

Estabilidad en un sistema dinámico del mercado actual y potencial de las organizaciones (I)

F. Velasco^a, P. Nadal^a, L. González^a, J.A. Ortega^b, M.L. Vilchez^c, F.J. Cuberos^d

^a Dept. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla (España)

^b Dept. Lenguajes y Sistemas Informáticos, Universidad de Sevilla (España)

^c Dept. Economía General y Estadística, Universidad de Huelva (España)

^d Dept. Planificación-Radio Televisión de Andalucía, Sevilla (Spain)

{ velasco, pnadal, luisgon } @us.es, ortega@lsi.us.es, lobato@uhu.es, fjcuberos@rtva.es

Abstract

En este trabajo estudiamos la existencia de puntos fijos en un modelo dinámico económico, en tiempo discreto, que relaciona el mercado actual y potencial de una colectividad cualquiera. Una vez establecida la existencia y unicidad de un punto fijo, realizamos el estudio de su estabilidad local y encontramos, una región en un plano de variabilidad de los parámetros, que se denomina plano paramétrico, donde se verifica una condición necesaria y suficiente de estabilidad. A continuación, clasificamos el punto fijo según la región del plano paramétrico en la que esté situado.

Palabras clave: Sistemas dinámicos. Estabilidad, Matrices de Schur

1 Introducción

Si hacemos referencia a una organización en cualquier sector económico, encontramos que un determinado producto del mercado posee, en un instante de tiempo, una cuota de participación, o lo que es lo mismo, tiene un determinado nivel de demanda, que es consecuencia de las compras que realizan sus clientes actuales. A su vez existe para esta organización un mercado de clientes potenciales, compuesto por aquellos elementos que compran a organizaciones competidoras y por otros que teóricamente podrían ser clientes del producto pero que no lo son.

El mercado actual de la organización, en cada instante de tiempo, tendrá un determinado nivel que será consecuencia de las relaciones de intercambio con el entorno y del propio esfuerzo de marketing que se realice. Los efectos positivos se traducen, para la organización, en un incremento de la demanda o lo que es lo mismo de un mayor acercamiento al mercado potencial. Este movimiento entre mercado potencial y mercado actual, en cada instante de tiempo, constituirá un modelo dinámico definido básicamente por las variaciones en el crecimiento, positivo o negativo, de clientes actuales del producto del mercado y por las variaciones en el crecimiento, positivo y negativo, de los clientes potenciales de la organización.

La organización de este trabajo es la siguiente: En la sección segunda se hace el desarrollo del modelo a estu-

diar. Dicho modelo surge del estudiado por diversos autores en tiempo continuo y a continuación nosotros lo discretizamos, justificando el porqué de esta discretización. En la sección tercera realizamos el estudio teórico de la estabilidad del modelo, obteniendo un Teorema que nos indica la región paramétrica en la que queda dividida nuestro espacio paramétrico, conjuntamente con el comportamiento del sistema en cada región. En la sección última exponemos las conclusiones y trabajos futuros a realizar para este modelo económico.

2 El modelo

Según Feichtinger [Feichtinger, 1992] el mercado se divide en clientes potenciales y clientes actuales de un determinado producto del mercado y además, el número de clientes potenciales que comprarán el producto y se harán clientes en algún intervalo corto de tiempo es proporcional al número actual de compradores potenciales, al número actual de clientes y a la longitud del intervalo. A esta constante de proporcionalidad se le llama *tasa de contacto global*. Esta tasa de contacto se puede incrementar por un aumento en los gastos de publicidad. Por simplificar, se identifica la tasa de contacto con los gastos de publicidad en un momento t y se representa por $a(t)$.

Se asume, además, que los clientes actuales cambian a una marca rival en una proporción b . Las subidas de ventas de artículos semejantes de otras marcas o firmas afines influyen sobre el valor del parámetro. Ya que los individuos pueden volver al producto original, permanecerán en el grupo de los clientes potenciales.

Por último, se considera que algunos clientes dejan el mercado para siempre (por ejemplo, por muerte o emigración) a una tasa constante e y que hay un flujo continuo de nuevos clientes que entran en el mercado desde alguna fuente, tal por un aumento de ingresos, alguna otra forma de publicidad o cambios demográficos. De este modo, los individuos fluyen dentro del mercado con una tasa de input k .

Estas relaciones se pueden resumir en los diagramas causales y el diagrama de Forrester cuyas gráficas pueden observarse en la Figura 1 y la Figura 2⁽¹⁾.

