

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

**Resolución del TSP en la red logística de
Amazon DAQ7**

Autor: Maria Rosa Olmedo Guajardo-Fajardo
Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez

**Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Resolución del TSP en la red logística de Amazon DAQ7

Autor:

Maria Rosa Olmedo Guajardo-Fajardo

Tutor:

Manuel Ordóñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023

Trabajo Fin de Grado: Resolución del TSP en la red logística de Amazon DAQ7

Autor: Maria Rosa Olmedo Guajardo-Fajardo

Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

A mi familia, por su apoyo a lo largo de estos años.

A mis amigos, por su comprensión y ánimos.

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo la aplicación del TSP a la red logística de reparto del centro de distribución de Amazon DQA7, el cual se encuentra en la provincia de Cádiz. Se hará mediante el empleo de dos algoritmos: Branch and Bound y el Vecino más Próximo. Se estudiará el caso en el que un camión de reparto salga de DQA7 y tenga que llegar a los 20 pueblos más poblados de Cádiz, parando en cada uno de ellos tan solo una vez, reduciendo así los costes de transporte.

Nos encontramos ante uno de los problemas de optimización más estudiados a lo largo de los años, teniendo gran complejidad a pesar de su aparente simplicidad.

Abstract

The objective of this research is the application of the TSP to the logistics delivery network of the Amazon DQA7 distribution center, which is located in the province of Cadiz. It will be done by using two algorithms: Branch and Bound and Nearest Neighbor. We will study the case in which a delivery truck leaves DQA7 and has to reach the 20 most populated towns in Cadiz, stopping in each of them only once, thus reducing transportation costs.

This is one of the most studied optimization problems over the years, having great complexity despite its apparent simplicity

Índice

Resumen	IX
Abstract	XI
Índice	XIII
Índice de Figuras	XVIII
1 Introducción	1
1.1 <i>Objetivos</i>	1
1.2 <i>Estructura del trabajo</i>	1
2 Amazon, el gigante tecnológico	3
2.1 <i>Amazon: La empresa</i>	4
2.1.1 Del garaje al e-commerce más grande del mundo	4
2.1.2 Jeff Bezos: El fundador	6
2.2 <i>Claves del éxito</i>	8
2.2.1 Customer obsession	8
2.2.2 Employee centric	8
2.2.3 Caos organizado	8
2.3 <i>Tipos de centros logísticos</i>	9
2.4 <i>Como el Covid-19 afectó a Amazon</i>	10
3 El problema del viajante, estado del arte	12

3.1	<i>Historia</i>	13
3.2	<i>Formulación del problema</i>	14
3.3	<i>Variantes del TSP</i>	17
3.3.1	Problema del viajante de comercio con múltiples viajantes	17
3.3.2	Problema del viajante con recogida y entrega de mercancías	17
3.3.3	Problema del ciclo simple	18
3.3.4	Problema del viajante de comercio generalizado	18
3.3.5	Problema del viajante de comercio con ventanas de tiempo	18
3.4	Aplicaciones del TSP	18
3.4.1	Revisión de motores de turbina de gas	18
3.4.2	Problema de Scheduling	18
3.4.3	Problema de placas de circuitos impresos PCB	19
3.4.4	Problema de la red de basuras	19
3.4.5	Aplicaciones en internet	20
4	Metodologías de resolución	21
4.1	<i>Métodos exactos</i>	21
4.2	<i>Métodos heurísticos</i>	21
4.3	<i>Métodos metaheurísticos</i>	22
5	Algoritmos escogidos	23
5.1	<i>Algoritmo de ramificación y poda (Branch and Bound)</i>	23
5.1.1	Elementos del algoritmo	24

5.1.2	Proceso de resolución	25
5.2	<i>Algoritmo del vecino más próximo (Closest neighbor)</i>	29
6	Adaptación al problema de Amazon en Cádiz	31
6.1	<i>Nodos</i>	31
6.2	<i>Arcos</i>	32
6.3	<i>Matriz de costes</i>	32
7	Resultados	34
7.1	Algoritmo del vecino más proximo	34
7.1.1	Recorrido A	34
7.1.2	Recorrido B	34
7.1.3	Recorrido C	34
7.1.4	Recorrido D	34
7.2	<i>Algoritmo Branch and Bound</i>	35
7.2.1	Recorrido A	35
7.2.2	Recorrido B	35
7.2.3	Recorrido C	35
7.2.4	Recorrido D	36
7.2.5	Recorrido E	36
7.2.6	Recorrido F	36
7.2.7	Recorrido G	36
7.2.8	Recorrido H	36

7.2.9	Recorrido I	36
7.2.10	Recorrido J	37
7.2	Comparación de resultados	37
8	Conclusión	38
	Bibliografía	39
	Anexo I: Matriz de costes	43
	Anexo II: Código de programación	48

Índice de Figuras

Figura 1: Timeline of Amazon logos. Fuente: https://www.ecomcrew.com/from-a-to-z-the-complete-history-of-amazon-com/	4
Figura 2: Annual net sales revenue of Amazon from 2004 to 2022. Fuente: https://www.statista.com/statistics/266282/annual-net-revenue-of-amazoncom/	5
Figura 3: Jeff Bezos en los inicios de amazon.com. Fuente: https://www.adslzone.net/esenciales/amazon/historia-amazon/	7
Figura 4: Número de empleados amazon.com de 1Q 2018 a 4Q 2022. Fuente: https://www.statista.com/statistics/quarterly-number-of-amazon-employees/	11
Figura 5: Recuento de posibilidades para resolver TSP. Fuente: [14]	13
Figura 6: Grafo de 8 vértices. Fuente: [19]	15
Figura 7: Restricciones TSP. Fuente: [19].	17
Figura 8: Branch and Bound. Fuente: [27].....	25
Figura 9: Matriz de costes. Fuente: [25].....	25
Figura 10: Reducción filas. Fuente: [25].....	26
Figura 11: Reducción columnas. Fuente: [25].....	26
Figura 12: Matriz reducida. Fuente: [25]	26
Figura 13: Matriz reducida tras ramificación. Fuente: [25]	28
Figura 14: Nodos hijos. Fuente: [25].....	29
Figura 15: Vecino más próximo. Fuente: [18].....	30
Figura 16: Mapa de Cádiz. Fuente: https://www.maps.com	32

1 Introducción

1.1. Objetivos

Uno de los componentes de la revolución digital y del comercio minorista sobre el que menos se piensa es cómo recibirán exactamente los productos los clientes y las empresas.

Amazon ha establecido la nueva norma y muchos consumidores esperan recibir los productos pedidos en línea en 48 horas. Otras grandes empresas como Target y Walmart están intentando competir con Amazon integrando un modelo de envío en dos días como parte estándar de su plataforma.

Para seguir el ritmo de la creciente demanda de los canales de comercio electrónico y satisfacer las expectativas de los consumidores, las organizaciones deben invertir en sus almacenes y centros de distribución e incrementar el desarrollo y la implantación de procesos avanzados de cadena de suministro y logística. Las empresas que no sigan el ritmo de las tendencias logísticas corren el riesgo de perder ventaja competitiva y caer en desgracia ante los consumidores.

De ahí la importancia del Traveling Sales Problem en la red logística de Amazon, pues sus algoritmos tratan de optimizar las rutas de los camiones de reparto, reduciendo costes y tiempo empleado en llegar al cliente [29].

1.2. Estructura del trabajo

Amazon es una empresa estadounidense de comercio electrónico fundada por Jeff Bezos en 1994 y con sede en Seattle, Washington. Actualmente, según el Global Brand Finance Report, es la empresa con mayor valor de marca del mundo, superando a Apple, que la había sobrepasado en los últimos años [1].

Para la resolución del enunciado, se ha seguido la estructura expuesta a continuación.

En el capítulo 1 se plantea el contexto en el que el proyecto se plantea, siendo este la logística dentro del comercio e-Commerce.

En el capítulo 2 se hace un análisis de la empresa objeto de nuestro estudio, Amazon; pasando por sus comienzos y fundador hasta su situación actual y estudiando sus claves del éxito y tipos de centros logísticos.

En el capítulo 3 se ilustra el TSP y su historia. A continuación se define su formulación y algunas de las posibles variantes que presenta. Finalmente, se exponen algunas aplicaciones del algoritmo a problemas reales.

En el capítulo 4 se ofrece una visión global de las metodologías empleadas para la resolución del TSP.

En el capítulo 5 se exponen y desarrollan los algoritmos escogidos para la resolución del enunciado. Estos son el del Vecino más Próximo y el de Branch and Bound.

En el capítulo 6 se explica como adaptar el problema del TSP a la red logística de Amazon DQA7.

En el capítulo 7 se presentan los resultados de aplicar los dos algoritmos escogidos al enunciado.

En el capítulo 8 se recogen las principales conclusiones a las que se han llegado tras el estudio, desarrollo y finalización del proyecto.

2 Amazon, el gigante tecnológico

Amazon es una empresa estadounidense de comercio electrónico fundada por Jeff Bezos en 1994 y con sede en Seattle, Washington. Actualmente, según el Global Brand Finance Report, es la empresa con mayor valor de marca del mundo, superando a Apple, que la había sobrepasado en los últimos años [1].

La empresa empezó como una librería y aprovechó la logística para aumentar la satisfacción del cliente. Tras conquistar el negocio de los libros, Amazon se dio cuenta de que podía alimentar su increíblemente eficiente red de ventas con algo más que libros de bolsillo.

Con una red de distribución física para las entregas, Amazon transformó su modelo de negocio en lo que siempre debió ser: un titán del comercio electrónico. En lugar de competir únicamente con las librerías, Amazon ha podido evolucionar para enfrentarse a empresas como Walmart y Target [2]. La empresa ahora se dedica a todo tipo de productos de consumo, los cuales varían desde tecnología de bases de datos hasta vídeos: “De la A al Z”, lema de la compañía. Entre otras cosas, ha creado su propia línea de productos con la marca Amazon, como el asistente personal virtual Alexa, el lector de libros electrónicos Kindle, la plataforma informática Amazon Web Services o el servicio de streaming Prime Video.

