover una figura o línea sobre otra para ver su coincidencia (Heath 1956, 249). Esto parece ser un remanente de formas anteriores de razonar que no se han conseguido eliminar –aunque eso sería el objetivo deseado–.

los movimientos a realizar con sus partes tenían que ser rígidos, sin deformación.[30] Si nos fijamos por ejemplo en el diagrama de los problemas 9.1-9.3 de los *Nueve capítulos*, podemos ver enseguida que si algunas de las partes que movemos durante el procedimiento se deformara, no alcanzaríamos la conclusión de que el cuadrado de *gou* y *gu* es igual al cuadrado de la hipotenusa. Sin embargo, la información co-exacta de los diagramas euclidianos se mantendría aunque estos se deformaran –siguiendo siempre la disciplina diagramática– (cf. Manders 2008a; 2008b). Por ejemplo, en el caso de I.47 que el ángulo ZBA más el ABΓ formen el ángulo ZBΓ es información que podemos extraer directamente del diagrama, y que permanecería estable bajo pequeñas deformaciones del diagrama.

Para terminar, en los casos mesopotámico y chino los diagramas fueron utilizados principalmente con **fines pedagógicos** y **explicativos**. Es decir, se usaron para mostrar la corrección de los pasos del procedimiento, y hacer más claro el significado de los cálculos.[31] Además, en estas prácticas no se ofreció ninguna justificación ni fundamentación acerca del uso de estos diagramas. Su uso, por decirlo de alguna manera, fue muy directo y transparente. Al poder mover partes de la figura de manera rígida, en estas prácticas se puede observar clara y rápidamente por qué ciertos elementos o figuras son iguales, mayores o menores a otros elementos o figuras.[32] En el caso de la geometría euclidiana los diagramas fueron utilizados para **promover inferencias**. Sin embargo, los diferentes pasos de las inferencias que nos permiten establecer igualdades entre figuras o partes de figuras en esta práctica se llevan a cabo de una manera menos directa.[33] Esto se

---

[30] Es posible que estas prácticas diagramáticas dinámicas emergieran en relación con las tareas llevadas a cabo por los agrimensores. En particular, este grupo llevaba a cabo en su propia práctica la comparación de áreas, longitudes y volúmenes de figuras sólidas, y consideraban generalmente que las áreas parciales son igual al área total a la hora de medir y dividir los terrenos (cf. Hoyrup 2002, 96-107; Damerow 2016).

[31] Liu Hui dice en el prefacio a sus comentarios que "la razón para analizar los principios subyacentes con explicaciones verbales y diseccionar las formas usando diagramas, es para permitir al lector que avance sin confusión" –seguimos la traducción de Cullen (1995, 66)–.

[32] Por ejemplo, en relación con el problema 9.6 pudimos observar claramente por qué el gnomon es igual al cuadrado de *gou*, ya que al cuadrado de la hipotenusa le hemos quitado el cuadrado de *gu*.

[33] Por ejemplo, en I.47 vimos que para mostrar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos hay que realizar primero toda una serie de pasos en los que ordenadamente Euclides va mostrando de qué manera ciertas líneas están en línea recta, que ciertos ángulos son iguales unos a otros, y posteriormente, qué cuadrados son iguales a qué paralelogramos en función de que estos sean el doble de triángulos que anteriormente había mostrado que también eran iguales.

relaciona con el hecho de que en esta práctica diagramática se evitó el movimiento de las figuras y sus elementos, o la utilización de métodos de cortar-y-pegar. De esta manera, Euclides consigue que el papel que estos diagramas tuvieron en la demostración fuera muy restringido y controlado.[34]

En segundo lugar, otra herramienta que nos parece crucial para la formación de este conocimiento protogeométrico y geométrico es el lenguaje. En este contexto, a lo que nos referimos es sobre todo al **lenguaje técnico** que es utilizado en estas prácticas para hacer referencia a las figuras protogeométricas y geométricas, sus elementos, así como las operaciones que podemos realizar con ellas.

Por un lado, mostramos en el capítulo cuarto y este capítulo de qué manera a partir del período Uruk la escritura protocuneiforme fue estandarizándose. Sin embargo, estos términos o conceptos tenían una clara vinculación con algunas cuestiones prácticas de esta civilización. Por ejemplo, el signo usado para medir longitudes se pudo derivar del uso de varas para medir terrenos, o el de capacidad derivado del uso de cuencos para alimentar a los trabajadores. Sin embargo, a medida que este conocimiento protogeométrico va acumulándose, el lenguaje utilizado para referirse a las diversas figuras protogeométricas, sus elementos, así como las operaciones que podemos realizar con ellos se sistematiza y se vuelve de esta manera conciso, repetitivo y alejado de cuestiones prácticas. Por ejemplo, hemos visto en #9 BM 85196 que la descripción de una vara sobre una pared se vincula no con la situación práctica descrita, sino con la figura y relaciones (proto)geométricas involucradas en este procedimiento. Además, también mostramos en el capítulo cuarto que todas las figuras son "definidas" de acuerdo a su elemento constituyente –rectángulo y su diagonal, triángulo rectángulo como mitad de un rectángulo, etc.–, y las operaciones fueron también bien definidas dentro de la propia práctica (proto)geométrica –distinguiendo, por ejemplo, hasta cuatro tipos de

[34] Podemos ver un ejemplo de las claras diferencias entre estas prácticas diagramáticas con el siguiente caso. En Db_2-146 y 9.6 se lleva a cabo la operación de "hacer sostener" y "multiplicar por sí mismo" de un lado de un "triángulo rectángulo". De esta manera, lo que hacemos es construir, sin mayor justificación, un cuadrado a partir del lado de dicho triángulo. Sin embargo, hemos podido observar en I.47 que Euclides no construye de la misma manera los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo. Para hacerlo, éste tiene que justificar dichas transformaciones o movimientos diagramáticos en base a proposiciones probadas anteriormente. En este caso, Euclides tiene que hacer referencia a la proposición I.46, en la que prueba precisamente cómo trazar un cuadrado a partir de una recta ya dada.

multiplicación dependiendo de si lo que estamos haciendo es multiplicar dos números, o estamos "haciendo sostener" un lado para construir un cuadrado–.

En China existe una mayor influencia de posibles consideraciones prácticas en los textos protogeométricos del período de los Reinos Combatientes y principio del período Imperial. Por ejemplo, para hablar de "campo triangular" se usa el término *gui*, vinculado este con la práctica ritual de ofrecer sacrificios en terrenos precisamente triangulares (cf. Chemla & Guo 2004, 137).[35] Sin embargo, en los comentarios de Liu Hui a los *Nueve capítulos* estas figuras se definen de acuerdo a su "constitución interna" (*li*); esto es, aquellos elementos clave de cada figura, como la relación entre un rectángulo y su diagonal, o el uso de *gou* y *gu* como dos lados que, mediante su unión, generarán una figura equiparable a lo que nosotros denominamos "triángulo rectángulo". Además, se introducen términos técnicos para las diversas operaciones a realizar, los elementos de las figuras o de esta práctica geométrica en general –como el caso de la definición de área que Liu Hui introdujo–.

Respecto a Grecia hablamos de un primer período protogeométrico, basándonos principalmente en los resultados adscritos a Tales, en el que no se alcanzaron resultados geométricos generales; además, estos resultados se basaron principalmente en un "principio de simetría" en relación a cómo percibimos y manipulamos ciertas formas protogeométricas. Por ejemplo, podemos ver que el diámetro divide al círculo en dos partes iguales trazando dicha línea y doblando el círculo por la mitad. Sin embargo, en los *Elementos* de Euclides las figuras geométricas, sus relaciones y operaciones que podemos realizar con ellas fueron definidas de manera precisa a través de un conjunto de elementos, como fueron las nociones comunes, postulados, definiciones y el conocimiento que va probándose en cada proposición. En muchos casos, incluso una vez

[35] De hecho, es bastante ilustrativo el carácter usado en la escritura en huesos oraculares para hablar de estos terrenos, como los dos casos que mostramos abajo –乙 6776 合 11006 賓組 (izq.) y 林 2.4.17 合 18546 𠂤組 (der.)–; ver referencias en el diccionario online zdict, https://www.zdic.net/zd/zx/jg/%E5%9C%AD, consultado el 3/12/2021.


definidas estas figuras, Euclides procedió a probar cómo eran construidas, como en I.1 donde construye un triángulo equilátero, I.22 donde muestra cómo construir triángulos con tres segmentos dados, o III.1 donde muestra cómo hallar el centro de un círculo.[36] Además, algunos principios subyacentes a las prácticas mesopotámica y china –que el todo es *igual* a la suma de las partes– se encuentran todavía en los *Elementos*, aunque se advierte también un esfuerzo de simplificación. Euclides se limita a postular que "el todo es mayor que la parte", principio que es más débil que el anterior; y justifica cuidadosamente otros resultados más fuertes.

Por lo tanto, podemos observar una similitud general de todas estas tradiciones, y es que a medida que este conocimiento va acumulándose, y mejorándose al ser introducido en contextos donde la educación se ha institucionalizado y la labor de estos agentes no estuvo necesariamente asociada a la resolución de problemas estatales, se vuelve técnico en el sentido de que es un lenguaje alejado del lenguaje ordinario y práctico, siendo además un lenguaje muy conciso, estructurado, limitado y repetitivo. De esta manera, cada figura, sus elementos protogeométricos o geométricos, así como el tipo de operaciones y acciones que podemos realizar con ellos están bien definidos dentro de la propia práctica (proto)geométrica.

Por caracterizar esta similitud con los casos de estudio, hemos podido observar de qué manera en la tradición mesopotámica este tipo de conocimiento siguió una estructura general en todas las tablas, tal y como empezar con la pregunta en primera persona del singular, mostrar la solución como una serie de instrucciones en imperativo o segunda persona del singular, se finalizaba el procedimiento con "este es el procedimiento", e incluso los diagramas fueron utilizados de una manera "estándar". Por otro lado, sobre todo en relación con los *Nueve capítulos*, la variedad de 246 problemas siguió siempre una misma estructura. Primero se plantea el problema a resolver. A continuación, la solución es dada. Finalmente, se muestra el procedimiento por el que se ha llegado a esta solución. Incluso los comentarios de Liu Hui tienen una estructura repetitiva, ya que estos van insertándose a medida que los diferentes pasos del procedimiento van presentándose, creando así una especie de "texto secundario" que sigue la propia estructura del texto principal, que es el del clásico. Finalmente, en los *Elementos* de Euclides mostramos que

[36] Netz (1999) llevó a cabo un estudio cuantitativo de los términos usados en las matemáticas griegas, concluyendo que unas 100-200 palabras fueron suficientes para expresar el 95% de lo que contiene el *corpus* de términos usados en las obras matemáticas griegas que analizó (pp. 161-216).

generalmente las pruebas siguieron también una estructura similar, caracterizada por Proclo en seis partes o elementos. Además, todas estas pruebas terminaron de forma similar, que era con una conclusión simple y directa, lo que para Netz (1999, 206) se puede relacionar con el ambiente socio-cultural general de la democracia griega y la necesidad de persuadir al interlocutor.

Sin embargo, lo que distingue a estas tradiciones es precisamente *cómo* fue usado este lenguaje. En primer lugar, en Mesopotamia se consideraron hasta cuatro tipos de triángulos –simétrico, rectángulo, equilátero o isósceles–, conceptualizados generalmente como figuras que poseen tres lados y cuya área se calcula multiplicando su altura por su anchura (y dividiendo por 2); o en el caso del triángulo rectángulo, cuyos lados están en relación con la regla de la diagonal. Sin embargo, no hay definición al estilo euclidiano de estas formas, sino que estas características las aprendemos o consideramos en relación a *cómo se computaron* las áreas y lados de estas figuras. Además, no poseyeron un concepto preciso de ángulo como cantidad medible. El ángulo más importante para esta tradición fue el ángulo recto, ya que era el que se usaba para multiplicar anchuras y longitudes a la hora de computar áreas, y poseyeron quizás nociones ingenuas de ángulos oblicuos y similitud entre ángulos (cf. Hoyrup 2002, 103-106).

En China, por otro lado, no existió un concepto general de triángulo ni de ángulo. Al igual que en el caso mesopotámico, el ángulo más importante y usado en esta tradición fue el recto, que es el más importante para llevar a cabo la computación de áreas. Lo que encontramos en esta tradición es que lo que nosotros llamamos triángulo rectángulo fue considerado en relación con el uso de sus lados para computar su área. En este sentido, tenemos el uso sistemático de los lados *gou*, *gu* y la hipotenusa uniendo ambos lados. Además, en relación con los campos triangulares del capítulo primero, los elementos fundamentales para calcular su área son, como en el caso mesopotámico, su altura y anchura.

Por último, en los *Elementos* de Euclides se definen hasta siete tipos de triángulos. Esta definición se basó en la posibilidad de distinguir esta figura en base a sus lados, así como sus ángulos. Por lo tanto, vemos que elabora una caracterización de estos conceptos geométricos diferente a las otras tradiciones, siendo la única que usará de manera general el concepto de ángulo como un elemento clave de su práctica matemática.[37] Además,

---

[37] En Grecia se puede ver que los ángulos fueron un elemento clave de esta práctica matemática desde su período protogemétrico. Además, Eudemo el Peripatético escribió un libro que trató únicamente sobre

como ya hemos señalado anteriormente, Euclides también demostró cómo construir algunos de estos triángulos en la propia obra de los *Elementos*.

Estos elementos formarían parte de lo que podemos considerar el **marco simbólico** desarrollado o instaurado en cada una de estas prácticas. Esto es, la imposición de un uso limitado y restringido de los diagramas, el establecimiento de reglas –implícitas o explícitas– para su manipulación e interpretación, así como la elaboración de un lenguaje técnico especializado, estandarizado y repetitivo. De esta manera, crearon un "espacio conceptual" en el que este tipo de conocimiento era desarrollado, y en el que adquiría su significado propiamente protogeométrico o geométrico. Es decir, en este marco simbólico se definirá qué es una figura geométrica, sus elementos clave, así como las operaciones a realizar con los diagramas.

Por lo tanto, lo importante no es cómo estas figuras son *percibidas* por la comunidad de agentes, sino cómo estas son *interpretadas* dentro de cada uno de estos marcos simbólicos (cf. Ferreirós 2016). Además, se crea una especie de lenguaje común y compartido que permite que este conocimiento pueda ser comprendido y usado por una comunidad de agentes, se podrá comprobar a través de la repetición si un procedimiento o resultado es correcto, y se creará una misma "tradición" o "práctica" matemática en la que una serie de problemas son considerados como centrales, se comparten unos mismos valores, metas, y uso restringido de las herramientas, y se considerarán qué métodos y procedimientos son importantes para el desarrollo de este tipo de conocimiento.

En último lugar, vamos a considerar las **metas** asociadas a cada una de estas prácticas matemáticas, las cuales influyeron indudablemente en el tipo de conocimiento y procedimientos que desarrollaron.

En la tradición mesopotámica, estas fueron fundamentalmente prácticas, ya que este tipo de conocimiento se aplicó generalmente a cuestiones agrimensoras y contables. Por ejemplo, se usó de manera general el valor "3" para expresar la relación numérica entre la circunferencia y su diámetro, ya que esta aproximación bastaba para el tipo de problemas que consideraron en esta tradición; además, aunque desarrollaron mejores aproximaciones de esta relación en contextos metrológicos, esta no fue usada para resolver problemas protogeométricos ya que con un resultado aproximado les bastaba para estas metas prácticas (cf. Robson 1999, 37). Sin embargo, también existieron otras

ángulos, y Proclo (165) afirmaba que los ángulos son cruciales para poder distinguir las figuras rectilíneas de las curvilíneas (cf. Gandz 1929).

metas más teóricas o epistémicas en esta tradición. Por ejemplo, en la tabla Db_2-146 podemos ver que el escriba rehízo el problema para mostrar por qué este procedimiento era correcto, preocupándose este agente por la *justificación* de la corrección del procedimiento. Por otro lado, en el caso #9 BM 85196 vimos cómo una situación "práctica" realmente fue usada como excusa para probar y desarrollar las propias herramientas matemáticas de esta tradición. Además, en diversas ocasiones el propio uso del lenguaje, o aplicación extendida de ciertas fórmulas, muestran que también hubo una preocupación por la *generalidad* de sus resultados y procedimientos –recordemos que la fórmula del agrimensor se aplicó de manera *general* a diversas figuras geométricas, aunque su aplicación se correspondía precisamente con la resolución de problemas prácticos–.

En el caso de China, una de las diferencias principales entre la tradición protogeométrica y la geométrica son precisamente las distintas metas que cada tradición persiguió. En el caso protogeométrico, estas fueron metas sobre todo prácticas, relacionadas con labores de medición, construcción y registro contable de bienes. Sin embargo, el propio Liu Hui señala en sus comentarios que lo que él va a hacer es explicar el significado de lo que se establece en esta obra (proto)geométrica. En esta explicación, es donde vemos las nuevas metas de Liu Hui, las cuales fueron buscar aproximaciones más precisas a ciertas relaciones geométricas –el *lü* de la circunferencia y diámetro–, búsqueda de la generalidad de los procedimientos, los cuales consideró como casos paradigmáticos a aplicar a un rango general de problemas[38], prioriza la utilización de procedimientos más económicos (*sheng*) que los presentados en el clásico, la simplicidad y comodidad de los cálculos, etc. (cf. Chemla 2003; Chemla & Guo 2004, 1022-1023). Por lo tanto, la meta que se propone Liu Hui es una meta epistémica, donde prima el análisis y explicación teórica de los procedimientos.

Además, tenemos que señalar que las tradiciones mesopotámicas y china se consideran generalmente tradiciones algorítmicas. Este apelativo a lo que haría referencia es a que los procedimientos de estas dos prácticas se basan principalmente en la presentación de listas de operaciones a realizar para alcanzar las soluciones. Además, las

[38] Por ejemplo, respecto al procedimiento del problema 8.1 comentará "este procedimiento es universal (*dou shu*), pero es difícil de hacer comprender con expresiones abstractas (*Kong ya*), por eso se conecta intencionadamente con el (caso) de los mijos para eliminar el obstáculo" (Chemla & Guo 2004, 10).

dos eran prácticas inductivas[39], cuyos procedimientos se consideraban casos paradigmáticos a aplicar en contextos generales, y no únicamente en relación con los números particulares presentados en cada procedimiento.

En último lugar, en Grecia las metas perseguidas presumiblemente por Euclides fueron la de poder desarrollar un tipo de conocimiento geométrico abstracto y deductivo. Abstracto puesto que en esta práctica matemática no se hace referencia a ninguna cuestión práctica, sino que todos sus elementos y herramientas son definidos únicamente dentro de la propia estructura matemática o geométrica de la obra. Los puntos y líneas euclidianos no se corresponden con ningún tipo de punto o línea que podamos percibir o trazar, ya que son principalmente elementos y figuras teóricas e ideales. Por otro lado, hemos podido observar el carácter deductivo de esta obra ya que esta comienza con unos elementos considerados como dados –nociones comunes, definiciones y postulados–, a partir de los cuales comenzará a demostrar en una secuencia deductiva todas las proposiciones de la obra –se puede ver con total claridad en la prueba I.47–.

Por lo tanto, podemos ver que existen grandes similitudes generales en estas prácticas matemáticas. Sin embargo, también hay diferencias importantes que, bajo nuestro punto de vista, lo que enfatizan es la necesidad de analizar y presentar el conocimiento de estas civilizaciones de manera contextual y comparativa cuando nuestro análisis se centra en los orígenes durante la Historia Antigua de este tipo de conocimiento.

3. Consecuencias para los estudios actuales en "cognición matemática"

Como mostramos en los capítulos de la primera parte de este trabajo, las ciencias cognitivas se caracterizaron teóricamente desde sus inicios como un área del saber que investigaría nuestras capacidades cognitivas desde un punto de vista interdisciplinar. Por lo tanto, los trabajos de algunas áreas de las humanidades y las ciencias sociales se consideran parte fundamental de las ciencias cognitivas.

Sin embargo, este ideal interdisciplinar de trabajo no fue trasladado a la práctica con tanto entusiasmo como teóricamente se había propuesto. En esta última sección, lo que pretendemos es mostrar cómo nuestro estudio contextual y comparativo sobre los

[39] Inducción en el sentido de que, a partir de un caso particular o una figura particular, se extraía una regla general para figuras o casos similares. Hemos visto por ejemplo cómo a partir de casos particulares en relación con "triángulos rectángulos" se extrae la regla general para la diagonal en Mesopotamia, o el procedimiento *gou gu* en las matemáticas de la antigua China.

orígenes del conocimiento geométrico puede ser útil para la investigación actual sobre cognición geométrica.

En primer lugar, si hiciéramos un ejercicio de interpretación en el que nos convirtiéramos en un científico cognitivo que no atiende al contexto arque-histórico del conocimiento geométrico de la antigüedad, podríamos llegar a la siguiente conclusión: existe un tipo de conocimiento equiparable en relación con el "Teorema de Pitágoras" en estas tres tradiciones. Esto es, tenemos como figura central un triángulo rectángulo –figura de tres lados con uno de sus ángulos rectos–, del que sabemos que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Se podría concluir, por lo tanto, que existe un conocimiento geométrico universal, y que podemos equiparar al conocimiento geométrico euclidiano puesto que esta es la práctica más sofisticada y cercana a nuestras propias prácticas matemáticas.

Esta conclusión estaría en la línea de la propuesta sobre la universalidad de ciertas intuiciones geométricas y la existencia de una geometría natural. De hecho, podría considerarse como otro tipo de prueba, en este caso arqueo-histórica, que pondría de manifiesto que los tres elementos clave de la caracterización euclidiana del espacio –distancia, **ángulo** y sentido–, que son los que determinan cómo percibimos el mundo y los objetos, influyeron indudablemente en cómo estas tres culturas alcanzaron el mismo tipo de resultados.

Sin embargo, esta situación cambia cuando nos fijamos no solo en las similitudes entre estas prácticas matemáticas, sino precisamente en las diferencias de *cómo* llegaron cada una a este resultado. Una diferencia fundamental [40] es que ni en la práctica mesopotámica ni en la china el concepto de ángulo fue conceptualizado como cantidad medible, a diferencia de la práctica euclidiana, y en la china ni siquiera existió el concepto de triángulo o triángulo rectángulo. Por lo tanto, lo que hemos querido poner de manifiesto es que, aunque nosotros –filósofos, historiadoras o científicos del siglo XXI– veamos triángulos rectángulos y el establecimiento o uso del teorema de Pitágoras, las fuentes materiales y textuales lo que evidencian es que esto no es lo que ocurrió en dos de estas tres prácticas matemáticas. Esto puede servir para ilustrar por qué consideramos que los experimentos de la aproximación CKS presentados en el capítulo dos no están

[40] No menos fundamentales serían las diferencias que hemos presentado en la sección anterior en relación a la práctica diagramática de cada una de estas tradiciones, el rango de figuras geométricas que interesó a cada comunidad, o cómo se estructuró el conocimiento (proto)geométrico en cada una de ellas.

bien fundamentados. Recordemos que se pedía a la población MundUrukú dibujar triángulos con sus manos, o distinguir qué figura entre seis era la diferente. Al poder llevar a cabo estas tareas –que son principalmente perceptuales– estos científicos concluyeron que era claro que existía cierto conocimiento geométrico universal que es equiparable al expuesto por Euclides.

Por lo tanto, consideramos que es fundamental tomar precauciones a la hora de estudiar y analizar casos del pasado –sobre todo de la Prehistoria–, así como experimentos en los que las pruebas consisten en tareas eminentemente perceptivas –donde el nivel involucrado es el primero, de nuestra cognición visoespacial– para apoyar tesis cognitivas universalistas acerca del *conocimiento geométrico*. Como hemos señalado, no hay que confundir que *nosotros* o algún sujeto perciba formas como "triangulares" con la posesión de conocimiento protogoemétrico o geométrico sobre esas figuras.

Por otro lado, mostramos en el capítulo segundo tres elementos que convertían a la geometría euclidiana en la mejor candidata para caracterizar la geometría natural –innata y universal–. Uno de ellos era la 'Inmensa utilidad de los conceptos Euclidianos', los cuales se consideraban necesarios para el desarrollo de logros culturales humanos como la medición del espacio o el desarrollo de las artes.

De nuevo, hemos podido observar de manera detallada cómo los sistemas de medición se desarrollaron de manera paralela al conocimiento protogeométrico en ambas civilizaciones, Mesopotamia y la Antigua civilización China. La "inmensa utilidad" de los conceptos geométricos no requiere la elaboración de un cuerpo de conocimiento tan complejo como el de los *Elementos*. Además, como hemos señalado anteriormente, aunque se hubieran desarrollado como consecuencia del establecimiento de este tipo de conocimiento, en estas tradiciones no se conceptualizó ni usó el concepto de ángulo. Nuestro caso de estudio arqueo-histórico demuestra que la forma de conceptualizar este tipo de logros culturales, aunque efectivamente pueden verse influenciados e influenciar al desarrollo de este tipo de conocimiento, no tuvieron por qué hacerlo de acuerdo a los elementos básicos de la geometría euclidiana.

Por otro lado, queremos destacar que nuestro análisis comparativo supone una defensa de una aproximación enculturada a la cognición geométrica y el desarrollo de este tipo de conocimiento. En primer lugar, queremos ilustrar este fenómeno con la conclusión a la que llega el antropólogo Trigger (2003) hacia el final de su obra,

> los antropólogos están de acuerdo en que toda percepción humana está cultural y simbólicamente mediada. Incluso los positivistas más extremos reconocen que la comprensión del mundo está mediada por las categorías y significados asociados que los individuos aprenden como miembros de sociedades y que, por lo tanto, el comportamiento humano representa una adaptación no al mundo tal y como este es, sino al mundo tal y como los individuos imaginan que es (p. 653)

Y esta es, precisamente, la conclusión principal a la que llegamos en este trabajo. El conocimiento protogeométrico y geométrico en la antigüedad emergió en **nichos socio-cognitivos** e **institucionales** diversos, en el que un **agente** o más bien **comunidad de agentes** desarrollaron este tipo de conocimiento, por un lado, influidos por el **contexto** socio-cultural y político en el que tuvieron que trabajar, y por otro, mediante el uso controlado de herramientas tanto técnicas como **epistémicas**, como podrían ser los **diagramas** y el uso de un **lenguaje técnico**. Además, esta comunidad de agentes compartía una serie de **metas** que alcanzar con el desarrollo de este tipo de conocimiento, y este conocimiento tuvo que ser desarrollado en un **marco simbólico** determinado.

Respecto a este desarrollo, podemos inferir dos conclusiones principales. Por un lado, para entender cómo surgió este tipo de conocimiento en nuestra especie no es suficiente con prestar atención únicamente al desarrollo de nuestras capacidades cognitivas; o, mejor dicho, no es sensato separar los ámbitos de la evolución cognitiva y cultural, sino que ambos coevolucionan a medida que el ser humano se relaciona con su ambiente tanto físico como cultural o simbólico.

Por otro lado, e íntimamente relacionada con la conclusión anterior, hemos podido observar que el desarrollo del conocimiento protogeométrico y geométrico estuvo culturalmente mediado en todas las civilizaciones que hemos analizado. Es decir, este conocimiento se elaboró usando herramientas físicas –regla, compás, pizarras, papel, diagramas– y simbólicas –diagramas, uso de un lenguaje técnico–. Además, se creó dentro de un nicho socio-cognitivo particular, como pudo ser su relación con el desarrollo de las prácticas agrimensoras y burocráticas, o, posteriormente, en relación con el desarrollo de la educación matemática y la búsqueda de resolver metas más epistémicas que prácticas.

