

# Un modelo dinámico económico continuo. Estabilidad y bifurcaciones de codimensión 1 y 2.

F. Velasco<sup>a</sup>, L. González<sup>a</sup>, J.A. Ortega<sup>b</sup>, J.A. Álvarez<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Grupo COSDE. Dpto. Economía Aplicada I

<sup>b</sup>Dpto. Sistemas y Lenguajes Informáticos  
Universidad de Sevilla

Avda. Ramón y Cajal, n 1. C.P. 41018, Sevilla

{velasco, luisgon}@us.es, ortega@lsi.us.es, jaalvarez@us.es

**Resumen:** En este trabajo establecemos las condiciones para la estabilidad y existencia de bifurcaciones de codimensión 1 y 2 en un modelo dinámico continuo aplicado al mercado actual y potencial de las organizaciones. Realizamos el estudio paramétrico del modelo y encontramos las regiones paramétricas de la estabilidad de los puntos de equilibrio. La obtención de las bifurcaciones lo hacemos de forma simbólica. Para ello se han de cumplir un conjunto de condiciones en cada valor de bifurcación. Las bifurcaciones que se obtienen en este modelo son la bifurcación de Hopf, que es de codimensión uno y las bifurcaciones que surgen de ésta de codimensión dos, la de Bautin y la de Bogdanov-Takens.

**Palabras clave:** Estabilidad, Bifurcaciones, ciclos límite.

**Clasificación JEL:** C61, C62.

## 1 Introducción

En [Landa y Velasco, 2004], se expone como las organizaciones mercantiles pueden mantener sus cuotas de mercado en equilibrio durante determinados periodos de tiempo. Esto no significa que la solución de equilibrio tenga que durar de manera permanente, ya que la estrategia de cada organización competitiva, en un mercado de referencia y para un producto de ese mercado cualquiera, ha de ir encaminada a conseguir la cuota de mercado más elevada posible; pero no es menos cierto que cualquier comportamiento competitivo encaminado a conseguir ese objetivo, será respondido por las sociedades competidoras que defenderán sus respectivas posiciones de mercado. Un entorno agresivo, un esfuerzo de marketing mal orientado u otras causas desestabilizadoras, hacen que las posiciones conseguidas por cada organización competitiva no permanezcan, necesariamente, en equilibrio estable. Para cualquier organización es importante conocer con antelación si su devenir, en un entorno dado y para un producto del mercado, va a pasar por aumentos o disminuciones de su cuota de mercado, de forma cíclica, o en su caso si no va a ser así. Podemos ver en [Gandolfo, 1997], [Lorenz, 1997], [Vilchez y Velasco, 1999], [Velasco *et al.*, 2002], [Vilchez *et al.*, 2003], [Landa y Velasco, 2004], [Vilchez *et al.*, 2004], [Bosi *et al.*, 2005], [Haunschmiedet *et al.*, 2005], [He y FH, 2005], [Li, 2005], [Wagener, 2005], [Wei-Bin-Zhang, 2006], [Magnitskii y Siderov, 2006], [Velasco *et al.*, 2007] entre otros, ejemplos en los que se estudian bifurcaciones en estos modelos, en los que surgen ciclos límite que acaban perdiendo su estabilidad y que en algunos casos describen comportamientos de duplicación del período como antesala a la obtención de atractores caóticos ([Magnitskii y Siderov, 2002], [Magnitskii y Siderov, 2005], [Dernov y Magnitskii, 2005]). Es importante, por tanto, conocer la estabilidad o inestabilidad de los ciclos que pueden aparecer en nuestro modelo.

Es por ello por lo que vamos a analizar, bajo qué condiciones, si se realizan pequeñas variaciones en los parámetros del modelo [Landa y Velasco, 2004], éstas van a implicar que el comportamiento del mismo sea cualitativamente diferente en un entorno del punto fijo. En [Landa y Velasco, 2004] se hace un estudio numérico acerca de las bifurcaciones de codimensión 1 y 2. Ahora bien, no se hace un estudio en forma simbólica de la estabilidad y de las bifurcaciones del modelo, con lo que es posible mejorar el estudio hecho. El resto del artículo está estructurado como sigue: en la sección segunda se presenta el modelo en tiempo continuo propuesto por [Feichtinger, 1992] y ampliado en [Landa y Velasco, 2004]. En la sección tercera, obtenemos condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del único equilibrio del sistema, las cuales nos permiten determinar la naturaleza del mismo. En la sección cuarta se hace una breve exposición acerca de los conceptos necesarios, tales como el de bifurcación y de codimensión en un sistema dinámico [Kuznetsov, 2004], para luego estudiar las bifurcaciones de codimensión 1 y 2 presentes en el modelo. Hemos de hacer notar que todo el trabajo se ha realizado de forma simbólica, con lo que el trabajo hace que se pueda particularizar para conjuntos de valores de los parámetros del modelo. En este caso hemos estudiado uno de los parámetros, indicando cómo se puede hacer para el resto de los parámetros. Se finaliza con una sección de conclusiones y trabajo futuro.

## 2 Modelo dinámico

Si hacemos referencia a una organización en cualquier sector económico, en su mercado de referencia, para un determinado producto-mercado, encontramos que la misma, en un instante del tiempo, posee una cuota de participación, o lo que es lo mismo, en términos absolutos, detenta un determinado nivel de demanda, consecuencia de las compras que realizan sus clientes actuales. A su vez existe para esta organización un mercado de clientes potenciales, compuesto por aquellos elementos que compran a organizaciones competidoras y por aquellos otros que teóricamente podrían ser elementos del producto-mercado pero que por las circunstancias que sean, no lo son. En definitiva, mercado potencial definido por clientes actuales de otras organizaciones del mismo mercado de referencia y del mismo producto-mercado y por clientes estrictamente potenciales del propio sector. El mercado actual de la organización en cada instante del tiempo detentará un determinado nivel, consecuencia de los efectos del entorno sobre las relaciones de intercambio y del propio esfuerzo de marketing que se realice. Los efectos positivos se traducen para la organización en un incremento de demanda y por tanto en una reducción del denominado grado de expansibilidad de la misma, o lo que es lo mismo de un mayor acerca-

miento al mercado potencial actual. Este movimiento entre mercado potencial actual y mercado actual, instante a instante del tiempo, constituirá un modelo dinámico definido básicamente por las variaciones en el crecimiento (positivo o negativo) de clientes actuales del producto-mercado y por las variaciones en el crecimiento (positivo o negativo) de clientes potenciales de la organización. El sistema dinámico que puede describir la relación entre los clientes actuales y potenciales de una determinada marca, siguiendo a [Feichtinger, 1992] se describe en el modelo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k - a(t)x(t)y(t) + \beta y(t) \\ \dot{y}(t) = a(t)x(t)y(t) - \delta y(t) \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x(t)$  es el número de compradores potenciales de una marca específica en un momento  $t$ , e  $y(t)$  el número de usuarios de la marca en ese momento;  $a(t)$  es la tasa de contacto entre clientes actuales y potenciales,  $\beta$  es la proporción de salida de los clientes actuales al mercado potencial,  $\epsilon$  es la tasa de desaparición de la población y además expresamos  $\delta = \beta + \epsilon$  y el parámetro  $k$  nos indica la tasa de entrada en el conjunto de clientes potenciales debido a causas tales como aumento en el poder adquisitivo. La variación de los clientes actuales  $\dot{y}(t)$ , viene dada en la segunda ecuación de (1) directamente proporcional a las personas que son atraídas al producto-mercado de la organización debido al efecto que produce el contacto de las personas que componen el mercado actual y las que constituyen el mercado potencial  $a(t)x(t)y(t)$ . Además hay que sustraer el número de clientes actuales que dejan el producto mercado de la organización por pasar al mercado potencial actual, más aquellos que dejan de ser clientes actuales por diversos motivos tales como muerte, bajada en el poder adquisitivo, etc.,  $\delta y(t)$ .

De forma similar, la variación de los compradores potenciales  $\dot{x}(t)$ , viene determinado por los clientes que se incorporan al mercado potencial del producto, por diversos motivos, tales como por el aumento en el nivel de renta, variaciones en la tendencia de la moda, etc. ( $k$ ), más aquellos clientes actuales de la organización que pasan a ser clientes potenciales de la misma  $\beta y(t)$ , menos los clientes potenciales que pasan al mercado actual  $a(t)x(t)y(t)$ .

No obstante en [Landa y Velasco, 2004]<sup>1</sup> se completa este estudio considerando en el mismo la respuesta que se obtiene debido al esfuerzo de marketing realizado. De esa manera, nuestro modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k - \alpha x(t)y^2(t) + \beta y(t) - cx(t) \\ \dot{y}(t) = \alpha x(t)y^2(t) - \delta y(t) + cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

donde  $cx(t)$  es el efecto de la respuesta al esfuerzo de Marketing de la organización.