La variedad de bienes, servicios y negocios que componen Amazon demuestra la importancia que la gestión de productos y la logística deben tener para la empresa. Por un lado, la logística es la columna vertebral de la empresa; es la piedra angular sobre la que se ha construido la compañía y de la que obtiene la mayor parte de sus ingresos. La cartera de productos propios, por su parte, se integra en esta logística y dota a la marca de una identidad propia, transformándola de intermediaria en una empresa con bienes y servicios propios que realzan el estatus de la empresa a los ojos de sus clientes.

Siendo el mayor minorista en línea de Estados Unidos, su éxito puede atribuirse a sus bajos precios competitivos y a la sencillez de hacer compras desde cualquier lugar [3].

2.1. Amazon: La empresa

2.1.1. Del garaje a la e-commerce más grande del mundo

La historia de la empresa comienza con su fundador, Jeff Bezos, Tras licenciarse en Informática e Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Princeton, Bezos ocupó diversos cargos, entre ellos en una empresa financiera y en una startup de telecomunicaciones.

Bezos se incorporó al fondo de cobertura D.E. Shaw en 1994. En sólo cuatro años, había ascendido rápidamente en la escala corporativa, llegando a Vicepresidente. Bezos era el encargado de buscar posibles nuevas empresas en la entonces incipiente Internet. Les ofreció una lista de 20 productos que podían vender en internet, ya que el acceso a éste estaba creciendo en un 2300% anualmente. Sin embargo, le ignoraron, por lo que Bezos sintió que había llegado el momento de independizarse y fundar su propia empresa, a la cual llamó originalmente Cadabra, haciendo referencia a la famosa frase abracadabra. Como su abogado alegó que "Cadabra" sonaba como "cadáver", decidió cambiarle el nombre. Consideró Relentless y Amazon, decidiéndose por esta última.

Tras revisar su lista de 20 productos, determinó que la mejor forma de lanzar Amazon sería vender libros. Pensaba que había una necesidad generalizada de libros, no suponían un bien extremadamente caro y hay muchos títulos diferentes para vender. Vivieran donde vivieran, Bezos deseaba que todos los lectores tuvieran acceso a los libros. Su objetivo era convertir Amazon en el destino preferido de los compradores de libros de todo el mundo [4].



Figura 1: Timeline of Amazon logos

El primer pedido que se hizo en Amazon fue de un libro científico titulado Fluid Concepts and Creative Analogies (Conceptos de fluidos y analogías creativas) el 3 de abril de 1995, después de que Bezos permitiera a un selecto número de amigos y antiguos

compañeros de trabajo probar una versión de prueba del sitio web. Aunque al principio los ingresos se basaban sobre todo en el boca a boca y Bezos ayudaba con el montaje de los pedidos y la entrega de paquetes, la empresa se presentó audazmente como "la mayor librería del mundo" cuando Amazon.com se puso en línea para el público en general en julio de 1995.

A finales de 1996, Amazon había facturado 15,7 millones de dólares, y en 1997 Bezos sacó la empresa a bolsa con una oferta pública inicial que recaudó 54 millones de dólares. Ese mismo año, Bezos entregó personalmente el pedido un millón de su empresa, a un cliente de Japón que había comprado un manual de Windows NT y una biografía de la princesa Diana. En 1998, Amazon fue más allá de los libros y empezó a vender CD de música, y al año siguiente había añadido más categorías de productos, como juguetes, electrónica y herramientas.

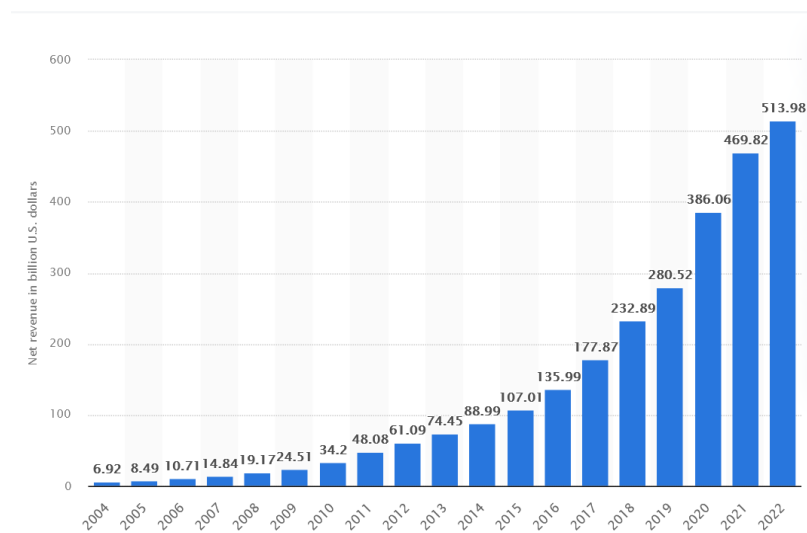


Figura 2: Annual net sales revenue of Amazon from 2004 to 2022

En diciembre de 1999, Amazon había enviado 20 millones de artículos a 150 países de todo el mundo. Ese mismo mes, Bezos fue nombrado Persona del Año por la revista Time. En 2000, la empresa introdujo un servicio que permitía a vendedores individuales y otros comerciantes externos vender sus productos junto a los de Amazon. Mientras tanto, Amazon seguía gastando mucho en expansión y no obtuvo sus primeros beneficios anuales hasta 2003.

En 2007, Amazon presentó su lector electrónico Kindle; cuatro años después, la empresa anunció que vendía más libros electrónicos que impresos. También en 2011,

Amazon lanzó su tableta Kindle Fire. Entre otras empresas, Amazon lanzó en 2006 servicios de computación en la nube y vídeo a la carta; en 2010, un estudio que desarrolla películas y series de televisión; y en 2013, un mercado en línea de obras de arte, que ha presentado obras originales de artistas como Claude Monet y Norman Rockwell.

Además, Amazon ha adquirido varias empresas, entre ellas Zappos y Whole Foods. En 2015, Amazon superó a Walmart como el minorista más valioso del mundo. Dos décadas después de su fundación y con Bezos todavía al timón, el valor de mercado de Amazon era de 250.000 millones de dólares. En 2017, Bezos fue nombrado el hombre más rico del mundo. El 5 de julio de 2021, Bezos dimitió como consejero delegado de Amazon para centrarse en su empresa aeroespacial Blue Origin. En los últimos años, la empresa ha sido objeto de un intenso escrutinio por las malas condiciones laborales y las prácticas de explotación en sus centros de cumplimiento y almacenes [5].

2.1.2. Jeff Bezos: El fundador

Bezos nació el 12 de enero de 1964 en Albuquerque (Nuevo México), hijo de una madre adolescente, Jacklyn Gise Jorgensen, y de su padre biológico, Ted Jorgensen. Los Jorgensen estuvieron casados menos de un año. Cuando Bezos tenía 4 años, su madre se volvió a casar con Mike Bezos, un inmigrante cubano.

Lawrence Preston Gise, el abuelo materno de Jeff, era investigador de la Agencia de Proyectos de Investigación Avanzada de Defensa (DARPA) del Departamento de Defensa de Estados Unidos. DARPA desarrolló ARPAnet, la red de comunicaciones informáticas precursora de Internet. Posteriormente, Lawrence ocupó un puesto en la Comisión de Energía Atómica de Estados Unidos como Director Regional de Albuquerque.

En otras palabras, Jeff Bezos estuvo conectado a Internet desde sus inicios gracias a su abuelo. Esto le dio la oportunidad de crear una visión del futuro del mundo totalmente distinta a la de la mayoría de la gente.

De adolescente se trasladó a Miami con su familia, donde se aficionó a los ordenadores y se graduó con sobresaliente en el instituto. Fue durante el instituto cuando puso en marcha su primer negocio, el Dream Institute, un campamento de verano educativo para alumnos de cuarto, quinto y sexto de primaria.

Bezos se licenció summa cum laude en Ciencias Informáticas e Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Princeton en 1986. Siempre mostró un temprano interés por el funcionamiento de las cosas, convirtiendo el garaje de sus padres en un laboratorio y montando artilugios eléctricos por toda la casa cuando era niño.

Tras graduarse en Princeton, Bezos encontró trabajo en varias empresas de Wall Street, como Fitel, Bankers Trust y la firma de inversiones D.E. Shaw. En 1990, Bezos se convirtió en el vicepresidente más joven de D.E. Shaw.

Aunque su carrera en las finanzas fue muy lucrativa, Bezos optó por dar un paso arriesgado en el incipiente mundo del comercio electrónico. Dejó su trabajo en 1994, se trasladó a Seattle y se lanzó a explorar el potencial del mercado de Internet abriendo una librería en línea, Amazon [6].



Figura 3: Jeff Bezos en los inicios de amazon.com

Jeff Bezos conoció a la madre de sus cuatro hijos, MacKenzie Tuttle, cuando ambos trabajaban en D.E. Shaw: él como vicepresidente senior y ella como asistente administrativa para pagar las facturas y financiar su carrera de escritora. La pareja salió durante tres meses antes de comprometerse y casarse poco después, en 1993.

MacKenzie fue una parte integral de la fundación y el éxito de Amazon, ayudando a crear el primer plan de negocio de Amazon y sirviendo como la primera contable de la empresa. Aunque callada y aficionada a los libros, apoyó públicamente a Amazon y a su marido. Novelista de profesión, se formó con Toni Morrison durante sus años universitarios en la Universidad de Princeton. MacKenzie publicó su primer libro, *The Testing of Luther Albright*, en 2005, y su segunda novela, *Traps*, en 2013.

Tras más de 25 años de matrimonio, Bezos y MacKenzie se divorciaron en 2019. Como parte del acuerdo de divorcio, la participación de Bezos en Amazon se redujo del 16% al 12%, lo que situó su participación en casi 110.000 millones de dólares y la de MacKenzie en más de 37.000 millones. MacKenzie anunció que planeaba donar al menos la mitad de su fortuna a obras benéficas [7].

