



FACULTAD DE FÍSICA
TRABAJO FIN DE GRADO

OSCILACIONES DE NEUTRINOS Y PROCESOS DE DISPERSIÓN NEUTRINO-LEPTÓN

Autora:

Marta Sayago Rodríguez

Tutores:

Dr. Juan Antonio Caballero Carretero

Dr. Guillermo Daniel Megías Vázquez

Septiembre 2022

Índice general

Resumen/Abstract	1
1. Introducción	2
2. El neutrino	3
2.1. Postulado y descubrimiento	3
2.2. Sabor	6
2.3. Helicidad	9
2.4. Masa	10
2.4.1. El problema de los neutrinos solares	11
2.4.2. La anomalía de los neutrinos atmosféricos	12
2.4.3. El fenómeno de las oscilaciones de neutrinos	13
2.4.3.1. Descubrimiento de las oscilaciones	14
2.4.3.2. Descripción de las oscilaciones	15
2.4.3.3. ¿Cómo se estudian las oscilaciones?	17
3. Análisis de la probabilidad de oscilación de neutrinos	20
3.1. Desarrollo de la expresión general en el vacío	20
3.2. El caso de 2 sabores	25
3.3. Matriz PMNS y parámetros de oscilación	30
4. Dispersión elástica neutrino-leptón	32
4.1. Relevancia del proceso	32
4.2. Estudio del proceso	33
4.2.1. Sección eficaz	35
4.2.1.1. Corrientes leptónicas y hamiltoniano débil	35

4.2.1.2.	Cálculo de la amplitud de la transición	38
4.2.1.3.	Sección eficaz diferencial doble	41
4.2.1.4.	Sección diferencial integrada	43
4.2.1.5.	El caso de antineutrinos	43
4.2.2.	Análisis del proceso	44
5.	Conclusiones	46
A.	Probabilidad de oscilación	48
B.	Ecuación de Dirac	49
B.1.	Soluciones libres de la ecuación de Dirac	50
B.2.	Proyectores de energía y espín	52
B.3.	Covariantes bilineales	52
C.	Delta de Dirac	54
C.1.	Integración de la delta de Dirac δ^4 en \mathcal{S}_{fi}	54
C.2.	Módulo al cuadrado de la delta de Dirac δ^4	55
C.3.	Integración de la delta de Dirac δ^4 en $d\sigma$	55
D.	Tensores leptónicos	57
D.1.	Teorema de trazas	57
D.2.	Tensores leptónicos	58
D.3.	Contracción de tensores leptónicos	62
D.4.	Caso antineutrino	65
	Bibliografía	67

Resumen

Este trabajo incluye una revisión de las propiedades más importantes del neutrino como el sabor, la helicidad y la masa, centrándose especialmente en el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos que describe cambios en el sabor del neutrino en su desplazamiento. Esto último modifica la manera en la que interactúan estas partículas con la materia siendo de gran importancia su comprensión. Por consiguiente, se analiza la probabilidad de oscilación necesaria para estudiar experimentalmente dicho fenómeno. Asimismo, se describe teóricamente el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón, al tratarse de uno de los mecanismos de interacción de los neutrinos con el material activo de los detectores y que permite su detección.

Abstract

This work includes a review of the most important properties of the neutrino such as flavour, helicity and mass, focusing especially on the phenomenon of neutrino oscillations which describes the changes in neutrino flavour in its movement. This modifies the way these particles interact with matter, hence the importance of their comprehension. Therefore, the oscillation probability required to study this phenomenon experimentally is analysed. Furthermore, the elastic neutrino-lepton scattering process is described, as it is one of the mechanisms of interaction of neutrinos with the active material of detectors and allows their detection.

Capítulo 1

Introducción

El neutrino es una partícula elemental que ha planteado diversas incógnitas referentes a su naturaleza desde su descubrimiento. Se trata de un leptón eléctricamente neutro y de masa despreciable que originó la introducción de una nueva fuerza fundamental en la naturaleza, la interacción débil. La participación de los neutrinos en procesos débiles se encuentra estrechamente ligada con la violación de la simetría CP en dicha fuerza fundamental. Por otro lado, la masa del neutrino sigue siendo una incógnita. No obstante, sabemos de su existencia debido a las observaciones que corroboran las oscilaciones de neutrinos, dado que las transiciones de sabor solo se explican en un contexto en el que los neutrinos presentan masa.

El estudio de los neutrinos nos permite profundizar en algunas cuestiones de relevancia tales como el análisis de explosiones de supernovas o la asimetría materia-antimateria en el universo. Debido a su baja probabilidad de interacción con la materia pueden desplazarse grandes distancias sin sufrir ninguna perturbación permitiéndonos estudiar cualquier evento astronómico en el que se produzcan neutrinos. Asimismo, el estudio de la interacción del neutrino con los núcleos que componen el material activo de los detectores aporta información al estudio de la estructura nuclear y hadrónica.

Como vemos, los neutrinos constituyen un prolífero campo de investigación. En consecuencia, este trabajo pretende servir de introducción al mismo. Se divide en tres partes. En el Capítulo 2, se describen las propiedades más importantes del neutrino. En el Capítulo 3, se analiza la probabilidad de oscilación caracterizada por ciertos parámetros cuya determinación experimental es el objetivo principal del estudio de las oscilaciones. Por último, en el Capítulo 4 se describe teóricamente el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón.

Capítulo 2

El neutrino

En este capítulo se hace un breve repaso de la historia del neutrino. Desde su postulado y posterior descubrimiento hasta sus extrañas propiedades cuya descripción aún supone un desafío para los físicos. En este relato es de vital importancia reconocer la figura de Bruno Pontecorvo.

2.1. Postulado y descubrimiento

El neutrino se postuló en un intento de explicar el espectro energético continuo del decaimiento β . En este proceso, un núcleo inestable decae a otro distinto más estable junto con la emisión de una partícula β (electrón o positrón). Conforme a esta descripción, la partícula β debería tener una energía cinética bien definida según el principio de conservación de la energía y el momento. Dicha energía se correspondería con la energía disponible en el proceso, denominada valor Q de la reacción, y daría lugar a un espectro discreto de energía.

No obstante, la determinación experimental del espectro energético del decaimiento β resultó en un continuo de energía (ver Figura 2.1). La distribución de energía de las partículas β emitidas está comprendida entre 0 y el valor Q de la reacción. Es decir, el máximo de energía de la distribución coincide con la energía esperada si se tratara de un proceso de decaimiento en dos cuerpos. Este resultado no es consistente con el principio de conservación de la energía y el momento suponiendo que la partícula β es la única partícula emitida en el proceso. Ello hizo que algunos físicos llegasen a cuestionar la validez del mencionado principio de conservación a escala microscópica.

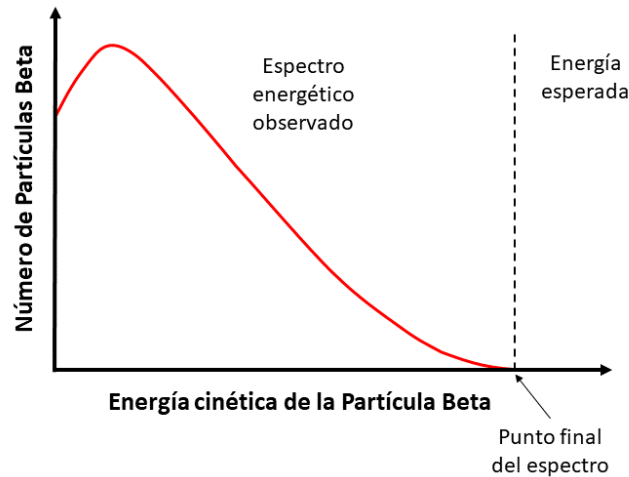


Figura 2.1: Espectro de energía del decaimiento beta. El continuo muestra que la partícula β puede emitirse en un rango de energías inferior a la energía disponible en el proceso.

Sin embargo, en 1930, Wolfgang Pauli postuló que junto a la partícula β debía emitirse otra partícula aún no detectada de tal manera que ambas se repartían la energía disponible en el proceso. Este planteamiento permitía explicar el espectro continuo del decaimiento β y salvaguardar el principio de conservación de la energía y el momento. La nueva partícula se trataría de un fermión de carga y masa nulas al que se denominó neutrino.

Partiendo de este postulado, en 1933, Enrico Fermi desarrolló una teoría del decaimiento β [1]. Podemos distinguir entre decaimiento β^- o decaimiento β^+ dependiendo de si la partícula emitida es un electrón o un positrón, respectivamente. Según esta teoría, en el decaimiento β^- un neutrón se transforma en un protón, un electrón y un antineutrino electrónico mientras que en el decaimiento β^+ un protón se transforma en un neutrón, un positrón y un neutrino electrónico.

$$\beta^- : \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

$$\beta^+ : \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$$

Fermi determinó que las partículas finales se crean durante el propio proceso de decaimiento. El nucleón producido queda ligado al núcleo debido a la intensa fuerza que mantiene unidos a los nucleones en el mismo, mientras el neutrino o antineutrino y la partícula β son emitidos originando la radiación β .

En este contexto la presencia del neutrino también es necesaria para la conservación del momento angular total. Debido a que en el estado inicial tenemos un fermión de espín semientero, necesitamos que el estado final haya un número impar de fermiones para que el acoplo de todos ellos de lugar a un espín semientero.

Una vez postulado el neutrino, debía confirmarse su existencia de manera experimental. Al tratarse de una partícula sin carga, su detección debe inducirse de manera indirecta mediante la detección de los productos que genera al interactuar con la materia. Como la probabilidad de dicha interacción es despreciable, era preciso una fuente que proporcionara un flujo intenso de neutrino o antineutrinos, dependiendo del proceso que se deseara estudiar. De esta manera cabría esperar que alguno de los neutrinos (antineutrinos) interactuara con la materia y pudieran detectarse los productos de la reacción.

En 1956, Frederick Reines y Clyde L. Cowan llevaron a cabo el experimento que permitió detectar de modo indirecto a los antineutrinos [2]. El proceso que estudiaron fue la desintegración beta inversa: $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. Para ello, diseñaron un experimento en el que se evidenciara la presencia del positrón y del neutrón originados en dicho proceso.

En el experimento se empleaba un reactor nuclear de fisión como fuente artificial de antineutrinos. Estos reactores usan como combustible núcleos pesados y ricos en neutrones que experimentan decaimientos β^- en cadena. En cada proceso se emite un antineutrino permitiendo obtener un flujo intenso de los mismos⁽¹⁾. Como detector dispusieron de un tanque de agua con una disolución de cloruro de cadmio (CdCl_2). Esperaban que un antineutrino interactuara con un núcleo de hidrógeno originando un positrón y un neutrón (ver Figura 2.2). Por un lado, el positrón se aniquilaría rápidamente con un electrón del medio: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Este es un proceso muy característico donde se emiten dos fotones en la misma dirección pero sentidos opuestos. Por otro lado, el neutrón experimentaría colisiones con los núcleos del medio hasta perder la suficiente energía como para ser absorbido por un núcleo de cadmio. Éste quedaría en un estado excitado y al desexcitarse emitiría rayos gamma característicos: $n + {}^{108}\text{Cd} \rightarrow {}^{109}\text{Cd}^* \rightarrow {}^{109}\text{Cd} + \gamma$.

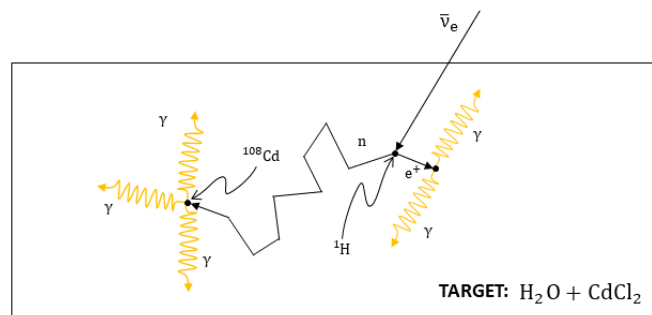


Figura 2.2: Esquema de funcionamiento del detector utilizado por F. Reines y C. L. Cowan.

(1) Anteriormente se había intentado demostrar la existencia del neutrino usando uno de estos reactores sin obtener ningún resultado [1], esto evidencia que existen diferencias entre neutrinos y antineutrinos.

Se estimaba que debía transcurrir un intervalo de $5.5 \mu\text{s}$ entre la primera señal asociada a la aniquilación positrón-electrón y la segunda señal correspondiente a la desexcitación del cadmio. La experiencia verificó el tiempo característico entre señales y observó que se detectaban aproximadamente 3 veces más señales con el reactor encendido que cuando estaba apagado [2]. Este resultado permitió confirmar la existencia del antineutrino.

2.2. Sabor

El estudio de los rayos cósmicos en las décadas de 1930 y 1940 permitió el hallazgo de una nueva propiedad del neutrino denominada sabor. Los rayos cósmicos son radiación de alta energía procedente del espacio exterior, constituida principalmente por protones. Cuando esta radiación interacciona con los átomos de la atmósfera terrestre origina una cascada de partículas secundarias. Por consiguiente se descubrieron nuevas partículas como el pión y el muón [1].

El pión π resultó ser el bosón propuesto en 1935 por Hideki Yukawa como mediador de la interacción fuerte que mantiene unido a los nucleones en el núcleo atómico. Tiene una masa casi 300 veces mayor que la del electrón y una vida media finita siendo su decaimiento principal en un muón y un neutrino. Por su parte, el muón de carga negativa μ^- presenta una masa 200 veces mayor que la del electrón y decae esencialmente en un electrón. Esta partícula no parecía sentir la interacción fuerte, carecía de estructura interna y tenía espín semientero de manera que se trataba de un fermión, como el electrón.

Atendiendo al decaimiento principal del muón podríamos pensar que se trata de un estado excitado del electrón. Se trataría de un proceso puramente electromagnético de decaimiento en dos cuerpos, un electrón y un fotón. No obstante, ese proceso nunca había sido observado. Obsérvese que la existencia de dicho proceso es incompatible con el carácter “elemental” del muón indicado en el párrafo anterior. Así pues, se postuló que junto al electrón se emitían otras dos partículas. Éstas podrían ser neutrinos dado que su carga nula y su baja probabilidad de interacción explicarían por qué no habrían sido detectados. Además, debían tratarse de fermiones para que se conservara el momento angular total en el proceso.

En 1953 se introdujo el número leptónico, un número cuántico aditivo asociado a las partículas leptónicas [1]. Mientras la partícula lleva asociado un número leptónico 1, a su respectiva antipartícula le corresponde un número leptónico -1. Esta cantidad se conserva en todos los procesos de interacción observados.

Si lo aplicamos al decaimiento del muón se induce que en el estado final debemos tener un neutrino y un antineutrino: $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$. Este proceso plantea otra incógnita. Si tenemos un neutrino y un antineutrino salientes, es decir, una partícula y su antipartícula deberían poder aniquilarse y dar lugar a la emisión de radiación electromagnética. Entonces debería poder observarse la desintegración del muón en un electrón y radiación electromagnética, proceso que, como se comentó previamente, no había sido observado.

En 1959, Bruno Pontecorvo postuló que los neutrinos que aparecen ligados a electrones y muones eran distintos al igual que son diferentes electrones y muones [3]. Introdujo una nueva propiedad para clasificar a los leptones denominada sabor y se restringió la conservación del número leptónico por sabores (ver Tabla 2.1). De esta manera, los neutrinos con sabor electrónico aparecerán ligados a electrones mientras los de sabor muónico están asociados a muones.

	e^- ν_e	e^+ $\bar{\nu}_e$	μ^- ν_μ	μ^+ $\bar{\nu}_\mu$
L_e	1	-1	0	0
L_μ	0	0	1	-1

Tabla 2.1: Número leptónico por sabor.

Si aplicamos la conservación del número leptónico por familia de sabor al decaimiento del muón, se concluye que el neutrino presenta sabor muónico mientras el antineutrino posee sabor electrónico: $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Esto explicaría por qué neutrino y antineutrino no se aniquilan, ya que son partícula y antipartícula de partículas distintas.

Una vez postulado el sabor de los neutrinos debía confirmarse experimentalmente. Pontecorvo determinó que del mismo modo que un neutrino ligado a un leptón cargado tenía un sabor leptónico determinado, cuando ese neutrino interaccionase con la materia daría lugar a un leptón cargado del mismo sabor [3]. Es decir, el sabor del neutrino interaccionante determina unívocamente el leptón cargado producido.

La propuesta de experimento consistía en hacer incidir un flujo de neutrinos de un determinado sabor sobre un blanco y analizar los leptones cargados originados como consecuencia de la interacción de los neutrinos con los núcleos atómicos del mismo. Si la hipótesis de Pontecorvo es correcta solo se deberían detectar leptones cargados del mismo sabor que los neutrinos incidentes.

En 1962, el experimento fue llevado a cabo por L. M. Lederman, M. Schwartz y J. Steinberg [4]. Usaron un acelerador de partículas para acelerar protones a 15 GeV que hicieron incidir sobre un objetivo de berilio. Esto ocasionó un flujo de piones que se desintegraban en vuelo en muones y neutrinos. Los muones eran frenados por un muro de hierro mientras los neutrinos lo atravesaban e incidían sobre un bloque de aluminio. Algunos de estos neutrinos interactuaban con los núcleos atómicos del bloque de aluminio dando lugar a leptones cargados que fueron detectados.

Como los neutrinos incidentes presentaban sabor muónico se esperaba que la interacción originase la aparición de muones si la hipótesis de Pontecorvo es correcta. Si no lo era, se debía apreciar el mismo número de leptones cargados con distinto sabor. El experimento determinó que prácticamente todas señales correspondían a muones [4]. La hipótesis de Pontecorvo sobre el sabor de los neutrinos había sido verificada.

En 1975, se anunció el descubrimiento de un nuevo leptón denominado tau τ . Se trata del leptón cargado más pesado con una masa casi 3500 veces la del electrón. Esto permitió introducir un tercer sabor en la familia de leptones (ver Tabla 2.2).

	Leptones cargados				Leptones neutros			
	Nombre	Símb.	Carga	Masa (MeV)	Nombre	Símb.	Carga	Masa (MeV)
1 ^a gen.	Electrón	e^-	-1	0.511	Neutrino electrónico	ν_e	0	$< 0.8 \cdot 10^{-3}$
	Positrón	e^+	+1		Antineutrino electrónico	$\bar{\nu}_e$	0	
2 ^a gen.	Muon	μ^-	-1	105.658	Neutrino muónico	ν_μ	0	< 0.19
	Antimuon	μ^+	+1		Antineutrino muónico	$\bar{\nu}_\mu$	0	
3 ^a gen.	Tau	τ^-	-1	1776.86	Neutrino tauónico	ν_τ	0	< 18.2
	Antitau	τ^+	+1		Antineutrino tauónico	$\bar{\nu}_\tau$	0	

Tabla 2.2: Leptones y sus principales propiedades. Los datos de las masas se han extraído de [5], a excepción de la masa del neutrino electrónico que ha sido extraída de [6].

2.3. Helicidad

Otra propiedad interesante de los neutrinos es su helicidad que está estrechamente ligada con cómo interaccionan estas partículas. La helicidad nos indica el sentido de la proyección de espín a lo largo de la dirección de movimiento. Una helicidad positiva implica que la proyección comparte sentido con la dirección de movimiento mientras una helicidad negativa está asociada a proyecciones en sentido contrario al de movimiento.

Antes del descubrimiento del neutrino se conocían tres fuerzas fundamentales de la naturaleza: electromagnética, fuerte y gravitatoria. No obstante, la fuerza gravitatoria no es relevante a escala microscópica. Los neutrinos no pueden interaccionar mediante las fuerzas fuerte y electromagnética debido a que son partículas sin estructura interna y de carga nula. Por ese motivo fue preciso introducir una nueva interacción fundamental en la naturaleza que fuera responsable de los procesos en los que intervienen neutrinos. Dicha interacción es de corto alcance y de baja intensidad en comparación con las restantes fuerzas fundamentales por lo que se denominó interacción débil.