Pretendemos entonces, estudiar las soluciones de equilibrio del sistema dinámico (2), donde hemos de tener en cuenta que  $k$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de ajuste y  $\delta - \beta = \epsilon$ . Tenemos por tanto un sistema dinámico bidimensional en un espacio paramétrico. Notemos que la variación de los parámetros aunque en principio pueda parecer que han de ser estrictamente positivos, siempre cabe la posibilidad de que tengan valores cercanos a cero y ó negativos. Ello es debido a que una determinada tendencia pueda cambiar su signo. Es por ello por lo que en principio y pensando

<sup>1</sup>En este trabajo se hace un estudio más detallado en cuanto al significado económico realizándose un estudio numérico para la obtención de las bifurcaciones de codimensión 1. No se realiza el estudio simbólico, mucho más complejo.

que se pueden tomar otra región paramétrica, hemos tomado un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  como región en la que se mueva cada parámetro. Por tanto nuestra región paramétrica es  $I^5 \subset \mathbb{R}^5$ .

A la hora de realizar el estudio de las bifurcaciones e el sistema (2) hemos de tener en cuenta diversos aspectos. En primer lugar hemos de encontrar los puntos de equilibrio del sistema. En segundo lugar estudiaremos la estabilidad del punto de equilibrio dentro del espacio paramétrico  $I^5 \subset \mathbb{R}^5$ . Esto nos da unas regiones dentro del espacio paramétrico dentro de las cuales el punto de equilibrio tendrá un comportamiento característico, pudiendo ser un nodo, un foco estable o inestable, un centro y regiones en las que habrá un comportamiento cíclico. Esto último, generalmente, se determina por la bifurcación de Hopf. Otro aspecto importante del sistema dinámico (2) consiste en su complejidad, ya que el campo vectorial viene dado por polinomios de tercer grado, esto nos acarrea dificultades de cálculo a la hora de obtener simbólicamente las condiciones correspondientes de cada bifurcación.

### 3 Puntos de equilibrio y estabilidad del modelo

El punto de equilibrio (punto fijo ó punto singular) de un sistema dinámico no lineal general  $\dot{x} = F(x, \theta)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^m$ , donde  $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+m}$  representan las variables y los parámetros del modelo, se obtiene (Kuznetsov (2004), Wiggins (2003)) al resolver el sistema  $F(x, \theta) = \Theta$  donde  $\Theta$  es el vector nulo. Resolviendo el sistema (2), tenemos un único punto de equilibrio:

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{k\delta(\delta - \beta)}{k^2\alpha + c(\beta - \delta)^2}, \frac{k}{\delta - \beta} \right) \quad (3)$$

La estabilidad del sistema  $\dot{x} = F(x, \theta)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^m$  se hace al estudiar los autovalores de la matriz jacobiana  $J = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*(\theta))$  del sistema, donde  $x^*(\theta)$  es el punto de equilibrio. En nuestro modelo la matriz Jacobiana viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -c - y^2\alpha & -2xy\alpha + \beta \\ c + y^2\alpha & 2xy\alpha - \delta \end{pmatrix}_{|(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} -c - \frac{k^2\alpha}{(\beta - \delta)^2} & \beta - \frac{2k^2\alpha\delta}{k^2\alpha + c(\beta - \delta)^2} \\ c + \frac{k^2\alpha}{(\beta - \delta)^2} & (-1 + \frac{2k^2\alpha\delta}{k^2\alpha + c(\beta - \delta)^2})\delta \end{pmatrix} \quad (4)$$

El determinante de la matriz jacobiana particularizada en el punto de equilibrio es:

$$\det(A) = \frac{k^2\alpha + c(\beta - \delta)^2}{\beta - \delta}$$

y la traza,

$$\text{tr}(A) = -c - \delta + k^2\alpha \left( -\frac{1}{(\beta - \delta)^2} + \frac{2\delta}{k^2\alpha + c(\beta - \delta)^2} \right).$$

Los autovalores de la matriz A, vienen dados por  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{tr}(A) \pm \sqrt{D})$  (ver [Magnitskii y Siderov, 2006]), donde  $D = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$ . Notemos que si  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ , entonces el punto de equilibrio es estable y si hay algún autovalor con parte real positiva  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , entonces el punto de equilibrio es inestable. Además en los casos en que  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , se dice que el punto de equilibrio es un nodo estable. Si  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , el punto de equilibrio es un nodo inestable. Si  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , el punto de equilibrio es un



punto de silla. Si  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ , el punto de equilibrio es un foco estable. Si  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ , el punto de equilibrio es un foco inestable. Si  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ , el punto de equilibrio es un centro. Además hay que tener en cuenta que si  $D = 0$ , el nodo crítico corresponde a una matriz  $A = \lambda I$  y el nodo degenerado corresponde a una matriz semejante a una caja de Jordan bidimensional. El caso en que  $\det(A) = 0$ , determina una línea de puntos singulares degenerados. Los puntos fijos no hiperbólicos (nodos, focos, silla) mantienen su comportamiento al realizar pequeñas perturbaciones según el teorema de Hartman-Grobman [Magnitskii y Siderov, 2006]. Notemos que en un punto de silla existe una variedad estable respecto de la cual cualquier punto inicial en dicha variedad tiende al punto de equilibrio; ahora bien, fuera de ella cualquier trayectoria es inestable. Otro tipo de equilibrio en un sistema dinámico bidimensional es el ciclo límite, es decir trayectorias cerradas aisladas. Los centros no son ciclos límite ya que no están aisladas y además si consideramos un punto inicial suficientemente cercano a un ciclo límite, su trayectoria tiende hacia él si es estable o bien se aleja de él en caso de que sea inestable. Para estudiar la estabilidad de un ciclo límite se suele hacer utilizando la teoría de Floquet<sup>2</sup>, que consiste en estudiar el sistema dinámico lineal obtenido al sustituir en la jacobiana la trayectoria del ciclo  $x_0(t)$ .

Al estudiar la estabilidad del punto de equilibrio en el espacio paramétrico  $(\alpha, \beta, \delta, c, k) \in \mathbb{R}^5$ , nos debemos de cuestionar si existen conjuntos en dicho espacio tal que describan cada punto de equilibrio expuesto anteriormente. Así, por ejemplo para que exista un nodo inestable ha de ocurrir que  $D > 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $\text{tr}(A) > 0$ . La región definida en el espacio paramétrico, para este caso, no es acotada. Análogamente sucede con cada uno de los puntos de equilibrio<sup>3</sup>.

#### 4 Bifurcaciones

La estabilidad estructural<sup>4</sup> de los sistemas de ecuaciones diferenciales es la estabilidad en relación con pequeñas perturbaciones en los campos vectoriales. Es decir, los posibles errores producidos en la definición de los campos vectoriales no suponen un cambio en las representaciones cualitativas de las soluciones de los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional definido sobre una variedad compacta  $M \subset \mathbb{R}^2$  es estructuralmente estable en los casos siguientes [Kuznetsov, 2004], [Magnitskii y Siderov, 2006], [Gukenheimer y Holmes, 1993]: 1) El número de

puntos singulares es finito y todos son hiperbólicos, 2) el número de ciclos límite es finito y ninguno de ellos es degenerado y 3) no hay conexiones silla en la variedad  $M$ .

La teoría de las bifurcaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales se origina en los trabajos de Poincaré al describir cualitativamente los cambios en los retratos fase de los sistemas de ecuaciones diferenciales continuos al realizar cambios suaves en los parámetros. Los valores de los parámetros en los que se producen estos cambios cualitativos se les denomina valores de bifurcación o puntos de bifurcación. Sea un sistema

$$\dot{x} = F(x, \mu), x \in M \subset \mathbb{R}^m, \mu \in L \subset \mathbb{R}^k, F \in C^\infty. \quad (5)$$

Se dice que el sistema (4.1) es burdo ([Magnitskii y Siderov, 2006]) si existe un entorno de un  $\mu_0$  tal que para cada valor perteneciente a dicho entorno el campo vectorial  $F(x, \mu)$  es topológicamente equivalente al campo vectorial  $F(x, \mu_0)$ . Según esta definición los puntos de bifurcación son aquellos conjuntos de valores paramétricos para los que el sistema no es burdo. Por tanto, a la hora de hacer una investigación cualitativa completa del sistema hemos de establecer una partición del espacio paramétrico en regiones con idéntica estructura cualitativa. Es decir, hemos de partir el espacio paramétrico en áreas y separarlos por superficies de bifurcación suaves (k-1) dimensionales que corresponden, por tanto, a sistemas no burdos. A esto se le denomina diagrama de bifurcación. Estas (k-1) superficies de bifurcación suaves vienen definidas por una ecuación  $G_1(\mu) = 0$ , con gradiente no nulo y se dice que la bifurcación es de codimensión 1. Una intersección de dos superficies suaves  $G_1(\mu) = 0, G_2(\mu) = 0$  es de dimensión (k-2) y se dice entonces que es de codimensión 2, y así sucesivamente se puede hacer una generalización de codimensión superior. La estabilidad estructural puede ser o bien local o bien global según que las bifurcaciones sean locales o globales (no locales). Así, en el caso de puntos singulares no hiperbólicos y ciclos obtenemos cambios cualitativos locales de un retrato fase de un sistema, por lo que estaremos hablando de bifurcaciones locales. Las bifurcaciones de los contornos de separatrices<sup>5</sup>, cambios no locales de un retrato fase de un sistema, son generalmente denominadas bifurcaciones no locales o globales.