2.2. Claves del éxito

2.2.1. Customer obsession

Lo principal para la gestión de Amazon ha sido, desde sus comienzos, la respuesta de sus clientes. Para ello, su lema principal es “la obsesión por el cliente”, siendo el primero de los 14 principios de liderazgo de Amazon. Dicha obsesión consiste en que todo lo trabajado en la empresa sea realizado con el objetivo de que la satisfacción del cliente sea cada vez mayor. Amazon llama a dicho proceso “trabajar hacia atrás”, un concepto que se basa en que los proyectos se inician viendo las necesidades de los clientes y una vez que estas estén definidas se puede empezar a trabajar en ellos, siempre manteniendo la cliente en el centro.

2.2.2. Employee centric

Para cumplir su misión de satisfacer a sus clientes, Amazon se asegura de que sus empleados trabajen de forma productiva, generando resultados de calidad. Mientras más satisfechos estén y más productivos sean sus empleados, más centrados estarán estos en el cliente. Una de las metodologías usadas por Amazon para ello es la Kaizen, un programa que consiste en que los trabajadores se agrupan en equipos pequeños para identificar las áreas a mejorar y optimizar los procesos y reducir los errores, aportando soluciones e innovaciones.

Una herramienta destacada la Safety Leadership Index, un sistema online que mide la percepción de los empleados respecto a temas relacionados con su seguridad laboral. También encontramos los Career Choice y Career Skills, programas que buscan formar a los empleados para que sean más competentes y productivos.

2.2.3. Caos organizado

Los centros logísticos de Amazon son llamados Fullfilment Center (centros de cumplimiento), y están hechos para realizar todas las actividades necesarias desde que se realiza un pedido: recibir las unidades, almacenarlas y empaquetarlas. Estos están planificados según el “caos organizado”, el cual no organiza los artículos por categoría o temática, si no que de forma aleatoria, repartiendo el mismo tipo de artículo a lo largo y ancho del centro. De esta forma se reduce el tiempo empleado para recoger cada artículo de un mismo pedido dentro del almacén, pues pueden encontrarse cerca de la misma ubicación. Tal y como indica su nombre, este caos es organizado, y todas las ubicaciones se encuentran perfectamente calculadas. Este “desorden” también hace que se reduzcan las probabilidades de que un robot recogedor se equivoque al tener que escoger entre dos productos similares, ya que cada artículo se encuentra rodeado de otros diferentes [8].

2.3. Tipos de centros logísticos

Los centros de Amazon pueden dividirse en varios tipos, cumpliendo cada uno unas funciones específicas para satisfacer las necesidades de los clientes. Estos son:

- Centros de recepción

Los centros de recepción de Amazon reciben grandes cantidades de productos de los proveedores, asignándolos a los Fulfillment Center según demanda.

- Centros clasificables

Con una superficie de unos 75.000 metros cuadrados, los centros de distribución clasificables pueden emplear a más de 1.500 trabajadores a tiempo completo. En estos edificios, los empleados de Amazon recogen, empaquetan y envían pedidos de clientes como libros, juguetes y artículos para el hogar. Gracias a las innovaciones de Amazon Robotics, los empleados trabajan a menudo junto a robots, lo que les permite aprender nuevas habilidades y les ayuda a crear un proceso más eficiente para satisfacer la demanda de los clientes.

- Centros no clasificables

Con un tamaño que oscila entre 55.000 y 100.000 de metros cuadrados, los centros de distribución no clasificables emplean a más de 1.000 trabajadores a tiempo completo.

En estos centros, los empleados recogen, embalan y envían artículos voluminosos o de gran tamaño que no pueden ser clasificados de manera automática por robots como en el caso anterior, como muebles de jardín, equipamiento para exteriores o alfombras.

- Centros especializados

Estos son centros donde gestionan categorías específicas de artículos o que entran en servicio en épocas punta del año, como la Navidad. Muchos de estos edificios ofrecen oportunidades a tiempo parcial con la opción de pasar a tiempo completo.

- Centros de clasificación

Reciben exclusivamente paquetes para ser enviados a centros de entrega. En los centros de clasificación, los asociados clasifican los pedidos de los clientes por destino final y tiempo requerido de entrega, y según este criterio los consolidan en unos u otros camiones.

- Centros de entrega

En estos edificios, los pedidos de los clientes se preparan para la entrega de última milla a los clientes [9].

2.4. Como el Covid-19 afectó a Amazon

La mayor empresa de comercio electrónico del mundo ha visto cómo sus ventas mejoraban drásticamente como consecuencia de la última epidemia global que ha afectado al planeta. Alrededor de marzo de 2020, la pandemia comenzó a afectar a los principales países donde Amazon es dominante. Debido al cierre de bares, tiendas y almacenes y al prolongado confinamiento de la población, aumentaron las compras por Internet [10].

En los primeros nueve meses de 2020, las ganancias de la compañía aumentaron un 70% hasta los 5.800 millones de dólares respecto al mismo periodo de 2019. Amazon declaró un aumento de las ganancias de alrededor del 200%, impulsado por la rápida transición de América del Norte a las compras solo en línea. Las ventas de Amazon alcanzaron los 96.100 millones de dólares, un 37% más que en 2019, mientras que los beneficios alcanzaron la asombrosa cifra de 6.300 millones de dólares.

El sector de Amazon Web Services ganó un 29% en 2020 y ahora representa el 12% de los ingresos globales de la empresa, a medida que empresas de todo el mundo se pasaron a la computación basada en la nube y al trabajo totalmente a distancia.

Amazon lanzó una expansión sin precedentes, aumentó su gasto un 120% (25.300 millones de dólares), invirtiendo en más construcción de almacenes, desarrollo tecnológico y otros gastos de capital [11]. En septiembre de 2022, el balance de Amazon reflejaba, por primera vez desde el año 2004, más deuda que dinero en caja: las enormes ganancias de la pandemia se habían volatilizado en siete trimestres.

Sin embargo, con el final de la pandemia, el ritmo de crecimiento del comercio electrónico se redujo drásticamente en cuanto terminaron los confinamientos y se tuvo que proceder al cierre de muchos almacenes abiertos durante la pandemia y a una reducción de plantilla (18 mil personas en el último año). Durante los primeros nueve meses de 2022 la compañía había perdido \$9,100 millones. La compañía ha perdido ya más de la mitad de su valor, se enfrenta a importantes problemas en su cultura de trabajo, y está perdiendo rápidamente su estatus de compañía atractiva en la que buscar trabajo. Tal y como se ve en la Figura 4, se incorporó a muchos empleados durante la pandemia y se han tenido que hacer recortes tras finalizar esta [12].

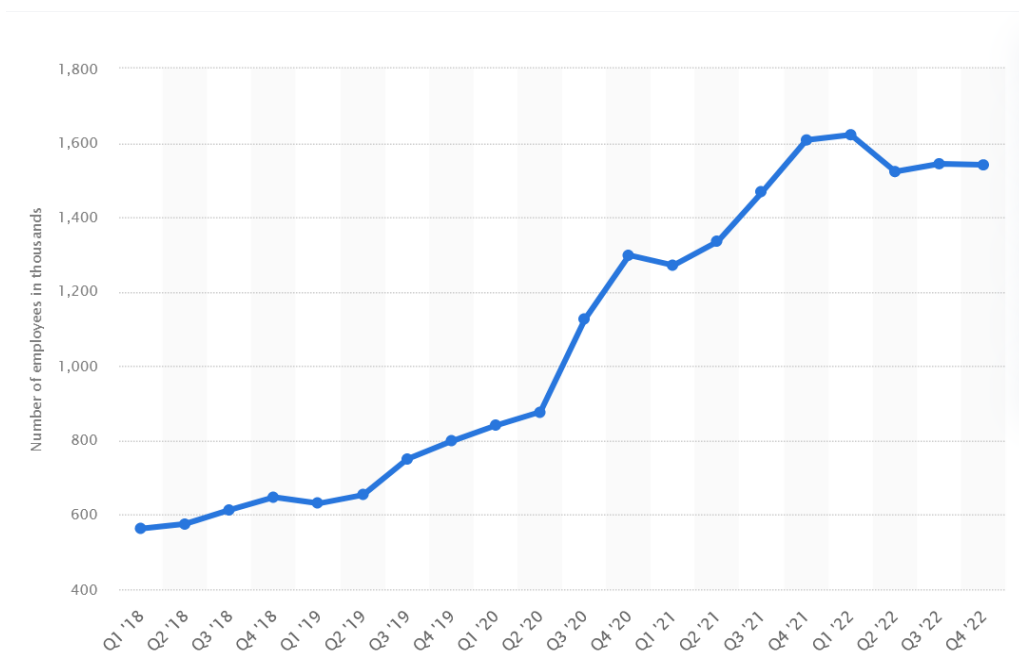


Figura 4: Número de empleados amazon.com de Q1 2018 a Q4 2022

3 El problema del viajante, estado del arte

El problema del viajante, conocido por sus siglas en inglés como el TSP (Traveling Salesman Problem) es un problema de optimización combinatoria muy importante en la investigación de operaciones y en la ciencia de la computación. El problema responde a la siguiente pregunta:

Dada un número n de ciudades, y las distancias entre cada par de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y regresa a la ciudad origen?

El objetivo del viajero es reducir al máximo tanto los gastos de viaje como la distancia recorrida.

No parece obvio, pero el problema del viajante de comercio es un problema de optimización realmente difícil, clasificado dentro del conjunto NP-hard. Su dificultad se encuentra en probar todos los caminos posibles entre todos los puntos. [13].