En el marco de la Teoría Cuántica de Campos (TCC), la interacción débil se describe mediante unas partículas mediadoras que son los bosones vectoriales cargados W^\pm y neutro Z^0 [7]. Esto permite diferenciar dos tipos de procesos débiles: las corrientes cargadas, mediadas por los bosones cargados W^\pm , y las corrientes neutras, mediadas por el bosón neutro Z^0 . Las masas de los bosones vectoriales oscilan en torno a 80-90 GeV explicando por qué el rango de alcance de la interacción débil es tan pequeño⁽²⁾.

Los leptones y antileptones que participan en procesos débiles presentan quiralidad bien definida [8]. La quiralidad, al igual que la helicidad, puede ser positiva o negativa. Concretamente los leptones presentan quiralidad negativa mientras los antileptones tienen quiralidad positiva. La quiralidad es una propiedad fundamental de las partículas, a diferencia de la helicidad que es un observable. No obstante, helicidad y quiralidad coinciden para partículas sin masa. El descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos demostró que los neutrinos tienen masa, aunque al ser tan pequeñas podemos considerar que se desplazan a velocidades cercanas a la de la luz en el vacío. Por ese motivo suele hablarse indistintamente de la helicidad o la quiralidad de los neutrinos.

(2) Los bosones vectoriales presentan unas vidas medias muy pequeñas del orden de 10^{-27} segundos en virtud del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Por consiguiente, los neutrinos y antineutrinos que intervienen en la interacción débil presentan helicidad bien definida. Concretamente los neutrinos tiene helicidad negativa (se denominan “left-handed”) mientras los antineutrinos presentan helicidad positiva (“right-handed”) (ver Figura 2.3). Este resultado tiene grandes consecuencias porque trae consigo la violación de la paridad en la interacción débil, esto quiere decir que los procesos no son invariantes bajo una inversión espacial que da lugar a un cambio en el signo de la helicidad. La violación de la paridad deriva en que los procesos gobernados por la interacción débil solo intervienen leptones left-handed y antileptones right-handed.

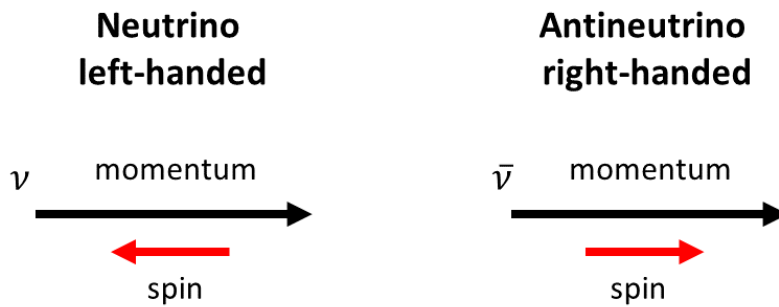


Figura 2.3: Helicidad definida de neutrinos y antineutrinos en procesos débiles.

En 1956, Chien-Shiung Wu llevo a cabo el experimento que demostró la violación de la paridad [9]. Estudió el decaimiento β^- de núcleos de ^{60}Co inmersos en un intenso campo magnético con el objetivo de alinear los espines de las partículas implicadas en el proceso. Si la paridad se conservara debería encontrarse que la mitad de los electrones salientes se emiten con helicidad positiva y la otra con helicidad negativa. Sin embargo, se obtuvo que los electrones salientes presentaban de manera mayoritaria proyección de espín en dirección contraria a la del movimiento confirmando la violación de la paridad.

2.4. Masa

La masa del neutrino se consideraba nula y así quedó recogido en su momento en el Modelo Estándar de Partículas. No obstante, el estudio del flujo de neutrinos solares y atmosféricos ocasionó que se descubriera que los neutrinos podían cambiar de sabor durante su desplazamiento. Esto implicaba que debían tener masa, aunque fuera muy pequeña. Estudios actuales del decaimiento β han estimado que la masa del neutrino electrónico es inferior a 0.8 eV [6].

2.4.1. El problema de los neutrinos solares

Los neutrinos solares presentan sabor electrónico y se originan en los procesos de fusión que tienen lugar en el núcleo del Sol. El mecanismo dominante de fusión en el Sol es la cadena protón-protón que incluye distintos procesos en los que se generan neutrinos electrónicos [10]. La relevancia de este hecho es que en cada proceso se generan neutrinos con espectros de energías distintas (ver Figura 2.4).

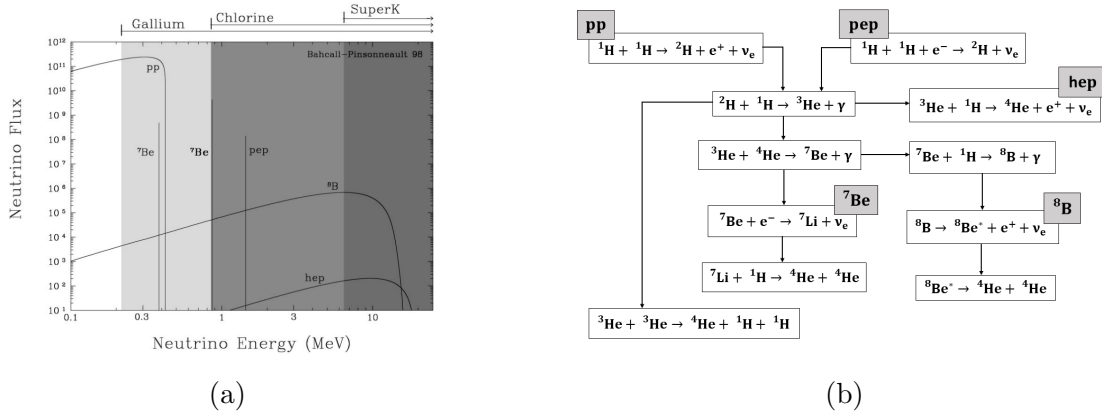


Figura 2.4: El flujo de neutrinos solares (a) originado en cada uno de los procesos de la cadena protón-protón (b) según el Modelo Solar Estándar. El espectro energético incluye información del flujo de neutrino que pueden ser observados en distintos experimentos. La Figura 2.4a ha sido extraída de [11].

La primera medida del flujo de neutrinos solares fue realizada por el experimento Homestake (1965) liderado por Raymond Davis Jr. [12]. El método de detección utilizado está basado en el decaimiento β inverso: $^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow ^{37}\text{Ar} + e^-$. Este proceso presenta una energía umbral de 0.814 MeV de modo que se confiaba en medir el flujo total de neutrinos solares con una energía igual o superior a la umbral. La experiencia observó aproximadamente una tercera parte de los neutrinos solares esperados acorde con el Modelo Solar Estándar [11]. Esta discrepancia fue el origen del *problema de los neutrinos solares*. Debe tenerse en cuenta que esta técnica de detección solo permite conocer el número de neutrinos electrónicos interaccionantes en un cierto intervalo de tiempo de manera que no tenemos información de la energía o dirección de incidencia del neutrino. Por lo que cabe cuestionarse si realmente solo se midieron neutrinos solares.

Posteriormente se realizaron otra serie de observaciones que apreciaron un déficit similar (ver Tabla 2.2). Todo parecía indicar que el modelo teórico sobrestimaba el flujo de neutrinos aproximadamente en un factor 2, aunque las diferencias parecían tener una cierta dependencia con la energía.

	Energía umbral (MeV)	Tasa de recuento		Porcentaje observado del flujo esperado
		Observado	Esperado	
Homestake	0.814	2.56 ± 0.23	$7.7^{+1.2}_{-1.0}$	33 %
SAGE	0.233	67 ± 8	129^{+8}_{-6}	52 %
GALLEX	0.233	78 ± 6	129^{+8}_{-6}	60 %
Kamiokande	5	0.54 ± 0.07	$1.0^{+0.19}_{-0.14}$	54 %
SuperKamiokande	5	0.47 ± 0.02	$1.0^{+0.19}_{-0.14}$	47 %

Tabla 2.3: Discrepancias medidas en distintos experimentos entre el número de neutrinos solares observados y el esperado según el Modelo Solar Estándar. La tasa de recuento está en unidades SNU ($1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ interacciones por blanco atómico por segundo). Los datos contenidos en esta tabla se han extraído de [11].

2.4.2. La anomalía de los neutrinos atmosféricos

Los neutrinos atmosféricos tienen su origen en la interacción de los rayos cósmicos con los núcleos presentes en la atmósfera. Esto provoca una cascada de partículas, entre ellas mesones que pueden decaer en vuelo dando lugar a neutrinos. Estos neutrinos son bastante más energéticos que los procedentes del Sol y se originan principalmente en el decaimiento de piones y muones cuyo espectro energético presenta un pico entorno a 1 GeV [13]. Ambos decaimientos se ilustran a continuación.

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu &\Rightarrow &\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu &\Rightarrow &\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \end{aligned}$$

Atendiendo únicamente a estos procesos, esperaríamos que la proporción entre neutrinos muónicos y electrónicos fuera igual a 2⁽³⁾. Verificar este resultado fue el objetivo de observatorios como Kamiokande (1987) que utilizó un tanque de agua como detector y la técnica Cherenkov para detectar los neutrinos [14].

El método de detección se sustenta en la producción de leptones cargados al interactuar los neutrinos incidentes con el material activo del detector. Los neutrinos pueden interactuar por procesos débiles mediados por corrientes cargadas o por colisiones

(3) El factor de proporción 2 varía con la energía de los neutrinos atmosféricos debido a que para energías mayores comienza a tener relevancia la producción de los mismos por el decaimiento de kaones.

elásticas, este último proceso se estudia en detalle en el Capítulo 4. Si el leptón cargado resultante adquiere una velocidad mayor que la de la luz en dicho medio se emite radiación electromagnética en forma de cono de luz, dando lugar a una señal en forma de anillo.

Esta técnica permite esclarecer el sabor del neutrino interaccionante pues la radiación de Cherenkov de un evento electrónico y muónico proporciona señales distintas. Concretamente, el anillo de un evento muónico está mucho más definido que el de un evento electrónico debido a la diferencia de masas entre los leptones cargados (ver Figura 2.5). Además, posibilita obtener información de la energía y dirección del neutrino incidente mediante la reconstrucción de los conos de luz. Se trata del primer detector de neutrinos que no solo ofrece información sobre el número de eventos acaecidos, de ahí su gran relevancia.

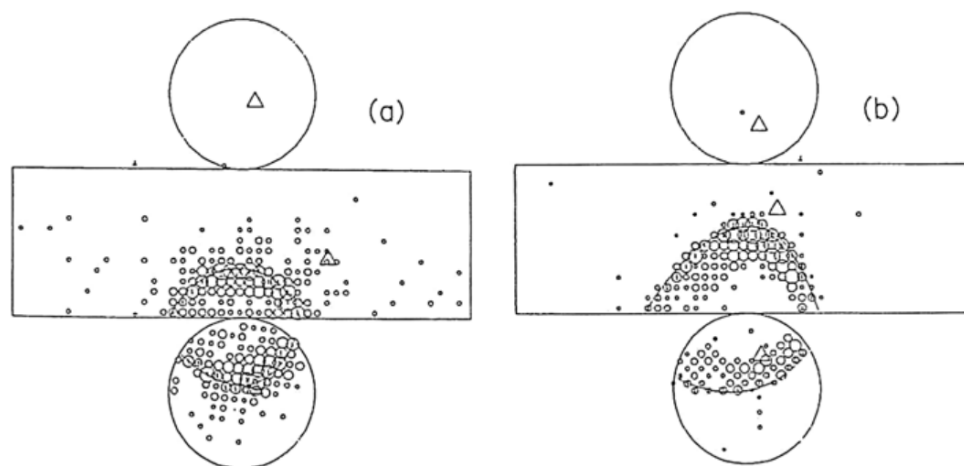


Figura 2.5: El patrón de un evento electrónico (a) y muónico (b) observado en Kamiokande. Los círculos indican la detección de fotones en esa zona del detector siendo su área proporcional al número de fotones observados. La figura ha sido extraída de [14].

Las observaciones mostraron un número similar de neutrinos electrónicos y muónicos, en contradicción con la predicción teórica [14]. Mientras el número de eventos muónicos era muy inferior al esperado, el número de eventos electrónicos estaba en acuerdo con la predicción. Esta discrepancia se denominó *la anomalía de los neutrinos atmosféricos*.

2.4.3. El fenómeno de las oscilaciones de neutrinos

En 1967, B. Pontecorvo introduce por primer vez la posibilidad de que los neutrinos puedan cambiar de sabor [15]. Esto podría permitir explicar el déficit de neutrinos apreciado tanto en las observaciones de neutrinos solares como atmosféricos. La confirmación experimental vendría de la mano de dos experimentos distintos.

2.4.3.1. Descubrimiento de las oscilaciones

Super-Kamiokande se construyó para mejorar la precisión de las medidas de su antecesor, Kamiokande. Comenzó a funcionar en 1996 y publicó sus primeros resultados dos años después. Este detector, que también usa la técnica de Cherenkov, observó la distribución del flujo de neutrinos atmosféricos en función del ángulo cenital Θ (ver Figura 2.6a). Las observaciones mostraron un déficit en el número de neutrinos muónicos que llegaban al detector “desde abajo” tras atravesar la Tierra [14] (ver Figura 2.6b). Todo parecía indicar que una parte del flujo de neutrinos muónicos desaparecía o sufría una transformación en su viaje a través de la Tierra hasta incidir en el detector, mientras que el flujo de neutrinos electrónicos detectado se correspondía con el esperado. Esto sugiere que la transformación dominante de los neutrinos atmosféricos es $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$. Análisis posteriores de eventos tauónicos demostraron la aparición de neutrinos tauónicos en acuerdo con lo esperado en las transformaciones de sabor [16].

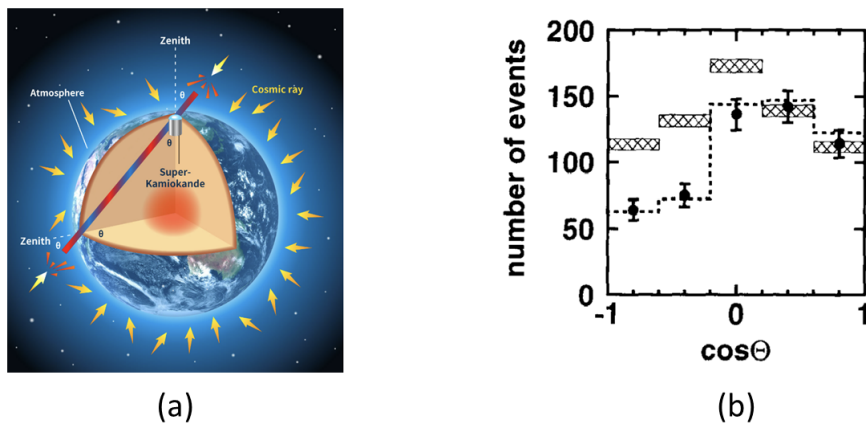


Figura 2.6: Los neutrinos se producen uniformemente en la atmósfera e inciden en el detector desde distintos ángulos cenitales (a) siendo (b) la distribución cenital de eventos muónicos observada en Super-Kamiokande. Las barras rayadas muestran la predicción cuando no se consideran cambios de sabor y la línea discontinua cuando sí se consideran. Las figuras 2.6a y 2.6b han sido extraídas de [17] y [14], respectivamente.

El Sudbury Neutrino Observatory (SNO) es el primer observatorio que pudo medir el flujo de neutrinos solares por sabores [18]. Estuvo operando entre 1999 y 2003. El detector consistía en un tanque de agua pesada D_2O que contiene deuterio. El deuterio es un isótopo estable del hidrógeno cuyo núcleo, denominado deuterón, está formado por un protón y un neutrón. La energía de ligadura de estos nucleones es solo del orden de 2 MeV. Esto quiere decir que cualquier neutrino solar con energía suficiente e independientemente de su sabor pueden romper el deuterón mediante una interacción por corriente neutra.

A continuación se indican los tres mecanismos principales que intervienen en el proceso de interacción de los neutrinos en el medio:

- **Interacción mediante corriente cargada:** $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$.

Este proceso es únicamente sensible a los neutrinos electrónicos. Sirve de control pues debe observar un déficit en el flujo de neutrinos electrónicos en concordancia con los experimentos previos de neutrinos solares [13].

- **Interacción mediante corriente neutra:** $\nu + d \rightarrow n + p + \nu$.

Este proceso permite medir el flujo total de neutrinos sin atender a su sabor [13].

- **Dispersión elástica:** $\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$.

Esta reacción es más sensible a los neutrinos electrónicos debido a que los neutrinos solares no poseen suficiente energía como para producir el leptón cargado correspondiente en el caso de neutrinos muónicos y tauónicos [13].

Los resultados mostraron que el flujo total de neutrinos solares estaba en acuerdo con el Modelo Solar Estándar, demostrando su validez. Asimismo, el flujo total de neutrinos muónicos y tauónicos era aproximadamente 2 veces más intenso que el flujo de neutrinos electrónicos [18]. Esto demuestra que 2/3 de los neutrinos electrónicos están cambiando de sabor en su recorrido del Sol a la Tierra.

El cambio de sabor en los neutrinos había sido confirmado tanto para el caso solar como atmosférico. Esta transformación que sufrían los neutrinos en su trayectoria se denomina *el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos*.

2.4.3.2. Descripción de las oscilaciones

La propuesta de Pontecorvo referente al cambio de sabor de neutrinos planteaba que un neutrino originado en un proceso de interacción débil estuviera descrito por un estado de sabor definido que vendría dado, a su vez, por una combinación lineal de estados de masa definida [19]. Las masas de estos estados son muy próximas entre sí. Por consiguiente, cuando el neutrino se propaga se producen estados de interferencia que modifican la probabilidad de observar un determinado sabor.

Suponiendo que solo existen dos sabores, veremos en un capítulo posterior que la probabilidad de detectar un neutrino de un cierto sabor ν_β que se originó en la fuente con

un sabor distinto ν_α es,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(1.27 \Delta m^2 \frac{L(km)}{E(GeV)} \right). \quad (2.1)$$

Esta ecuación depende de ciertos parámetros de interés.

- **El ángulo de mezcla θ .** Establece cómo de diferentes son los estados de sabor de los estados de masa. Si suponemos $\theta = 0$ vemos que la probabilidad de cambio en el sabor del neutrino se anula y, por ende, el neutrino se propaga de la fuente al detector manteniendo un sabor definido. En otro caso, el sabor del neutrino puede cambiar durante el recorrido al detector. Concretamente, la probabilidad de oscilación se hace máxima cuando $\theta = \pi/4$.
- **La diferencia de masas al cuadrado Δm^2 .** Controla la diferencia de fase entre los estados de masa. Suponiendo que solo existen dos sabores de neutrino, éstos vendrán dado como una combinación lineal de dos estados de masa cuyas masas podemos definir como m_1 y m_2 . En este caso la diferencia de masas al cuadrado viene dada por $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$.

Para que la probabilidad de oscilación sea no nula es preciso que este parámetro sea distinto de cero. Es decir, ambas masas no pueden ser iguales y al menos una de ellas debe ser no nula. La principal implicación de este resultado es que los neutrinos deben tener masa para que las transiciones de sabor puedan tener lugar.

El estudio de las oscilaciones nos brinda información sobre este parámetro pero no sobre los valores de cada masa. Tampoco conocemos la jerarquía de masas puesto que si hacemos el intercambio $\Delta m^2 \rightarrow -\Delta m^2$ la probabilidad de oscilación no varía, aunque sí sabemos que m_1 o m_2 debe ser mayor o igual que $|\Delta m^2|$.