Además, entroncamos de cierta manera aquí con la visión que proponían algunos autores dentro de los estudios en educación matemática presentados en el capítulo dos. Esto es, hemos podido comprobar que para el pleno desarrollo de este tipo de conocimiento es importante tener en cuenta cómo los agentes manipularon las diversas figuras geométricas, y le dieron un nombre particular –dentro de un marco simbólico determinado– a los elementos clave de estas figuras, a las figuras mismas, así como a las distintas operaciones que son relevantes para la propia práctica matemática. Explicado de una manera un tanto ideal, consideramos que al igual que para los educadores matemáticos es clave *preguntar explícitamente* a los niños y niñas qué están pensando a la hora de manipular y comprender las figuras geométricas, podemos considerar que nosotros mismos estamos preguntando a estas civilizaciones antiguas cómo conceptualizaron estas figuras, y qué métodos emplearon; sus respuestas son precisamente las tablas, textos y herramientas presentadas en los casos de estudio.

Este tipo de conclusiones nos llevan a la defensa de una visión pluralista acerca de los orígenes y desarrollo de este tipo de conocimiento porque, como hemos podido observar, existen diferencias importantes en la manera en la que estos elementos culturales fueron utilizados en cada una de estas civilizaciones.

Consideraciones finales

Podríamos decir que la cuestión central sobre la que se ha vertebrado este trabajo ha sido la de los orígenes del conocimiento matemático; concretamente, los orígenes arqueo-históricos del conocimiento geométrico. Sin embargo, para abordar este tema hemos tenido que tratar con cierto detalle una serie de cuestiones relacionadas con los estudios actuales en torno a la cognición geométrica.

Como hemos podido observar, la investigación acerca de nuestras capacidades cognitivas en relación con el desarrollo del conocimiento geométrico y nuestra percepción del espacio ha ido variando a lo largo de la historia. Es sobre todo notable la introducción de un cuerpo teórico y experimental sofisticado a la hora de analizar estas cuestiones por parte de los científicos cognitivos en la actualidad, fenómeno cuyos comienzos podemos datar de manera incipiente en los trabajos de investigadores como Helmholtz y Poincaré.

Sin embargo, a pesar de estos avances tanto a nivel metodológico como experimental, algunas ideas han ido reapareciendo y reconfigurándose a lo largo de la historia del pensamiento humano. Particularmente, la teoría CKS presenta su noción de "geometría natural" como continuación de la tradición filosófica innatista que remontan a Platón, y más concretamente a Descartes o Kant. En cierto sentido, el debate entre innatismo y experimentalismo continúa, y nunca ha dejado de ser un debate filosófico a pesar de los esfuerzos por convertirlo en uno puramente científico.

Con esto, lo que queremos poner de manifiesto es que las ciencias cognitivas actuales tienen una rica y amplia historia que hunde sus raíces en los comienzos de la filosofía occidental, y que ha ido evolucionando junto a la propia concepción del espacio y las diferentes maneras posibles de matematizarlo. Sin embargo, también hemos visto que el papel que puedan tener diversas áreas, principalmente de las humanidades y ciencias sociales, ha sido relegado en los estudios cognitivos actuales a un plano más bien anecdótico. Desde nuestro punto de vista, el olvido de los análisis y métodos de estas áreas del conocimiento solo puede perjudicar los estudios que estos científicos cognitivos llevan a cabo.

Uno de los problemas sobre el que científicos cognitivos y filósofas de hoy día han llamado la atención es el "caos terminológico" que existe en los estudios en cognición matemática. En particular, hemos mostrado cómo en algunos trabajos en ciencias cognitivas se usan de manera ambigua y poco precisa términos como "geometría", "conocimiento geométrico" y "cognición geométrica". Este uso ambiguo y poco sistemático de los términos no es únicamente un problema lingüístico ya que afecta a las propias conclusiones a las que llegan estas científicas cognitivas. Por nombrar un ejemplo, hemos podido observar cómo, a través de una serie de experimentos relacionados con nuestra percepción visoespacial de formas espaciales concretas, algunas investigadoras concluyen que existe un tipo de conocimiento geométrico innato y universal equiparable al euclidiano. Esto es, que de manera independiente al medio material y cultural en el que crezcan e interactúen los seres humanos, estos siempre desarrollarán un tipo de conocimiento geométrico equiparable al euclidiano gracias a cómo nuestro sistema cognitivo innato nos hace percibir y codificar el espacio.

Sin embargo, este tipo de propuesta universalista ya fue criticada desde los propios inicios de la psicología –ver las propuestas de Helmholtz y Poincaré–, y es ampliamente debatida desde diversas aproximaciones actuales. Cabe mencionar aquí los trabajos en psicología del desarrollo, psicología crítica y postcolonial, educación matemática o filosofía de las prácticas matemáticas.

Para resolver este caos terminológico y conceptual, presentamos en este trabajo nuestra distinción de tres niveles de competencia en la línea de algunas propuestas actuales también críticas con las aproximaciones innatistas a la cognición matemática. En particular, propusimos distinguir un primer nivel de cognición visoespacial, en el cual estaríamos considerando cómo percibimos de manera inmediata y espontánea el espacio gracias a nuestras capacidades cognitivas y motoras. Por otro lado, tendríamos los niveles de conocimiento protogeométrico y geométrico, en los que estaríamos considerando cómo el ser humano *conceptualiza* el espacio, o más bien las figuras espaciales, mediante la introducción de conceptos protogeométricos o geométricos, herramientas cognitivas, así como un marco simbólico general en el que estos conceptos y herramientas serán establecidas y manipuladas de manera concreta.

Entroncamos de esta manera con una cuestión compleja que, como dijimos en la introducción, ha sobrevolado este trabajo. Esta es la pregunta acerca de qué es aquello que llamamos conocimiento geométrico. O lo que es lo mismo, cómo podríamos definir exactamente lo que estamos considerando como conocimiento geométrico. Como hemos podido observar en capítulos anteriores, esta es una cuestión fundamental para áreas como las etnomatemáticas y la arqueología cognitiva, ya que poseer una buena definición de aquello que cuenta como conocimiento matemático les permitirá interpretar ciertos elementos materiales y prácticas culturales como propiamente matemáticas. Para algunos de estos investigadores, además, es posible situar en la Prehistoria los inicios del conocimiento matemático.

Por nuestra parte, establecimos una serie de características generales del conocimiento protogeométrico y geométrico que nos permitieran analizar cómo surgió y se fue elaborando este tipo de conocimiento a partir de los datos arqueo-históricos de los que disponemos. Es decir, cuáles son los elementos mínimos que nos permitirán afirmar que una herramienta, texto o práctica del pasado fue utilizada para la elaboración de este tipo de conocimiento, o se basó en la disponibilidad de tal conocimiento.

Por un lado, los elementos clave para caracterizar el segundo nivel de conocimiento protogeométrico serían:

- se fijan algunos **conceptos** de **figuras básicas**, como el círculo, el cuadrado o el rectángulo. Estos conceptos comenzaron a cobrar una mayor importancia en relación con la resolución de problemas prácticos como la medición y división de los terrenos, construcción de "contenedores" en los que almacenar alimentos, realización de construcciones públicas –zanjas, caminos o edificios monumentales–, así como en la creación de algunos sistemas ideológicos –p. ej., en la civilización china la concepción *sifang* o la teoría *gaitian*–;

- se introducen instrumentos particulares que la comunidad de agentes usará para elaborar, enseñar y utilizar este tipo de conocimiento. Entre estos, podemos distinguir entre **instrumentos técnicos** –p. ej. regla y compás, el gnomon– e **instrumentos cognitivos** –mapas, diagramas, creación y estandarización de las unidades de medición o creación de un lenguaje técnico repetitivo–;

- se establecen algunos procedimientos y relaciones simples, como la fórmula del agrimensor, reglas para computar el área de diferentes figuras, y se fijan valores aproximados para relaciones protogeométricas clave –"3" para la relación aproximada entre la longitud de una circunferencia y el diámetro–.

Por otro lado, el tercer nivel de conocimiento propiamente geométrico poseería las siguientes características clave:

- creación de un **lenguaje técnico** más rico con el que se hace referencia a las figuras espaciales, sus elementos constituyentes, así como las operaciones que podemos realizar con ellas;

- manipulación activa de estas figuras espaciales mediante el uso controlado de **herramientas cognitivas**, siendo la más importante el diagrama. Subrayamos así el papel activo del agente, el cual no solo percibirá estas figuras espaciales, sino que las manipulará e interpretará de acuerdo a una serie de reglas, para así obtener el conocimiento geométrico;

- introducción de los elementos anteriores en un **marco simbólico** general. De esta manera, dichos elementos comenzarán a usarse de manera repetitiva, sistemática y abstracta, alejándose así de cuestiones propiamente perceptivas o meramente prácticas, y centrándose en determinados métodos.

Por lo tanto, no estamos considerando que este sea un cuerpo estático de conocimiento que surgiera de acuerdo a cómo un sujeto perciba y codifique las figuras espaciales gracias a su sistema cognitivo básico; más bien, consideramos que este conocimiento surge gracias a la interacción que se produce entre las capacidades cognitivas de este sujeto y los diferentes tipos de elementos que hemos mencionado anteriormente. Especialmente, los agentes tratarán de una manera más sofisticada y estructurada las propiedades de las figuras espaciales dentro de un marco simbólico particular. De esta manera, lo fundamental no es cómo se perciben las figuras y sus elementos, sino cómo son conceptualizadas y manipuladas para obtener un tipo de conocimiento: aproximado y tosco en el nivel II, cuya meta principal es la resolución de problemas prácticos concretos, y más general, abstracto e ideal en el nivel III de conocimiento propiamente geométrico, cuyas metas son más bien epistémicas o teóricas.

Poseemos así un marco interpretativo general con el que analizar comparativamente el material arqueo-histórico, con especial énfasis en Mesopotamia, la Grecia antigua y la Antigua civilización china, y en relación a cómo los elementos anteriormente descritos fueron apareciendo y estructurándose. De esta manera, podremos estudiar cómo dieron forma a este tipo de conocimiento cada una de estas civilizaciones en el pasado.

Una primera conclusión general de nuestro estudio es que ninguno de los elementos o prácticas de la Prehistoria manifiesta que durante este período se originara el conocimiento (proto)geométrico. Principalmente, no tenemos datos suficientes que nos permitan confirmar que se obtuviera este tipo de conocimiento con los elementos prehistóricos que hemos presentado en este trabajo.

Una segunda conclusión es que los orígenes de este tipo de conocimiento en Mesopotamia y China, que están bien documentados, son bastante similares. Estos se vinculan por un lado con la existencia de una clase encargada de las tareas contables y agrimensoras, y por otro, de las sucesivas reformas y sistematizaciones de los sistemas de notación, unidades de medición, instrumentos matemáticos, cuestiones cosmológicas, y otros elementos asociados a estas prácticas. Posteriormente, las tareas de los encargados de desarrollar y usar este tipo de conocimiento empezaron a no estar necesariamente vinculadas con cuestiones estatales, por lo que estos agentes comenzaron a perseguir metas más epistémicas que prácticas, tales como la reflexión teórica sobre sus propias herramientas de trabajo, y su mejora. En Mesopotamia, se desarrollarán matemáticas supra-utilitarias, aunque este tipo de conocimiento no llegará al nivel III de conocimiento geométrico. En la Antigua civilización china, este conocimiento geométrico sí queda bien ejemplificado con los comentarios de Liu Hui a los *Nueve capítulos*.[1]

Por otro lado, hemos podido observar cómo una amplia variedad de investigadores e intelectuales han creado toda una mitología en torno a los orígenes griegos de este tipo de conocimiento, siendo en esta civilización donde se considera que nació aquello que hoy día podemos seguir reconociendo como geometría. Sin embargo, la realidad arqueo-histórica de esta civilización nos ofrece unos orígenes más bien difusos. En base a fuentes secundarias, se puede establecer un primer período protogeométrico cuyos orígenes se vinculan con un tratamiento novedoso de las prácticas agrimensoras egipcias –y quizá babilonias–. Posteriormente, se creará un marco simbólico general en el que tratar idealmente las figuras espaciales, siendo los *Elementos* de Euclides uno de los ejemplos más citados –aunque este conocimiento propiamente geométrico puede situarse en

[1] El texto de los *Nueve capítulos* junto a los comentarios de Liu Hui nos ofrecen un buen caso de estudio comparativo con el que analizar las diferencias entre los niveles de conocimiento protogeométrico y geométrico de una misma obra. Este estudio, sin embargo, nos habría llevado demasiado lejos de los intereses principales de nuestro trabajo, y esperamos poder retomarlo en un futuro cercano.

autores anteriores al propio Euclides, como Hipócrates de Quíos en el siglo V a.e.c., quién escribió posiblemente unos *Elementos* al estilo euclidiano–.

Además, mostramos que no solo estos orígenes fueron diferentes, sino que también lo es el tipo de conocimiento que cada una de estas civilizaciones desarrolló. En este sentido, vimos que las matemáticas desarrolladas en Mesopotamia y China fueron inductivas y algorítmicas, donde primó la búsqueda de la generalidad de los procedimientos –especialmente en China–, y en las que los diagramas podían incluir el movimiento de figuras –rígidas– para mostrar la corrección de estos procedimientos. Por otro lado, en Grecia se desarrolló un conocimiento deductivo y abstracto, en el que las figuras y sus elementos fueron definidos explícitamente, y cuyas reglas diagramáticas de construcción e interpretación se definieron mediante postulados. Ciertamente, no se puede negar que el estudio de la geometría entre los griegos alcanzó nuevos niveles de desarrollo, amplitud y esfuerzo analítico.

Son tres las ideas o consecuencias principales que pueden considerarse a partir de nuestro estudio. En primer lugar, y a diferencia de las aproximaciones helenofílicas, consideramos que los desarrollos de cada una de estas civilizaciones merecen ser incluidos en la historia general de las matemáticas; es decir, estos desarrollos deberían de ser analizados a la luz de los elementos presentados anteriormente –aparición de un lenguaje técnico, instrumentos, diagramas y marco simbólico–, y no en relación a un supuesto ideal de cómo deberían ser las matemáticas en la antigüedad. Por lo tanto, estamos proponiendo una aproximación pluralista a los orígenes de la geometría, en la que cada práctica matemática sea valorada por cómo fue dando forma y usando diversos elementos, así como las metas propias que se establecieron en cada una de ellas.

En segundo lugar, consideramos que las diferencias entre estas prácticas matemáticas tienen que ser analizadas contextualmente. Es decir, para entender qué tipo de conocimiento desarrolló cada una de estas civilizaciones, y por qué lo hicieron así, es importante analizar los elementos anteriormente citados situándolos en su propio contexto socio-histórico, así como en relación con el nicho socio-cognitivo e institucional en el que los agentes crearon y usaron este tipo de conocimiento. Tal como las aproximaciones helenofílicas tienden a subrayar, la protogeometría en Mesopotamia y China surgió en estrecha relación con la resolución de problemas burocráticos prácticos y problemas estatales. Sin embargo, este tipo de conocimiento siguió desarrollándose, de tal manera que el contexto general en el que estos agentes trabajaban cambió, permitiéndoles así reflexionar sobre sus propias prácticas matemáticas. Esta segunda parte de la historia no suele aparecer reflejada en la imagen popular que tenemos sobre estas tradiciones matemáticas de la antigüedad, y consideramos que merecen ser analizadas para entender cómo este tipo de conocimiento se originó y fue configurándose de diversas maneras en el propio contexto de cada una de estas civilizaciones.

Por último, consideramos que la distinción de los tres niveles de competencia es fundamental para comenzar a entender y clarificar qué es aquello de lo que hablamos cuando hablamos de cognición geométrica. En la línea de diversas aproximaciones enculturadas, defendemos que la cognición (proto)geométrica es aquella involucrada en la elaboración y uso de conceptos geométricos y herramientas cognitivas a la hora de aprender o elaborar conocimiento protogeométrico y geométrico. Esta caracterización más bien esquemática puede desarrollarse plenamente si consideramos la detallada descricpción que hemos ofrecido de los niveles II y III anteriormente. De esta manera, no solo habrá que considerar los elementos de nuestra cognición visoespacial, sino también el surgimiento de conceptos a partir de situaciones prácticas –incluyendo el empleo de herramientas técnicas–, el tipo de razonamiento involucrado a la hora de tratar con estos conceptos, la manipulación activa de las herramientas diagramáticas, las metas que persigue el agente que crea este tipo de conocimiento, y el contexto en el que este tipo de conocimiento fue creado y apoyado. Dichos elementos culturales son clave para entender cómo surgió este tipo de conocimiento en el pasado.

Final considerations

We could say that the main question around which this work has been structured is that of the origins of mathematical knowledge; specifically, the archaeo-historical origins of geometrical knowledge. However, to address this topic we have had to deal in some detail with some issues that concern current studies on geometric cognition.

As we have observed, research and conceptions about our cognitive abilities in relation to the development of geometric knowledge and our perception of space has varied throughout history. Especially notable is the introduction of a sophisticated theoretical and experimental framework by current cognitive scientists when analyzing these questions, phenomenon whose beginnings we can date in an incipient way in the works of scientists like Helmholtz and Poincaré.

However, despite improvements at the methodological and experimental levels, some ideas have reappeared and been reconfigured throughout the history of human thought. In particular, CKS theory presents its notion of a "natural geometry" in continuation of the innatist philosophical tradition dating back to Plato, and more specifically to Descartes or Kant. In a sense, the debate between innatism and experientialism continues, and it have never ceased to be a philosophical debate, despite efforts to turn it into pure science.

What we show with these ideas is that the current cognitive sciences have a rich and extensive history that converge with the beginnings of Western philosophy, and that it has been evolving along with the conception of space itself, and with the different possible forms of its mathematization. However, we have also seen that the role of several areas, mainly from the humanities and social sciences, has been relegated in current cognitive studies to a rather anecdotal plane. From our point of view, forgetting the analyses and methods of these areas of knowledge can only damage the studies that these cognitive scientists carry out.

One of the problems that cognitive scientists and philosophers have called attention to is the "terminological chaos" present in mathematical cognition studies. Particularly, we have shown how terms such as "geometry", "geometric knowledge" and "geometric cognition" are used ambiguously and inaccurately in some works in cognitive science. This is not only a linguistic problem, because it even affects the conclusions that cognitive scientists present in their studies. To illustrate this issue, we have seen how, through a series of experiments related to our visuospatial perception of concrete spatial forms, some researchers conclude that there is a kind of geometric knowledge –innate and universal– that is equated to Euclidean geometry. Independently of the material and cultural environment in which human beings develop and interact, it is alleged, they will always develop a kind of geometric knowledge comparable to Euclidean geometry thanks to how our innate cognitive system makes us perceive and encode the space.

However, this kind of universalist approach was already criticized from the very beginnings of psychological research –see the proposals by Helmholtz and Poincaré– and is widely debated from several current approaches. It is worth mentioning here the works in developmental psychology, critical and postcolonial psychology, mathematical education, or philosophy of mathematical practices.

To solve this terminological and conceptual chaos, we present in this work our distinction of three levels of competence in the line of some current proposals also critical with innatist approaches to mathematical cognition. In particular, we proposed to distinguish a first level of visuospatial cognition, in which we would be considering how we immediately and spontaneously perceive spatial forms thanks to our cognitive and motor abilities. On the other hand, we have the levels of protogeometric and geometric knowledge, in which we would be considering how the human being conceptualizes space, or rather spatial figures, by introducing protogeometric or geometric concepts, cognitive tools, as well as a general symbolic framework in which these concepts and tools will be established and manipulated in a concrete way.

We connect now with a complex question which, as we already said in the introduction, has been present in our work. This is the question about what is geometric knowledge itself. In other words, how could we establish what we are to consider as geometric knowledge, properly speaking. As we have seen in previous chapters, this is a key question to areas such as ethnomatematics and cognitive archeology. For these areas, having a good definition of what counts as mathematical knowledge will allow them to interpret certain material elements and cultural practices as mathematics. For some of these researchers, it is possible to place the beginnings of mathematical knowledge in Prehistory.

From our point of view, there are some general features of protogeometric and geometric knowledge that allow us to analyze how this kind of knowledge emerged and was developed from the available archaeo-historical data. This is the question about the minimum elements that will allow us to state that a particular tool, text or practice from the past was used for the elaboration of this kind of knowledge, or relied on the availability of such knowledge.

The key elements to characterize the second level of protogeometric knowledge can be said to be:

- some **basic concepts** about **figures** are determined, such as circle, square or rectangle. This kind of basic concepts began to have a greater importance in relation to the resolution of practical problems such as land measurement and division, "containers" construction for food storage, the realization of public constructions –ditches, roads or monumental buildings–, as well as in the creation of some ideological systems –e.g., the *sifang* conception or *gaitian* theory in early chinese civilization;

- particular tools are introduced that the community of agents will employ to develop, teach and use this kind of knowledge. Among these, we can distinguish between **technical instruments** –e.g. ruler and compass, the gnomon– and **cognitive instruments** –maps, diagrams, creation and standardization of measurement units, or the creation of a repetitive technical language;

- some simple procedures and relations are stablished, such as the surveyor's formula, rules for computing the area of different figures, and approximate values are established for some key protogeometric relations – e.g. the (approximate) value 3 to the relation between the length and diameter of the circle.

On the other hand, the third level of geometric knowledge would have the following key characteristics:

- establishment of a rich **technical language** to make reference to spatial figures, their constituent elements, as well as the operations we can perform with them;

- active manipulation of these spatial figures through the controlled use of **cognitive tools**, the most important being the diagram. We emphasize the active role of the agent, who will not only perceive these spatial figures, but will manipulate them and interpret them according to a series of rules, in order to obtain geometrical knowledge;

- introduction of the previous elements in a general **symbolic framework**. In this way, those elements will begin to be used repetitively, systematically and abstractly, thus moving away from properly perceptive issues, or merely practical ones, and focusing on certain methods.

Therefore, we are not considering that this is a static body of knowledge that arises according to how a subject perceives and codifies spatial figures thanks to their basic cognitive system; rather, we consider that this knowledge arises thanks to the interaction between the cognitive abilities of the subject, and the different kinds of elements mentioned above. Especially, the agents will treat in a more sophisticated and structured way the properties of spatial figures within a particular symbolic framework. In this way, the fundamental thing is not how the figures and their elements are perceived, but how they are conceptualized and manipulated to obtain a type of knowledge – approximate and crude at level II, whose main goal is the resolution of concrete practical problems, and more general, abstract and idealized in level III of properly geometric knowledge, whose goals are rather epistemic or theoretical.

Therefore, we have a general interpretative framework to comparatively analyze the archaeo-historical material, with special emphasis on Mesopotamia, ancient Greece and Early China, and see how the elements described above appeared and were structured. In this way, we can study how each of these civilizations shaped this kind of knowledge in the past.

A first general conclusion of our study is that none of the prehistorical elements or practices available manifests that during this period (proto)geometric knowledge emerged. Mainly, we do not have enough data to confirm that this kind of knowledge was obtained with the prehistoric elements that we have presented and discussed in this work.

A second conclusion is that the origins of this type of knowledge in Mesopotamia and China, which are well documented, are quite similar. These relate, on the one hand, to the existence of a class in charge of accounting and surveying tasks, and on the other hand, to the successive reforms and systematization of notation systems, units of measurement, mathematical instruments, cosmological questions, and other elements associated with these practices. Subsequently, the tasks of those in charge of developing and using this type of knowledge began to be not necessarily linked with state issues, so that the agents began to pursue more epistemic goals than practical ones, such as theoretical reflection on their own working tools, and their improvement. In Mesopotamia, supra-utilitarian mathematics will be developed, although this kind of knowledge will not reach level III of geometric knowledge. In Early China, this level of geometric knowledge is well exemplified by Liu Hui's commentaries to the *Nine Chapters*.[1]

On the other hand, we have observed how a wide variety of researchers and intellectuals created a whole mythology around the Greek origins of this type of knowledge, it being considered that in this civilization was born what today we can still recognize as geometry, properly speaking. However, the archaeo-historical reality of this civilization offers us rather some diffuse origins. Based on secondary sources, a first protogeometric period can be established whose origins are linked to a novel treatment of Egyptian surveying practices –and perhaps Babylonian ones. Later, a general symbolic framework will be created to treat the spatial figures ideally, with Euclid's *Elements* being the most quoted example –although this geometric knowledge can be associated with previous authors, such as Hippocrates of Chios in the 5th century B.C.E., who possibly wrote some Euclidean-style *Elements*.

In addition, we showed that not only were these origins different, but so is the kind of knowledge that each of these civilizations developed. In this sense, we saw that the mathematics developed in Mesopotamia and early China were inductive and algorithmic, where the search for the generality of procedures prevailed –especially in China–, and where diagrams could include the rigid movement of figures to show the correctness of these procedures. On the other hand, in Greece a deductive and abstract knowledge was developed, in which figures and their elements were explicitly defined, and diagrammatic rules of construction and interpretation were defined by means of the postulates. Certainly, it cannot be denied that the study of geometry among the ancient Greeks reached new levels of development, amplitude and analytical effort.

[1] The text of the *Nine Chapters* together with Liu Hui's commentaries offer us a good comparative study to analyze the differences between protogeometric and geometric knowledge in relation to the same text. This study, however, would have taken us too far from our main interests, and we hope to develop it in the near future.

There are three main ideas or consequences that can be considered from our study. First, and unlike the hellenophilic approaches, we consider that the developments of each of these civilizations deserve to be included in a general history of mathematics. That is, these developments should be analyzed in the light of the elements presented above – appearance of a technical language, instruments, diagrams, and symbolic framework–, and not in relation to an alleged ideal of how mathematics should be in Antiquity. Therefore, we are proposing a pluralistic approach to the origins of geometry, in which each mathematical practice is valued by how it was giving shape and using various elements, as well as their own goals that were established in each of those traditions.

Secondly, we consider that the differences between these mathematical practices have to be analyzed contextually. That is, to understand what kind of knowledge each of these civilizations developed, and why they did so, it is important to analyze the above-mentioned elements placing them in their own socio-historical context, in relation to the socio-cognitive and institutional niche in which agents created and employed this kind of knowledge. As hellenophilic approaches tend to emphasize, protogeometry in Mesopotamia and China arose in close connection with the resolution of practical bureaucratic problems, state problems. However, this kind of knowledge continued developing, so that the general context in which these agents worked changed, allowing them to reflect on their own mathematical practices. This second part of the story does not usually appear reflected in the popular image we have of these ancient mathematical traditions, and we consider that they deserve to be analyzed in order to understand how this kind of knowledge emerged and was configured in different ways in the context of each of these civilizations.

Finally, third, we consider that the distinction of three levels of competence is fundamental to begin to understand and clarify what geometric cognition is. In the line of several enculturated approaches, we defend that (proto)geometric cognition involves the elaboration and use of geometric concepts and cognitive tools when learning to solve protogeometric and geometric problems. This rather schematic characterization can be developed more fully by considering the detailed description of levels II and III given above. In this way, we will not only have to consider the elements of our visuospatial cognition, but also the emergence of concepts from practical situations –including the use of technical tools–, the type of reasoning involved in dealing with these concepts, the active manipulation of diagrammatic tools, the goals pursued by the agent creating this type of knowledge, and the context in which this type of knowledge was created and supported. Such cultural elements are crucial to understanding how mathematical knowledge originated in the past.