Dados n nodos, como el origen es conocido de antemano, quedan $(n-1)$ lugares entre los que calcular una ruta. Llegados a la primera parada, quedarían $(n-2)$ puntos entre los que elegir, y así sucesivamente, hasta llegar de nuevo al origen. Siguiendo la teoría combinatoria, aplicamos la permutación para calcular el número de ordenaciones posibles:

$$P(n - 1) = (n - 1)!$$

En la Figura 5 se puede ver reflejado como con tan solo 10 nodos, el número de posibilidades resulta muy elevado. Podemos observar como el número de posibles soluciones aumenta significativamente al aumentar el tamaño de la muestra, llegando a cifras inabarcables. Para solventar este problema, se buscan algoritmos que reduzcan estas cifras astronómicas [14].

Count of points	Count of possible ways
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 00
16	20 922 789 888 000
17	355 687 428 096 000
18	6 402 373 705 728 000
19	121 645 100 408 832 000
20	2 432 902 008 176 640 000
25	15 511 210 043 330 985 984 000 000

Figura 5: Recuento de posibilidades para resolver TSP

3.1. Historia

Las raíces del problema del viajante de comercio son ambiguas. No hay duda de que la gente de todo el mundo necesitaba resolver el problema de visitar más lugares y recorrer el camino más corto. En 1835 aparece por primera vez el problema en una guía de viaje con ejemplos prácticos de Alemania y Suiza, sin llegar a contener ningún documento matemático o de apoyo a estos ejemplos.

El problema del viajante fue definido oficialmente por primera vez hacia 1800 por el matemático irlandés W. R. Hamilton y el matemático británico Thomas Kirkman. Hamilton desarrolló una especie de juego para resolver el problema del viajante de comercio: el "The Icosian Game", que es el llamado juego de Hamilton. El principio de este juego es simple, el "jugador" tiene que encontrar el ciclo de Hamilton en el conjunto de puntos, visitando una y sólo una vez cada vértice y que el de llegada coincida con el de partida. Este problema adquirió su forma definitiva en 1930, cuando los profesores empezaron a enseñarlo en la Universidad de Viena y en la de Harvard.

En los años 1950 y 1960, este problema ganó popularidad en los círculos científicos no sólo de Europa, sino también de Estados Unidos. George Dantzig, Delbert Ray Faulkerson y Selmer M. Johnson, de la RAND Corporation de Santa Mónica, publicaron artículos notables. Transformaron este problema en un problema de programación lineal y desarrollaron el método "plano de corte" para resolverlo. Con este nuevo método fue posible resolver el problema con 49 ciudades llegando a una solución óptima que minimizaba su coste, lo que significa que este método encontró el camino más corto posible alrededor de todos los puntos. Durante las décadas siguientes, este problema fue estudiado por muchos otros científicos, matemáticos, informáticos y físicos [15].

En 1971, Richard M. Karp demostró que el Problema del Ciclo de Hamilton era NP-hard, lo que evidencia la dificultad computacional para encontrar soluciones óptimas.

En los años 70 y 80 se registraron avances significativos de la mano de Grötschel, Holland, Padberg y Rinaldi. Estos dos últimos, en 1991 resolvieron el problema con 2392 ciudades con el método de "Planos de Corte" y el método "Branch and Bound".

En 1992, Gerhard Reinelt publicó TSPLIB con ejemplos de diferentes dificultades para resolver el problema del viajante. Estos ejemplos son utilizados en la actualidad por investigadores de todo el mundo [16].

3.2. Formulación del problema

Para enunciar el problema formalmente introducimos la siguiente terminología: sea un grafo $G=(N,A,C)$ donde $N=1,\dots,n$ es el conjunto de nodos o vértices, A es el de arcos o aristas y $C=(c_{ij})$ es la matriz de costes, es decir, c_{ij} es el coste o distancia del arco (i,j) . Siendo las ciudades los nodos, las enumeramos de 1 a n , consideramos que x_{ij} represente el arco que va del nodo i al j , tomando el valor 1 si el arco del nodo i al j está en la solución y 0 en caso contrario. El uso de los arcos (i, i) no está permitido, por lo que se impone que $x_{ii}=0$ [17].

Según el tipo de grafo se distinguen dos problemas:

- TSP simétrico: El grafo G es no dirigido, en otras palabras, los arcos conectan los nodos en ambos sentidos, es decir, la distancia entre un par de ciudades es la misma tome el sentido que se tome. En este caso la matriz de coste sería simétrica. Matemáticamente esto implica que $d_{ij} = d_{ji} \forall (i, j) \in A$
- TSP asimétrico: El grafo G es dirigido, es decir, la distancia puede ser diferente a la ida que a la vuelta e incluso no existir una de ellas. En este caso la matriz de costes no es simétrica.

Un camino es una sucesión de arcos (e_1, e_2, \dots, e_k) en donde el nodo final de cada arco coincide con el inicial de la siguiente.

- Un camino es simple si no utiliza el mismo nodo mas de una vez.
- Un ciclo es un camino (e_1, e_2, \dots, e_k) en el que el nodo final de el coincide con el inicial de e_1 .
- Un ciclo es simple si lo es el camino que lo define.
- Un subtour es un ciclo simple que no pasa por todos los nodos del grafo.
- Un tour o ciclo hamiltoniano es un ciclo simple que pasa por todos los nodos del grafo. El problema del viajero consiste en determinar un tour de coste mínimo [18].

La figura siguiente muestra un grafo de 8 vértices en el que aparece destacado un ciclo hamiltoniano.

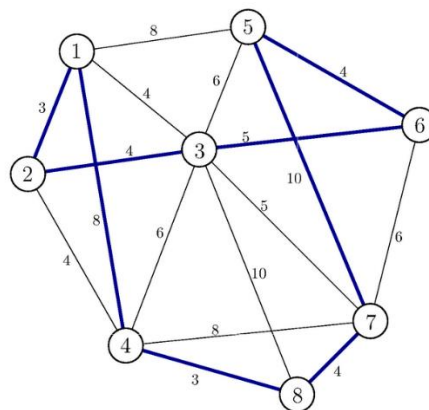


Figura 6: Grafo de 8 vértices

El TSP puede ser formulado de distintas maneras, siendo una de las más importantes la desarrollada por Miller, Tucker y Zemlin en 1960: dado un número de ciudades n donde c_{ij} es la distancia entre cada una de ellas se define la variable dicotómica x_{ij} como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el camino escogido va de la ciudad } i \text{ a la } j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

También se define la variable binaria u_i para $i = 1, \dots, n$, que representa la posición en la que se visita la ciudad i , quedando la formulación del problema de la siguiente manera:

Minimizar:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1 \dots n$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1 \dots n$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} < n - 1 \quad 2 \leq i \neq j \leq n$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1 \quad 2 \leq i \leq n$$

$$u_i \in \mathbb{Z} \quad i = 2 \dots n$$

$$x_{ij} \in \{1, 0\} \quad i, j = 1 \dots n$$

$$c_{ij} > 0 \quad i, j = 1 \dots n$$

La función (2) es la función objetivo y minimiza el camino del viajante.

Las restricciones (3) y (4) obligan a que cada ciudad sea visitada una única vez y a que se salga siempre de la que se es visitada, respectivamente.

Estas restricciones no son suficientes ya que se pueden dar caminos disjuntos o lazos parciales tales que no se satisficiesen las condiciones del problema. Por ejemplo, con 5 ciudades podríamos obtener como solución $x_{15} = x_{23} = x_{32} = x_{54} = x_{41} = 1$ y el resto de x_{ij} con valor 0, lo cual tal vemos en la Figura 7 corresponde a dos caminos disjuntos.

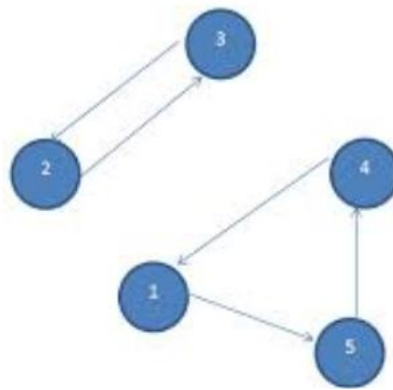


Figura 7: Restricciones TSP

Para evitar que esto suceda, hacemos uso de las restricciones (5) y (6) ya que evitan que se creen subtours entre el conjunto de ciudades, pues con las restricciones anteriores no se podría establecer que vértices se visitaron antes o después [19].

3.3. Variantes del TSP

3.3.1. Problema del viajante de comercio con múltiples viajeros

En esta variante existe una cantidad determinada de viajeros y tiene como condición o restricción principal que ningún viajante puede visitar una ciudad que ya ha sido visitada por otro viajante.

3.3.2. Problema del viajante de comercio con recogida y entrega de mercancías

Cada ciudad recibe o proporciona una cierta cantidad de producto transportada mediante el uso de un único vehículo con capacidad limitada.

3.3.3. Problema del Ciclo Simple

Además de tener unos costes de ir de una ciudad a otra se tiene también unos beneficios por visitar cada ciudad. Se busca un equilibrio entre el beneficio de visitar cada nodo y el coste que esto supone, lo que tiene como consecuencia que no sea necesario que en la región factible estén incluidas todas las ciudades.

3.3.4. Problema del viajante de comercio generalizado

Las ciudades están agrupadas en regiones y se tiene que visitar como mínimo una ciudad de cada región de tal forma que se minimice el coste.

3.3.5. Problema del viajante de comercio con ventanas de tiempo

Cada ciudad debe ser visitada dentro de una ventana de tiempo especificada (cada ciudad y cada cliente tienen un tiempo mínimo y un tiempo máximo para ser visitado).

3.4. Aplicaciones del TSP

Más allá del interés empresarial que pueda causarle a cualquier agente comercial dedicado a la venta de productos, lo cierto es que este problema se extiende a otras muchas ramas:

3.4.1. Revisión de motores de turbina de gas

Esta aplicación se da cuando hay que revisar motores de turbina de gas de aviones. Para garantizar un flujo de gas uniforme a través de las turbinas, hay conjuntos de toberas y álabes guía situados en cada etapa de la turbina. Estos conjuntos constan básicamente de una serie de álabes guía de tobera fijados en su circunferencia. Todos estos álabes tienen características individuales y la colocación correcta de los álabes puede reportar beneficios sustanciales (reducción de las vibraciones, aumento de la uniformidad del flujo, reducción del consumo de combustible). El problema de colocar los álabes de la mejor manera posible puede modelarse como un TSP con una función objetivo especial.

