

Trabajo Fin de Máster  
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Caracterización geométrica de tramo ferroviario

Autor: Humberto Mauricio Chávez Careaga

Tutor: Francisco García Benítez

Dpto. Ingeniería y Ciencia de los Materiales y  
del Transporte  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023





Trabajo Fin de Máster  
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

# **Caracterización geométrica de tramo ferroviario**

Autor:

Humberto Mauricio Chávez Careaga

Tutor:

Francisco García Benítez

Dpto. Ingeniería y Ciencia de los Materiales y del Transporte

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023



Trabajo Fin de Máster: Caracterización geométrica de tramo ferroviario

Autor: Humberto Mauricio Chávez Careaga

Tutor: Francisco García Benítez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



*Dedicado a:*

*Mis padres y hermano*

*Mis compañeros, mis profesores*





# Agradecimientos

---

Hace exactamente tres años me encontraba trabajando como ingeniero civil en Bolivia, y aunque había concluido los estudios de grado, tenía la aspiración de realizar estudios de postgrado con el objeto de ampliar y reforzar mis conocimientos. Siendo la meta ingeniería de caminos, canales y puertos conectar ciudades y personas mejorando su calidad de vida a través de competencias científicas y administrativas decidí afrontar un nuevo desafío en esta prestigiosa casa de estudios.

A punto de concluir con esta etapa de mi vida, estoy totalmente seguro de que la decisión que tome años atrás y los sacrificios que tuve que hacer valieron la pena, pues hoy en día me siento capaz de afrontar cualquier obstáculo que se presente en el futuro.

Primeramente agradecer a mis padres y hermano por todo el apoyo incondicional brindado a lo largo de esta travesía. Gracias infinitamente por toda la motivación constante para cumplir la meta trazada y por todo el cariño que me han enviado, sin importar la distancia.

Asimismo, agradecer a todas estas increíbles personas que conocí durante este periodo de estudio, que siempre me han tendido la mano y con quienes he compartido grandes momentos.

Obviamente, agradecer también a todos los profesores que han compartido su experiencia y conocimientos con absoluta dedicación, y que me han ayudado a ser un mejor profesional.

Finalmente, debo agradecer a Cristina Torrecillas, coordinadora del Máster, que me dio la oportunidad de realizar los estudios que anhelaba y por portarse tan dadivosa conmigo, como a Francisco García Benitez tutor del presente Trabajo Fin de Máster, quien con mucha paciencia y sapiencia supo encaminarme para la conclusión de dicho trabajo.

*Humberto Mauricio Chávez Careaga*

*Sevilla, 2023*



# Resumen

---

El siguiente Trabajo Fin de Máster, tiene como objeto la caracterización geométrica de una vía innominada, misma que fue auscultada para la extracción de conjunto muestral de datos de las irregularidades de una serie de parámetros geométricos extraídos como señales en el dominio del espacio.

Inicialmente, se realizará un análisis de las propiedades intrínsecas de estas señales a través de algunos estadísticos, para conocer su comportamiento a lo largo de la longitud de toda la vía.

Seguidamente, se estudiará la vinculación de una irregularidad en un determinado tramo de la vía debido a los ocasionados a lo largo de la misma o a irregularidades de otros parámetros, a través de la función de autocorrelación y correlación cruzada, con el objeto de determinar una causa.

Asimismo, se analizará el comportamiento de las señales en el dominio de la frecuencia a través transformada de Fourier, al descomponer la señal en una serie de componentes de diferentes frecuencias, para conocer la ocurrencia de estas.

Finalmente, se caracterizará la calidad de la vía según de la distribución del resto de vías europeas, conforme a lo dispuesto en la normativa vigente, obteniendo un concepto global del estado de la vía y sus implicaciones.



# Abstract

---

The following Master's Thesis has as its object the geometric characterization of an innominate road, which was auscultated for the extraction of a sample set of data from the irregularities of a series of geometric parameters extracted as signals in the domain of space.

Initially, an analysis of the intrinsic properties of these signals will be carried out through some statistics, to know their behavior along the length of the entire pathway.

Next, the linkage of an irregularity in a certain section of the road due to those caused along it or to irregularities of other parameters will be studied, through the autocorrelation and cross-correlation function, in order to determine a cause.

Likewise, the behavior of the signals in the frequency domain will be analyzed through the Fourier transform, by decomposing the signal into a series of components of different frequencies, to know the occurrence of these.

Finally, the quality of the road will be characterized according to the distribution of the rest of European roads, in accordance with the provisions of current regulations, obtaining a global concept of the state of the road and its implication.



<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	<i>Motivación</i>	1
1.2	<i>Objetivos</i>	1
1.3	<i>Herramientas</i>	2
1.4	<i>Metodología</i>	2
<b>2</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>3</b>
2.1	<i>Descripción estadística de las funciones</i>	3
2.2	<i>Correlación de señales</i>	4
2.3	<i>Densidad espectral</i>	6
2.4	<i>Definición de los parámetros geométricos</i>	8
<b>3</b>	<b>Desarrollo del problema</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Normativa</b>	<b>52</b>
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Índice de Tablas

---

Tabla 1 Características estadísticas del ancho de vía	14
Tabla 2 Características estadísticas del peralte	14
Tabla 3 Características estadísticas del alabeo 3 m	15
Tabla 4 Características estadísticas del alabeo 6 m	16
Tabla 5 Características estadísticas de la nivelación longitudinal carril izquierdo	16
Tabla 6 Características estadísticas de la nivelación longitudinal carril derecho	17
Tabla 7 Características estadísticas de la alineación carril izquierdo	18
Tabla 8 Características estadísticas de la alineación carril derecho	18
Tabla 9 Características estadísticas de la señal truncada ancho de vía	23
Tabla 10 Características estadísticas de la señal truncada peralte	24
Tabla 11 Características estadísticas de la señal truncada alabeo 3 m	24
Tabla 12 Características estadísticas de la señal truncada alabeo 6 m.	25
Tabla 13 Características estadísticas de la señal truncada nivelación longitudinal carril izquierdo	26
Tabla 14 Características estadísticas de la señal truncada nivelación longitudinal carril derecho	26
Tabla 15 Características estadísticas de la señal truncada alineación carril izquierdo	28
Tabla 16 Características estadísticas de la señal truncada alineación carril derecho	28
Tabla 17. Rango de medición de nivelación longitudinal	54
Tabla 18. Rango de medición de alineación	54
Tabla 19. Nivel longitudinal, desviación típica, dominio D1	56
Tabla 20. Alineación media, desviación típica, dominio D1	56



# Índice de Figuras

---

Figura 1 Función de autocorrelación	4
Figura 2 Función de autocorrelación tipo	5
Figura 3 Función de correlación cruzada tipo	6
Figura 4 Área bajo curva densidad espectral	7
Figura 5 Ancho de vía	9
Figura 6 Peralte	9
Figura 7 Alabeo	10
Figura 8 Nivelación longitudinal del carril	10
Figura 9 Alineación del carril	11
Figura 10 Alineación media de la vía	11
Figura 11 Nivelación transversal del trazado	12
Figura 12 Perfil vertical	12
Figura 13 Señal del ancho de vía	13
Figura 14 Señal de peralte	14
Figura 15 Señal de alabeo 3 m	15
Figura 16 Señal de alabeo 6 m	15
Figura 17 Nivelación longitudinal carril izquierdo	16
Figura 18 Nivelación longitudinal carril derecho	17
Figura 19 Alineación carril izquierdo	17
Figura 20 Alineación carril derecho	18
Figura 21 Coeficiente de autocorrelación de ancho de vía	19
Figura 22 Coeficiente de autocorrelación del peralte	19
Figura 23 Coeficiente de autocorrelación del alabeo 3 m	20
Figura 24 Coeficiente de autocorrelación del alabeo 6 m	20
Figura 25 Coeficiente de autocorrelación de nivelación longitudinal carril izquierdo	21
Figura 26 Coeficiente de autocorrelación de nivelación longitudinal carril derecho	21
Figura 27 Coeficiente de autocorrelación de alineación carril izquierdo	22
Figura 28 Coeficiente de autocorrelación de alineación carril derecho	22
Figura 29 Coeficiente de correlación de la señal de ancho de vía truncada	23
Figura 30 Coeficiente de correlación de la señal de peralte truncada	24
Figura 31 Coeficiente de correlación de la señal de alabeo 3 m truncada	25

Figura 32 Coeficiente de correlación de la señal de alabeo 6 m truncada	25
Figura 33 Coeficiente de correlación de la señal nivelación longitudinal del carril izquierdo truncada	26
Figura 34 Coeficiente de correlación de la señal nivelación longitudinal del carril derecho truncada	27
Figura 35 Coeficiente de correlación de la señal alineación del carril izquierdo truncada	27
Figura 36 Coeficiente de correlación de la señal alineación del carril derecho truncada	28
Figura 37 Esquema general del desfase	29
Figura 38 Coeficiente de correlación del ancho de vía ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	30
Figura 39 Coeficiente de correlación del ancho de vía para $\chi_{\min} = 2$ m	30
Figura 40 Coeficiente de correlación del peralte ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	31
Figura 41 Coeficiente de correlación del peralte para $\chi_{\min} = 2$ m	31
Figura 42 Coeficiente de correlación del alabeo 3 m ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	32
Figura 43 Coeficiente de correlación del alabeo 3 m para $\chi_{\min} = 2$ m	32
Figura 44 Coeficiente de correlación del alabeo 6 m ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	32
Figura 45 Coeficiente de correlación del alabeo 6 m para $\chi_{\min} = 2$ m	33
Figura 46 Coeficiente de correlación de la nivelación long. carril izquierdo ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	33
Figura 47 Coeficiente de correlación de la nivelación long. carril izquierdo para $\chi_{\min} = 2$ m	34
Figura 48 Coeficiente de correlación de la nivelación long. carril derecho ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	34
Figura 49 Coeficiente de correlación de la nivelación long. carril derecho para $\chi_{\min} = 2$ m	34
Figura 50 Coeficiente de correlación de la alineación carril izquierdo ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	35
Figura 51 Coeficiente de correlación de la alineación carril izquierdo para $\chi_{\min} = 2$ m	35
Figura 52 Coeficiente de correlación de la alineación carril derecho ( $L = 25$ m y $\chi_{\min} = 2$ m)	35
Figura 53 Coeficiente de correlación de la alineación carril derecho para $\chi_{\min} = 2$ m	36
Figura 54 Correlación cruzada ancho de vía y alineación	37
Figura 55 Correlación cruzada alineación carril izquierdo y derecho	37
Figura 56 Correlación cruzada nivelación y perfil vertical	38
Figura 57 Correlación cruzada nivelación carril izquierdo y derecho	38
Figura 58 Correlación cruzada nivelación y alineación carril derecho	39
Figura 59 Correlación cruzada nivelación y alineación carril izquierdo	39
Figura 60 Correlación cruzada ancho de vía y perfil vertical	40
Figura 61 Correlación señal cruzada truncada del ancho de vía y alineación	41
Figura 62 Correlación señal cruzada truncada de la alineación carril izquierdo y derecho	41
Figura 63 Correlación cruzada truncada de la nivelación y perfil vertical	42
Figura 64 Correlación cruzada truncada de la nivelación carril izquierdo y derecho	42
Figura 65 Correlación cruzada truncada de la nivelación y alineación carril derecho	43
Figura 66 Correlación cruzada truncada de la nivelación y alineación carril izquierdo	43
Figura 67 Correlación cruzada truncada del ancho de vía y perfil vertical	43
Figura 68 Densidad autoespectral ancho de vía (rango hasta 0,02 cpm)	44
Figura 69 Densidad autoespectral peralte (rango hasta 0,02 cpm)	45

Figura 70 Densidad autoespectral alabeo 3 m (rango hasta 0,02 cpm)	45
Figura 71 Densidad autoespectral alabeo 6 m (rango hasta 0,02 cpm)	46
Figura 72 Densidad autoespectral nivelación longitudinal carril izquierdo (rango hasta 0,02 cpm)	46
Figura 73 Densidad autoespectral nivelación longitudinal del carril derecho (rango hasta 0,02 cpm)	47
Figura 74 Densidad autoespectral alineación carril izquierdo (rango hasta 0,02 cpm)	47
Figura 75 Densidad autoespectral alineación carril derecho (rango hasta 0,02 cpm)	48
Figura 76 Densidad espectral cruzada ancho de vía y alineación (rango hasta 0,02 cpm)	48
Figura 77 Densidad espectral cruzada alineación carril izquierdo y derecho (rango hasta 0,02 cpm)	49
Figura 78 Densidad espectral cruzada nivelación y perfil vertical (rango hasta 0,02 cpm)	49
Figura 79 Densidad espectral cruzada nivelación carril izquierdo y derecho (rango hasta 0,02 cpm)	50
Figura 80 Densidad espectral cruzada nivelación y alineación carril derecho (rango hasta 0,02 cpm)	50
Figura 81 Densidad espectral cruzada nivelación y alineación carril izquierdo (rango hasta 0,02 cpm)	51
Figura 82 Densidad espectral cruzada ancho de vía y perfil vertical (rango hasta 0,02 cpm)	51
Figura 83 Relación entre los ejes del sistema de coordenadas de la vía	52
Figura 84 Resultado de la desviación estándar de la nivelación longitudinal	57
Figura 85 Resultado de la desviación estándar de la alineación	58
Figura 86 Caracterización geométrica del ancho de vía	59
Figura 87 Alineación dominio del espacio y la frecuencia	60
Figura 88 Alineación rango de longitud de onda D1, D2 y D3	60
Figura 89 Nivelación dominio del espacio y la frecuencia	61
Figura 90 Nivelación rango de longitud de onda D1, D2 y D3	61
Figura 91 Desviación estándar de la distribución de calidad de las vías europeas (D1)	62
Figura 92 Desviación estándar de la distribución de calidad de las vías europeas (D2)	63
Figura 93 Desviación estándar de la distribución de calidad de las vías europeas (D3)	63

# Notación

---

$E$	Media o esperanza matemática
$\sigma$	Desviación típica o estándar
$\rho$	Coefficiente de correlación
$R_i(\chi)$	Función de correlación
$S_i(\emptyset)$	Función de densidad espectral
$\chi$	Desplazamiento o desfase
L	Ventana de discretización
$\chi_{\min}$	Desfase mínimo
$\Phi$	Frecuencia espacial
TQI	Track Quality Index
TQC	Track Quality Classes
CoSD	Combined Standard Desviation

# 1 INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 Motivación

Uno de los más importantes medios de transporte alrededor del mundo son los ferrocarriles, este invento favoreció el crecimiento de la producción de diferentes sectores económicos, impulsados por la necesidad de integración del mercado y exportación al exterior, lo que desencadenó en la construcción de redes ferroviarias que se extienden hasta la actualidad. En ese sentido, una de las actividades fundamentales de la administración es el mantenimiento de éstas, puesto que se debe garantizar que el sistema se encuentre apto durante toda la fase de explotación.

Para el cumplimiento de esta tarea se han desarrollado diferentes sistemas de auscultación de la vía, que nos permiten extraer una serie de datos globales sobre sus parámetros de diseño. Para analizar toda esta información existen diferentes tipos de metodologías cuyos resultados se encuentran limitados por estándares o normativas. Este tratamiento de datos es esencial para conocer el comportamiento que tiene la vía en función de diferentes parámetros, poder localizar aquellas secciones cuya infraestructura requiere de mantenimiento y determinar la causa de este desperfecto.

Es así, que el presente trabajo se centra en estudiar de manera detallada una serie de datos auscultados de una vía férrea innominada para su caracterización geométrica.

## 1.2 Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es caracterizar geoméricamente una vía férrea en función de datos auscultados analizados en el dominio del espacio y frecuencia, y contrastados con las especificaciones dispuestas en la normativa vigente.

Además del objetivo general, se pretende dar cumplimiento a los siguientes objetivos específicos:

- Sintetizar la normativa de caracterización de la calidad geométrica de vías ferroviarias
- Analizar los parámetros geométricos explicativos auscultados
  - o Parámetros principales
  - o Parámetros derivados
    - Fundamentos del tratamiento de datos (filtrado, dominio del espacio, dominio de la frecuencia)
  - o Evolución de parámetros
    - Análisis independiente de parámetros (filtrado, autocorrelación, densidades espectrales)
    - Análisis de correlación entre parámetros (correlación cruzada, densidades espectrales cruzadas)
- Determinar la calidad geométrica de la vía
  - o Indicadores y Normativa
    - Selección de Indicadores
    - Evolución y evaluación de la calidad (a través de los indicadores normalizados)
- Evaluar la calidad determinada

### 1.3 Herramientas

En primera instancia las variables a ser analizadas en el presente trabajo fueron obtenidas en base a una campaña de auscultación a una vía de tren innominada.

La muestra de datos fue realizada cada 0,25 m para un tramo de longitud igual a 5.755,75 m, y las variables obtenidas fueron las siguientes:

- Peralte [mm]
- Ancho de vía [mm]
- Peralte medido en 6 mm de distancia
- Alineamiento del carril izquierdo
- Alineamiento del carril derecho
- Nivelación longitudinal del carril izquierdo
- Nivelación longitudinal del carril derecho

Con el objeto de dar cumplimiento a los objetivos planteados en el presente trabajo, para el proceso matemático de los datos presentados con antelación, se utilizará el programa Matlab R2021b.

### 1.4 Metodología

El trabajo partirá de los valores muestrales obtenidos que en una primera aproximación deberán ser analizados para el tratamiento estadístico de los mismos. A partir de estos, en una primera parte se definirá el tipo de señal y las propiedades intrínsecas, para luego enfocarnos en diseñar un proceso iterativo de correlación entre la misma variable y otras variables con ayuda de la función de autocorrelación y correlación cruzada, asegurando la calidad de los resultados obtenidos.

En una segunda parte se analizará el contenido en frecuencia de los resultados obtenidos a través de la función de densidad autoespectral y densidad espectral.

Finalmente, se contrastarán los parámetros geométricos con los límites admisibles dispuestos en la normativa y se calculará el índice de calidad de la vía (TQI) para la correspondiente caracterización geométrica.

# 2 MARCO TEÓRICO

---

## 2.1 Descripción estadística de las funciones

En primera instancia definimos una señal como una función de una o más variables que contiene y transporta información sobre la naturaleza de un fenómeno físico, es así como para el presente trabajo se considerará cada parámetro de la vía objeto de estudio como una señal independiente.

Bajo ese argumento se puede clasificar una señal de la siguiente manera:

- Periódica
  - Armónicas
  - No armónica
- Aperiódica
  - Determinista
  - Aleatoria
    - No estacionaria
    - Estacionaria

En este sentido, todas las señales analizadas se supondrán como procesos **aleatorios** porque la función no puede ser determinada por una ley de causalidad matemática, **estacionarios** porque los parámetros estadísticos son estables a lo largo del tiempo y **ergódicos** porque se extraerán las propiedades estadísticas de una única muestra aleatoria. Dichos conceptos se encuentran desarrollados en el punto 1 del *Anexo 1* referenciada en [1].

La señal se encuentra definida a partir de la siguiente expresión:

$$\{Z(x), x \in X\}, Z(x) \in \Omega \quad (1)$$

Considerando  $X \equiv \mathbb{R}$ , el número total de muestras se define en el dominio del espacio.

Al ser un proceso estacionario debe cumplir con los siguientes supuestos:

- Media o esperanza matemática, se define como:

$$E[Z] = \int_0^X Z(x) dx \quad (2)$$

- La varianza, la medida de cuanto difiere la función del promedio viene dada por:

$$\sigma_Z^2 = \int_0^X (Z(x) - E[Z])^2 dx \quad (3)$$

## 2.2 Correlación de señales

Para comparar cuantitativamente dos señales con respecto a la cantidad de amplitudes iguales que contengan una de otra y viceversa, se hará uso de la función de autocorrelación y correlación cruzada. Para elección del criterio ver punto 2 del *Anexo 1* referenciada en [2].

### 2.2.1 Función de autocorrelación

La **función de autocorrelación** para un proceso aleatorio  $z(x)$  está definido como el valor promedio del producto de  $z(x) * z(x + \chi)$  desarrollado en [3]. El proceso es muestreado a una distancia  $x$  y luego para otra  $x + \chi$ , y luego se calcula el valor promedio o la esperanza matemática del producto de  $E[z(x) * z(x + \chi)]$ , para todo el conjunto.

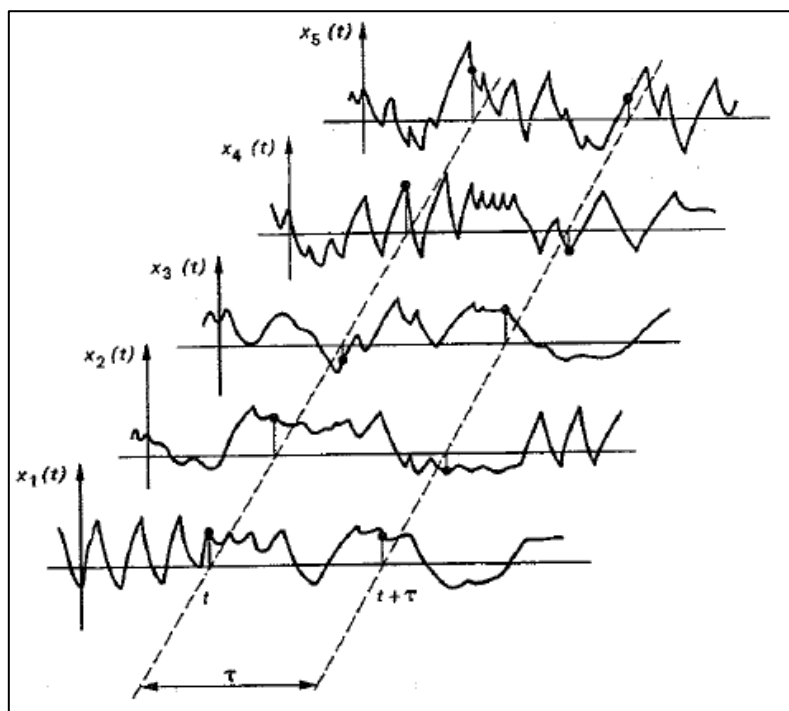


Figura 1 Función de autocorrelación

Al tratarse de un proceso estacionario, el valor de  $E[Z(x) * Z(x + \chi)]$  será totalmente independiente de  $x$  y solo dependerá de  $\chi$ , que es un parámetro registrador que da una traslación en el dominio del espacio de una señal con respecto a la otra como se observa en la imagen anterior, y se expresa a partir de la siguiente ecuación:

$$R_{12}(\chi) = \int_{x_1}^{x_2} [z_1(x) * z_2(x + \chi)] dx \quad (4)$$

O dicha de otra forma:

$$R_z(\chi) = E[z(x) * z(x + \chi)] \quad (5)$$



Al tratarse de una función aproximada de relación entre una señal  $x$  y la misma desplazada  $x + \chi$ , cuya regresión se ajusta a una recta, el parámetro que mide dicha linealidad es el denominado **coeficiente de correlación** el cual toma el valor de 1 si la correlación es perfecta y 0 si no existe correlación, y viene definido por la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{E[(z(x) - m) * (z(x + \chi) - m)]}{\sigma^2} \quad (6)$$

Si se despeja  $R_z(\chi)$ , y se limita el valor de  $\rho$  a  $\pm 1$ , se obtiene el rango de la curva de correlación limitada  $(\pm\sigma^2 + m^2)$ , siendo un gráfico típico de una función de autocorrelación  $R_z(\chi)$  frente a un desplazamiento  $\chi$ , la figura 2.