Glosario de términos en chino que han aparecido en este capítulo, ordenados alfabéticamente usando el sistema Pinyin

Para las traducciones al inglés, caracteres y transcripción pinyin hemos usado los diccionarios online Zdict 漢典 –consultar https://www.zdic.net/– y linedict –https://dict.naver.com/linedict/#/cnen/home–; y el diccionario online Pons para las traducciones al castellano –consultar https://es.pons.com/traducci%C3%B3n/chino-espa%C3%B1ol–. Por otro lado, tenemos que decir que no hemos incluido todas las acepciones de los caracteres, sino las que aparecen en este trabajo.

Transcripción Pinyin	Carácter chino	Traducción al español
Ānyáng	安阳	Ciudad que fue capital de la dinastía Shang
bàn	半	Mitad, medio
bèi	倍	Doblar, veces
bì	璧	Discos fabricados en jade pertenecientes al período Neolítico e Historia Antigua. Usados posiblemente para la celebración de rituales, así como marcadores de prestigio social
biǎo	表	Exterior, gnomon
bù	步	Andar, paso. Término matemático: avanzar –mover a la derecha una varilla para contar–. Unidad de medición
bǔcí	卜辞	"Textos de las grietas", textos oraculares de la dinastía Shang, los cuales se escribían a partir de las grietas que resultaban al aplicar calor a diversos materiales, como huesos o caparazones de tortugas
cémmíng	册命	Procedimiento por el que se nombraba a oficiales en la dinastía Zhou. Literalmente, se traduce como "nombrar a un oficial con un documento escrito"
chāo	超	Saltar, usado en el contexto de los cálculos que se realizan con las varillas de contar

chéng	乘	Multiplicar. También significa ascender
chūnqiū	春秋	Período de Primavera y Otoño (770-453 a.e.c.), segundo período en el que se divide la dinastía Zhou
cóng	琮	Tubos rituales del período Neolítico principalmente. Es característica su forma exterior cuadrada o rectangular, y su forma interior circular
dàdàilǐjì	大戴禮記	*Los registros históricos del Anciano Dai sobre los rituales* o *Registros de temas de carácter ritual por el anciano Dai*. Obra compilada durante el siglo I e.c. Esta obra fue compuesta por Dai De 戴德, compilando 85 capítulos sobre textos antiguos en asuntos rituales
dào	道	Traducción literal: camino, vía. En esta tesis lo hemos usado en referencia sobre todo con la doctrina filosófica o escuela de pensamiento taoísta
dìzhī	地支	Ramas terrenales. Combinados con los 10 días de la semana (*xun*), o troncos celestes (*tiangan*), formaban el ciclo de 60 días usado para cuestiones rituales durante la dinastía Shang. Este era el ciclo *ganzi*
èrlǐtóu	二里头	Uno de los primeros estados en la civilización china (2100-1500 a.e.c.)
fǎ	法	Regla, ley, regulación, estándar, estatuto, modelo // divisor, en relación con el uso de varillas de contar
fǎjiā	法家	Traducido generalmente como "Escuela legalista". Corriente de pensadores que surgieron durante el período Zhou Oriental, y fueron clave para los primeros imperios chinos, como el Imperio Qin y el posterior Imperio Han Occidental
fāng	方	Cuadrado, rectángulo, región
fāng dǐng	方鼎	Vasija *ding* cuadrada, fabricada en los períodos Shang y Zhou
fǎnshān	反 山	Ciudad perteneciente a la cultura Liangzhu

fúxī	伏羲	Uno de los gobernadores legendarios de la mitología china. Creador legendario de la escritura o los números. Considerado en algunas obras como esposo o hermano de Nüwa, que juntos engendraron a la humanidad
gàitiān	蓋天	Teoría cosmográfica que considera que el cielo es un disco inmenso –de unos 80.000 *li*– que cubre una tierra plana cuadrada. Su traducción literal sería "cielo como capota-celestial", 'chariot-umbrella heaven' (Cullen 1996)
gānzhī	干支	Ciclo que surge al combinarse las 12 ramas terrenales (*dizhi*) y los diez troncos celestes (*tiangan*)
guǎnzi	管子	Obra legalista escrita por Guan Zhong (管仲), político en el estado Qi durante el período de Primavera y Otoño, y sus seguidores
guītián	圭田	Campos triangulares
Hàn	汉	Dinastía han (202 a.e.c. – 220 e.c.). Esta estuvo dividida entre la dinastía Han Occidental o Anterior (西汉 o 前汉, 202 a.e.c.-9e.c.) y la dinastía Han Oriental o Posterior (後汉 o 東汉 25-220 e.c.)
hánfēizǐ	韩非子	Obra legalista escrita por el pensador o filósofo Han Feizi (韩非) durante el período de los Reinos Combatientes. Se puede traducir como *Obra o Libro del Maestro Fei*
hànshū	汉书	*Libro de Han* o *Libro de la dinastía Han*, historia de la dinastía Han compuesto por Ban Gu (班固 32-92 e.c.) y otros miembros de su familia
hǎojiāpíng	郝家坪	Ciudad en la que se ha hallado, en la tumba nº 50, nuevo material arqueológico y textos relacionados con estatutos y leyes, entre otras cuestiones, del período de los Reinos Combatientes
hóngshān	红山	Cultura Neolítica del noreste de China (4500-3000 a.e.c.)
hòuhànshū	后汉书	*Libro de Han Posterior* o *Libro de la dinastía*

		Han Posterior, libro sobre la dinastía Han posterior escrita por Fan Ye (范晔 398-446 e.c.), con algunos capítulos de Sima Biao (司马彪 240-306 e.c.)
huángdì	皇帝	Emperador, Emperador augusto. Título creado por primera vez por el rey, autoproclamado emperador, Qin Shi Huang (秦始皇 259-210 a.e.c.)
húntiān	渾天	Traducción literal "cielo esférico". Teoría cosmográfica que contrasta con la teoría *gai tian*, ya que en esta se proponía que el cielo era una esfera, para dar una mejor respuesta a ciertas observaciones astronómicas. Fue descrita por primera vez por Zhang Heng (張衡) en el siglo II e. c.
jiā	家	Este carácter tiene diversas acepciones, entre ellas casa o familia. En esta tesis, sin embargo, hemos usado su acepción como "experto" o "especialista en un campo", o incluso en acompañamiento a algunas de las "escuelas" de pensamiento
jiā	加	Añadir, aumentar, incrementar
jiăgǔwén	甲骨文	Huesos oraculares, escritura oracular realizada en la dinastía Shang sobre distintos huesos o caparazones de tortuga tras aplicarles calor con propósitos rituales
Jiāngzhài	姜寨	Ciudad perteneciente a la cultura Yangshao
jiāliàng	嘉量	Instrumento fabricado en bronce usado para la medición, y establecimiento, de los cinco estándares de medición. Uno de los primeros fue creado por Wang Mang(王莽) al comienzo de la dinastía Xin para establecer estos estándares por todo el reino
jĭng	井	Sistema del campo-pozo propuesto por Mencio. El propio carácter es representativo del método de división del terreno
jìng	徑	Diámetro, recto
Jiŭzhāng Suànshù	九章算术	*Nueve capítulos sobre los procedimientos matemáticos*. Obra matemática escrita a partir

		de la dinastía Xin, aunque no se sabe con seguridad, y comentada por Liu Hui (刘徽) en el 263 e.c.
Jǔ	矩	Escuadra, regla, rectángulo, gnomon
kāi fāng	開方	Literalmente, “abrir el cuadrado”. Usado en términos técnicos matemáticos para designar el procedimiento de extracción de raíces cuadradas
Kǒngzǐ	孔子	Confucio
Lǎozi	老子	Laozi, lao tse o lao tzu. Sabio que vivió durante el siglo IV a.e.c., durante el período de las cien escuelas de pensamiento. Se cree que escribió el *Tao Te Ching* 道德經, obra fundamental del taoísmo
lǐ	禮	Ritos; uno de los seis artes en los que los sabios (*shi*) se educaban
lì	立	Erigir
lǐjì	礼记	Obra *Los ritos* o *Libro de los ritos*, similar a *Los ritos de Zhou*, salvo que en esta se tratan ritos que van más allá de los de la dinastía Zhou. Compuesto probablemente durante la dinastía Han
liángzhǔ	良渚	Cultura del Neolítico Tardío (3300-2000 a.e.c.) del centro de China
língjiātān	凌家滩	Cultura Lingjiatan (3600-3300 a.e.c.) del centro de China
liùyì	六藝	Seis artes
lóngshān	龙山	Cultura del Neolítico Tardío (3000-1900 a.e.c.) del norte de China
lǚshì Chūnqiū	吕氏春秋	*Crónica o anales de Primavera y Otoño del señor Lü*. Texto escrito durante el período de Primavera y Otoño –de hecho da el nombre a este período– en el que se registró lo que ocurrió en el estado Lu entre los años 722-481 a.e.c.
mǎwángduī	馬王堆	Yacimiento arqueológico de la provincia de Hunan, en el que se han descubierto diversos

		documentos pertenecientes o escritos en la época Han Occidental
Mèngzǐ	孟子	Mencio. Sabio o filósofo confuciano que vivió en el siglo IV a.e.c. Con Mengzi también se puede hacer referencia a su obra, *Libro de Mencio*
míngtáng	明堂	Sala luminosa. Construcción en la que ciertos conceptos cosmológicos se encarnaban, así como en las acciones que los emperadores llevaban a cabo en ella
Mòzǐ	墨子	Fundador de la escuela filosófica o de pensamiento mohista. Mozi también puede hacer referencia a la obra escrita por este pensador y sus seguidores, la cual también se llama *Mojing* (墨經)
mǔ	母	Significa madre, pero en el contexto matemático se usó para denominar al denominador (relacionado con el numerador, que es hijo *zi*)
niúhéliáng	牛河梁	Centro ritual más grande excavado en China perteneciente a la cultura Hongshan (3650-3150 a.e.c.)
nǚwā	女娲	Deidad mitológica. Considerada en algunas obras como esposa o hermana de Fuxi, que juntos engendraron a la humanidad
píng	平	Plano, nivelado
Qín	秦	Dinastía Qin (221-206 a.e.c.). Primera dinastía que unificó todo el territorio de China bajo el mandato de un emperador
rì shū	日書	Libros sobre Días
sānyǒusī	三有司	Los tres Supervisores. Puesto clave durante la dinastía Zhou
Sānguó	三国	Período de los Tres Reinos (220-280), que fue el posterior al período Han. En este período tres reinos independientes gobernaron hasta la posterior reunificación de la dinastía Jin (266-420)
Shāng	商	Dinastía Shang (1554-1046 a.e.c.), primera

		dinastía en establecerse en China –si no contamos con la anterior dinastía, todavía sin datos arqueológicos sobre ella, Xia–
shàngdì	上帝	Deidad suprema durante el período Shang
shāngjūnshū	商君書	El libro de Lord Shang, uno de los primeros textos legalistas que han llegado hasta nuestros días
shāngyāng	商鞅	Filósofo legalista e importante hombre de estado del estado Qin durante el período de los Reinos Combatientes. Se considera que sus reformas políticas tuvieron un gran impacto en el ascenso y posterior victoria del estado Qin para convertirse en el primer imperio de China
shì	士	Grupo conformado por pensadores o sabios durante períodos Pre-imperiales e Imperial Temprano (al menos los que hemos tratado en este trabajo)
shì	式	Diagramas, astrolabio, tablero cósmico, etc.
shí	實	Dividendo
shǐjì	史记	Obra *Memorias o Registros históricos*, o simplemente *Historia*, escrita por Sima Tan (司马谈 165-110 a.e.c.) y en mayor medida por su hijo, Sima Qian (司马迁 145-90 a.e.c.)
shìmíng	释名	Diccionario etimológico escrito durante la dinastía Han Posterior por Kong Xi (孔熙). Contenía 27 capítulos distribuidos en 8 rollos
shè	射	Tiro con arco, uno de los seis artes en los que los sabios (*shi*) se educaban
shù	數	Matemáticas, uno de los seis artes en los que los sabios (*shi*) se educaban
shū	書	Caligrafía o literatura, uno de los seis artes en los que los sabios (*shi*) se educaban
Shǔ	蜀	Dinastía Shu (o Shu-Han) (220-263). Una de las tres dinastías que gobernó durante el período de los Tres Reinos. Fue uno de los estados existentes durante la dinastía Zhou

shuìhǔdì	睡虎地	Ciudad en la que se han excavado diversos textos pertenecientes a la dinastía Qin, en la provincia de Hubei
Sūn Zǐ Suànjīng	孙子算经	*Clásico matemático del maestro Sun* o *Canon matemático del maestro Sun*. Tratado matemático escrito en torno a los siglos III-V e.c.
tángshān	塘 山	Taller especializado en la fabricación y retoques finales de útiles de jade de la cultura Liangzhu
táosì	陶寺	Centro regional perteneciente a la cultura Longshan (2600-2000 a.e.c.).
tiān	天	Deidad suprema de la dinastía Zhou; Cielo
tiānmìng	天命	Mandato del Cielo. Gracias a este mandato la dinastía Zhou se permitió conquistar a la anterior dinastía Shang sin ser castigado por su dios (el cielo) por esta acción
tiānzǐ	天子	Hijos del Cielo. Título usado por los gobernantes Zhou para justificar ritualmente su ascensión al poder
tiāngān	天干	Troncos celestes, los cuales forman el ciclo *ganzhi* al combinarse con las doce ramas terrenales (*dizhi*)
tú	圖	Diagrama, representación gráfica
Wèi	魏	Dinastía Wei (220-265). Una de las tres dinastías que gobernó durante el período de los Tres Reinos. Durante el período de los Reinos Combatientes, este fue uno de los reinos o estados más poderosos.
Wú	吳	Dinastía Wu (222-280). Una de las tres dinastías que gobernó durante el período de los Tres Reinos. También fue uno de los reinos o estados durante el período de los Reinos Combatientes
wǔxíng	五行	Cinco elementos, cinco fases. Teoría cosmológica y política utilizada para justificar los cambios de poder durante las dinastías Zhou y períodos Imperiales

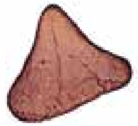
Xīn	新	Dinastía que gobernó en China tras la dinastía Qin (9-23 e.c.). Su traducción literal es nueva
Xiá	夏	Dinastía mítica de la cultura China, a veces asociada con Erlitou, pero de la que no hay registro arqueológico que demuestre su existencia
xiǎohéyán	小河沿	Cultura Neolítica del noreste de China (3000-2200 a.e.c.)
xīnglóngwā	兴隆洼	Cultura Xinglongwa (6200-5200 a.e.c.) del noreste de China
xīshuǐpō	西水坡	Ciudad de la cultura Yangshao
xuānyè	宣夜	Teoría cosmográfica de orígenes desconocidos, y que compitió con las teorías *gai tian* y *hun tian* como una de las tres más importantes durante el período Imperial. Su traducción podría ser "noche oscura", y proponía que el universo no tenía forma ni límites
xún	旬	Período de diez días, una semana
yà	亞	Inscripción que aparece en diversos medios, sobre todo de bronce, durante la dinastía Zhou
yǎngsháo	仰韶	Cultura Neolítica del norte de China (5000-3000).
Yìjīng I Ching	易经	Obra *Libro de los cambios*. También se puede llamar *Zhouyi* 周易 (cambios de los Zhou). Uno de los cinco clásicos confucianos
yuán	圆	Círculo, circular, redondo
yuè	钺	Hachas fabricadas en jade, siendo estas uno de los tres objetos de jade ritual principal de la cultura Liangzhu junto a los discos *bi* y tubos *cong*
yuè	樂	Música, uno de los seis artes en los que los sabios (*shi*) se educaban
yù	御	Equitación, uno de los seis artes en los que los sabios (*shi*) se educaban.

Zhànguó	战国	Período de los Reinos Combatientes (453-221 a.e.c.). Tercer y último período de la Dinastía Zhou
zhī	支	Colocar [las varillas para realizar cálculos]
zhì	至	Extremo
zhé	折	Disminuir, retroceder (con las varillas a la hora de realizar cálculos)
zhèng	正	Recto, correcto
zhèngzóng	正從	Longitud recta, que en el contexto matemático hacía referencia a la altura
Zhōu	周	Dinastía Zhou (1406-246 a.e.c.), que es la segunda dinastía en establecerse en China; circunferencia
Zhōubì Suànjīng	周髀算經	*El canon del gnomon de la dinastía Zhou*. Obra astronómica escrita entre los siglos I a.e.c. y I e.c., y que fue comentada por Zhao Shuang en el siglo III e.c. Se cree que no era un libro en sí, sino una colección de textos defensores de la teoría *gaitian* de diferentes procedencias, y agrupados en torno al período de la dinastía Xin
Zhōu lǐ	周禮	Obra *Los ritos de Zhou* o *Los Ritos durante la dinastía Zhou*. Libro compuesto durante el período de la dinastía Han Occidental en el que se ofrece mucha información sobre la dinastía Zhou
zǐ	子	Literalmente significa hijo. En el contexto matemático se usa para el numerador (relacionado con *mu*, madre o denominador)
zuòcè	作册	El "encargado de hacer los documentos". Posible puesto gubernamental durante la dinastía Shang, el cual aparece en una inscripción en bronce durante el período tardío de esta dinastía
Zuǒchuán	左傳	*Crónica* o *comentario de Zuo*. Obra compilada en torno al siglo IV a.e.c. con registros del período 722-468 a.e.c.

APÉNDICES

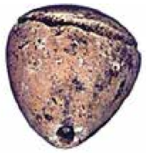
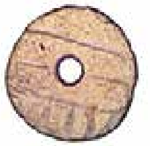
1. Evolución del uso de piezas de arcilla y su relación con la escritura y las protomatemáticas

1
Piezas de arcilla lisas

A  B  C 

En el registro arqueológico se han encontrado seis formas básicas. En este caso, tenemos una pieza con forma de esfera (A) de unos 1,6 cm de diámetro usada para contar grano; una pieza con forma de tetraedro (B) de unos 1,4 cm de lado para contar animales; y una pieza con forma de disco (C) de unos 1,0×0,4 cm para contar 1 hombre o 1 día de trabajo. Pertenecientes al período Neolítico (8000–3500 a.e.c.) y encontradas en Siria. MS 5067, cortesía de The Schøyen Collection.

2
Piezas complejas de arcilla

A  B  C  D 

En este segundo grupo se llegaron a usar hasta 300 piezas para contar diferentes productos. En este caso, tenemos (A) un ovoide usado para contar aceite con una línea curva en la parte superior y perforado en la parte inferior; (B) y (C) con forma de disco perforado en el centro y distintas marcas impresas, como líneas (B) y formas circulares (C); y (D) con forma de cilindro y banda en zigzag. Pertenecientes al período Uruk (3500–3200 a.e.c.) y encontradas en Siria. MS 4522, cortesía de The Schøyen Collection.

3
Piezas introducidas en sobres (*bullae*)

En este tercer estadio lo que se hace es introducir las piezas de los estadios 1 y 2 dentro de sobres de arcilla. En la imagen de la izquierda podemos ver un sobre de arcilla en el que se introdujeron 11 piezas, tanto lisas como complejas. En este caso tenemos un acuerdo o cuenta que representaría el salario por cuatro días de trabajo, cuatro unidades de metal, una unidad grande de cebada, y dos unidades pequeñas de otro bien -interpretación tentativa-. MS 4631, cortesía de The Schøyen Collection.

4
Superficie redonda o plana de arcilla. Estadio de la escritura proto-cuneiforme

4.A Tabla número-ideográfica

En esta tabla con forma cuadrangular podemos ver dos líneas en las que se presionaron dos tipos de piezas de arcilla para contar. En este caso, en la línea superior se imprimieron tres formas circulares pequeñas, representando posiblemente tres unidades de cebada, mientras que en la línea inferior tenemos cuatro cuñas pequeñas representando algún otro bien. Tabla MS 4647 excavada en Siria y perteneciente al período Uruk (3500–3200 a.e.c.), cortesía de The Schøyen Collection.

Anverso

Reverso

4.B Tabla Uruk IV

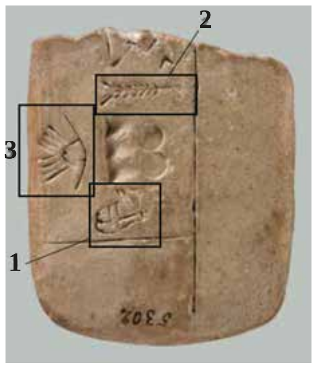
En esta tabla con forma rectangular podemos ver la división de la superficie del anverso en celdas. En esta tabla se llevó a cabo el registro de varios bienes, y continenene una referencia a un almacén o depósito. En el reverso tenemos un resumen de las cantidades individuales enumeradas en el anverso. Se siguen usando las impresiones mediante las piezas de arcilla. Tabla perteneciente al período Uruk IV (3200 a.e.c.) y encontrada en la ciudad de Uruk, distrito Eana. VAT 14942, imagen y traducción de Woods (2010, 73) a partir de Englund & Nissen (1994).

4.C Tabla Uruk III

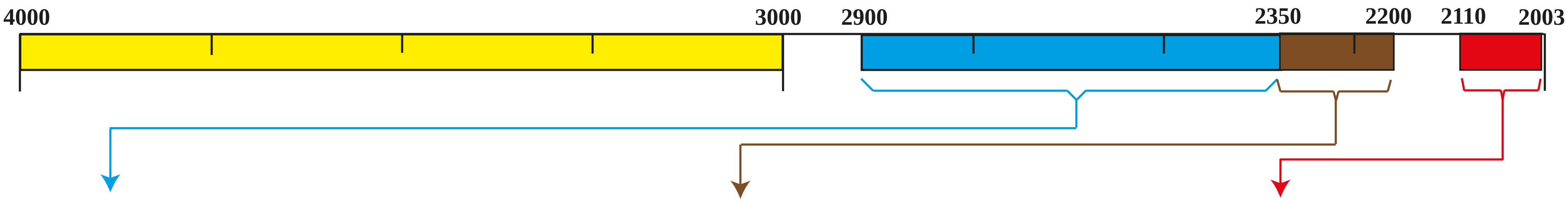
La diferencia principal con el período anterior es la estandarización de los signos usados para la medición y registro de cantidades. En esta tabla tenemos en el anverso una transacción de grano. En el reverso tenemos varias pictografías: la de la caja 1 indica que la cantidad total de grano (representado en la caja 2) ha sido pagada, y la de la caja 3 indica que esta contabilidad cubre un período de 8 años. Tabla perteneciente al período Uruk III (3100 a.e.c.), sin procedencia clara. VAT 14942, imagen y traducción de Woods (2010, 77) a partir de Englund (1996).

Anverso

Reverso



2. Períodos y sucesos más relevantes en Mesopotamia (4000 – 2000 a.e.c.)*



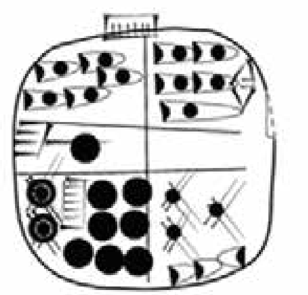
■ 2900–2350 Período Dinástico Temprano
- ca. 2900–2750 Período Dinástico Temprano I
- ca. 2750–2600 Período Dinástico Temprano II
- ca. 2600–2350 Período Dinástico Temprano III

- La profesión de escriba y escriba-agrimensor emerge en este período como una profesión bien diferenciada de los administradores de los templos (Shuruppak, 70 Km al sudeste de Babilonia);

- Aparecen por primera vez problemas supra-utilitarios; esto es, no directamente relacionados con cuestiones prácticas;

- Producción de hasta 2000 tablas anuales;

- Ejemplo: tabla TSS 188, considerada por Friberg (2007a) como la primera tabla en la que aparece de manera explícita una referencia a un cuadrado.



TSS 188 (Friberg 2007a, 148)

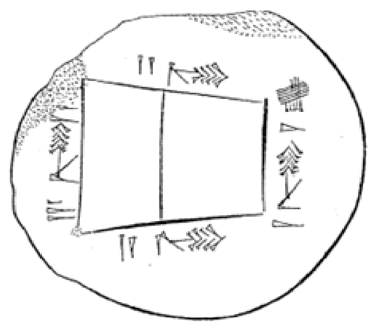
■ 2350–2200 Período Acadio Antiguo

- La literatura comienza a usarse como propaganda, y las matemáticas supra-utilitarias continúan desarrollándose;

- Se acelera el proceso por el que los sistemas metrológicos se ajustaron a regularidades matemáticas y cuestiones administrativas;

- En este período aparecen las primeras tablas protomatemáticas con diagramas;

-IM 58405, una de las primeras tablas con un diagrama con datos cuantitativos. En este caso, un trapezoide bisecado cuya área se calculó usando la fórmula del agrimensor. Encontrado en un santurario en el templo Enlil en Nippur.



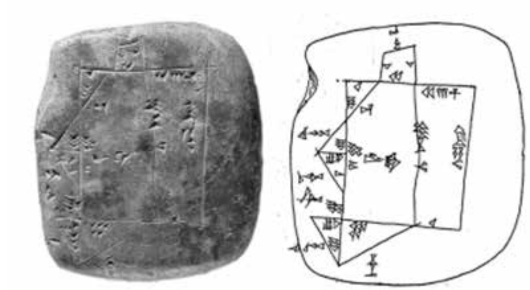
IM 58045 (Robson 2007, 76)

■ 2110–2003 Período Ur III

- Decisión político-administrativa de implementar el uso sexagesimal y posicional, vinculado con las reformas del rey Šulgi y la creación de un estado burocrático a gran escala (Hoyrup 2009). Uso de los números de manera abstracta;

- Creación de un sistema de escuelas de escribas, proporcionando así un entrenamiento homogeneizado a escribas y burócratas. Se sistematiza y mejora, de esta manera, la educación (Robson 1999);

- Las matemáticas supra-utilitarias desaparecen del corpus matemático en este período.



MS 1984, mapa de un terreno del período Ur III, perteneciente a ABU-INIM-MA-AN. Presentado en (Damerow 2016, 108), y cortesía de The Schøyen Collection.

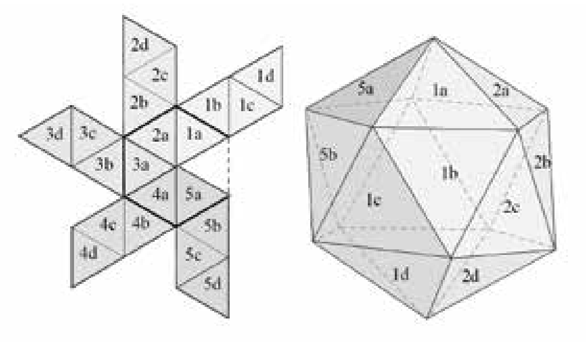
*Línea cronológica a partir de van de Mieroop (2016). El resto de información: Friberg (2007a), Hoyrup (2002; 2009; 2017) y Robson (1999; 2007; 2008).