Si se representa por $x(t)$ el número de compradores potenciales de una marca específica en un momento t y por $y(t)$

⁽¹⁾Estas gráficas han sido obtenidas utilizando VENSIM [Vensim, 1998]

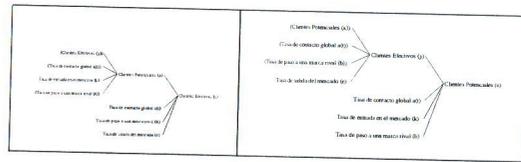


Figure 1: Diagrama causal de los clientes actuales y potenciales

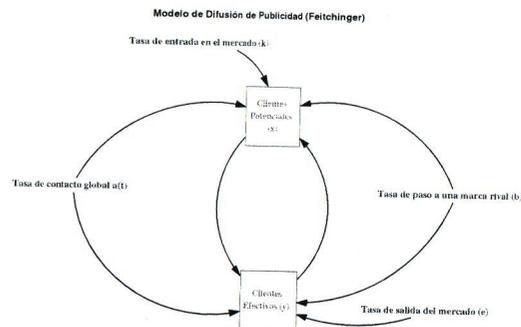


Figure 2: Diagrama de Forrester del primer modelo de Feitchinger

el número de clientes actuales de la marca en ese mismo momento, la variación en el crecimiento (positivo o negativo) del mercado actual de clientes vendrá definida por aquellas personas que son atraídas al producto del mercado de la organización, debido al efecto que produce el contacto de las personas que componen el mercado actual con aquellas que constituyen el mercado potencial, es decir, $a(t)x(t)y(t)$. Luego, aquellas personas que no compran el producto, pero sí son atrapadas en el mercado actual, debido al efecto disuasorio de las personas que son componentes de ese mercado actual de la organización. Lógicamente, a ese poder de atracción habrá que restarle el número de clientes actuales que dejan el mercado de la organización para pasar al mercado potencial $by(t)$, más los que dejan de ser clientes actuales por muerte o emigración $ey(t)$.

Por otra parte, la variación en el crecimiento (positivo o negativo) del mercado potencial, vendrá definida por aquellas personas que se incorporan al mercado potencial del producto, k , más aquellos clientes actuales de la organización que pasan a ser clientes potenciales de la misma, $by(t)$, menos los clientes potenciales que pasan al mercado actual del producto $a(t)x(t)y(t)$.

Si se denota por $\dot{x}(t)$ la variación en el crecimiento del número de clientes potenciales y por $\dot{y}(t)$ la variación en el crecimiento de los clientes actuales, el dinamismo entre lo potencial y lo actual se puede establecer por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k - a(t)x(t)y(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = a(t)x(t)y(t) - by(t) - ey(t) \end{cases} \quad (1)$$

Ahora bien, se puede realizar una segunda consideración sobre este modelo que consiste en asumir un precio de ventas

constante para el producto del mercado y una tasa repetida de ventas para el cliente actual. Bajo estas consideraciones, si se le llama a , a la *tasa de contacto uno a uno*, se tiene que la tasa de publicidad (que se había identificado con la tasa de contacto global) es proporcional al número de clientes actuales, siendo a , esa constante de proporcionalidad. Aparece, por tanto, nuevos diagramas causales que pueden observarse en la Figura 3 y el consiguiente diagrama de Forrester que se puede observar en la Figura 4.

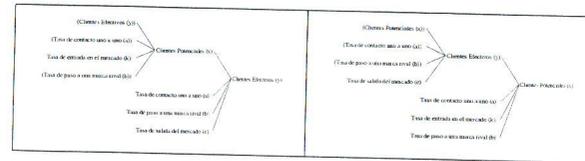


Figure 3: Diagrama causal de los clientes actuales y potenciales

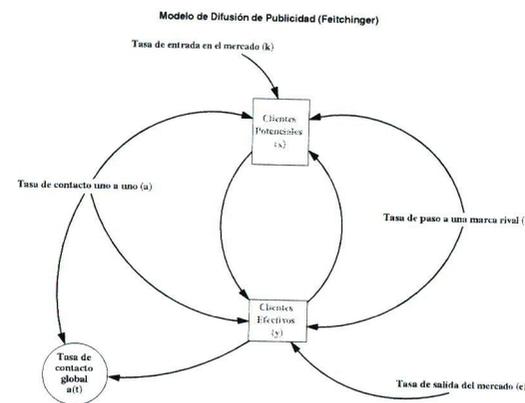


Figure 4: Diagrama de Forrester del segundo modelo del Feitchinger.