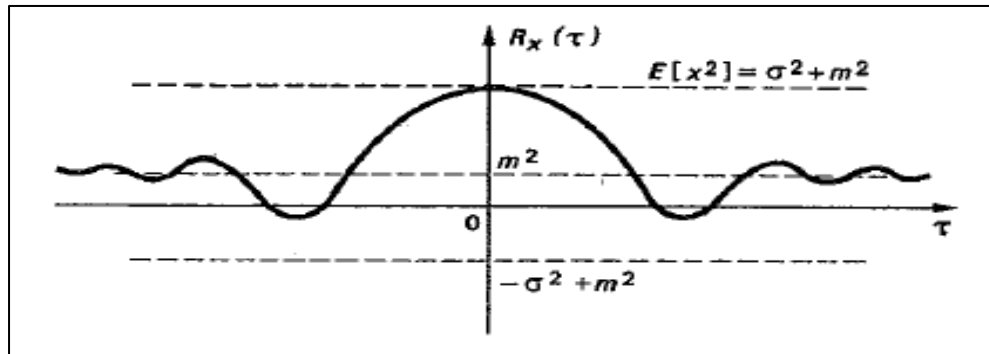


Figura 2 Función de autocorrelación tipo

## 2.2.2 Función de correlación cruzada

Al igual que en el otro caso, la función de correlación cruzada entre dos diferentes señales aleatorias estacionarias en el dominio del espacio  $z(x)$  e  $y(x)$  vendrían definidas de la siguiente manera:

$$R_{zy}(\chi) = E[z(x) * y(x + \chi)] \quad (7)$$

Siendo que el coeficiente de correlación viene dado por la siguiente expresión:

$$\rho_{zy} = \frac{E[(z(x) - m_z) * (y(x + \chi) - m_y)]}{\sigma_z * \sigma_y} \quad (8)$$

Por lo que un gráfico típico de una función de correlación cruzada  $R_{zy}(\chi)$  frente a un desfase longitudinal  $\chi$ , tiene el siguiente comportamiento, nótese que para este caso particular la correlación máxima entre las señales  $z$  e  $y$  no necesariamente se alcanza cuando  $\chi = \chi_0$ .

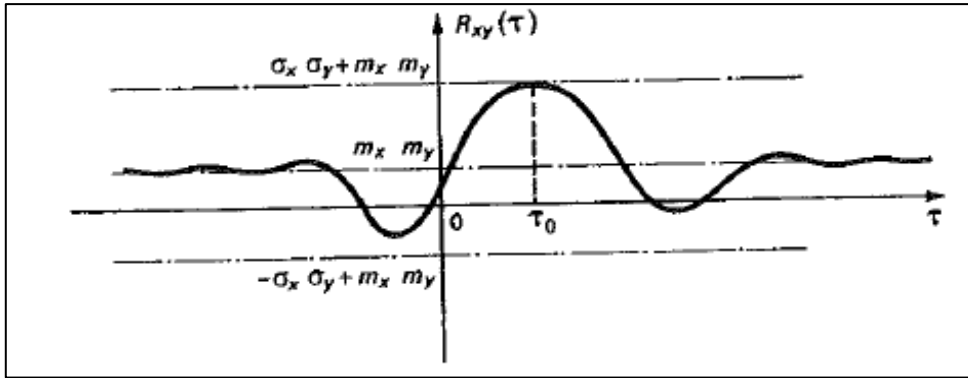


Figura 3 Función de correlación cruzada tipo

Las expresiones usadas para definir la función de autocorrelación como la correlación cruzada se encuentran detalladas en el punto 2.3.1 y 2.3.2 del *Anexo I* [3].

### 2.2.2.1 Desarrollo en Matlab de la función de correlación

Para la función de autocorrelación y correlación cruzada, se utiliza la función propia de Matlab  $xcorr(x,y)$  [4] que devuelve la correlación cruzada de dos secuencias diferenciadas en dominio, mide la similitud entre un vector “z” y el mismo vector “z” u otro vector “y” desplazados (desfasados). Si z e y tienen longitudes diferentes, la función añade ceros al final del vector más corto para que tenga la misma longitud que el otro. En este caso particular usamos la normalización tipo “biased”, estimación sesgada de la correlación cruzada que se define por la siguiente expresión:

$$R_{zy,biased}(m) = \frac{1}{N} R_{zy}(m) \quad (9)$$

La secuencia de correlación cruzada de dos procesos aleatorios estacionarios,  $z_n$  e  $y_m$ , viene dada por:

$$R_{zy}(m) = E[z_{n+m} y_n^*] = E[z_n y_{n-m}^*] \quad (10)$$

Siendo n un número entre  $-\infty < n < \infty$ , el asterisco denota la conjugación,  $xcorr$  estima la secuencia de un segmento finito del dominio, entonces dicha función calcula la correlación sin procesar ni normalizar, a través de la siguiente relación:

$$R_{zy}(m) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-m-1} z_{n+m} y_n^* & m \geq 0 \\ R_{zy}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (11)$$

N es el número total de los datos, del vector truncado de la variable que se vaya a analizar.

## 2.3 Densidad espectral

Desde un punto de vista ingenieril, es de interés analizar una función cualquiera desglosándola en sus diferentes componentes y se puede lograr con ayuda de los coeficientes de las series de Fourier si nos referimos a un proceso periódico o en términos de la transformada de Fourier si se trata de una función no periódica. Las series de Fourier se desarrollan en el punto 3.1 del *Anexo I* [3].

### 2.3.1 Transformada de Fourier

En el caso de señales aleatorias podríamos escribir la integral de Fourier en su forma compleja, de la siguiente manera:

$$z(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-i\phi x} dx \quad (12)$$

Esta ecuación es la definición formal de  $z(x)$  conocida como la **transformada de Fourier** de  $z(x)$ .

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\phi) e^{i\phi x} d\phi \quad (13)$$

Mientras está última se conoce como la **antittransformada de Fourier** de  $z(x)$ .

El desarrollo de las expresiones empleadas en este punto se encuentra en el punto 3.2 del *Anexo I* [3].

### 2.3.2 Función de densidad autoespectral

Como se mencionó con antelación el contenido en frecuencia de un proceso aleatorio no puede ser representado por una serie discreta de Fourier, sin embargo, esta dificultad puede ser superada si se analiza la función de autocorrelación  $R_z(\chi)$ . Siendo posible aplicar la transformada de Fourier a la autocorrelación  $R_z(\chi)$  y viceversa [3], dadas por las siguientes expresiones:

$$S_z(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\chi) e^{-i\phi\chi} d\chi \quad (14)$$

$$R_z(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\phi) e^{i\phi\chi} d\phi \quad (15)$$

Dónde  $S_z(\phi)$  es la densidad autoespectral del proceso  $z(x)$  y su función de frecuencia espacial  $\phi$ . Siendo su propiedad más importante que el valor medio cuadrático de un proceso estacionario aleatorio  $z(x)$  esta dada por el área bajo la curva de densidad espectral  $S_z(\phi)$  frente a  $\phi$ .

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\phi) d\phi \quad (16)$$

Las unidades de  $S_z(\phi)$  están acorde a la esperanza matemática cuadrática por unidad de frecuencia.

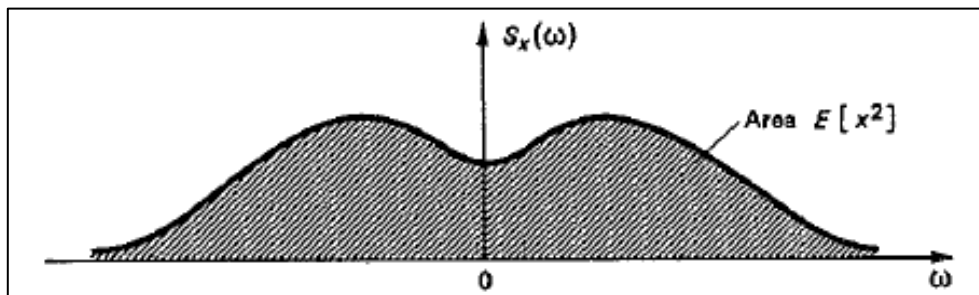


Figura 4 Área bajo curva densidad espectral

Asimismo, la esperanza matemática cuadrática de densidad espectral de un proceso aleatorio estacionario  $z(x)$  es real y siempre positivo como se ilustra en la figura 4.

### 2.3.3 Función de densidad espectral cruzada

De la misma manera como el caso anterior, la densidad espectral cruzada de un par de procesos aleatorios están definidos como la transformada de Fourier de la función de correlación cruzada. Por tanto, si  $R_{zy}(\chi)$  son las funciones correlación cruzada tenemos:

$$S_{zy}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{zy}(\chi) e^{-i\phi\chi} d\chi \quad (17)$$

Y la antitransformada de Fourier viene dada por:

$$R_{zy}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zy}(\phi) e^{i\phi\chi} d\phi \quad (18)$$

La función de densidad espectral se expresa en unidades  $xy$  por unidades de frecuencia espacial.

Las ecuaciones utilizadas para definir la función de densidad autoespectral y espectral cruzada se encuentra desarrolladas en los puntos 3.3 y 3.4 del *Anexo I* [3].

### 2.3.4 Desarrollo en Matlab de la función de densidad espectral

Para el tratamiento de los datos en Matlab, se utilizará la función de la transformada rápida de Fourier (FFT) [5], consultar el punto 4 del *Anexo I*, cuyo argumento es un vector de entrada  $x$  y devuelve la transformada de Fourier discreta del vector utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier, para una longitud  $n$ , se define de la siguiente manera:

$$y(k) = \sum_{j=1}^n x(j) W_n^{(j-1)(k-1)} \quad (19)$$

Dónde:

$$W_n = e^{(-2\pi i)/n} \quad (20)$$

## 2.4 Definción de los parámetros geométricos

Tanto para la función de autocorrelación como la correlación cruzada, se utilizarán las señales de parámetros directamente obtenidos de la auscultación como indirectos obtenidos a partir de otros, es por esta razón que en el siguiente punto se definirán brevemente.

### 2.4.1 Ancho de vía

El ancho de vía,  $G$ , es la distancia más pequeña entre líneas perpendiculares a la superficie de rodadura que se cruzan con cada perfil de la cabeza de carril en el punto  $P$ , en un índice de 0 a  $Z_P$  bajo la superficie de rodadura. En esta norma  $Z_P$  es siempre 14 mm, definición en [6].

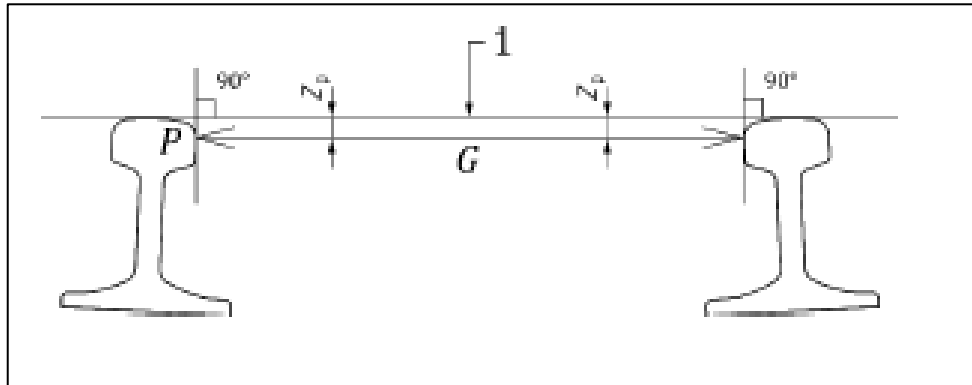


Figura 5 Ancho de vía

### 2.4.2 Peralte

Diferencia entre las cotas verticales de las superficies de rodadura de los carriles en una sección transversal de la vía, calculada a partir del ángulo entre la superficie de rodadura y un plano horizontal. Expresada como la altura del cateto vertical de un triángulo rectángulo con hipotenusa igual al ancho de vía nominal más cabeza del carril.

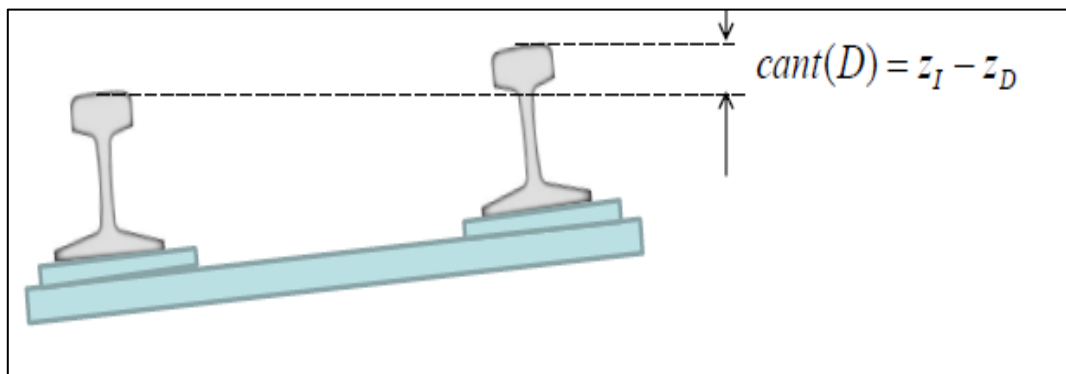


Figura 6 Peralte

### 2.4.3 Alabeo

Distancia existente entre un punto de la vía ( $P_4$ ) y el plano definido por otros tres puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , es decir, la diferencia entre dos niveles transversales o peraltes tomadas a una distancia de separación definida. Se puede expresar como una relación (% o m/mm).

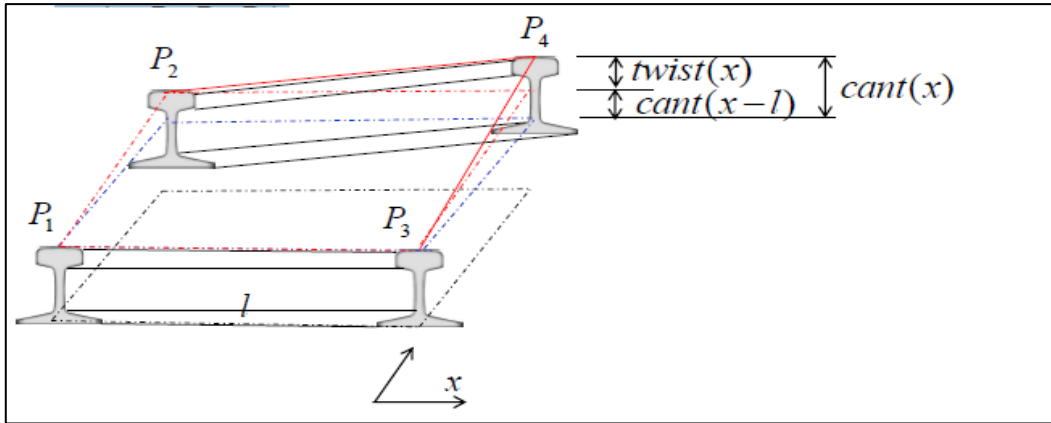


Figura 7 Alabeo

#### 2.4.4 Nivelación longitudinal de los carriles

El nivel longitudinal es la desviación  $z_{11}$  en la dirección  $z$  de los niveles de la banda de rodadura en cualquier carril desde la posición vertical aislada (línea de referencia) expresada en rangos de longitud de onda definidos.

La línea de referencia y el nivel longitudinal se calculan a partir de mediciones sucesivas.

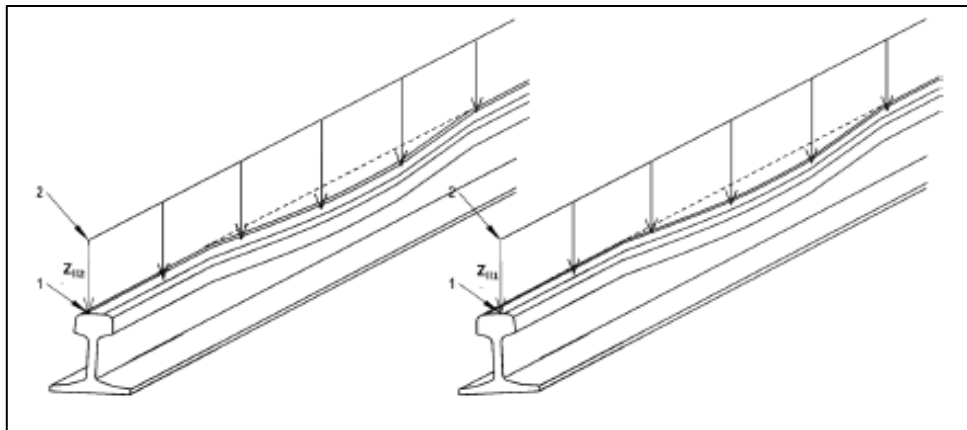


Figura 8 Nivelación longitudinal del carril

Dónde:

1. Banda de rodadura
2. Línea de referencia

Siendo la expresión de la nivelación para cada uno de los carriles la expuesta a continuación:

$$N_r = z - z_r \quad (21)$$

#### 2.4.1. Alineación de los carriles

Variación según el eje  $y$  y de posiciones consecutivas del punto  $P$  sobre cada carril, expresada como desviación de la posición horizontal media (línea de referencia) cubriendo los rangos de longitud de onda estipulados y calculada a partir de mediciones sucesivas.

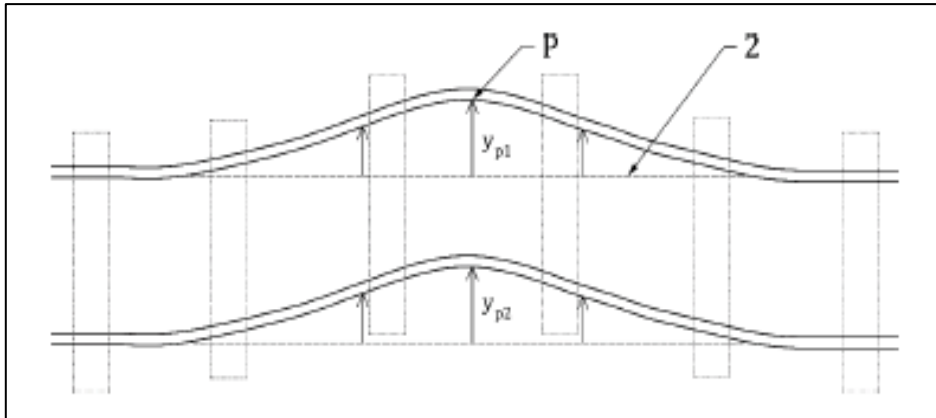


Figura 9 Alineación del carril

Dónde la línea de referencia (2) es una situación de referencia sobre la alineación media del trazado, y se presenta en planta en la siguiente figura:

Siendo la expresión de la alineación la siguiente:

$$A_r = y - y_r \quad (22)$$

### 2.4.5 Alineación media

Cota transversal del entrecarril real y la desviación de la alineación media respecto a la referencia teórica  $y_r$ .

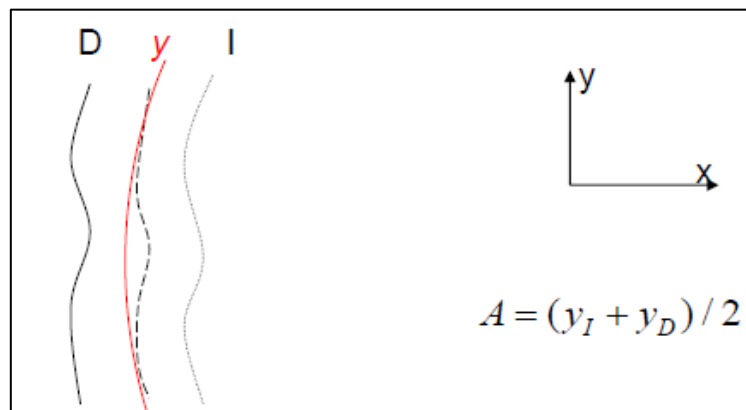


Figura 10 Alineación media de la vía

La desviación de la alineación media de la vía se calcula a través de la siguiente expresión:

$$y_r = \frac{y_I + y_D}{2} \quad (23)$$

### 2.4.6 Nivelación transversal del trazado

Diferencia entre las cotas verticales de las superficies de rodadura de los carriles en una sección transversal de la vía.

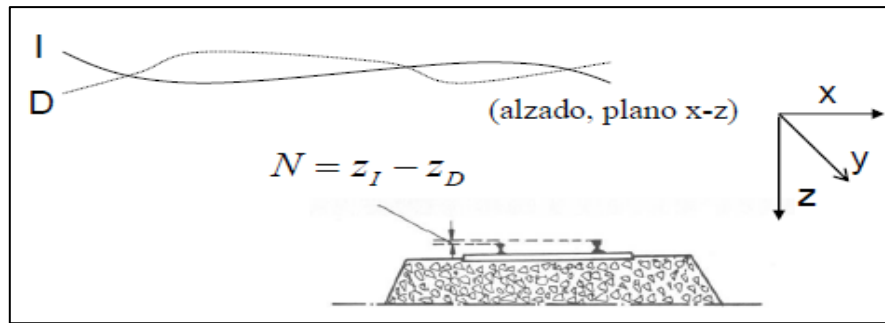


Figura 11 Nivelación transversal del trazado

La desviación de la nivelación transversal del trazado se calcula a través de la siguiente expresión:

$$z_r - z_I - z_D \quad (24)$$

### 2.4.7 Perfil vertical

Cota vertical de la línea entrecarril real, siendo la desviación del perfil vertical respecto del valor teórico de referencia,  $z_r$ .

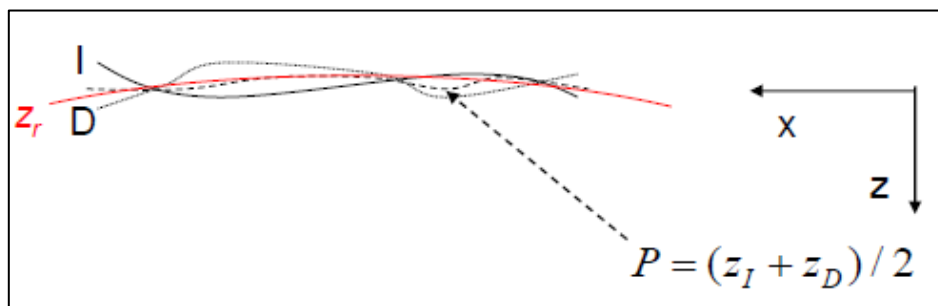


Figura 12 Perfil vertical

La desviación del perfil vertical se calcula a través de la siguiente expresión:

$$z_r - \frac{z_I - z_D}{2} \quad (25)$$



# 3 DESARROLLO DEL PROBLEMA

En el presente apartado se obtendrán características estadísticas, los niveles de correlación entre señales y el contenido en frecuencia de parámetros obtenidos mediante auscultación.

## 3.1 Condiciones iniciales

En primera instancia es menester aclarar que, producto de la auscultación realizada a la vía, se tomaron muestras cada 0,25 m. El número total de muestras es de 23.023 por lo que la longitud total de la vía innominada auscultada es 5.755,75 m.

De todos los parámetros obtenidos mediante la auscultación, son objeto del presente estudio las siguientes variables:

- Ancho de vía
- Peralte
- Alabeo
- Nivel longitudinal
- Alineación

## 3.2 Caracterización de la señal

Cada señal a ser analizada se describe como proceso **aleatorio estacionario y ergódico** que se encuentran en el dominio del espacio, por lo que cada muestra correspondiente a cierta amplitud será representada en función de la longitud de la vía, y para representar la señal en el origen se restará el valor medio o esperanza matemática (que va del orden de décimas) como se explicó en el capítulo anterior, siendo la nueva referencia igual a cero.

### 3.2.1.1 Ancho de vía

Si graficamos el valor de las muestras obtenidas correspondientes al ancho de vía en el eje de las ordenadas y la longitud del tramo vial en el eje de las abscisas, obtenemos la siguiente variación de la magnitud.