3. Períodos y sucesos más relevantes en Mesopotamia (1600 a.e.c. – 224 e.c.)*

Mediobabilónico

Dinastía Casita (ca. 1600 – 1100 a.e.c.)

- De esta dinastía queremos mostrar, por su importancia, la tabla **MS 3876 #3** en la cual se calcula el área y peso de un icosaedro colosal compuesto por 20 triángulos equiláteros de cobre (Friberg 2007a, 184-188; 2007b, 349-352).



El hexágono central representaría las "murallas de la ciudad", y los triángulos equiláteros que lo rodean serían figuras con forma de cuerno; de esta manera, los babilonios pudieron haber computado el área de un icosaedro, según la interpretación de Friberg.

Asiria

Período Paleoasirio (2000– 1350 a.e.c.)
Período Medioasirio (1350 – 1000 a.e.c.)
Período Neoasirio (1000 – 612 a.e.c.)

- Metrología y matemáticas como elementos periféricos de la educación, poco sofisticadas comparadas con el período anterior. Las escuelas como instituciones desaparecen, recayendo la educación en familias de escribas (Hoyrup 2002, 309-316; 387-399; Robson 2008, 181-182).

- En los períodos Medioasirio y Neoasirio surge la figura del hombre culto de la corte, con conocimientos que abarcaban desde ciencia hasta religión o magia. Creciente interés de los gobernantes por la predicción de eventos celestes, con los que se intetaba conocer la voluntad de los dioses (cf. Robson 2008, 144-150).

- Se cree que en el período Neoasirio surgió la astronomía matemática, aunque está documentada sobre todo a partir del Imperio Persa (539-331 a.e.c.) (cf. Hoyrup 2002).

Helenístico

Dinastía Seléucida (312 a.e.c. – 64 e.c.)

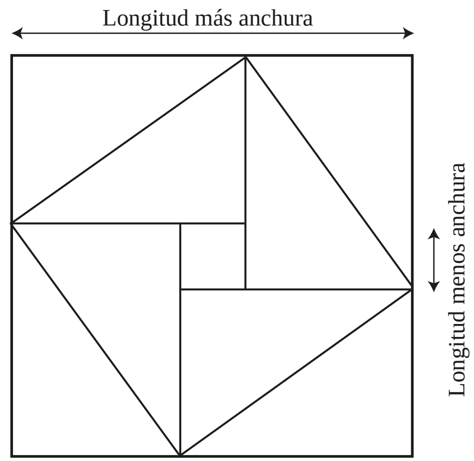
- Las últimas matemáticas de la cultura cuneiforme provienen de este período y de la época temprana del posterior imperio Parto (I-II e.c.).

- Textos de adivinación celeste más sofisticados en el período Seleúcida que los de períodos anteriores. Se pasa de justicia metrológica a cuantificación divina; esto es, los escribas pensaban que el manejo del espacio y el tiempo por parte de los dioses estaba profundamente matematizado (Robson 2008, 218-219; 267-268; Brown 2000).

- Métodos innovadores en relación con triángulos, cuadrados y diagonales de rectángulos.

- La astronomía buscaba buenas aproximaciones, no la exactitud de los datos, ya que se quería interpretar y no explicar el comportamiento del cielo. En la búsqueda de una mayor precisión las unidades de medición astronómica se comenzaron a derivar de los datos registrados en lugar de tomarlas de las matemáticas (Brown 2000).

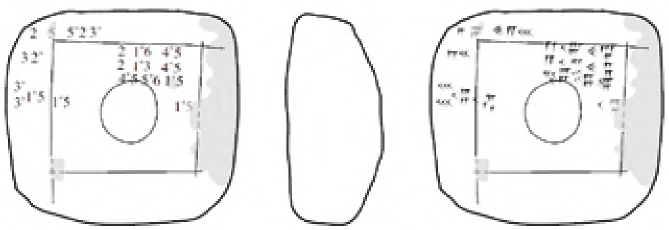
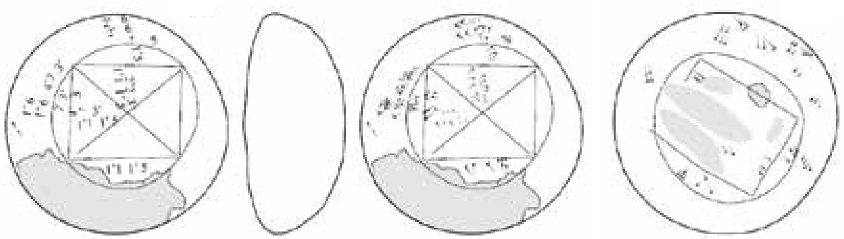
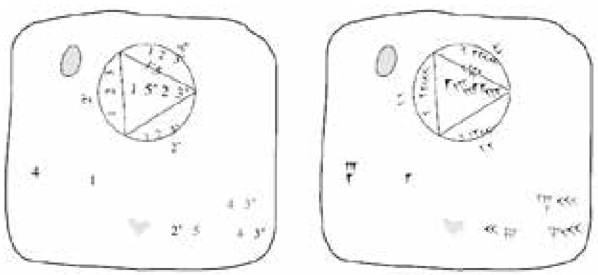
Nota general: En las matemáticas de períodos tardíos los métodos de cortar y pegar se sustituyen por métodos comparativos. Es decir, los mismos objetos geométricos son tratados de maneras matemáticas diferentes, donde nada se corta, se pega, o se hace sostener sobre otras partes de la figura, solo se mira y se compara. En general, afirma Robson (2005; 2008), se pasan de unas matemáticas métricas a unas aritméticas.



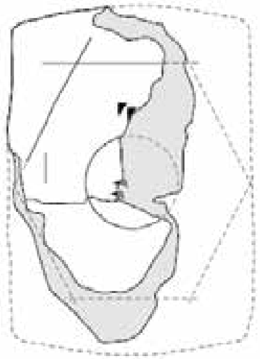
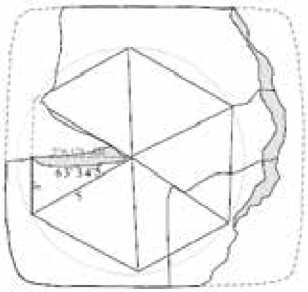
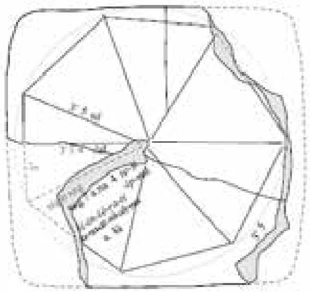
Por ejemplo, aquí podemos ver el diagrama que acompaña al problema #10 de la tabla **BM 34568**. Diagrama similar al de Db2-146, la diferencia es que en esta tabla no se corta, pega, ni mueve ninguna parte del diagrama, sino que se observan y comparan las áreas (Hoyrup 2002, 391-399).

*Línea cronológica a partir de Rochberg (2004). El resto de información: Friberg (2007a), Hoyrup (2002, 2009, 2017), Robson (2005, 2007, 2008), Brown (2000) o Rochberg (2004, 2011).

4. El uso del círculo en problemas de “figuras inscritas en figuras” (I)

Nº de Tabla	Dibujos realizados por Friberg (2007b, 190; 204).	Imágenes del CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative) - The Schøyen Collection	Problema planteado y figuras involucradas
MS 2985	**Anverso** 		Los números que aparecen están escritos por alguien con poca experiencia y situados aleatoriamente. Comparándola con otras tablas –BM 15285–, se puede suponer que habría que calcular el área entre el círculo y el cuadrado conociendo el lado del cuadarado y distancia del círculo a los lados del cuadrado (Friberg 2007b, 212-216).
MS 3050	**Anverso** **Reverso** 	**Anverso**  **Reverso** 	Anverso y reverso: cuadrado con diagonales inscrito en un círculo. Los números y sus posiciones no tienen mucho sentido, y en el reverso parece que ni terminó el ejercicio. Se cree que en esta se trató de calcular, errónemanete, la diagonal del cuadrado o los segmentos circulares que surgen entre ambas figuras (Friberg 2007b, 210-212).
MS 3051	**Anverso** 		Dibujo muy exacto de un triángulo equilátero inscrito en un círculo. Contiene errores. El alumno confundió la altura del triángulo con la longitud de sus lados. Cálculo del área del círculo, triángulo, y segmentos circulares. No hay ninguna tabla similar a esta, excepto TMS 1, con un triángulo simétrico inscrito en un círculo (Friberg 2007b, 207-210).

4. El uso del círculo en problemas de "figuras inscritas en figuras" (II)

Nº de Tabla	Dibujos realizados por Friberg (2007b, 191; 217-218).	Imágenes del CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative) - The Schøyen Collection	Problema planteado y figuras involucradas
MS 1938/2	 Reverso		Círculo en el centro de un hexágono, similar a MS 2985. En tablas de constantes, como TMS 3, se tiene constancia de que se conocían polígonos regulares y métodos para usar las áreas de polígonos de 5, 6 y 7 lados. Área de un hexágono *normalizado* calculada como la suma de las áreas de seis triángulos equiláteros (Friberg 2007b, 216-219).
TMS 2	Anverso  Reverso 	 Reverso Esta última pieza se encuentra en el Museo del Louvre. Fotografía de Jeanam Park (licencia Creative Commons).	Hexágono y heptágono inscritos en círculos (anverso y reverso). Los círculos se hicieron con compás, y una vez usados como ayuda para construir estas figuras, se borraron. Problema y resolución similar a MS 1938/2 (Friberg 2007b, 218-219). Según Robson (1999, 48) los coeficientes para polígonos solo ocurren en la lista de Susa.

5. Investigación arqueológica sobre el Paleolítico en China - Una visión general (I)

Cuando comienza la investigación arqueológica en China en torno a los años 20’-30’ del siglo pasado, se importaron a esta la metodología, modelos teóricos, así como tipología y etapas del desarrollo cultural de los estudios arqueológicos en Europa y África (EA en adelante). Sin embargo, la correspondencia entre las herramientas líticas y etapas de la evolución cultural de Asia Oriental no se corresponde con las de EA.

En China se puede distinguir entre la Industria Principal del Norte (IPN) e Industria Principal del Sur (IPS) -siguiendo a Gao (2013)-:

IPN

- Herramientas pequeñas fabricadas con lascas, como los raspadores o puntos. Algunas herramientas que no están presentes en otras culturas, como los esferoides (ver a continuación).
- En el Paleolítico Tardío se desarrollan nuevas técnicas y herramientas, como la microlaminada (26.000-25.000 AP), que a diferencia de la de EA apenas se retoca.
- Casi todos los lugares excavados eran lugares al aire libre, no cubiertos (final del Pleistoceno).
- Las vasijas comienzan a fabricarse en torno al 12-9.000 AP.

IPS

- Herramientas más grandes que las del norte. Aparecen herramientas similares a las achelenses (ver a continuación), pero con una menor simetria que las de EA, y no reemplazarán a las herramientas de núcleo y lasca (modo I).
- Menor variedad de tipos de herramientas y con retoques más toscos que en el norte. En torno al 22.000-20.000 AP las herramientas hechas con guijarros (*cobble tools*) sustituyen a las anteriores.
- Casi todos los lugares que han sido excavados eran lugares cubiertos como cuevas (final del Pleistoceno).
- Al final del Paleolítico Superior (20.000-17.000 AP) se comienzan a hacer vasijas.

En general se observa una manufactura más tosca y con menos retoques finales que en EA. Así mismo, es más conservadora en cuanto al tipo de herramientas que se fabricaban, permaneciendo el modo I durante largos períodos de tiempo. Esto, sin embargo, no quiere decir que no hubiera innovación o variedad tecnológica en las diversas culturas de este período.

Referencias: Bar-Yosef (2015), Bar-Yosef et al. (2012), Bar-Yosef & Wang (2012), Du et al. (2016), Gao (2013), Qu et al. (2013), Shelach-Lavi (2015), Yang et al. (2020).

Diferencias de China con EA

1) En EA el modo I es reemplazado por el modo II, herramientas achelenses o bifaces. En el norte de China estas herramientas no se manufacturaron , y en el sur no llegaron a sustituir a las herramientas de núcleos y lascas (modo I);

2) El modo I es usado en China durante largos períodos de tiempo, con un grado bajo de estandarización y pocos retoques;

3) No hay apenas cambios entre el Paleolítico Medio y el Bajo -siguiendo la terminología de EA-, por lo que algunos autores prefieren hablar en China de una transición entre Paleolítico Temprano y Tardío, caracterizada por un refinamiento en las técnicas para hacer herramientas, presencia de arte y simbolismo, y elaboración de herramientas con huesos.

¿Por qué tuvo lugar esta diferenciación?

Hipótesis que proponen un estancamiento cultural en China

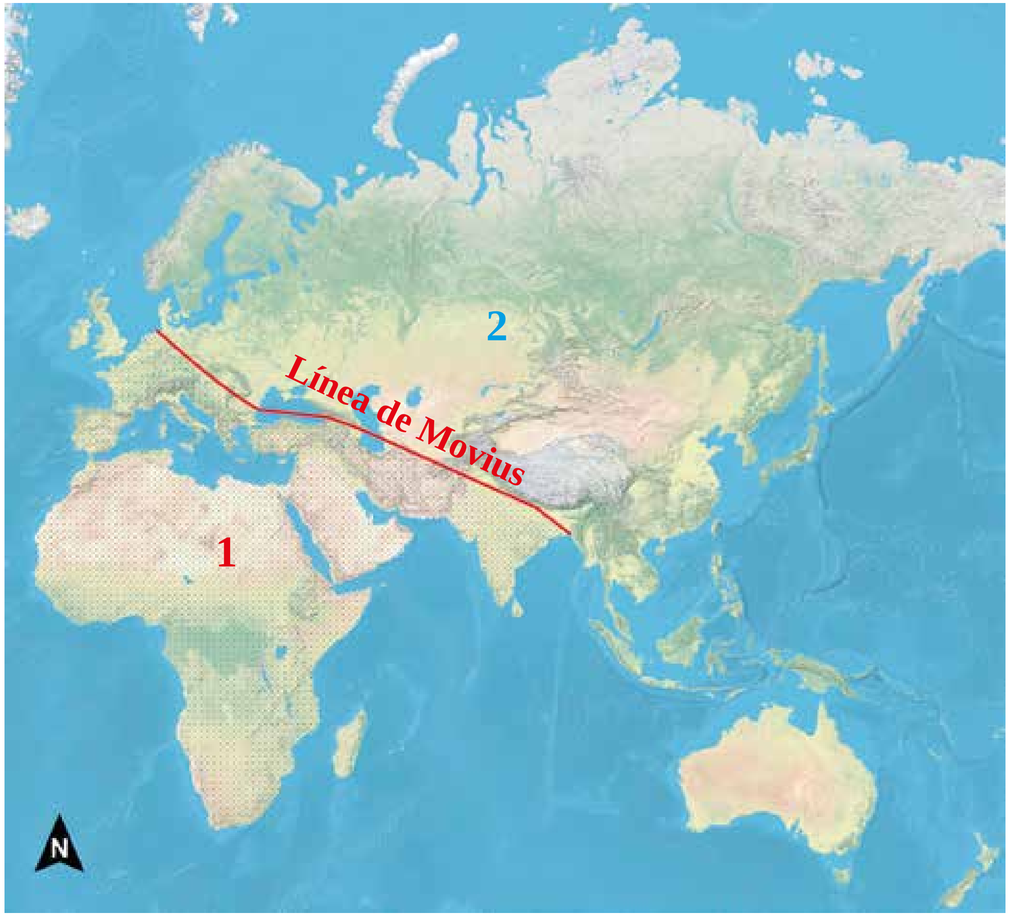
1) Hipótesis de la línea de Movius: propone dos tradiciones tecnológicas diferentes, una presente en EA, y otra en Asia Oriental (ver a continuación);

2) Hipótesis del aislamiento: Toth & Schick (1993 *apud* Bar-Yosef et al. 2012) piensan que los primeros homínidos que llegaron a Asia Oriental de África trajeron consigo el tipo de herramientas del modo I, pero una vez establecidos aquí alcanzaron un “desierto cultural”; esto es, no hubo evolución cultural posterior.

Hipótesis que analizan el contexto particular en China

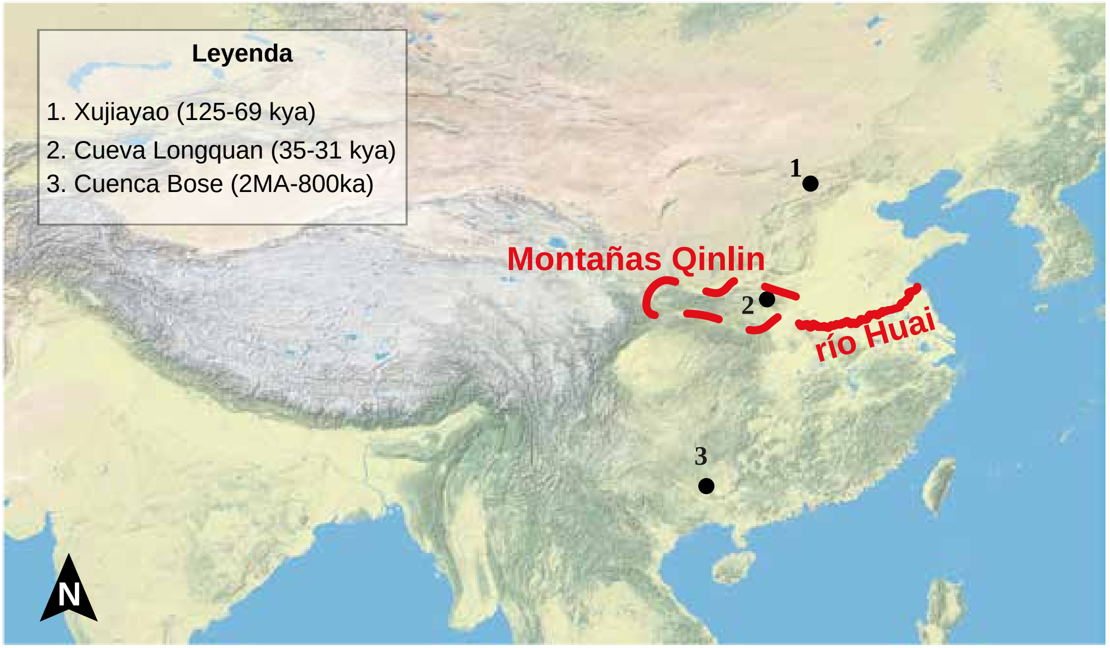
3) Hipótesis del bambú: en esta región es posible que se usaran mayormente herramientas de bambú -estudios etnográficos y experimentales, aunque no concluyentes-, las cuales se elaboraron con las herramientas líticas del modo I, no existiendo por lo tanto ningún ímpetu tecnológico, funcional o cultural para modificar dichas herramientas líticas (Bar-Yosef et al. 2012).

5. Investigación arqueológica sobre el Paleolítico en China - Una visión general (II)

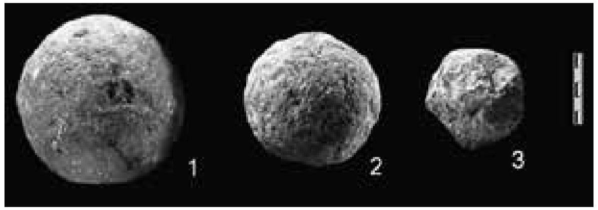


Hipótesis de la Línea de Movius: En 1948 Movius publica un artículo en el que divide en dos las tradiciones tecnológicas de dos áreas básicas. Por un lado (1) tenemos Europa y África, y por otro (2) Asia Oriental.

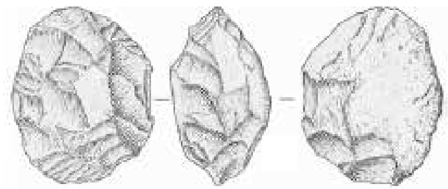
La observación hecha por este investigador era que en EA hay un momento en el Paleolítico en el que el modo I (herramientas olduvayenses) son sustituidas por el modo II, hachas de mano, bifaces o herramientas achelenses. Sin embargo, este fenómeno no tiene lugar en las culturas Paleolíticas de Asia Oriental (ahora ya desmentido), donde el modo I permanece como modo principal de manufactura de las herramientas durante largos períodos de tiempo. Esta hipótesis llevó a algunos investigadores a hablar de una inferioridad cultural de las culturas de Asia Oriental respecto a las de EA.



Algunas herramientas líticas



Esferoides encontrados en Xujiayao (1). Imagen de (Yang et al. 2020, 134)



Núcleo discoidal encontrado en la cueva de Longquan (2). Imagen de (Du et al. 2016, 884).

A

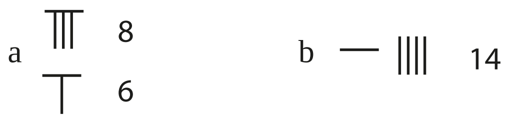
B

Hachas de mano de Rangqiandao (A) y Taiyangdao (B), en la cuenca Bose (3). Imagen de (Huang et al. 2012, 6)

6. Operaciones aritméticas con varillas I: Suma y resta

Suma

Para sumar 8 y 6, colocamos en primer lugar un número sobre el otro (a). Luego, las dos varillas horizontales de las unidades se combinan, formando una varilla en las decenas, y las verticales también se combinan y se colocan en las unidades (b), teniendo el resultado de la suma, 14.

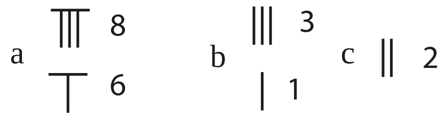


En el caso de otros números, como 9 y 2, ocurriría lo siguiente. Colocamos un número sobre otro (a), y luego sumamos las varillas verticales (4 del nueve y 2 del dos), dando un total de seis varillas verticales. Cinco de ellas y la varilla horizontal del 9 se unen para formar una varilla horizontal de las decenas, dejando una sola varilla vertical en las unidades (b).

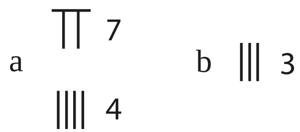
La información y ejemplos han sido tomados de la obra de Lam & Ang (2004) para la suma y resta (pp. 55-56) y multiplicación y división (pp. 56-68).

Resta

Para restar 8 y 6 (a), primero eliminamos las dos varillas horizontales de la misma cantidad (b), y finalmente quitamos una varilla del sustraendo a las dos del minuendo, dando el resultado que es 2 (c).



Para restar 7 y 4 (a), sustraemos las cuatro varillas de 4 de la varilla vertical de 7, con lo que obtendríamos una varilla vertical. Esta la añadimos a las otras dos varillas verticales de 7, lo que nos daría el resultado (b).



Cuestiones generales sobre estas operaciones

- División y multiplicación se basaron en las posiciones relativas del multiplicando y multiplicador, así como el dividendo y divisor. Para referirse a dividendo y divisor se usarán los términos técnicos *fa* y *shi*. Además, el resultado de esta operación llevó, de cierta manera, a la notación de las fracciones. El denominador era llamado *mu* (madre) y el numerador *zi* (hijo).

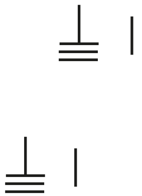
- Según Lam y Ang (2004), "la invención de los métodos de multiplicación y división (conjuntamente con los de adición y sustracción) fue posible por las bases conceptuales del sistema numeral de las varillas, el cual usaba una notación posicional con base decimal" (p. 68).

- Por último, en los *Nueve capítulos* y *Sunzi* se usa el verbo *chu* para prescribir la división, el cual fue usado en los manuscritos y *Zhou bi* como "sustracción" o "sustracción repetida". Además, esta se vinculará con la extracción de raíces, consideradas un tipo específico de división –usando incluso terminología similar (Chemla *en preparación*)–. Señalando esta autora que "en mi opinión, los *Nueve capítulos* testifican una transformación en el entendimiento de diversas operaciones y en la relación entre ellas, en las cuales la división *chu* juega un papel clave, como es claro bajo el punto de vista de la terminología, así como la ejecución" (Chemla *en preparación*, 13).

6. Operaciones aritméticas con varillas II: Multiplicación y división

Multiplicación

A) Para multiplicar 81 por 81, colocamos uno de estos en la primera fila y se llama el numeral superior. El otro se coloca en la tercera fila y es el numeral inferior, haciendo coincidir sus unidades con el primer dígito del numeral superior.

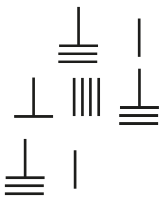


1ª Fila, numeral superior (81)

2ª Fila

3ª Fila, numeral inferior (81)

B) Multiplicamos el primer dígito del numeral superior (8) por cada dígito del numeral inferior comenzando por la izquierda. En primer lugar, 80×80 (6.400), que colocamos en la fila media, y después 80×1, que es la unidad del numeral superior, y se coloca también en el medio (tendríamos entonces 6.480).

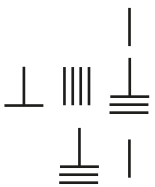


1ª Fila, numeral superior (81)

2ª Fila (6.480)

3ª Fila, numeral inferior (81)

C) Movemos el numeral inferior un lugar a la derecha, y eliminamos el 80 de la posición superior.

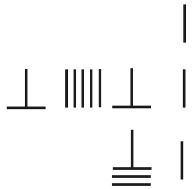


1ª Fila, numeral superior (1)

2ª Fila (6.480)

3ª Fila, numeral inferior (81)

D) Repetimos el paso B), esto es, el 1 del numeral superior se multiplica por los dígitos del numeral inferior, en primer lugar 80×1, y en segundo lugar 1×1, productos los cuales se añaden a la fila media. Esto es, 6.480+80+1= 6.561.



1ª Fila, numeral superior (1)

2ª Fila (6.561)

3ª Fila, numeral inferior (81)

E) Eliminamos los numerales superior e inferior, y dejamos el de la fila media, que es el resultado.

División

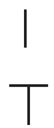
A) Para dividir 100 entre 6, en primer lugar tenemos que colocar dividendo y divisor de tal manera que el primero esté justo encima del segundo.