##### 4.1 Bifurcaciones de codimensión 1

En los sistemas dinámicos continuos hay dos bifurcaciones genéricas de codimensión 1, que pueden ser detectados a lo largo de la curva de equilibrio: Las bifurcaciones Fold y Hopf.

En la bifurcación Fold, si tenemos un parámetro activo, la matriz jacobiana particularizada en el punto de equilibrio tiene un autovalor nulo. Entonces por el teorema de la variedad centro [Gukenheimer y Holmes, 1993], el sistema  $\dot{x} = F(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$  es equivalente a una ecuación de la forma:

$$\dot{u} = au^2 + O(u^3), \text{ donde:}$$

$$a = \langle p, B(q, q) \rangle, Aq = \theta, A^T p = \theta, \langle q, q \rangle = 1, \langle p, q \rangle = 1, B_i(q, p) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f(x, \alpha_0)}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{x=x_0} q_j p_k; i = 1, 2, \dots, n.$$

Si  $a \neq 0$ , entonces el sistema es topológicamente equivalente, localmente, al sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha + \sigma u^2 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \quad (\text{Kuznetsov (2004)}),$$

<sup>5</sup>La trayectoria de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se dice que es una separatriz de un punto singular si tiende a dicho punto cuando  $t \rightarrow \infty$  ó cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

<sup>2</sup>Ver por ejemplo [Novo et al., 1995] para una ampliación de la teoría de Floquet.

<sup>3</sup>Puede comprobarse utilizando cualquier programa matemático al resolver el sistema de inecuaciones correspondiente para cada caso.

<sup>4</sup>Dos sistemas de ecuaciones diferenciales son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo entre los espacios de fases de cada campo vectorial que transforme las trayectorias de cada sistema en el otro preservando la orientación [Gukenheimer y Holmes, 1993]. Una perturbación de amplitud  $\epsilon$  de un campo vectorial  $F(x) \in C^1$  es cualquier campo vectorial  $F_1(x) \in C^1$  tal que, existe un conjunto compacto  $K$ , donde  $\|F(x) - F_1(x)\| < \epsilon$  y  $\left\| \frac{\partial(F(x) - F_1(x))}{\partial x_i} \right\| < \epsilon, \forall x \in K$  y  $F(x) \equiv F_1(x), x \notin K$  y  $F(x) \equiv F_1(x), x \notin K$ . El sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = F(x)$  definido sobre una variedad compacta suave se dice estructuralmente estable si existe un  $\epsilon > 0$  tal que cada perturbación  $F_1(x)$  de amplitud  $\epsilon$  es topológicamente equivalente a  $F(x)$ .

en el caso en que el segundo autovalor sea negativo. Genéricamente dos equilibrios (un nodo estable y un punto silla) colisionan y desaparecen en el valor crítico del parámetro en cuestión.

En nuestro caso particular, tenemos únicamente un punto de equilibrio  $(x^*, y^*)$ , con lo que no es posible una bifurcación Fold.

Análogamente, en la bifurcación Hopf (ver Figura 1), si tenemos un parámetro  $\alpha$  activado, las condiciones que debe de cumplir la matriz jacobiana  $A(\alpha)$ , particularizada en el punto de equilibrio,  $A$ , son:

$$\begin{cases} \sigma(0) = 0, \Delta(0) = \omega_0^2 > 0, \sigma(\alpha) = \text{tr}(A(\alpha)), \\ \Delta(\alpha) = \det(A(\alpha)), \omega(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}, \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases} \quad (6)$$

y  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i \omega(\alpha)$  son los autovalores de la matriz  $A(\alpha)$  [Kuznetsov, 2004] con  $\mu(\alpha) = \frac{1}{2} \sigma(\alpha)$ . El sistema  $\dot{x} = F(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$  cumpliendo las condiciones de no-degeneración es topológicamente equivalente en un entorno del punto de equilibrio trasladado al origen en una ecuación de la forma siguiente, supuesto que  $\alpha = 0$  es el valor de bifurcación:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}$$

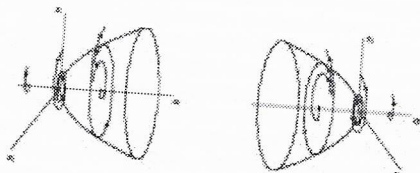


Figura 1: Bifurcación de Hopf supercrítica

Las condiciones de no degeneración viene dadas por  $\mu'(0) \neq 0$  y  $\ell_1(0) \neq 0$  donde  $\ell_1(0) = \frac{1}{2\omega^2} \text{Re}(i g_{20}g_{11} + \omega g_{21})$  es el primer coeficiente de Lyapunov<sup>6</sup>, y además  $g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, g_{11} = \langle p, B(q, \tilde{q}) \rangle, g_{21} = \langle p, C(q, q, \tilde{q}) \rangle$ , siendo  $B(x, y)$  y  $C(x, y, z)$  formas multilineales simétricas siguientes:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=\xi_0} x_j y_k; \quad i = 1, 2;$$

y

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=\xi_0} x_j y_k u_l; \quad i = 1, 2$$

Además, se han de obtener dos vectores  $p$  y  $q$  que han de cumplir las siguientes condiciones:

$$Aq = i\omega q, A^T p = -i\omega p, \langle \text{Re}(q), \text{Im}(p) \rangle = 0, \langle q, p \rangle = 1$$

<sup>6</sup>El coeficiente de Lyapunov nos indica si la bifurcación es subcrítica o supercrítica.

### Bifurcaciones de codimensión 1 en el sistema (2)

En nuestro modelo hemos de encontrar los posibles puntos de bifurcación de Hopf, es decir, los puntos de equilibrio que cumplen las ecuaciones (6). En primer lugar el punto de bifurcación ha de anular la traza de la matriz jacobiana

$$\text{tr}(A) = -c - \delta + k^2 \alpha \left( -\frac{1}{(\beta - \delta)^2} + \frac{2\delta}{k^2 \alpha + c(\beta - \delta)^2} \right)$$

Los valores de los parámetros que anulan la traza y el punto de equilibrio correspondiente en cada caso vienen dados por:

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{k\delta(\delta - \beta)}{k^2 \alpha + c(\beta - \delta)^2}, \frac{k}{\delta - \beta} \right)$$

El valor de  $\omega_0$  viene dado por  $\sqrt{|A|}$ , que en nuestro caso es:

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{k^2 \alpha + c(\beta - \delta)^2}{(\beta - \delta)}}$$

Las ecuaciones (6) nos indican que se ha de verificar que  $\omega_0^2 > 0$ , luego se ha de verificar que:

$$-\frac{k^2 \alpha + c(\beta - \delta)^2}{\beta - \delta} > 0 \quad (7)$$

al particularizar en cada valor de bifurcación. Hemos por tanto de comprobar si existe algún punto paramétrico en  $I^5$  que cumpla la inecuación (7) (ver figura 2).