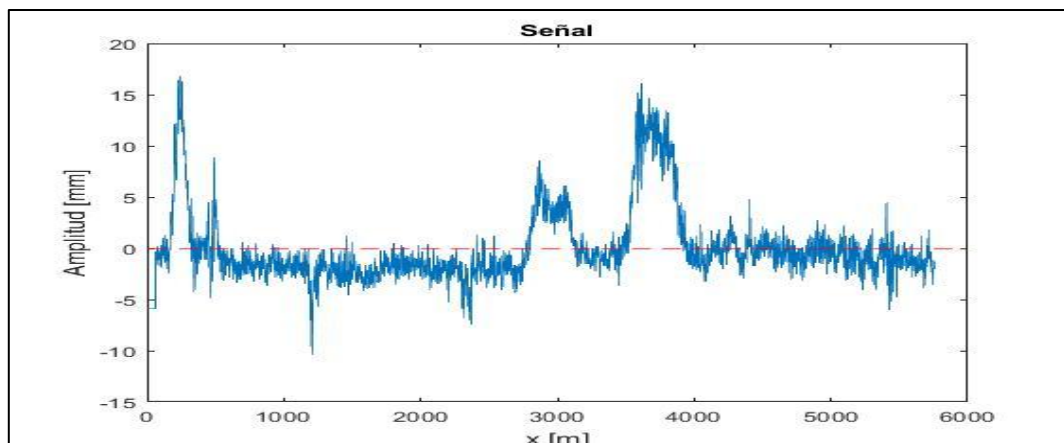


Figura 13 Señal del ancho de vía

Como se puede observar se trata de una señal totalmente aleatoria dónde el valor máximo y el valor mínimo no se encuentran muy alejados del origen, además en términos generales los valores de las muestras no varían considerablemente. En la siguiente tabla se vislumbran las principales características estadísticas de la señal analizada:

<b>Valor máximo (mm)</b>	16,82
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-10,36
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	13,20
<b>Desviación Típica (mm)</b>	3,63

Tabla 1 Características estadísticas del ancho de vía

En función de los resultados obtenidos, como se presumía el valor medio no se encuentra tan distante de los valores máximo y mínimo, además la variabilidad con respecto a todos los datos se extiende sobre un pequeño rango de valores.

### 3.2.1.2 Peralte

Si ahora tomamos otro parámetro como el peralte, y graficamos la amplitud frente a la longitud del tramo se obtiene la siguiente señal:

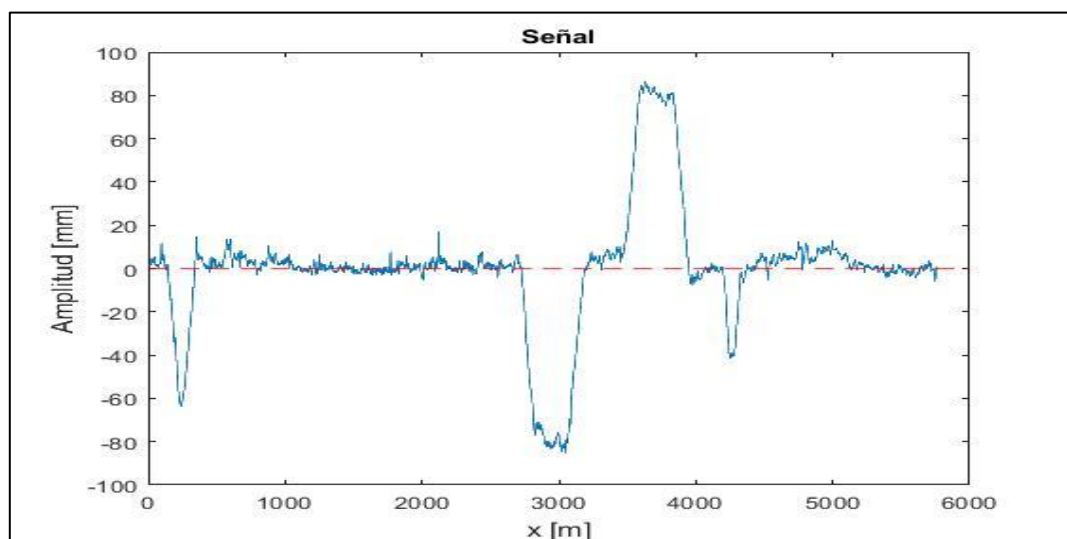


Figura 14 Señal de peralte

Como se puede observar la mayoría de los datos se encuentran próximos entre sí, con excepción algunos valores que se alejan totalmente del origen. A continuación, se muestra el detalle de los parámetros estadísticos.

<b>Valor máximo (mm)</b>	86,43
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-85,01
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	792,26
<b>Desviación Típica (mm)</b>	28,15

Tabla 2 Características estadísticas del peralte

Evidentemente tanto el valor máximo como el mínimo se alejan radicalmente del valor medio más de 80 mm, sin embargo, no existe una gran dispersión de los datos como sugiere el valor de la desviación típica.

### 3.2.1.3 Alabeo

Para este caso particular, debemos distinguir el alabeo a 3 m y 6 m, una vez separadas las variables de la misma manera que en los casos anteriores expresamos los datos obtenidos de auscultación en función de la longitud, obteniendo los siguientes resultados:

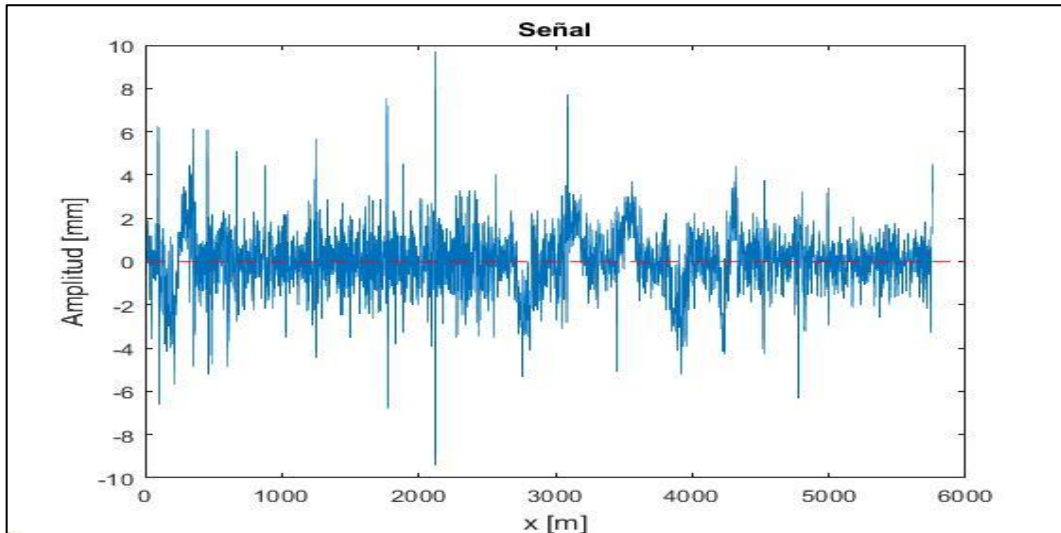


Figura 15 Señal de alabeo 3 m

Para un mejor análisis las características estadísticas principales son las siguientes:

<b>Valor máximo (mm)</b>	9,70
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-9,38
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	1,89
<b>Desviación Típica (mm)</b>	1,37

Tabla 3 Características estadísticas del alabeo 3 m

La señal es cuasi simétrica entre su parte positiva y negativa, asimismo los datos tienen una gran dispersión, como se puede ver claramente en la figura 15.

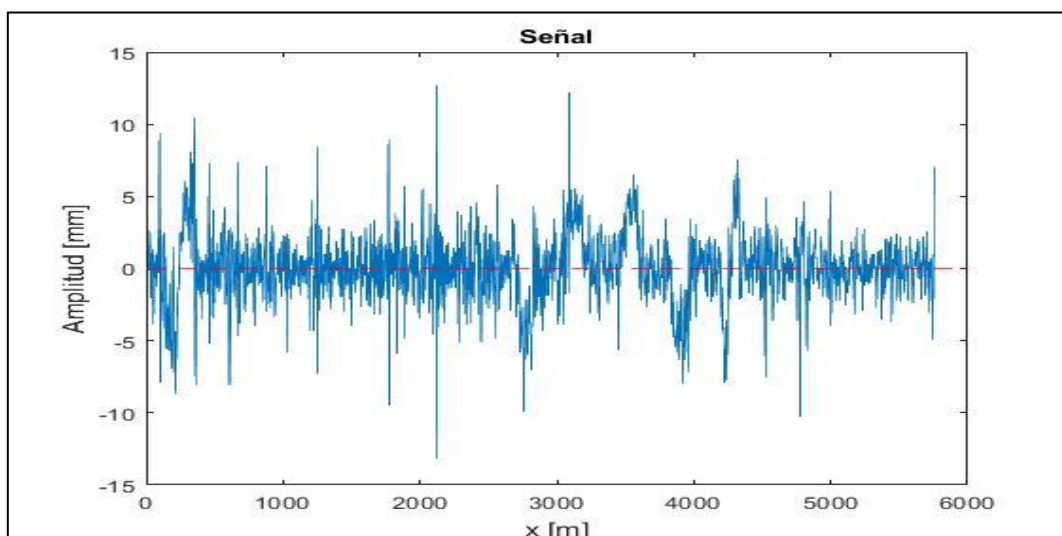


Figura 16 Señal de alabeo 6 m

Desde el punto de vista estadístico las principales características del parámetro de alabeo de 6 m son las siguientes:

<b>Valor máximo (mm)</b>	12,72
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-13,12
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	5,41
<b>Desviación Típica (mm)</b>	2,33

Tabla 4 Características estadísticas del alabeo 6 m

Como sucedía con el alabeo 3 m, la señal es cuasi simétrica, por otro lado, los valores máximo y mínimos son un poco mayores con respecto al otro caso, lo que conlleva a que el rango de variabilidad de los datos sea ligeramente mayor del orden de 2,33 mm.

### 3.2.1.4 Nivel longitudinal

Se deben diferenciar los datos obtenidos del nivel longitudinal del carril izquierdo y del carril derecho, en ese sentido para el primer caso la amplitud frente a la longitud tiene el siguiente comportamiento:

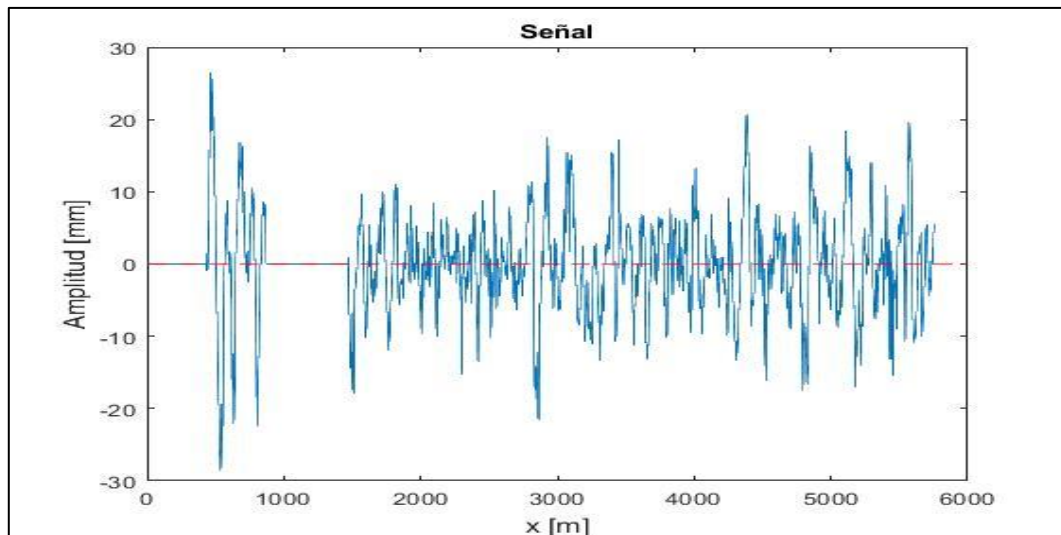


Figura 17 Nivelación longitudinal carril izquierdo

En la figura 17, se puede observar claramente que en ciertos tramos el defecto en cuanto a la nivelación longitudinal es muy pequeño para el carril izquierdo, el resto de la señal se desarrolla en torno al origen, con excepción de algunos picos.

<b>Valor máximo (mm)</b>	26,37
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-28,62
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	42,22
<b>Desviación Típica (mm)</b>	6,50

Tabla 5 Características estadísticas de la nivelación longitudinal carril izquierdo

Por otro lado, en cuanto al parámetro de nivelación del carril derecho el comportamiento es similar al anterior.

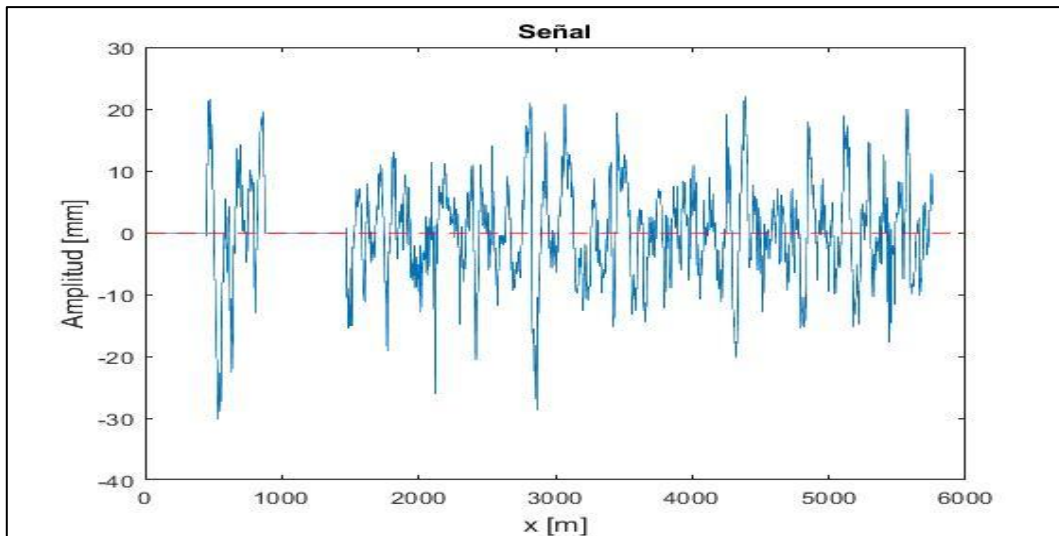


Figura 18 Nivelación longitudinal carril derecho

<b>Valor máximo (mm)</b>	21,07
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-30,25
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	53,43
<b>Desviación Típica (mm)</b>	7,31

Tabla 6 Características estadísticas de la nivelación longitudinal carril derecho

La nivelación longitudinal del carril izquierdo presenta los mismos tramos en los que los defectos son pequeños, y los valores mínimos y máximos son parecidos a los obtenidos en el carril izquierdo, siendo incluso el valor de la desviación típica similar.

### 3.2.1.5 Alineación

Se deben diferenciar los datos obtenidos de la alineación del carril izquierdo y del carril derecho, en ese sentido para el primer caso la amplitud frente a la longitud tiene el siguiente comportamiento:

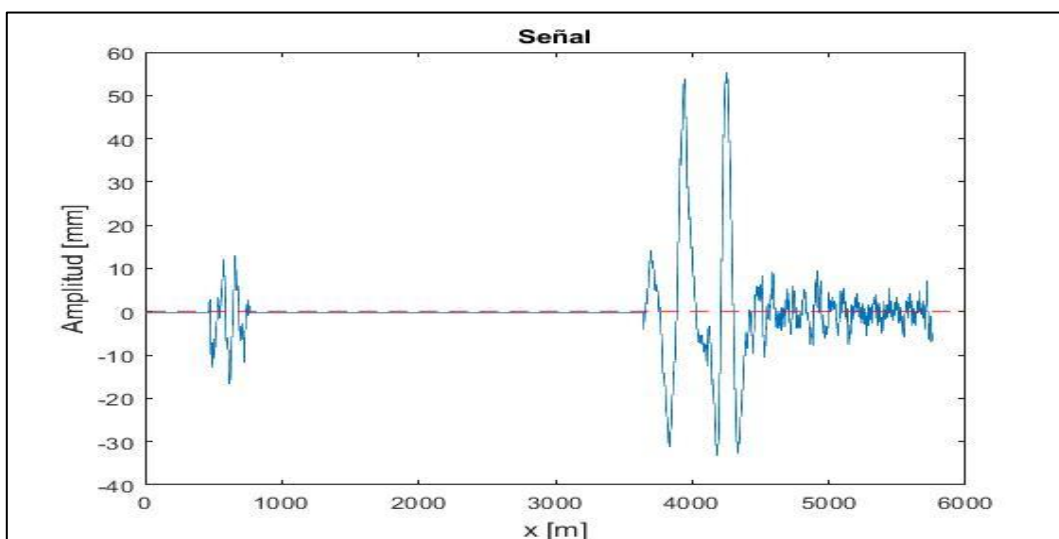


Figura 19 Alineación carril izquierdo

Salta a la vista un tramo extenso en el que no hay defecto, y otros en los que el defecto es excesivo, que se explica con los valores máximos y mínimos registrados a continuación:

<b>Valor máximo (mm)</b>	55,30
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-33,20
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	74,94
<b>Desviación Típica (mm)</b>	8,66

Tabla 7 Características estadísticas de la alineación carril izquierdo

En contraste, el comportamiento de la alineación del carril derecho tiene un comportamiento distinto como se observa en la figura 20.

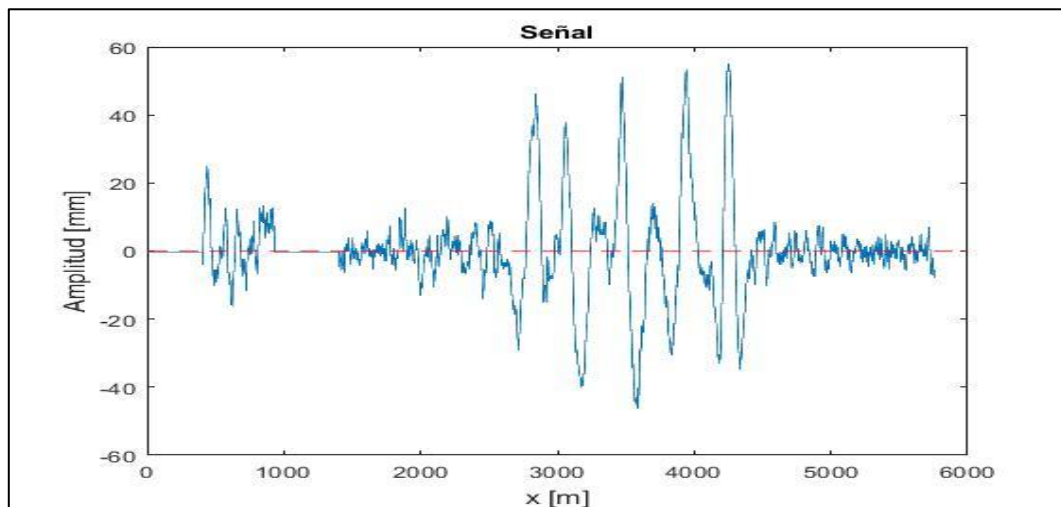


Figura 20 Alineación carril derecho

<b>Valor máximo (mm)</b>	54,93
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-46,15
<b>Varianza (mm<sup>2</sup>)</b>	174,70
<b>Desviación Típica (mm)</b>	13,22

Tabla 8 Características estadísticas de la alineación carril derecho

El comportamiento de la alineación para el carril derecho es totalmente diferente demarcando tramos en los que los datos se desarrollan próximos al origen y otros picos que sobresalen con valores de hasta 55 mm.

### 3.3 Correlación de señales

Como se explicó con antelación, para calcular la autocorrelación y la correlación cruzada se utilizará la función de Matlab  $r = xcorr(x, scaleopt)$ , como se había mencionado como opción de normalización se utilizará la estimación sesgada *biased*, lo que significa que al producto de la señal aleatoria truncada por la misma señal aleatoria desplazada " $m$ " unidades ( $z_{n+m} z_n^*$ ), se la dividirá entre el número total de componentes para garantizar que la máxima amplitud se produce cuando el valor de  $m = 0$ .

Para continuar con la notación utilizada en el resto del trabajo el desplazamiento o desfase se denota como  $J_i$  ( $\chi$ ), y para el presente trabajo el intervalo muestral es de 0,25 m, como se mencionó la longitud total de la vía férrea auscultada es de 5.755,75 m, por lo que el valor de  $\chi$  irá aumentando 0,25 m con cada iteración.

### 3.3.1 Ancho de vía

Si calculamos la función de autocorrelación obtenida para la señal del ancho de vía, y graficamos el coeficiente de correlación  $\rho$  frente al desplazamiento  $\chi$ , obtenemos la siguiente imagen:

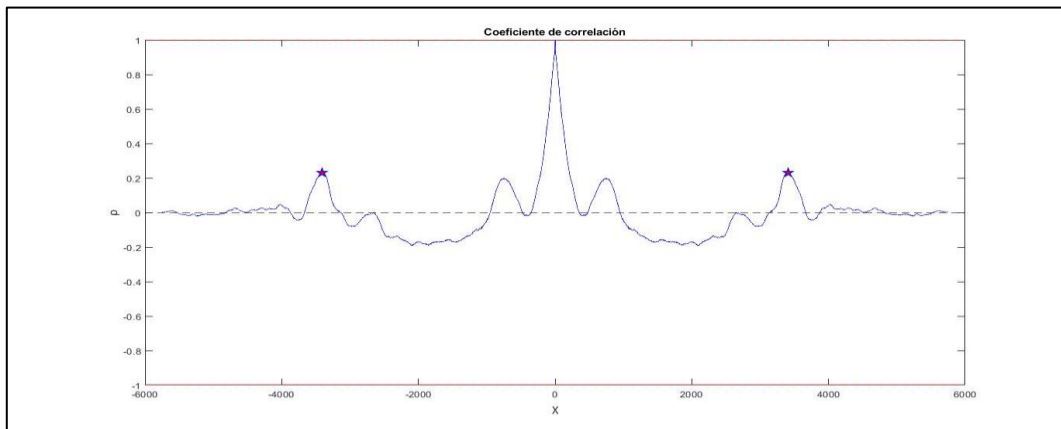


Figura 21 Coeficiente de autocorrelación de ancho de vía

Como se puede observar cuando  $\chi = 0$ , es decir no existe desfase, el valor de la correlación alcanza la máxima amplitud, por otro lado, a medida que el desplazamiento  $\chi$  aumenta y el desfase se hace mayor la correlación va decrementando hasta que se hace mínima.

Asimismo, se puede denotar dos líneas segmentadas de color rojo, que son los límites en los que se puede encontrar la función de autocorrelación que viene dados por la varianza y la esperanza matemática de la señal como se desarrolló con antelación ( $-\sigma^2 + m^2 \leq R_z(\chi) \leq \sigma^2 + m^2$ ).

Está claro a simple vista que el coeficiente de correlación se decrementa considerablemente en los primeros 3500 m, alcanzado en este punto un valor de  $\rho \approx 0,20$  (referenciado en la figura 21 con una estrella), y esto se debe a que la señal cuenta con un desarrollo totalmente accidentado, sobre todo en esa franja de distancia que se mencionó en el punto 3.2.1.1. Ancho de vía.

### 3.3.2 Peralte

Si seleccionamos ahora el peralte, calculamos el coeficiente de autocorrelación  $\rho$ , y lo expresamos frente al desplazamiento  $\chi$ , obtenemos la siguiente figura:

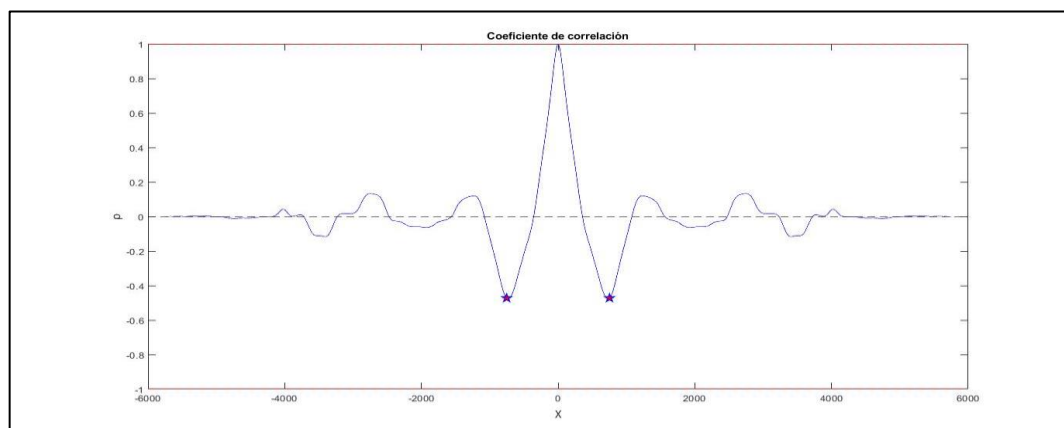


Figura 22 Coeficiente de autocorrelación del peralte

En este caso, hasta los 750 m se alcanzan valores de correlación en torno a  $\rho \approx 0,5$ , a partir de este punto la correlación baja hasta que paulatinamente se hace nula.