1ª Fila

2ª Fila, dividendo (100)

3ª Fila, divisor (6)

B) Movemos el 6 del divisor a la izquierda

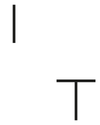


1ª Fila

2ª Fila, dividendo (100)

3ª Fila, divisor (6)

C) Como el 6 del divisor no puede dividir al 1 del dividendo, lo movemos una posición a la derecha



1ª Fila

2ª Fila, dividendo (100)

3ª Fila, divisor (6)

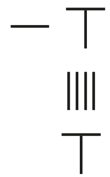
D) En esta ocasión, al 100 del dividendo le restamos 60, resultado de multiplicar el divisor, 6, por las decenas del cociente, 1. Como esto ha sido posible, significa que en la 1ª fila podemos poner una unidad en las decenas

1ª Fila, resultado (10)

2ª Fila, dividendo (40)

3ª Fila, divisor (6)

E) Movemos el 6 del divisor a la derecha de nuevo. En esta ocasión, si multiplicamos 6×6, tendremos 36, que lo restamos como en el paso anterior del dividendo, y ponemos un 6 en las unidades del resultado, con el cual ya hemos terminado, con el resultado de 16 4/6



1ª Fila, resultado (16)

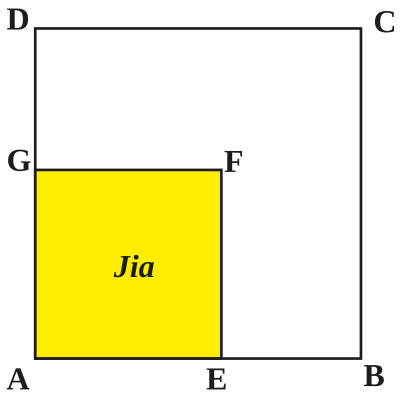
2ª Fila, dividendo (4)

3ª Fila, divisor (6)

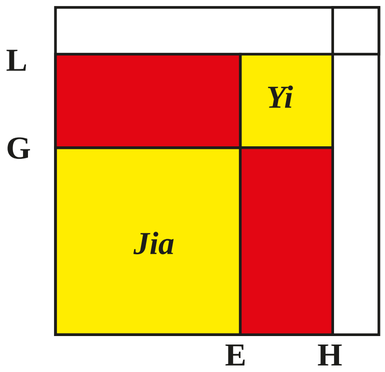
6. Operaciones aritméticas con varillas III: Extracción de raíces cuadradas

No vamos a presentar la extracción de raíces cuadradas como hemos hecho con las anteriores operaciones, ya que en la presentación que hacen Lam y Ang (2004, 94-103) la operación se compone de 17 pasos, y se llevaba a cabo con hasta cuatro posiciones –ver también Chemla y Guo (2004, 322-335)–. En su lugar, vamos a presentar la lectura geométrica que Liu Hui presenta del procedimiento de extracción de raíces cuadradas, 4.16 en los *Nueve capítulos* (Chemla & Guo 2004, 363-368), para lo que también vamos a seguir la presentación de Lam y Ang (2004, 107-110).

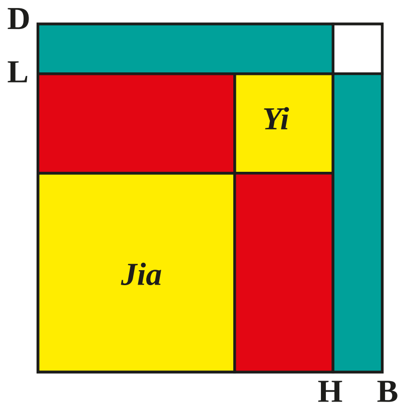
A) Lo primero que tenemos que hacer es obtener un lado del cuadrado amarillo *jia*. A los lados AE y AG se les denomina *fang fa* (que significa un divisor del cuadrado), y eliminamos el área de AEFG del cuadrado ABCD.



B) Posteriormente, calculamos el lado EH del rectángulo rojo, y el lado GL, que se denomina *lian fa* (que significa un divisor del lado del área). Entonces, los dos rectángulos rojos se eliminan, así como el cuadrado Yi amarillo.



C) Por último, obtenemos los lados HB, y otro similar LD que se denomina *yu fa* (que significa divisor del área de la esquina). Eliminamos entonces estos dos rectángulos azul-verde.

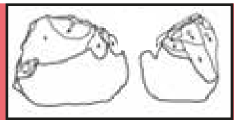
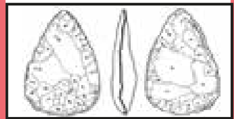
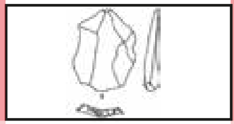
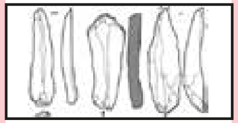
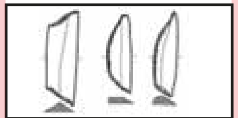
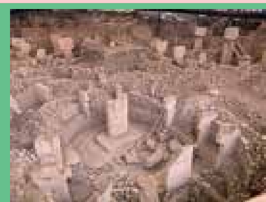
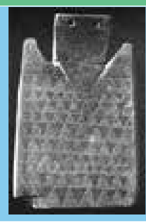
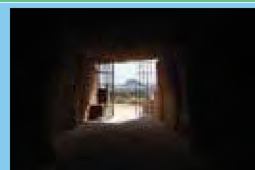


Incluimos a continuación el primer diagrama de esta operación que ha llegado hasta nuestros días, el cual se encuentra en la Enciclopedia Yongle (siglo XV) (Lam & Ang 2004, 106).

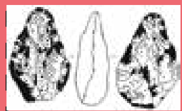
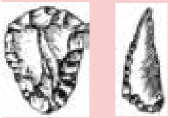
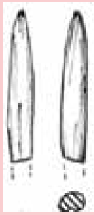
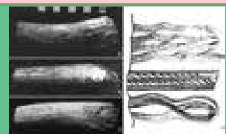
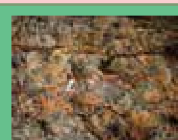
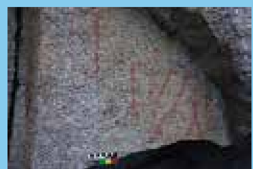
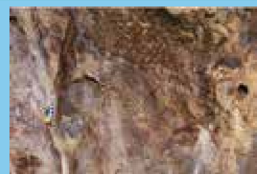
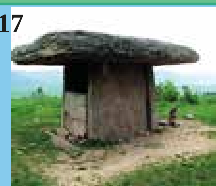
7. Prácticas y elementos materiales considerados en los estudios en prehistoria de la geometría - EA

Cognición visoespacial a pequeña escala

Cognición visoespacial a gran escala

Periodo	Subperiodos	Manufactura de Herramientas Líticas		Modo	Arte Prehistórico: Parietal	Arte Prehistórico: Mobiliar	Monumentos Megalíticos y Organización Espacial del Territorio
Paleolítico	**Paleolítico Inferior** 2.5 MA - 125.000 AP	2.5-2.6 MA		I			
		1.7-0.13 MA		II			
	Paleolítico Medio 125.000 - 40.000 AP	125.000 AP		III		4  M1-6 Hallada en la cueva de Blombos 70.000 AP	
	Paleolítico Superior 40.000 - 12.000 AP	40.000 AP		IV	 2 Pintura rupestre en la Cueva de Lascaux 20.000 AP	 5 Hueso con perforación y grabado de un caballo, proveniente del abrigo de La Madeleine, 12500 a.e.c.	
		40.000 - 12.000 AP	 1	V			
Mesolítico o Epipaleolítico 12.000 - 6000 a.e.c.		Se siguen usando “herramientas compuestas”, uniendo diferentes partes con cuerdas o pegamentos (comenzó en el período anterior), sobre todo del modo V			3  Pintura rupestre en las Cuevas de La Araña, Bicorp (Valencia), 8.000 - 6000 a.e.c. Más esquemático y abstracto que períodos anteriores		 7 Göbekli Tepe, 9600-8200 a.e.c.
Neolítico 6000 - 3000 a.e.c.						 6 Placas gravadas con motivos espaciales, Neolítico Tardío de la Península Ibérica	 8 Dolmen de Menga, 3800-3600 a.e.c.

7. Prácticas y elementos materiales considerados en los estudios en prehistoria de la geometría - China

		Cognición visoespacial a pequeña escala				Cognición visoespacial a gran escala	
		Manufactura de Herramientas Líticas / Vasijas		Arte Prehistórico		Monumentos Megalíticos y Organización Espacial del Territorio	
Periodo	Subperiodos	Norte	Sur	Norte	Sur	Norte	Sur
Paleolítico	Paleolítico Inferior 1.7 MA - 40.000AP	9  Lascas pequeñas, 1.1-1MA  Herramientas pequeñas con núcleos regulares, 60.000 - 40.000 AP	11a Chopper, 1.7 - 1.3 MA  11b  Hachas de mano bifaces, 0.8 MA				
	Paleolítico Superior 35.000 - 20.000 AP	  (a) Herramientas fabricadas con huesos (a) y microlaminadas (29.000 / 26.000 - 10.000 AP) 10	 (a)  Puntas fabricadas con huesos (a) y chopper (28.000 - 10.000 AP) 12	13  Marcas grabadas en roca, Localidad 1 de Shuidonggou. China central, 36.000 AP			
Transición del Paleolítico al Neolítico 20.000 - 8000 / 6500 a.e.c.		Fabricación de vasijas (12.000 - 9.000 AP)	Fabricación de vasijas (20.000 - 17.000 AP)	14  Tres tipos diferentes de marcas grabadas en asta, Cueva Longgu, Hebei, 13.000 AP			18  Dolmen sobre cama de rocas, Provincia Jiangsu, Planicie central, 11.000 AP
Neolítico 8000 / 6500 - 2000 a.e.c.				15  Dibujo de ¿rinoceronte? en Tayuan, Heilongjiang (2100 AP)	16  Dibujo de ciervo sobre pared de cueva , Baiyunwan (5738 - 3400 AP)	17  Dolmen de la Península Liadong, 3300 AP	19  Megalito con forma triangular y agujero en el centro, planicie central (Henan)

7. Prácticas y elementos materiales considerados en los estudios en prehistoria de la geometría - Referencias

1 - Shea (2013)

2 - Foto de dominio público compartida por Gabriela Ruellan en Wikipedia (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lascaux,_Megaloceros.jpg)

3 - Uso libre de la imagen compartida por el usuario Amada44 en Wikipedia (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cueva_arana.svg)

4- Henshilwood et al. (2009)

5 - Licencia Creative Commons del usuario Johnbod en Wikipedia (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perforated_baton_with_low_relief_horse.jpg)

6 - Base de datos https://iberian.its.uiowa.edu/browse.php?by=type

7 - Licencia Creative Commons del usuario Beytullah eles en Wikipedia (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:G%C3%B6beklitepe_%C5%9Eanl%C4%B1urfa.jpg)

8 - Licencia Creative Commons del usuario Malopez21 en Wikipedia (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dolmen_de_Menga,_Pe%C3%B1a_de_los_enamorados_desde_el_interior_del_dolmen.jpg)

9 y 10 - Yang et al. (2020).

11a - Hou & Zhao (2010); 11b - Wang 2005 *apud* Shelach-Lavi (2015, 32)

12 - Qu et al. (2013)

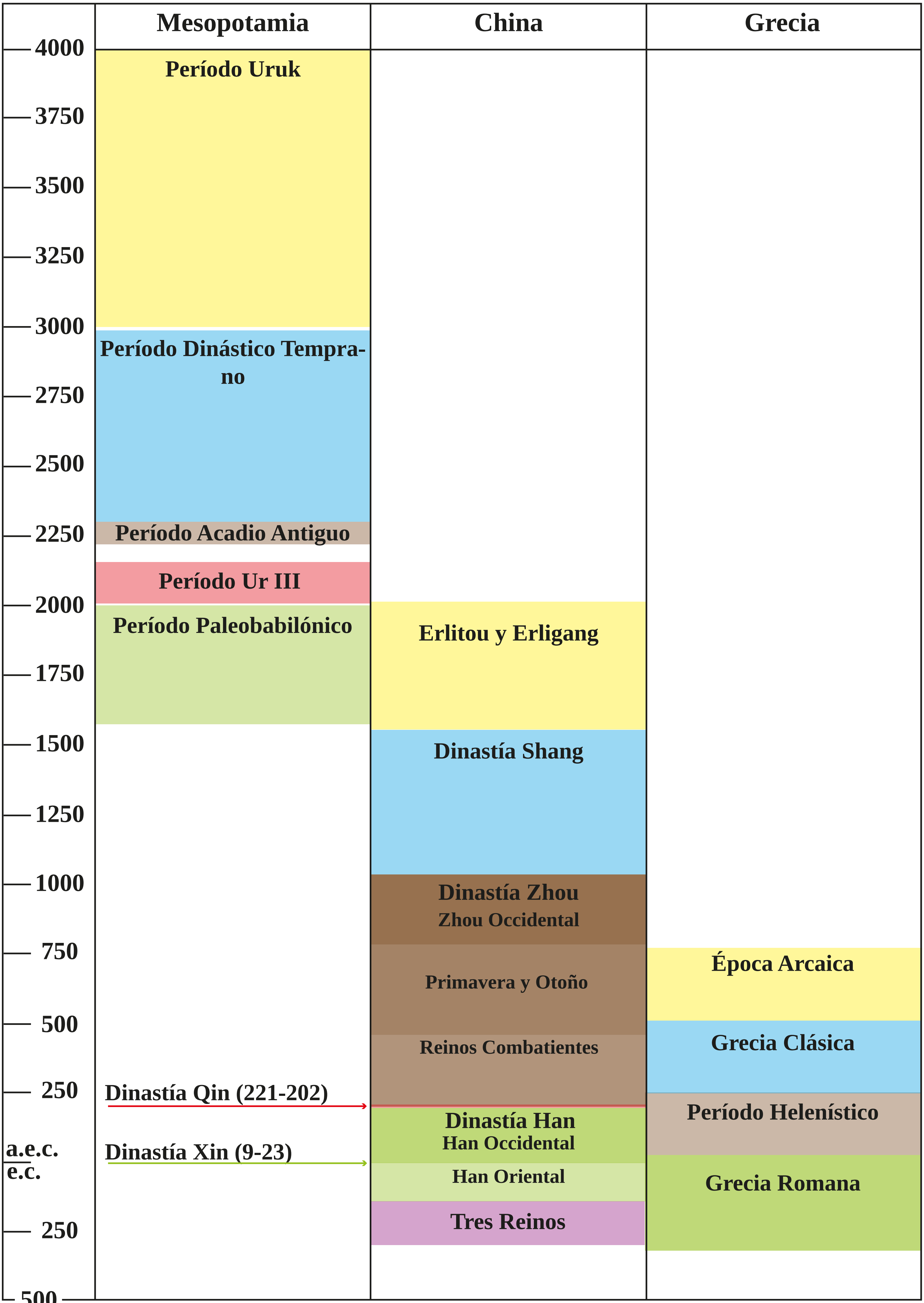
13 y 14 - Bednarik (2013)

15 - Huisheng et al. (2020)

16 - Taçon et al. (2012)

17, 18 y 19 - Tang (2012)

8. Tabla cronológica comparativa



Datos: Mesopotamia y China, ver fuentes citadas en la tesis; Grecia, Pomeroy et al. (2004).

Referencias bibliográficas

Abramiuk, M. A. 2012. *The Foundations of Cognitive Archaeology*. Cambridge, MA: MIT Press.

Acerbi, F. 2008. "Hero of Alexandria", en N. Koertge (ed.), *New Dictionary of Scientific Biography*, pp. 283–286. Detroit: Ch. Scribner's Sons.

Acerbi, F. & Vitrac, B. 2014. *Metrica, Héron D'Alexandrie: Introduction, texte critique, traduction française et notes de commentarie.* Pisa & Roma: Fabrizio Serra Editore.

Adams, J., Barmby, P. & Mesoudi, A. (2017). *The Nature and Development of Mathematics: Cross Disciplinary Perspectives on Cognition, Learning and Culture*. Londres: Routledge.

Alcock, L., Ansari, D., Batchelor, S., Bisson, M.-J., De Smedt, B., Gilmore, C., Göbel, S. M., Hannula-Sormunen, M., Hodgen, J., Inglis, M., Jones, I., Mazzocco, M., McNeil, N., Schneider, M., Simms, V. & Weber, K. 2016. "Challenges in Mathematical Cognition: A Collaboratively-Derived Research Agenda." *Journal of Numerical Cognition*, 2(1): 20–41.

Alexander, H. G. 1956. *The Leibniz-Clarke Correspondence*. Manchester: Manchester University Press.

Allan, S. 1991. *The Shape of the Turtle: Myth, Art, and Cosmos in Early China*. Albany: State University of New York Press.

Allison, H. E. 2004. *Kant's Transcendental Idealism: An Interpretation and Defense*. New Haven: Yale University Press.

Anderson, M. L. 2014. *After Phrenology: Neural Reuse and the Interactive Brain*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Anschuetz, K. F., Wilshusen, R. H. & Scheick, C. L. 2001. "An Archaeology of Landscapes: Perspectives and Directions." *Journal of Archaeological Research*, 9: 157–211.

Artmann, B. 1999. *Euclid —The Creation of Mathematics*. Nueva York: Springer-Verlag.

Ascher, M. 1991. *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Nueva

York: Routledge.

Asper, M. 2009. “The Two Cultures of Mathematics in Ancient Greece”, en E. Robson & J. Stedall (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, pp. 107–132. Nueva York: Oxford University Press.

Avigad, J. E., Dean, E. & Mumma, J. 2009. “A Formal System for Euclid’s Elements.” *Review of Symbolic Logic*, 2(4): 700–768.

Bagley, R. 1999. “Shang Archaeology”, en M. Loewe & E. L. Shaughnessy (eds.), *The Cambridge History of Ancient China: From the Origins of Civilization to 221 B.C.*, pp. 124–231. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2018. “The Bronze Age Before the Zhou Dinasty”, en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 61–83. Oxon & Nueva York: Routledge.

Baker, H. D. 2011. “Babylonian Land Survey in Socio-political Context”, en G. J. Selz & K. Wagensonner (eds.), *The Empirical Dimension of Ancient Near Eastern Studies*, pp. 293-323. Wien: LIT.

Banning, E. B. 2011. “So Fair a House: Göbekli Tepe and the Identification of Temples in the Pre-Pottery Neolithic of the Near East.” *Current Anthropology*, 52(5): 619–660.

Barbieri-Low, A. & Yates, R. D. S. 2015. *Law, State, and Society in Early Imperial China: A Study with Critical Edition and Translation of the Legal Texts from Zhangjiashan Tomb No. 247*. Leiden: Brill.

Bar-Yosef, O. 2015. “Chinese Palaeolithic Challenges for Interpretations of Palaeolithic Archaeology.” *Anthropologie*, 53(1-2): 77-92.

Bar-Yosef, O., Eren, M. I., Yuan, J., Cohen, D. J. & Li, Y. 2012. “Were Bamboo Tools Made in Prehistoric Southeast Asia? An Experimental View from South China.” *Quaternary International*, 269: 9-21.

Bar-Yosef, O. & Wang, Y. 2012. “Paleolithic Archaeology in China.” *Annual Review of Anthropology*, 41: 319-335.

Battista, M. T. 2007. “The Development of Geometric and Spatial Thinking”, en F. K.

Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 843–908. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Battista, M. T., Frazee, L. M. & Winer, M. L. 2018. "Analyzing the Relation Between Spatial and Geometric Reasoning for Elementary and Middle School Students", en K. S. S. Mix & M. T. Battista (eds.), *Visualizing Mathematics: The Role of Spatial Reasoning in Mathematical Thought*, pp. 195–228. Cham, CH: Springer.

Bednarik, R. G. 2013. "Pleistocene Paleoart of Asia." *Arst*, 2(2): 46-76.

Belfer-Cohen, A. & Hovers, E. 2010. "Modernity, Enhanced Working Memory, and the Middle to Upper Paleolithic Record in the Levant." *Current Anthropology*, 51(1): S167-S175.

Bell, C. 1997. *Ritual: Perspectives and Dimensions*. Oxford & Nueva York: Oxford University Press.

Beller, S., Bender, A., Chrisomalis, S., Jordan, M. F., Overmann, K. A., Saxe, B. & Schlimm, D. 2018. "The Cultural Challenge in Mathematical Cognition." *Journal of Numerical Cognition*, 4(2): 448–463.

Bender, A., & Beller, S. 2012. "Nature and Culture of Finger Counting: Diversity and Representational Effects of an Embodied Cognitive Tool." *Cognition*, 124(2): 156–182.

Bennison-Chapman, L. E. 2019. "Reconsidering 'Tokens': The Neolithic Origins of Accounting or Multifunctional, Utilitarian Tools?" *Cambridge Archaeological Journal*, 29(2): 233–259.

Bernard, A. 2003. "Ancient Rhetoric and Greek Mathematics: A Response to a Modern Historiographical Dilemma." *Science in Context*, 16(3): 391–412.

Bielenstein, H. 1986. "Wang Mang, The Restoration of the Han Dynasty, and Later Han", en D. Twitchett & M. Loewe (eds.), *The Cambridge History of China, Vol. 1: The Ch'in and Han Empires, 221 b.c.–a.d. 220*, pp. 223–290. Nueva York: Cambridge University Press.

Bodde, D. 1986. "The State and Empire of Ch'in", en D. Twitchett & M. Loewe (eds.), *The Cambridge History of China, Vol. 1: The Ch'in and Han Empires, 221 b.c.–a.d. 220*, pp. 20–102. Nueva York: Cambridge University Press.

Bogoshi, J., Naidoo, K. & Webb, J.. 1987. “The Oldest Mathematical Artefact.” *The Mathematical Gazette*, 71(458): 294.

Boltz, W. G. & Schemmel, M. 2016. “Theoretical Reflections on Elementary Actions and Instrumental Practices: The Example of the Mohist Canon”, en M. Schemmel (ed.), *Spatial Thinking and External Representation: Towards a Historical Epistemology of Space*, pp. 121–144. Berlín: Max Planck Institute for the History of Science.

Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry*. Nueva York: Dover.

Borghi, A. M., Scorolli, C., Caligiore, D., Baldassarre, G. & Tummolini, L. 2013. “The Embodied Mind Extended: Using Words as Social Tools.” *Frontiers in Psychology*, 4: 214.

Bouzouggar, A., Barton, N., Vanhaeren, M., d’Errico, F., Collcutt, S., Higham, T., Hodge, E., Parfitt, S., Rhodes, E., Schwenninger, J.-L., Stringer, C., Turner, E., Ward, S., Moutmir, A. & Stambouli, A. 2007. “82,000-Year-Old Shell Beads from North Africa and Implications for the Origins of Modern Human Behavior.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104(24): 9964-9969.

Boyer, C. B. 1991. *A History of Mathematics*. Nueva York: John Wiley & Sons.

Bradley, R. 1998. *The Significance of Monuments : On the Shaping of Human Experience in Neolithic and Bronze Age Europe*. Londres & Nueva York: Routledge.

———. 2012. *The Idea of Order: The Circular Archetype in Prehistoric Europe*. Oxford: Oxford University Press.

Bray, F. 2007. “Introduction: The Powers of Tu”, en F. Bray, V. Dorofeeva-Lichtmann & G. Metailie (eds.), *Graphics and Text in the Production of Technical Knowledge in China*, pp. 1–78. Leiden & Boston: Brill.

Brown, D. 2000. “The Cuneiform Conception of Celestial Space and Time.” *Cambridge Archaeological Journal*, 10(1): 103-122.

Bruner, E. & Iriki, A. 2016. “Extending Mind, Visuospatial Integration, and the Evolution of the Parietal Lobes in the Human Genus.” *Quaternary International*, 405(Parte A): 98–110.

Bruner, E., Lozano, M. & Lorenzo, C. 2016. “Visuospatial Integration and Human Evolution: The Fossil Evidence.” *Journal of Anthropological Sciences*, 94: 81–97.

Bruner, E., Spinapolice, E., Burke, A. & Overmann, K. A. 2018. “Visuospatial Integration: Paleoanthropological and Archaeological Perspectives”, en L. D. Di Paolo, F. Di Vicenzo & F. de Petrillo (eds.), *Evolution of Primate Social Cognition*, pp. 299–326. Cham, CH: Springer.

Bulmer-Thomas, I. 1974. “Oenopides of Chios”, en C. C. Gillespie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, pp. 179-182. Nueva York: Charles Scribner's sons.

Burkert, W. 1972. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Traducción de E. L. Minar. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cahan, D. 1993. *Hermann von Helmholtz and the Foundations of 19th Century Science.* Berkeley & Los Ángeles: University of California Press.

Campbell, J. I. D. 2005. *Handbook of Mathematical Cognition*. Nueva York: Psychology Press.

Campbell, R. 2018. *Violence, Kinship and the Early Chinese State*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Campos Almeida, M. 2009. *Origens Da Matemática: A Pré-História Da Matemática*. Curitiba: Editora Champagnat.

———. 2011. *Origens Da Matemática: A Pré-História Da Matemática o Neolítico e o Alvorecer Da História*. Curitiba: Editora Champagnat.

Carey, S. 2009a. *The Origin of Concepts*. Nueva York: Oxford University Press.

———. 2009b. “Where Our Number Concepts Come From.” *The Journal of Philosophy*, 106(4): 220–254.

Carey, S., Shusterman, A., Haward, P. & Distefano, R. 2017. “Do Analog Number Representations Underlie the Meanings of Young Children’s Verbal Numerals?” *Cognition*, 168: 243–255.

Carter, J. 2019. “Philosophy of Mathematical Practice—Motivations, Themes and Prospects.” *Philosophia Mathematica*, 27(1): 1–32.

Carter, R. A. & Philip, G. 2010. *Beyond the Ubaid: Transformation and Integration in* *the Late Prehistoric Societies of the Middle East*. Chicago: The Oriental Institute.

Chemla, K. 2003. “Generality above Abstraction: The General ExPressed in Terms of the Paradigmatic in Mathematics in Ancient China.” *Science in Context*, 16(3): 413-458.

———. 2005. “Geometrical Figures and Generality in Ancient China and Beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra”. *Science in Context*, 18(1): 123-166.

———. 2010. “Changes and Continuities in the Use of Diagrams *Tu* in Chinese Mathematical Writings (3rd Century–14th Century).” *East Asian Science, Technology, and Society: An International Journal*, 4: 303–326.

———. 2014a. “Observing Mathematical Practices as a Key to Mining Our Sources and Conducting Conceptual History”, en L. Soler, S. Zwart, M. Lynch & V. Israel-Jost (eds.), *Science after the Practice Turn in the Philosophy, History, and Social Studies of Science*, pp. 238–68. Nueva York: Routledge.

———. 2014b. “Prologue, Historiography and History of Mathematical Proof: A Research Programme”, en K. Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, pp. 1–68. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2015. “Proof, Generality and the Prescription of Mathematical Action: A Nanohistorical Approach to Communication.” *Centaurus*, 57: 287–300.

———. 2017. “The Diversity of Mathematical Cultures: One Past and Some Possible Futures.” *EMS Newsletter*, 6(104): 14-24.

———. *en preparación*. “Working on and with Division in Early China, 3rd Century BCE-7th Century CE”, en K. Chemla, A. Keller & C. Proust (eds.), *Cultures of Computation and Quantification in the Ancient World*. Springer.

Chemla, K., Chorlay, R. & Rabouin, D. 2016. “Prologue: Generality as a Component of an Epistemological Culture”, en K. Chemla, R. Chorlay & D. Rabouin (eds.), *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, pp. 1–41. Oxford: Oxford University Press.

Chemla, K. & Guo, S. 2004. *Les Neuf Chapitres*. Paris: Dunod.

Chemla, K. & Ma, B. 2011. “Interpreting a Newly Discovered Mathematical Document

Written at the Beginning of the Han Dynasty in China (before 157 B.C.E.) and Excavated from Tomb M77 at Shuihudi (睡虎地).” *Sciamus*, 12: 159–91.

———. 2020. “The Use of Volume in the Measurement of Grain in Early Imperial China”, en C. Michel & K. Chemla (eds.), *Mathematics, Administrative and Economic Activities in Ancient Worlds*, pp. 239–279. Cham, CH: Springer.

Chemla, K. & Zou, D. 2018. “Parts in Chinese Mathematical Texts: Interpreting the Chapter Form of *The Nine Chapters on Mathematical Procedures*”, en F. Bretelle-Establet & S. Schmitt (eds.), *Pieces and Parts in Scientific Texts*, pp. 91–134. Cham, CH: Springer.

Chen, S. & Yu, P.-L. 2017. “Intensified Foraging and the Roots of Farming in China.” *Journal of Anthropological Research*, 73(3): 381–412.