3.4.2. Problema de Scheduling

Este problema es realmente complejo de resolver. Se formula de la siguiente forma: hay T tareas que realizar y m procesadores. Se busca una planificación en m

procesadores para T minimizando el tiempo. Si ahondamos un poco más en este tipo de problemas, observamos que existen una gran cantidad de variantes asociadas a si hay orden parcial en T (es decir, algunas actividades son preferentes a otras).

En este caso las actividades pueden verse como las ciudades y los tiempos como las distancias. El objetivo es determinar una secuencia (schedule) de tal forma que se lleven a cabo en una cantidad mínima de tiempo. Para resolverlo se usa la versión asimétrica del TSP, es decir, debemos tener en cuenta que el costo de pasar de la tarea A a la B, puede ser diferente del costo de recorrer el camino inverso. Como aplicación más cercana, los problemas de scheduling los encontramos en la televisión, donde es necesario planificar un secuenciamiento óptimo de los comerciales durante un corte publicitario.

3.4.3. Problema de placa de circuitos impresos PCB

Ésta es sin duda una de las utilidades más ingeniosas que puede plantear el problema del viajante de comercio: la creación de placas de circuitos. Este problema se enfoca en dos suproblemas: el orden óptimo de taladrar las placas y los caminos óptimos que comunican los chips. En los problemas de perforado hemos de tomar las ciudades como las posiciones a perforar y las distancias entre ellas como el tiempo que necesita la máquina en trasladarse de una otra. El punto inicial y final será un punto adicional donde permanece la perforadora mientras descansa. Claramente si estas máquinas no son correctamente programadas el tiempo que tarde en recorrer un orificio u otro puede ser significativo con lo que la producción de placas bajaría en un período de tiempo.

En el problema de conexión de chips la idea es minimizar la cantidad de cable necesaria para unir todos los puntos de una placa sin que haya interferencias. Como los chips son de pequeño tamaño no se pueden poner más de dos cables en un único pin. Tomando las ciudades como los pins y la cantidad de cable necesaria para unirlos como la distancia, el problema es equivalente al de viajante de comercio.

3.4.4. Problema de la red de basuras

El problema de la recolección de residuos puede dividirse en 3 grandes tipos: domiciliaria, comercial e industrial. La recolección domiciliaria consiste en atender fundamentalmente casas particulares. La frecuencia puede variar aunque normalmente las rutas suelen repetirse una vez todos los días. La recolección comercial o industrial se

encarga de las tiendas, restaurantes o edificios de cocinas. Los objetivos en este tipo de problemas pueden ser diversos: minimizar el número de camiones, la distancia recorrida... Si queremos minimizar la distancia usaremos el problema del viajante de comercio identificando los contenedores o puntos de recogida como las ciudades a visitar. Estos mismos problemas se puede generalizar a los llamados problemas de vehículos o de reparto. Se usan en las empresas de transportes, en correos...

3.4.5. Aplicaciones en internet

Supongamos que el viajante de comercio es un bit de datos, y que las ciudades son servidores de Red distribuidos por todo el planeta. Esta variante del problema del viajante de comercio es algo inherente al uso óptimo de una plataforma masiva de distribución como es Internet. No olvidemos que en cada ruta puede haber miles de ciudades en este caso. Es curioso como para resolver esta variante algunos investigadores se han inspirado en el comportamiento de las hormigas [21].

4 Metodologías de resolución

Está demostrado por la teoría de la complejidad que el coste computacional de un problema crece según lo hace su tamaño. Al tratarse el TSP de un problema de la categoría NP-hard, sus posibles métodos de resolución son limitados. Si ignorásemos la dificultad del problema, podríamos darnos de bruces con que, debido a insistir en hallar la solución óptima, el tiempo de ejecución para llegar a un resultado sea desorbitado, o por el contrario con insistir en un método tan rápido que no haya posibilidad de alcanzar una solución óptima. En este capítulo se explicarán los distintos métodos que existen para dar respuesta a este problema.

4.1. Métodos exactos

Los métodos exactos son aquellos que aseguran que la solución obtenida será la óptima tras su aplicación. Para poder llevar a cabo la resolución del algoritmo exacto en un tiempo de ejecución razonable, será necesario tener en cuenta el tipo de problema y su tamaño, ya que dicho tiempo de ejecución crece exponencialmente respecto al tamaño de la muestra [22].

Algunos de los algoritmos que podemos encontrar en esta categoría son *Branch and Bound*, *Ramificación y corte* o *Ramificación y precio*.

4.2. Métodos heurísticos

Los métodos heurísticos se aplican cuando el problema presente una muestra de gran tamaño y no se pueda garantizar que se vaya a encontrar la mejor solución en un tiempo de resolución admisible, por lo que los métodos exactos no resultan eficientes. Las soluciones que se obtienen son aproximadas, lo que resulta suficiente ya que se aplica en problemas donde la rapidez del proceso resulta tan importante como la calidad de la solución.

Hay diferentes motivos por los que usar métodos heurísticos: que no existe un método exacto, que este exista pero que el coste computacional sea demasiado alto o que el problema resulte muy difícil de modelar.

Algunos de los algoritmos que podemos encontrar en esta categoría son *El Algoritmo de ahorros*, *Heurísticas de Inserción*, *Búsqueda local* o *The nearest neighbour algorithm*.

4.3. Métodos metaheurísticos

Son un tipo de heurística nacida en los 70s, bajo la idea de combinar varios métodos heurísticos para lograr resultados más eficientes y efectivos. Son un tipo de métodos de aproximación diseñado para resolver problemas combinatoriales de optimización difíciles, en donde las heurísticas clásicas no son efectivas.

Algunos de los algoritmos que podemos encontrar en esta categoría son *Algoritmos genéticos*, *Simulated annealing*, *Tabu Search* o *Ant Colony Optimization* [23].

5 Algoritmos escogidos

Aunque el TSP es un problema difícil de resolver, tiene una complejidad NP-Hard y hasta el momento no se ha encontrado una forma de resolverlo en tiempo polinomial, existen algoritmos que reducen su complejidad. Las principales características para elegir el algoritmo son las siguientes:

- Eficiencia para encontrar una solución óptima o casi óptima.
- La eficacia o complejidad para lograrlo.
- Simplicidad del algoritmo. Aunque este punto pueda parecer trivial, la sencillez en su análisis es fundamental a la hora de diseñar, investigar y desarrollar algoritmos. Lo habilita, lo adapta y lo optimiza.

Estos tres objetivos no suelen darse al mismo tiempo, por lo que siempre se deberá buscar un equilibrio en función de la naturaleza del problema que el algoritmo intente resolver. En este apartado se estudiarán dos algoritmos, cada uno correspondiente a un método. En primer lugar, se verá un algoritmo exacto, el conocido por Ramificación y Poda (Branch and Bound), y en segundo lugar el algoritmo heurístico del Vecino más proximo (The nearest neighbour algorithm).

5.1. Algoritmo de ramificación y poda (Branch and Bound)

El enfoque Branch and Bound se basa en el principio de que el conjunto total de soluciones factibles puede dividirse (ramificarse) en subconjuntos más pequeños de soluciones. Estos subconjuntos (nodos) más pequeños pueden evaluarse sistemáticamente hasta encontrar la mejor solución, buscando en todo el árbol antes de llegar a ella. Se considera que este proceso lleva mucho tiempo, especialmente en el caso de problemas grandes o complejos.

En el proceso de ramificación, se incluyen restricciones diseñadas para eliminar una parte de la región factible, generando subproblemas del problema dado, de tal forma que

todas las soluciones del problema inicial estén incluidas en la unión de las regiones factibles de los subproblemas generados. Repitiendo este proceso, un subproblema dejará de ramificarse, cuando la solución óptima no es factible o no se pueden ramificar más problemas.

El proceso de acotación consiste en fijar como límite inferior (bound) el mejor valor de la función objetivo en las soluciones, obtenidas en la resolución de los subproblemas generados hasta el momento, y a partir del límite se eliminan todos aquellos subproblemas para los cuáles el valor de la función es mayor que la cota dada, en caso contrario se fija en ese mejor valor un nuevo límite. En el caso en el que el bound de un camino sea menor que o igual que todos los bounds del resto de soluciones, se habrá encontrado el camino óptimo.

5.1.1.Elementos del algoritmo

El nodo situado en la parte superior del árbol se denomina raíz. Todas las aristas del árbol apuntan hacia abajo. Si una arista apunta de un nodo P a un nodo H, entonces P se llama padre de H, y H se llama hijo de P. Aquí, cada nodo hijo es una solución parcial y forma parte del conjunto de soluciones.

Cada nodo del árbol de bifurcación tiene:

- Un número de nodo.
- Una etiqueta, que representa la decisión tomada en ese nodo de tomar o no un determinado enlace de una ciudad a otra (las etiquetas de los nodos terminales del árbol representan dos enlaces).
- Una cota, que da un límite inferior a las longitudes posibles de los circuitos situados por debajo de ese nodo en el árbol.
- Matriz de costes.
- Matriz reducida.

(Excepciones: El nodo raíz del árbol y los nodos terminales no necesitan etiqueta, los nodos terminales del árbol no tienen matrices de costes ni reducida).