- **El cociente L/E .** El cociente entre la distancia fuente-detector L y la energía del flujo de neutrinos E es el parámetro que se puede controlar experimentalmente. Permite diseñar los experimentos que estudian las oscilaciones con fuentes artificiales de manera que presenten la máxima sensibilidad posible a las mismas.

Es de interés introducir el caso de 2 sabores porque permite comprobar de manera cuantitativa que el déficit observado en los experimentos de neutrinos solares y atmosféricos tiene su explicación en el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos. Especialmente puede verse en el caso de neutrinos atmosféricos donde la transformación dominante es

$\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ para aquellos que inciden en el detector “desde abajo” mientras que no se aprecia ningún cambio para los que inciden “desde arriba”. Supongamos que la energía promedio de estos neutrinos es de 1 GeV y que $\Delta m_{atm}^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$. Los neutrinos que inciden en el detector “desde arriba” recorren una distancia de aproximadamente 20 km. Introduciendo estos valores en 2.1 se comprueba que la probabilidad de oscilación es prácticamente nula.

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= \sin^2(2\theta_{atm}) \sin^2\left(1.27\Delta m_{atm}^2 \frac{L}{E_\nu}\right) \\ &= \sin^2(2\theta_{atm}) \sin^2(0.00127) \leq \sin^2(0.00127) = 6.5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Mientras que los neutrinos que inciden en el detector “desde abajo” recorren una distancia de aproximadamente $13 \cdot 10^3$ km y presentan una probabilidad de oscilación no nula, en acuerdo con lo observado.

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= \sin^2(2\theta_{atm}) \sin^2\left(1.27\Delta m_{atm}^2 \frac{L}{E_\nu}\right) \\ &= \sin^2(2\theta_{atm}) \sin^2(16.51) \leq \sin^2(16.51) = 0.52 \end{aligned}$$

En el caso de neutrinos solares deben tenerse en cuenta los efectos de la materia en las oscilaciones, contenido que escapa al de este trabajo. Aun así sabemos que el mecanismo dominante de oscilación de estos neutrinos es $\nu_e \leftrightarrow \nu_x$ siendo ν_x una combinación lineal de ν_μ y ν_τ . Estos neutrinos recorren una distancia de aproximadamente 10^8 km. Supongamos que su energía promedio es de 1 MeV y que $\Delta m_{sol}^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^{2(4)}$. Aplicando estos valores en 2.1 podemos ver que la probabilidad de oscilación es no nula.

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_x) &= \sin^2(2\theta_{sol}) \sin^2\left(1.27\Delta m_{sol}^2 \frac{L}{E_\nu}\right) \\ &= \sin^2(2\theta_{sol}) \sin^2(16.51) \leq \sin^2(16.51) = 0.79 \end{aligned}$$

2.4.3.3. ¿Cómo se estudian las oscilaciones?

El estudio de las oscilaciones busca determinar experimentalmente los parámetros característicos de las mismas como son el ángulo de mezcla θ y la diferencia de masas al cuadrado Δm^2 . En estos experimentos se determina el cambio del flujo de neutrinos de un determinado sabor procedentes de fuentes naturales o artificiales para posteriormente compararlo con los modelos teóricos.

El estudio de las oscilaciones con fuentes naturales requiere conocer el flujo de neutri-

(4) En el capítulo 3 se justifica la magnitud introducida para el valor del parámetro Δm^2 correspondiente a neutrinos atmosféricos y solares.

nos que origina dicha fuente. Para eso es necesario disponer de modelos teóricos precisos que describan la producción de neutrinos en las distintas fuentes naturales. Por el contrario, el estudio de las oscilaciones de neutrinos con fuentes artificiales, como son los reactores nucleares de fisión o los aceleradores de partículas, necesita de un dispositivo experimental específico. Este consta de un detector situado junto a la fuente artificial que mide el espectro energético de los neutrinos antes de que experimenten alguna oscilación. Este se denomina detector cercano. A una cierta distancia se sitúa otro detector, denominado detector lejano, que mide el espectro energético de los neutrinos una vez han experimentado cambios de sabor. Un esquema de este tipo de dispositivos experimentales se ilustra en la Figura 2.7 para el experimento T2K.

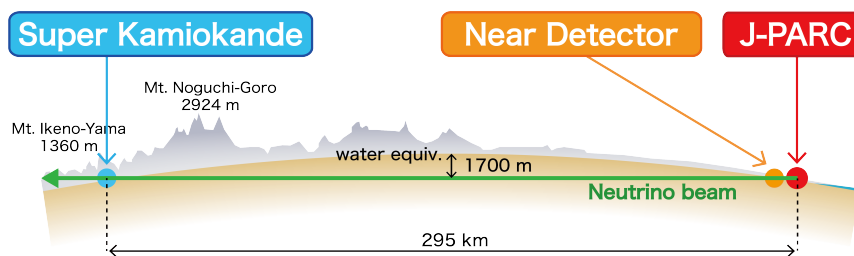


Figura 2.7: Esquema del experimento T2K (Tokai to Kamioka) donde un haz de neutrinos es originado en el acelerador de protones del laboratorio J-PARC y enviado en dirección al detector Super-Kamiokande. La figura ha sido extraída de [20].

Tanto en el estudio con fuentes naturales como artificiales, podemos considerar dos tipos de experimentos:

- **Experimentos de desaparición.** Estos experimentos miden el espectro energético de neutrinos del mismo sabor que los que fueron originados en la fuente. El cociente entre el espectro energético medido y el de la fuente se corresponde con la probabilidad de supervivencia de dicho sabor en función de la energía.
- **Experimentos de aparición.** Estos experimentos miden el espectro energético de neutrinos de un determinado sabor, distinto con el que fueron creados en la fuente. En este caso, el cociente entre el espectro energético medido y el de la fuente está asociado a la probabilidad de oscilación entre ambos sabores en función de la energía.

La dificultad de estos experimentos reside en saber interpretar las señales de los detectores de manera que se asocien a su correspondiente proceso. Esto requiere un estudio cuidadoso de las señales y un conocimiento extenso de como pueden interaccionar las

partículas con el material activo del detector. Es relevante el estudio de las interacciones neutrino-núcleo dado que a las energías propias de los experimentos los efectos nucleares son muy significativos (para más información consultar [21]). También es necesario realizar medidas y estudios del fondo para conocer el efecto del resto de partículas que pueden estar interaccionando con el detector. En este sentido son menos útiles los experimentos de aparición pues requieren de un cuidado extra con el objeto de no asociar un evento del fondo a un neutrino del sabor buscado.

Otros aspectos importantes son la energía del flujo de neutrinos o la distancia entre la fuente y el detector. En el caso de fuentes naturales el cociente L/E está fijado por la naturaleza pero no es así cuando estudiamos las oscilaciones con fuentes artificiales. En este caso los experimentos deben diseñarse de manera que tengan la máxima sensibilidad posible a las oscilaciones. Es decir, debe intentarse que

$$1.27\Delta m^2 \frac{L}{E} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{E} = \frac{\pi}{2.54\Delta m^2}.$$

Lo más simple sería aumentar la distancia L mientras se disminuye la energía E . No obstante, el haz de neutrinos diverge en su desplazamiento aumentando su sección transversal como L^2 [13]. Esto implica que al aumentar la distancia entre la fuente y el detector necesitamos que el material activo del detector presente un volumen mayor para que incida sobre él un número relevante de neutrinos. Por otro lado, la sección eficaz de los procesos en los que intervienen neutrinos es proporcional a la energía de estos [13]. En consecuencia, a medida que disminuimos la energía debemos tener un mayor tiempo el detector funcionando para obtener un número de eventos significativos. Atendiendo a estos hechos, los dispositivos experimentales se diseñan con el mejor compromiso entre sensibilidad a las oscilaciones y costes.

En función de si deseamos estudiar los parámetros solares o atmosféricos necesitamos distintas fuentes artificiales de neutrinos. Para los parámetros atmosféricos se requiere encontrar una combinación L/E compatible con $\Delta m^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$. En estos casos se utilizan aceleradores de partículas como fuente artificial de neutrinos que presentan energías del orden de 1 GeV. Mientras que para los parámetros solares se necesita de una combinación L/E compatible con $\Delta m^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$. Por lo que en este caso se utilizan reactores como fuente artificial de antineutrinos que presentan energías del orden de 1 MeV. Ambos casos solo precisan de una distancia entre la fuente y detector del orden de cientos de kilómetros.

Capítulo 3

Análisis de la probabilidad de oscilación de neutrinos

En este capítulo se estudian las relaciones matemáticas que describen las oscilaciones de neutrinos en el vacío [22]. Indicar que se trabajará en el sistema natural de unidades de manera que $\hbar = c = 1$ siendo \hbar la constante reducida de Planck y c la velocidad de la luz en el vacío.

3.1. Desarrollo de la expresión general en el vacío

Consideremos un neutrino de sabor α , momento \vec{p} y helicidad -1 que ha sido creado en un proceso de interacción débil mediado por corrientes cargadas. Es decir, ha surgido como consecuencia de la destrucción del correspondiente leptón cargado l_α^- o junto al respectivo antileptón cargado l_α^+ . En cuanto al sabor α puede ser cualquiera de los tres sabores leptónicos conocidos: electrónico, muónico o tauónico.

Este neutrino está descrito por el estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ que viene dado, a su vez, por una combinación lineal de estados de masa $|\nu_k\rangle$ según:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1,2,3} U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle. \quad (3.1)$$

Los coeficientes $U_{\alpha k}^*$ representan los pesos que tienen los estados de masa $|\nu_k\rangle$ en el estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$. Constituyen los elementos de una matriz denominada matriz de mezcla U que, en general, puede ser compleja. Durante el desarrollo veremos que es necesario exigirle a la matriz de mezcla que sea unitaria para que los resultados sean

consistentes. Esto implica que el número de estados de masa coincide con el número de sabores. Por otro lado, la unitariedad de la matriz de mezcla supone que $U^\dagger U = 1$ o, equivalentemente, que

$$\sum_{\alpha} U_{k\alpha}^\dagger U_{\alpha j} = \sum_{\alpha} U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} = \delta_{kj}. \quad (3.2)$$

Los estados de masa $|\nu_k\rangle$ describen neutrinos de masa m_k , momento \vec{p} y helicidad -1 . Estos son autoestados del hamiltoniano libre H con autovalor

$$E_k = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_k^2}. \quad (3.3)$$

Supondremos que los estados de masa son ortonormales en un volumen de normalización finito V : $\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}$. En consecuencia, los estados de sabor también serán ortonormales debido a la unitariedad de la matriz de mezcla: $\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

La evolución temporal de los estados de masa $|\nu_k\rangle$ viene dada por la ecuación de Dirac

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_k(t)\rangle = H |\nu_k(t)\rangle, \quad (3.4)$$

cuya solución tiene la forma

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle ; |\nu_k\rangle = |\nu_k(t=0)\rangle. \quad (3.5)$$

Conocida la evolución temporal de los estados de masa, nos interesa saber cómo progresan en el tiempo los estados de sabor. Concretamente cómo lo hacen en función de estados de sabor definidos. Esto nos permitirá determinar la probabilidad de transiciones en las que tengan lugar cambios de sabor.

Consideremos el estado de sabor $|\nu_\alpha(t)\rangle$ que describe la evolución temporal de nuestro neutrino que fue originado con sabor α en el tiempo $t = 0$. Usando las ecuaciones 3.1 y 3.5 podemos obtener la evolución temporal de dicho estado.

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (3.6)$$

Reescribimos el estado de masa $|\nu_k\rangle$ en función del estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$. Para ello invertimos la ecuación 3.1 mediante la relación de unitariedad 3.2 obteniendo

$$|\nu_k\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \quad (3.7)$$

Sustituyendo 3.7 en 3.6 resulta

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left[\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t} \right] |\nu_\beta\rangle. \quad (3.8)$$

Podemos apreciar como en $t = 0$ tenemos el estado de sabor puro $|\nu_\alpha\rangle$ debido a la relación de unitariedad 3.2. Por el contrario, en $t > 0$ obtenemos una superposición de diferentes estados de sabor puro, siempre y cuando la matriz de mezcla no sea diagonal. Si lo fuera, el neutrino estaría descrito por un estado de sabor puro en todo su desplazamiento y no observaríamos ningún cambio.

A partir de la ecuación 3.8 puede determinarse que la amplitud de la transición de sabor $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ en función del tiempo resulta

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t}. \quad (3.9)$$

Mientras que la probabilidad de dicha transición en función del tiempo es

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (3.10)$$

Consideraremos a los neutrinos como partículas ultrarelativistas dado que su masa es muy pequeña y, por consiguiente, también lo serán las masas m_k . Entonces $E_k \gg m_k$ y la energía del neutrino $E \approx |\vec{p}|$ permitiéndonos aproximar 3.3 por

$$E_k \approx |\vec{p}| + \frac{m_k^2}{2|\vec{p}|} \approx E + \frac{m_k^2}{2E} \rightarrow E_k - E_j \approx \frac{m_k^2 - m_j^2}{2E} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} \quad (3.11)$$

con $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$ la diferencia de masas al cuadrado.

Introduciendo 3.11 en 3.10 podemos aproximar la probabilidad de transición por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \approx \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t\right). \quad (3.12)$$

Esta ecuación se corresponde con la expresión general de la probabilidad de transición en función del tiempo en la aproximación del neutrino ultrarelativista. Sin embargo, el tiempo de propagación t no es una magnitud que se mida experimentalmente en las observaciones de oscilaciones de neutrinos. No obstante, sí se conoce la distancia L recorrida por el neutrino. Teniendo en cuenta que estamos considerando que el neutrino se propaga

a una velocidad próxima a la de la luz en el vacío, podemos suponer que $t \approx L$. En ese caso, reescribimos la probabilidad de transición 3.12 como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right). \quad (3.13)$$

En esta última expresión se aprecia que la fase de oscilación depende de la distancia de la fuente al detector L , de la energía del neutrino E y de la diferencia de masas al cuadrado Δm_{kj}^2 . Mientras que la amplitud de la oscilación depende únicamente de los elementos de la matriz de mezcla U . Tanto los parámetros Δm_{kj}^2 como los elementos de la matriz de mezcla U son constantes de la naturaleza y sus estimaciones son el cometido principal de los experimentos de oscilaciones de neutrinos.

Haciendo uso de las relaciones de unitariedad 3.2 en 3.13 vemos que la probabilidad de transición $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L=0, E) = \delta_{\alpha\beta}$. Este resultado es consistente con el hecho de que los neutrinos se originan con un sabor definido y que es en su propagación cuando existe probabilidad de cambio de sabor.

Más importante aún, la unitariedad de la matriz de mezcla implica la conservación de la probabilidad de manera que estamos considerando todas las transiciones de sabor posibles [22]. Mediante 3.2 y 3.13 se puede comprobar que:

- La suma de las probabilidades la transición $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ siendo β todos los sabores posibles, incluido α , es la unidad: $\sum_\beta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1$.
- La suma de las probabilidades la transición $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ siendo α todos los sabores posibles, incluido β , es la unidad: $\sum_\alpha P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1$.

Otra manera de expresar la probabilidad de transición 3.13 es separar la parte real e imaginaria del producto de los cuatro elementos de la matriz de mezcla (ver apéndice A).

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \operatorname{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \right] \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \\ &+ 2 \sum_{k>j} \operatorname{Im} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando la relación 3.2 y un desarrollo similar al del apéndice A se obtiene que

$$\sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \text{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*). \quad (3.15)$$

Lo nos permite llegar a la expresión

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \text{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \right] + 2 \sum_{k>j} \text{Im} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \quad (3.16)$$

De donde deducimos que la probabilidad de la transición $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ siendo $\alpha \neq \beta$ es

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{k>j} \text{Im} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \quad (3.17)$$

Mientras que la probabilidad de supervivencia se obtiene cuando $\alpha = \beta$. En este caso el producto de los cuatro elementos de matriz es real de manera que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - 4 \sum_{k>j} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right). \quad (3.18)$$

Podemos hacer un desarrollo similar para la oscilación de antineutrinos. Supondremos un antineutrino que se ha originado con un sabor α , momento \vec{p} y helicidad +1 en un proceso de interacción débil mediado por corrientes cargadas. Este antineutrino estará descrito por un estado de sabor $|\bar{\nu}_\alpha\rangle$ que, a su vez, vendrá dado como una combinación lineal de estados de masa $|\bar{\nu}_k\rangle$ del siguiente modo:

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k} |\bar{\nu}_k\rangle. \quad (3.19)$$

En este caso, los estados de masa $|\bar{\nu}_k\rangle$ describen a un antineutrino de masa m_k , momento \vec{p} y helicidad +1. Si comparamos 3.19 con el desarrollo para neutrinos 3.1 vemos que la única diferencia es que en este caso aparece el complejo conjugado del mismo elemento de matriz. Esto da lugar a que la probabilidad de transición $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$ sea

$$\begin{aligned}
P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = & \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) \\
& - 2 \sum_{k>j} \operatorname{Im} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Obsérvese el cambio de signo del último término relacionado con la parte imaginaria del producto de los cuatro elementos de matriz con respecto al caso de neutrinos (ver ecuación 3.17). Este resultado no es baladí pues nos está indicando que si la matriz de mezcla U es imaginaria, entonces las oscilaciones de neutrinos y antineutrinos son distintas. Esta asimetría estaría relacionada con una posible violación de la simetría CP. Dicha simetría está asociada a la invarianza del sistema frente a una transformación simultánea de conjugación de carga y paridad, que lo que hace es intercambiar neutrinos left-handed por antineutrinos right-handed y viceversa. Esta asimetría queda recogida en el parámetro:

$$\delta_{\alpha\beta}^{CP} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = 4 \sum_{k>j} \operatorname{Im} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \quad (3.21)$$

Su valor no puede medirse directamente pero sí estimarse mediante las medidas de oscilaciones que impliquen cambio de sabor, dado que la probabilidad de supervivencia tanto para el caso de neutrinos como antineutrinos coincide debido a que solo implica la parte real del producto de los cuatro elementos de matriz.

Las probabilidades de oscilación y supervivencia tanto para el caso de neutrinos como de antineutrinos son invariantes bajo transformaciones T que lo que hacen es invertir el orden temporal del proceso. Por tanto, la probabilidad de la transformación $\nu_\alpha(\bar{\nu}_\alpha) \rightarrow \nu_\beta(\bar{\nu}_\beta)$ es la misma que la de $\nu_\beta(\bar{\nu}_\beta) \rightarrow \nu_\alpha(\bar{\nu}_\alpha)$.

3.2. El caso de 2 sabores

Consideremos ahora que solo existen 2 sabores, α y β , descritos por los estados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ y $|\nu_\beta\rangle$ respectivamente. Estos sabores pueden ser sabores puros o una combinación lineal de sabores puros. En este caso tendremos únicamente dos estados de masa $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$ con masas m_1 y m_2 respectivamente. Por conveniencia, supondremos que $m_2 > m_1$ de manera que la diferencia de masas al cuadrado $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ sea definida positiva.