### 3.3.3 Alabeo

Como se explicó con antelación se debe distinguir el alabeo medido a los 3 m y 6 m, con eso en mente, a continuación, exponemos el coeficiente de autocorrelación frente al desplazamiento  $\chi$ .

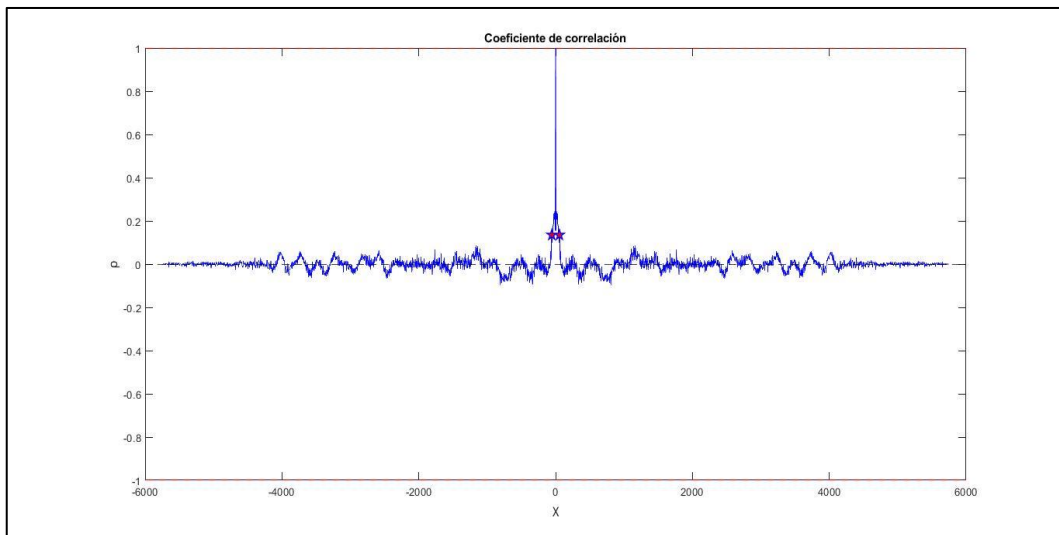


Figura 23 Coeficiente de autocorrelación del alabeo 3 m

Como se ve en la figura anterior, el coeficiente de correlación alcanza su valor pico cuando  $\chi = 0$ , pero cuando el desfase se incrementa, la correlación disminuye considerablemente a razón de alcanzar valores menores de  $\rho \approx 0,2$  en los primeros 45 m, para luego tomar valores aproximados a la nulidad.

Si ahora graficamos el coeficiente de autocorrelación del alabeo para 6 m frente a desplazamiento  $\chi$ , obtenemos:

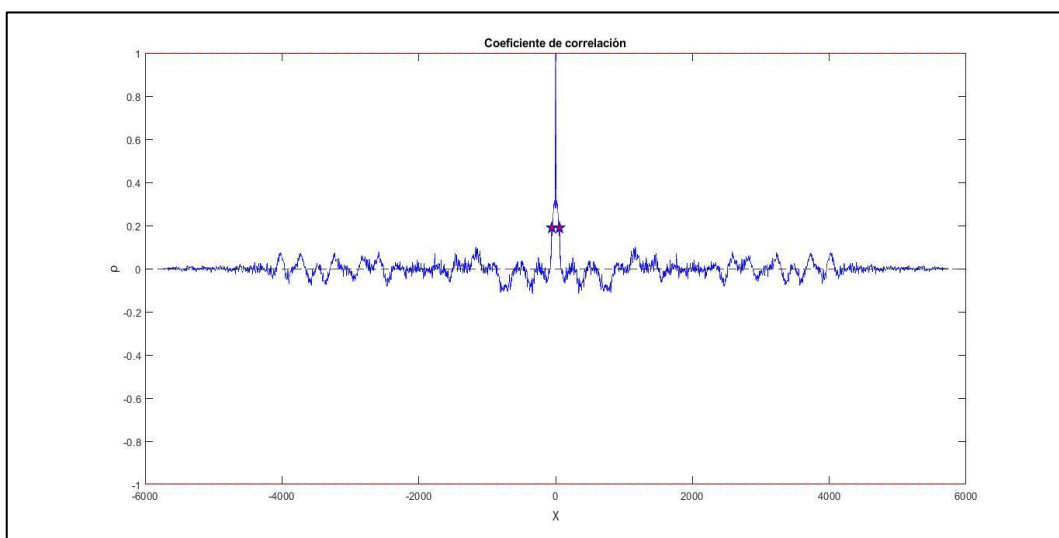


Figura 24 Coeficiente de autocorrelación del alabeo 6 m

Es similar al caso anterior pues, los valores de  $\rho$  son cercanos a 0,2 en los primeros 55 m, y luego de la misma manera decremantan hasta la nulidad.



### 3.3.4 Nivelación longitudinal

De la misma manera que en los parámetros anteriores, graficamos el coeficiente de autocorrelación frente al desfase  $\chi$ , tanto para la nivelación longitudinal del carril izquierdo como para el carril derecho.

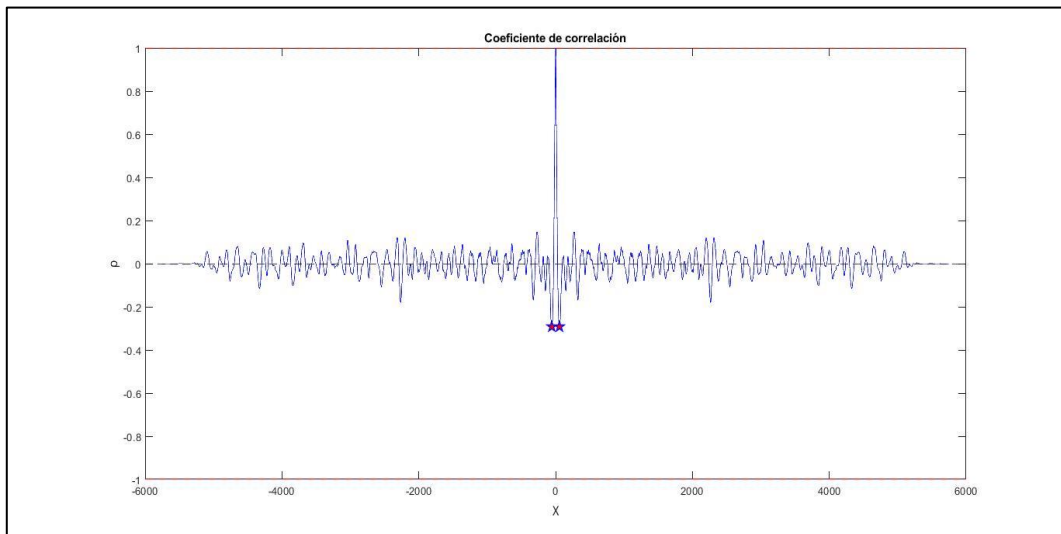


Figura 25 Coeficiente de autocorrelación de nivelación longitudinal carril izquierdo

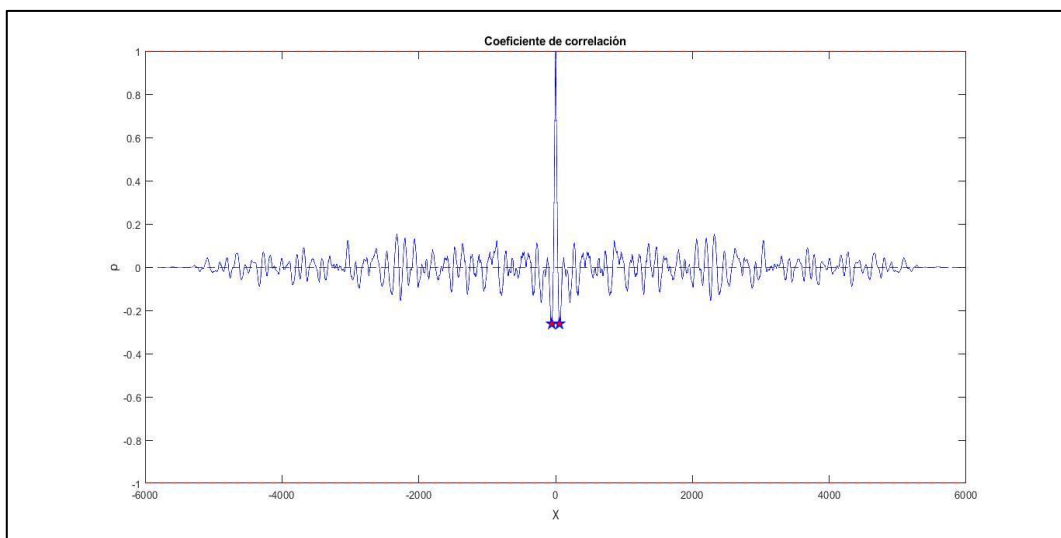


Figura 26 Coeficiente de autocorrelación de nivelación longitudinal carril derecho

Para ambos casos, cuando el desfase sea igual a cero la correlación será 1, no obstante, para un desfase entre 55 y 65 m el coeficiente de correlación será aproximadamente 0,30, a partir de esa distancia la correlación se ira decrementando hasta llegar a ser nula.

### 3.3.5 Alineación

Como se puede ver en la figura 27, al expresar el coeficiente de correlación en función del desfase para la alineación del carril izquierdo y carril derecho, a los 420 m, se tiene un coeficiente de correlación de 0,30, inmediatamente para desfases mayores la correlación es inexistente.

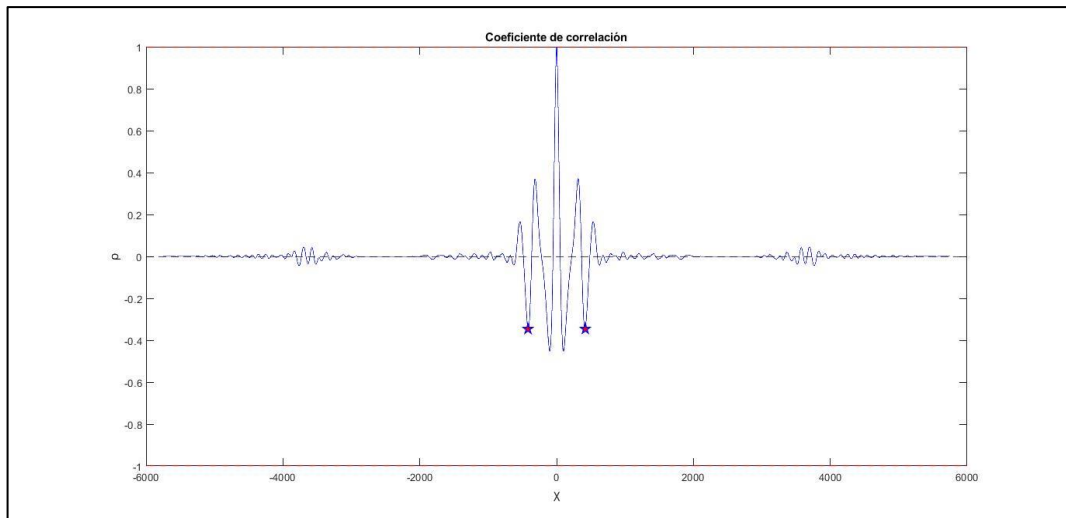


Figura 27 Coeficiente de autocorrelación de alineación carril izquierdo

Análogamente, para el segundo caso en la figura 28, se ve que para un desfase de 105 m se alcanza una correlación de 0,45, valor que se va reduciendo gradualmente a medida que el desfase aumenta hasta la nulidad.

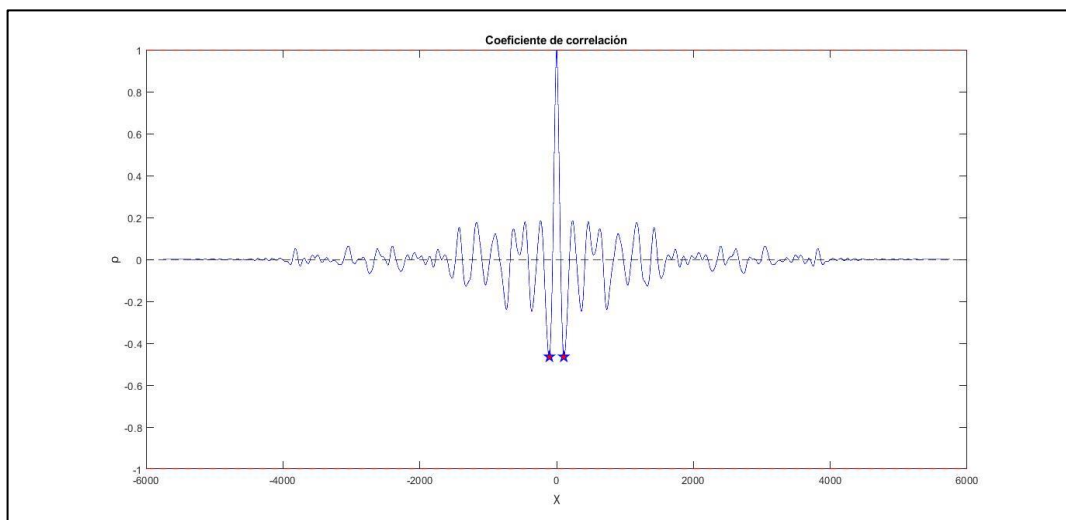


Figura 28 Coeficiente de autocorrelación de alineación carril derecho

### 3.3.6 Determinación de la longitud de truncamiento de las señales

Con estos resultados surgen algunas cuestiones, si en vista de que las señales son totalmente aperiódicas, las muestras difieren considerablemente unas de otras y obviamente no pueden ser determinadas por ningún tipo de ley matemática o física, si las truncamos y analizamos por trozos finitos, con el objeto de disminuir la variabilidad entre las muestras proporcionadas. ¿Cuál debería ser la distancia  $L$  que garantice esta condición?

Por otra parte, en vista de que el coeficiente de correlación disminuye radicalmente a medida que el desfase aumenta ¿Hasta qué valor de desfase mínimo ( $X_{\min}$ ) para que valga la pena realizar el análisis?

Para responder a ambas cuestiones, por lo explicado, una buena práctica desde un punto de vista conservador consistiría en contemplar varios valores de  $L$  y analizar los valores de correlación obtenidos, entendiendo que cada trozo en el que discreticemos las señales tendría un comportamiento diferente por lo que el valor de la función de autocorrelación cambiará obviamente con respecto a las señales totales.

Por lo que hemos visto hasta ahora, un punto en común entre las señales es que hasta los primeros 500 m se alcanzaban los mayores valores del coeficiente de correlación.

Bajo ese supuesto, si truncamos cualquiera de las señales en un intervalo  $\{n L\}$ , siendo n un número aleatorio entre  $\{0 21.023\}$  (considerando que deben entrar ventanas de hasta 500 m, lo que representan 2000 datos, siendo la diferencia con la muestra total 21023 datos) y posteriormente variamos el valor de  $L = \{25, 125, 250, 500\}$  m. Los resultados obtenidos se vislumbran a continuación:

### a. Ancho de vía

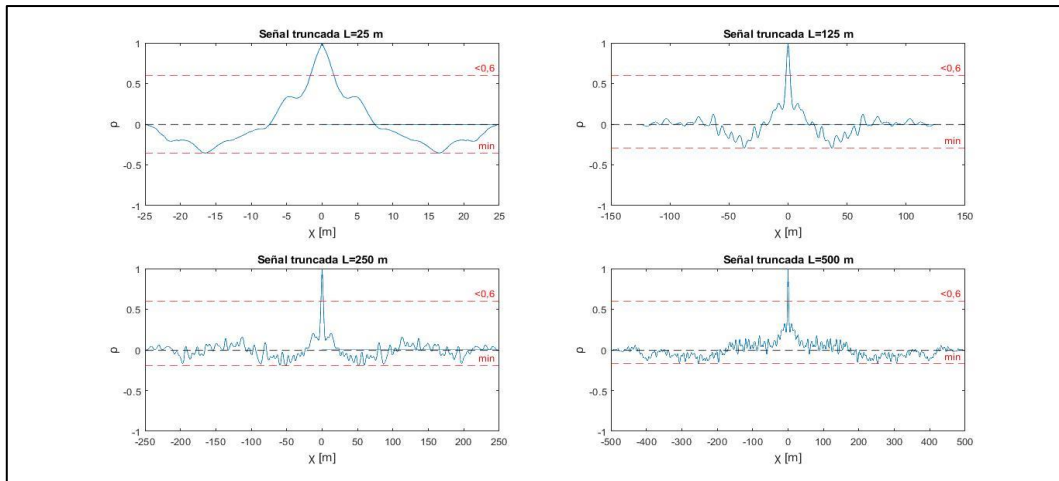


Figura 29 Coeficiente de correlación de la señal de ancho de vía truncada

En la figura 29 se puede distinguir un par de líneas segmentadas de color rojo, que son las que delimitan un rango en el cual el coeficiente de correlación se encuentra por de debajo de 0,6, que para el presente trabajo se asumirá como el **valor mínimo admisible**.

Con esa premisa, si se traza una línea vertical en la intersección de la curva de correlación con la línea de la correlación mínima admisible, se determina el valor de **desfase mínimo ( $\chi_{\min}$ )** para cada valor de L, que garantiza una correlación de al menos el 60 %. En ese sentido, en cuanto a la señal de ancho de vía, el valor de Y es 1,75 m para los tres primeros escenarios y 2 m cuando L es igual a 500 m.

Si ahora analizamos la tabla 9 dónde se recogen algunos parámetros estadísticos, es evidente que al discretizar la señal total en trozos de longitud L la variabilidad respecto a la media denotada por la desviación estándar disminuye considerablemente con relación a la obtenida en la Tabla 1. Asimismo, si se comparan la variabilidad de los 4 escenarios la diferencia es mínima, debido a que apenas cambian los valores máximos y mínimos, por otro lado es lógico que la desviación típica sea menor cuando L toma el valor de 25 m, pues la dispersión de los datos será menor.

	<b>25 m</b>	<b>125 m</b>	<b>250 m</b>	<b>500 m</b>
<b>Valor máximo (mm)</b>	7,340	10,700	10,700	10,700
<b>Valor mínimo (mm)</b>	3,940	3,940	3,550	2,810
<b>Valor medio (mm)</b>	5,581	5,819	5,906	5,570
<b>Desviación típica (mm)</b>	0,833	0,952	0,920	0,955

Tabla 9 Características estadísticas de la señal truncada ancho de vía

## b. Peralte

En la figura 30, se puede distinguir que el valor de correlación admisible se alcanza cuando  $\chi_{\min}$  es igual a 2,25, 3,75, 6,25 y 5,5 m para un L igual a 25, 125, 250 y 500 m respectivamente, a diferencia del ancho de vía para este parámetro hay una mayor diferencia entre los valores de  $\chi_{\min}$  obtenidos para cada escenario.

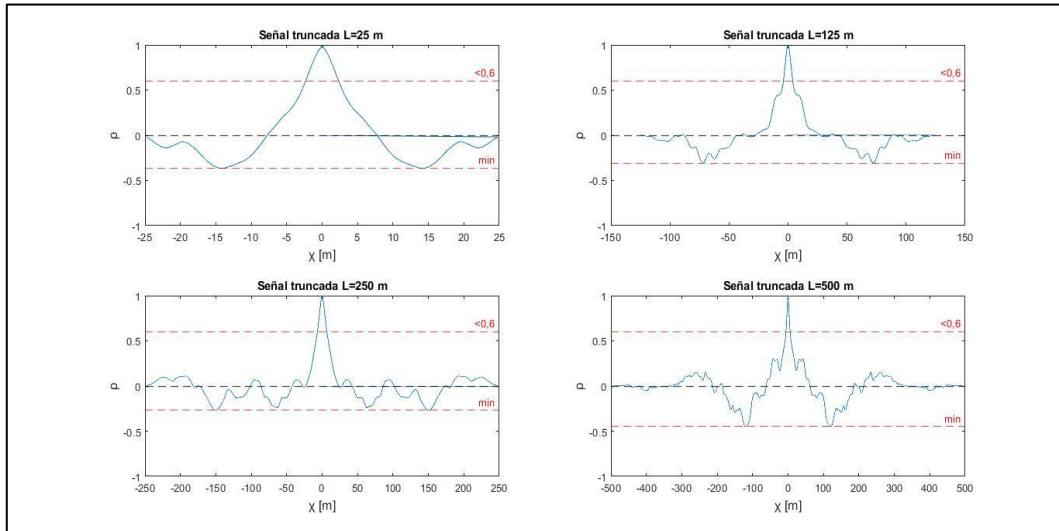


Figura 30 Coeficiente de correlación de la señal de peralte truncada

Similar al parámetro anterior, la desviación típica de la señal de peralte truncada es menor que el de la señal total (ver tabla 2), sin embargo, la diferencia latente entre cada uno de los escenarios es más apreciable, siendo evidentemente menor en el caso en el que L es 25 m.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	0,000	3,090	3,090	13,970
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-2,940	-4,880	-8,800	-8,800
<b>Valor medio (mm)</b>	-1,001	-2,177	-2,382	-1,969
<b>Desviación típica (mm)</b>	0,873	1,467	2,102	2,503

Tabla 10 Características estadísticas de la señal truncada peralte

## c. Alabeo a 3 m

En cuanto a la figura 31, el valor de  $\chi_{\min}$  es aproximadamente 2, 2, 2,5 y 2,75 para todos los valores de L respectivamente.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	1,040	2,010	7,720	7,720
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-2,730	-2,730	-3,090	-3,090
<b>Valor medio (mm)</b>	-0,466	-0,115	0,530	0,497
<b>Desviación típica (mm)</b>	1,046	0,988	1,567	1,339

Tabla 11 Características estadísticas de la señal truncada alabeo 3 m

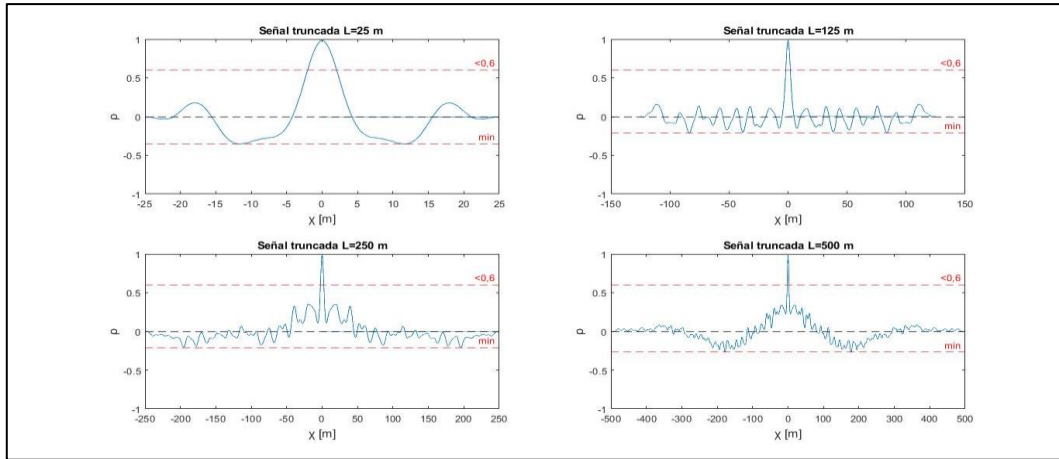


Figura 31 Coeficiente de correlación de la señal de alabeo 3 m truncada

La desviación típica de la señal truncada con respecto a la señal total es mayor en el caso en el que L es igual a 250 y 500 m, por lo que para esas ventanas de longitud L, la dispersión de datos es mayor que incluso en la totalidad de la señal, con respecto a los otros escenarios no hay gran diferencia con respecto a la variabilidad. Aunque en este caso la menor variabilidad se produce cuando L es igual a 125 m.

#### d. Alabeo 6 m

Para el alabeo de 6 m, se ve con claridad en la figura 32 que  $\chi_{\min}$  toma los valores de 2, 2,5, 4,25 y 4,75 para los diferentes escenarios en los que cambia L.