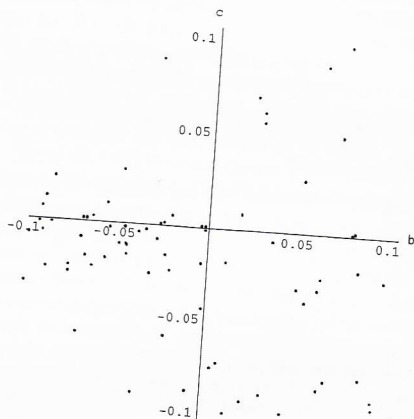


Figura 2: Proyección sobre el plano paramétrico  $(\beta, c)$  de puntos que verifican (7)

Al resolver la ecuación,  $\text{Tr}(A) = 0$ , obtenemos para alguno de los parámetros los siguientes valores:

Parámetro  $\alpha$ : Tenemos dos valores para el parámetro:

$$\alpha_i = \frac{A \pm \sqrt{B}}{2k^4}$$

donde:

$$A = -2ck^2\beta^2 + 4ck^2\beta\delta + k^2\beta^2\delta - 2ck^2\delta^2 - 2k^2\beta\delta^2 - k^2\delta^3 \text{ y } B = -k^4(8c - \delta)(\beta - \delta)^4 \delta$$

Y para cada valor del parámetro  $\alpha_{i,j}$ , tenemos el punto de equilibrio:

$$(x^*(\alpha_i), y^*(\alpha_i)) = \left( \frac{k\delta(\delta - \beta)}{k^2 \alpha_i + c(\beta - \delta)^2}, \frac{k}{\delta - \beta} \right)$$



**Parámetro  $\beta$** : Tenemos cuatro valores para el parámetro:

$$\beta_{\alpha_1} = \frac{2c^2\delta + 2c\delta^2 - \sqrt{2}\sqrt{c(c+\delta)} \left( -2ck^2\alpha + k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}{2c(c+\delta)}$$

$$\beta_{\alpha_2} = \frac{2c^2\delta + 2c\delta^2 - \sqrt{2}\sqrt{c(c+\delta)} \left( -2ck^2\alpha + k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}{2c(c+\delta)}$$

$$\beta_{\alpha_3} = \frac{2c^2\delta + 2c\delta^2 - \sqrt{2}\sqrt{-c(c+\delta)} \left( -2ck^2\alpha + k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}{2c(c+\delta)}$$

$$\beta_{\alpha_4} = \frac{2c^2\delta + 2c\delta^2 + \sqrt{2}\sqrt{-c(c+\delta)} \left( -2ck^2\alpha + k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}{2c(c+\delta)}$$

y para cada valor del parámetro  $\beta_i$ , tenemos el punto de equilibrio:

$$(x^*(\beta_i), y^*(\beta_i)) = \left( \frac{k\delta(\delta - \beta_i)}{k^2\alpha + c(\beta_i - \delta)^2}, \frac{k}{\delta - \beta_i} \right)$$

**Parámetro  $c$** : Tenemos dos valores para el parámetro:

$$c_1 = \frac{-2k^2\alpha + (\beta - \delta)\sqrt{\delta} \left( -\beta\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta^3} + \sqrt{8k^2\alpha + (\beta - \delta)^2\delta} \right)}{2(\beta - \delta)^2}$$

$$c_2 = -\frac{2k^2\alpha + (\beta - \delta)\sqrt{\delta} \left( \beta\sqrt{\delta} - \sqrt{\delta^3} + \sqrt{8k^2\alpha + (\beta - \delta)^2\delta} \right)}{2(\beta - \delta)^2}$$

y para cada valor del parámetro  $c_i$ , tenemos el punto de equilibrio:

$$(x^*(c_i), y^*(c_i)) = \left( \frac{k\delta(\delta - \beta)}{k^2\alpha + c_i(\beta - \delta)^2}, \frac{k}{\delta - \beta} \right)$$

**Parámetro  $k$** : Tenemos cuatro valores para el parámetro:

$$k_{\alpha_1} = \frac{\sqrt{-2c\alpha\beta^2 + 4c\alpha\beta\delta - 2c\alpha\delta^2 - 2\alpha\beta\delta^2 + \alpha\delta^3 - \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}}{\sqrt{2}}$$

$$k_{\alpha_2} = \frac{\sqrt{-2c\alpha\beta^2 + 4c\alpha\beta\delta - 2c\alpha\delta^2 - 2\alpha\beta\delta^2 + \alpha\delta^3 - \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}}{\sqrt{2}}$$

$$k_{\alpha_3} = \frac{\sqrt{-2c\alpha\beta^2 + 4c\alpha\beta\delta - 2c\alpha\delta^2 - 2\alpha\beta\delta^2 + \alpha\delta^3 + \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}}{\sqrt{2}}$$

$$k_{\alpha_4} = \frac{\sqrt{-2c\alpha\beta^2 + 4c\alpha\beta\delta - 2c\alpha\delta^2 - 2\alpha\beta\delta^2 + \alpha\delta^3 + \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}}{\sqrt{2}}$$

y para cada valor del parámetro  $k_i$ , tenemos el punto de equilibrio:

$$(x^*(k_i), y^*(k_i)) = \left( \frac{k_i\delta(\delta - \beta)}{k_i^2\alpha + c(\beta - \delta)^2}, \frac{k_i}{\delta - \beta} \right)$$

Hemos de hacer notar que en cada caso ha de darse que la velocidad del autovalor respecto al parámetro en cuestión en el valor de bifurcación del parámetro ha de ser no nula, para la existencia de la bifurcación de Hopf, así como que el valor de la frecuencia al cuadrado  $\omega^2$  ha de ser positivo. -Consideremos el parámetro  $\alpha$ . En este caso existen dos posibles valores de bifurcación. Sus frecuencias al cuadrado correspondientes,  $\omega^2$ , son:

$$\omega_{\alpha_1}^2 = \frac{-k^2\beta^2\delta + k^2\delta^2\beta - k^2\delta^3 + \sqrt{-k^4(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}{2k^2(\beta-\delta)}$$

$$\omega_{\alpha_2}^2 = \frac{-k^2\beta^2\delta - k^2\delta^2\beta + k^2\delta^3 + \sqrt{-k^4(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}{2k^2(\beta-\delta)}$$

Este valor de  $\omega^2$  ha de ser positivo. Se puede comprobar que existen valores de los parámetros en los que la frecuencia es positiva. Además las velocidades  $\mu'(\alpha_i)$  vienen dadas por:

$$\mu'_{\alpha_i} = k^2 \left( -\frac{1}{(\beta-\delta)^2} - \frac{2k^2\alpha\delta}{(k^2\alpha + c(\beta-\delta)^2)^2} + \frac{2\delta}{k^2\alpha + c(\beta-\delta)^2} \right)$$

que se ha de particularizar para cada valor de bifurcación.

Podemos comprobar que existen valores de los parámetros para los que la velocidad no es nula y que la frecuencia es positiva, con lo que existe bifurcación de Hopf.

-Sea ahora el parámetro  $\beta$ . Sus frecuencias al cuadrado correspondientes,  $\omega^2$ , son:

$$\omega_{\beta_1}^2 = \frac{c(3k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)})}{\sqrt{2}\sqrt{c(c+\delta)} \left( -2ck^2\alpha + k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}$$

$$\omega_{\beta_2}^2 = -\frac{c(3k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)})}{\sqrt{2}\sqrt{c(c+\delta)} \left( -2ck^2\alpha + k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}$$

$$\omega_{\beta_3}^2 = -\frac{c(-3k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)})}{\sqrt{2}\sqrt{-c(c+\delta)} \left( 2ck^2\alpha - k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}$$

$$\omega_{\beta_4}^2 = \frac{c(-3k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)})}{\sqrt{2}\sqrt{-c(c+\delta)} \left( 2ck^2\alpha - k^2\alpha\delta + \sqrt{k^4\alpha^2\delta(-8c+\delta)} \right)}$$

Las velocidades  $\mu'(\beta_i)$  vienen dadas por:

$$\mu'_{\beta_i} = k^2\alpha \left( \frac{2}{(\beta-\delta)^3} + \frac{4c\delta(-\beta+\delta)}{(k^2\alpha + c(\beta-\delta)^2)^2} \right)$$

que se han de particularizar en cada valor de bifurcación.

-Consideramos a continuación el parámetro  $c$ . Sus frecuencias al cuadrado correspondientes,  $\omega^2$ , son:

$$\omega_{c_1}^2 = \frac{1}{2} \left( \beta\delta - \sqrt{\delta} \left( \sqrt{\delta^3} + \sqrt{8k^2\alpha + (\beta-\delta)^2\delta} \right) \right)$$

$$\omega_{c_2}^2 = \frac{1}{2} \left( \beta\delta - \delta^2 + \sqrt{\delta} \sqrt{8k^2\alpha + (\beta-\delta)^2\delta} \right)$$

Las velocidades  $\mu'(c_i)$  vienen dadas por:

$$\mu'_{c_i} = -1 - \frac{2k^2\alpha(\beta-\delta)^2\delta}{(k^2\alpha + c(\beta-\delta)^2)^2}$$

Terminamos con el parámetro  $k$ . Sus frecuencias al cuadrado correspondientes,  $\omega^2$ , son:

$$\omega_{k_1}^2 = \frac{-\alpha\beta^2\delta + 2\alpha\beta\delta^2 - \alpha\delta^3 + \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}{2\alpha(\beta-\delta)}$$

$$\omega_{k_2}^2 = \frac{-\alpha\beta^2\delta + 2\alpha\beta\delta^2 - \alpha\delta^3 + \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}{2\alpha(\beta-\delta)}$$

$$\omega_{k_3}^2 = -\frac{\alpha\beta^2\delta - 2\alpha\beta\delta^2 + \alpha\delta^3 + \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}{2\alpha(\beta-\delta)}$$

$$\omega_{k_4}^2 = -\frac{\alpha\beta^2\delta - 2\alpha\beta\delta^2 + \alpha\delta^3 + \sqrt{-\alpha^2(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\delta}}{2\alpha(\beta-\delta)}$$

donde  $\omega_{k_1}^2 = \omega_{k_2}^2$  y  $\omega_{k_3}^2 = \omega_{k_4}^2$

Las velocidades  $\mu'(k_i)$  vienen dadas por:

$$\mu'(k^*) = 2k\alpha k^2\alpha \left( -\frac{1}{(\beta-\delta)^2} - \frac{2k^2\alpha\delta}{(k^2\alpha + c(\beta-\delta)^2)^2} + \frac{2\delta}{k^2\alpha + c(\beta-\delta)^2} \right)$$

que se han de particularizar en cada valor de bifurcación.