Analíticamente, se puede escribir que

$$a(t) = ay(t) \quad (2)$$

y combinando (1) y (2), se obtiene el modelo no lineal con el que Feitchinger estableció la relación dinámica entre el mercado potencial y el mercado actual:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k - ax(t)y(t)^2 + by(t) \\ \dot{y}(t) = ax(t)y(t)^2 - by(t) - ey(t) \end{cases} \quad (3)$$

con $a, b, k, e \geq 0$.

Posteriormente, Landa y Velasco(2004)[Landa. and Velasco, 2004] completaron el modelo al considerar, en el mismo, la respuesta que se obtiene debido al esfuerzo de publicidad realizado por la organización sobre el mercado potencial, en el caso general de que dicho esfuerzo vaya encaminado a aumentar la demanda del producto del mercado. Si se

le llama c al esfuerzo de publicidad y se considera la *información entre clientes*, $ax(t)y(t)$, como una variable auxiliar, aparecen los diagramas causales para los clientes actuales y potenciales que pueden observarse en la Figura 5 y el diagrama de Forrester queda establecido en la Figura 6.

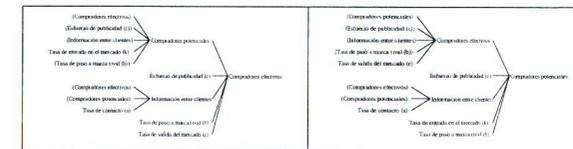


Figure 5: Diagrama causal de los clientes actuales y potenciales en el modelo Landa-Velasco.

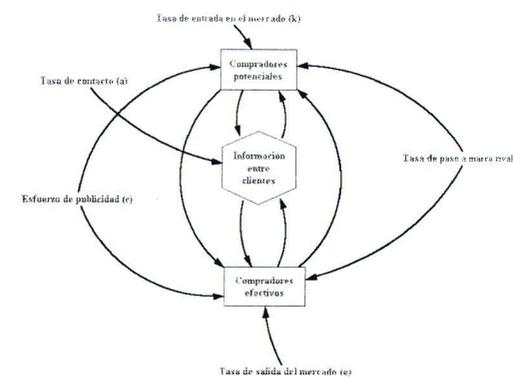


Figure 6: Diagrama de Forrester del modelo Landa-Velasco.

Por otra parte, ya que el esfuerzo de publicidad va encaminado a atraer hacia el mercado actual elementos que pertenecen al mercado potencial, en la ecuación que describe la variación del mercado potencial, debe restarse esa respuesta. Por el contrario, en la ecuación que describe la variación del mercado actual, la atracción del esfuerzo de publicidad sobre el mercado potencial debe considerarse en sentido positivo, ya que va dirigido a incrementar el número de clientes actuales del producto. En definitiva, el modelo establecido por Landa y Velasco[Landa. and Velasco, 2004] queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k - ax(t)y(t)^2 + by(t) - cx(t) \\ \dot{y}(t) = ax(t)y(t)^2 - by(t) - ey(t) + cx(t) \end{cases}$$

con $c \geq 0$.

En la actualidad hemos observado que en la realidad hay pocos fenómenos de este tipo que se producen en tiempo continuo, y por lo tanto los datos reales de ventas se ajustarían mejor si los cambios del mercado se realizaran en unidades de tiempo enteras y no reales, es decir, si el modelo se tratase como un modelo dinámico pero en tiempo discreto.

Por lo tanto, hemos discretizado el modelo anterior y hemos obtenido que la relación dinámica discreta entre el

mercado potencial y el actual viene definida:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + k - ax_n y_n^2 + by_n - cx_n \\ y_{n+1} = y_n + ax_n y_n^2 - by_n - ey_n + cx_n \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, y $a, b, c, k, e \geq 0$.

3 Existencia de puntos fijos y análisis de la estabilidad local en el mercado actual y potencial.

El mercado actual y potencial de una colectividad cuando evolucionan a lo largo del tiempo, tienden a encontrar momentos en el que quedan atrapados en unos determinados niveles, que hacen que permanezcan constantes o aproximadamente constantes cerca de esos niveles. Así, es normal encontrar, en entornos estables, que las sociedades mantengan sus cuotas de mercado en equilibrio, o casi en equilibrio, durante determinados periodos de tiempo. De ahí, que estemos interesados en estudiar bajo que condiciones la relación dinámica expresada en el sistema (4) existente entre los dos mercados, potencial y actual, alcanza algún equilibrio.