En cuanto a la matriz de mezcla U se reduce a una matriz 2x2 que viene dada por

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

La matriz 3.22 describe una rotación caracterizada por un parámetro θ que es el ángulo de mezcla entre los estados de sabor y los estados de masa. Introduciendo los elementos de esta matriz en la probabilidad de transición 3.17 obtenemos que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \quad \text{siendo } \alpha \neq \beta. \quad (3.23)$$

Mientras que la probabilidad de supervivencia ($\alpha = \beta$) se determina a partir de 3.23 teniendo en cuenta que la probabilidad debe conservarse:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right). \quad (3.24)$$

En este caso la matriz de mezcla 3.22 no incluye ninguna fase δ_{CP} que indique una violación de la simetría CP, de manera que las probabilidad de oscilación de neutrinos y antineutrinos coinciden:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 - P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = 1 - P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha}(L, E). \quad (3.25)$$

El modelo de 2 sabores es adecuado para analizar los datos de aquellos experimentos que no sean sensibles a los 3 sabores y tiene la ventaja de que incluye menos parámetros que el modelo de 3 sabores. Como veremos a continuación, es útil para analizar la transición $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ dominante en las oscilaciones de neutrinos atmosféricos. No obstante, también permite estudiar los neutrinos solares cuya transición principal es $\nu_e \leftrightarrow \nu_x$ siendo ν_x una combinación lineal de los neutrinos muónicos ν_μ y tauónicos ν_τ . Solo que en este caso es necesario tener en cuenta los efectos de la materia en las oscilaciones, lo que puede modificar apreciablemente los valores de los parámetros de oscilación respecto al vacío.

Antes de comprobar la precisión del modelo aplicándolo a un caso práctico vamos a analizar la expresión de la probabilidad de transición 3.23 y verificar el efecto que tienen los parámetros de oscilación. Es recomendable reescribirla del siguiente modo:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(1.27 \frac{\Delta m^2(eV^2)L(km)}{E(GeV)}\right) \quad (3.26)$$

Recuérdese que tanto los neutrinos solares como los procedentes de reactores nucleares tienen energía del orden del MeV, mientras que los neutrinos atmosféricos y los originados en aceleradores de partículas tiene energías del orden del GeV.

Consideraremos el proceso de transformación $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ caracterizado por los parámetros $\Delta m_{21}^2 = 7.37_{-0.44}^{+0.59} \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ y $\sin^2 \theta_{12} = 0.297_{-0.057}^{+0.057}$ que presentan una precisión de 3σ [23]. Comenzamos estudiando la dependencia de la probabilidad de oscilación 3.26 con el cociente L/E. Para ello, representamos dicha probabilidad frente al cociente L/E fijando $\sin^2 \theta_{12}$ y Δm_{21}^2 en sus valores de mejor ajuste (ver Figura 3.1). Observe cómo la probabilidad de oscilación es prácticamente nula hasta que alcanza un máximo cuando:

$$1.27\Delta m_{21}^2 \frac{L}{E} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{E} = \frac{\pi}{2.54\Delta m_{21}^2} = 1.672 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{GeV}}.$$

A partir de ese punto la probabilidad empieza a oscilar rápidamente. Por este motivo es importante controlar el cociente L/E cuando se diseñan los experimentos que pretenden observar las oscilaciones de neutrinos. Este análisis es el que permite estimar previamente que $\Delta m_{sol}^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$ y $\Delta m_{atm}^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ debido a que el cociente L/E está fijado por la naturaleza en estos casos. No obstante, el resultado para los neutrinos solares no es tan directo como consecuencia de los efectos de la materia en las oscilaciones.

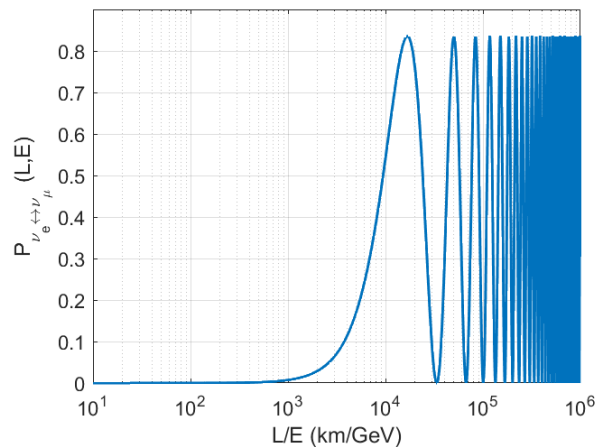


Figura 3.1: Dependencia de la probabilidad de oscilación $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ con el cociente L/E en el modelo de 2 sabores. Se ha tomado $\sin^2 \theta_{12} = 0.297$ y $\Delta m_{21}^2 = 7.37 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$.

Usando los valores previos de los parámetros $\sin^2 \theta_{12}$ y Δm_{21}^2 , veamos ahora la dependencia por separado de la distancia entre la fuente y el detector L (ver Figura 3.2a) y de la energía del flujo de neutrinos E (ver Figura 3.2b). Las representaciones muestran que conforme disminuye la distancia L es necesario considerar energías E más pequeñas para poder apreciar las oscilaciones y viceversa.

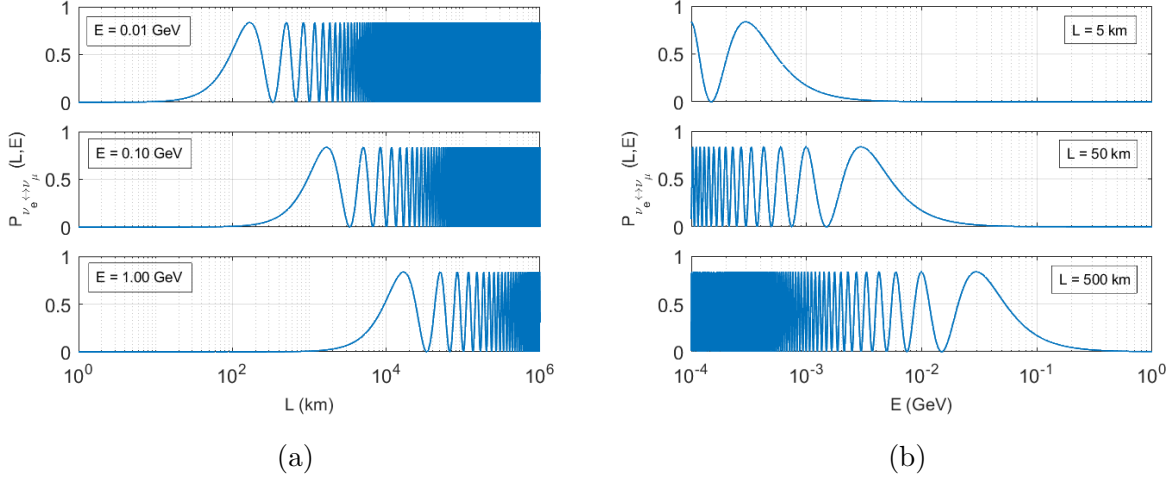


Figura 3.2: Dependencia de la probabilidad de oscilación $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ con la distancia de la fuente al detector L (a) y la energía del neutrino E (b) en el modelo de 2 sabores.

Analizaremos finalmente la dependencia con los parámetros Δm_{21}^2 y $\sin^2 \theta_{12}$. Por consiguiente, hemos representado 3.26 frente al cociente L/E . Inicialmente fijamos el valor de mejor ajuste de Δm_{21}^2 y modificamos el valor de $\sin^2 \theta_{12}$ dentro de su rango de validez (ver Figura 3.3a). Posteriormente es el valor de $\sin^2 \theta_{12}$ el que fijamos y cambiamos el valor de Δm_{21}^2 en su rango de validez (ver Figura 3.3b).

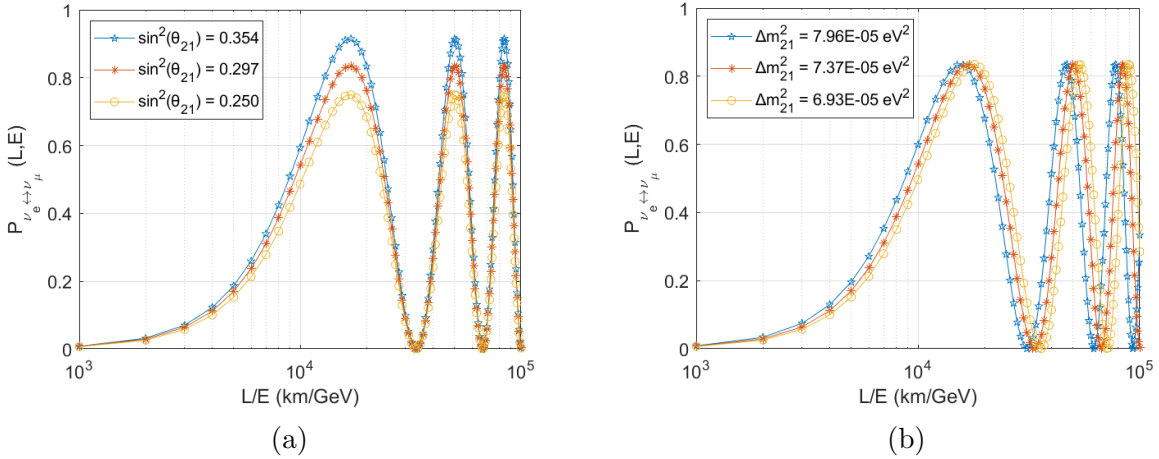


Figura 3.3: Dependencia de la probabilidad de oscilación $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ con $\sin^2 \theta_{12}$ (a) y con Δm_{21}^2 (b) en el modelo de 2 sabores.

Los resultados muestran que $\sin^2 \theta_{12}$ controla la amplitud de la probabilidad de oscilación (ver Figura 3.3a) de manera que cuanto menor sea el ángulo de mezcla θ_{12} menor es la amplitud. Mientras Δm_{21}^2 hace lo propio con la fase de dicha probabilidad (ver Figura 3.3b) de modo que la probabilidad de oscilación alcanza antes su primer máximo conforme aumenta el valor de Δm_{21}^2 .

Por último, comprobaremos la precisión del modelo de 2 sabores aplicándolo a un caso práctico. Consideraremos las observaciones de neutrinos atmosféricos llevadas a cabo por Super-Kamiokande e intentaremos reproducirlas con este modelo. Sabemos que el proceso dominante en este caso es $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ que está caracterizado por los parámetros $\sin^2 \theta_{23} = 0.589$ y $\Delta m_{23}^2 = 2.54 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ que son sus valores de mejor ajuste [23].

Analizamos en primer lugar la probabilidad de oscilación de neutrinos muónicos en función del ángulo acimutal Θ . Para reproducir los datos de Super-Kamiokande se ha redefinido la distancia entre la fuente y el detector L en función del coseno del ángulo acimutal. Asimismo, se ha tomado un valor promedio para la energía del flujo de neutrinos muónicos que ha sido calculado atendiendo al flujo observado en Super-Kamiokande [24]. Este último presenta un espectro energético comprendido entre 0.309 y $2.46 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ obteniéndose que el valor promedio de la energía pesada por el flujo es 0.476 GeV .

Los resultados se muestran en la Figura 3.4. Como los datos extraídos de la bibliografía aparecen en intervalos, ha sido necesario promediar la probabilidad de oscilación del modelo teórico en dichos intervalos. Aunque los resultados difieren para algunos valores, observamos que la tendencia general es la misma. Recuérdese que se ha tomado un valor promedio de la energía en lugar de considerar todo el espectro energético del flujo de neutrinos muónicos, introduciendo de este modo una cierta incertidumbre en la comparación con los datos.

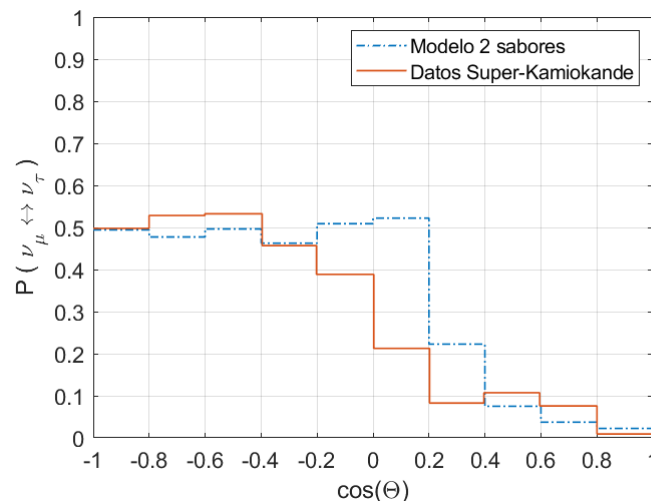


Figura 3.4: Comparación entre los datos de Super-Kamiokande (línea continua) y el modelo de 2 sabores (línea con puntos) de la probabilidad de oscilación de neutrinos atmosféricos de sabor muónico en función del ángulo acimutal. Los datos de Super-Kamiokande se han extraído de [17].

A continuación presentamos en la Figura 3.5 el análisis de la probabilidad de supervivencia de neutrinos muónicos en función del ángulo L/E . En este caso, la representación del modelo de 2 sabores solo depende de los parámetros de oscilación $\sin^2 \theta_{23}$ y Δm_{23}^2 . Por consiguiente, deberemos reproducir de manera más fidedigna los datos de Super-Kamiokande. Al igual que en la representación anterior, se ha promediado la probabilidad de supervivencia en intervalos equidistantes de acuerdo con la distribución de los datos en la bibliografía [25]. En este caso volvemos a apreciar que el modelo de 2 sabores es capaz de reproducir las observaciones, mostrando con bastante precisión el punto en el cual comienza a existir probabilidad de oscilación.

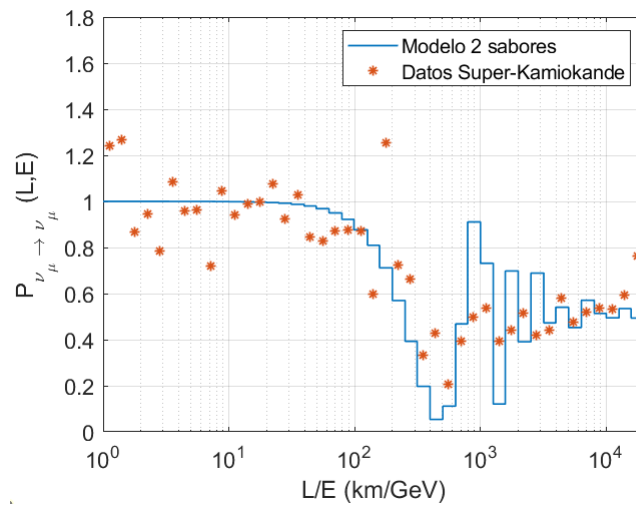


Figura 3.5: Comparación entre los datos de Super-Kamiokande (estrellas) y el modelo de 2 sabores (línea continua) de la probabilidad de supervivencia de neutrinos muónico en función del cociente L/E . Los datos de Super-Kamiokande se han extraído de [25].

Estos dos análisis muestran la precisión del modelo de 2 sabores para reproducir ciertas observaciones, sin necesidad de recurrir al modelo de 3 sabores. No obstante, es de esperar que el modelo de 3 sabores introduzca algunas correcciones que mejoren el ajuste, así como el uso del flujo observado en Super-Kamiokande en lugar del promedio de energías pesado por el flujo.

3.3. Matriz PMNS y parámetros de oscilación

La matriz de mezcla U para el caso de 3 sabores leptónicos se suele parametrizar mediante tres ángulos de mezcla (θ_{12} , θ_{23} y θ_{13}) y un factor de fase (δ_{CP}) relacionado con la posible violación de la simetría CP. Se denomina matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-

Sakata (o matriz PMNS) [13], y tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

donde s_{ij} y c_{ij} se usan para denotar $\sin \theta_{ij}$ y $\cos \theta_{ij}$, respectivamente. Si nos centramos en su expresión como el producto de tres matrices, vemos que se encuentran separadas por sectores: la primera se corresponde con el sector 23 asociado a los parámetros atmosféricos, la segunda con el sector 13 que incluye la posible violación CP y la tercera con el sector 12 asociado los parámetros solares.

Tal como se ha comentado, la matriz PMNS incluye 3 ángulos de oscilación y un factor de fase (θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} y δ_{CP}) que, junto a las 3 diferencias de masas al cuadrado (Δm_{12}^2 , Δm_{23}^2 y Δm_{31}^2), conducen a un total de 7 parámetros de oscilación. No obstante, solo 2 de las diferencias de masas al cuadrado son independientes (Δm_{12}^2 , Δm_{23}^2) puesto que la tercera se obtiene de la relación $\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2 + \Delta m_{31}^2 = 0$.

En el capítulo anterior se mencionó cómo se determinan experimentalmente estos parámetros de oscilación mediante el estudio de las oscilaciones de neutrinos. El procedimiento consiste en comparar los datos experimentales con las expresiones teóricas que describen dicho fenómeno como son la probabilidad de oscilación o supervivencia, dependiendo de la transformación en estudio.

Obsérvese que tanto la probabilidad de oscilación como de supervivencia son funciones que dependen simultáneamente de varios parámetros de manera que distintas combinaciones de los mismos reproducen las mismas probabilidades. Esto ocasiona que se obtenga un intervalo de valores posibles para cada uno. Para mejorar la precisión en las medidas es preciso del análisis de datos de distintos experimentos que además presenten diversas sensibilidades a cada uno de los parámetros [13].

Capítulo 4

Dispersión elástica neutrino-leptón

En este capítulo estudiaremos el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón ($\nu - l$) y analizaremos su sección eficaz debido a su importancia y aplicación al estudio de las oscilaciones de neutrinos⁽¹⁾.

4.1. Relevancia del proceso

La dispersión elástica neutrino-leptón es un proceso puramente leptónico cuya sección eficaz está bien descrita teóricamente [26]. Se trata de un proceso débil que puede ser mediado tanto por corrientes cargadas como neutras siempre que el neutrino y el leptón presenten el mismo sabor leptónico. En caso contrario, este proceso solo puede estar mediado por corrientes neutras.

La dispersión elástica neutrino-electrón fue un proceso de gran relevancia en el descubrimiento de las oscilaciones de neutrino ([14], [18]) así como en los actuales experimentos que estudian los parámetros de dichas oscilaciones ([27], [28]). Esto es debido a la enorme presencia de electrones atómicos en el material activo de los detectores con los cuales los neutrinos pueden interaccionar.

Recuerde que el estudio de las oscilaciones de neutrinos requiere de medidas precisas del flujo de neutrinos. Si bien las interacciones entre neutrinos y los nucleones que forman los núcleos del material activo del detector son dominantes y proporcionan mayores eventos detectados a nivel experimental, aún existen bastantes incertidumbres asociadas al medio nuclear para describirlos con gran precisión. En cambio, la dispersión neutrino-leptón es

(1) En los cálculos posteriores se seguirá trabajando en el sistema natural de unidades de manera que $\hbar = c = 1$.

un proceso que puede determinarse teóricamente con mayor precisión y de manera más sencilla, aunque presenta una sección eficaz 10^{-4} veces mas pequeña que la de un proceso de dispersión neutrino-nucleón [26]. Esto hace que sea más dificultoso identificarlo entre el gran número de eventos debido al fondo. Sin embargo, se trata de un proceso donde el leptón cargado apenas se dispersa respecto a la trayectoria del neutrino incidente. Esto, junto a otra serie de restricciones cinemáticas que debe satisfacer el leptón cargado saliente, permite diferenciar el proceso del fondo. En concreto, este método se utiliza para medir el flujo de neutrinos electrónicos de baja energía.

4.2. Estudio del proceso

En esta sección describiremos teóricamente el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón mediante la determinación de su sección eficaz. Nos restringiremos al caso particular de dispersión $\nu_l - l$ mediado por corrientes cargadas. Los resultados que obtendremos son válidos para cualquier sabor leptónico sin más que particularizar las expresiones para la masa del leptón del sabor considerado. El proceso mediado por corrientes neutras no será objeto de nuestro estudio aunque puede encontrarse una descripción del mismo en [8].

Consideremos la dispersión elástica $\nu_l - l$ mediada por corrientes cargadas. La descripción del proceso en primer orden en teoría de perturbaciones está representada en la Figura 4.1. Obsérvese que el diagrama consta de dos vértices leptónicos entre los que se produce un intercambio de carga debido al intercambio del bosón cargado W^+ .