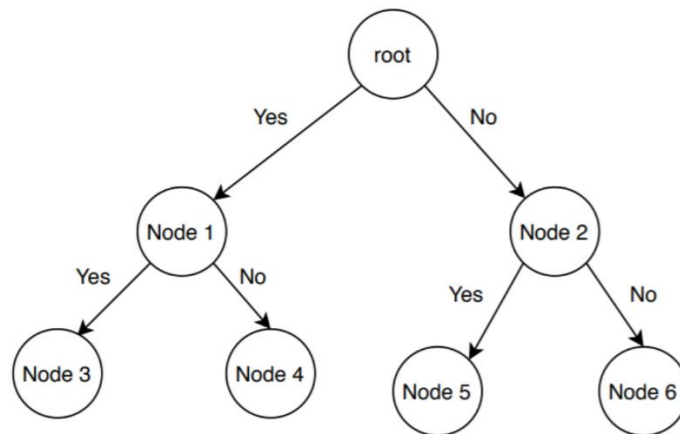


Figura 8: Branch and Bound

Cada matriz tiene asociado un "valor L" que podría llamarse el "límite inferior". A medida que avanza el algoritmo, las distancias en la matriz son disminuidas, y el valor L lleva la cuenta de la cantidad total que hemos restado a las distancias desde la matriz de distancias original.

Se asignan "ponderaciones" a las aristas y se marcan con (i,j) las rutas que se recorren o con non(i,j) las que se eluden.

5.1.2. Proceso de resolución

1. Elaborar la matriz de costes

En este primer paso se elabora la matriz de costes con las distancias entre ciudades. La distancia entre el nodo i y el j se marca con d_{ij} . Si dos nodos no son contiguos, se marcarán como $d_{ij} = \infty$, esto sirve para prevenir al algoritmo de elegir como camino $i \rightarrow i$.

addresses	1	2	3	4	5
1	∞	600	1000	1900	1100
2	600	∞	1900	1900	1500
3	1000	1900	∞	1700	1200
4	1900	1900	1700	∞	1900
5	1100	1500	1200	1900	∞

Figura 9: Matriz de costes

2. La matriz reducida

En cada fila de la matriz de costes, el número más pequeño es marcado como r_i :

$$r_i = \min d_{ij}, j = 1, \dots, nr_i$$

addresses	1	2	3	4	5	r_i
1	∞	600	1000	1900	1100	600
2	600	∞	1900	1900	1500	600
3	1000	1900	∞	1700	1200	1000
4	1900	1900	1700	∞	1900	1700
5	1100	1500	1200	1900	∞	1100

Figura 10: Reducción filas

Los números más pequeños de cada columna (c_j) son calculados de la siguiente forma:

$$c_j = \min (d_{ij} - r_i)$$

addresses	1	2	3	4	5	r_i
1	∞	600	1000	1900	1100	600
2	600	∞	1900	1900	1500	600
3	1000	1900	∞	1700	1200	1000
4	1900	1900	1700	∞	1900	1700
5	1100	1500	1200	1900	∞	1100
c_j	0	0	0	700	200	

Figura 11: Reducción columnas

La matriz reducida es calculada usando la fórmula:

$$d'_{ij} = d_{ij} - r_i - c_j$$

addresses	1	2	3	4	5	r_i
1	∞	0	400	600	300	600
2	0	∞	1300	600	700	600
3	0	900	∞	0	0	1000
4	200	200	0	∞	0	1700
5	0	400	100	100	∞	1100
c_j	0	0	0	700	200	

Figura 12: Matriz reducida

3. Cálculo de la reducción y el límite inferior

La reducción de la matriz, b , se calcula sumando la reducción total en las columnas y en las filas:

$$b = \sum_{i=1}^n r_i + \sum_{j=1}^n c_j$$

En nuestro ejemplo, $b=5900$.

Al iniciar el problema, el límite inferior (L) será igual a la reducción inicial.

4. Cálculo del “penalty”

Se debe elegir el primer nodo desde el que comenzará la ramificación. Para ello, partiendo de los valores $d'_{ij} = 0$, se encuentran los valores mínimos que corresponden a cada una de sus filas y columnas y se calcula su suma

$$\pi_{ij} = \min_j d'_{ij} + \min_i d'_{ij}$$

La ramificación comienza con la trayectoria en (i,j) donde dicho valor es máximo

$$\pi = \max_{ij} \pi_{ij}$$

Si hubiese un empate, se elige el que corresponda a la menor distancia en la matriz original.

En nuestro ejemplo, dicho nodo sería el $(2,1)$.

5. Ramificación

Se generan dos nodos hijos:

- Nodo derecho:
 - El valor del nodo es el que corresponde a (i,j) de π (En nuestro ejemplo $2 \rightarrow 1$).

- La nueva matriz de costes se formará a partir de la matriz reducida actual, eliminando las filas y columnas correspondientes a π .
- El límite inferior es calculado:

$$L(i,j) = L(\text{nodo padre}) + c(i, j) + b$$

Es decir, se suma el límite inferior anterior, más el coste del nodo que estamos tratando (en este caso es cero) más la nueva reducción que debemos llevar a cabo si fuese necesario para tener al menos un cero en cada fila y columna.

addresses	2	3	4	5	r_i
1	∞	400	600	300	300
3	900	∞	0	0	0
4	200	0	∞	0	0
5	400	100	100	∞	100
c_j	200	0	0	0	

Figura 13: Matriz reducida tras ramificación

$$L(2,1) = 5900 + 0 + 600 = 6500$$

– Nodo izquierdo:

- El valor del nodo es el negado del que corresponde a (i,j) de π (En nuestro ejemplo $2 \rightarrow 1$).
- La nueva matriz de costes se formará a partir de la matriz reducida actual, reemplazando el valor (i,j) de π por infinito.
- El límite inferior del nodo es el valor de L calculado para la matriz reducida que se está tratando más π , es decir, más el mínimo de la fila y el mínimo de la columna de c_{ij} . Si estos valores fueran igual a cero, el límite inferior sería igual a L.

$$L(\text{non}2,1) = L(\text{padre}) + \pi$$

$$\text{En nuestro ejemplo: } L(\text{non}2,1) = 5900 + 600 = 6500$$

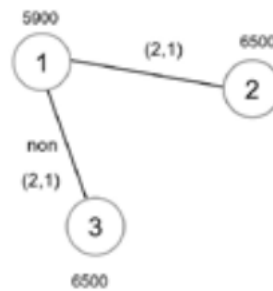


Figura 14: Nodos hijos

6. Repetir proceso hasta llegar a la solución óptima [24][25][26][27].

5.2. Algoritmo del vecino más próximo (Closest neighbor)

Uno de las heurísticas más sencillas utilizadas para el TSP es la llamada heurística “del vecino más próximo”, ideada por Rosenkrantz, Stearns y Lewis. Según la cual, el “viajante” comenzaría en una ciudad y después visitaría la ciudad más cercana a esta ciudad origen. Desde allí, se visitaría la ciudad más próxima que aún no haya sido visitada y así sucesivamente hasta que se haya pasado por todas las ciudades, momento en el que el “viajante” ha de regresar a la ciudad origen [28].

De forma esquemática tendríamos:

- Paso 1. Seleccionar un nodo inicial.
- Paso 2. Identificar al nodo más cercano al último agregado, siempre que no haya sido agregado.
- Paso 3. Repetir el paso 2 hasta incluir todos los nodos.

Debemos considerar que a la hora de construir esta solución, el algoritmo suele comenzar muy bien, seleccionado aristas de bajo coste/distancia. Sin embargo, al final del proceso pueden quedar vértices cuya conexión obliga a introducir aristas de mucha distancia. Esto es lo que se conoce como “miopía” del procedimiento, ya que en cada momento se escoge la mejor opción disponible sin “ver” que esto puede ocasionar problemas en iteraciones posteriores [18].

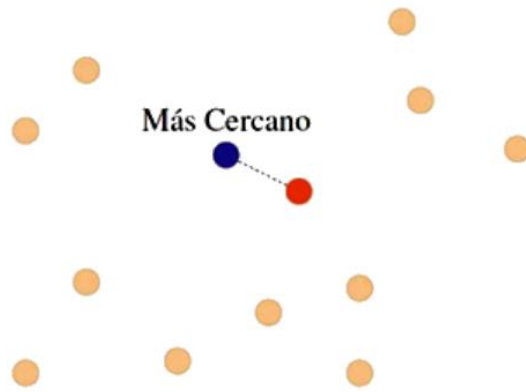


Figura 15: Vecino más próximo

El algoritmo sería:

- Inicialización
 - Seleccionar un vértice j al azar
 - Hacer $t = j$ y $W = V \setminus \{j\}$
- Mientras ($W \neq \phi$)
 - Tomar j de $W | c_{tj} = \min\{c_{ti} / i \in W\}$
 - Conectar t a j
 - Hacer $W = W \setminus \{j\}$ y $t = j$

6 Adaptación al problema de Amazon en Cádiz

Estando el fondo teórico del problema ya presentado, previamente a aplicar una metodología de resolución al problema del centro Delivery Amazon DQA7 en el Puerto de Santa María, Cádiz; es necesario desarrollar un grafo G que lo represente.

Se modela de este modo el problema de acuerdo con el ya mencionado enunciado esencial del TSP: “Siendo N ciudades de un territorio. El objetivo es dar con una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades y minimice la distancia recorrida por el viajante.”

En nuestro enunciado, el vehículo saldrá del centro de el Puerto de Santa María y recorrerá los principales pueblos de la provincia de Cádiz. La resolución tratará de minimizar la distancia recorrida respetando la restricción de visitar cada pueblo una sola vez.

6.1. Nodos

Para este problema se han elegido los 20 pueblos más poblados de la provincia de Cádiz, ya que son donde Amazon tiene más presencia. El pueblo más cercano a DQA7, El Puerto de Santa María, se encuentra a tan solo 6.8 km del centro, y el más lejano, La Línea de la Concepción, se encuentra a 114 km.

Contando con el centro de Amazon, el número de nodos del problema, n , es igual a 20.

- Origen y destino: Amazon DQA7.
- Los pueblos incluidos, ordenados de mayor población a menor: Jerez de la Frontera, Algeciras, Cádiz, San Fernando, El Puerto de Santa María, Sanlúcar de Barrameda, La Línea de la Concepción, Puerto Real, San Roque, Arcos de la

Frontera, Rota, Los Barrios, Conil de la Frontera, Barbate, Chipiona, Tarifa, Ubrique, Vejer de la Frontera, Villamartín.