### Obtención del primer coeficiente de Lyapunov

A partir de esta sección nos centraremos en el primer valor de bifurcación de Hopf para el parámetro  $\alpha$ . De igual manera se pueden realizar los mismos pasos para el resto de los parámetros en los que exista bifurcación de Hopf.

Para encontrar el coeficiente de Lyapunov, hemos de hacer los siguientes pasos: Primero fijamos el valor de bifurcación  $\alpha_0$ . El punto de equilibrio en dicho valor de bifurcación es:

$$(x^*(\alpha_0), y^*(\alpha_0)) = \left( \frac{k\delta}{\omega^2(\alpha_0)}, \frac{k}{\delta - \beta} \right)$$

donde

$$\omega_{\alpha_0}^2 = \frac{-k^2\beta^2\delta + k^2\delta^2\beta - k^2\delta^3 + \sqrt{-k^4(8c - \delta)(\beta - \delta)^4\delta}}{2k^2(\beta - \delta)}$$

La matriz Jacobiana, particularizada en el valor de bifurcación  $\alpha_0$ , después de realizar una serie de operaciones, viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta - \delta} & \frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta - \delta} + \beta - \delta \\ -\frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta - \delta} & -\frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta - \delta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Los autovalores de la matriz jacobiana (8) son  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Encontramos ahora los vectores  $p = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{2\epsilon} \\ \frac{\epsilon - 3i\omega}{2\epsilon} \end{pmatrix}$ ,  $q = \begin{pmatrix} -1 - \frac{i\omega}{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix}$  que cumplen el sistema de ecuaciones:

$$Aq = i\omega q, \quad A^T p = -i\omega p, \quad \langle \text{Re}(q), \text{Im}(p) \rangle = 0, \quad \langle p, q \rangle = 1$$

Realizamos el cambio en el origen de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 + x^*(\alpha_0) \\ y &= \xi_2 + y^*(\alpha_0) \end{aligned}$$

con lo que el sistema (2) queda en la forma:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = k + \beta \left( \frac{k}{-\beta + \delta} + \xi_2 \right) - c \left( \xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2} \right) - \\ \alpha \left( \frac{k}{-\beta + \delta} + \xi_2 \right)^2 \left( \xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2} \right) \\ \dot{\xi}_2 = -\delta \left( \frac{k}{-\beta + \delta} + \xi_2 \right) + c \left( \xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2} \right) + \\ \alpha \left( \frac{k}{-\beta + \delta} + \xi_2 \right)^2 \left( \xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2} \right) \end{cases}$$

La forma bilineal con componentes  $B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=\xi_0} x_j y_k$ ;  $i = 1, 2$  calculada en el punto de bifurcación  $\alpha_0$  es:

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2(c(\beta - \delta) + \omega^2)(x_1 y_2 \omega^2 + x_2(y_2 \delta(-\beta + \delta) + y_1 \omega^2))}{k\omega^2} \\ \frac{2(c(\beta - \delta) + \omega^2)(x_1 y_2 \omega^2 + x_2(y_2 \delta(-\beta + \delta) + y_1 \omega^2))}{k\omega^2} \end{pmatrix}$$

Análogamente la forma trilineal con componentes

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=\xi_0} x_j y_k u_l; \quad i = 1, 2,$$

calculada en el punto de bifurcación  $\alpha_0$  es:

$$C(x, y, u) = \begin{pmatrix} \frac{2(u_2 x_2 y_1 + u_2 x_1 y_2 + u_1 x_2 y_2)(\beta - \delta)(c(\beta - \delta) + \omega^2)}{k^2} \\ -\frac{2(u_2 x_2 y_1 + u_2 x_1 y_2 + u_1 x_2 y_2)(\beta - \delta)(c(\beta - \delta) + \omega^2)}{k^2} \end{pmatrix}$$

El primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1(0) = \frac{1}{2\omega^2} \text{Re}(i g_{20} g_{11} + \omega g_{21})$  nos indica si la bifurcación es supercrítica ( $\ell_1 < 0$ ) o subcrítica ( $\ell_1 > 0$ ) (Figura 1). En una bifurcación supercrítica antes del valor crítico de bifurcación del parámetro en un entorno de él, el comportamiento del sistema es un punto de equilibrio estable, se mantiene para el valor de bifurcación, pero a partir del valor crítico, el punto de equilibrio se hace inestable y a su vez nace una curva cerrada que es estable y que contiene en su interior al punto de equilibrio. Dicha curva cerrada es, para cada valor del parámetro un ciclo límite. Al

contrario, en una bifurcación de Hopf subcrítica antes de un valor de bifurcación existe un ciclo límite inestable y al punto de equilibrio en su interior que es estable y al pasar por el valor crítico desaparece el ciclo pasando el punto de equilibrio a ser estable.

Los valores necesarios para el cálculo de  $\ell_1$ , son los siguientes (sección 4.1):

$$g_{20} = \frac{k\alpha(\beta\delta - \delta^2 + 2\omega(\epsilon + \omega))}{(\beta - \delta)\omega^2}, \quad g_{11} = \frac{k\alpha(\beta\delta - \delta^2 + 2\omega^2)}{(\beta - \delta)\omega^2}, \quad g_{21} = \alpha \left( -3 - \frac{i\epsilon}{\omega} \right), \quad \text{donde } \epsilon = \beta - \delta, \text{ con lo que:}$$

$$\ell_1(\alpha) = -\frac{\alpha(3(\beta - \delta)2\omega^4 + 2k^2\alpha\epsilon(2\beta\delta - \delta^2 + \omega^2))}{2(\beta - \delta)2\omega^5}$$

que al particularizarlo en el valor de  $\alpha_0$ , nos da:

$$\ell_1(\alpha_0) = \frac{(\beta - \delta)(c(\beta - \delta) + \omega^2)(3\omega^4 - 2(c(\beta - \delta) + \omega^2)(\beta\delta - \delta^2 + \omega^2))}{2k^2\omega^5}$$

Dependiendo del valor de los parámetros, habrá regiones en las que la bifurcación de Hopf sea supercrítica o subcrítica, es decir se tiene el siguiente resultado.

### Proposición 1

Se obtiene una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio  $\left( \frac{k\delta}{\omega^2(\alpha_0)}, \frac{k}{\delta - \beta} \right)$ , dependiente del valor de bifurcación  $\alpha_0$ . Se obtiene una partición del espacio paramétrico condicionado a que el primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1(\alpha_0)$  sea mayor o menor que cero. La región en la que  $\ell_1(\alpha_0)$  sea mayor que cero, la bifurcación es supercrítica y en caso contrario es subcrítica.

Hemos de hacer notar que para cada posible valor de bifurcación de cada parámetro, hemos de obtener que se cumplen las condiciones de no-degeneración de la bifurcación de Hopf. De esa manera tendremos un resultado análogo a la proposición 1 expuesta.

### 4.2 Bifurcaciones de codimensión 2

Sea un sistema dinámico continuo bi-paramétrico

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad \mu \in \mathbb{R}^2, \quad F \in C^\infty. \quad (9)$$

Supongamos que para el valor del parámetro  $\mu = \mu_0$ , el sistema (9) tiene un equilibrio en  $x_0$ , para el que se satisfacen algunas de las condiciones de bifurcación, Fold o Hopf [Kuznetsov, 2004]. Entonces genéricamente, cada punto  $(x, \mu) \in \mathbb{R}^{m+2}$ , para el que el sistema (9) exhibe uno de los tipos de bifurcación, define una curva  $\Gamma$  en el espacio  $\mathbb{R}^{m+2}$ . La curva de bifurcación  $\mathfrak{B}$  es la proyección de esta curva sobre el plano  $(\mu_1, \mu_2)$ . Una bifurcación de codimensión 2 surge en un entorno paramétrico al aparecer distintos retratos fase del sistema. Las condiciones de no-degeneración para la bifurcación Fold y la Hopf tienen distintas rasgos. Algunas condiciones (condiciones de no-degeneración) implican que no se anula alguno de los coeficientes de la forma normal de la ecuación sobre la variedad centro  $W^c$ . Sin embargo las condiciones de transversalidad, están relacionadas con ciertas derivadas del campo vectorial respecto a los parámetros. Estos dos tipos de condiciones determinan diferentes papeles en el análisis de las bifurcaciones.