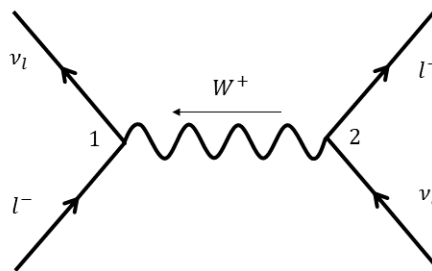


Figura 4.1: Diagrama de Feynman del proceso de dispersión elástica neutrino-leptón.

Escogemos trabajar en el sistema laboratorio de manera que el neutrino incidente colisiona con el leptón cargado asociado que supondremos que se encuentra libre y en reposo. En ese caso, podemos observar que el momento transferido se corresponde con el

momento del neutrino saliente. Asimismo, consideraremos la aproximación del neutrino ultrarelativista de manera que su masa no será relevante en la descripción del proceso.

A continuación se introduce la notación de los cuadri-momentos de las partículas implicadas en el proceso.

- Neutrino incidente ν_l
 - Cuadri-momento: $Q^\mu = (E_\nu, \vec{q}_1)$
 - Energía: $E_\nu = |\vec{q}_1|$
- Leptón inicial l^-
 - Cuadri-momento: $P^\mu = (E_l, 0)$
 - Energía: $E_l = M_l$
- Neutrino saliente ν_l
 - Cuadri-momento: $Q'^\mu = (E'_\nu, \vec{q}_2)$
 - Energía: $E'_\nu = |\vec{q}_2|$
- Leptón final l^-
 - Cuadri-momento: $P'^\mu = (E'_l, \vec{p}_2)$
 - Energía: $E'_l = \sqrt{M_l^2 + |\vec{p}_2|^2}$
 - Ángulo de salida respecto al neutrino incidente: θ
- Bosón intercambiado W^+
 - Cuadri-momento: $K^\mu = (\omega, \vec{k})$
 - Energía: $\omega = \sqrt{M_W^2 + |\vec{k}|^2}$

Las relaciones que definen la cinemática del sistema se obtienen aplicando la conservación del momento y la energía en cada uno de los vértices del diagrama de Feynman que describe nuestro proceso.

Vértice 1

- Conservación de la energía: $E'_\nu - M_l = \omega$
- Conservación del momento: $\vec{k} = \vec{q}_2 \rightarrow |\vec{k}|^2 = |\vec{q}_2|^2 = E_\nu'^2$

Vértice 2

- Conservación de la energía: $E_\nu - E'_l = \omega$
- Conservación del momento: $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{p}_2 \rightarrow |\vec{k}|^2 = E_\nu^2 + |\vec{p}_2|^2 - 2E_\nu |\vec{p}_2| \cos \theta$

Las conservaciones impuestas nos muestran que la cinemática del proceso está completamente descrita por las variables E_ν , E'_l y θ . Es más, estas variables están relacionadas, de manera que fijada dos de ellas, la tercera está unívocamente determinada.

4.2.1. Sección eficaz

La sección eficaz está asociada a la probabilidad de ocurrencia de un cierto proceso y puede medirse de manera experimental. De ahí que gran parte de este capítulo se centre en el cálculo y análisis de la misma para nuestro proceso en estudio.

La sección eficaz diferencial ([29], [7]) viene dada por

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{T \cdot \phi_{inc}} dN_f \quad (4.1)$$

siendo \mathcal{S}_{fi} la amplitud de la transición, T el tiempo, ϕ_{inc} el flujo de partículas incidentes y dN_f la densidad de estados finales.

La densidad de estados finales se define como

$$dN_f = \prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{p}_f = \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3\vec{q}_2 d^3\vec{p}_2. \quad (4.2)$$

donde \vec{p}_f son los momentos de las partículas finales. Recuerde que nuestro proceso en estudio presenta dos partículas salientes con momentos \vec{q}_2 y \vec{p}_2 .

El flujo de partículas incidentes se corresponde con el cociente entre el módulo de la velocidad relativa de las partículas iniciales y el volumen, es decir,

$$\phi_{inc} = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V} \approx \frac{1}{V}. \quad (4.3)$$

donde \vec{v}_1 y \vec{v}_2 representan las velocidades referidas a las dos partículas iniciales. Debemos tener en cuenta que en nuestro proceso el leptón inicial se encuentra en reposo. Por consiguiente, la velocidad relativa se corresponde con la del neutrino incidente, que suponemos que se desplaza a una velocidad próxima a la de la luz.

4.2.1.1. Corrientes leptónicas y hamiltoniano débil

Previo a la determinación de la amplitud de la transición \mathcal{S}_{fi} es necesario introducir ciertas definiciones que usaremos durante el desarrollo de los cálculos. Primero vamos a definir las corrientes débiles asociadas a cada uno de los vértices del proceso. Se trata de corrientes leptónicas puras debido a que la partícula saliente y entrante en cada vértice son leptones. Dado que el bosón mediador es cargado, podemos definir dos tipos de corrientes leptónicas puras en función de si en el vértice se aumenta o se disminuye la carga [8].

- Corriente débil *charge-raising*. Es la corriente asociada al vértice 1 de nuestro proceso (ver Figura 4.1). Permite describir la destrucción de un leptón de carga negativa y la creación de un neutrino en el vértice, aumentando la carga en una unidad en el mismo. La expresión de esta corriente es

$$J^\alpha(X_1) = \bar{\Psi}_\nu(X_1) \gamma^\alpha \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi_l(X_1). \quad (4.4)$$

- Corriente débil *charge-lowering*. Se trata de la corriente asociada en el vértice 2 de nuestro proceso (ver Figura 4.1). Permite describir la destrucción de un neutrino y la creación de un leptón de carga negativa en el vértice, lo que disminuye la carga en una unidad en el mismo. La expresión de esta corriente es

$$J^{\alpha\dagger}(X_2) = \bar{\Psi}_l(X_2) \gamma^\alpha \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi_\nu(X_2). \quad (4.5)$$

En las corrientes 4.4 y 4.5 aparecen la función de onda de Dirac Ψ y su adjunta $\bar{\Psi}$, donde los subíndices ν y l indican la partícula a la que describen. Obsérvese que ambas corrientes incluyen un término γ^μ y un término $\gamma^\mu\gamma^5$. Ambos términos junto a las funciones de onda forman covariantes bilineales cuya transformación, bajo transformaciones de Lorentz, es bien conocida (consultar el apéndice B.3 para más información). Se denotan término vector ($\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ se transforma como un vector) y término vector-axial ($\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$ se transforma como un pseudovector) respectivamente. El carácter vector y vector-axial de las corrientes débiles lleva implícito la violación de la paridad y la conjugación de carga en dicha interacción.

La función de onda de Dirac para partículas libres viene dada por

$$\Psi(X) = \sqrt{\frac{M}{VE_p}} u(\vec{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}, \quad (4.6)$$

donde $u(\vec{p}, r)$ es el espinor de Dirac. Mientras la función de onda adjunta de Dirac resulta

$$\bar{\Psi}(X) = \Psi^\dagger(X)\gamma^0 = \sqrt{\frac{M}{VE_p}} \bar{u}(\vec{p}, s) e^{iP_\mu X^\mu}, \quad (4.7)$$

siendo $\bar{u}(\vec{p}, r)$ el espinor adjunto de Dirac. El apéndice B.1 contiene una descripción más

detallada sobre las soluciones libres de la ecuación de Dirac.

Una vez introducidas las corrientes débiles podemos definir el hamiltoniano para interacciones débiles mediadas por corrientes cargadas. Este viene dado por

$$\mathcal{H}(X) = \frac{g_W}{\sqrt{2}} [J^{\alpha\dagger}(X)W_\alpha(X) + J^\alpha(X)W_\alpha^\dagger(X)], \quad (4.8)$$

donde g_W es la constante de acoplamiento débil, que sustituye a la constante de estructura fina α_{EM} en la interacción electromagnética, mientras el campo $W^\alpha(X)$ está asociado al mediador de la interacción. La expresión del propagador del bosón W en coordenadas espacio-temporales es

$$D_F^{\alpha\beta}(X_1 - X_2) = \underbrace{W^\alpha(X_1)W^\beta(X_2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4K D_F^{\alpha\beta}(K) e^{-iK(X_1 - X_2)} \quad (4.9)$$

que, a su vez, depende del propagador en el espacio de momentos

$$D_F^{\alpha\beta}(K) = \frac{-g^{\alpha\beta} + K^\alpha K^\beta / M_W^2}{K^2 - M_W^2 + i\epsilon}. \quad (4.10)$$

En el rango de energías de nuestro interés podemos aplicar la aproximación estática dado que $|K^2| \ll M_W^2$ debido al elevado valor de la masa del bosón cargado W . Recuerde que el momento transferido se corresponde con el momento del neutrino saliente mientras la masa del bosón W es 80.40 GeV [7]. En esta aproximación, el propagador en el espacio de momentos se reduce a

$$D_F^{\alpha\beta}(K) \approx \frac{g^{\alpha\beta}}{M_W^2}. \quad (4.11)$$

Asimismo, esta aproximación nos permite relacionar la constante de Fermi G_F , que caracteriza la intensidad de la interacción débil, con la constante de acoplamiento débil g_W del siguiente modo

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2}. \quad (4.12)$$

Esto nos indica que es el carácter masivo del bosón cargado W quien determina la baja intensidad de la interacción débil. Obsérvese que la masa del bosón W desaparece de la expresión del propagador 4.10 a energías comparables a la del bosón W y superiores. En este supuesto la intensidad de la interacción dependería únicamente de la constante de acoplamiento débil g_W . Como $g_W \approx \alpha_{EM}$, las fuerzas débil y electromagnética deberían

ser comparables. Esto se explica en el marco de la teoría electrodébil, la unificación de las interacciones débil y electromagnética. La teoría recoge que la masa de los bosones vectoriales en procesos de baja energía aparece por una ruptura espontánea de la simetría que requiere de la participación del bosón de Higgs [8].

4.2.1.2. Cálculo de la amplitud de la transición

La amplitud de la transición \mathcal{S}_{fi} es el elemento de matriz de la matriz de colisión \mathcal{S} entre los estados final e inicial. La matriz de colisión \mathcal{S} conecta el estado inicial de un sistema $|\phi(-\infty)\rangle$ con una combinación lineal de los posibles estado finales $|\phi(+\infty)\rangle$ tal que $|\phi(+\infty)\rangle = \mathcal{S} |\phi(-\infty)\rangle$ ([7], [29]). Por consiguiente, el elemento de matriz $\mathcal{S}_{fi} = \langle f|\mathcal{S}|i\rangle$ muestra la amplitud de probabilidad de que el sistema en el estado $|i\rangle$ alcance el estado $|f\rangle$ tras la colisión.

La amplitud de transición para nuestro proceso en estudio viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 T [\mathcal{H}(X_1)\mathcal{H}(X_2)] \\ &= -i \frac{g_W^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 \underbrace{J^{\alpha\dagger}(X_1)W^\alpha(X_1)W^\beta(X_2)J^\beta(X_2)} \\ &= -i \frac{g_W^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 J^{\alpha\dagger}(X_1)D_F^{\alpha\beta}(X_1 - X_2)J^\beta(X_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde T denota el producto cronológico de Wick [7]. Introduciendo las corrientes leptónicas (4.4 y 4.5) y el propagador del bosón W en la aproximación estática (4.11) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} &= -i \frac{M_l M_\nu}{V^2 \sqrt{E_l E_\nu E'_l E'_\nu}} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \int d^4 X_1 e^{-i(P+K-Q')X_1} \int d^4 X_2 e^{-i(P'+K-Q)X_2} \\ &\quad \times \frac{g^2}{8M_W^2} [\bar{u}_\nu(\vec{q}_2, s')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)u_l(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}_l(\vec{p}_2, r')\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)u_\nu(\vec{q}_1, s)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Las integrales que parecen en 4.14 se encuentran desarrolladas en el apéndice C.1 resultando $(2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q)$ donde la δ^4 está relacionada con la conservación del 4-momento en el proceso. Sustituyendo este resultado en 4.14 e introduciendo la constante de Fermi G_F definida en 4.12, la amplitud de la transición queda

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} &= -i \frac{M_l M_\nu}{V^2 \sqrt{E_l E_\nu E'_l E'_\nu}} (2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q) \\ &\quad \times \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\nu(\vec{q}_2, s')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)u_l(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}_l(\vec{p}_2, r')\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)u_\nu(\vec{q}_1, s)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Su módulo al cuadrado es

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{M_l^2 M_\nu^2}{V^4 E_l E_\nu E'_l E'_\nu} |(2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q)|^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (4.16)$$

donde se ha introducido la amplitud invariante \mathcal{M}_{fi} que contiene toda la información física de la interacción, a diferencia de los restantes términos que únicamente se refieren a la parte cinemática del proceso, y que viene definida como

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\nu(\vec{q}_2, s') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_l(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}_l(\vec{p}_2, r') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu(\vec{q}_1, s)]. \quad (4.17)$$

Asimismo, teniendo en cuenta el desarrollo realizado en el apéndice C.2 se obtiene que

$$|(2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q)|^2 = (2\pi)^4 VT \delta^4(P' + Q' - P - Q). \quad (4.18)$$

Por consiguiente, el módulo de la amplitud de la transición resulta

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{M_l^2 M_\nu^2}{V^4 E_l E_\nu E'_l E'_\nu} (2\pi)^4 VT \delta^4(P' + Q' - P - Q) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (4.19)$$

Cálculo del módulo al cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

En principio los espines de las partículas son desconocidos de manera que para determinar $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ sumamos sobre los estados de espín finales y promediamos sobre los estados de espín iniciales del leptón.

Tras un desarrollo extenso que puede verse en el apéndice D.2 resulta que

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \eta_{\alpha\beta} \bar{\eta}^{\alpha\beta}, \quad (4.20)$$

donde aparece la contracción de los tensores leptónicos $\eta_{\alpha\beta}$ y $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$. Estos tensores vamos a determinarlos mediante el método de trazas (ver apéndice D.1). El cálculo exhaustivo de los tensores leptónicos se puede encontrar en el apéndice D.2 donde para simplificar la notación se ha introducido el operador de Dirac $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha (1 - \gamma_5)$. No obstante, en lo que sigue se muestran los resultados más relevantes.

Tensor leptónico $\eta_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha\beta} &= \sum_{r',s} [\bar{u}(\vec{p}_2, r') \Gamma_\alpha u(\vec{q}_1, s)] [\bar{u}(\vec{q}_1, s) \Gamma_\beta u(\vec{p}_2, r')] \\
&= \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right] \\
&= \frac{2}{M_l M_\nu} [P'_\alpha Q_\beta - P' \cdot Q g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha - i\epsilon_{\alpha\beta\delta\phi} P'^\delta Q^\phi]. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Definimos el tensor leptónico $\eta_{\alpha\beta}$ reducido como $\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{M_l M_\nu}{2} \eta_{\alpha\beta}$.

Tensor leptónico $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}^{\alpha\beta} &= \sum_{r',s} [\bar{u}(\vec{q}_2, s') \Gamma^\alpha \bar{u}(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}(\vec{p}_1, r) \Gamma^\beta \bar{u}(\vec{q}_2, s')] \\
&= \text{Tr} \left[\frac{\not{Q}' + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma^\alpha \frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \Gamma^\beta \right] \\
&= \frac{2}{M_\nu M_l} [Q'^\alpha P^\beta - Q' \cdot P g^{\alpha\beta} + Q'^\beta P^\alpha + i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\beta} Q'_\lambda P_\rho]. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

En este caso definimos el tensor leptónico $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$ reducido como $\tilde{\tilde{\eta}}^{\alpha\beta} = \frac{M_l M_\nu}{2} \bar{\eta}^{\alpha\beta}$.

Contracción de los tensores leptónicos $\eta_{\alpha\beta} \bar{\eta}^{\alpha\beta}$

Una vez calculados los tensores leptónicos $\eta_{\alpha\beta}$ y $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$ procedemos a determinar su contracción. En ese sentido resulta útil trabajar con los tensores leptónicos reducidos $\tilde{\eta}_{\alpha\beta}$ y $\tilde{\tilde{\eta}}^{\alpha\beta}$ debido a que permite prescindir de las constantes.

$$\eta_{\alpha\beta} \bar{\eta}^{\alpha\beta} = \frac{4}{M_l^2 M_\nu^2} \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \tilde{\tilde{\eta}}^{\alpha\beta}. \tag{4.23}$$

Podemos separar las partes simétrica y antisimétrica de cada tensor reducido acorde con el carácter vector y vector-axial de las corrientes leptónicas.

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S = P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha \\ \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A = i\epsilon_{\alpha\beta\delta\phi} P'^\delta Q^\phi \end{array} \right\}. \quad (4.24)$$

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} = Q'^\alpha P^\beta - (Q' \cdot P)g^{\alpha\beta} + Q'^\beta P^\alpha \\ \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} = i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} P'_\lambda Q_\rho \end{array} \right\}. \quad (4.25)$$

Al contraer los tensores leptónicos reducidos nos quedará la contracción de las partes simétricas más la contracción de las partes antisimétricas debido a que los términos cruzados son nulos por definición. El desarrollo se encuentra en el apéndice D.3 aunque el resultado se muestra a continuación.

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} = (\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A)(\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}) = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} = 4(P' \cdot Q')(Q \cdot P). \quad (4.26)$$

Por consiguiente, el módulo cuadrado de la amplitud invariante queda

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \eta_{\alpha\beta} \bar{\eta}^{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{M_l^2 M_\nu^2} \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \frac{4 G_F^2}{M_l^2 M_\nu^2} (P' \cdot Q')(Q \cdot P), \quad (4.27)$$

resultando el módulo cuadrado de la amplitud de la transición en

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{4 G_F^2 (P' \cdot Q')(Q \cdot P)}{V^4 E_l E_\nu E_l' E_\nu'} V \cdot T (2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q). \quad (4.28)$$

4.2.1.3. Sección eficaz diferencial doble

Calculado el módulo cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{S}_{fi}|^2$ (4.28), la densidad de estados finales dN_f (4.2) y el flujo incidente ϕ_{inc} (4.3) para nuestro proceso, podemos determinar que la sección eficaz diferencial 4.1 es

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{\delta^4(P' + Q' - P - Q)}{E_l E_\nu E_l' E_\nu'} (P' \cdot Q')(Q \cdot P) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{q}_2. \quad (4.29)$$

Nuestro objetivo es determinar la sección eficaz diferencial doble en función de las variables asociadas al leptón saliente, como son la energía E_l' y el ángulo de salida θ . Es provechoso introducir las variables de Mandelstam para seguir con el desarrollo debido a que son invariantes Lorentz. Para nuestro proceso la variable adecuada se corresponde con el cuadrado de la energía en el sistema centro de momentos s y se define como

$$s \equiv (P + Q)^2 = (P' + Q')^2 = 2M_l E_\nu + M_l^2 \quad (4.30)$$

de manera que

$$(P \cdot Q)(P' \cdot Q') = \left(\frac{s - M_l^2}{2} \right)^2 = M_l^2 E_\nu^2 \quad (4.31)$$

y la sección eficaz diferencial resulta

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{M_l E_\nu}{E_l' E_\nu'} \delta^4(P' + Q' - P - Q) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{q}_2. \quad (4.32)$$

Para que la sección eficaz diferencial únicamente dependa de las variables asociadas al leptón saliente y de la energía del neutrino incidente, realizamos la integral tridimensional en el momento final del neutrino \vec{q}_2 resultando

$$\int d^3\vec{q}_2 \frac{\delta^4(P' + Q' - P - Q)}{E_\nu'} = 2\delta(M_l^2 + 2M_l\omega + K^2) = \frac{\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)}{E_\nu \sqrt{E_e'^2 - M_l^2}}, \quad (4.33)$$

siendo

$$\cos\theta_0 = \frac{(E_\nu + M_l)(E_l' - M_l)}{E_\nu \sqrt{E_l'^2 - M_l^2}}. \quad (4.34)$$

El desarrollo detallado de este cálculo puede encontrarse en el apéndice C.3. Esto reduce la sección eficaz diferencial a

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{M_l E_\nu}{E_l'} \frac{\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)}{E_\nu \sqrt{E_l'^2 - M_l^2}} d^3\vec{p}_2. \quad (4.35)$$

Aplicando una transformación a coordenadas esféricas, obtenemos la sección eficaz doble como función de las variables del leptón saliente

$$\frac{d\sigma}{dE_l' d\Omega} = \frac{G_F^2}{\pi^2} M_l \delta(\cos\theta - \cos\theta_0), \quad (4.36)$$

donde se ha introducido que $d^3\vec{p}_2 = E_l' \sqrt{E_l'^2 - M_l^2} dE_l' d\Omega$.