Figura 16: Mapa de Cádiz

6.2. Arcos

Los arcos son las conexiones entre los pueblos, pudiendo ser estas directas o indirectas, es decir, que se puede pasar a través de un pueblo para llegar a otro sin que el algoritmo dé por visitado el pueblo intermedio. Esto sucede cuando el nodo al que se desea llegar no está completamente conectado con todos los del grafo. En nuestro caso el problema se modela como un grafo conexo, es decir, todos los nodos están conectados entre sí, aunque podría darse que el algoritmo decida usar una ruta indirecta si esta es óptima.

Se puede ver claramente que en este enunciado los arcos representan carreteras, autovías o autopistas.

6.3. Matriz de costes

Para resolver el TSP será necesario calcular una matriz de distancias entre todos los pueblos a considerar en el problema, con el objetivo de encontrar la ruta mínima para

visitar dicho número de pueblos, n , una sola vez. Se definirá d_{ij} como la distancia entre el nodo i y el j . La matriz será simétrica, es decir, el camino de ida será igual al de vuelta, siendo matemáticamente $d_{ij} = d_{ji}$.

En el caso del algoritmo Branch and Bound dicha matriz de costes se usará para calcular las matrices reducidas de las que se hace uso para resolver el problema.

7 Resultados

En este proyecto se han presentado dos algoritmos, uno exacto, el conocido por Ramificación y Poda (Branch and Bound), y un algoritmo heurístico, el del Vecino más proximo (The nearest neighbour algorithm). Cada uno presenta sus ventajas e /inconvenientes, pero ambos aportan una nueva visión al problema, buscando siempre el equilibrio entre el coste computacional y la exactitud del resultado.

En este apartado se analizarán las soluciones obtenidas por cada uno de ellos para el problema en provincia de Cádiz.

7.1. Algoritmo del vecino más próximo

Para este caso será necesario dividir el enunciado en cuatro subproblemas, asignándose un camión de reparto a cada uno de ellos. Encontramos así los siguientes recorridos:

7.1.1.Recorrido A

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 3 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, Jerez de la Frontera, Arcos de la Frontera, Ubrique*]. La distancia total recorrida para este caso es de 90.8km.

7.1.2.Recorrido B

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 3 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, Jerez de la Frontera, Arcos de la Frontera, Villamartín*]. La distancia total recorrida para este caso es de 71.4km.

7.1.3.Recorrido C

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 6 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, Jerez de la Frontera, El Puerto de Santa María, Rota, Chipiona, Sanlúcar de Barrameda*]. La distancia total recorrida para este caso es de 83.1km.

7.1.4.Recorrido D

Cuenta con un total de 14 nodos divididos en 13 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7*, *Jerez de la Frontera*, *El Puerto de Santa María*, *Puerto Real*, *Cádiz*, *San Fernando*, *Conil de la Frontera*, *Vejer de la Frontera*, *Barbate*, *Tarifa*, *La Línea de la Concepción*, *San Roque*, *Los Barrios*, *Algeciras*']. La distancia total recorrida para este caso es de 238.9km.

Finalmente, la suma de los cuatro subconjuntos resultará en una distancia de 484.2km.

7.2. Algoritmo Branch and Bound

Este algoritmo se caracteriza por su equilibrado balance entre la calidad de la solución y el tiempo empleado en alcanzarla. Una vez más, será necesario dividir el enunciado en subconjuntos, en este caso en 10 rutas, con la peculiaridad de que dos de ellas no empezarán en el centro de Amazon DQA7, si no que partirán cada una de un pueblo, donde se habrán puesto sucursales.

7.2.1.Recorrido A

Cuenta con un total de 6 nodos divididos en 5 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7*, *Jerez de la Frontera*, *Cádiz*, *San Fernando*, *Conil de la Frontera*, *Vejer de la Frontera*']. La distancia total recorrida para este caso es de 92.5km.

7.2.2.Recorrido B

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 3 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7*, *Jerez de la Frontera*, *Cádiz*, *Puerto Real*']. La distancia total recorrida para este caso es de 59.4km.

7.2.3.Recorrido C

Cuenta con un total de 3 nodos divididos en 2 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7*, *Jerez de la Frontera*, *Chipiona*']. La distancia total recorrida para este caso es de 47.5km.

7.2.4.Recorrido D

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 3 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, 'Jerez de la Frontera', 'El Puerto de Santa María', 'Rota'*]. La distancia total recorrida para este caso es de 55.1km.

7.2.5.Recorrido E

Cuenta con un total de 3 nodos divididos en 2 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, 'Jerez de la Frontera', 'Sanlúcar de Barrameda'*]. La distancia total recorrida para este caso es de 39.5km.

7.2.6.Recorrido F

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 3 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, 'Jerez de la Frontera', 'Arcos de la Frontera', 'Ubrique'*]. La distancia total recorrida para este caso es de 90.8km.

7.2.7.Recorrido G

Cuenta con un total de 4 nodos divididos en 3 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, 'Jerez de la Frontera', 'Arcos de la Frontera', 'Villamartín'*]. La distancia total recorrida para este caso es de 71.4km.

7.2.8.Recorrido H

Cuenta con un total de 3 nodos divididos en 2 pueblos y el centro logístico de Amazon [*Amazon DQA7, 'Jerez de la Frontera', 'Los Barrios'*]. La distancia total recorrida para este caso es de 104.8km.

7.2.9.Recorrido I

Este es el primer caso en el cual se pone una sucursal en un pueblo, siendo aquí en Barbate. Cuenta con un total de 2 nodos [*Barbate, 'Tarifa'*]. La distancia total recorrida para este caso es de 52.6km.

7.2.10. Recorrido J

Este es el segundo caso en el cual se pone una sucursal en un pueblo, siendo aquí en Algeciras. Cuenta con un total de 3 nodos [*Algeciras*, *La Línea de la Concepción*, *San Roque*]. La distancia total recorrida para este caso es de 27.2km.

Finalmente, la suma de las diez rutas resultará en una distancia de 641.3km.

7.3. Comparación de resultados

Los resultados obtenidos por cada método difieren bastante entre sí, llegando a ser la distancia total recorrida por el método del Vecino más Próximo un 24.5% más baja que la recorrida con el método de Branch and Bound.

Esto en parte es debido a que en el caso de Branch and Bound se ha hecho uso de más camiones, teniendo que recorrer más veces los km iniciales, lo cual ha acabado penalizándole. El método Branch and Bound es un método más preciso que el del Vecino más Próximo, aunque en este caso haya resultado en una distancia mayor.

8 Conclusión

En este proyecto se ha querido exponer un problema real en la provincia de Cádiz al que se enfrenta Amazon, aunque es una situación que sufren todas las empresas de logística en el mundo.

Para ello se ha comenzado hablando de la empresa en sí, analizando como empezó y el recorrido de su fundador, su situación a día de hoy tras ser una de las grandes afectadas por el Covid-19, para bien al principio y negativamente posteriormente; y viendo cuáles son sus tipos de centros en los que operan y cuáles han sido las claves para llegar a ser una de las empresas mejores valoradas del mercado.

A continuación, se ha profundizado en el estado del arte del problema del viajante. Se destaca que la aparente sencillez del enunciado está lejos de la realidad y se narra su historia para poner en situación al lector. Se define su formulación y se exponen algunas de las posibles variantes que se presentan. Finalmente, se ven algunas aplicaciones que puede tener el enunciado a problemas reales.

Posteriormente, se ofrece una explicación de las distintas metodologías empleadas en la resolución del TSP, dando ejemplos de cada una de ellas. Encontramos los métodos exactos, los heurísticos y los metaheurísticos.

De estos métodos presentados se eligen dos, el del Vecino más Próximo y el de Branch and Bound. Se desarrollan con ejemplos para su mejor comprensión y, tras explicar como podemos adaptar el problema del TSP a la red logística de Amazon DQA7; se aplican a estos dos algoritmos a nuestro enunciado.

Existen una gran variedad de algoritmos aplicables al TSP, habiéndonos limitado en este proyecto a dos de los más conocidos.

Bibliografía

- [1] Brand Finance, Global 500 Report, 2023.
- [2] Per Bylund, Amazon's Lesson About Disruption: Rattle Any Market You Can, 29 Agosto 2017. [En línea]. Available: <https://www.entrepreneur.com/leadership/amazons-lesson-about-disruption-rattle-any-market-you-can/299129>.
- [3] IvyPanda, Amazon Company Analysis – Research Paper, 13 Febrero 2023. [En línea]. Available: <https://ivypanda.com/essays/company-analysis-of-amazon-com/>.
- [4] History of Amazon: From Garage Startup to The Largest E-Commerce Marketplace - Capitalism, 2020.
- [5] History.com Editors, Amazon opens for business, 26 Febrero 2023. [En línea]. Available: <https://www.history.com/this-day-in-history/amazon-opens-for-business>
- [6] Biography.com Editors, Jeff Bezos Biography, 22 Octubre 2022. [En línea]. Available: <https://www.biography.com/business-leaders/jeff-bezos>
- [7] Richard L Brandt, One click: Jeff bezos and the rise of amazon.com, Penguin, 2011.
- [8] Beetrack, Logística de Amazon: analizando al gigante, 2020.
- [9] Amazon, Our Facilities, 2023. [En línea]. Available: aboutamazon.com.
- [10] C. Martín, Amazon se frota las manos con el Covid, 30 Octubre 2020. [En línea]. Available: <https://www.hispanidad.com/confidencial/amazon-se-frota-manos-con>

covid-86duplica-beneficio-logra-record-en-segundo-trimestre-disparar-40-ventas_12020212_102.html.