Para que ocurra una bifurcación de codimensión 2 en un equilibrio no hiperbólico a lo largo de la curva  $\mathfrak{B}$ , o bien hay autovalores extra que se aproximan al eje imaginario, dando lugar a una nueva variedad centro  $W^c$  de dimensión mayor, o bien se vulnera alguna de las condiciones de



no-degeneración. En la siguiente sección se comentan los distintos tipos posibles de bifurcación de codimensión 2.

En general la curva  $\Gamma$  viene definida por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F(x, \mu) = 0 \\ \psi(x, \mu) = 0 \end{cases}$$

donde la función  $\psi(x, \mu)$  es una función escalar suave construida a partir de la matriz jacobiana. La curva  $\Gamma$  consiste en el conjunto de los equilibrios que satisfacen las condiciones de bifurcación correspondientes. Así en el caso de la bifurcación Fold, se tiene que  $\psi(x, \mu) = \det(F_x(x, \mu))$  y en el caso de la Bifurcación Hopf se tiene que  $\psi(x, \mu) = \det(2F_x(x, \mu) \odot I)$ , donde el signo  $\odot$ , indica el producto bi-alternado (ver [Gantmacher, 1977]) de dos matrices<sup>7</sup>.

### 4.3 Casos posibles de bifurcaciones de codimensión 2

A) Sea una curva de bifurcación Fold  $\mathfrak{B}_F$ . Un punto de esta curva consiste en un equilibrio con un único autovalor nulo y no existen otros autovalores sobre el eje imaginario. La restricción del sistema (9) sobre la variedad centro tiene la forma normal  $\dot{\xi} = a\xi^2 + O(\xi^3)$ , donde el valor de  $a$  viene dado en la sección 4.1. El valor de  $a$  es no nulo en un punto de bifurcación Fold no-degenerado. Al realizar una continuación del punto de bifurcación fold para la obtención de la curva  $\mathfrak{B}_F$ , podemos obtener las siguientes singularidades:

- 1) Se anula otro autovalor, con lo que la variedad centro pasa a ser de dimensión 2. Estas son las condiciones de la bifurcación Bogdanov-Takens o doble-cero ( $\lambda_{1,2} = 0$ ). Esta bifurcación se puede obtener si  $m \geq 2$ .
- 2) Dos autovalores complejos se acercan al eje imaginario, con los que la variedad centro es de dimensión 3. Estas son las condiciones de la bifurcación Gavrilov-Guckenheimer o par-cero ó Fold-Hopf ( $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0; \omega_0 > 0$ ). Esta bifurcación se puede obtener si  $m \geq 3$ .
- 3) No se anula otro autovalor ni dos autovalores complejos se acercan el eje imaginario, pero si se anula el coeficiente de la forma normal, es decir no se verifica una condición de no-degeneración. Estas son las condiciones de la bifurcación cúspide ( $\lambda_1 = 0, a = 0$ ). Esta bifurcación se puede obtener si  $m \geq 1$ .

B) Consideremos ahora una curva de bifurcación de Hopf  $\mathfrak{B}_H$ . Un punto de esta curva consiste en un equilibrio con un único par de autovalores sobre el eje imaginario y no existen otros autovalores sobre dicho eje. La restricción del sistema (9) sobre la variedad centro de dimensión 2 tiene la siguiente forma normal en coordenadas polares:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \ell_1 \rho^3 + O(\rho^4) \\ \dot{\varphi} = 1 + O(\rho^3) \end{cases}$$

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden  $n$ . Sea  $m = n(n-1)/2$ . Entonces el producto bi-alternado (o biproducto) de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \odot B$ , es una matriz cuadrada de orden  $m$  cuyas filas están etiquetadas como  $pq$ , para  $p=2,3,\dots,n; q=2,3,\dots,p-1$  y las columnas  $rs$ , donde  $r=2,3,\dots,n; s=2,3,\dots,r-1$ , con entradas

$$(A \odot B)_{[pq,rs]} = \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix} \right].$$

El valor de  $\ell_1$  viene dado en la sección 4.1. El valor de  $\ell_1$  es no nulo en un punto de bifurcación Hopf no-degenerado. Al realizar una continuación del punto de bifurcación Hopf para la obtención de la curva  $\mathfrak{B}_H$ , podemos obtener las siguientes posibilidades:

- 4) Se aproximan otros dos autovalores complejos al eje imaginario, con la que la variedad centro es de dimensión 4. Estas son las condiciones de la bifurcación Hopf-Hopf o par-dos ( $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \lambda_{3,4} = \pm i\omega_1; \omega_{0,1} > 0$ ). Esta bifurcación se puede obtener si  $m \geq 4$ .
- 5) El primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1$  se anula, mientras que sólo hay dos autovalores sobre el eje imaginario, con la que la variedad centro sigue siendo de dimensión 2. Estas son las condiciones de la bifurcación de Bautin o de Hopf generalizada o de Hopf degenerada ( $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \ell_1 = 0$ ). Esta bifurcación se puede obtener si  $m \geq 2$ .

Hemos de hacer notar que sobre la curva de bifurcación de Hopf  $\mathfrak{B}_H$  también se pueden detectar las bifurcaciones Bogdanov-Takens, al hacerse  $\omega_0 = 0$  y la bifurcación Fold-Hopf, al aparecer un nuevo autovalor nulo.

### Bifurcaciones de codimensión 2 en el sistema (2.2)

En la sección 4.1 hemos probado que únicamente pueden existir bifurcaciones de Hopf. Por tanto, y siguiendo el apartado B) de la sección anterior el caso 4) no es posible ya que la dimensión del sistema dinámico es 2. Lo mismo sucede con la bifurcación de Fold-Hopf al seguir la continuación de la curva  $\mathfrak{B}_H$ . Los dos únicos casos que pueden obtenerse de bifurcación de codimensión 2 son la bifurcación de Bautin, en el que se anula el primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1$  y la bifurcación de Bogdanov-Takens en el que se anulan los dos autovalores complejos al hacerse  $\omega_0 = 0$ .

- Bifurcación de Bautin:

En este caso el primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1$  se anula,

$$\ell_1(\alpha_0) = -\frac{(\beta - \delta)(c(\beta - \delta) + \omega^2)}{2k^2\omega^7} (-3\omega^6 - 2(c(\beta - \delta) + \omega^2)(\beta^2\delta^2 - 2\beta\delta^3 + \delta^4 - 4\omega^4)) = 0$$

El sistema (2) es topológicamente equivalente al sistema dinámico complejo siguiente:

$$\dot{w} = (v(\alpha) + i)w + \ell_1(\alpha)w|w|^2 + \ell_2(\alpha)w|w|^4 + O(|w|^6)$$

donde  $v(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}$ ,  $\ell_1(\alpha)$  es el primer coeficiente de Lyapunov y  $\ell_2(\alpha)$  es el segundo coeficiente de Lyapunov que viene dado por la expresión siguiente [Kuznetsov, 2004]:

$$\begin{aligned} 12\ell_2 &= \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re}(g_{32}) + \frac{1}{\omega_0^2} \operatorname{Im}[g_{20}\bar{g}_{31} - g_{11}(4g_{31} + 3\bar{g}_{22}) - \\ &\frac{1}{3}g_{02}(g_{40} + \bar{g}_{13}) - g_{30}g_{12}] + \\ &\frac{1}{\omega_0^3} \{ \operatorname{Re}[g_{20}(\bar{g}_{11}(3g_{12} - \bar{g}_{30}) + g_{02}(\bar{g}_{12} - \frac{1}{3}g_{30}) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}g_{03}) + \\ &g_{11}(\bar{g}_{02}(\frac{5}{3}\bar{g}_{30} + 3g_{12}) + \frac{1}{3}\bar{g}_{03}g_{02} - 4g_{11}g_{30})] + 3 \operatorname{Im}(g_{20}g_{11}) \operatorname{Im}g_{21} \} + \\ &\frac{1}{\omega_0^4} \{ \operatorname{Im}[g_{11}\bar{g}_{02}(\bar{g}_{20}^2 - 3g_{20}g_{11} - 4g_{11}^2)] + \operatorname{Im}(g_{20}g_{11})[3 \operatorname{Re}(g_{20}g_{11}) - \\ &2|g_{20}|^2] \} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_{02} &= \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, g_{30} = \langle p, C(q, q, q) \rangle, \\ g_{12} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, g_{03} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\ g_{40} &= \langle p, D(q, q, q, q) \rangle, g_{31} = \langle p, D(q, q, q, \bar{q}) \rangle, \end{aligned}$$

$g_{22} = \langle p, D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle$ ,  $g_{13} = \langle p, D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle$ ,  
 $g_{04} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle$ ,  $g_{32} = \langle p, E(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle$  siendo  
 $D(x_1, x_2, x_3, x_4)$  y  $E(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  las formas multi-  
 lineales correspondientes y el resto de valores los dados en  
 la sección (4.1).