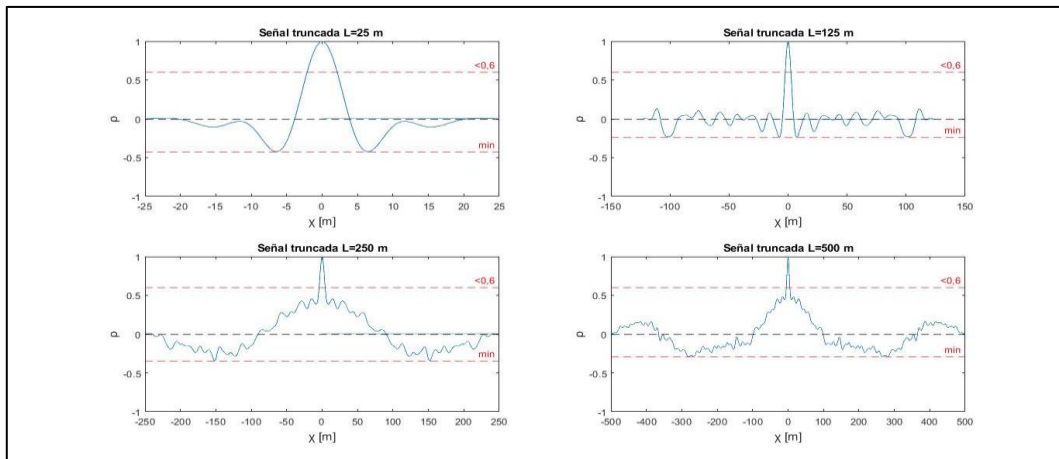


Figura 32 Coeficiente de correlación de la señal de alabeo 6 m truncada

Si analizamos los parámetros estadísticos expuestos en la siguiente tabla, la desviación típica de las señales truncada para los casos en los que L es 25, 250 y 500 m es mayor que el obtenido para la señal entera, siendo únicamente el caso cuando L es igual a 125 m en el que la variabilidad de los datos es menor al del caso original.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	12,150	12,150	12,150	12,150
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-1,730	-1,730	-3,620	-5,640
<b>Valor medio (mm)</b>	4,682	3,610	1,895	1,726
<b>Desviación típica (mm)</b>	3,611	2,036	2,511	2,409

Tabla 12 Características estadísticas de la señal truncada alabeo 6 m.

## e. Nivelación longitudinal

Se procede a analizar el parámetro de nivelación longitudinal, si comenzamos por el carril izquierdo como se observa en figura 33 el valor de  $\chi_{\min}$  es igual a 1,5, 9, 9,25 y 11,75 para los distintos valores de L respectivamente, se puede apreciar un comportamiento creciente a medida que L aumenta.

### e.1. Carril izquierdo

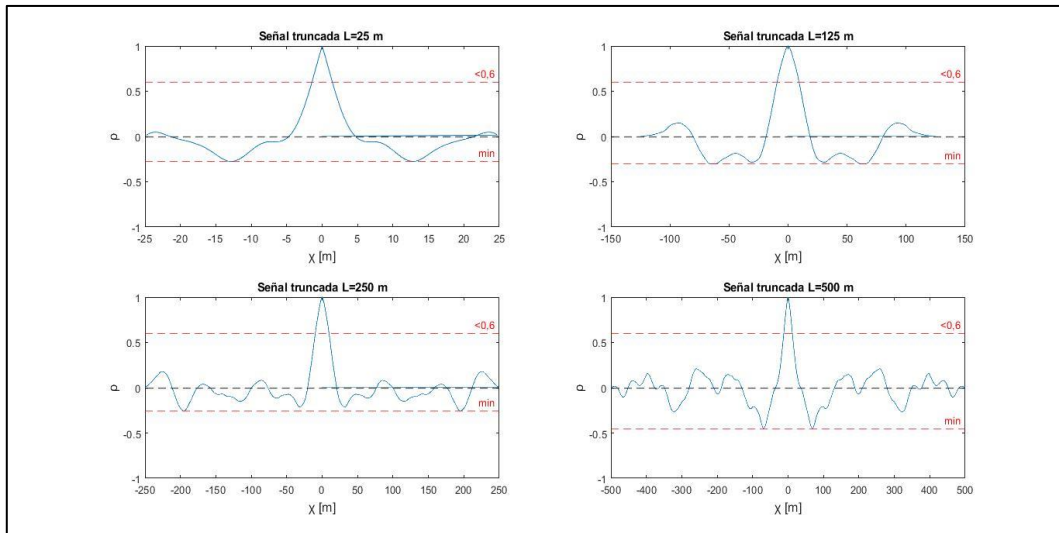


Figura 33 Coeficiente de correlación de la señal nivelación longitudinal del carril izquierdo truncada

En la tabla 13, se puede verificar que cuando L es igual a 125, 250 y 500 m, la variabilidad es incluso mayor que en el caso de la señal total (ver tabla 6), desde esta perspectiva parece infructífero discretizar la señal en trozos de dichas longitudes, no obstante, para el escenario restante la variabilidad es menor.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	4,060	16,360	16,360	18,430
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-16,670	-16,670	-16,670	-17,100
<b>Valor medio (mm)</b>	-12,203	2,292	0,428	0,785
<b>Desviación típica (mm)</b>	4,660	9,218	7,443	8,137

Tabla 13 Características estadísticas de la señal truncada nivelación longitudinal carril izquierdo

### e.2. Carril derecho

Para el carril derecho, la tendencia es similar puesto que  $\chi_{\min}$  asume valores de 2,25, 8,75, 9,75 y 10,5 a medida que el valor de L aumenta, como se presume en la figura 34.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	-0,970	7,180	11,010	13,080
<b>Valor mínimo (mm)</b>	-15,070	-15,070	-15,070	-19,170
<b>Valor medio (mm)</b>	-8,076	-1,054	0,638	0,177
<b>Desviación típica (mm)</b>	5,230	6,513	5,797	6,188

Tabla 14 Características estadísticas de la señal truncada nivelación longitudinal carril derecho

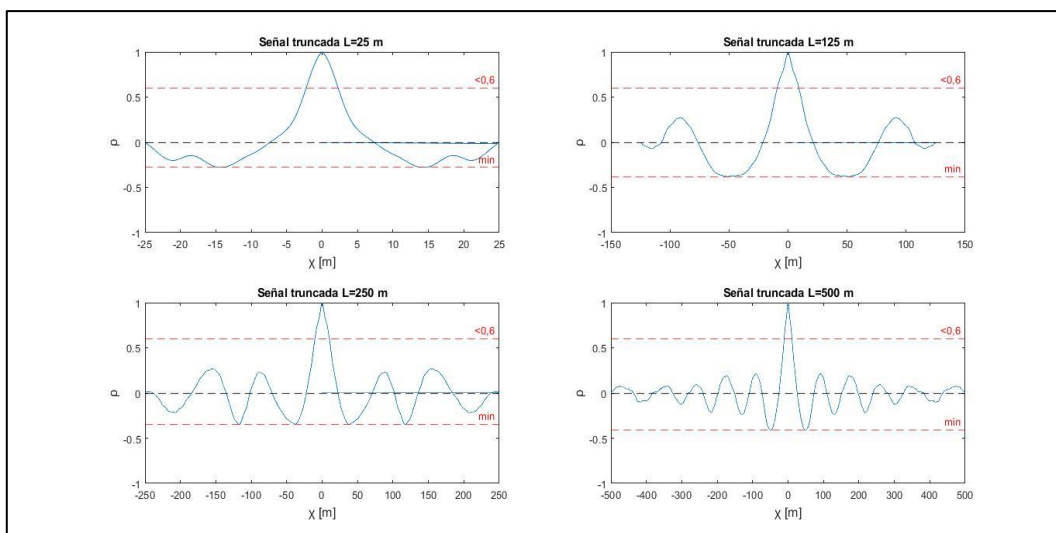


Figura 34 Coeficiente de correlación de la señal nivelación longitudinal del carril derecho truncada

Con respecto a la variabilidad, en la tabla 14 se evidencia que la desviación típica en el caso de las señales truncadas es menor que la obtenida para la señal total (ver tabla 6), y la diferencia entre las mismas es mínima, por otro lado, para el escenario en el que L es igual a 25 m, la dispersión de los datos es la menor de todas.

## f. Alineación

En el caso de la alineación del carril izquierdo, el valor de  $\chi_{\min}$  es igual a 3,75, 15,5, 14 y 25 m, valores que aumentan considerablemente en relación con los otros parámetros hasta ahora analizados.

### f.1. Carril izquierdo

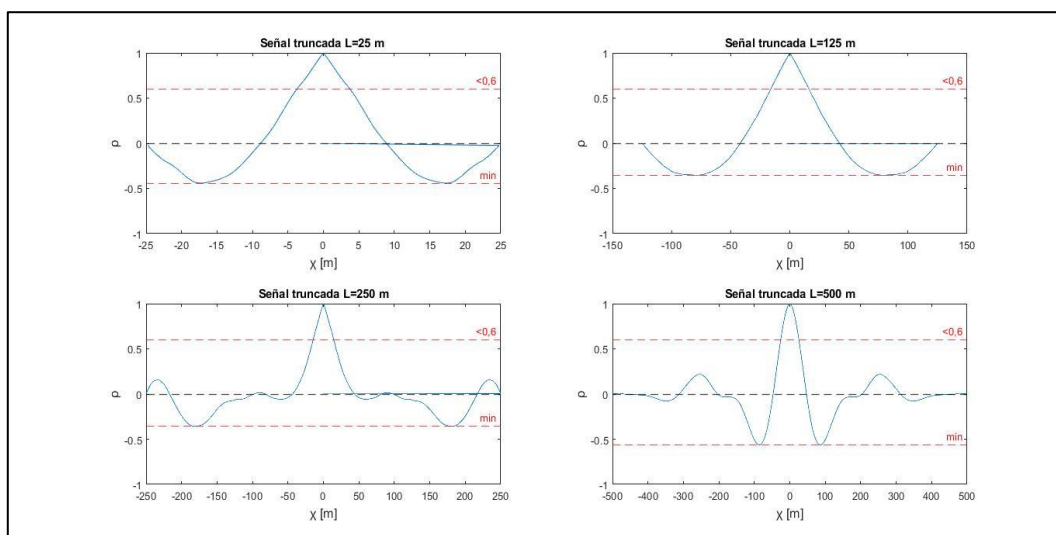


Figura 35 Coeficiente de correlación de la señal alineación del carril izquierdo truncada

Es evidente que la variabilidad de los datos aumenta considerablemente a medida el valor de L se incrementa, ahora bien, para los valores de 125, 250 y 500 m, la dispersión de los datos es superior a la de la señal original pues en ese caso la desviación estándar era de 8,66 mm (ver tabla 7). Solo cuando L es igual a 25 m la dispersión es considerablemente menor.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	23,390	23,390	29,060	55,420
<b>Valor mínimo (mm)</b>	14,330	-9,100	-33,080	-33,080
<b>Valor medio (mm)</b>	18,817	1,720	-5,545	-1,133
<b>Desviación típica (mm)</b>	2,953	10,241	14,373	21,495

Tabla 15 Características estadísticas de la señal truncada alineación carril izquierdo

### i. Carril derecho

Si analizamos el mismo parámetro pero en este caso para el carril derecho, en la figura 36 se puede apreciar claramente que  $\chi_{\min}$  debe tomar un valor de 2,75, 15,75, 22 y 25 m para un valor de L igual a 25, 125, 250 y 500 m respectivamente.

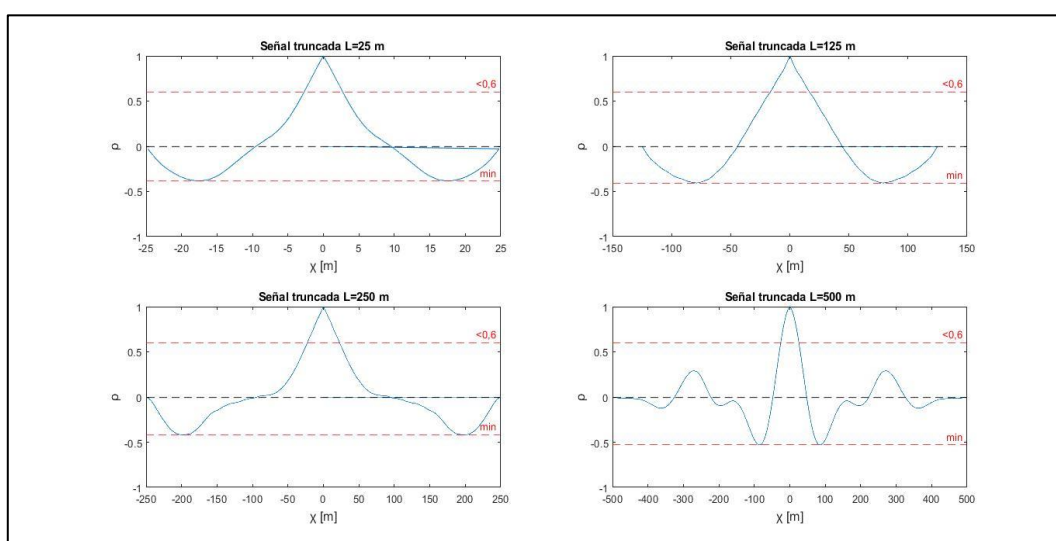


Figura 36 Coeficiente de correlación de la señal alineación del carril derecho truncada

Asimismo, al igual que en el caso anterior la desviación típica cuando L es igual a 125, 250 y 500 m es superior a la de la señal original que era igual a 13,22 mm (ver tabla 8), siendo el escenario restante el que posee una dispersión mucho menor pues la desviación típica es 5,595 mm, como se observa en la tabla 16.

	25 m	125 m	250 m	500 m
<b>Valor máximo (mm)</b>	40,930	40,930	40,930	55,150
<b>Valor mínimo (mm)</b>	21,520	-9,370	-32,890	-34,330
<b>Valor medio (mm)</b>	28,564	7,381	-4,179	-0,155
<b>Desviación típica (mm)</b>	5,595	13,734	16,521	22,475

Tabla 16 Características estadísticas de la señal truncada alineación carril derecho

Para responder a la primera cuestión, una vez observados los resultados debemos tomar una decisión en función de dos aspectos importantes: 1) en primera instancia desde el punto de vista de la dispersión de los datos es conveniente elegir el escenario en el cual la variabilidad con respecto a la media sea menor, es decir, con una menor desviación típica; 2) como segundo aspecto, debemos tomar en cuenta el coste computacional puesto mientras más pequeño el valor de L, discretizaremos la señal en más trozos lo que se traduce en más señales de longitud L.



En términos generales, la primera condición se satisface cuando  $L$  asume valores pequeños, siendo entonces para este caso particular que la discretización de las señales en la mayoría de los casos fue aceptable, sin embargo, para algunos parámetros y escenarios de  $L$  la desviación típica superó a la de la señal original haciendo innecesario el presente análisis, en ese sentido, solo cuando  $L$  es igual a **25 m**, se pudo satisfacer de manera unánime la presente condición para todos los parámetros.

En contraste con el párrafo anterior, para satisfacer la segunda condición resulta evidente que para reducir el tiempo de procesamiento computacional se deba elegir el mayor valor de  $L$ , es decir, 500 m con el objeto de discretizar la señal en la menor cantidad de trozos posibles.

En ese entendido, aunque el coste computacional sea mayor, desde un punto de vista conservador, parece conveniente asumir un valor de  $L$  igual a **25 m**, porque estaríamos garantizando que los datos se extienden dentro de un rango de valores más acotado, es decir, que los datos tienden a estar más agrupados cerca de la media. Por otro lado, para responder a la segunda cuestión, si hacemos referencia al primer escenario en el que  $L$  vale 25 m, entonces el desfase que garantiza al menos una correlación del 60% varía entre 1,50 m y 3,75 m dependiendo del parámetro analizado; en ese sentido, parece bastante coherente tomar como valor máximo la media entre ambos límites (2,5 m), sin embargo, se asumió un valor más conservador de  $\chi_{\min}$  igual a **2 m**.

### 3.1.1. Autocorrelación de señales truncadas

Con los preceptos explicados en el punto anterior a partir de ahora discretizaremos la señal total de 5.755,75 m en trozos de 25 m, asumiendo un desfase máximo de 2 m.

Entonces si dividimos la señal total entre  $L$ , el resultado nos da 231 señales truncadas o ventanas, y si además dividimos  $\chi_{\min}$  entre el tamaño muestral de 0,25 tendríamos 8 valores, obteniendo un arreglo matricial de  $8 \times 231$  por cada una de las 8 variables, dónde el número de filas es el desfase y el número de columnas son las señales truncadas. La discretización de la señal total en  $L$  ventanas se puede ver en la figura 37.

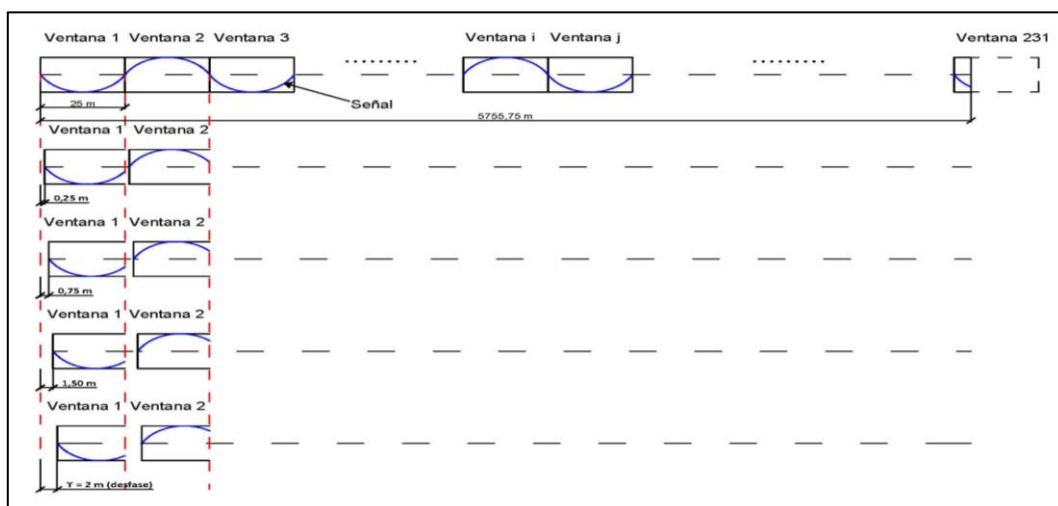


Figura 37 Esquema general del desfase

Es evidente, que el comportamiento de las señales truncadas debería ser similar al obtenido en el punto anterior para cada uno de los distintos parámetros analizados, los resultados de una sección representativa se podrán ver en el Anexo 2, adjunto al presente documento. No obstante, aplicando las determinaciones previamente definidas, a modo de ilustrarlas en las siguientes imágenes se vislumbra la curva de correlación de las señales truncadas en las secciones 0,25, 1125, 2250, 3375, 4500 y 5625 m hasta  $L$ , presentadas en ventanas de 2 m.

### a) Ancho de vía

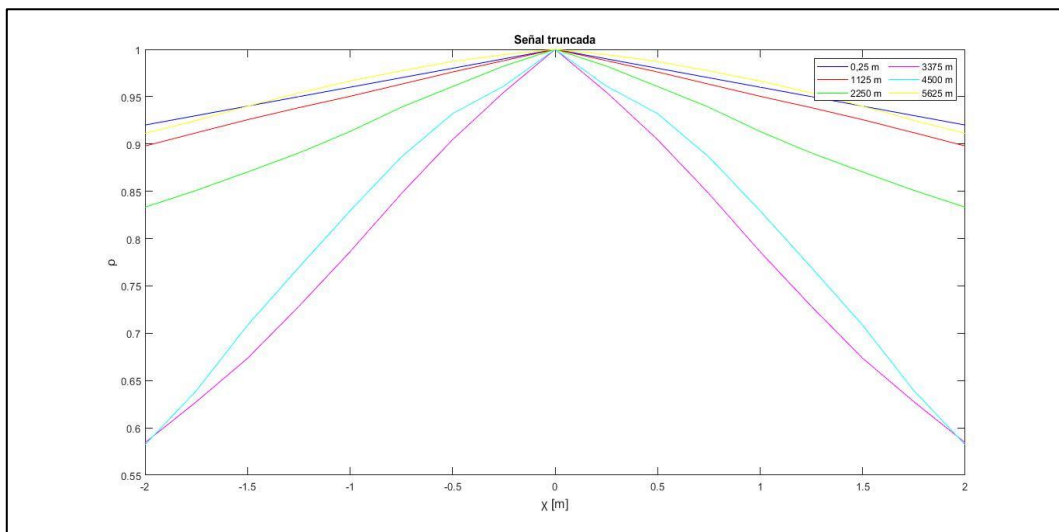


Figura 38 Coeficiente de correlación del ancho de vía ( $L = 25 \text{ m}$  y  $\chi_{\min} = 2\text{m}$ )

Para el ancho de vía, la correlación obtenida a una longitud de 3750 y 4500 m, con un  $\chi_{\min}$  de 2 m, se ve claramente que se encuentran ligeramente por debajo del 60 %, sin embargo la diferencia es despreciable pues es menos del 2%. Ahora bien si nos vamos a la imagen 39, se puede ver el caso general, es decir, el coeficiente de correlación de cada una de las ventanas solo para el caso del desfase de 2 m, y como se denota, la mayor parte del tramo se encuentra por encima de la línea roja segmentada que representa la correlación del 60%, no obstante, la parte final del tramo para ventanas de 25 m tiene poca correlación para el parámetro del ancho de vía.

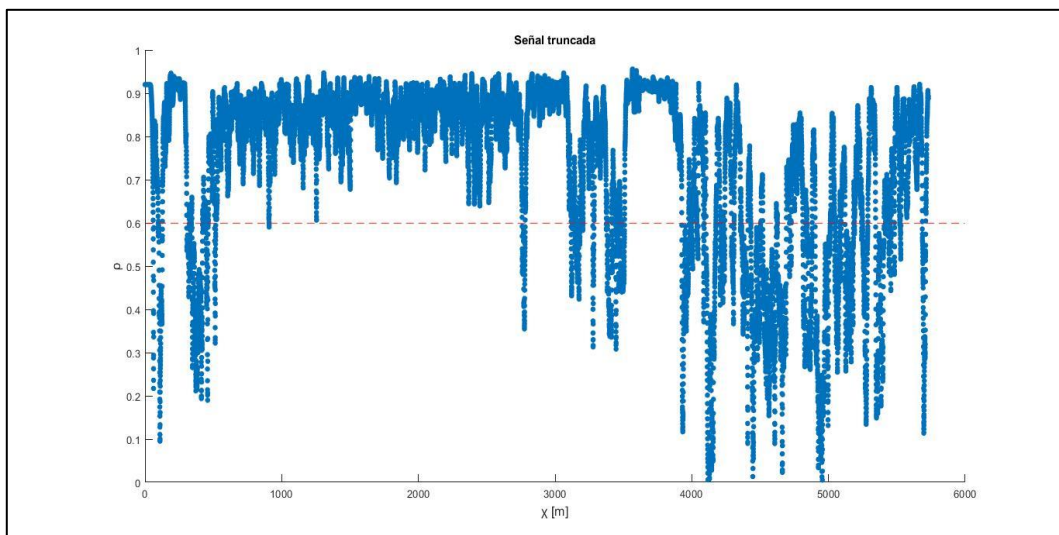


Figura 39 Coeficiente de correlación del ancho de vía para  $\chi_{\min} = 2\text{m}$

### b) Peralte

En cuanto al peralte los tramos seleccionados cumplen con la correlación admisible, con excepción del tramo que comienza en la sección 2250 m, en la cual para el desfase de 2 m se alcanza una correlación del 49%.