- [11] Bruce Takefman, Amazon profits increased nearly 200% since start of COVID-19 pandemic, 6 Enero 2020. [En línea]. Available: <https://researchfdi.com/resources/articles/amazon-covid-19-pandemic-profits/>
- [12] Enrique Dans, Amazon y la resaca post-pandémica, 6 Enero 2023. [En línea]. Available: <https://www.enriquedans.com/2023/01/amazon-y-la-resaca-post-pandemica.html>
- [13] Traveling Sales Problem, Junio 2020. [En línea]. Available: <https://www.techtarget.com/whatis/definition/traveling-salesman-problem>
- [14] Jakub Štencek, «Traveling salesman problem», Mayo 2023.
- [15] Alexander Schrijver, «On the history of combinatorial optimization», 2005.
- [16] David L. Applegate, Robert E. Bixby, Vašek Chvátal, William Cook, Daniel G. Espinoza, Marcos Goycoolea, and Keld Helsgaun, «Certification of an optimal tsp tour through 85,900 cities, Operations Research Letters 37», 2009.
- [17] The Clay Mathematics Institute, The Clay Mathematics Institute, and The Clay Mathematics Institute, The millenium prize problems, 2014.
- [18] Universidad de Cádiz, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, El problema del viajante del comercio, Julio 2015.
- [19] Aida Calviño Martínez, Cooperación en los problemas del viajante (TSP) y de rutas de vehículos (VRP): una panorámica, Máster universitario en Técnicas Estadísticas, Universidad de Vigo, A Coruña y Santiago de Compostela.
- [20] Gregory Gutin and Abraham Punnen, «The traveling salesman problem and its variations of Combinatorial Optimization», 2007.

- [21] Rajesh Matai, Surya Prakash Singh and Murari Lal Mittal, «Traveling Salesman Problem: An Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches», 2010.
- [22] F. Herrera, «Introduccións a los algoritmos metaheurísticos,» Ciencias de la Computación e IA, 2006.
- [23] J. M. Framinan, R. Leisten y R. Ruiz García, «Exact Algorithms,» de Manufacturing Scheduling Systems: An Integrated View on Models, Methods and Tools, London, Springer London, 2014, pp. 191-216.
- [24] Traveling Sales Problem. [En línea]. Available: <https://www.math.cmu.edu/~bkell/21257-2014f/tsp.pdf>
- [25] Mirta Mataija, Franciska Jozić, Mirjana Rakamarić Šegi, Solving the travelling salesman problem using the Branch and Bound method. [En línea]. Available: <https://hrcak.srce.hr/file/236378>
- [26] Mochamad Suyudi Sukono, Mustafa Mamat, Abdul Talib Bon, Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, 26 Julio 2019. [En línea]. Available: <http://ieomsociety.org/pilsen2019/papers/469.pdf>
- [27] P. Rajarajeswari, D.Maheswari, International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT) – Volume 66 Issue 5, Mayo 2020.
- [28] Jesús Saéz Aguado, Resolución del Problema del Viajante de Comercio (TSP) y su variante con Ventanas de Tiempo (TSPTW) usando métodos heurísticos de búsqueda local, Junio 2015. [En línea]. Available: <https://core.ac.uk/download/211096990.pdf>
- [29] Betsy Atkins, Logistics In The E-Commerce Era, Mayo 2019. [En línea]. Available: <https://www.forbes.com/sites/betsyatkins/2019/05/06/logistics-in-the-e-commerce-era/>

Anexo I: Matriz de Costes

Municipio	Amazon DQA7	Jerez de la Frontera	Algeciras	Cádiz	San Fernando
Amazon DQA7	0	13.9	102	19.7	23.9
Jerez de la Frontera	13.9	0	97.8	34.9	34.9
Algeciras	102	97.8	0	104	99.8
Cádiz	19.7	34.9	104	0	13.6
San Fernando	23.9	34.9	99.8	13.6	0
El Puerto de Santa María	6.8	19.3	109	19.9	30.3
Sanlúcar de Barrameda	26.1	25.6	123	48.3	51.3
La Línea de la Concepción	114	110	19.3	115	112
Puerto Real	12.6	26.3	94	10.6	14.6
San Roque	108	104	13.1	109	106
Arcos de la Frontera	55.2	34.9	106	64	66.1
Rota	25.3	30.9	127	45.7	48.7
Los Barrios	95	90.9	8.8	96.2	92.9
Conil de la Frontera	50.9	61.9	85.7	46.1	33.3
Barbate	69.6	72.5	72.3	64.8	52
Chipiona	31.6	33.6	131	52	55.1
Tarifa	108	121	23.3	104	90.9
Ubrique	95.6	75.3	102	104	106
Vejer de la Frontera	59.9	70.9	75	55.1	42.3
Villamartín	73.2	52.9	145	82	84.1

Municipio	El Puerto de Santa María	Sanlúcar de Barrameda	La Línea de la Concepción
Amazon DQA7	6.8	26.1	114
Jerez de la Frontera	19.3	25.6	110
Algeciras	109	123	19.3
Cádiz	19.9	48.3	115
San Fernando	30.3	51.3	112
El Puerto de Santa María	0	23.4	121
Sanlúcar de Barrameda	23.4	0	133
La Línea de la Concepción	121	133	0
Puerto Real	13.3	39.5	105
San Roque	114	127	7.9
Arcos de la Frontera	54.7	65.2	138
Rota	21.9	21.4	138
Los Barrios	102	114	20.2
Conil de la Frontera	57.1	77.9	95.6
Barbate	75.8	96.6	90.5
Chipiona	28.2	10.5	142
Tarifa	115	135	41.7
Ubrique	95.1	106	113
Vejer de la Frontera	66	86.9	84.9
Villamartín	72.7	83.3	156

Municipio	Puerto Real	San Roque	Arcos de la Frontera	Rota	Los Barrios
Amazon DQA7	12.6	108	55.2	25.3	95
Jerez de la Frontera	26.3	104	34.9	30.9	90.9
Algeciras	94	13.1	106	127	8.8
Cádiz	10.6	109	64	45.7	96.2
San Fernando	14.6	106	66.1	48.7	92.9
El Puerto de Santa María	13.3	114	54.7	21.9	102
Sanlúcar de Barrameda	39.5	127	65.2	21.4	114
La Línea de la Concepción	105	7.9	138	138	20.2
Puerto Real	0	99.3	54.9	38	86.6
San Roque	99.3	0	112	133	14.8
Arcos de la Frontera	54.9	112	0	69.6	98.7
Rota	38	133	69.6	0	120
Los Barrios	86.6	14.8	98.7	120	0
Conil de la Frontera	41.5	90.2	95.1	75.1	76.6
Barbate	60.2	85.1	77.6	93.8	71.5
Chipiona	44.4	137	72.3	17.5	123
Tarifa	99.1	36.4	117	133	31.3
Ubrique	95.3	108	42	111	94.3
Vejer de la Frontera	50.5	79.5	72	84.1	65.8
Villamartín	72.9	151	22.6	88.4	137

Municipio	Conil de la Frontera	Barbate	Chipiona	Tarifa	Ubrique	Vejer de la Frontera
Amazon DQA7	50.9	69.6	31.6	108	95.6	59.9
Jerez de la Frontera	61.9	72.5	33.6	121	75.3	70.9
Algeciras	85.7	72.3	131	23.3	102	75
Cádiz	46.1	64.8	52	104	104	55.1
San Fernando	33.3	52	55.1	90.9	106	42.3
El Puerto de Santa María	57.1	75.8	28.2	115	95.1	66
Sanlúcar de Barrameda	77.9	96.6	10.5	135	106	86.9
La Línea de la Concepción	95.6	90.5	142	41.7	113	84.9
Puerto Real	41.5	60.2	44.4	99.1	95.3	50.5
San Roque	90.2	85.1	137	36.4	108	79.5
Arcos de la Frontera	95.1	77.6	72.3	117	42	72
Rota	75.1	93.8	17.5	133	111	84.1
Los Barrios	76.6	71.5	123	31.3	94.3	65.8
Conil de la Frontera	0	26.2	86.5	65.1	134	16.5
Barbate	26.2	0	105	52.6	120	12.3
Chipiona	86.5	105	0	138	112	89.7
Tarifa	65.1	52.6	138	0	125	54.2
Ubrique	134	120	112	125	0	113
Vejer de la Frontera	16.5	12.3	89.7	54.2	113	0
Villamartín	111	120	89.7	168	31.8	120

Municipio	Villamartín
Amazon DQA7	73.2
Jerez de la Frontera	52.9
Algeciras	145
Cádiz	82
San Fernando	84.1
El Puerto de Santa María	72.7
Sanlúcar de Barrameda	83.3
La Línea de la Concepción	156
Puerto Real	72.9
San Roque	151
Arcos de la Frontera	22.6
Rota	88.4
Los Barrios	137
Conil de la Frontera	111
Barbate	120
Chipiona	89.7
Tarifa	168
Ubrique	31.8
Vejer de la Frontera	120
Villamartín	0

Anexo II: Código de programación

Calculate and plot the minimum spanning tree of the graph on top of the graph. T contains the same nodes as G, but a subset of the edges.

```
s = [1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 6 6 6 6 7 8 8 8 9 10 11 11 12 14 15 15 17];
t = [2 7 13 11 16 6 4 17 13 8 9 5 6 14 9 12 7 16 16 10 13 17 14 13 18 20 16 19 19 17 19];
weights = [13.9 25.6 90.9 34.9 33.6 19.3 34.9 102 8.8 19.3 10.6 13.6 19.9 13.6 13.3 21.9 23.4 28.2 10.5 7.9 20.2 41.7 41.5 14.8 42 22.6 17.5 16.5 12.3 52.6 54.2];
G = graph(s,t,weights);
p = plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight);

[T,pred] = minspantree(G);
highlight(p,T)
```

```
s = [1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 6 6 6 6 7 8 8 8 9 10 11 11 12 14 15 15 17];
t = [2 7 13 11 16 6 4 17 13 8 9 5 6 14 9 12 7 16 16 10 13 17 14 13 18 20 16 19 19 17 19];
G = graph(s,t);
x = [0 0.5 -0.5 -0.5 0.5 0 1.5 0 2 -1.5 -2];
y = [0 0.5 0.5 -0.5 -0.5 2 0 -2 0 0 0];
plot(G,'XData',x,'YData',y)

TR = shortestpathtree(G,'all',10);
plot(TR)
```