Cheng, K. 1986. “A Purely Geometric Module in the Rat’s Spatial Representation.” *Cognition*, 23(2): 149–178.

———. 2008. “Whither Geometry? Troubles of the Geometric Module.” *Trends in Cognitive Sciences*, 12(9): 355–361.

Cheng, K., Huttenlocher, J. & Newcombe, N. S. 2013. “25 Years of Research on the Use of Geometry in Spatial Reorientation: A Current Theoretical Perspective.” *Psychonomic Bulletin & Review*, 20(6): 1033–1054.

Cheung, P. & Le Corre, M. 2018. “Parallel Individuation Supports Numerical Comparisons in Preschoolers.” *Journal of Numerical Cognition*, 4(2): 380–409.

Chi, Z. & Hung, H.-C. 2008. “The Neolithic of Southern China - Origin, Development, and Dispersal.” *Asian Perspectives*, 47(2): 299–329.

Childs-Johnson, E. 1991. “Jades of the Hongshan Culture: The Dragon and Fertility Cult Worship.” *Arts Asiatiques*, 46: 82–95.

———. 2009. “The Art of Working Jade and the Rise of Civilization in China”, en E. Childs-Johnson & G. Fang (eds.), *The Jade Age and Early Chinese Jades in American Museums*, pp. 291–393. Beijing: Science Press.

———. 2020. “The Jade Age, Revisited, ca. 3500-2000 BCE”, en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 101–117. Nueva York: Oxford

University Press.

Christianidis, J. 2004. *Classics in the History of Greek Mathematics*. Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Clark, A. 2006. "Language, Embodiment, and the Cognitive Niche." *Trends in Cognitive Sciences*, 10(8): 370–374.

Clark, G. 1969. *World Prehistory: A New Synthesis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Colagè, I. & d'Errico, F. 2020. "Culture: The Driving Force of Human Cognition." *Topics in Cognitive Science*, 12(2): 654–672.

Cooke, R. 2013. *The History of Mathematics: A Brief Course*. Hoboken, NJ: Wiley.

Coubart, A., Izard, V., Spelke, E. S., Marie, J. & Streri, A. 2014. "Dissociation between Small and Large Numerosities in Newborn Infants." *Developmental Science*, 17(1): 11–22.

Csikszentmihalyi, M & Nylan, M. 2003. "Constructing Lineages and Inventing Traditions Through Exemplary Figures in Early China." *T'oung Pao*, 89(1): 59–99.

Cullen, C. 1995. "How can we do the Comparative History of Mathematics? Proof in Liu Hui 劉徽 and the Zhou Bi 周髀." *Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal*, 4(1): 59–94.

———. 1996. *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou Bi Suan Jing*. Cambridge, GB & Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2004. *The Suàn Shù Shū 'Writings on Reckoning': A Translation of a Chinese Mathematical Collection of the Second Century BC, with Explanatory Commentary*. Cambridge, GB: Needham Research Institute Working Papers.

———. 2007. "The Suàn Shù Shū,'Writings on Reckoning': Rewriting the History of Early Chinese Mathematics in the Light of an Excavated Manuscript." *Historia Mathematica*, 34(1): 10–44.

———. 2009. "People and Numbers in Early Imperial China", en E. Robson & J. Stedall (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, pp. 591–618. Nueva York: Oxford University Press.

Cuomo, S. 2001. *Ancient Mathematics*. Londres & Nueva York: Routledge.

D'Ambrosio, U. 1990. *Etnomatematica: Arte Ou Tecnica de Explicar e Conhecer.* Sao Paulo: Atica.

———. 2013. *Etnomatemáticas: entre las tradiciones y la modernidad*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

d'Errico, F. 1998. "Palaeolithic Origins of Artificial Memory Systems: An Evolutionary Perspective", en C. Renfrew & C. Scarre (eds.), *Cognition and Material Culture: The Archaeology of Symbolic Storage*, pp. 19–50. Cambridge, GB: The McDonald Institute Monographs.

d'Errico, F. & Banks, W. E. 2015. "The Archaeology of Teaching: A Conceptual Framework." *Cambridge Archaeological Journal*, 25(4): 859–966.

d'Errico, F. & Cacho, C. 1994. "Notation versus Decoration in the Upper Palaeolithic: A Case-Study from Tossal de La Roca, Alicante, Spain." *Journal of Archaeological Science*, 21: 185–200.

d'Errico, F., & Colagè, I. 2020. "Cultural Exaptation and Cultural Neural Reuse: A Mechanism for the Emergence of Modern Culture and Behavior." *Biological Theory*, 13(4): 213–227.

d'Errico, F., Doyon, L., Colagè, I., Queffelec, A., Le Vraux, E., Giacobini, B., Vandermeersch, G. & Maureille, B. 2017. "From Number Sense to Number Symbols: An Archaeological Perspective." *Philosophical Transactions of the Royal Society of Londres. Series B, Biological Sciences*, 373(1740): 20160518.

d'Errico, F., Henshilwood, C., Vanhaeren, M. & Van Niekerk, K. 2005. "*Nassarius kraussianus* Shell Beads from Blombos Cave: Evidence for Symbolic Behaviour in the Middle Stone Age." *Journal of Human Evolution*, 48(1): 3–24.

d'Errico, F., Backwell, L., Villa, P., Degano, I., Lucejko, J. J., Bamford, M. K., Higham, T. F. G., Colombini, M. P. & Beaumont, P. B. 2012. "Early Evidence of San Material Culture Represented by Organic Artifacts from Border Cave, South Africa." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 109(33): 13214–13219.

d'Errico, F., Vanhaeren, M., Barton, N., Bouzouggar, A., Mienis, H., Richter, D., Hublin, J.-J., McPherron, S. P. & Lozouet, P. 2009. "Additional Evidence on the Use of Personal Ornaments in the Middle Paleolithic of North Africa." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106: 16051–16056.

Dal Magro, T. & García-Pérez, M. J. 2019. "On Euclidean Diagrams and Geometrical Knowledge." *Theoria*, 34(2): 255-276.

———. 2023. "Demostrar es diagramar: la práctica euclídea", en J. Ferreirós & M. de Paz (eds.), *La génesis de la geometría*. Madrid: Plaza y Valdés.

Damerow, P. 1999. "The Material Culture of Calculation: A Conceptual Framework for an Historical Epistemology of the Concept of Number." *Preprint 117: Max Planck Institute for the History of Science.*

———. 2001. "Kannten Die Babylonier Den Satz Des Pythagoras? Epistemologische Anmerkungen Zur Natur Der Babylonischen Mathematik", en J. Hoyrup & P. Damerow (eds.), *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics*, pp. 219–310. Berlín: Dietrich Reimer Verlag.

———. 2016. "The Impact of Notation Systems: From the Practical Knowledge of Surveyors to Babylonian Geometry", en M. Schemmel (ed.), *Spatial Thinking and External Representation: Towards a Historical Epistemology of Space*, pp. 93–119. Berlín: Max Planck Institute for the History of Science.

Dantzig, T. 1955. *The Bequest of the Greeks*. Londres: George Allen & Unwin Ltd.

Danziger, K. 1996. "Towards a Polycentric History of Psychology." *Paper Presented at the 26th International Congress of Psychology in Montréal, Canada*, 1–8.

———. 2013. "Psychology and Its History." *Theory and Psychology*, 23(6): 829–839.

Dauben, J. W. 2008. "Suan Shu Shu A Book on Numbers and Computations: English Translation with Commentary." *Archive for History of Exact Sciences*, 62(2): 91–178.

———. 2013. "九章算术 "*Jiu Zhang Suan Shu*" (*Nine Chapters on the Art of Mathematics*) – An Appraisal of the Text, its Editions, and Translations." *Sudhoffs Archiv*, 97(2): 199–235.

———. 2014. "The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly

Discovered *Shu* and *Suan Shu Shu* Bamboo Texts to the *Nine Chapters on the Art of Mathematics*." *Notices of the ICCM*, 2(2): 24–51.

de Crespigny, R. 1991. "The Three Kingdoms and Western Jin: A History of China in the Third Century AD." *East Asian History*, 1: 1–36.

———. 2017. *Fire Over Luoyang: A History of Later Han Dynasty 23-220 AD*. Leiden: Brill.

———. 2019a. "Wei", en A. E. Dien & K. N. Knapp (eds.), *The Cambridge History of China, Volume 2: The Six Dynasties, 220-589*, pp. 27–49. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

———. 2019b. "Wu", en A. E. Dien & K. N. Knapp (eds.), *The Cambridge History of China, Volume 2: The Six Dynasties, 220-589*, pp. 50–65. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

De Cruz, H. 2006. "Towards a Darwinian Approach to Mathematics." *Foundations of Science*, 11(1–2): 157–196.

Dehaene, S. 2005. "Evolution of Human Cortical Circuits for Reading and Arithmetic: The 'Neuronal Recycling' Hypothesis", en S. Dehaene, J.-R. Duhamel, M. D. Hauser & G. Rizolatti (eds.), *From Monkey Brain to Human Brain*, pp. 133–157. Cambridge, MA: The MIT Press.

———. 2011. *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Nueva York: Oxford University Press.

Dehaene, S. & Brannon, E. M. 2011. *Space, Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought*. Academic Press.

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. & Spelke, E. S. 2006. "Core Knowledge of Geometry in an Amazonian Indigene Group." *Science*, 311(5759): 381–384.

De Heinzelin, J. 1962. "Ishango." *Scientific American*, 206(June): 105–116.

Delnero, P. 2015. "Scolarship and Inquiry in Early Mesopotamia." *Journal of Ancient Near Eastern History*, 2(2): 109–143.

Demoule, J.-P. & Perlès, C. 1993. "The Greek Neolithic: A New Review." *Journal of World Prehistory*, 7(4): 355–416.

de Paz, M. (2011). “Thinking geometry: a matter of philosophy. The case of Helmholtz and Poincaré”, en H. Tahiri (ed.), *Poincaré's Philosophy of Mathematics: Intuition, Experience, Creativity*, pp. 107-121. Lisboa: Cadernos de Filosofia das Ciências.

de Paz, M. & DiSalle, R. 2014. *Poincaré, Philosopher of Science: Problems and Perspectives*. Dordrecht: Springer.

De Risi, V. 2007. *Geometry and Monadology: Leibniz’s Analysis Situs and Philosophy of Space*. Basel: Birkhäuser.

———. 2015. “Introduction”, en V. De Risi (ed.), *Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, pp. 1–13. Basel: Birkhäuser.

———. 2016a. “The Development of Euclidean Axiomatics.” *Archive for History of Exact Sciences*, 70(6): 591–676.

———. 2016b. “Francesco Patrizi and the New Geometry of Space”, en K. Vermeir & J. Regier (eds.), *Boundaries, Extents and Circulations: Space and Spatiality in Early Modern Natural Philosophy*, pp. 55–106. Cham, CH: Springer.

———. 2016c. “The Development of Euclidean Axiomatics.” *Archive for History of Exact Sciences*, 70(6): 591-676.

———. 2018. “Analysis Situs, the Foundations of Mathematics, and a Geometry of Space”, en M. R. Antognazza (ed.), *The Oxford Handbook of Leibniz*, pp. 247–258. Nueva York: Oxford University Press.

———. 2020. “Euclid's Common Notions and the Theory of Equivalence.” *Foundations of Science*, 26(2): 301-324.

De Smedt, B. & De Cruz, H. 2011. “The Role of Material Culture in Human Time Representation: Calendrical Systems as Extensions of Mental Time Travel.” *Adaptative Behavior*, 19(1): 63–76.

Dietrich, L., Meister, J., Dietrich, O., Notroff, J., Kiep, J., Heeb, J., Beuger, A. & Schütt, B. 2019. “Cereal Processing at Early Neolithic Göbekli Tepe, Southeastern Turkey.” *PLoS ONE*, 14(5): e0215214.

Dietrich, O., Heun, M., Notroff, J., Schmidt, K. & Zarnkow, M. 2012. “The Role of Cult and Feasting in the Emergence of Neolithic Communities. New Evidence from

Göbekli Tepe, South-Eastern Turkey.” *Antiquity*, 86(333): 674-695.

Dillon, M. R., Huang, Y. & Spelke, E. S. 2013. “Core Foundations of Abstract Geometry.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 110(35): 14191–14195.

Dillon, M. R. & Spelke, E. S. 2015. “Core Geometry in Perspective.” *Developmental Science*, 18(6): 894–908.

DiSalle, R. 1993. “Helmholtz’s Empiricist Philosophy of Mathematics: Between Laws of Perception and Laws of Nature”, en D. Cahan (ed.), *Hermann von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science*, pp. 498–521. Berkeley & Los Ángeles: The University of California Press.

———. 2006. “Kant, Helmholtz, and the Meaning of Empiricism”, en M. Friedman & A. Nordmann (eds.), *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science*, pp. 123–140. Cambridge, MA & Londres: The MIT Press.

Donald, M. 1991. *Origins of the Modern Mind: Three Stages in the Evolution of Culture and Cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dorofeeva-Lichtmann, V. 2004. “Spatial Organization of Ancient Chinese Texts (Preliminary Remarks)”, en K. Chemla (ed.), *History of Science, History of Text*, pp. 3–47. Dordrecht: Springer.

Drennan, R. D., Lu, X. & Peterson, C. E. 2017. “A Place of Pilgrimage? Niuheliang and Its Role in Hongshan Society.” *Antiquity*, 91(355): 43–56.

Drennan, R. D., Peterson, C. E., Lu, X. & Li, T. 2017. “Hongshan Households and Communities in Neolithic Northeastern China.” *Journal of Anthropological Archaeology*, 47: 50–71.

Du, S., Li, X., Zhou, L., Pang, H., Bar-Yosef, O. & Wu, X. 2016. “Longquan Cave: an Early Upper Palaeolithic Site in Henan Province, China.” *Antiquity*, 90(352): 876-893.

Duval, R. 1998. “Geometry From a Cognitive Point of View”, en C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, pp. 37–52. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dzbynski, A. 2013. *The Power of the Line: Metaphor, Number and Material Culture in European Prehistory*. Cambridge, GB: Cambridge Scholars Publishing.

Eidinow, E., & Martin, L. H. 2014. “Editor’s Intruduction: Journal of Cognitive Historiography.” *Journal of Cognitive Historiography*, 1(1): 5–9.

Engel, A. K., Friston, K. J. & Kragic, D. 2015. *The Pragmatic Turn: Toward Action-Oriented Views in Cognitive Science*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Eno, R. 2009. “Shang State Religion and the Pantheon of the Oracle Texts”, en J. Lagerwey & M. Kalinowski (eds.), *Early Chinese Religion - Part One: Shang through Han (1250 BC-220 AD)*, pp. 41–102. Leiden: Brill.

Everett, C. 2017. *Numbers and the Making of Us: Counting and the Course of Human Cultures*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Fabry, R. E. 2017. “Cognitive Innovation, Cumulative Cultural Evolution, and Enculturation.” *Journal of Cognition and Culture*, 17(5): 375–395.

———. 2019. “The Cerebral, Extra-Cerebral Bodily, and Socio-Cultural Dimensions of Enculturated Arithmetical Cognition.” *Synthese*, 197(9): 3685-3720.

Fang, X. 2020. “A Controlled Fine Craft: Jade Production Techniques in the Liangzhu Cultre”, en B. Liu, L. Qin & Y. Zhuang (eds.), *Liangzhu Culture: Society, Belief, and Art in Neolithic China*, pp. 115–164. Londres & Nueva York: Routledge.

Farmer, J. M. 2019. “Shu-Han”, en A. E. Dien & K. N. Kanpp (eds.), *The Cambridge History of China, Volume 2: The Six Dynasties, 220-589*, pp. 66–78. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. S. 2004. “Core Systems of Number.” *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307-314.

Fengxian, X. 2018. “Astral Sciences in Ancient China”, en P. T. Keyser & J. Scarborough (eds.), *The Oxford Handbook of Science and Medicine in the Classical World*, pp. 129–144. Nueva York: Oxford University Press.

Ferreirós, J. 2000. *Riemanniana Selecta*. Madrid: CSIC.

———. 2016. *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton: Princeton University Press.

Ferreirós, J. & García-Pérez, M. J. 2018. "¿'Natural' y 'Euclidiana'? Reflexiones sobre la geometría práctica y sus raíces cognitivas." *Theoria*, 33(2): 325–344.

———. 2020. "Beyond Natural Geometry: On the Nature of Proto-Geometry." *Philosophical Psychology*, 33(2): 181–205.

Flad, R. K. 2008. "Divination and Power: A Multiregional View of the Development of Oracle Bone Divination in Early China." *Current Anthropology*, 49(3): 403–37.

Fogelin, L. 2007. "The Archaeology of Religious Ritual." *Annual Review of Anthropology*, 36: 55–71.

Foster, B. R. 2005. "Transmission of Knowledge", en D. Snell (ed.), *A Companion to the Ancient Near East*, pp. 245–252. Oxford: Blackwell publishing.

Fowler, D. 1999. *The Mathematics of Plato's Academy*. Nueva York: Oxford University Press.

Fraser, C. 2020. "Mohist Canons", en E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2020 edition).

Friberg, J. 2007a. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*. Nueva York: Springer.

———. 2007b. *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. Singapur: World Scientific.

Friedman, M. 2015. "Kant on Geometry and Experience", en V. De Risi (ed.), *Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, pp. 275–309. Basel: Birkhäuser.

Gandz, S. 1929. "The Origin of Angle-Geometry." *Isis*, 12(3): 452-481.

Gao, X. 2013. "Paleolithic Cultures in China: Uniqueness and Divergence." *Current Anthropology*, 54(S8): S358-S370.

García-Pérez, M. J. (2023). "Los orígenes prehistóricos del conocimiento geométrico", en J. Ferreirós & M. de Paz (eds.), *La génesis de la geometría*. Madrid: Plaza y Valdés.

García-Pérez, M. J. & Dal Magro, T. 2019. "Un análisis comparativo del uso de diagramas en dos prácticas matemáticas de la antigüedad." *Crítica, Revista*

Hispanoamericana de Filosofía, 51(152): 5.31.

García Rivero, D. & O'Brien, M. 2014. "Phylogenetic Analysis Shows that Neolithic Slate Plaques from the Southwestern Iberian Peninsula are Not Genealogical Recording Systems." *PLoS ONE*, 9(2): e88296.

García Sanjuán, L. & Lozano Rodríguez, J. A. 2016. "Menga (Andalusia, Spain): Biography of an Exceptional Megalithic Monument", en L. Laporte & C. Scarre (eds.), *The Megalithic Architectures of Europe*, pp. 3–16. Oxford & Filadelfia: Oxbow Books.

García Sanjuan, L. & Wheatley, D. W. 2009. "El marco territorial de los dólmenes de Antequera: Valoración preliminar de las primeras investigaciones", en B. Ruíz González (ed.), *Dólmenes de Antequera: Tutela y valorización hoy*, pp. 128-143. Sevilla: Junta de Andalucía, Consejería de Cultura.

———. 2010. "Natural Substances, Landscape Forms, Symbols and Funerary Monuments: Elements of Cultural Memory among the Neolithic and Copper Age Societies of Southern Spain", en K. T. Lillios & V. Tsamis (eds.), *Material Mnemonics. Everyday Memory in Prehistoric Europe*, pp. 10–39. Oxford & Oakville: Oxbow books.

Gärdenfors, P. & Högberg, A. 2017. "The Archaeology of Teaching and the Evolution of Homo Docens." *Current Anthropology*, 58(2): 188–208.

Gates, C. 2011. *Ancient Cities: The Archaeology of Urban Life in the Ancient Near East and Egypt, Greece, and Rome*. Londres & Nueva York: Routledge.

Gerdes, P. 1997. "On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education", en A. B. Powell & M. Frankestein (eds.), *Ethnomathematics Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, pp. 223–248. Albany: State University of New York Press.

———. 2003. *Awakening of Geometrical Thought in Early Culture*. Minneapolis: MEP Publications.

Giardino, V. 2013. "A Practice–Based Approach to Diagrams", en A. Mokfeti & S. J. Shin (eds.), *Visual Reasoning with Diagrams*, pp. 135–151. Basel: Birkhäuser.

———. 2014. "Diagramming : Connecting Cognitive Systems to Improve Reasoning", en A. Benedek & K. Nyíri (eds.), *Visual Learning Vol. 4 : Emotion, Expression,* *Explanation*, pp. 23–34. Frankfurt: Peter Lang Verlag.

———. 2016. "¿Dónde situar los fundamentos cognitivos de las matemáticas?", en J. Ferreirós & A. Lassalle Casanave (eds.), *El árbol de los números: Cognición, lógica y práctica matemática*, pp. 23-49. Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla.

———. 2017. "The Practical Turn in Philosophy of Mathematics: A Portrait of a Young Discipline." *Phenomenology and Mind*, 12: 18–28.

Gilmore, C., Göbel, S. M. & Inglis, M. 2018. *An Introduction to Mathematical Cognition*. Londres: Routledge.

Goldin, P. R. 2011. "Persistent Misconceptions About Chinese Legalism." *Journal of Chinese Philosophy*, 38(1): 88–104.

González Redondo, F. A., Martín-Loeches, M. & Silván Pobes, E. 2010. "Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico Franco-Cantábrico." *Dynamis*, 30: 167-195.

Gow, J. 1884. *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Graham, A. C. 1989. *Disputes of the Tao: Philosophical Argument in Ancient China*. La Salle, Illinois: Open Court.

Gray, J. 1989. *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*. Nueva York: Oxford University Press.

Groenewoudt, B. 2011. "Curves Turning into Squares. Late Prehistoric Landscape Change and the Changing Morphology of Ritual Structures. Causality? An Assessment of the Evidence." *Landscape History*, 32: 5–17.

Hacking, I. 2009. "Husserl on the Origins of Geometry", en D. J. Hyder & H.-J. Rheinberger (eds.), *Sciences and the Life-World: Essays on Husserl's Crisis of European Sciences*, pp. 64–82. Stanford: Stanford University Press.

Hahn, R. 2017. *The Metaphysics of the Pythagorean Theorem*. Nueva York: State University of New York Press.

Haklay, G. & Gopher, A. 2015. "A New Look at Shelter 131/51 in the Natufian Site of Eynan (Ain-Mallaha), Israel." *PLoS ONE*, 10(7): e0130121.

———. 2019. “Architectural Planning and Measuring in the Pre-Pottery Neolithic Site of Çayönü, Turkey.” *Paléorient*, 45(1): 7–17.

———. 2020. “Geometry and Architectural Planning at Göbekli Tepe, Turkey.” *Cambridge Archaeological Journal*, 30(2): 343–357.

Halstead, P. 1999. “Neighbours from Hell? The Household in Neolithc Greece”, en P. Halstead (ed.), *Neolithic Society in Greece*, pp. 77–95. Sheffield: Sheffield Academic Press.

Hamami, Y. & Mumma, J. 2013. “Prolegomena to a Cognitive Investigation of Euclidean Diagrammatic Reasoning.” *Journal of Logic, Language and Information*, 22(4): 421–448.

Hamami, Y., van der Kuil, M. N. A., Mumma, J. & van der Ham, I. J. M. 2020. “Cognitive Processing of Spatial Relations in Euclidean Diagrams.” *Acta Pscyhologica* 205: 103019.

Hardy, G. H. 1940/1992. *A Mathematician’s Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Harper, D. 1999. “Warring States Philosophy and Occult Thought”, en M. Loewe & E. L. Shaughnessy (eds.), *The Cambridge History of Ancient China: From the Origins of Civilization to 221 B.C.*, pp. 813–884. Nueva York: Cambridge University Press.

Harper, D. & Kalinowski, M. 2017. *Books of Fate and Popular Culture in Early China: The Daybook Manuscripts of the Warring States, Qin, and Han*. Leiden: Brill.

Hatfield, G. 1990. *The Natural and the Normative: Theories of Spatial Perception from Kant to Helmholtz*. Cambridge, MA: The MIT Press.

———. 2006. “Kant on the Perception of Space (and Time)”, en P. Guyer (ed.), *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, pp. 61–93. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2015. “On Natural Geometry and Seeing Distance Directly in Descartes”, en V. De Risi (ed.), *Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, pp. 157–192. Basel: Birkhäuser.

Hawkins, G. S. 1964. *Stonehenge Decoded*. Nueva York: Doubleday.

He, N. 2013. “The Longshan Period Site of Taosi in Southern Shanxi Province”, en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 252–277. Chichester: Wiley-Blackwell.

———. 2018. “Taosi: An Archaeological Example of Urbanization as a Political Center in Prehistoric China.” *Archaeological Research in Asia*, 14: 20–32.

———. 2020. “Longshan Culture Issues: Taosi and Cosmology”, en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 139–160. Nueva York: Oxford University Press.

Heath, T. L. 1908. *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*, *Vol. I: Books I & II*. Cambridge: Cambridge University Press.

———. 1921a. *A History of Greek Mathematics, Vol. I: From Thales to Euclid*. Oxford: Clarendon Press.

———. 1921b. *A History of Greek Mathematics, Vol. II: From Aristarchus to Diophantus*. Oxford: Clarendon Press.

Hecht, E. E., Gutman, D. A., Khreisheh, N., Taylor, S. V., Kilner, J., Faisal, A. A., Bradley, B.A., Chaminade, T. & Stout, D. 2015. “Acquisition of Paleolithic Toolmaking Abilities Involves Structural Remodeling to Inferior Frontoparietal Regions.” *Brain Structure and Function*, 220(4): 2315-2331.

Heersmink, R. 2013. “A Taxonomy of Cognitive Artifacts: Function, Information, and Categories.” *Review of Philosophy and Psychology*, 4(3): 465–481.

Heinzmann, G. 2001. “The Foundations of Geometry and the Concept of Motion: Helmholtz and Poincaré.” *Science in Context*, 14(3): 457–470.

Helmholtz, H. von 1876/1996. “The Origin and Meaning of Geometrical Axioms”, en W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Sourcebook in the Foundations of Mathematics*, pp. 663–689. Oxford: Clarendon Press.

———. 1878/1996. “The Facts in Perception”, en W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Sourcebook in the Foundations of Mathematics*, pp. 689–727. Oxford: Clarendon Press.

Henrich, J., Heine, S. J. & Norenzayan, A. 2010. “The Weirdest People in the World?”

Behavioral and Brain Sciences, 33(2–3): 61–83.

Henshilwood, C. S., d'Errico, F. & Watts, I. 2009. "Engraved Ochres from the Middle Stone Age Levels at Blombos Cave, South Africa." *Journal of Human Evolution*, 57: 27–47.

Hergenhahn, B. R. & Henley, T. B. 2014. *An Introduction to the History of Psychology*. Belmont, CA: Wadsworth.

Hilbert, D. 1996. *Fundamentos de la geometría*. Traducción de Francisco Cebrián. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Hodder, I. 1990. *The Domestication of Europe: Structure and Contingency in Neolithic Societies*. Oxford: Basil Blackwell.

Hodgson, D. 2019a. "The Origin, Significance, and Development of the Earliest Geometric Patterns in the Archaeological Record." *Journal of Archaeological Science: Reports*, 24: 588–592.

———. 2019b. "Response to the Critique by Mellet et Al. of Hodgson's Neurovisual Resonance Theory." *Journal of Archaeological Science: Reports*, 28: 102041.