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + k - ax_t y_t^2 + by_t - cx_t \\ y_{t+1} = y_t + ax_t y_t^2 - by_t - ey_t + cx_t \end{cases} \quad (4)$$

El análisis del modelo anterior nos permite enunciar el siguiente resultado.

Proposición 3.1 El sistema (4) tiene un único punto fijo cuando los parámetros son positivos.

Demostración:

Los puntos fijos (o de equilibrio) (x, y) del sistema (4) son las soluciones del conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x + k - axy^2 + by - cx \\ y = y + axy^2 - by - ey + cx \end{cases} \quad (5)$$

Hay un único punto⁽²⁾ que verifica las ecuaciones de (5) y que viene dado por

$$\begin{cases} x^* = \frac{e(b+e)k}{ce^2 + ak^2} \\ y^* = \frac{k}{e} \end{cases} \quad (6)$$

Dicha solución no presenta ningún tipo de inconsistencia ya que todos los parámetros del sistema representan cantidades positivas, entonces

$$ce^2 + ak^2 \neq 0$$

Además, ambas coordenadas no nulas y positivas por lo que el equilibrio, en principio, tiene sentido económico para cualesquiera valores (positivos) que se le asignen a los parámetros. Δ

Una vez establecida la existencia de un punto fijo para el sistema (4), estudiamos su estabilidad local, es decir, cuando el

⁽²⁾Todos los cálculos simbólicos se han realizado mediante las bases de Gröebner.

punto fijo se comporta como un sumidero o como una fuente. Para ello vamos a realizar el análisis del valor del módulo de los multiplicadores de la matriz Jacobiana del sistema 4 en dicho punto.

Así, consideramos el sistema lineal asociado [Kuznetsov, 1998], [Gukenheimer and Holmes, 1993]

$$\dot{x} = Jx$$

donde J representa la matriz Jacobiana del sistema 4 evaluada en el punto fijo (6), $x = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$.

Dicha matriz tiene la expresión general:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - c - ay^2 & b - 2axy \\ c + ay^2 & 1 - b - e + 2axy \end{pmatrix}$$

El polinomio característico $P_2(\mu)$ asociado a la matriz J viene dado por

$$P_2(\mu) = \mu^2 + d_1\mu + d_0$$

donde

$$d_1 = -2 + b + c + e + \frac{ak^2}{e^2} - \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2}$$

y

$$d_0 = 1 - b - c - e + ce - \frac{ak^2}{e^2} + \frac{ak^2}{e} + \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2}$$

Con el fin de hacer más manejables estas expresiones vamos a realizar un cambio en la nomenclatura. Así, si llamamos

$$A^* = b + c + e + \frac{ak^2}{e^2} - \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2} \quad (7)$$

tenemos que

$$d_1 = A^* - 2$$

y

$$d_0 = 1 - A^* + ce + \frac{ak^2}{e}$$

Si, ahora, realizamos los cambios

$$B = ce + \frac{ak^2}{e} \quad (8)$$

y

$$A = A^* - 2 \quad (9)$$

Obtenemos, finalmente, que

$$d_1 = A$$

y

$$d_0 = B - A - 1$$

En resumen, el polinomio característico viene dado por la expresión

$$\mu^2 + A\mu + (B - A - 1) = 0 \quad (10)$$

y los multiplicadores asociados son

$$\mu_1 = \frac{-A + \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \quad (11)$$

$$\mu_2 = \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \quad (12)$$

Una vez realizadas estas expresiones, enunciamos el siguiente resultado.

Proposición 3.2 (Condición necesaria y suficiente de estabilidad) El punto fijo (6) del sistema (4) es estable si y solo si está situado en la región del plano paramétrico AB , limitada por las rectas $B = 0$, $B = 2A$ y $B = A + 2$

Demostración:

Para estudiar cuando los multiplicadores están dentro del círculo unidad vamos a utilizar la condición necesaria y suficiente dada por Schur [Gandolfo, 1997], [Nadal, 2004]⁽³⁾ y que se basa en las condiciones impuestas a las matrices de Schur formadas por los coeficientes del polinomio característico.