Ahora bien, nuestro modelo (2) es polinómico de ter-  
 cer grado con lo que las funciones  $D(x_1, x_2, x_3, x_4)$  y  
 $E(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  son idénticamente nulas. Luego el  
 segundo coeficiente de Lyapunov viene dado por:

$$12 \ell_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \text{Im}[-g_{30}g_{12}] +$$

$$\frac{1}{\omega_0^3} \{ \text{Re}[g_{20}(\bar{g}_{11}(3g_{12} - \bar{g}_{30}) + g_{02}(\bar{g}_{12} - \frac{1}{3}g_{30}) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}g_{03}) +$$

$$g_{11}(\bar{g}_{02}(\frac{5}{3}\bar{g}_{30} + 3g_{12}) + \frac{1}{3}\bar{g}_{03}g_{02} - 4g_{11}g_{30})] + 3 \text{Im}(g_{20}g_{11}) \text{Im}g_{21}\} +$$

$$\frac{1}{\omega_0^4} \{ \text{Im}[g_{11}\bar{g}_{02}(\bar{g}_{20}^2 - 3\bar{g}_{20}g_{11} - 4g_{11}^2)] + \text{Im}(g_{20}g_{11})[3 \text{Re}(g_{20}g_{11}) -$$

$$2|g_{20}|^2]\}$$

Realizando los cálculos necesarios, tenemos:

$$g_{02} = \frac{k\alpha(\beta\delta - \delta^2 - 2i\epsilon\omega + 2\omega^2)}{(\beta - \delta)\omega^2}$$

$$g_{12} = \alpha(-3 + \frac{i\epsilon}{\omega})$$

$$g_{30} = \alpha(-3 - \frac{3i\epsilon}{\omega})$$

$$g_{03} = \alpha(-3 + \frac{3i\epsilon}{\omega})$$

Luego el valor de  $\ell_2(\alpha)$  es:

$$\ell_2 = -\frac{1}{6k^4\omega^{11}}((\beta - \delta)(c(\beta - \delta) + \omega^2)^2(3(\beta - \delta)^2\omega^8 +$$

$$4(c(\beta - \delta) + \omega^2)^2(\beta\delta - \delta^2 + 2\omega^2)$$

$$(\delta^4 - \delta^2\omega^2 + 4\omega^4 - 2\beta\delta(\delta^2 + \omega^2) + \beta^2(\delta^2 + 3\omega^2)) -$$

$$2\omega^4(c(\beta - \delta) + \omega^2)(7\beta^3\delta - 4\delta^4 + 3\delta^2\omega^2 + 12\omega^4$$

$$- 3\beta^2(6\delta^2 - 5\omega^2) + 3\beta(5\delta^3 - 6\delta\omega^2))))$$

Dependiendo del signo,  $s = \text{sgn}(\ell_2)$ , del segundo expo-  
 nente de Lyapunov el sistema dinámico es topológicamente  
 equivalente a un determinado sistema cuya forma normal  
 depende del signo y que en coordenadas polares viene da-  
 do por:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1 + \beta_2\rho^2 + s\rho^4) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (10)$$

Tenemos por tanto el siguiente resultado.

**Proposición 2**

Se obtiene una bifurcación de Bautin cuando  $\ell_1(\alpha_0) = 0$ ,  
 dependiente del valor de bifurcación  $\alpha_0$ . Se obtiene una  
 partición del espacio paramétrico, condicionado a que el  
 segundo coeficiente de Lyapunov  $\ell_2(\alpha_0)$  sea mayor o me-  
 nor que cero. Dependiendo del signo, el sistema es topo-  
 lógicamente equivalente a una de las dos formas norma-  
 les del sistema (10).

\*  $s < 0$ .

La forma normal del sistema en coordenadas polares viene  
 dado por:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (11)$$

La representación gráfica del diagrama de bifurcación vie-  
 ne dado en la Figura 3.

En la Figura 3,  $T$  representa la parte posi-  
 tiva, respecto del parámetro  $\beta_2$ , de la curva  $T =$   
 $\{(\beta_1, \beta_2) / \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}$  y  $H$ , tanto en su par-  
 te positiva como en la negativa, representa la frontera de la  
 bifurcación de Hopf.

Las ecuaciones del sistema (11) son claramente indepen-  
 dientes. El punto de equilibrio nulo del sistema (11) corres-  
 ponde con el punto de equilibrio del sistema original. Este

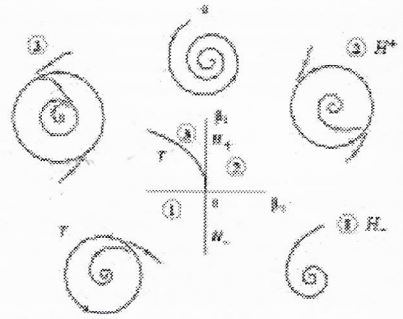


Figura 3: Diagrama de bifurcación de Bautin

sistema puede tener o bien uno, dos o ningún ciclo límite  
 circular, que se obtienen en la primera ecuación y que de-  
 pende de los parámetros del sistema (11). Del diagrama  
 de bifurcación se desprende los distintos comportamien-  
 tos del sistema según los distintos valores de los nuevos  
 parámetros.

- Bifurcación de Bogdanov-Takens: En este caso se tie-  
 ne que  $\omega = 0$ .

De forma similar se puede obtener el diagrama de bifurca-  
 ción para una de las formas normales, que depende del signo,  
 $s$ , de la expresión  $s = \text{sgn}(b_{20}(a_{20} + b_{10}))$ , donde los  
 valores correspondientes se obtienen de la forma siguiente:

$$a_{20}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_0 \rangle \Big|_{y=0}$$

$$b_{20}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_1 \rangle \Big|_{y=0}$$

$$b_{11}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_1 \rangle \Big|_{y=0}$$

donde se han realizado el siguiente cambio de sistema de refe-  
 rencia:

$$\begin{cases} y_1 = \langle x, w_0 \rangle \\ y_2 = \langle x, w_1 \rangle \end{cases}$$

con  $A = f_x(0, 0)$ ,  $Av_0 = 0$ ,  $Av_1 = v_0$ ,  $A^T w_1 =$   
 $0$ ,  $A^T w_0 = w_1$ ,  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle = 1$ . Además, se  
 ha puesto  $x = y_1v_0 + y_2v_1$ ,  $y_{1,2} \in \mathbb{R}$ .

Dependiendo del signo de  $s$ , el sistema dinámico es topo-  
 lógicamente equivalente a un determinado sistema cuya  
 forma normal es la siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2 + O(\|\eta\|^3) \end{cases} \quad (12)$$

Tenemos por tanto el siguiente resultado.

**Proposición 3**

Se obtiene una bifurcación de Bogdanov-Takens cuando  
 $\omega(\alpha_0) = 0$ , dependiente del valor de bifurcación  $\alpha_0$ . De-  
 pendiendo del signo, el sistema es topológicamente equiva-  
 lente a una de las dos formas normales del sistema (12)

\*  $s < 0$ .

La representación gráfica del diagrama de bifurcación vie-  
 ne dado en la Figura 4. Del sistema (12) se desprende que  
 cada punto de equilibrio ha de estar sobre el eje horizontal,  
 ya que  $\eta_2 = 0$  y satisfacer la ecuación  $\beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 +$   
 $s\eta_1\eta_2 = 0$ . Esta ecuación puede tener una, dos o ningun-  
 a solución. La curva formada por el discriminante de esta  
 ecuación,  $T = \{(\beta_1, \beta_2) / 4\beta_1 - \beta_2^2 = 0\}$  y la curva  $H =$



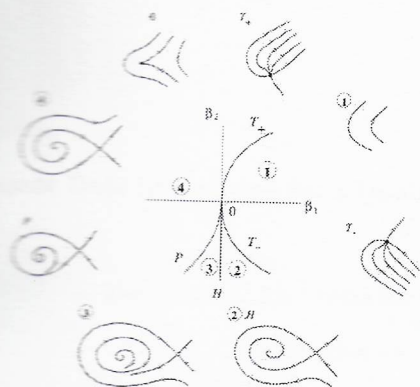


Figura 4: Diagrama de bifurcación de Bogdanov-Takens.