Hohol, M. 2020. *Foundations of Geometric Cognition*. Nueva York: Routledge.

Horst, S. 2016. *Cognitive Pluralism*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Hoskin, M. 2001. *Tombs, Temples and Their Orientation: A New Perspective on Mediterranean Prehistory.* Oxford: Ocarina books.

Hoskin, M., & Belmonte, J.. 2002. *Reflejo Del Cosmos: Atlas de Arqueoastronomía En El Mediterráneo Occidental*. Madrid: Equipo Sirius.

Hou, Y.-M. & Zhao, L.-X. 2010. "New Archeological Evidence for the Earliest Hominin Presence in China", en J. Fleagle, J. Shea, F. Grine, A. Baden & R. Leakey (eds.), *Out of Africa I: The First Hominin Colonization of Eurasia*, pp. 87-95. Dordrecht: Springer.

Houzel, C. 1992. "The Birth of Non-Euclidean Geometry", en *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History, and Mathematics*, L. Boi, D. Flament & J.-M. Salanskis (eds.), pp. 3–21. Berlín & Heidelberg: Springer-Verlag.

Hoyrup, J. 1980. "Influences of Institutionalized Mathematics Teaching on the

Development and Organization of Mathematical Thought in the Pre-Modern Period.” *Materialien Und Studien* 20: 130.

———. 1990. “Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I.” *Altorientalische Forschungen*, 17(1): 27–69.

———. 2002. *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin.* Berlín: Springer.

———. 2007. “The Roles of Mesopotamian Bronze Age Mathematics Tool for State Formation and Administration - Carrier of Teacher’s Professional Intellectual Autonomy.” *Educational Studies in Mathematics*, 66: 257–271.

———. 2009. “State, ‘Justice’, Scribal Culture and Mathematics in Ancient Mesopotamia.” *Sartoniana*, 22: 13–45.

———. 2017. “What Is Mathematics? Perspectives Inspired by Anthropology”, en J. W. Adams, P. Barmby & A. Mesoudi (eds.), *The Nature and Development of Mathematics*, pp. 179–196. Londres & Nueva York: Routledge.

———. 2019. “A Hypothetical History of Old Babylonian Mathematics: Places, Passages, Stages, Development.” en J. Hoyrup (ed.), *Selected Essays on Pre- and Early Modern Mathematical Practice*, pp. 689–709. Cham, CH: Springer.

Hsu, M.-L. 1978. “The Han Maps and Early Chinese Cartography.” *Annals of the Association of American Geographers*, 68(1): 45–60.

———. 1993. “The Qin Maps: A Clue to Later Chinese Cartographic Development.” *Imago Mundi: The International Journal for the History of Cartography*, 45(1): 90–100.

Huang, Y. & Spelke, E. S. 2015. “Core Knowledge and the Emergence of Symbols: The Case of Maps.” *Journal of Cognition and Development*, 16(1): 81–96.

Huang, S., Wang, W., Bae, C. J., Xu, G., Liu, K. 2012. “Recent Paleolithic Field Investigations in Bose Basin (Guanxi, China).” *Quaternary International*, 281: 5-9.

Huffman, C. A. 2005. *Archytas of Tarentum: Pythagorean, Philosopher and Mathematician King*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Huisheng, T., Kumar, G., Anni, J. & Bednarik, R. G. 2020. “Rock Art of Heilongjiang Province, China”. *Journal of Archaeological Science: Reports*, 31: 102348.

Hung, W. 2007. “Picturin or Diagramming the Universe”, en F. Bray, V. Dorofeeva-Lichtmann & G. Métailié (eds.), *Graphics and Text in the Production of Technical Knowledge in China*, pp. 191–216. Leiden & Boston: Brill.

Huylebrouck, D. 2019. *Africa and Mathematics: From Colonial Findings Back to the Ishango Rods*. Cham, CH: Springer.

Ifrah, G. 2000. *The Universal History of Numbers*. Toronto: John Wiley & Sons.

Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S. & Dehaene, S. 2011. “Flexible Intuitions of Euclidean Geometry in an Amazonian Indigene Group.” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(24): 9782–9787.

James, J. M. 1993. “Is It Really a Dragon? Some Remarks on the Xishuipo Burial.” *Archives of Asian Art*, 46: 100–101.

Jiao, T. 2013. “The Neolithic Archaeology of Southeast China”, en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 599–611. Chichester: Wiley-Blackwell.

Johnson, A. W. & Earle, T. K. 2000. *The Evolution of Human Societies: From Foraging Group to Agrarian State*. Stanford: Stanford University Press.

Johnston, I. 2010. *The Mozi: A Complete Translation*. Hong Kong: The Chinese University Press.

Jones, A. 2007. *Memory and Material Culture*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Jones, M. 2020. “Numerals and Neural Reuse.” *Synthese*. 197(9); 3657-3681.

Joseph, G. G. 2011. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics.* Princeton & Oxford: Princeton University Press.

Kalinowski, M. 2012/2013. “The Notion of ‘*Shi*’ 式 and Some Related Terms in Qin-Han Calendrical Astrology.” *Early China*, 35/36: 331–360.

———. 2017. “Hemerology and Prediction in the Daybooks: Ideas and Practices”, en D. Harper & M. Kalinowski (eds.), *Books of Fate and Popular Culture in Early China: The Daybook Manuscripts of the Warring States, Qin, and Han*, pp. 138–206.

Leiden: Brill.

Keightley, D. 1985. *Sources of Shang History: The Oracle-Bone Inscriptions of Bronze Age China*. Berkeley: University of California Press.

———. 1999. “The Shang: China’s First Historical Dynasty”, en M. Loewe & E. L. Shaughnessy (eds.), *The Cambridge History of Ancient China: From the Origins of Civilization to 221 B.C.*, pp. 232–291. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2000. *The Ancestral Landscape: Time, Space, and Community in Late Shang China (ca. 1200-1045 B.C.)*. Berkeley: Institute of East Asian Studies.

Keller, O. 2004a. *Aux Origines de La Géométrie: Le Paléolithique et Le Monde Des Chasseurs-Cueilleurs*. Vuibert.

———. 2004b. “Elements for a Prehistory of Geometry”, en F. Furinghetti, S. Kaisjer & A. Vretblad (eds.), *Proceedings of the 4th Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education & the HPM Satellite Meeting of ICME 10 (Uppsala, Sweden)*, pp. 82–98.

———. 2006. *Une Archéologie de La Géométrie: Peuples Paysans sans Écriture et Premières Civilisations*. Vuibert.

———. 2014. “The Figure of the World. An Insight into the Developments of Geometry during the Neolithic.” Toulouse: Documents for a workshop : Journées nationales de l’APMEP.

———. 2015. “The Fables of Ishango, or the Irresistible Temptation of Mathematical Fiction.” Translated from the French (2010) by Helen Tomlinson. Consultar en Https://Www.Bibnum.Education.Fr/Sites/Default/Files/Ishango-Analysis.

Kern, M. 2009. “Bronze Inscriptions, the *Shijing* and the *Shangshu*: The Evolution of the Ancestral Sacrifice During the Western Zhou”, en J. Lagerwey & M. Kalinowski (eds.), *Early Chinese Religion - Part One: Shang through Han (1250 BC-220 AD)*, pp. 143–200. Leiden: Brill.

Kilmer, A. D. 1990. “Sumerian and Akkadian Names for Designs and Geometrical Shapes”, en A. C. Gunter (ed.), *Investigating Artistic Environments in the Ancient Near East*, pp. 83–91. Nueva York: Smithsonian Institution.

Kim, U., Yang, S. & Hwang, H. K. 2006. *Indigenous and Cultural Psychology: Understanding People in Context*. Nueva York: Springer.

Kirk, G. S., Raven, J. E. & Schofield, M. 2008. *Los filósofos presocráticos: Historia crítica con selección de textos*. Traducción de Jesús García Fernández. Madrid: Gredos.

Kirsh, D. & Maglio, P. 1994. "On Distinguishing Epistemic from Pragmatic Action." *Cognitive Science*, 18(4): 513–549.

Klein, F. 1979. *Development of Mathematics in the 19th Century*. Brookline, MA: Math Sci Press.

Kline, M. A., Shamsudheen, R. & Broesch, T. 2018. "Variation is the Universal: Making Cultural Evolution Work in Developmental Psychology." *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 373: 20170059.

Knorr, W. R. 1985. "The Geometer and the Archaeoastronomers: On the Prehistoric Origins of Mathematics." *The British Journal for the History of Science*, 18(2): 197–212.

———. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston: Birkhäuser.

———. 2004. "On the Early History of Axiomatics: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Greek Antiquity", en J. Christianidis (ed.), *Classics in the History of Greek Mathematics*, pp. 81–109. Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Kohn, M. & Mithen, S. 1999. "Handaxes: Products of Sexual Selection?" *Antiquity*, 73: 518–526.

Kotsakis, K. 1999. "What Tells Can Tell: Social Space and Settlement in the Greek Neolithic", en P. Halstead (ed.), *Neolithic Society in Greece*, pp. 66–76. Sheffield: Sheffield Academic Press.

Kuhn, S. & Stiner, M. C. 2007. "Palaeolithic Ornaments: Implications for Cognition, Demography and Identity." *Diogenes*, 214: 40–48.

Kuhrt, A. 2000. *El Oriente Próximo en la Antigüedad, Vol. I: c. 3000-300 a.C.* Traducción de Teófilo de Lozoya. Barcelona: Critica.

Kvasz, L. 2008. *Patterns of Change: Linguistic Innovations in the Development of*

Classical Mathematics. Basel: Birkhäuser.

———. 2020. "Cognitive Unity of Thales' Mathematics." *Foundations of Science*, 25(3): 737–753.

Laland, K. 2017. *Darwin's Unfinished Symphony: How Culture Made the Human Mind*. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

Lam, L.-Y. & Ang, T.-S. 1986. "Circle Measurements in Ancient China." *Historia Mathematica*, 13: 325–340.

———. 2004. *Fleeting Footsteps: Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China*. Singapur: World Scientific Publishing.

Landau, B. & Lakusta, L. 2009. "Spatial Representation across Species: Geometry, Language, and Maps." *Current Opinion in Neurobiology*, 19(1): 12–19.

Lee, S. A. & Spelke, E. S. 2010. "A Modular Geometric Mechanism for Reorientation in Children." *Cognitive Psychology*, 61(2): 152–176.

Lee, S. A., Vallortigara, G., Flore, M., Spelke, E. S. & Sovrano, V. A. 2013. "Navigation by Environmental Geometry: The Use of Zebrafish as a Model." *The Journal of Experimental Biology*, 216(19): 3693–3699.

Lee, T. H.C. 2000. *Education in Traditional China: A History*. Leiden: Brill.

Legare, C. H. 2017. "Cumulative Cultural Learning: Development and Diversity." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(30): 7877–7883.

Lenoir, T. 1993. "The Eye as Mathematician: Clinical Practice, Instrumentation, and Helmholtz's Construction of an Empiricist Theory of Vision", en D. Cahan (ed.), *Hermann von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science*, pp. 109–153. Berkeley & Los Ángeles: The University of California Press.

———. 2006. "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", en M. Friedman & A. Nordmann (eds.), *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science*, pp. 141–210. Cambridge, MA & Londres: The MIT Press.

Leung, V. S. 2018. "The Former Han Empire", en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 160–179. Oxon & Nueva York: Routledge.

Lew, A. R., Gibbons, B., Murphy, C. & Bremner, J. G. 2010. "Use of Geometry for Spatial Reorientation in Children Applies Only to Symmetric Spaces." *Developmental Science,* 13(3): 490–498.

Lewis, M .E. 1999. *Writing and Authority in Early China*. Albany: State University of New York Press.

———. 2006. *The Construction of Space in Early China*. Albany: State University of New York Press.

———. 2007. *The Early Chinese Empires: Qin and Han*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

———. 2009. *China Between Empires*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

Li, F. 2008. *Bureaucracy and the State in Early China*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

———. 2013. *Early China: A Social and Cultural History.* Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2018. "The Western Zhou State", en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 84–107. Oxon & Nueva York: Routledge.

Li, G. 2015. "Gnomons in Ancient China", en C. Ruggles (ed.), *Handbook of Archaeoastronomy and Ethnoastronomy,* pp. 2095–2104. Nueva York: Springer.

Li, L. 2017. "The Zidanku Silk Manuscripts", en D. Harper & M. Kalinowski (eds.), *Books of Fate and Popular Culture in Early China: The Daybook Manuscripts of the Warring States, Qin, and Han*, pp. 249–277. Leiden: Brill.

Li, Y. & Du, S. 1987. *Chinese Mathematics: A Concise History*. Traducción de J. N. Crossley & A. W. C. Lun. Nueva York: Oxford University Press.

Lillios, K. 2008. *Heraldry for the Dead: Memory, Identity and the Engraved Stone Plaques of Neolithic Iberia*. Austin: University of Texas Press.

Liu, B., Qin, L. & Zhuang, Y. 2020. "Situating the Liangzhu Culture in Late Neolithic China", en B. Liu, L. Qin & Y. Zhuang (eds.), *Liangzhu Culture: Society, Belief, and Art in Neolithic China*, pp. 1–17. Londres & Nueva York: Routledge.

Liu, Li. 2003. "The Products of Minds as Well as of Hands: Production of Prestige Goods in the Neolithic and Early State Periods of China." *Asian Perspectives*, 42(1): 1–40.

———. 2004. *The Chinese Neolithic: Trajectories to Early States*. Nueva York: Cambridge University Press.

Liu, L., & Xu, H. 2007. "Rethinking Erlitou: Legend, History and Chinese Archaeology." *Antiquity*, 81: 886–901.

Liu, L. & Chen, X. 2012. *The Archaeology of China: From the Late Paleolithic to the Early Bronze Age*. Nueva York: Cambridge University Press.

Lloyd, G. E. R. 1970. *Early Greek Science: Thales to Aristotle*. Londres: Chatto & Windus.

———. 1979. *Magic, Reason and Experience*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

———. 2012. "The Pluralism of Greek 'Mathematics", en K. Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, pp. 294–310. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Loewe, M. 1986a. "The Former Han Dynasty", en D. Twitchett & M. Loewe (eds.), *The Cambridge History of China, Vol. 1: The Ch'in and Han Empires, 221 b.c.–a.d. 220*, pp. 103–222. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 1986b. "The Structure and Practice of Government", en D. Twitchett & M. Loewe (eds.), *The Cambridge History of China, Vol. 1: The Ch'in and Han Empires, 221 b.c.–a.d. 220*, pp. 463–4na90. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2006. *The Government of the Qin and Han Empires: 221 BCE-220 CE*. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

———. 2016. *Problems of Han Administration: Ancestral Rites, Weights and Measures, and the Means of Protest*. Leiden: Brill.

Lycett, S. J., Schillinger, K., Eren, M. I., von Cramon-Taubadel, N. & Mesoudi, A. 2016. "Factors Affecting Acheulean Handaxe Variation: Experimental Insights, Microevolutionary Processes, and Macroevolutionary Outcomes." *Quaternary International*, 411: 386–401.

Magnani, L. 2001. *Philosophy and Geometry: Theoretical and Historical Issues*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Malafouris, L. 2010. "Grasping the Concept of Number: How Did the Sapient Mind Move Beyond Approximation?", en I. Morley & C. Renfrew (eds.), *The Archaeology of Measurement: Comprehending Heaven, Earth and Time in Ancient Societies*, pp. 35–42. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2013. *How Things Shape the Mind: A Theory of Material Engagement*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Mancosu, P. 2008. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford & Nueva York: Oxford University Press.

Manders, K. 2008a. "Diagram–Based Geometric Practice", en P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practices*, pp. 65–79. Oxford & Nueva York: Oxford University Press.

———. 2008b. "The Euclidean Diagram". en P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 80–133. Oxford & Nueva York: Oxford University Press.

Mandler, G. 2007. *A History of Modern Experimental Psychology: From James and Wundt to Cognitive Science*. Cambridge, MA & Londres: The MIT Press.

Martín-Loeches, M. 2016. "Art without Symbolic Mind: Embodied Cognition and the Origins of Visual Artistic Behavior", en T. Wynn & F. L. Coolidge (eds.), *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology*, pp. 113–132. Nueva York: Oxford University Press.

Martzloff, J. C. 1997. *A History of Chinese Mathematics*. Berlín & Heidelberg: Springer-Verlag.

McDonough, J. K. 2021. "Leibniz's Philosophy of Physics", en E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encycopledia of Philosophy* (Fall 2021 Edition).

McMahon, A. 2005. "From Sedentism to States, 10000–3000 BCE", en D. Snell (ed.), *A Companion to the Ancient Near East*, pp. 20–33. Oxford, GB: Blackwell publishing.

Mellet, E., Colagè, I., Bender, A., Henshilwood, C. S., Hugdahl, K., Lindstrøm, T. C. &

d'Errico, F. 2019. "What Processes Sparked off Symbolic Representations? A Reply to Hodgson and an Alternative Perspective." *Journal of Archaeological Science: Reports*, 28: 102043.

Mendell, H. 2015. "What's Location Got to Do with It? Place, Space, and the Infinite in Classical Greek Mathematics", en *Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, V. De Risi (ed.), pp. 15–64. Basel: Birkhäuser.

Meyer, A. 2020. "The *Shi*, Diplomats, and Urban Expansion during the Warring States Period", en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 657–671. Nueva York: Oxford University Press.

Meyering, T. C. 1989. *Historical Roots of Cognitive Science: The Rise of a Cognitive Theory of Perception from Antiquity to the Nineteenth Century*. Dordrecht: Kluwer.

Michel, C. & Chemla, K. 2020. *Mathematics, Administrative and Economic Activities in Ancient Worlds*. Cham, CH: Springer.

Miller, G. A. 2003. "The Cognitive Revolution: A Historical Perspective." *Trends in Cognitive Sciences*, 7(3): 141–144.

Mithen, S. 2003. "Handaxes: The First Aesthetic Artefacts", en E. Voland & K. Grammer (eds.), *Evolutionary Aesthetics*, pp. 261–75. Berlín & Heidelberg: Springer-Verlag.

Morgan, D. P. 2020. "Reflections on Visual and Material Sources for the History of the Exact Sciences in Early Imperial China." *NTM Zeitschrift Für Geschichte Der Wissenschaften, Technik Und Medizin*, 28: 325–357.

Morgan, D. P. & Chemla, K. 2018. "Writing in Turns: An Analysis of Scribal Hands in the Bamboo Manuscript *Suan Shu Shu* 筭數書 (*Writings on Mathematical Procedures*) from Zhangjiashan Tomb No. 247." *Bamboo and Silk*, 1: 152–190.

Morrow, G. 1992. *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Mueller, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Muroi, K. 2011. "Mathematics Hidden Behind the Practical Formulae", en G. J. Selz &

K. Wagensonner (eds.), *The Empirical Dimension of Ancient Near Eastern Studies*, pp. 149-158. Wiener: LIT.

Nersessian, N. J. 1995. “Opening the Black Box: Cognitive Science and History of Science.” *Osiris*, 10: 194–211.

Netz, R. 1999. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press.

———. 2003. “Introduction. The History of Early Mathematics: Ways of Re-Writing.” *Science in Context*, 16(3): 275–286.

Newcombe, N. S. 2018. “Three Kinds of Spatial Cognition”, en S. L. Thompson-Schill (ed.), *Steven’s Handbook of Experimental Psychology and Cognitive Neuroscience*, pp. 521–551. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Newcombe, N. S., Booth, J. L. & Gunderson, E. A. 2019. “Spatial Skills, Reasoning, and Mathematics”, en J. Dunlosky & K. A. Rawson (eds.), *The Cambridge Handbook of Cognition and Education*, pp. 100–123. Cambridge: Cambridge University Press.

Newcombe, N. S. & Learmonth, A. E. 2005. “Development of Spatial Competence”, en P. Shah & A. Miyake (eds.), *The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking*, pp. 213–256. Nueva York: Cambridge University Press.

Nissen, H. J. 1988. *The Early History of the Ancient Near East: 9000-200 B.C.* Chicago & Londres: Northcutt.

Nissen, H. J. & Heinen, P. 2009. *From Mesopotamia to Iraq: A Concise History*. Chicago: The University of Chicago Press.

North, D. C. 1991. “Institutions.” *Journal of Economic Perspectives*, 5(1): 97–112.

Notroff, J., Dietrich, O., Dietrich, L., Tvetmarken, C. L., Moritz, K., Schlindwein, J., Sönmez, D. & Clare, L. 2017. “More than a Vulture: A Response to Sweatman and Tsikritsis.” *Mediterranean Archaeology and Archaeometry*, 17(2): 57–74.

Núñez, R. 2017. “Is There Really and Evolved Capacity for Number?” *Trends in Cognitive Sciences*, 21(6): 409–424.

———. 2021. “From Quantical to Numerical Cognition: A Crucial Passage for Understanding the Nature of Mathematics and Its Origins”, en W. Fias & A. Henik (eds.), *Heterogeneous Contributions to Numerical Cognition*, pp. 1–23. Academic Press.

Núñez, R., Allen, M., Gao, R., Rigoli, C. M., Relaford-Doyle, J. & Smenuks, A. 2019. "What Happened to Cognitive Science?." *Nature Human Behaviour*, 3(8): 782–791.

Nylan, M. 2001. *The Five "Confucian" Classics*. New Haven: Yale University Press.

———. 2009. "Classics without Canonization: Learning and Authority in Qin and Han", en J. Lagerwey & M. Kalinowski (eds.), *Early Chinese Religion. Part One: Shang through Han (1250 BC-220 AD)*, pp. 721–776. Leiden: Brill.

O'Grady, P. F. 2016. *Thales of Miletus*. Londres & Nueva York: Routledge.

Odling-Smee, F. J., Laland, K. N. & Feldman, M. W. 2003. *Niche Construction: The Neglected Process in Evolution.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Odling-Smee, J. & Laland, K. 2011. "Ecological Inheritance and Cultural Inheritance: What Are They and How Do They Differ?" *Biological Theory*, 6(3): 220–230.

Overmann, K. 2013. "Material Scaffolds in Numbers and Time." *Cambridge Archaeological Journal*, 23(February): 19–39.

———. 2014. "Finger-Counting in the Upper Paleolithic." *Rock Art Research*, 31(1): 63–80.

———. 2016a. "Materiality and Numerical Cognition: A Material Engagement Theory Perspective", en T. Wynn & F. L. Coolidge (eds.), *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology*, pp. 89–112. Nueva York: Oxford University Press.

———. 2016b. "The Role of Materiality in Numerical Cognition." *Quaternary International*, 405(A): 42–51.

———. 2019. "Materiality and the Prehistory of Number", en K. A. Overmann & F. L. Coolidge (eds.), *Squeezing Minds from Stones: Cognitive Archaeology and the Evolution of the Human Mind*, pp. 432–456. Nueva York: Oxford University Press.

Palka, J. W. 2021. "Not Just Counters: Clay Tokens and Ritual Materiality in the Ancient Near East." *Journal of Archaeological Method and Theory*, 28(2): 414-445.

Pankenier, D. 2013. *Astrology and Cosmology in Early China: Conforming Earth to Heaven*. Nueva York: Cambridge University Press.

Pantsar, M. 2019. “The Enculturated Move from Proto-Arithmetic to Arithmetic.” *Frontiers in Psychology*, 10: 1454.

Peng, H. 2020. “Official Salaries and State Taxes as Seen in Qin-Han Manuscripts, with a Focus on Mathematical Texts”, en C. Michel & K. Chemla (eds.), *Mathematics, Administrative and Economic Activities in Ancient Worlds*, pp. 125–155. Cham, CH: Springer.

Perlès, C. 2004. *The Early Neolithic in Greece: The First Farming Communities in Europe*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Perlès, C. & Vitelli, K. D. 1999. “Craft Specialization in the Neolithic of Greece”, en P. Halstead (ed.), *Neolithic Society in Greece*, pp. 96–107. Sheffield: Sheffield Academic Press.

Peters, J. & Schmidt, K. 2004. “Animals in the Symbolic World of Pre-Pottery Neolithic Göbekli Tepe, South-Eastern Turkey: A Preliminary Assessment.” *Anthropozoologica*, 39(1): 179–218.

Peterson, C. E. & Lu, X. 2013. “Understanding Hongshan Period Social Dynamics”, en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 55–80. Chichester: Wiley-Blackwell.

Peterson, C. E., Lu, X., Drennan, R. D. & Zhu, D. 2010. “Hongshan Chiefly Communities in Neolithic Northeastern China.” *PNAS*, 107(13): 5756–5761.

Peterson, C. E. & Shelach, G. 2010. “The Evolution of Early Yangshao Period: Village Organization in the Middle Reaches of Northern China’s Yellow River Valley”, en M. S. Bandy & J. R. Fox (eds.), *Becoming Villagers: Comparing Early Village Societies,* pp. 246–275. Tucson: The University of Arizona Press.

———. 2012. “Jiangzhai: Social and Economic Organization of a Middlee Neolithic Chinese Village.” *Journal of Anthropological Archaeology*, 31: 265–301.

Pines, Y. 2009. *Envisioning Eternal Empire: Chinese Political Thought of the Warring States Era*. Honolulu: University of Hawai’i Press.

———. 2012. *The Everlasting Empire*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

———. 2014. “The Messianic Emperor: A New Look at Qin’s Place in China’s History”, en Y. Pines, G. Shelach, L. von Falkenhausen & R. D. S. Yates (eds.), *Birth of an Empire: The State of Qin Revisited*, pp. 258-279. Berkeley & Los Ángeles: University of California Press.

———. 2017. *The Book of Lord Shang: Apologetics of State Power in Early China*. Nueva York: Columbia University Press.

———. 2018. “Political Thought”, en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 280–299. Oxon & Nueva York: Routledge.

———. 2020a. “The Warring States Period: Historical Background”, en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 581–594. Nueva York: Oxford University Press.

———. 2020b. “Institutional Reforms and Reformers during the Warring States Period”, en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 615–622. Nueva York: Oxford University Press.

Pines, Y., von Falkenhausen, L., Shelach, G. & Yates, R. D. S. 2014. “General Introduction: Qin History Revisited”, en Y. Pines, G. Shelach, L. von Falkenhausen, & R. D. S. Yates (eds.), *Birth of an Empire: The State of Qin Revisited*, pp. 1–36. Berkeley & Los Ángeles: University of California Press.

Pingree, D. 1992. “Hellenophilia versus the History of Science.” *Isis*, 83(4): 554–563.

Pirazzoli-T’Serstevens, M. 2009. “Death and the Dead: Practices and Images in the Qin and Han”, en J. Lagerwey & M. Kalinowski (eds.) *Early Chinese Religion, Part One: Shang through Han (1250 BC-220 AD)*, pp. 949–1026. Leiden: Brill.

Playfair, J. 1846. *Elements of Geometry*. Nueva York: W. E. Dean.

Plester, V. & Huylebrouck, D. 1999. “The Ishango Artefact: The Missing Base12 Link.” *Forman*, 14: 339–346.

Poincaré, H. 1902/1929. *Science and Hypothesis*. Washington DC: University Press of America.

———. 1905/1929. *The Value of Science*. Washington DC: University Press of America.

———. 1908/1929. *Science and Method*. Washington DC: University Press of America.

———. 1913/1963. *Mathematics and Sciences: Last Essays*. Nueva York: Dover.