En el caso de dimensión dos y si notamos el polinomio característico por $c_0\mu^2 + c_1\mu + c_2$, la condición de Schur nos dice que $|\mu_1| < 1$ y $|\mu_2| < 1$ cuando se verifiquen simultáneamente

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &> 0 \\ c_0 - c_1 + c_2 &> 0 \\ \det(S_{11} + S_{21}) = c_0 + c_2 &> 0 \\ \det(S_{11} - S_{21}) = c_0 - c_2 &> 0 \end{aligned} \quad (13)$$

En nuestro caso particular

$$c_0 = 1; \quad c_1 = A; \quad c_2 = B - A - 1; \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13) y considerando que B es siempre positivo, llegamos a la conclusión que el punto fijo es estable siempre que se verifique que

$$2A < B < A + 2; \quad B > 0$$

△

El siguiente paso es clasificar el tipo de punto fijo según los valores de los parámetros. Para ello, necesitamos saber no solo si los multiplicadores están dentro o fuera del círculo unidad, sino si son reales (en cuyo caso el punto fijo es un nodo o un punto de silla) o complejos conjugados (el punto fijo es un foco).

Es obvio, que los multiplicadores son reales o complejos dependiendo de que el discriminante asociado al polinomio $P_2(\mu)$:

$$\Delta = (A+2)^2 - 4B$$

sea mayor o igual a cero, o negativo. En el plano paramétrico AB el discriminante se anula sobre la parábola

$$B = \frac{1}{4}(A+2)^2 \quad (15)$$

Este hecho nos permite enunciar los siguientes resultados

Proposición 3.3 Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado sobre la parábola (15) entonces se tiene que:

- El punto fijo es un nodo estable si $-2 < A < 2$
- El punto fijo es un nodo inestable si $A < -2$ o $A > 2$

⁽³⁾Las matrices S_{ij} son las matrices de Schur y por \det , indicamos el determinante de la matriz correspondiente.

Demostración:

En efecto, si el punto fijo está sobre la parábola (15) los multiplicadores son

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{-A}{2}$$

y el resultado es claro. △

Proposición 3.4 Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región del plano paramétrico $4B < (A+2)^2$, entonces:

- Es un nodo inestable si $B > A + 2$ siendo $A < -2$ (región I del plano paramétrico)
- Es un nodo estable si $2A < B < A + 2$ (región II del plano paramétrico)

Demostración:

Si el punto fijo pertenece a la región del plano paramétrico $4B < (A+2)^2$, entonces los multiplicadores son reales, por lo que el punto fijo será un nodo o un punto de silla.

Aplicando la condición necesaria y suficiente de estabilidad tenemos que cuando $2A < B < A + 2$, el punto fijo es un nodo estable.

Vamos a comprobar que si $B > A + 2$ y $A < -2$, ambos multiplicadores están fuera del círculo unidad:

$$|\mu_1| = \left| \frac{-A + \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \right| > \left| \frac{-A}{2} \right| > 1$$

ya que $A < -2$. Por otra parte,

$$|\mu_2| = \left| \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \right| > \left| \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2}}{2} \right| = 1$$

ya que al ser $B > A + 2$, el numerador de μ_2 es siempre positivo. Por lo tanto, el punto fijo es un nodo inestable. △

Proposición 3.5 Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región del plano paramétrico $4B < (A+2)^2$, entonces es un punto de silla:

- Si $A < 2$ y $B < 2A$ (región III del plano paramétrico), o
- Si $A > 2$ (región IV del plano paramétrico)

Demostración:

Si el punto fijo pertenece a la región del plano paramétrico $4B < (A+2)^2$, entonces los multiplicadores son reales por lo que el punto fijo es un nodo o un punto de silla. Vamos a comprobar que en los dos casos señalados solo hay un multiplicador dentro del círculo unidad.

Si $A > 2$, entonces:

$$|\mu_1| = \left| \frac{-A + \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \right| < \left| \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2}}{2} \right| = 1$$

$$|\mu_2| = \left| \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \right| > \left| \frac{-A}{2} \right| > 1$$

Si $A < 2$ y $B < 2A$, entonces $|\mu_1| < 1$, sin más que razonar como en el caso anterior. Por otra parte,

$$|\mu_2| = \left| \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \right| > \left| \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 8A}}{2} \right| > |1 - A| > 1$$

Por lo tanto, en ambos casos el punto fijo es un punto de silla. △

Proposición 3.6 Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región del plano paramétrico $4B > (A+2)^2$, entonces:

- Es un foco estable si $2A < B < A + 2$ (región V del plano paramétrico)
- Es un foco inestable si $B > A + 2$ (región VI del plano paramétrico)

Demostración:

Si el punto fijo pertenece a la región del plano paramétrico $4B > (A+2)^2$, entonces los multiplicadores son complejos conjugados, lo que nos indica que el punto fijo es un foco y por lo tanto, solo nos queda analizar su estabilidad.