4.2.1.4. Sección diferencial integrada

La sección eficaz diferencial función de la energía del leptón saliente E'_l se obtiene integrando la sección eficaz doble 4.36 respecto del ángulo sólido $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{dE'_l} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{dE'_l d\Omega} = \frac{G_F^2}{\pi^2} M_l \int d\Omega \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{2G_F^2 M_l}{\pi}. \quad (4.37)$$

A partir de este resultado podemos obtener la sección eficaz diferencial respecto al coseno del ángulo de salida del leptón usando la relación cinemática entre la energía y el ángulo de salida del leptón final:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{d\sigma}{dE'_l} \frac{dE'_l}{d \cos \theta} = \frac{8G_F^2}{\pi} \frac{M_l^2 E_\nu^2 (M_l + E_\nu)^2 \cos \theta}{[(M_l + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta]^2}, \quad (4.38)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\cos \theta = \frac{M_l + E_\nu}{E_\nu} \sqrt{\frac{E'_l - M_l}{E'_l + M_l}} \rightarrow \frac{dE'_l}{d \cos \theta} = \frac{4M_l E_\nu^2 (M_l + E_\nu)^2 \cos \theta}{[(M_l + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta]^2}. \quad (4.39)$$

Finalmente, determinamos la sección eficaz total integrando la sección eficaz diferencial 4.37 respecto a la energía del leptón cargado saliente:

$$\sigma = \int_{M_l}^{E_\nu} dE'_l \frac{d\sigma}{dE'_l} = \int_{M_l}^{E_\nu} dE'_l \frac{2M_l G_F^2}{\pi} = \left[\frac{2M_l G_F^2}{\pi} E'_l \right]_{M_l}^{E_\nu} = \frac{2G_F^2}{\pi} M_l (E_\nu - M_l). \quad (4.40)$$

4.2.1.5. El caso de antineutrinos

Podemos utilizar el procedimiento anterior para calcular la sección eficaz del proceso con antineutrinos. En primer orden en teoría de perturbaciones el proceso está descrito por el diagrama de Feynman representado en la Figura 4.2.

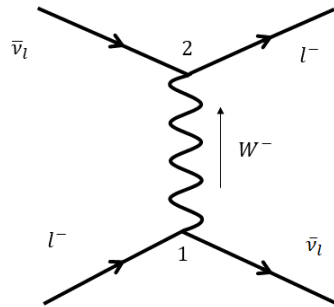


Figura 4.2: Diagrama de Feynman del proceso de dispersión elástica antineutrino-leptón.

La corriente leptónica asociada al vértice 2 es necesario modificarla respecto al caso de neutrinos como consecuencia de la quiralidad positiva que presentan los antineutrinos en interacciones débiles:

$$J^{\alpha\dagger}(X_2) = \bar{\Psi}_l(X_2) \gamma^\alpha \frac{1 + \gamma^5}{2} \Psi_\nu(X_2). \quad (4.41)$$

Esto invierte el signo de la parte antisimétrica en el tensor leptónico asociado respecto del caso de neutrinos dando como resultando que la sección eficaz del proceso es

$$\sigma(\bar{\nu}_l l) \approx \frac{1}{3} \sigma(\nu_l l). \quad (4.42)$$

Pueden encontrarse más detalles en el apéndice D.4 donde las secciones eficaces de ambos procesos están representadas en la Figura D.1.

4.2.2. Análisis del proceso

En esta sección vamos a analizar los resultados obtenidos de las secciones eficaces tanto total como diferenciales. Consideraremos el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón y analizaremos primero el efecto de la masa del leptón interactuante en la sección eficaz total. La representaciones correspondientes pueden verse en la Figura 4.3.

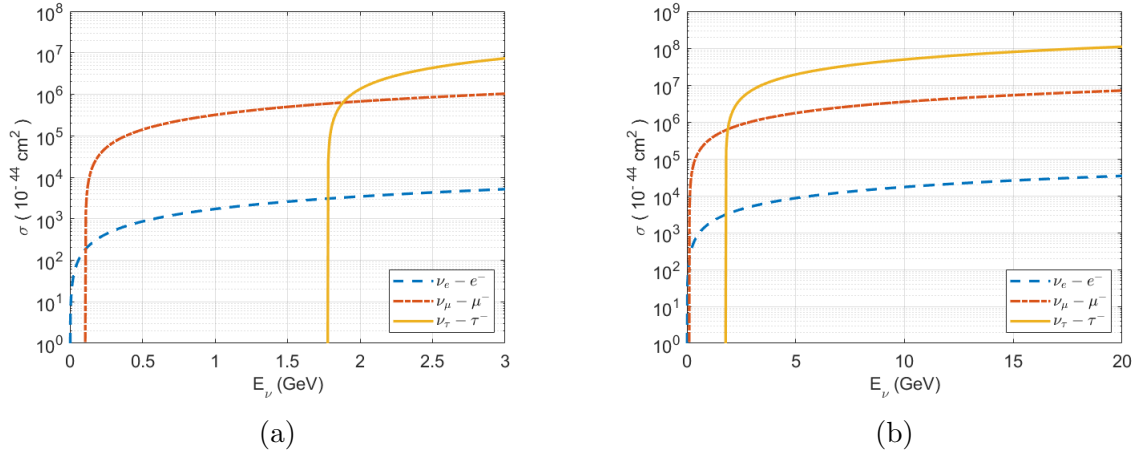


Figura 4.3: Sección eficaz total del proceso de dispersión elástica $\nu - l$ mediado por corrientes cargadas. Se consideran distintos sabores para el leptón interactuante.

En la Figura 4.3a podemos observar que la energía mínima para la que está definida la sección eficaz depende del leptón considerado. Esto es consistente con el hecho de que el neutrino incidente debe presentar suficiente energía como para crear al leptón correspondiente en el vértice leptónico (fíjese en el vértice 2 de la Figura 4.1). Asimismo, en la Figura 4.3b puede apreciarse que la separación entre las secciones eficaces de distinto

sabor se vuelve constante al aumentar la energía del neutrino incidente y que la sección eficaz para una energía E_ν dada es mayor cuanto más pesado es el leptón considerado.

En cuanto a la sección eficaz diferencial respecto a la energía del leptón saliente se trata de una constante que depende únicamente de la masa del leptón. La representación se corresponde con la Figura 4.4a. La separación entre las secciones eficaces diferenciales para dos sabores leptónicos distintos puede relacionarse con el cociente entre las masas de los leptones implicados (ver ecuación 4.37).

Por último, la representación de la sección eficaz diferencial respecto al ángulo de salida del leptón saliente puede verse en la Figura 4.4b. En este caso se ha fijado una energía para el neutrino incidente de 3 GeV debido a que la sección eficaz diferencial mencionada también depende de esta variable. Obsérvese cómo la sección eficaz diferencial aumenta a medida que se consideran ángulos de dispersión más pequeños en consonancia con el carácter fuertemente direccional de este proceso dado que el leptón saliente apenas es dispersado respecto de la trayectoria del neutrino incidente. Habría que estudiar energías iniciales del orden de varios MeV para ver diferencias en ese sentido.

La dispersión del leptón a ángulos de salida pequeños está relacionado con valores pequeños del momento transferido y, por ende, de la energía del neutrino saliente. En consecuencia, el leptón final se lleva la mayor parte de la energía disponible en el proceso. Es interesante introducir el caso para $E_\nu = 3$ GeV porque es la energía promedio del flujo de neutrinos usado en MINERvA [27] donde miden el flujo de neutrinos mediante este proceso. También podría ser utilizado en futuros experimentos como DUNE [28].

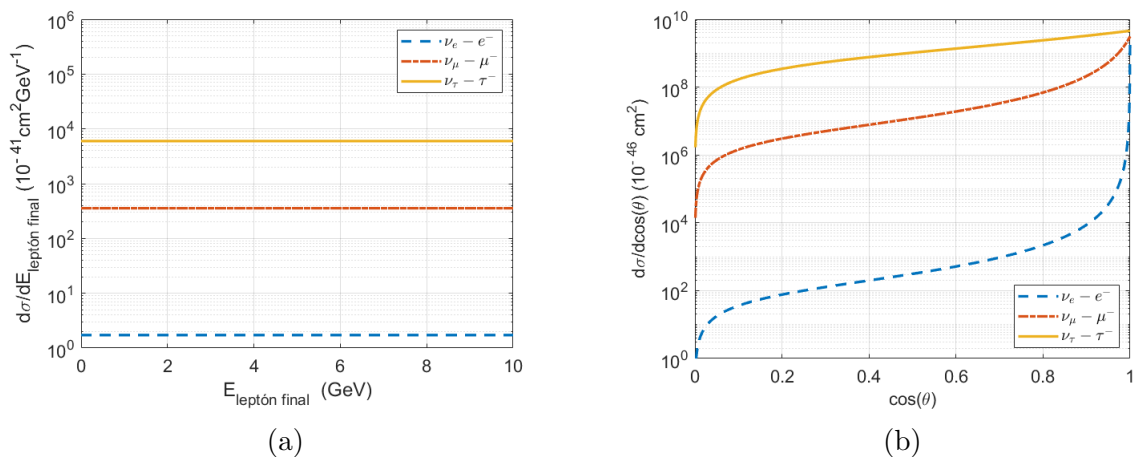


Figura 4.4: Sección eficaz diferencial respecto a la energía del leptón final (4.4a) y al ángulo de salida del leptón final con $E_\nu = 3$ GeV (4.4b) para el proceso de dispersión elástica $\nu - l$ mediado por corrientes cargadas. Se consideran distintos sabores leptónicos.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido dar a conocer aspectos destacados de la naturaleza del neutrino. Inicialmente, se han descrito sus propiedades desde un punto de vista divulgativo para posteriormente introducir un análisis formal sobre el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, que describe cambios en el sabor del neutrino en su desplazamiento, y el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón, dada su relevancia en el estudio de dicho fenómeno.

Hemos visto que el estudio de las oscilaciones de neutrinos tiene por objeto determinar los parámetros que las caracterizan. La importancia de su descripción radica en que el sabor determina cómo pueden interaccionar los neutrinos con la materia. Además, debe tenerse en consideración que la sensibilidad de los detectores a cada sabor es variable. Por ese motivo, se ha analizado la expresión de la probabilidad de oscilación crucial para determinar experimentalmente los parámetros de oscilación.

En ese sentido, introducimos cómo se estudian las oscilaciones y el efecto de los parámetros en la probabilidad de oscilación. Posteriormente, comprobamos la precisión del modelo de 2 sabores para reproducir los datos de neutrinos atmosférico medidos en Super-Kamiokande. Hemos demostrado que el modelo de 2 sabores es apropiado para describir los datos de aquellos experimentos que no sean sensibles a los tres sabores leptónicos, como es el caso de Super-Kamiokande.

También se ha comentado que la probabilidad de oscilación depende simultáneamente de múltiples parámetros siendo necesaria la colaboración de distintos experimentos con diversas sensibilidades a los parámetros de oscilación para su determinación. Por ese motivo se realizan estudios con distintas fuentes y detectores que contribuyen a reducir el

intervalo de posibles valores de los parámetros de oscilación.

En los próximos años está prevista la puesta en funcionamiento de detectores mayores que permitan aumentar la estadística y la precisión en las medidas como son Hyper-Kamiokande [30] y DUNE [31]. Uno de los grandes aspiraciones de estos detectores es mejorar la precisión en la medida del parámetro δ_{CP} relacionado con la violación de la simetría CP y que podría permitir explicar la asimetría materia-antimateria en el universo. También pretenden arrojar luz sobre la jerarquía de masas⁽¹⁾ que puede determinarse mediante el estudio de oscilaciones de neutrinos en las que los efectos de la materia son significativos dado que, en este caso, se rompe la invarianza de la probabilidad de oscilación bajo el intercambio $\Delta m^2 \leftrightarrow -\Delta m^2$ [13].

Por último, se ha descrito teóricamente el proceso de dispersión elástica neutrino-leptón mediante el estudio de su cinemática y el cálculo de su sección eficaz. El resultado de la sección eficaz obtenido puede completarse considerando diagramas de Feynman en ordenes superiores en teoría de perturbaciones. Aun así, hemos comprobado que se trata de un proceso donde el leptón es dispersado ángulos pequeños respecto a la trayectoria del neutrino incidente y que esta característica permite usar el proceso para medir el flujo de neutrinos de baja energía. No obstante, este proceso se encuentra cada vez más en desuso debido a la mejora en los modelos que describen los procesos de interacción neutrino-nucleón con los nucleones del material activo de los detectores.

Por último, es interesante comentar que existen evidencias experimentales ([32], [33]) de un parámetro Δm^2 adicional, indicando la posible existencia de un cuarto neutrino. Este se denomina neutrino estéril dado que no participa en procesos débiles, pero sí se vería afectado por la gravedad al ser una partícula masiva. No obstante, la fuerza gravitatoria no es relevante a escala microscópica de manera que, en principio, no podría evidenciarse la existencia del neutrino estéril con los detectores actuales.

Puede verse que aún desconocemos muchos aspectos de la naturaleza del neutrino. Tal y como se han desarrollado los descubrimientos en torno a sus propiedades y viendo las incógnitas que quedan por resolver, podemos concluir que la Física de Neutrinos es un intrigante y prometedor campo de investigación.

(1) Actualmente se conoce que $\Delta m_{21}^2 > 0$ gracias al estudio de neutrinos solares, puesto que las oscilaciones de neutrinos en el interior del Sol están afectadas por la alta densidad de materia [13]. No obstante, aún debe determinarse si $\Delta m_{32}^2 > 0$ (jerarquía normal) o $\Delta m_{32}^2 < 0$ (jerarquía invertida).

Apéndice A

Probabilidad de oscilación

En este apéndice se desarrolla la expresión 3.13 de la probabilidad de la transición. Para ello, primero separaremos el sumatorio para los casos $k = j$ y $k \neq j$ tal que

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + \sum_{k \neq j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

El segundo sumatorio en A.1 puede, a su vez, dividirse en uno para $k > j$ y otro para $k < j$. Posteriormente, se aplica el intercambio $k \leftrightarrow j$ en el sumatorio para $k < j$ de manera que ambos pueden agruparse ⁽¹⁾. El desarrollo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} &\sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + \sum_{k<j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \\ &= \sum_{k>j} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \exp\left(i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \right] \\ &= \sum_{k>j} \left\{ U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + \left[U_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \right]^* \right\} \\ &= 2 \sum_{k>j} \text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Introduciendo A.2 en A.1 se obtiene la primera igualdad de la ecuación 3.14. Un procedimiento similar se utiliza para obtener la segunda igualdad de la ecuación 3.15, la única diferencia es que en ese caso no aparecen las exponenciales.

(1) Observe que $\Delta m_{jk}^2 = m_j^2 - m_k^2 = -(m_k^2 - m_j^2) = -\Delta m_{kj}^2$.

Apéndice B

Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac describe el comportamiento de partículas elementales relativistas de espín 1/2. Esta ecuación, propuesta por Paul Dirac en 1928, tiene la forma

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta M)\Psi. \quad (\text{B.1})$$

Al exigir que la ecuación B.1 sea compatible con la expresión relativista de la energía se obtiene que los coeficientes β y α_i ($i = 1, 2, 3$) deben ser matrices hermíticas que satisfacen:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}, \quad (\text{B.2})$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{I}. \quad (\text{B.4})$$

Estas relaciones constituyen el álgebra de matrices de Dirac e implican que β y α_i deben ser matrices cuadradas de dimensión 4x4 como mínimo.

Una posible elección para las matrices β y α_i es

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

donde \mathbb{I} representa a la matriz identidad 2x2 y σ_i ($i = x, y, z$) son las matrices de Pauli que se definen como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Esta elección de las matrices de Dirac se denomina representación de Dirac. No obstante, puede considerarse otras elecciones para representar las matrices de Dirac dado que los observables son independiente de la representación escogida.

La expresión covariante de la ecuación de Dirac es

$$(i\not{\partial} - M)\Psi = 0, \quad (\text{B.7})$$

donde se ha introducido la notación *slash* que indica la contracción de un 4-vector con las matrices de Dirac $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ siendo $\gamma^0 = \beta$ y $\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}$. En la ecuación B.7 aparece $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_t + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$ dado que el cuadri-gradiente $\partial_\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$. La relaciones que satisfacen β y α_i implican que $(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ y $(\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^{-1} = \gamma^i$.

Las relaciones del álgebra de Dirac para las matrices γ^μ se reducen a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (\text{B.8})$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico del espacio de Minkowski. Asimismo, las matrices γ^μ en la representación de Dirac son

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Por último, la cuadri-corriente J^μ en forma covariante es

$$J^\mu = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (\text{B.10})$$

donde se ha introducido la función de onda adjunta de Dirac $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

B.1. Soluciones libres de la ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac que describe el comportamiento de una partícula libre de masa M y momento \vec{p} presenta soluciones con energías de distinto signo:

- **Energía positiva** ($\epsilon = E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} > 0$)

$$\Psi^{(+)} = \sqrt{\frac{M}{EV}} u(\vec{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}. \quad (\text{B.11})$$

- **Energía negativa** ($\epsilon = -E = -\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} < 0$)

$$\Psi^{(-)} = \sqrt{\frac{M}{EV}} v(\vec{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}. \quad (\text{B.12})$$

donde $u(\vec{p}, s)$ y $v(\vec{p}, s)$ son los espinores de Dirac que están asociados a partículas y antipartículas, respectivamente. También se incluye el cuadri-momento $P^\mu = (E, \vec{p})$ y el 4-vector espacio-temporal $X^\mu = (t, \vec{x})$. Los espinores de Dirac son solución de las ecuaciones de Dirac en el espacio de momentos:

$$(\not{P} - M)u(\vec{p}, s) = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$(\not{P} + M)v(\vec{p}, s) = 0. \quad (\text{B.14})$$

Sus expresiones explícitas son

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E + M}{2M}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

$$v(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E + M}{2M}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

donde χ_s y ξ_s son espinores de Pauli caracterizados por el estado de espín s . Por otro lado, los espinores adjuntos de Dirac se definen como

$$\bar{u}(\vec{p}, s) = u^\dagger(\vec{p}, s) \gamma^0, \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s) = v^\dagger(\vec{p}, s) \gamma^0. \quad (\text{B.18})$$

que son solución de las ecuaciones de Dirac en el espacio de momentos:

$$\bar{u}(\vec{p}, s)(\not{P} - M) = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s)(\not{P} + M) = 0. \quad (\text{B.20})$$

B.2. proyectores de energía y espín

Los operadores de proyección de energía seleccionan los estados con energía positiva o negativa, mientras que el operador de proyección de espín hace lo propio con las polarizaciones de espín $+s$ y $-s$.