Pomeroy, S. B., Burstein, S. M., Donlan, W. & Roberts, J. T. 2004. *A Brief History of Ancient Greece: Politics, Society, and Culture*. Nueva York: Oxford University Press.

Pooley, O. 2013. "Substantivalist and Relationalist Approaches to Spacetime", en R. Batterman (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Physics*, pp. 522-586. Oxford: Oxford University Press.

Powers, S. T., Van Schaik, C. P. & Lehmann, L. 2016. "How Institutions Shaped the Last Major Evolutionary Transition to Large-Scale Human Societies." *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 371:1687.

Puertas Castaño, M. L. 2000. *Los Elementos de Euclides: Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Puett, M. 2001. *The Ambivalence of Creation: Debates Concerning Innovation and Artifice in Early China*. Stanford, California: Stanford University Press.

———. 2008. "Human and Divine Kingship in Early China: Comparative Reflections", en N. Brisch (ed.), *Religion and Power: Divine Kingship in the Ancient World and Beyond*, pp. 207–220. Chicago: The Oriental Institute of the University of Chicago.

Pyers, J. E., Shusterman, A., Senghas, A., Spelke, E. S. & Emmorey, K. 2010. "Evidence from an Emerging Sign Language Reveals That Language Supports Spatial Cognition." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(27): 12116–12120.

Qin, L. 2013. "The Liangzhu Culture", en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 574–596. Chichester: Wiley-Blackwell.

———. 2020. "Power and Belief", en B . Liu, L. Qin & Y. Zhuang (eds.), *Liangzhu Culture: Society, Belief, and Art in Neolithic China*, pp. 49–114. Londres & Nueva York: Routledge.

Qu, T., Bar-Yosef, O., Wang, Y. & Wu, X. 2013. "The Chinese Upper Paleolithic: Geography, Chronology, and Techno-typology." *Journal of Archaeological Research*, 21(1): 1-73.

Rada, E. 1980. *La Polémica Leibniz Clarke*. Madrid: Taurus.

Radner, K. & Robson, E. 2011. *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*. Nueva

York: Oxford University Press.

Rawson, J. 1999. “Western Zhou Archaeology”, en M. Loewe & E. L. Shaughnessy (eds.), *The Cambridge History of Ancient China: From the Origins of Civilization to 221 B.C.*, pp. 352–449. Nueva York: Cambridge University Press.

Reese, D. S. 2002. “On the Incised Cattle Scapulae from the East Mediterranean and Near East.” *Bonner Zoologische Beitrage*, 50(3): 183–198.

Robbins, L. H. 2000. “Astronomy and Prehistory”, en H. Selin (ed.), *Astronomy across Cultures*, pp. 31–52. Dordrecht: Kluwer.

Robinson, D. N. 1995. *An Intellectual History of Psychology*. Madison: The University of Wisconsin Press.

———. 2013. “Historiography in Psychology: A Note on Ignorance.” *Theory and Psychology*, 23(6): 819–828.

Robinson, K. M., Osana, H.P. & Kotsopoulus, D. 2019. *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood*. Cham, CH: Springer.

Robson, E. 1999. *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC: Technical Constants in Bureaucracy and Education*. Oxford: Clarendon Press.

———. 2000. “Mathematical Cuneiform Tablets in Philadelphia Part 1: Problems and Calculations.” *SCIAMVS-Sources and Commentaries in Exact Sciences*, 1: 11–48.

———. 2001. “Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322.” *Historia Mathematica*, 28: 167–206.

———. 2005. “Influence, Ignorance, or Indifference? Rethinking the Relationship between Babylonian and Greek Mathematics.” *The British Society for the History of Mathematics*, 4: 1–17.

———. 2007. “Mesopotamian Mathematics”, en V. Katz (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sorucebook*, pp. 57–186. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

———. 2008. *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

———. 2009. “Mathematics Education in an Old Babylonian Scribal School”, en E.

Robson & J. Stedall (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, pp. 199–227. Nueva York: Oxford University Press.

Robson, E. & Stedall, J. 2009. *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Nueva York: Oxford University Press.

Rochberg, F. (2004). *The Heavenly Writing: Divination, Horoscopy, and Astronomy in Mesopotamian Culture*. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

———. 2011. "Observing and Describing the World Through Divination and Astronomy", en K. Radner & E. Robson (eds.), *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*, pp. 618-636. Nueva York: Oxford University Press.

Rogerio-Candelera, M. A., Bueno Ramírez, P., de Balbín-Behrmann, R., Dias, M. I., García Sanjuán, L., Larsson Coutinho, M., Lozano Rodríguez, J. A., Miller, A. Z., Pike, A. W., Standish, C. D., Prudêncio, M. I., Rodrigues, A. L., de la Rosa Arranz, J. M. & Gaspar, D. 2018. "Landmark of the Past in the Antequera Megalithic Landscape: A Multi-Disciplinary Approach to the Matacabras Rock Art Shelter." *Journal of Archaeological Science*, 95: 76–93.

Rollefson, G. O. 2005. "Early Neolithic Ritual Centers in the Southern Levant." *NeoLithics: A Newsletter of South-West Asian Lithics Research*, 2(05): 3–13.

Roque, T. 2012. *História Da Matemática*. Río de Janeiro: Zahar.

Ruggles, C. 2005. "Archaeoastronomy", en C. Renfrew & P. Bahn (eds.), *Archaeology: The Key Concepts*, pp. 11–16. Londres & Nueva York: Routledge.

———. 2015. "Analyzing Orientations", en C. Ruggles (ed.), *Handbook of Archaeoastronomy and Ethnoastronomy*, pp. 411–425. Nueva York: Springer.

Russell, B. 1897/1956. *An Essay on the Foundations of Geometry*. Mineola, Nueva York: Dover.

Russo, L. 2004. *The Forgotten Revolution: How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn*. Berlín & Heidelberg: Springer-Verlag.

Saito, K. & Sidoli, N. 2012. "Diagrams and Arguments in Ancient Greek Mathematics: Lessons Drawn from Comparisons of the Manuscript Diagrams with Those in Modern Critical Editions", en K. Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof* *in Ancient Traditions*, pp. 135–162. Nueva York: Cambridge University Press.

Sanft, C. 2014. *Communication and Cooperation in Early China: Publicizing the Qin Dynasty*. Albany: State University of New York Press.

———. 2018. “The Qin Dinasty”, en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 146–159. Oxon & Nueva York: Routledge.

———. 2020. “Change and Continuity at the Intersection of Received History and the Material Record During the Warring States Period”, en E. Childs-Johson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 623–636. Nueva York: Oxford University Press.

Schemmel, M. 2016a. *Historical Epistemology of Space: From Primate Cognition to Spacetime Physics*. Cham, CH: Springer.

———. 2016b. “Towards a Historical Epistemology of Space: An Introduction”, en M. Schemmel (ed.), *Spatial Thinking and External Representation: Towards a Historical Epistemology of Space*, pp. 1–33. Berlín: Max Planck Institute for the History of Science.

Schmandt-Besserat, D. 1992a. *Before Writing, Volume I: From Counting to Cuneiform*. Austin: University of Texas Press.

———. 1992b. *Before Writing, Volume II: A Catalogue of Near Eastern Tokens*. Texas: University of Texas Press.

———. 2010. “The Token System of the Ancient Near East: Its Role in Counting, Writing, the Economy and Cognition”, en I. Morley & C. Renfrew (eds.), *The Archaeology of Measurement: Comprehending Heaven, Earth and Time in Ancient Societies*, pp. 27–34. Nueva York: Cambridge University Press.

Schmidt, K. 2010. “Göbekli Tepe - The Stone Age Sanctuaries. New Results of Ongoing Excavations with a Special Focus on Sculptures and High Reliefs.” *Documenta Praehistorica*, 37: 239-256.

Schwartz, B. I. 1985. *The World of Thought in Ancient China*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Scriba, C. J. & Schreiber, P. 2015. *5000 Years of Geometry: Mathematics in History and*

Culture. Birkhäuser.

Seidenberg, A. 1961. “The Ritual Origin of Geometry.” *Archive for History of Exact Sciences*, 1(5): 488–527.

———. 1962. “The Ritual Origin of Counting.” *Archive for History of Exact Sciences*, 2(1): 1–40.

———. 1981. “The Ritual Origin of Circle and Square.” *Archive for History of Exact Sciences*, 25(4): 269–327.

Selin, H. 2000. *Astronomy across Cultures*. Dordrecht: Kluwer.

Shaughnessy, E. L. 1999. “Western Zhou History”, en M. Loewe & E. L. Shaughnessy (eds.), *The Cambridge History of Ancient China: From the Origins of Civilization to 221 B.C.*, pp. 292–351. Nueva York: Cambridge University Press.

Shea, J. J. 2013. “Lithic Modes A-I: A New Framework for Describing Global-Scale Variation in Stone Tool Technology Illustrated with Evidence from the East Mediterranean Levant.” *Journal of Archaeological Method and Theory*, 20(1): 151-186.

Shelach(-Lavi), G. 2002. *Leadership Strategies, Economic Activity, and Interregional Interaction: Social Complexity in Northeast China*. Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

———. 2014. “Collapse or Transformation? Anthropological and Archaeological Perspectives on the Fall of Qin”, en Y. Pines, G. Shelach, L. von Falkenhausen & R. D. S. Yates (eds.), *Birth of an Empire: The State of Qin Revisited*, pp. 113–138. Berkeley & Los Ángeles: University of California Press.

———. 2015. *The Archaeology of Early China: From Prehistory to the Han Dynasty*. Nueva York: Cambridge University Press.

———. 2018. “Main Issues in the Study of the Chinese Neolithic”, en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 15–38. Oxon & Nueva York: Routledge.

Shusterman, A. & Spelke, E. S. 2005. “Language and the Development of Spatial Reasoning”, en P. Carruthers, S. Laurence & S. Stich (eds.), *The Innate Mind:*

Structure and Contents, pp. 89–106. Nueva York: Oxford University Press.

Sinaceur, H. B. 2016. "Filosofía de la biopsicología del número", en J. Ferreirós & A. Lassalle Casanave (eds.), *El Árbol de Los Números: Cogniicón, Lógica y Práctica Matemática*, pp. 77-118. Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla.

Sinclair, N., Moss, J., Hawes, Z. & Stephenson, C. 2018. "Learning Through and from Drawing in Early Years Geometry", en K. S. Mix & M. T. Battista (eds.), *Visualizing Mathematics: The Role of Spatial Reasoning in Mathematical Thought*, pp. 229–252. Cham, CH: Springer.

Sinha, C. 2015. "Language and Other Artifacts: Socio-Cultural Dynamics of Niche Construction." *Frontiers in Psychology*, 6:1601.

Siu, M.-K. 1993. "Proof and Pedagogy in Ancient China: Examples From Liu Hui's Commentary on Jiu Zhang Suan Shu." *Educational Studies in Mathematics*, 24(4): 345–357.

Sivin, N. 1995. "State, Cosmos, and Body in The Last Three Centuries B. C." *Harvard Journal of Asiatic Studies*, 55(1): 5–37.

Smith, L., Dockrell, J. & Tomlinson, P. 1997. *Piaget, Vygotsky & Beyond: Central Issues in Developmental Psychology and Education*. Londres & Nueva York: Routledge.

Solís, C. & Sellés, M. 2005. *Historia de la ciencia*. Barcelona: Espasa.

Souvatzi, S. G. 2008. *A Social Archaeology of Households in Neolithic Greece: An Anthropological Approach*. Nueva York: Cambridge University Press.

Spelke, E. S. 2000. "Core Knowledge." *American Psychologist*, 55(11): 1233-1243.

———. 2011. "Natural Number and Natural Geometry", en S. Dehaene & E. M. Brannon (eds.), *Space, Time and Number in the Brain*, pp. 287–317. Academic Press.

Spelke, E. S. & Lee, S. A. 2012. "Core Systems of Geometry in Animal Minds." *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 367: 2784–2793.

Spelke, E. S., Lee, S. A. & Izard, V. 2010. "Beyond Core Knowledge: Natural Geometry." *Cognitive Science*, 34(5): 863–884.

Spelke, E. S. & Kinzler, K. D. 2007. "Core Knowledge." *Developmental Science*, 10(1):

89–96.

Sterelny, K. 2003. *Thought in a Hostile World: The Evolution of Human Cognition*. Oxford: Blackwell publishing.

———. 2012. *The Evolved Apprentice: How Evolution Made Humans Unique.* Cambridge, MA & Londres: The MIT Press.

———. 2014. "A Paleolithic Reciprocation Crisis: Symbols, Signals, and Norms." *Biological Theory*, 9(1): 65–77.

———. 2016. "Cooperation, Culture, and Conflict." *British Journal for the Philosophy of Science*, 61(1): 31–58.

Sterelny, K. & Watkins, T. 2015. "Neolithization in Southwest Asia in a Context of Niche Construction Theory." *Cambridge Archaeological Journal*, 25(3): 673–691.

Stiner, M. C. 2014. "Finding a Common Bandwidth: Causes of Convergence and Diversity in Paleolithic Beads." *Biological Theory*, 9(1): 51–64.

Stout, D., Hecht, E., Khreisheh, N., Bradley, B. & Chaminade, T. 2015. "Cognitive Demands of Lower Paleolithic Toolmaking." *PLoS ONE*, 10(4): e0121804.

Struik, D. J. 1987. *A Concise History of Mathematics*. Nueva York: Dover.

Sun, B. 2013. "The Longshan Culture of Shandong", en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 435–458. Chichester: Wiley-Blackwell.

Sun, X. 2015. "Taosi Observatory", en C. Ruggles (ed.), *Handbook of Archaeoastronomy and Ethnoastronomy*, pp. 2105–2110. Nueva York: Springer.

Sutton, J., & Keene, N. 2017. "Cognitive History and Material Culture", en C. Richardson, T. Hamling & D. Gaimster (eds.), *The Routledge Handbook of Material Culture in Early Modern Europe*, pp. 46–58. Londres & Nueva York: Routledge.

Sweatman, M. B. & Tsikritsis, D. 2017. "Decoding Göbekli Tepe with Archaeoastronomy: What Does the Fox Say?" *Mediterranean Archaeology and Archaeometry*, 17(1): 233-250.

Szabó, A. 1978. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht: Springer-Science+ Business Media.

Tang, H. 2012. “New Discovery of Rock Art and Megalithic Sites in the Central Plain of China.” *Rock Art Research*, 29(2): 157-170.

Tang, C., Tang, M. H., Liu, G. & Wen, Y. 2020. “The Neolithic Jade Revolution in Northeast China”, en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 73–100. Nueva York: Oxford University Press.

Taçon, P. 2018. “The Rock art of South and East Asia”, en B. David & I. McNiven (eds.), *The Oxfrod Handbook of the Archaeology and Anthropology of Rock Art*, pp. 177-196. Oxford: Oxford University Press.

Taçon, P., Aubert, M., Li, G., Yang, D., Liu, H., May, S. K., Fallon, S., Ji, X., Curnoe, D. & Herries, A. I. R. 2012. “Uranium-series Age Estimates for Rock Art in Southwet China”. *Journal of Archaeological Science*, 39: 492-499.

Tarski, A. & Givant, S. 1999. “Tarski’s System of Geometry.” *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5(2): 175–214.

Teng, S.-P. 2000. “The Original Significance of Bi Disks: Insights Based on Liangzhu Jade Bi with Incised Symbolic Motifs.” *Journal of East Asian Archaeology*, 2(1): 165–194.

Teo, T. 2005. *The Critique of Psychology: From Kant to Postcolonial Theory*. Nueva York: Springer.

———. 2013. “Agnotology in the Dialectics of the History and Philosophy of Psychology.” *Theory and Psychology*, 23(6): 840–851.

Thiering, M. & Schiefenhövel, W. 2016. “Spatial Concepts in Non-Literate Societies: Language and Practice in Eipo and Dene Chipewyan”, en M. Schemmel (ed.), *Spatial Thinking and External Representation: Towards a Historical Epistemology of Space*, pp. 35–92. Berlín: Max Planck Institute for the History of Science.

Thomas, I. 1957a. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, Vol. I: From Thales to Euclid*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

———. 1957b. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, Vol. II: From Aristarchus to Pappus*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Thomas, J. 2001. “Archaeologies of Place and Landscape”, en I. Hodder (ed.), *Archaeological Theory Today*, pp. 165-186. Cambridge, GB: Polity Press.

Thorp, R. L. 2006. *China in the Early Bronze Age: Shang Civilization*. Filadelfia, Pensilvania: University of Pennsylvania Press.

Thote, A. 2009. "Shang and Zhou Funeral Practices: Interpretation of Material Vestiges", en J. Lagerwey & M. Kalinowski (eds.), *Early Chinese Religion, Part One: Shang through Han (1250 BC-220 AD)*, pp. 103–142. Leiden: Brill.

———. 2017. "Daybooks in Archaeological Context", en *Books of Fate and Popular Culture in Early China: The Daybook Manuscripts of the Warring States, Qin, and Han*, pp. 11–56. Leiden: Brill.

Tinney, S. 2011. "Tablets of Schools and Scholars: The Old Babylonian Corpus", en K. Radner & E. Robson (eds.), *The Oxford Hanbook of Cuneiform Culture*, pp. 577-596. Nueva York: Oxford University Press.

Tommasi, L., Chiandetti, C., Pecchia, T., Sovrano, V. A. & Vallortigara, G. 2012. "From Natural Geometry to Spatial Cognition." *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 36(2): 799-824.

Torretti, R. 1967. *Manuel Kant: Estudio sobre los fundamentos de la filosofía crítica*. Santiago de Chile: Ediciones de la Universidad de Chile.

———. 1984. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Trigger, B. 2003. *Understanding Early Civilizations: A Comparative Study*. Nueva York: Cambridge University Press.

Tse, W. 2018. "The Latter Han Empire and the End of Antiquity", en P. R. Goldin (ed.), *Routledge Handbook of Early Chinese History*, pp. 180-196. Oxon & Nueva York: Routledge.

Twyman, A. D., Friedman, A. & Spetch, M. L. 2007. "Penetrating the Geometric Module: Catalyzing Children's Use of Landmarks." *Developmental Psychology*, 43(6): 1523–1530.

Twyman, A. D., Holden, M. P. & Newcombe, N. S. 2018. "First Direct Evidence of Cue Integration in Reorientation: A New Paradigm." *Cognitive Science*, 42(S3): 923–

936.

Twyman, A. D., Nardi, D. & Newcombe, N. S. 2013. “Two Fields Are Better Than One: Developmental and Comparative Perspectives On Understanding Spatial Reorientation.” *Comparative Cognition & Behavior Reviews*, 8, 78–97.

Twyman, A. D. & Newcombe, N. S. 2010. “Five Reasons to Doubt the Existence of a Geometric Module.” *Cognitive Science*, 34(7): 1315–1356.

Tybjerg, K. 2004. “Hero of Alexandria’s Mechanical Geometry.” *Apeiron*, 37(4): 29–56.

Tylén, K., Fusaroli, R., Rojo, S., Heimann, K., Fay, N., Johannsen, N. N., Riede, F. & Lombard, M. 2020. “The Evolution of Early Symbolic Behavior in Homo Sapiens.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 117(9): 4578–4584.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. & Newcombre, N. S. 2013. “The Malleability of Spatial Skills: A Meta-Analysis of Training Studies.” *Psychological Bulletin*, 139(2): 352–402.

van de Mieroop, M. 2016. *A History of the Ancient Near East, ca. 3000-323 BC*. Chichester: Blackwell-Wiley.

Van der Ham, I. J. M., Hamami, Y. & Mumma, J. 2017. “Universal Intuitions of Spatial Relations in Elementary Geometry.” *Journal of Cognitive Psychology*, 29(3): 269-278.

van der Waerden, B. L. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlín & Heidelberg: Springer-Verlag.

van Norden, B. 2008. *Mengzi: With Selections from Traditional Commentaries.* Cambridge, MA: Hackett Publishing Company.

Veldhuis, N. 2011. “Levels of Literacy”, en K. Radner & E. Robson (eds.), *The Oxford Handbook of Cuneiform Culture*, pp. 68–89. Nueva York: Oxford University Press.

Vera, F. 1970. *Científicos Griegos: Volumen I*. Madrid: Aguilar.

Verhoeven, M. 2002. “Ritual and Its Investigation in Prehistory”, en H. G. Gebel, B. D. Hermansen & C. H. Jensen (eds.), *Magic Practices and Ritual in the Near Eastern Neolithic*, pp. 5–40. Berlín: Ex Oriente.

Volkov, A. 2007. “Geometrical Diagrams in Traditional Chinese Mathematics”, en F. Bray & V. Dorofeeva-Lichtmann (eds.), *Graphics and Text in the Production of Technical Knowledge in China*, pp. 425–459. Leiden & Boston: Brill.

———. 2014. “Mathematics Education in Oriental Antiquity and Middle Ages”, en A. Karp & G. Schubring (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, pp. 55–70. Nueva York: Springer.

———. 2018a. “Ancient Chinese Mathematics”, en P. T. Keyser & J. Scarborough (eds.), *The Oxford Handbook of Science and Medicine in the Classical World*, pp. 108–128. Nueva York: Oxford University Press.

———. 2018b. “Chinese Counting Rods: Their History, Arithmetic Operations, and Didactic Repercussions”, en A. Volkov & V. Freiman (eds.), *Computations and Computing Devices in Mathematics Education Before the Advent of Electronic Calculators*, pp. 137–188. Cham: Springer.

Wagner, M. 2006. *The Geometries of Visual Space*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wagner, R. 2017. *Making and Breaking Mathematical Sense*. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

Wang, A. 2000. *Cosmology and Political Culture in Early China*. Nueva York: Cambridge University Press.

Wang, H. 2014. *Writing and the Ancient State*. Nueva York: Cambridge University Press.

Wang, W. 2017. *Lingjiatan Social Organization in the Yuxi Valley, China: A Comparative Perspective*. Tesis doctoral: University of Pittsburgh.

Wang, W. & Wu, W. 2021. “Lingjiatan Early Complex Societies and Social Organization in the Yuxi Valley, China.” *Archaeological Research in Asia*, 25: 100259.

Watkins, T. 2004. “Building Houses, Framing Concepts, Constructing Worlds.” *Paléorient*, 30(1): 5–23.

———. 2006. “Architecture and the Symbolic Construction of New Worlds”, en E. B. Banning & M. Chazan (eds.), *Domesticating Space Construction, Community, and Cosmology in the Late Prehistoric Near East*, pp. 15–24. Berlín: ex oriente.

Watson, B. 2003. *Han Feizi: Basic Writings*. Nueva York: Columbia University Press.

Wheatley, P. 1971. *The Pivot of the Four Quarters*. Edimburgo: Edinburgh University Press.

Winkler-Rhoades, N., Susan, C. & Spelke, E. S. 2013. “Two-Year-Old Children Interpret Abstract, Purely Geometric Maps.” *Developmental Science*, 16(3): 365–376.

Woods, C. 2010. *Visible Language: Inventions of Writing in the Ancient Middle East and Beyond*. Chicago: The Oriental Instituto of the University of Chicago.

Wu, X., Zhang, C., Goldberg, P., Cohen, D., Pan, Y., Arpin, T. & Bar-Yosef, O. 2012. “Early Pottery at 20,000 Years Ago in Xianrendong Cave, China.” *Science* 336: 1696–1700.

Wynn, T. 1985. “Piaget, Stone Tools and the Evolution of Human Intelligence.” *World Archaeology*, 17(1): 32–43.

———. 2016. “Evolutionary Cognitive Archaeology”, en T. Wynn & F. L. Coolidge (eds.), *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology*, pp. 1–20. Nueva York: Oxford University Press.

Wynn, T. & Coolidge, F. L. 2016. “Archeological Insights into Hominin Cognitive Evolution.” *Evolutionary Anthropology*, 25(4): 200-213.

Wynn, T., Overmann, K. A., Coolidge, F. L. & Janulis, K. 2016a. “Bootstrapping Ordinal Thinking”, en T. Wynn & F. L. Coolidge (eds.), *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology*, pp. 197–213. Nueva York: Oxford University Press.

Wynn, T., Haidle, M., Lombard, M. & Coolidge, F. L. 2016b. “The Expert Cognition Model in Human Evolutionary Studies”, en T. Wynn & F. L. Coolidge (eds.), *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology*, pp. 21–43. Nueva York: Oxford University Press.

Xu, F. 2003. “Numerosity Discrimination in Infants: Evidence for Two Systems of Representations.” *Cognition*, 89(1): B15–25.

Xu, H. 2013. “The Erlitou Culture”, en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 300–322. Chichester: Wiley-Blackwell.

———. 2018. “Erlitou: The Origin of the Tradition of Non-Fortified Primary Capitals in

Early China." *Archaeological Research in Asia*, 14: 71–79.

Xu, H. & Liu, Y. 2020. "The Bronze-Casting Revolution and the Ritual Vessel Set", en E. Childs-Johnson (ed.), *The Oxford Handbook of Early China*, pp. 190–201. Nueva York: Oxford University Press.

Xygalatas, D. 2014. "On the Way Towards a Cognitive Historiography: Are We There Yet?" *Journal of Cognitive Historiography*, 1(2): 193–200.

Yang, S. X., Deng, C. L., Zhu, R. X. & Petraglia, M. D. 2020. "The Paleolithic in the Nihewan Basin, China: Evolutionary history of an Early to Late Pleistocene record in Eastern Asia." *Evolutionary Anthropology*, 29(3): 125-142

Yoffee, N. 2005. *Myths of the Archaic State: Evolution of the Earliest Cities, States, and Civilizations*. Nueva York: Cambridge University Press.

Yuan, G. 2013. "The Discovery and Study of the Early Shang Culture", en A. P. Underhill (Ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 323–342. Chichester: Wiley-Blackwell.

Yuste, P. 2008. "Procedimientos heurísticos en las matemáticas de la antigüedad." *Espacio, Tiempo y Forma. Serie II, Historia Antigua*, 21: 51–65.

———. 2013. *Matemáticas en Mesopotamia: Álgebra, Geometría y Cálculo*. Madrid: Dykinson.

Zaslavsky, C. 1999. *Africa Counts: Number and Pattern in African Cultures*. Chicago: Lawrence Hill Books.

Zhang, C., Pollard, A. M., Rawson, J., Huan, L., Liu, R. & Tang, X. 2019. "China's Major Late Neolithic Centres and the Rise of Erlitou." *Antiquity*, 93(369): 588–603.

Zhao, C. 2013. "The Longshan Culture in Central Henan Province, c. 2600-1900 BC", en A. P. Underhill (ed.), *A Companion to Chinese Archaeology*, pp. 236–254. Chichester: Wiley-Blackwell.

Zhao, H. 2020. "From the 'Songze Style' to the 'Liangzhu Mode'", en B. Liu, L. Qin & Y. Zhuang (eds.), *Liangzhu Culture: Society, Belief, and Art in Neolithic China*, pp. 165–185. Londres & Nueva York: Routledge.

Zhao, J. 2019. "Integration and Transformation: A Study of the Sun and the Moon

Depicted in the Imagery of Fuxi and Nüwa.” *Asian Studies*, 7(2): 13–45.

Zhmud, L. 2012. *Pythagoras and the Early Pythagoreans*. Oxford, GB: Oxford University Press.

Zou, D. 2007. “Shuihudi Bamboo Strips of the Qin Dynasty and Mathematics in Pre-Qin Period.” *Frontiers of History in China*, 2(4): 632–654.