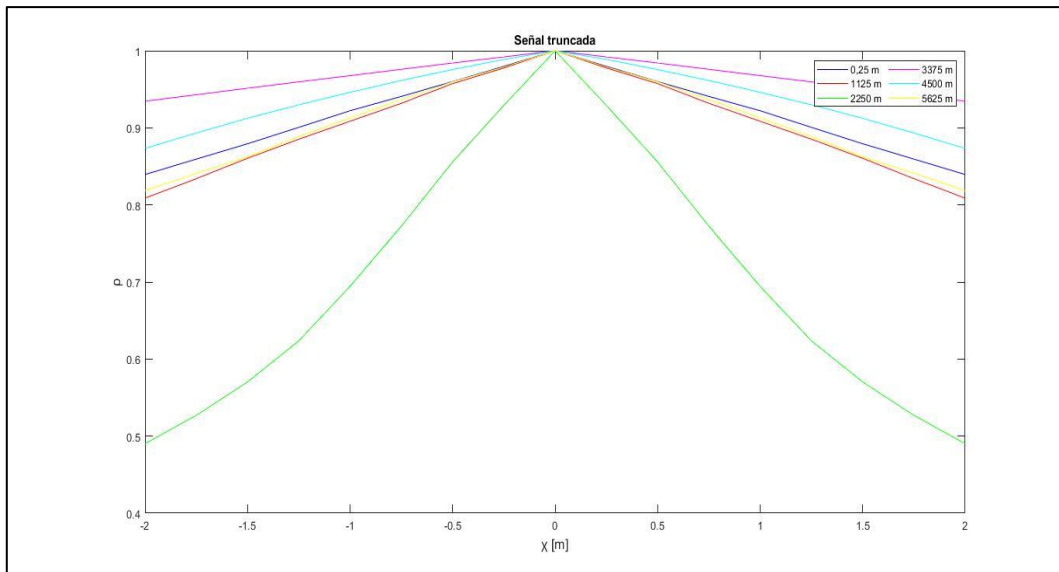


Figura 40 Coeficiente de correlación del peralte ( $L = 25$  m y  $\chi_{\min} = 2$  m)

En el caso general (ver figura 41), la mayor parte de los tramos tiene una correlación igual o superior al 60% para el peralte, con excepción de algunos picos en los que para aumentar el grado de correlación se debería disminuir el desfase.

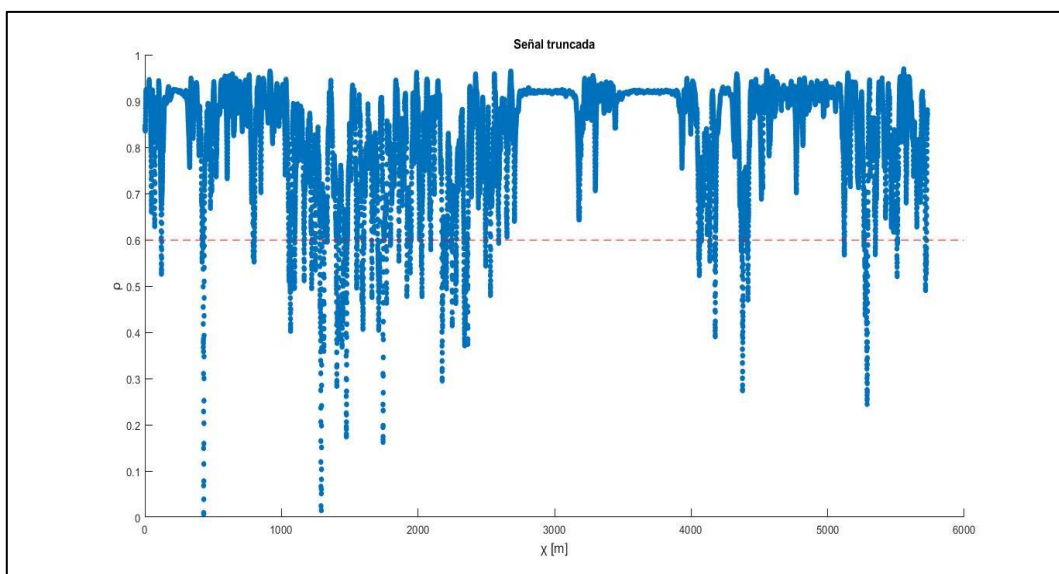


Figura 41 Coeficiente de correlación del peralte para  $\chi_{\min} = 2$  m

### c) Alabeo

El caso más crítico se da para el alabeo tanto para 3 m como para 6 m, en las figuras 42 y 44, se puede observar que no se alcanza la correlación mínima admisible en algunos tramos en los cuales incluso se puede observar un coeficiente de correlación entre el 15 al 50 %; esto se debe a la variabilidad de los datos en estos tramos, en los cuales para alcanzar la correlación deseada se tendría que tomar un desfase menor a 0,75 m.

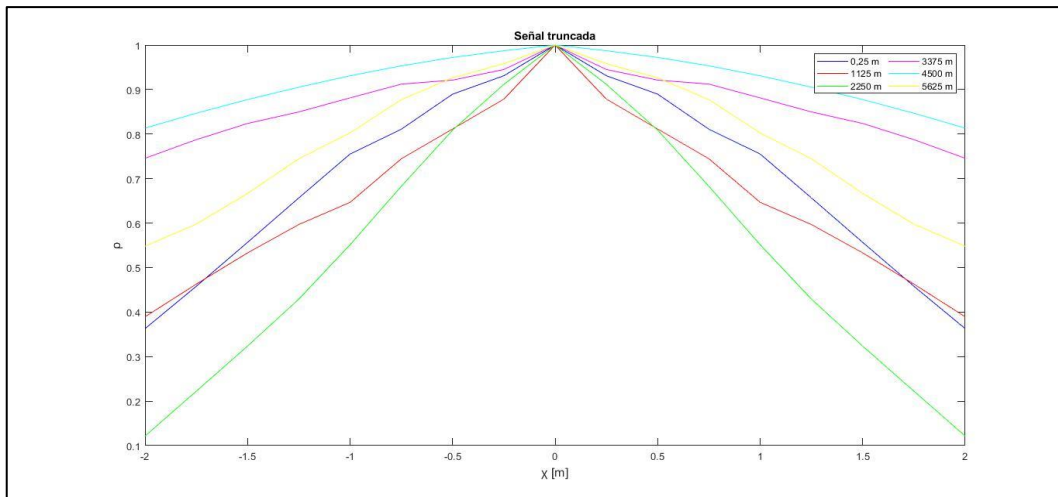


Figura 42 Coeficiente de correlación del alabeo 3 m ( $L = 25$  m y  $\chi_{\min} = 2$  m)

Si se analiza el caso general tanto para el alabeo a 3 m y 6 m (figuras 42, 43, 44 y 45), de todos los parámetros analizados es el que mayor variabilidad tiene; siendo la razón por la que incluso cuando tomamos un desfase de 2 m la correlación alcanzada en los tramos es en muchos casos inferior al 60 %.

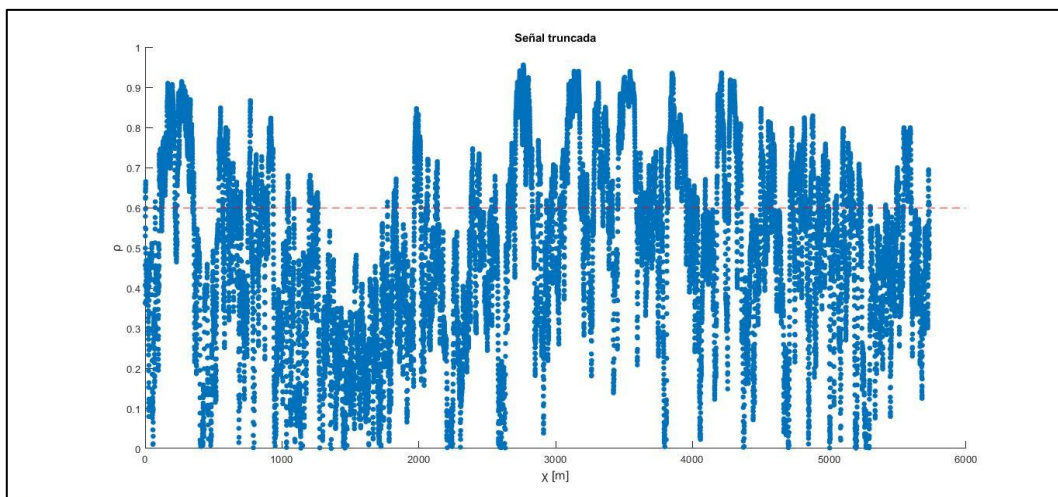


Figura 43 Coeficiente de correlación del alabeo 3 m para  $\chi_{\min} = 2$  m

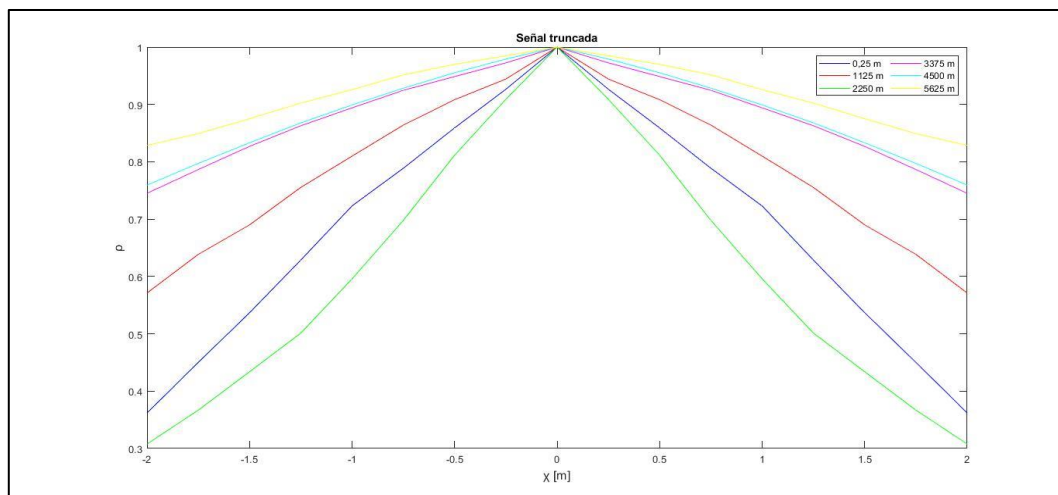


Figura 44 Coeficiente de correlación del alabeo 6 m ( $L = 25$  m y  $\chi_{\min} = 2$  m)

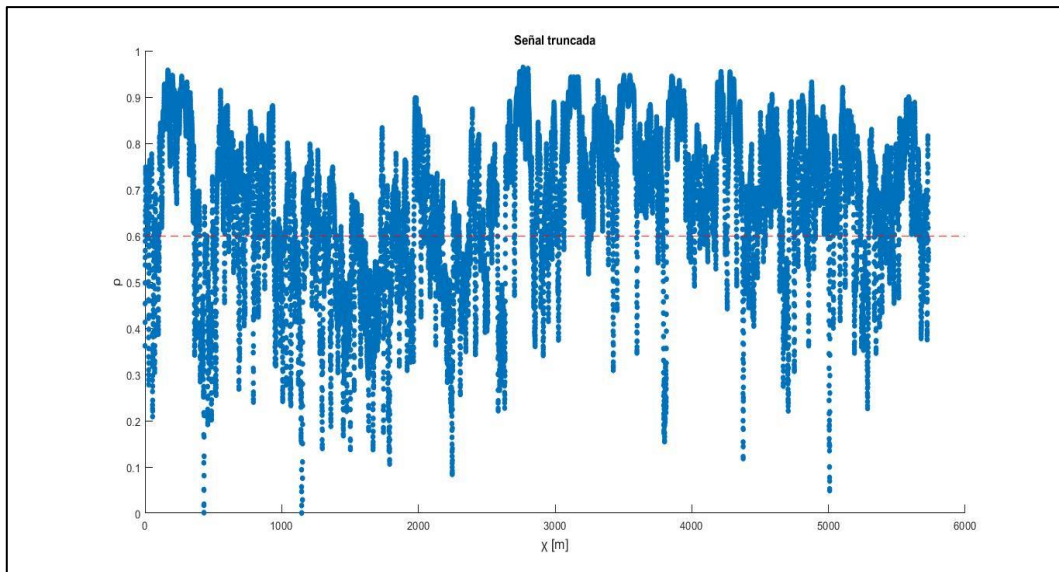


Figura 45 Coeficiente de correlación del alabeo 6 m para  $\chi_{\min} = 2\text{m}$

#### d) Nivelación longitudinal

En contraste al caso anterior, tanto para la nivelación longitudinal del carril izquierdo como del derecho se cumple el criterio asumido, con valores superiores a un 70% de correlación (figuras 46, 47, 48 y 49).

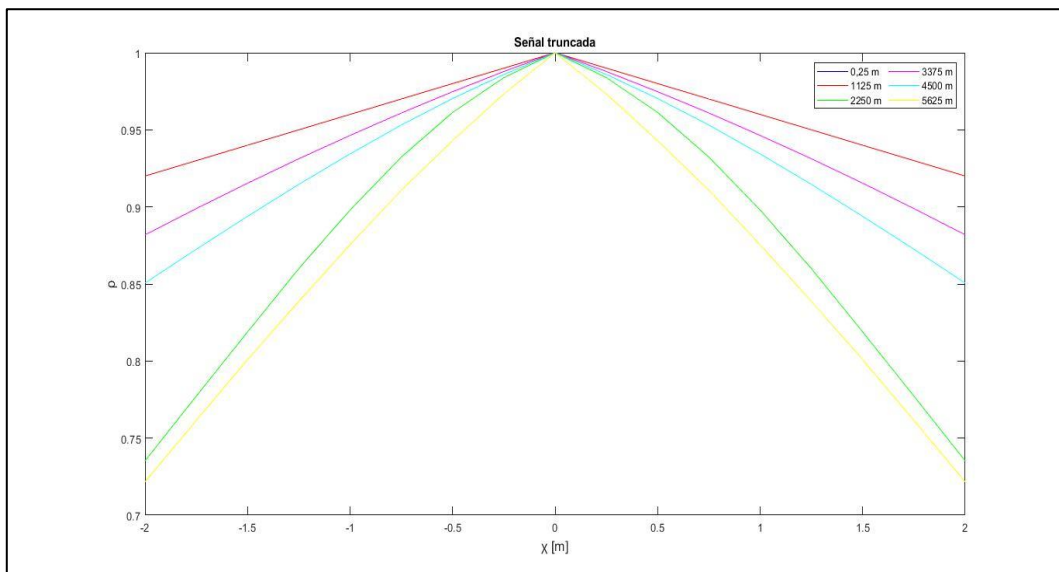


Figura 46 Coeficiente de correlación de la nivelación longitudinal carril izquierdo ( $L = 25\text{ m}$  y  $\chi_{\min} = 2\text{m}$ )

Se puede evidenciar en la figura 47 que la mayor parte de los datos alcanza o supera el grado de correlación admisible.

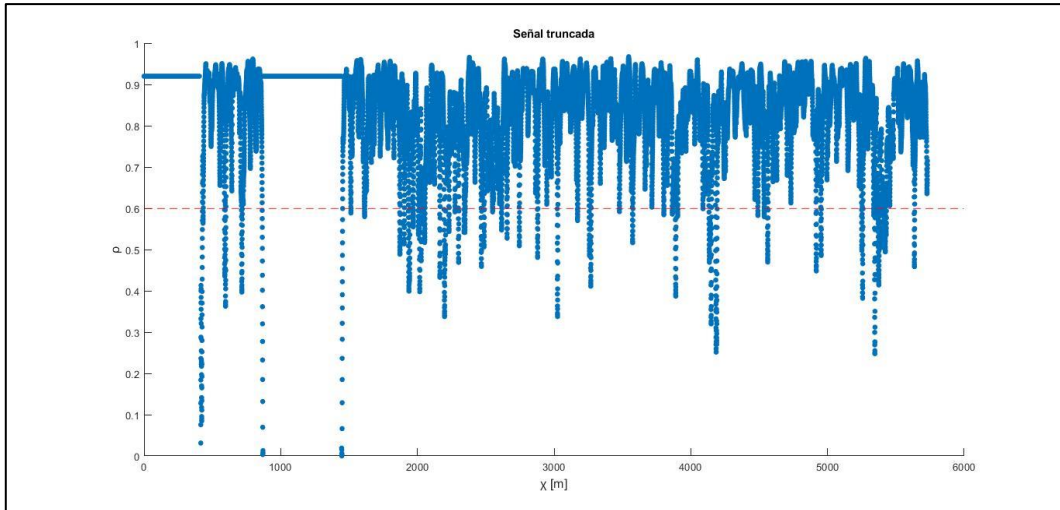


Figura 47 Coeficiente de correlación de la nivelación longitudinal carril izquierdo para  $\chi_{\min} = 2m$

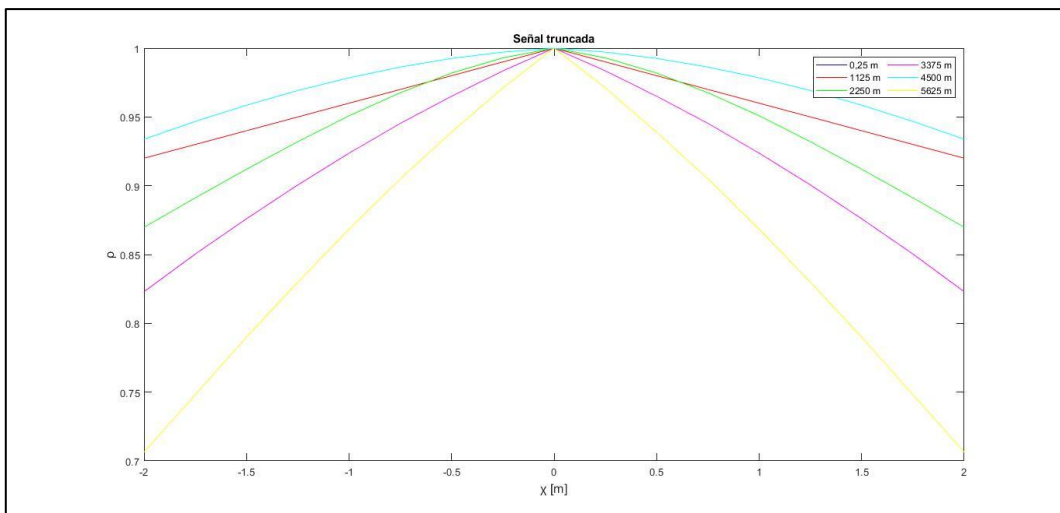


Figura 48 Coeficiente de correlación de la nivelación longitudinal carril derecho ( $L = 25 m$  y  $\chi_{\min} = 2m$ )

El resultado general de la nivelación del carril derecho (figura 49) muestra una correlación en la mayor parte de los tramos por encima del 60 %, lo mismo que sucedía con el carril izquierdo.

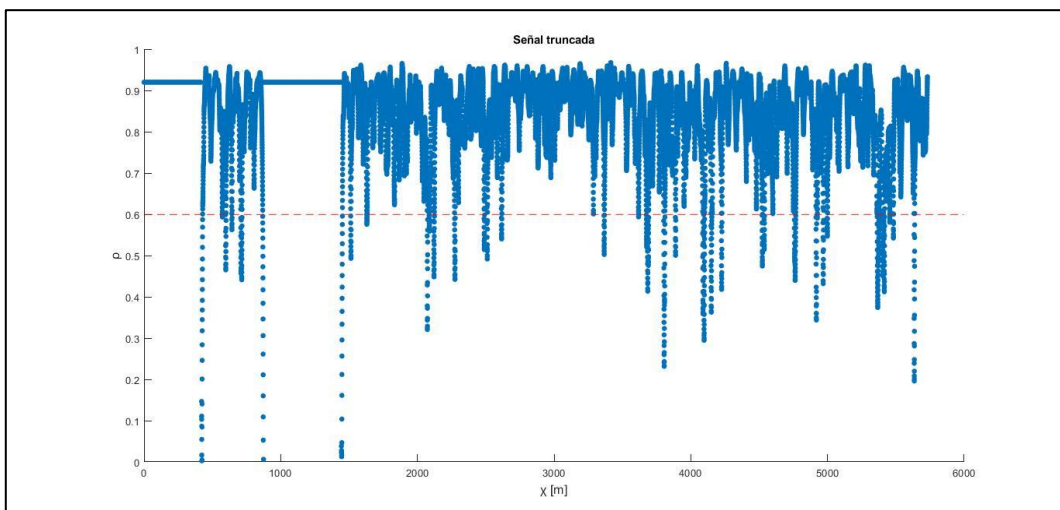


Figura 49 Coeficiente de correlación de la nivelación longitudinal carril derecho para  $\chi_{\min} = 2m$

### e) Alineación

Al igual que para el parámetro anterior, la correlación de la alineación tanto del carril izquierdo como derecho es superior al 60% como se puede observar en las figuras 50 a 53.

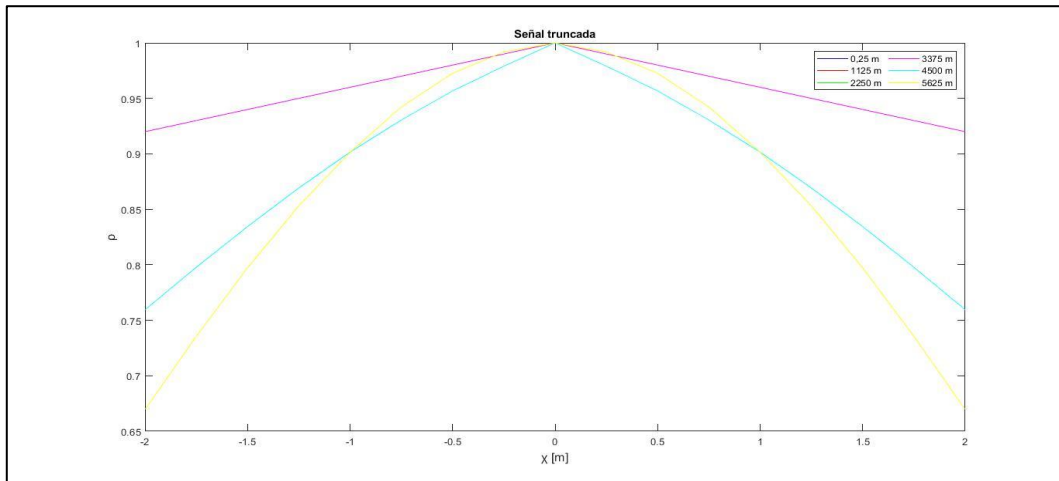


Figura 50 Coeficiente de correlación de la alineación carril izquierdo ( $L = 25$  m y  $\chi_{\min} = 2$  m)

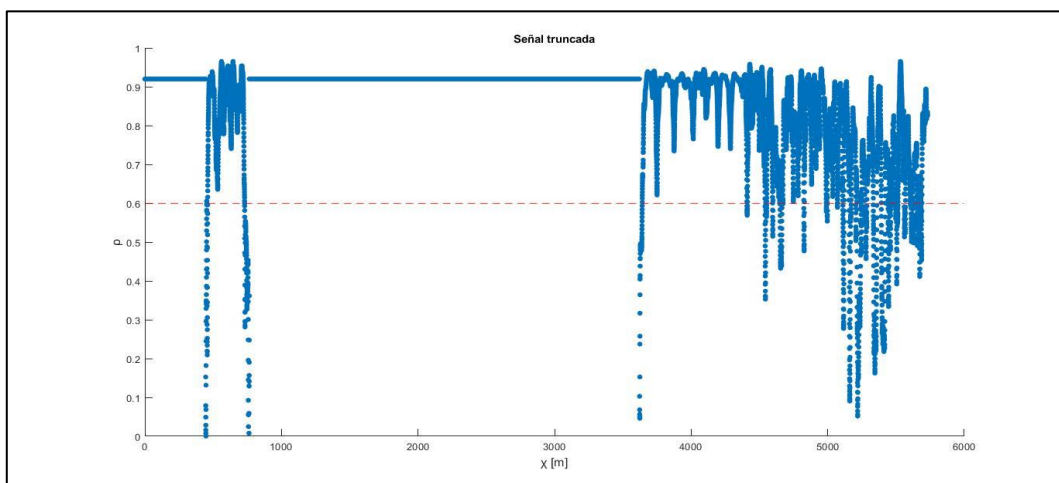


Figura 51 Coeficiente de correlación de la alineación carril izquierdo para  $\chi_{\min} = 2$  m