- **Operador de proyección de energía positiva:**

$$\left[\hat{\Lambda}_+(\vec{p})\right]_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{P} + M}{2M}\right)_{\alpha\beta} = \sum_{\pm s} u(\vec{p}, s)_\alpha \bar{u}_\beta(\vec{p}, s). \quad (\text{B.21})$$

- **Operador de proyección de energía negativa:**

$$\left[\hat{\Lambda}_-(\vec{p})\right]_{\alpha\beta} = \left(\frac{-\not{P} + M}{2M}\right)_{\alpha\beta} = -\sum_{\pm s} v(\vec{p}, s)_\alpha \bar{v}_\beta(\vec{p}, s). \quad (\text{B.22})$$

- **Operador de proyección de espín:**

$$\hat{P}(\pm s) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{\mathcal{S}}). \quad (\text{B.23})$$

siendo $\not{\mathcal{S}} = (s_0, \vec{s})$ el cuadri-espín.

B.3. Covariantes bilineales

Los covariantes bilineales tienen la forma $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$ donde Ψ y $\bar{\Psi}$ son la función de onda de Dirac y su adjunta, respectivamente. Los observables en el contexto de la ecuación de Dirac presentan esta forma y tienen la ventaja de que se transforman de manera conocida al aplicarle una Transformación de Lorentz (TL).

Existen 16 covariantes bilineales que son:

- **Escalar:** $\bar{\Psi}\mathbb{I}\Psi$
- **Vector:** $\bar{\Psi}\gamma_\alpha\Psi$
- **Tensor:** $\bar{\Psi}\sigma_{\alpha\beta}\Psi$ con $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$
- **Pseudoescalar:** $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ con $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
- **Pseudovector:** $\bar{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_5\Psi$

Obsérvese que el nombre que llevan asociado indican cómo se transforman bajo una TL. Recuerde que las corrientes débiles son de la forma $\bar{\Psi}\gamma_\alpha(1 \pm \gamma_5)\Psi$ que es la suma de un término vector y otro pseudovector (o vector-axial). Este último término se transforma como un vector para TL propias (definidas por matrices con determinante +1) mientras que cambia de signo para TL impropias (caracterizadas por matrices con determinante -1). Un ejemplo de TL impropia es la transformación de paridad que invierte el signo de las coordenadas espaciales. Por consiguiente, el carácter vector y vector-axial de las corrientes débiles lleva implícito la violación de la paridad en la interacción débil y también esta asociado a la violación de la conjugación de carga.

Anteriormente hemos introducido la matriz γ_5 que satisface las siguientes propiedades:

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \quad (\text{B.24})$$

$$\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \quad \forall\gamma^\mu. \quad (\text{B.25})$$

Se trata del operador quiral que tiene por autovalores ± 1 correspondientes a los dos posibles estados quirales. Los operadores de proyección quiral son

$$\hat{\Pi}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \gamma_5). \quad (\text{B.26})$$

Estos seleccionan los estados con quiralidades positivas o negativas, respectivamente. Obsérvese que estos proyectores aparecen en las corrientes débiles (4.4, 4.5, 4.41) y actúan sobre el espinor que tienen a su derecha, seleccionando un estado quiral para el mismo.

Apéndice C

Delta de Dirac

En este apéndice se desarrollan los distintos cálculos que son necesario para determinar la sección eficaz y que involucran la delta de Dirac en 4-dimensiones.

C.1. Integración de la delta de Dirac δ^4 en \mathcal{S}_{fi}

En la expresión 4.13 de la amplitud de la transición \mathcal{S}_{fi} aparecen las integrales

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \int d^4 X_1 e^{-i(P+K-Q')X_1} \int d^4 X_2 e^{-i(P'+K-Q)X_2}. \quad (\text{C.1})$$

Estas se resuelven teniendo en cuenta que

$$\int d^4 X_1 e^{-i(P+K-Q')X_1} = (2\pi)^4 \delta^4(P + K - Q'), \quad (\text{C.2})$$

$$\int d^4 X_2 e^{-i(P'+K-Q)X_2} = (2\pi)^4 \delta^4(P' + K - Q), \quad (\text{C.3})$$

de manera que el cálculo de C.1 se reduce a

$$\begin{aligned} \int d^4 K (2\pi)^4 \delta^4(P + K - Q') \delta^4(P' + K - Q) \\ = (2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

C.2. Módulo al cuadrado de la delta de Dirac δ^4

En la expresión 4.16 del módulo de la amplitud de la transición al cuadrado $|\mathcal{S}_{fi}|^2$ aparece el siguiente módulo cuadrado

$$|(2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q)|^2. \quad (\text{C.5})$$

Para calcularlo desarrollamos la expresión del siguiente modo

$$\begin{aligned} & [(2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q)] [(2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q)] \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q) \int d^4 X e^{-i(P'+Q'-P-Q)X} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P' + Q' - P - Q) \int d^4 X \\ &= (2\pi)^4 VT \delta^4(P' + Q' - P - Q) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde la integral $\int d^4 X$ es igual al producto del tiempo T y volumen V considerados. Obsérvese que $P' + Q' - P - Q = 0$ debido al principio de la conservación de la energía y el momento. Esto es, la suma de los cuadri-momentos finales es igual a la suma de los cuadri-momentos iniciales.

C.3. Integración de la delta de Dirac δ^4 en $d\sigma$

La expresión 4.29 de la sección eficaz diferencial $d\sigma$ incluye la integral

$$\int \frac{d^3 \vec{q}_2}{E'_\nu} \delta^4(P' + Q' - P - Q). \quad (\text{C.7})$$

Para resolverla, introducimos la función escalón de Heaviside:

$$\Theta(E'_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } E'_\nu < 0 \\ 1 & \text{si } E'_\nu \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{C.8})$$

que nos permitirá hacer uso de la siguiente propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad \text{con} \quad f(x_n) = 0 \quad \text{y} \quad f'(x_n) \neq 0. \quad (\text{C.9})$$

A continuación se encuentra el cálculo de la integral C.7 donde se ha considerado que la energía del neutrino saliente $E'_\nu = |\vec{q}_2|$ debido a la aproximación del neutrino ultrarelativista.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3\vec{q}_2}{E'_\nu} \delta^4(P' + Q' - P - Q) \\
&= 2 \int \frac{d^3\vec{q}_2}{2E'_\nu} \delta^4(Q' - P - K) \left[\delta(E'_\nu - \sqrt{|\vec{q}_2|^2}) + \delta(E'_\nu + \sqrt{|\vec{q}_2|^2}) \right] \Theta(E'_\nu) dE'_\nu \\
&= 2 \int dE'_\nu d^3\vec{q}_2 \delta^4(Q' - P - K) \delta(E'^2_\nu - |\vec{q}_2|^2) \Theta(E'_\nu) \\
&= 2 \int d^4Q' \delta^4(Q' - P - K) \delta(Q'^2) \Theta(E'_\nu) = \delta[(P + K)^2] \Theta(M_l + \omega) \\
&= 2 \delta(P^2 + 2P \cdot K + K^2). \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Continuamos desarrollando la delta δ . Para eso es necesario tener en cuenta la definición de los cuadri-momentos implicados y atender a relaciones cinemáticas que derivan de la conservación de la energía y el momento en los vértices del diagrama de Feynman del proceso. Toda esta información se encuentra recogida en la sección 4.2.

$$\begin{aligned}
\delta(P^2 + 2P \cdot K + K^2) &= \delta(M_l^2 + 2M\omega + K^2) = \delta(M_l^2 + 2M_l\omega + \omega^2 - |\vec{k}|^2) \\
&= \delta \left[M_l^2 + 2M_l(E_\nu - E'_l) + (E_\nu - E'_l)^2 - E_l^2 - (E'^2_l - M_l^2) + 2E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2} \cos \theta \right] \\
&= \delta \left[2(M_l^2 + M_l E_\nu - E_\nu E'_l - M_l E'_l) + 2E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2} \cos \theta \right] \\
&= \frac{1}{2E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2}} \delta \left[\cos \theta - \frac{(E_\nu + M_l)(E'_l - M_l)}{E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2}} \right] \\
&= \frac{1}{2E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2}} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0), \tag{C.11}
\end{aligned}$$

siendo

$$\cos \theta_0 = \frac{(E_\nu + M_l)(E'_l - M_l)}{E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2}}. \tag{C.12}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{d^3\vec{q}_2}{E'_\nu} \delta^4(P' + Q' - P - Q) = \frac{\delta(\cos \theta - \cos \theta_0)}{E_\nu \sqrt{E'^2_l - M_l^2}}. \tag{C.13}$$

Apéndice D

Tensores leptónicos

En este apéndice se introduce alguna de las relaciones del teorema de trazas que nos serán de utilidad para determinar el módulo al cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{M}_{fi}|^2$. Este puede escribirse en términos de la contracción de dos tensores leptónicos cuyo cálculo detallado también puede encontrarse en este apéndice.

D.1. Teorema de trazas

El teorema de trazas permite simplificar la determinación de los tensores leptónicos. A continuación se muestran las propiedades que usaremos durante procedimiento de cálculo.

$$\text{La traza de un número impar de matrices } \gamma^\mu \text{ es 0.} \quad (\text{D.1})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4g^{\alpha\beta}. \quad (\text{D.2})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] = 4i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{D.3})$$

$$\text{Tr}[A\cancel{B}] = 4A^\mu B_\mu = 4A \cdot B. \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Tr}[A\cancel{B}\cancel{C}\cancel{D}] = A \cdot B \text{Tr}[\cancel{C}\cancel{D}] - A \cdot C \text{Tr}[\cancel{B}\cancel{D}] + A \cdot D \text{Tr}[\cancel{B}\cancel{C}]. \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]. \quad (\text{D.6})$$

$$\text{Tr}[\lambda A] = \lambda \text{Tr}[A] \text{ siendo } \lambda = \text{cte.} \quad (\text{D.7})$$

Introducimos el tensor antisimétrico $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ según el convenio utilizado en [8]:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha, \beta, \mu, \nu) \text{ es una permutación par de } (1, 2, 3, 4) \\ -1 & \text{si } (\alpha, \beta, \mu, \nu) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases}, \quad (\text{D.8})$$

que presenta las siguiente propiedades que nos serán de utilidad

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{D.9})$$

$$-\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} = 2(\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\nu}^{\tau} - \delta_{\tau}^{\mu}\delta_{\nu}^{\sigma}), \quad (\text{D.10})$$

con la delta de Kronecker

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \mu \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (\text{D.11})$$

D.2. Tensores leptónicos

La amplitud invariante del proceso de dispersión elástica neutrino-leptón mediado por corrientes cargadas es

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}(\vec{q}_2, s')\Gamma^{\alpha}u(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_{\alpha}u(\vec{q}_1, s)], \quad (\text{D.12})$$

donde se ha introducido el operador de Dirac

$$\Gamma^{\alpha} = \gamma^{\alpha}(1 - \gamma_5). \quad (\text{D.13})$$

Al tomar módulo cuadrado en D.12 se suma sobre los espines de las partículas finales y se promedia sobre los de las iniciales debido a que estos son desconocidos en principio, resultando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_F^2}{4} \sum_{r,s,r',s'} [\bar{u}(\vec{q}_2, s')\Gamma^{\alpha}u(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_{\alpha}u(\vec{q}_1, s)] \\ &\quad \cdot [\bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_{\beta}u(\vec{q}_1, s)]^{\dagger} [\bar{u}(\vec{q}_2, s')\Gamma^{\beta}u(\vec{p}_1, r)]^{\dagger}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Haremos uso de la relación

$$[\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\Gamma u(\vec{p}_1, s_1)]^\dagger = \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\bar{\Gamma}u(\vec{p}_2, s_2), \quad (\text{D.15})$$

donde $\bar{\Gamma}$ es el operador adjunto de Dirac y se define como $\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$.

En nuestro caso, el operador adjunto de Dirac de D.13 es

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^\alpha &= \gamma^0\Gamma^{\alpha\dagger}\gamma^0 = \gamma^0[\gamma^\alpha(1-\gamma_5)]^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(1-\gamma_5^\dagger)(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 \\ &= \gamma^0(1-\gamma_5)(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 - \gamma^0\gamma_5(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 \\ &= \gamma^0(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 + \gamma_5\gamma^0(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 = (1+\gamma_5)\gamma^0(\gamma^\alpha)^\dagger\gamma^0 \\ &= (1+\gamma_5)\gamma^\alpha = \gamma^\alpha(1-\gamma_5) = \Gamma^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

donde hemos recurrido a las propiedades de las matrices γ^μ y γ_5 así como a las relaciones de anticonmutación que las relacionan.

Esto implica que D.14 se reduce a

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \sum_{r,s,r',s'} [\bar{u}(\vec{q}_2, s')\Gamma^\alpha u(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_\alpha u(\vec{q}_1, s)] \quad (\text{D.17})$$

$$\cdot [\bar{u}(\vec{q}_1, s)\Gamma_\beta u(\vec{p}_2, r')] [\bar{u}(\vec{p}_1, r)\Gamma^\beta u(\vec{q}_2, s')]. \quad (\text{D.18})$$

Vamos a separar los sumatorios y hacer uso de la definición del operador de proyección de energía positiva B.21.

Por un lado, desarrollamos los sumatorios en r' y s :

$$\begin{aligned} &\sum_{r',s} [\bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_\alpha u(\vec{q}_1, s)] [\bar{u}(\vec{q}_1, s)\Gamma_\beta u(\vec{p}_2, r')] \\ &= \sum_{r'} \bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_\alpha \left[\sum_s u(\vec{q}_1, s)\bar{u}(\vec{q}_1, s) \right] \Gamma_\beta u(\vec{p}_2, r') \\ &= \sum_{r'} \bar{u}(\vec{p}_2, r')\Gamma_\alpha \left(\frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \right) \Gamma_\beta u(\vec{p}_2, r') \\ &= \sum_{r'} (\bar{u}(\vec{p}_2, r')u(\vec{p}_2, r'))_{\lambda\delta} \left(\Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right)_{\delta\lambda} \\ &= \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Por otro lado, seguimos el mismo procedimiento con los sumatorios de r y s' :

$$\begin{aligned}
& \sum_{r,s'} [\bar{u}(\vec{q}_2, s') \Gamma^\alpha u(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}(\vec{p}_1, r) \Gamma^\beta u(\vec{q}_2, s')] \\
&= \sum_{s'} \bar{u}(\vec{q}_2, s') \Gamma^\alpha \left[\sum_r u(\vec{p}_1, r) \bar{u}(\vec{p}_1, r) \right] \Gamma^\beta u(\vec{q}_2, s') \\
&= \sum_{s'} \bar{u}(\vec{q}_2, s') \Gamma^\alpha \left[\frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \right] \Gamma^\beta u(\vec{q}_2, s') \\
&= \sum_s (\bar{u}(\vec{q}_2, s') u(\vec{q}_2, s'))_{\eta\phi} \left(\Gamma^\alpha \frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \Gamma^\beta \right)_{\phi\eta} \\
&= \text{Tr} \left[\frac{\not{Q}' + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma^\alpha \frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \Gamma^\beta \right]. \tag{D.20}
\end{aligned}$$

Resultando el módulo de la amplitud invariante promediada:

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{Q}' + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma^\alpha \frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \Gamma^\beta \right]. \tag{D.21}$$

Determinaremos las trazas mediante las propiedades introducidas en el apéndice D.1. Calcularemos una de ellas en detalle mientras que del cálculo de la restante solo se mostrarán los resultados más relevantes debido a que ambas se obtienen siguiendo el mismo procedimiento. La traza que desarrollaremos en detalle es la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right] \\
&= \frac{1}{4M_l M_\nu} \text{Tr} \left[(\not{P}' + M_l) \Gamma_\alpha (\not{Q} + M_\nu) \Gamma_\beta \right] \\
&= \frac{1}{4M_l M_\nu} \left[\underbrace{\text{Tr} [\not{P}' \Gamma_\alpha \not{Q} \Gamma_\beta]}_1 + \underbrace{\text{Tr} [M_l \Gamma_\alpha M_\nu \Gamma_\beta]}_2 \right]. \tag{D.22}
\end{aligned}$$

Separamos el cálculo en dos términos por simplicidad, en lo que sigue se hará uso de las relaciones del teorema de trazas así como de las propiedades de la matriz γ_5 . También nos será de utilidad definir $\not{A} = \gamma_\mu A^\mu = \gamma_\mu \delta_\alpha^\mu = \gamma_\alpha$ y $\not{B} = \gamma_\nu B^\nu = \gamma_\nu \delta_\beta^\nu = \gamma_\beta$, ambos los introduciremos en el desarrollo cuando sea necesario.

$$\begin{aligned}
1. \text{Tr} [\not{P}' \Gamma_\alpha \not{Q} \Gamma_\beta] &= \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{Q} \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] \\
&= \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta] + \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \gamma_5 \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5] - \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \gamma_5 \not{Q} \gamma_\beta] - \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5] \\
&= \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta] + \text{Tr} [(-1)^2 \not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5^\alpha] - \text{Tr} [(-1)^2 \not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5] - \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5] \\
&= 2 \left\{ \underbrace{\text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta]}_{1.1} - \underbrace{\text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5]}_{1.2} \right\}. \tag{D.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.1. \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta] &= \text{Tr} [\not{P}' \not{A} \not{Q} \not{B}] \\
&= 4[(P' \cdot A)(Q \cdot B) - (P' \cdot Q)(A \cdot B) + (P' \cdot B)(A \cdot Q)] \\
&= 4 \left[(P'_\mu \gamma_\alpha^\mu)(Q_\nu \gamma_\beta^\nu) - (P' Q) \frac{1}{4} \text{Tr}[AB] + (P'_\nu \gamma_\beta^\nu)(\gamma_\alpha^\mu Q_\mu) \right] \\
&= 4 [P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q) g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha]. \tag{D.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.2. \text{Tr} [\not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta \gamma_5] &= \text{Tr} [(-1)^4 \gamma_5 \not{P}' \gamma_\alpha \not{Q} \gamma_\beta] = \text{Tr} [\gamma_5 \not{P}' \not{A} \not{Q} \not{B}] \\
&= 4i \epsilon_{\delta\tau\phi\theta} P'^\delta A^\tau Q^\phi B^\theta = 4i \epsilon_{\delta\tau\phi\theta} P'^\delta \delta_\alpha^\tau Q^\phi \delta_\beta^\theta \\
&= 4i \epsilon_{\delta\alpha\phi\beta} P'^\delta Q^\phi. \tag{D.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \text{Tr} [M_l \Gamma_\alpha M_\nu \Gamma_\beta] &= M_l M_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] \\
&= M_l M_\nu \{ \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] + \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\beta \gamma_5] - \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\beta] - \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5] \} \\
&= M_l M_\nu \{ \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] + \text{Tr} [(-1) \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5^2] - \text{Tr} [(-1) \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5] - \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5] \} \\
&= M_l M_\nu \{ \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] - \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5^2] + \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5] - \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5] \} = 0. \tag{D.26}
\end{aligned}$$

Reagrupando todos los términos obtenemos que

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right] \\ &= \frac{2}{M_l M_\nu} [P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q) g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha - i\epsilon_{\delta\alpha\phi\beta} P^\delta Q^\phi]. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, la segunda traza resulta

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{Q}' + M_\nu}{2M_\nu} \right) \Gamma^\alpha \left(\frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \right) \Gamma^\beta \right] \\ &= \frac{1}{4M_\nu M_l} \text{Tr} [(\not{Q}' + M_\nu) \Gamma^\alpha (\not{P} + M_l) \Gamma^\beta] \\ &= \frac{2}{M_\nu M_l} [Q'^\alpha P^\beta - (Q' \cdot P) g^{\alpha\beta} + Q'^\beta P^\alpha + 4i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\beta} Q'_\lambda P_\rho]. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

D.3. Contracción de tensores leptónicos

El promedio del módulo al cuadrado de la amplitud invariante se puede escribir mediante la contracción de los tensores leptónicos $\eta_{\alpha\beta}$ y $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$ tal que

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \eta_{\alpha\beta} \bar{\eta}^{\alpha\beta}, \quad (\text{D.29})$$

donde la expresión explícita de los tensores leptónicos $\eta_{\alpha\beta}$ y $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$ es

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &= \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \Gamma_\alpha \frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma_\beta \right] \\ &= \frac{2}{M_l M_\nu} [P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q) g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha - i\epsilon_{\delta\alpha\phi\beta} P^\delta Q^\phi], \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{\alpha\beta} &= \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{Q}' + M_\nu}{2M_\nu} \right) \Gamma^\alpha \left(\frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \right) \Gamma^\beta \right] \\ &= \frac{2}{M_\nu M_l} [Q'^\alpha P^\beta - (Q' \cdot P) g^{\alpha\beta} + Q'^\beta P^\alpha + 4i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\beta} Q'_\lambda P_\rho]. \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Es beneficioso introducir los tensores leptónicos reducidos $\tilde{\eta}_{\alpha\beta}$ y $\tilde{\eta}^{\alpha\beta}$ para deshacernos de las constantes en el cálculo de la contracción de los tensores:

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{M_l M_\nu}{2} \eta_{\alpha\beta}, \quad (\text{D.32})$$

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \frac{M_l M_\nu}{2} \bar{\eta}^{\alpha\beta}. \quad (\text{D.33})$$

Es igualmente recomendable separarlos en sus partes simétrica y antisimétrica.