$\{(\beta_1, \beta_2) / \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$  que corresponde a una bifurcación de Hopf no degenerada vienen acompañadas de una curva  $P = \{(\beta_1, \beta_2) / \beta_1 = -\frac{2}{3}\beta_2^2 + O(\beta_2^3), \beta_2 < 0\}$  formada por puntos de bifurcación homoclínica silla. La bifurcación homoclínica es una bifurcación de tipo global y en ella una trayectoria sale del punto de equilibrio como variedad inestable y entra en él como variedad estable; es decir es la intersección de la variedad estable con la inestable.

### Conclusiones y trabajo futuro

En el modelo estudiado en este trabajo hemos encontrado un punto de equilibrio dependiente de los parámetros del modelo. Hemos realizado un estudio de la estabilidad del sistema, que depende de los autovalores de la matriz jacobiana del campo vectorial, definida por el sistema de ecuaciones diferenciales y particularizada en el punto de equilibrio. En los casos en los que se anula uno de los dos autovalores o bien se anula la parte real de los dos autovalores se obtienen bifurcaciones de codimensión 1. En nuestro modelo hemos comprobado que esto sólo es posible en la segunda circunstancia, dando lugar a una bifurcación de Hopf, en el que el punto de equilibrio al pasar por un valor del parámetro (valor de bifurcación) pasa de ser estable a inestable y surge a la vez un ciclo límite estable; esto viene dado por el signo negativo del primer coeficiente de Lyapunov (bifurcación de Hopf supercrítica (Figura 1)). Si el signo es positivo se tiene una bifurcación de Hopf subcrítica, con lo que antes del valor de bifurcación el punto de equilibrio es inestable y el ciclo límite es estable, pero al pasar por el valor de bifurcación el ciclo límite se colapsa y desaparece quedando únicamente el punto de equilibrio que pasa de ser inestable a estable desde el mismo valor de bifurcación. Esto lo hemos recogido en la Proposición 1, donde se dan los valores simbólicos del valor de bifurcación, así como el valor del primer coeficiente de Lyapunov.

En el valor de bifurcación de Hopf, hemos comprobado que se puede obtener dos bifurcaciones de codimensión 2. La primera de ellas surge al no cumplirse una de las condiciones de no degeneración, como es que se anule el primer coeficiente de Lyapunov; esto hace que obtengamos la bifurcación de Bautin, donde podemos encontrar uno, dos o ningún ciclo límite, dependiendo de la región paramétrica en la que nos encontremos. Esto se puede interpretar como el surgimiento o desaparición de los ciclos según como nos movamos sobre el espacio paramétrico. El resultado gene-

ral está recogido en la Proposición 2, en la que dependiendo del signo del segundo coeficiente de Lyapunov obtenemos el diagrama de bifurcación correspondiente. La segunda bifurcación surge al anularse la frecuencia del ciclo. Esto es, estamos en la bifurcación de Bogdanov-Takens. En este caso el comportamiento de las trayectorias hace que podamos tener uno dos o ningún ciclo y además obtenemos un nuevo tipo de comportamiento que son las trayectorias homoclínicas (bifurcaciones globales). El resultado general está recogido en la Proposición 3. Notemos que este trabajo se ha dedicado fundamentalmente al parámetro  $\alpha$ .

Como trabajo futuro queda pendiente el estudio teórico para cada uno de los parámetros del modelo. Hemos de tener en cuenta que los resultados para cada uno de los parámetros va ser diferente, ya que los coeficientes de Lyapunov, el primero y el segundo, dependen fundamentalmente de la matriz jacobiana (8). Para cada parámetro tendremos una matriz jacobiana correspondiente a la que habrá que realizar operaciones similares. Respecto a los aspectos económicos hemos de destacar los trabajos relacionados de [Landa y Velasco, 2004] y [Velasco et al., 2007], este último pendiente de publicar.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido soportado en parte por la ayuda PAI-2006/00000619, PAI-2006/00000513, EXC/2006/TIC134-2141 concedidas por la Junta de Andalucía y por el Ministerio de Educación y Ciencia bajo el proyecto (TSI2006-13390-C02-02).

### Referencias

- [Bosi et al., 2005] S. Bosi, Magris F., and Venditti. Competitive equilibrium cycles with endogenous labor. *Journal of Mathematical Economics*, 41(3):325–349, 2005.
- [Dernov y Magnitskii, 2005] AV Dernov y NA Magnitskii. Transition to chaos in a nonclassical reaction-diffusion system. *Differential Equations*, 41(12):1751–1756, 2005.
- [Feichtinger, 1992] G. Feichtinger. Hopf bifurcation in an advertising diffusion model. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 17:401–411, 1992.
- [Gandolfo, 1997] Giancarlo Gandolfo. *Economic Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, third edition, 1997.
- [Gantmacher, 1977] F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea, New York, 1977.
- [Gukenheimer y Holmes, 1993] John Gukenheimer y P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1993.
- [Haunschmied et al., 2005] JL Haunschmied, Feichtinger G, Hartl RF, and Kort PM. Keeping up with the technology pace: A dns-curve and a limit cycle in a technology investment decision problem. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 57(4):509–529, 2005.
- [He y FH, 2005] XZ He y Westerhoff FH. Commodity markets, price limiters and speculative price dynamics. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(9):1577–1596, 2005.
- [Kuznetsov, 2004] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, third edition, 2004.

- [Landa y Velasco, 2004] Javier Landa y Francisco Velasco. Análisis dinámico del mercado actual y potencial de las organizaciones. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 13(1):131–140, 2004.
- [Li, 2005] MQ Li. The rise of china and the demise of the capitalist world-economy: exploring historical possibilities in the 21st century. *Science and Society*, 69(3):420–448, 2005.
- [Lorenz, 1997] Hans-Walter Lorenz. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.
- [Magnitskii y Siderov, 2002] NA Magnitskii y SV Siderov. Transition to chaos in nonlinear dynamical systems through a subharmonic cascade of bifurcations of two-dimensional tori. *Differential Equations*, 38(12):1703–1708, 2002.
- [Magnitskii y Siderov, 2005] NA Magnitskii y SV Siderov. On the transition to diffusion chaos through a subharmonic cascade of bifurcations of two-dimensional tori: Numerical analysis. *Differential Equations*, 41(11):1626–1634, 2005.
- [Magnitskii y Siderov, 2006] NA Magnitskii y SV Siderov. *New Methods for Chaotic Dynamics*, volume 58 of A. Nonlinear Science. World Scientific, Singapore, first edition, 2006.
- [Novo *et al.*, 1995] S. Novo, Obaya Rafael, and Rojo Jess. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. McGraw-Hill, first edition, 1995.
- [Velasco *et al.*, 2002] F. Velasco, F. Begines, P. Nadal, C. Chamizo, and M.L. Vilchez. Continuación de los equilibrios de un sistema dinámico económico con bifurcaciones de codimensión 1 y 2. *Computación y Sistemas*, 5(3):169–179, 2002.
- [Velasco *et al.*, 2007] F. Velasco, Nadal M.P., González L., and Vilchez M.L. Estudio de la estabilidad y de las bifurcaciones de los equilibrios de un sistema dinámico. aplicación al mercado cervecero español. *Estudios de Economía Aplicada*, 25(1):en prensa, 2007.
- [Vilchez y Velasco, 1999] Mara Luisa Vilchez y Francisco Velasco. *Some types of bifurcations in a bioeconomic model*. Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and electronic Devices and Systems. World Scientific and Engineering Society, Athens, 1999.
- [Vilchez *et al.*, 2003] M.L. Vilchez, F. Velasco, L. González, and J.A. Ortega. Bifurcaciones de Hopf: Análisis cualitativo y aplicación a un modelo bioeconómico de pesquerías. *Computación y Sistemas*, 6(4):273–283, 2003.
- [Vilchez *et al.*, 2004] M.L. Vilchez, F. Velasco, and I. Herrero. An optimal control problem with Hopf bifurcations and application to the striped venus fishery in the gulf of Cadiz. *Fisheries Research*, 67(3):295–306, 2004.
- [Wagener, 2005] Foo Wagener. Structural analysis of optimal investment for firms with non-concave revenue. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 57(4):474–489, 2005.
- [Wei-Bin-Zhang, 2006] Wei-Bin-Zhang. *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics*, volume 204 of *Mathematics in Science and Engineering. Series Editor: C.K. Chui*. Elsevier B.V, Amsterdam, first edition, 2006.