Sin más que aplicar de nuevo la condición necesaria y suficiente de estabilidad se obtiene el resultado enunciado. △

En la Figura 7 observamos la representación gráfica de las proposiciones anteriores.

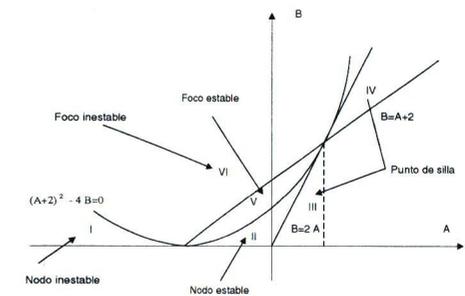


Figure 7: Clasificación del Punto Fijo.

Con los resultados obtenidos en las proposiciones anteriores enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 3.7 (Clasificación del punto fijo) Dado el plano paramétrico AB con A y B dados por las expresiones (7), (8) y (9), se verifica:

I. Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región paramétrica $4B < (A+2)^2$, entonces:

- Es un nodo inestable cuando $A < -2$
- Es un nodo estable cuando $2A < B < A + 2$
- Es un punto de silla cuando $A > 2$, o $A < 2$ y $B < 2A$

- II. Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región paramétrica $4B > (A + 2)^2$, entonces:
- Es un foco estable cuando $2A < B < A + 2$
 - Es un foco inestable cuando $B > A + 2$
- III. Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado sobre la parábola $4B = (A + 2)^2$, entonces:
- Es un nodo estable si $-2 < A < 2$
 - Es un nodo inestable si $A < -2$ o $A > 2$

4 Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha presentado un modelo dinámico económico en tiempo discreto en el que se estudia la estabilidad de dicho sistema. Para ello se ha encontrado una región paramétrica dependiente de dos parámetros A y B. Estos parámetros, dependen de los coeficientes del polinomio característico y estos, a su vez, dependen de los coeficientes del modelo dinámico. La región paramétrica queda dividida en seis subregiones. En la subregiones I tenemos un nodo estable y en la segunda subregión un nodo inestable. La región I viene dada por la parábola $(A+2)^2 - 4B = 0$ y el semieje negativo $A = 0$. La segunda región viene dada por la parábola $(A + 2)^2 - 4B = 0$ y las rectas $A = 0$ y $B = 2A$. En las regiones III y IV, tenemos puntos fijos que se comportan como puntos de silla. La subregión V es la que contiene a los focos estables, pasando a ser inestables en la subregión VI.

El trabajo siguiente a realizar es el estudio al pasar por las fronteras de las regiones, en las que se producen los cambios de estabilidad. En el siguiente trabajo se estudian las bifurcaciones de codimensión 1 y 2 surgidas en este modelo [Velasco et al., 2005].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente soportado por las acciones coordinadas ACC-944-SEJ-2002, ACC-944-SEJ-2003 de la Junta de Andalucía. Así mismo ha sido soportado por la acción "Red de investigación sobre Diagnóstico y Razonamiento Cualitativo (DPI2001-4404-E)".

References

- [Feichtinger, 1992] G. Feichtinger. Hopf bifurcation in an advertising diffusion model. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 17:401-411, 1992.
- [Gandolfo, 1997] Giancarlo Gandolfo. *Economic Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, third edition, 1997.
- [Guckenheimer and Holmes, 1993] John Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1993.
- [Landa and Velasco, 2004] Landa J. and Velasco F. Análisis dinámico del mercado actual y potencial de las organizaciones. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 13(1):131-140, 2004.
- [Kuznetsov, 1998] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, second edition, 1998.
- [Nadal, 2004] P. Nadal. *Bifurcaciones en modelos dinámicos discretos: Una aplicación al mercado cervecero*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 2004.
- [Velasco et al., 2005] F. Velasco, P. Nadal, L. González, J.A. Ortega, M.L. Vilchez, and F. J. Cuberos. Bifurcaciones locales en el mercado actual y potencial: El mercado cervecero español (II). *JARCA(2005)*, (-), 2005.
- [Vensim, 1998] Vensim. Vensim dss32 version 3.0b. Technical report, Vensim Product Center., <http://www.vensim.com>. Ventana Systems, Inc.149 Waverley Street Belmont, MA 02178USA, 1998.