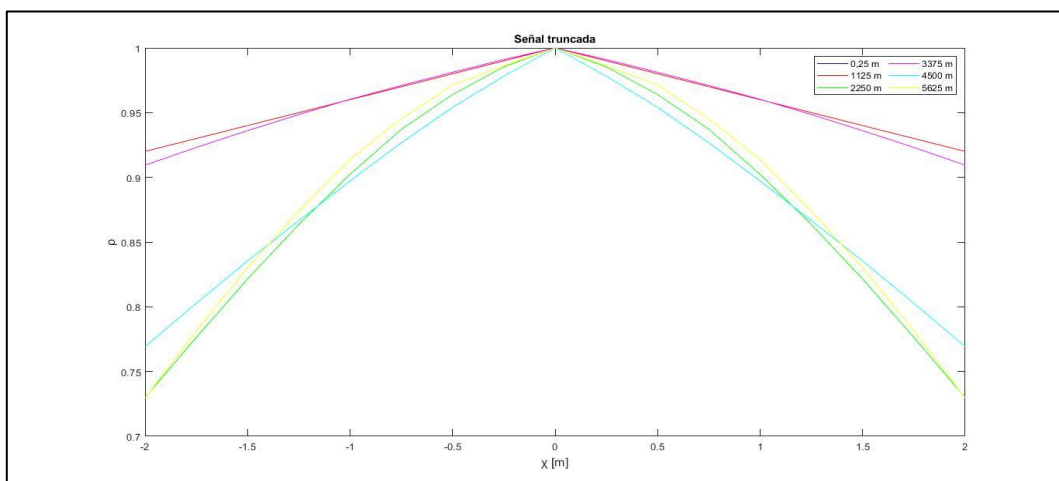


Figura 52 Coeficiente de correlación de la alineación carril derecho ( $L = 25$  m y  $\chi_{\min} = 2$  m)

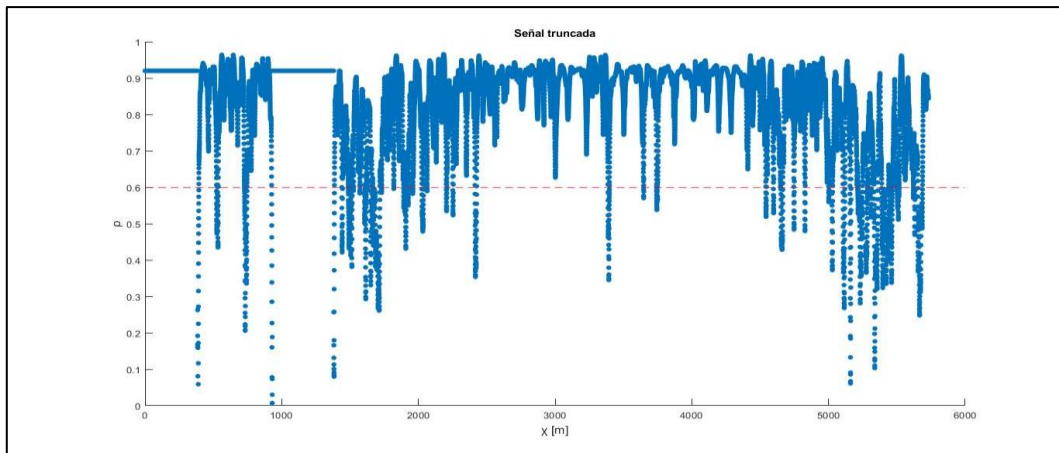


Figura 53 Coeficiente de correlación de la alineación carril derecho para  $\chi_{\min} = 2m$

En términos generales los resultados son satisfactorios y aunque existen algunas excepciones, el objeto del presente análisis consistía en homogeneizar un criterio garantizando niveles de correlación admisibles. Sin embargo, debido a la dispersión de los datos en algunos parámetros como el alabeo, se tendría que reducir el desfase a un valor mínimo, lo que desde un punto de vista ingenieril no tiene sentido porque estaríamos reduciendo el rango de análisis radicalmente, haciendo infructífero el presente ejercicio. En ese sentido el resto del trabajo continuará con los criterios asumidos hasta este punto.

### 3.4 Correlación cruzada de señales

Para aplicar la correlación cruzada de señales se utilizará la misma función de Matlab que en el caso anterior  $r = xcorr(x, scaleopt)$ , bajo el mismo caso de normalización *biased*, es decir, el producto de la señal aleatoria truncada por otra señal de igual longitud desplazada m unidades  $(z_{n+m} y_n^*)/N$ , siendo N el número total de componentes.

Ahora bien, debemos distinguir dos casos: 1) comparar una señal que expresa un parámetro con otra señal diferente; 2) puesto que hemos discretizado la señales en segmentos de longitud **L** entonces si consideramos las señales truncadas independientes, podemos aplicar la correlación cruzada entre éstas.

#### 3.4.1 Correlación cruzada de señales de distinta variable

En primera instancia analizamos la correlación cruzada de las señales enteras para ver su comportamiento, y posteriormente la correlación cruzada de las señales truncadas. Bajo ese contexto se analizará la correlación de los siguientes parámetros:

- Ancho de vía – alineación
- Alineación del carril izquierdo – alineación del carril derecho
- Nivelación – perfil vertical
- Nivelación carril izquierdo – Nivelación carril derecho
- Nivelación – alineación carril derecho
- Nivelación – alineación carril izquierdo
- Ancho de vía – Perfil vertical



### 3.4.1.1 Correlación cruzada ancho de vía y alineación

Las primeras variables que vamos a correlacionar son el ancho de vía y la alineación la cual será obtenida en función de la alineación de ambos carriles como se explicó con antelación. En ese sentido si expresamos el coeficiente de correlación  $\rho$  frente al desplazamiento  $\chi$ , obtenemos:

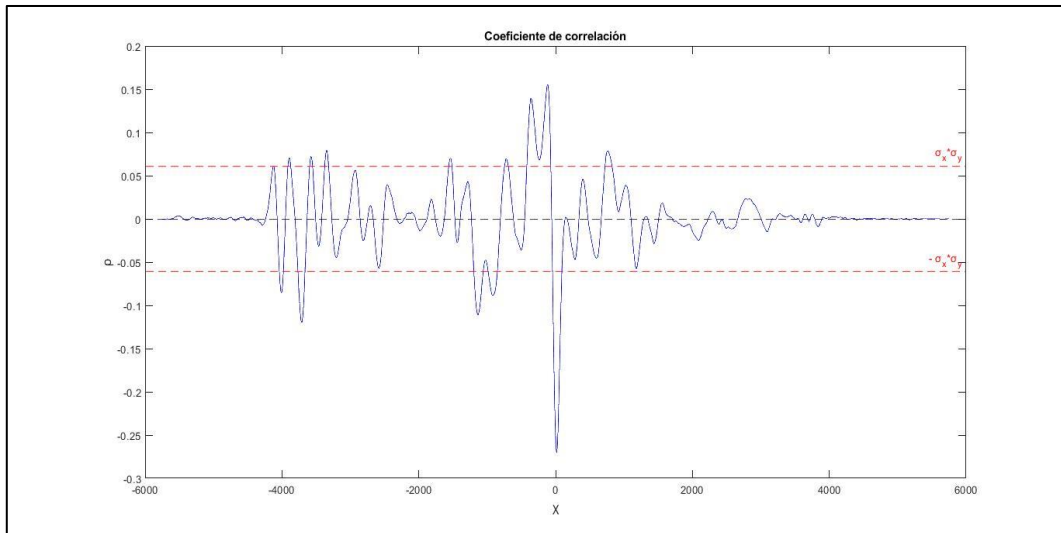


Figura 54 Correlación cruzada ancho de vía y alineación

El coeficiente de correlación se encuentra dentro de un rango de valores entre 0,15 y 0,30, dándose el máximo valor igual a -0,27 cuando  $\chi = 15$ , por lo que se puede intuir que la correlación entre estas dos variables es mínima incluso cuando no existe desfase entre las señales, en cuyo caso la correlación es de apenas el 25 %, y esto se debe evidentemente a la variabilidad de los datos de ambas señales.

### 3.4.1.2 Correlación cruzada alineación carril izquierdo y derecho

Por otro lado, si correlacionamos variables directamente obtenidas de la auscultación como es el caso de la alineación del carril izquierdo y derecho, y normalizamos el resultado para graficar el coeficiente de correlación  $\rho$  frente al desplazamiento  $\chi$ , se obtiene:

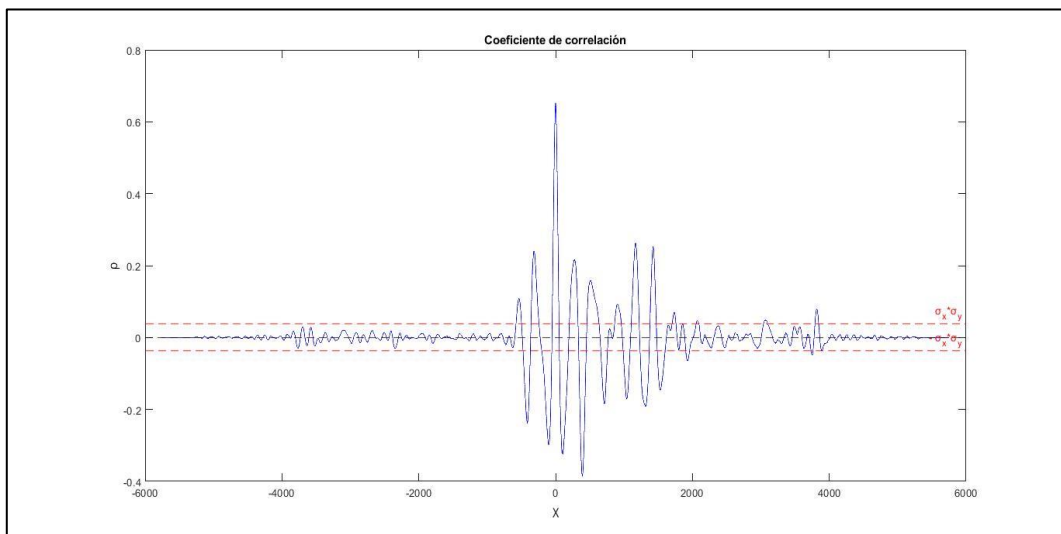


Figura 55 Correlación cruzada alineación carril izquierdo y derecho

El coeficiente de correlación alcanza un valor máximo de 0,65 cuando  $\chi = 0$ , y posteriormente la correlación va decreciendo, siendo prácticamente nula a medida que aumenta el desfase, este comportamiento casi simétrico se debe a que ambas variables se encuentran dentro de un orden de magnitud similar.

### 3.4.1.3 Correlación cruzada nivelación y perfil vertical

Si encontramos la función de correlación cruzada entre la nivelación y el perfil vertical, variables obtenidas a partir de la nivelación del carril derecho e izquierdo, y el contenido se grafica en función del desplazamiento  $\chi$ , se obtiene la siguiente figura 56:

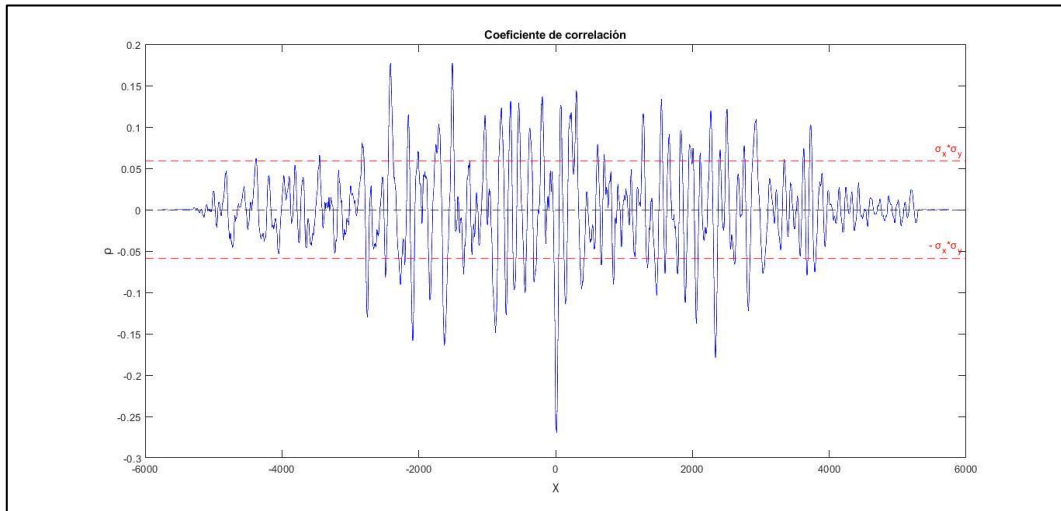


Figura 56 Correlación cruzada nivelación y perfil vertical

En este caso la correlación es del 25% cuando el desfase es nulo, y la máxima correlación se produce para un desfase del 15,25 m con un valor del 27% (diferencia que apenas se puede apreciar en la figura 56). En ese sentido, la correlación entre estos dos parámetros es mínima, debido a la diferencia del orden de magnitud.

### 3.4.1.4 Correlación cruzada nivelación carril izquierdo y derecho

A continuación, expresamos la correlación obtenida a partir de la señal de nivelación del carril izquierdo y derecho frente al desfase  $\chi$ :

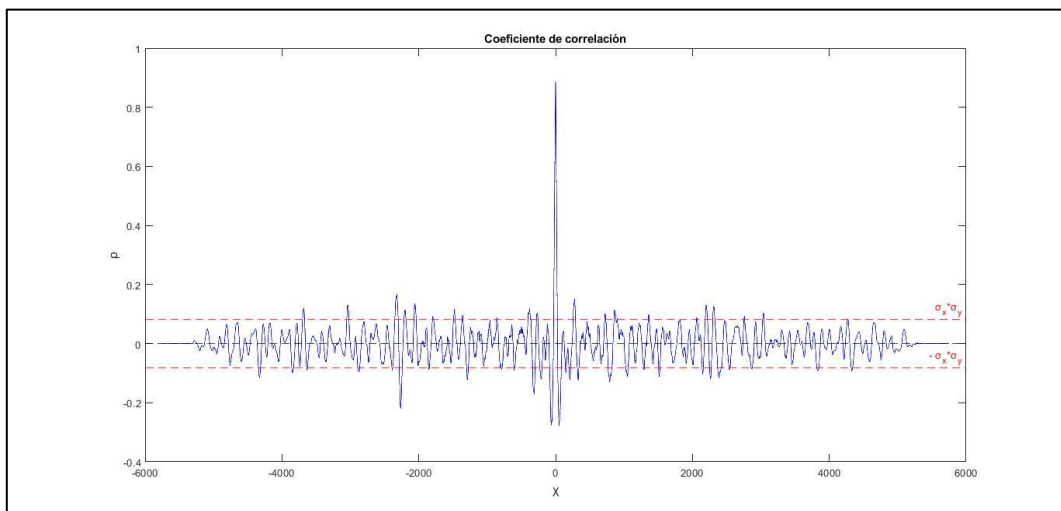


Figura 57 Correlación cruzada nivelación carril izquierdo y derecho

El comportamiento es muy similar al de una función de autocorrelación, pues cuando el desfase es nulo se alcanza un  $\rho = 0,89$  y la curva es casi simétrica, se debe a que los resultados auscultados en una y otra variable son muy similares.

### 3.4.1.5 Correlación cruzada nivelación y alineación carril derecho

El coeficiente de correlación cruzada obtenido de la nivelación y la alineación del carril derecho frente a desplazamiento  $\chi$ , origina una curva de correlación del siguiente tipo:

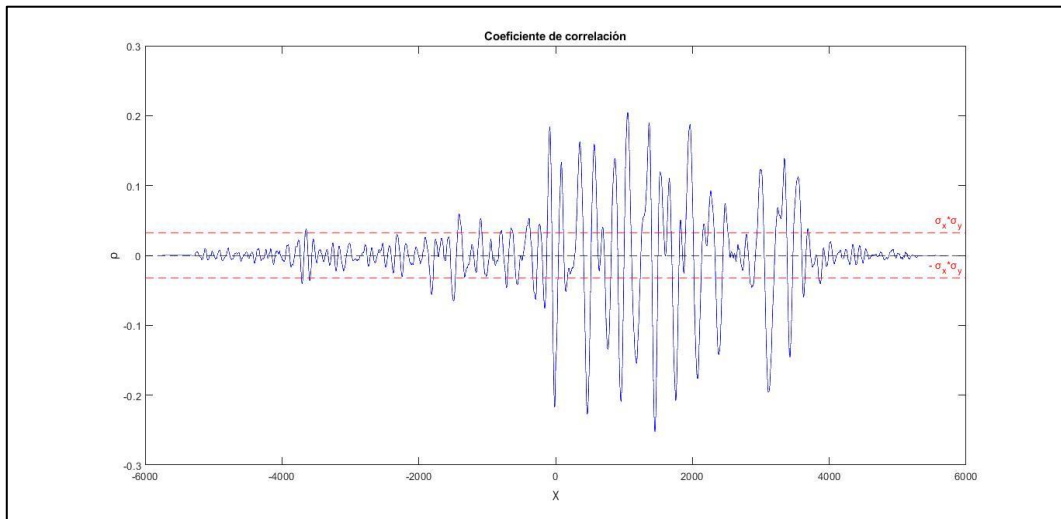


Figura 58 Correlación cruzada nivelación y alineación carril derecho

La correlación máxima se alcanza para un desfase de 1452 m con un valor de 0,25, y la correlación es de 0,17 cuando el desfase es nulo, lo que significa que las variables correlacionadas son muy diferentes.

### 3.4.1.6 Correlación cruzada nivelación y alineación carril izquierdo

De la misma manera que en el punto anterior, se correlaciona la nivelación pero esta vez con la alineación del carril izquierdo frente a desfase  $\chi$ , y se obtiene:

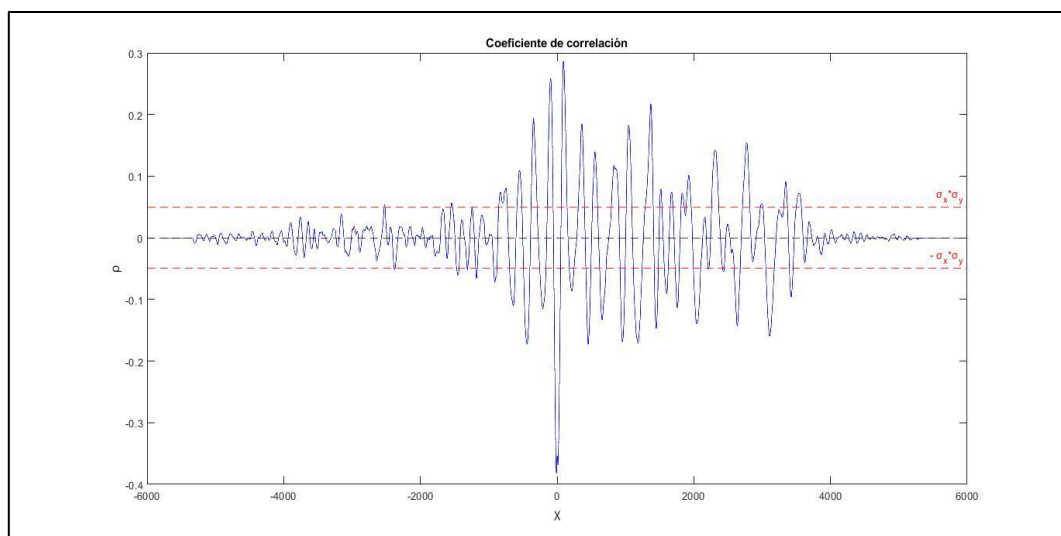


Figura 59 Correlación cruzada nivelación y alineación carril izquierdo

El coeficiente de correlación máximo es 0,38 y se produce cuando el desfase es nulo, como en el caso anterior la baja correlación es debido la variación de las señales.

### 3.4.1.7 Correlación cruzada ancho de vía y perfil vertical

Finalmente correlacionamos el ancho de vía con el perfil vertical, cuyo coeficiente de correlación lo expresamos en función del desfase desplazamiento  $\chi$ , obteniendo:

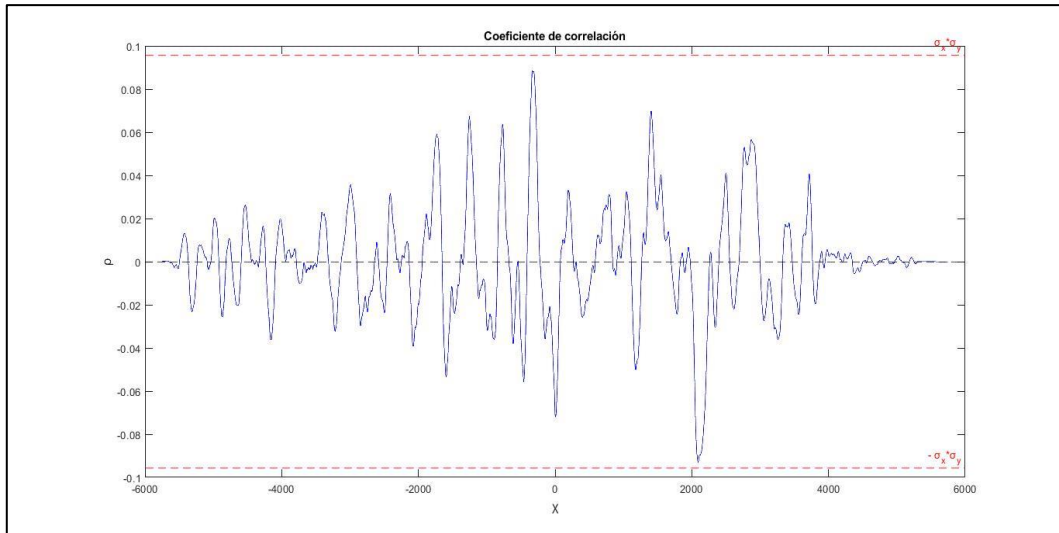


Figura 60 Correlación cruzada ancho de vía y perfil vertical

El resultado presenta una correlación del 7% cuando el desfase es nulo, mientras la correlación máxima es del 9% cuando el desfase es de 2094,25 m. El bajo nivel de correlación se debe a la diferencia en el orden de magnitud de las señales.

### 3.4.1.8 Correlación cruzada de señales truncadas

De la misma manera como se hizo para la función autocorrelación, con el objeto garantizar una mínima variabilidad de los datos, discretizamos la señal en trozos de tamaño finito  $L = 25 \text{ m}$ , como se definió con antelación y además con el objeto de garantizar una correlación mínima admisible se asumió un desfase de  $\chi_{\min} = 2 \text{ m}$ , aplicando en esta ocasión la función de correlación cruzada a las señales truncadas.

Lo que significa que si truncamos la señal en ventanas de longitud  $L$ , y desplazamos las ventanas el tamaño de la muestra 0,25 m hasta llegar al final de la señal, el número truncamientos será igual al tamaño de la señal total menos la distancia de la ventana más el tamaño de la muestra ( $n - L + m$ ) que da 22.924 que se guardarán en matrices de  $100 \times 22.924$ , una por cada uno de los siete casos de estudio que planteamos. Los resultados de una sección representativa se encuentran en el *Anexo 3* adjunto al presente trabajo.

#### a. Correlación de ancho de vía y alineación

En la figura 61, se puede observar el coeficiente de correlación para un desfase de 2 m siendo para este caso de estudio superior al 60 % en la mayor parte de los tramos, sin embargo debido a la variabilidad de los datos en otros tramos alcanza una correlación menor a la admisible.