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S = P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha \\ \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A = i\epsilon_{\alpha\beta\delta\phi} P'^\delta Q^\phi \end{array} \right\}. \quad (\text{D.34})$$

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} = Q'^\alpha P^\beta - (Q' \cdot P)g^{\alpha\beta} + Q'^\beta P^\alpha \\ \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} = i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} P'_\lambda Q_\rho \end{array} \right\}. \quad (\text{D.35})$$

Esta división nos permite centrarnos en las contracciones de las partes simétrica y antisimétrica por separado dado que los términos cruzados son nulos.

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} = (\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A)(\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}) = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}. \quad (\text{D.36})$$

Nos centramos primero en la contracción de la parte simétrica de los tensores reducidos.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} &= \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S (Q'^\alpha P^\beta - (Q' \cdot P)g^{\alpha\beta} + Q'^\beta P^\alpha) \\ &= \underbrace{\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S Q'^\alpha P^\beta}_I - \underbrace{\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S (Q' \cdot P)g^{\alpha\beta}}_{II} + \underbrace{\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S Q'^\beta P^\alpha}_{III}. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Dividimos el cálculo en tres partes por simplicidad:

$$\begin{aligned} \text{I. } \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S Q'^\alpha P^\beta &= [P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha] Q'^\alpha P^\beta \\ &= P'_\alpha Q_\beta Q'^\alpha P^\beta - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} Q'^\alpha P^\beta + P'_\beta Q_\alpha Q'^\alpha P^\beta \\ &= (P'_\alpha Q'^\alpha)(Q_\beta P^\beta) - (P' \cdot Q)(Q'_\beta P^\beta) + (P'_\beta P^\beta)(Q_\alpha Q'^\alpha) \\ &= (P' \cdot Q')(Q \cdot P) - (P' \cdot Q)(Q' \cdot P) + (P \cdot P')(Q \cdot Q'). \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

$$\begin{aligned}
\text{II. } \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S(Q' \cdot P)g^{\alpha\beta} &= [P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha] (Q' \cdot P)g^{\alpha\beta} \\
&= P'_\alpha Q_\beta g^{\alpha\beta} (Q' \cdot P) - (P' \cdot Q)(Q' \cdot P)g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha g^{\alpha\beta} (Q' \cdot P) \\
&= (P'_\alpha Q^\alpha)(Q' \cdot P) - 4(P' \cdot Q)(Q' \cdot P) + P'_\beta Q^\beta (Q' \cdot P) \\
&= (P' \cdot Q)(Q' \cdot P) - 4(P' \cdot Q)(Q' \cdot P) + (P' \cdot Q)(Q' \cdot P) \\
&= -2(P' \cdot Q)(Q' \cdot P). \tag{D.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S Q'^\beta P^\alpha &= [P'_\alpha Q_\beta - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q_\alpha] Q'^\beta P^\alpha \\
&= P'_\alpha Q_\beta Q'^\beta P^\alpha - (P' \cdot Q)g_{\alpha\beta} Q'^\beta P^\alpha + P'_\beta Q_\alpha Q'^\beta P^\alpha \\
&= (P'_\alpha P^\alpha)(Q_\beta Q'^\beta) - (P' \cdot Q)(Q'_\alpha P^\alpha) + (P'_\beta Q'^\beta)(Q_\alpha P^\alpha) \\
&= (P' \cdot P)(Q \cdot Q') - (P' \cdot Q)(Q' \cdot P) + (P' \cdot Q')(Q \cdot P). \tag{D.40}
\end{aligned}$$

Reagrupando los términos, la contracción de las partes simétricas resulta

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} = 2[(P' \cdot Q')(Q \cdot P) + (P' \cdot P)(Q \cdot Q')]. \tag{D.41}$$

En cuanto a la contracción de las partes antisimétricas se obtiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} &= (i\epsilon_{\alpha\beta\delta\phi} P'^\delta Q^\phi)(i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} P'_\lambda Q_\rho) = -\epsilon_{\alpha\beta\delta\phi} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} P'^\delta Q^\phi Q'_\lambda P_\rho \\
&= 2(\delta_\delta^\lambda \delta_\phi^\rho - \delta_\phi^\lambda \delta_\delta^\rho) P'^\delta Q^\phi Q'_\lambda P_\rho = 2[P'^\lambda Q^\rho Q'_\lambda P_\rho - P'^\rho Q^\lambda Q'_\lambda P_\rho] \\
&= 2[(P' \cdot Q')(Q \cdot P) - (P' \cdot P)(Q \cdot Q')], \tag{D.42}
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la propiedad D.10.

Obteniéndose, finalmente, que

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^S \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^A \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} = 4(P' \cdot Q')(Q \cdot P) \tag{D.43}$$

y, por ende, que

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \eta_{\alpha\beta} \bar{\eta}^{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{M_l^2 M_\nu^2} \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \frac{4 G_F^2}{M_l^2 M_\nu^2} (P' \cdot Q')(Q \cdot P). \tag{D.44}$$

D.4. Caso antineutrino

La amplitud invariante del proceso de dispersión elástica antineutrino-leptón mediado por corrientes cargadas, representado en el diagrama de Feynman 4.2, es

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(\vec{q}_1, s) \Gamma^\alpha u(\vec{p}_1, r)] [\bar{u}(\vec{p}_2, r') \tilde{\Gamma}_\alpha u(\vec{q}_2, s')] \quad (\text{D.45})$$

donde se ha introducido los operadores de Dirac $\Gamma^\alpha = \gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$ y $\tilde{\Gamma}^\alpha = \gamma^\alpha(1 + \gamma_5)$. Es preciso tomar módulo de D.45 al cuadrado para determinar la sección eficaz total. Recuerde que los espines de las partículas son desconocidos en principio. Por eso, sumamos sobre los espines finales y promediamos sobre los espines iniciales obteniéndose que

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \kappa_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}^{\alpha\beta}, \quad (\text{D.46})$$

donde aparece la contracción de los tensores leptónicos $\kappa_{\alpha\beta}$ y $\tilde{\kappa}^{\alpha\beta}$. Ambos tensores se introducen a continuación y se obtienen usando el teorema de trazas siguiendo el procedimiento mostrado en el apéndice D.2.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \kappa_{\alpha\beta} &= \text{Tr} \left[\frac{\not{P}' + M_l}{2M_l} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{Q}' + M_\nu}{2M_\nu} \tilde{\Gamma}_\beta \right] \\ &= \frac{2}{M_l M_\nu} [P'_\alpha Q'_\beta - (P' \cdot Q') g_{\alpha\beta} + P'_\beta Q'_\alpha + i\epsilon_{\delta\alpha\phi\beta} P'^\delta Q'^\phi]. \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tilde{\kappa}^{\alpha\beta} &= \text{Tr} \left[\frac{\not{Q} + M_\nu}{2M_\nu} \Gamma^\alpha \frac{\not{P} + M_l}{2M_l} \Gamma^\beta \right] \\ &= \frac{2}{M_\nu M_e} [Q^\alpha P^\beta - (Q \cdot P) g^{\alpha\beta} + Q^\beta P^\alpha - i\epsilon^{\lambda\alpha\rho\beta} Q_\lambda P_\rho]. \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

Podemos definir los tensores leptónicos reducidos $\tilde{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{M_l M_\nu}{2} \kappa_{\alpha\beta}$ y $\tilde{\kappa}^{\alpha\beta} = \frac{M_l M_\nu}{2} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}$. El desarrollo para determinar la contracción de los mismos es idéntico al mostrado en el apéndice D.3. Como resultado obtenemos que

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s,r',s'} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \kappa_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}^{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{M_l^2 M_\nu^2} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}^{\alpha\beta} = \frac{4 G_F^2}{M_l^2 M_\nu^2} (P \cdot P')(Q \cdot Q'). \quad (\text{D.49})$$

La sección eficaz diferencial se obtiene considerando la densidad de estado finales 4.2 y el flujo incidente 4.3, los mismos que en el caso de neutrinos dado que ambos procesos son cinemáticamente idénticos. No obstante, la amplitud invariante sufre cambios debido a que es el término que incluye la información física de la interacción. Considerando D.49, la sección eficaz diferencial resulta

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{\delta^4(P' + Q' - P - Q)}{E_l E_\nu E_l' E_\nu'} (P \cdot P')(Q \cdot Q') d^3\vec{p}_2 d^3\vec{q}_2. \quad (\text{D.50})$$

En este punto es provechoso introducir una de las variables de Mandelstam. En este proceso, la variable apropiada es t y se define como

$$t \equiv (P - P')^2 = (Q - Q')^2 \approx -2M_l E_l', \quad (\text{D.51})$$

donde hemos considerado que $E_l' \gg M_l^{(1)}$ tal que

$$(P \cdot P')(Q \cdot Q') \approx \frac{t^2}{4} \approx M_l^2 E_l'^2 \quad (\text{D.52})$$

y la sección eficaz diferencial resulta

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{M_l^2 E_l'^2}{E_\nu M_l E_l' E_\nu'} \delta^4(P' + Q' - P - Q) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{q}_2. \quad (\text{D.53})$$

Integramos en el momento del antineutrino saliente \vec{q}_2 tal y como se muestra en el apéndice C.13 y cambiamos a coordenadas esféricas obteniéndose que

$$\frac{d\sigma}{dE_l' d\Omega} = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{M_l E_l'^2}{E_\nu^2} \delta(\cos\theta - \cos\theta_0). \quad (\text{D.54})$$

Para determinar la sección eficaz total debemos integrar. Primero integramos respecto al ángulo sólido $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{dE_l'} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{dE_l' d\Omega} = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{M_l E_l'^2}{E_\nu^2} \int d\Omega \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{2G_F^2}{\pi} \frac{M_l E_l'^2}{E_\nu^2}. \quad (\text{D.55})$$

(1) En el estudio del proceso con antineutrinos es recomendable aplicar la aproximación del electrón ultrarelativista para obtener unos resultados más simples. Es una aproximación apropiada dado que la masa del electrón es de 0.511 MeV y estamos trabajando con energías del orden de 1 GeV.

Posteriormente se integra respecto a la energía del leptón saliente dE'_l :

$$\sigma = \int_{M_l}^{E_\nu} dE'_l \frac{d\sigma}{dE'_l} = \frac{2G_F^2 M_l}{\pi E_\nu^2} \int_{M_l}^{E_\nu} dE'_l E_l'^2 = \frac{2G_F^2 M_l}{\pi E_\nu^2} \left[\frac{E_l'^3}{3} \right]_{M_l}^{E_\nu} = \frac{2G_F^2 M_l}{3\pi} \left(E_\nu - \frac{M_l^3}{E_\nu^2} \right). \quad (\text{D.56})$$

En consecuencia, el proceso de dispersión elástica antineutrino-leptón presenta una sección eficaz aproximadamente 3 veces menor que la del proceso de dispersión elástica neutrino-leptón:

$$\sigma(\bar{\nu}_l l) = \frac{2G_F^2 M_l}{3\pi} \left(E_\nu - \frac{M_l^3}{E_\nu^2} \right) \approx \frac{1}{3} \left[\frac{2G_F^2 M_l}{\pi} (E_\nu - M_l) \right] = \frac{1}{3} \sigma(\nu_l l). \quad (\text{D.57})$$

En la Figura D.1 se encuentra representada la sección eficaz total de ambos procesos.

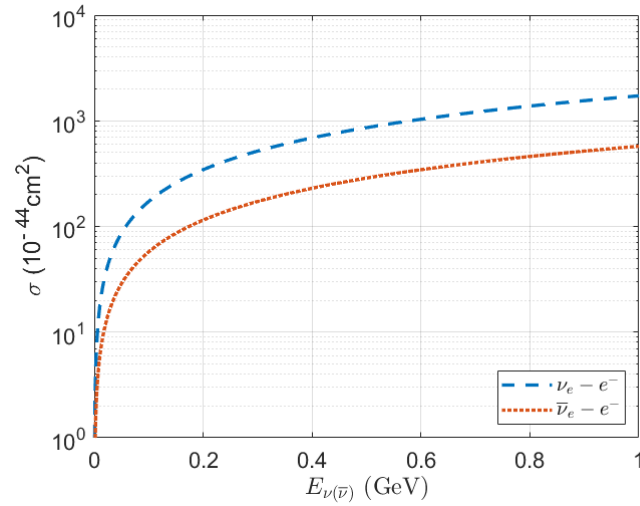


Figura D.1: Comparativa de la sección eficaz total para los procesos de dispersión elástica $\nu_e - e^-$ y $\bar{\nu}_e - e^-$ mediados por corrientes cargadas en función de la energía del (anti)neutrino inicial.

Bibliografía

- [1] J.A. Caballero Carretero. *Los neutrinos : las partículas elementales que todo lo atraviesan*. RBA, 2015. ISBN: 978-84-473-8307-8.
- [2] F. Reines y C. L. Cowan. “The Neutrino”. En: *Nature* 178 (1956). DOI: 10.1038/178446a0.
- [3] B. Pontecorvo. “Electron and Muon Neutrinos”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 37 (1959), págs. 1751-1757.
- [4] G. Danby et al. “Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos”. En: *Physical Review Letters* 9 (1962), págs. 36-44. DOI: 10.1103/PhysRevLett.9.36.
- [5] *Particle Data Group*. URL: <https://pdg.lbl.gov/2022/listings/rpp2022-list-neutrino-prop.pdf> (visitado 20-07-2022).
- [6] M. Aker et al. “Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity”. En: *Nature Phys.* 18.2 (2022), págs. 160-166. DOI: 10.1038/s41567-021-01463-1. arXiv: 2105.08533 [hep-ex].
- [7] Franz Mandl y Graham Shaw. *Quantum Field Theory*. 2.^a ed. John Wiley & Sons, Ltd., 2010. ISBN: 9780471496830.
- [8] Francis Halzen y Alan D. Martin. *Quarks and leptons : an introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, Inc., 1984. ISBN: 9780471887416.
- [9] C. S. Wu et al. “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. En: *Phys. Rev.* 105 (4 feb. de 1957), págs. 1413-1415. DOI: 10.1103/PhysRev.105.1413.
- [10] H. A. Bethe. “Energy Production in Stars”. En: *Phys. Rev.* 55 (1939). DOI: 10.1103/PhysRev.55.434.

- [11] J.N. Bahcall. “Solar neutrinos: an overview”. En: *Physics Reports* 333-334 (2000), págs. 47-62. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00015-6.
- [12] R. Davis, D.S. Harmer y K.C. Hoffman. “Search for Neutrinos from the Sun”. En: *Phys. Rev. Lett.* 20 (21 mayo de 1968), págs. 1205-1209. DOI: 10.1103/PhysRevLett.20.1205.
- [13] Dr. Steve Boyd. *Neutrino Oscillations*. 2020. URL: https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/staff/academic/boyd/stuff/neutrinolectures/lec_oscillations.pdf (visitado 30-06-2022).
- [14] T. Kajita, M. Koshiba y A. Suzuki. “On the origin of the Kamiokande experiment and neutrino astrophysics”. En: *The European Physical Journal H* 37 (jun. de 2012). DOI: 10.1140/epjh/e2012-30007-y.
- [15] B. Pontecorvo. “Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 53 (1967), págs. 1717-1725.
- [16] K. Abe et al. “Measurement of Atmospheric Neutrino Flux Consistent with Tau Neutrino Appearance”. En: *Physical Review Letters* 97 (2006). DOI: 10.1103/physrevlett.97.171801.
- [17] *Super-Kamiokande Official Website*. URL: <https://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/sk/neutrino/kajita/vibration/> (visitado 23-07-2022).
- [18] A. Bellerive et al. “The Sudbury Neutrino Observatory”. En: *Nuclear Physics B* 908 (2016). DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.04.035.
- [19] S.M. Bilenky y B. Pontecorvo. “Lepton mixing and neutrino oscillations”. En: *Physics Reports* 41 (1978). DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(78\)90095-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90095-9).
- [20] *Science and Technology Facilities Council: Particle Physics*. URL: <https://www.ppd.stfc.ac.uk/Pages/T2K.aspx> (visitado 23-08-2022).
- [21] G.D. Megías Vázquez. “Charged-current neutrino interactions with nucleons and nuclei at intermediate energies”. Tesis doct. Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear. Universidad de Sevilla, 2017.
- [22] Carlo Giunti y Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 2007.

- [23] K. Nakamura y S. T. Petcov. *14. Neutrino Masses, Mixing, and Oscillations*. 2017. URL: <https://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-neutrino-mixing.pdf> (visitado 23-07-2022).
- [24] E. Richard et al. “Measurements of the atmospheric neutrino flux by Super-Kamiokande: Energy spectra, geomagnetic effects, and solar modulation”. En: *Phys. Rev. D* 94 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevD.94.052001.
- [25] Y. Ashie et al. “Evidence for an Oscillatory Signature in Atmospheric Neutrino Oscillations”. En: *Physical Review Letters* 93 (2004). DOI: 10.48550/arXiv.hep-ex/0404034.
- [26] Jaewon Park. “Neutrino-Electron Scattering in MINERvA for Constraining the NuMI Neutrino Flux”. Tesis doct. U. Rochester, 2013. DOI: 10.2172/1248363.
- [27] E. Valencia et al. “Constraint of the MINERvA Medium Energy Neutrino Flux using Neutrino-Electron Elastic Scattering”. En: (2022). DOI: 10.48550/arXiv.1906.00111.
- [28] Chris M. Marshall, Kevin S. McFarland y Callum Wilkinson. “Neutrino-electron elastic scattering for flux determination at the DUNE oscillation experiment”. En: *Phys. Rev. D* 101 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.101.032002.
- [29] M.I. Gallardo Fuentes y G.D. Megías Vázquez. “Apuntes de Teoría Cuántica de Campos”. Departamento de FAMN. Universidad de Sevilla. 2022.
- [30] Hyper-Kamiokande Proto-Collaboration et al. “Hyper-Kamiokande Design Report”. En: (2018). DOI: 10.48550/ARXIV.1805.04163v2.
- [31] Babak Abi et al. “Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE), Far Detector Technical Design Report, Volume I Introduction to DUNE”. En: *JINST* 15 (2020). DOI: 10.1088/1748-0221/15/08/T08008.
- [32] C. Athanassopoulos et al. “Evidence for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations from the LSND Experiment at the Los Alamos Meson Physics Facility”. En: *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3082.
- [33] A.A. Aguilar-Arevalo et al. “Significant Excess of Electronlike Events in the Mini-BooNE Short-Baseline Neutrino Experiment”. En: *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.221801.