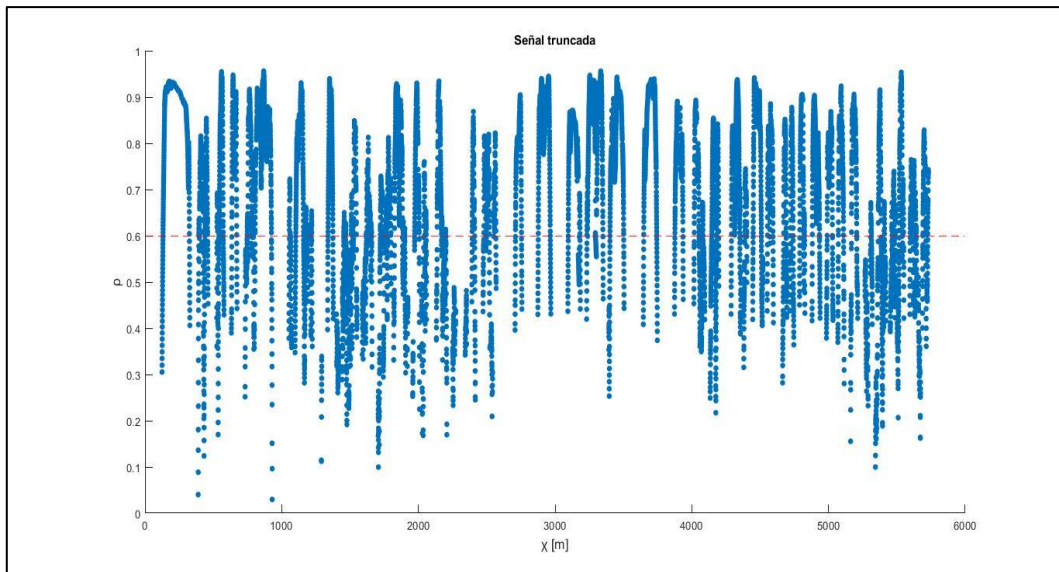


Figura 61 Correlación señal cruzada truncada del ancho de vía y alineación

**b. Correlación de alineación carril izquierdo y derecho**

Por otro lado la correlación cruzada de la alineación del carril izquierdo y derecho tiene un mejor comportamiento que el caso anterior pues la mayoría de los tramos alcanzaron el valor admisible.

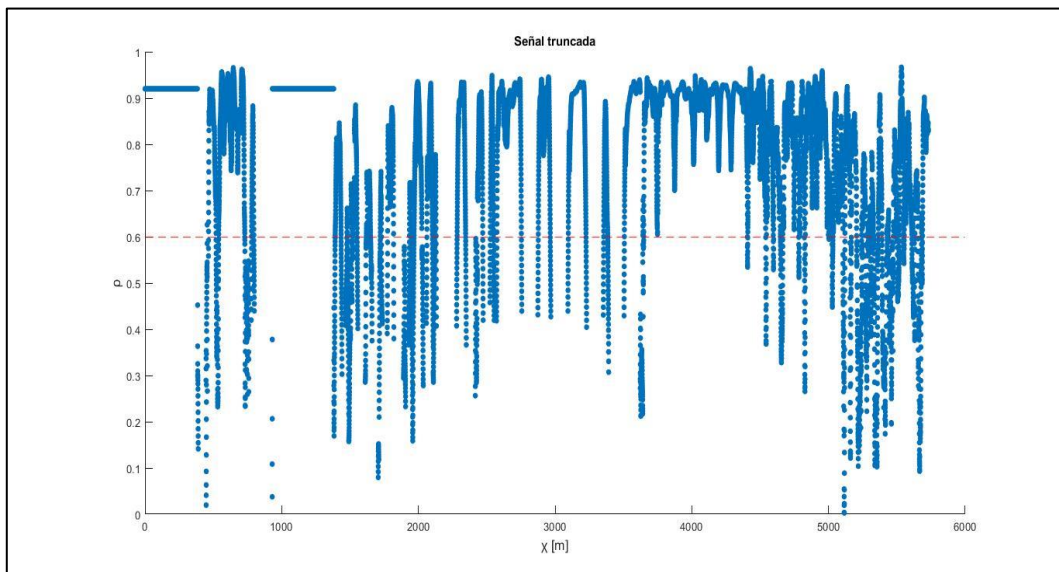


Figura 62 Correlación señal cruzada truncada de la alineación carril izquierdo y derecho

**c. Correlación de la nivelación y perfil vertical**

En la siguiente imagen se puede observar el tercer caso de estudio, para el cual el resultado es más dispar pues aproximadamente en la mitad de los tramos no se alcanza la correlación deseada.

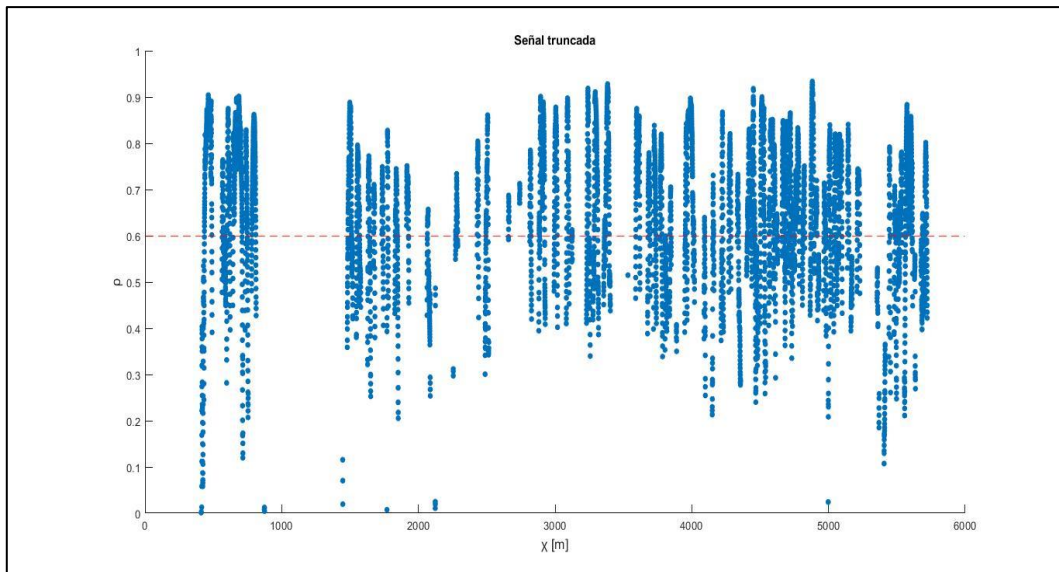


Figura 63 Correlación cruzada truncada de la nivelación y perfil vertical

**d. Correlación de la nivelación del carril izquierdo y derecho**

La correlación supera el 60% en muchos tramos para la nivelación del carril izquierdo y derecho, considerando que se trata de la correlación entre dos señales similares.

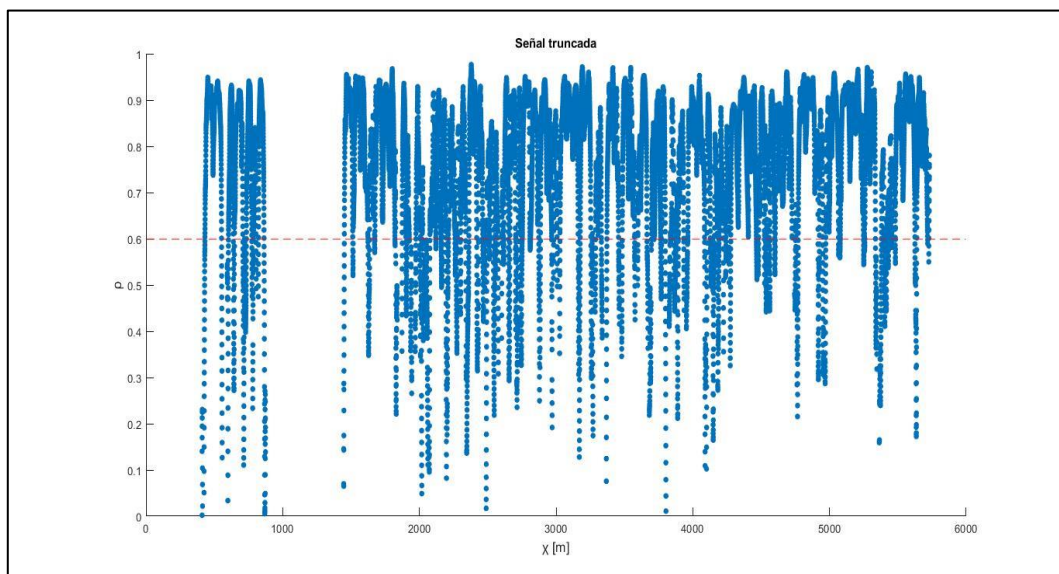


Figura 64 Correlación cruzada truncada de la nivelación carril izquierdo y derecho

**e. Correlación de la nivelación y alineación**

Tanto la correlación cruzada entre la nivelación y alineación del carril derecho como con el carril izquierdo tienen al menos la mitad de los datos con una correlación superior a la admisible, como se observa en las figuras 65 y 66.

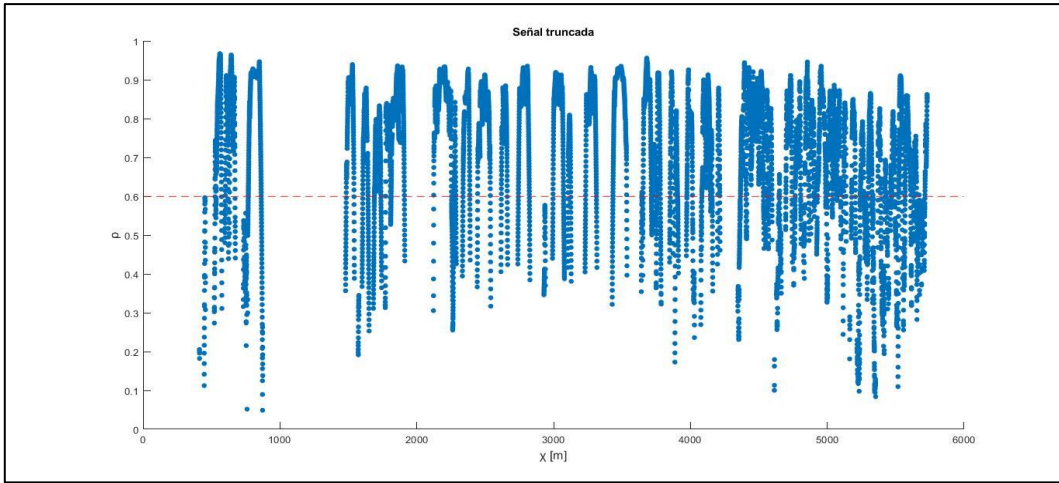


Figura 65 Correlación cruzada truncada de la nivelación y alineación carril derecho

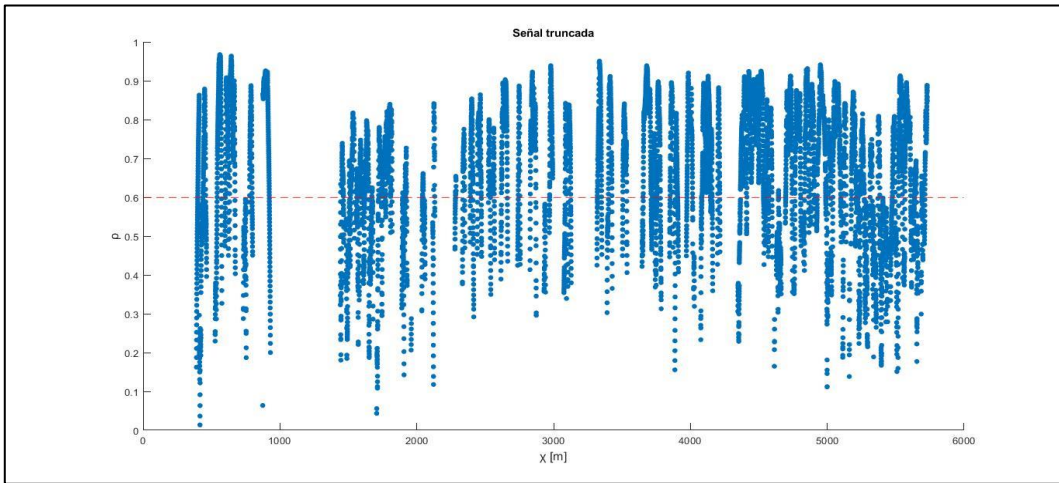


Figura 66 Correlación cruzada truncada de la nivelación y alineación carril izquierdo

**f. Correlación del ancho de vía y perfil vertical**

Finalmente, la correlación cruzada del ancho de vía y el perfil vertical, es idéntica a los otros casos, siendo que al menos la mitad de los tramos alcanza o supera una correlación del 60%.

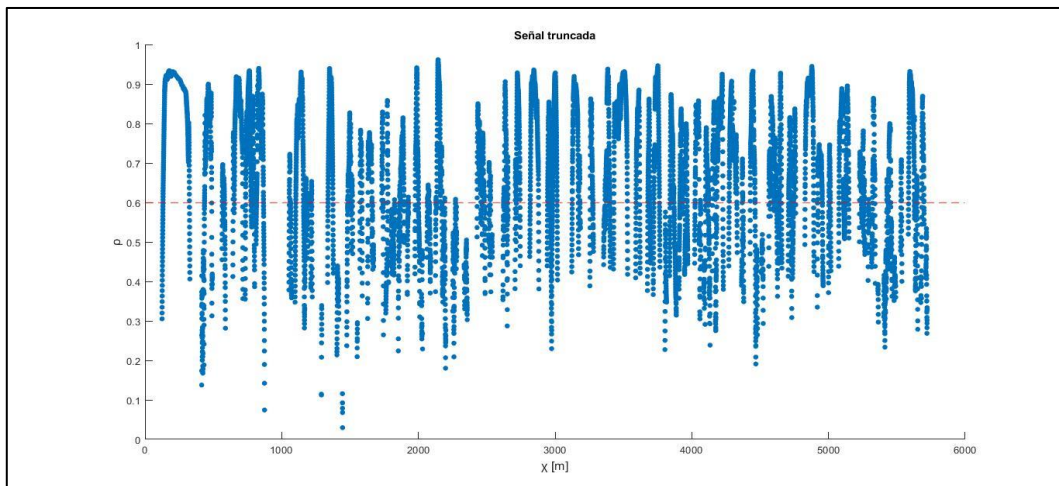


Figura 67 Correlación cruzada truncada del ancho de vía y perfil vertical

En conclusión, se detecta que las hipótesis tomadas para discretizar la señal en el caso de la autocorrelación, si bien es útil también para la correlación cruzada, debido a la gran variabilidad de las dos señales que se están relacionando para un desfase de 2 m, muchos tramos no alcanzan el valor de correlación esperado, sin embargo, en la mayoría de los casos no se alejan demasiado, por lo que se podría decir que el valor asumido con antelación es el adecuado.

### 3.5 Contenido en frecuencia

Como se explicó en el capítulo 2, la densidad espectral se calculará aplicando a los resultados de autocorrelación y correlación cruzada la función propia de Matlab  $y = fft(x)$ , que no es más que la transformada rápida de Fourier.

Por otro lado, si consideramos que se tomaron datos cada 0,25 m la frecuencia espacial  $\phi$  de muestreo sería inversamente proporcional, es decir, **4 ciclos por metro** (cpm).

Asimismo, para representar gráficamente el contenido en frecuencia de la función de autocorrelación y correlación cruzada, se debe aclarar que al utilizar la transformada de Fourier se genera un espectro bilateral de amplitud que tiene frecuencias negativas y positivas, cuya amplitud para cada frecuencia es la mitad de la amplitud de la señal y que además tiene simetría par, entonces en primera instancia se normalizó el resultado a la unidad y posteriormente basándose en el espectro bilateral se lo llevó a un espectro unilateral, razón por la cual la amplitud es del doble, es decir, igual a dos.

#### 3.5.1 Densidad autoespectral

En primera instancia realizamos la transformada de Fourier de la función de autocorrelación para analizar el contenido en frecuencia de las variables previamente definidas.

##### 3.5.1.1 Ancho de vía

A continuación, se presentan los resultados de densidad espectral de la autocorrelación del ancho de vía frente a la frecuencia espacial  $\phi$ .

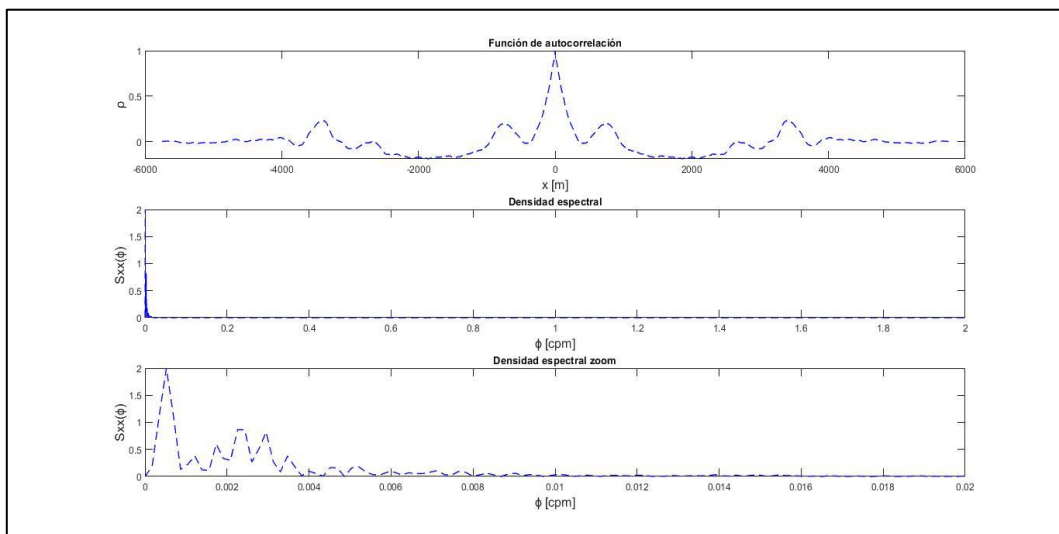


Figura 68 Densidad autoespectral ancho de vía (rango hasta 0,02 cpm)



Para poder observar y analizar con mayor claridad el contenido frecuencial de la función de correlación se realizó un acercamiento hasta los 0,02 cpm.

Se observa claramente una frecuencia dominante a los 0,001 cpm cuya amplitud es de 2 [mm<sup>2</sup>/ciclo], luego se observa otro rango de frecuencia, sin embargo, estos últimos representan una fracción mínima de la ocurrencia de estos eventos.

### 3.5.1.2 Peralte

Ahora analizamos la densidad espectral de la función de correlación del parámetro de peralte gratificándola frente a la frecuencia espacial  $\phi$ .

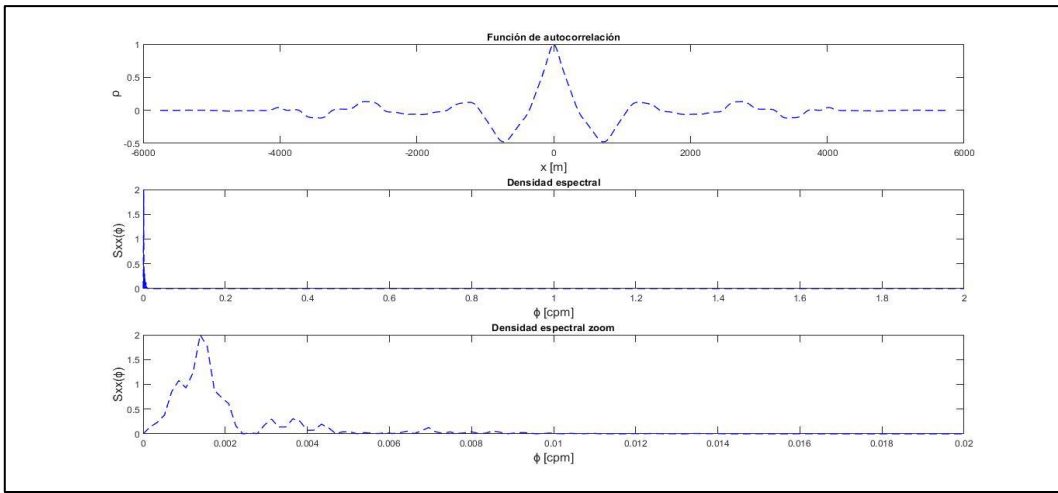


Figura 69 Densidad autoespectral peralte (rango hasta 0,02 cpm)

En este caso se puede ver claramente un rango de frecuencia de 0 a 0,0025 cpm y otro más pequeño pero que por su contenido frecuencial es despreciable.

### 3.5.1.3 Alabeo 3

De la misma forma, si expresamos el contenido en frecuencia de la función de autocorrelación de la variable de alabeo a 3 m frente a  $\phi$ .

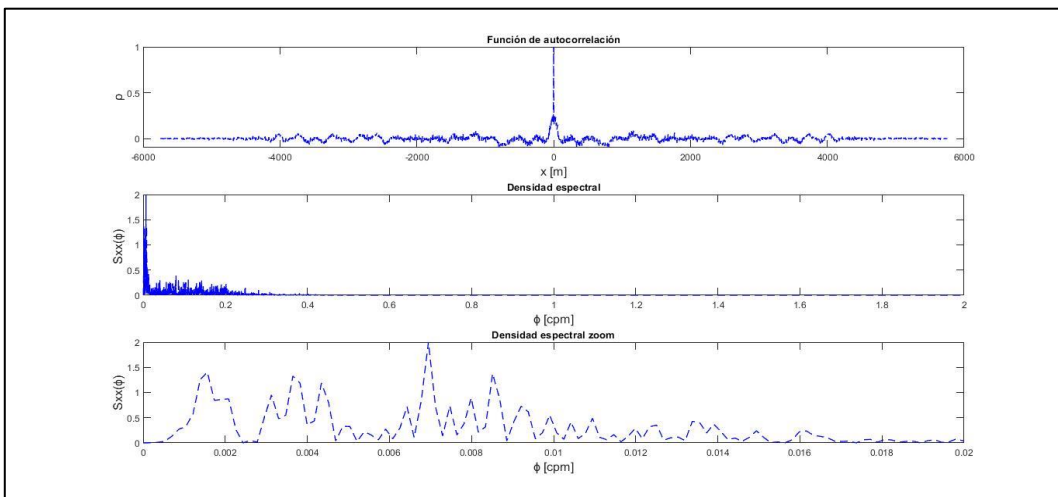


Figura 70 Densidad autoespectral alabeo 3 m (rango hasta 0,02 cpm)

Es difícil distinguir una frecuencia dominante, pero sí una banda de frecuencia de 0,006 a 0,01 cpm, encontrándose la máxima amplitud en 0,0069 cpm.

### 3.5.1.4 Alabeo 6 m

Igual que en el punto anterior expresamos el contenido en frecuencia de la función de autocorrelación de la variable alabeo, pero a 6 m con la frecuencia espacial  $\phi$ .

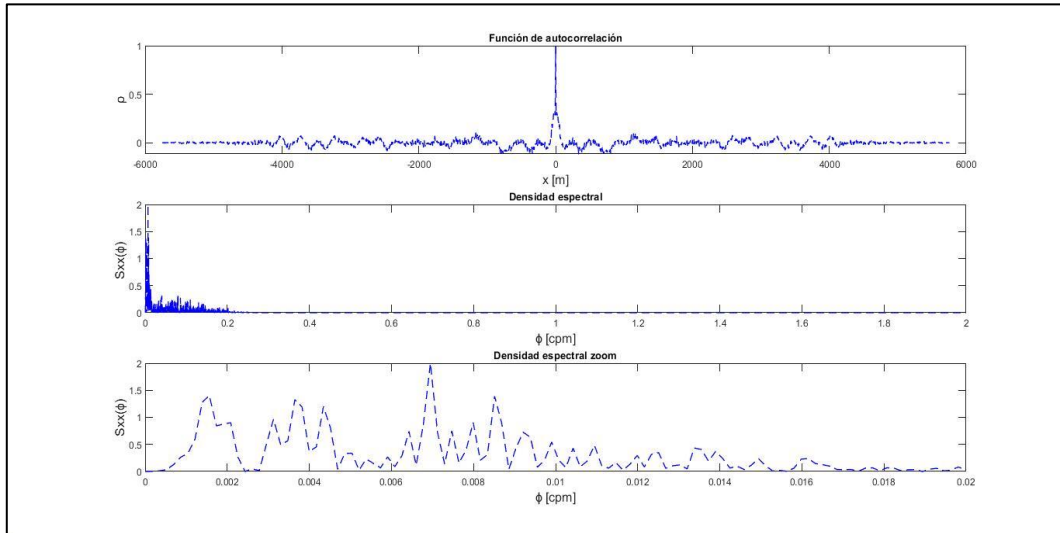


Figura 71 Densidad autoespectral alabeo 6 m (rango hasta 0,02 cpm)

El comportamiento es exactamente el mismo que el del alabeo a 3 m pues las bandas de frecuencias dominantes son iguales.

### 3.5.1.5 Nivelación carril izquierdo

El contenido en frecuencia de la función de autocorrelación de la nivelación del carril izquierdo frente a  $\phi$ , tiene el siguiente comportamiento.

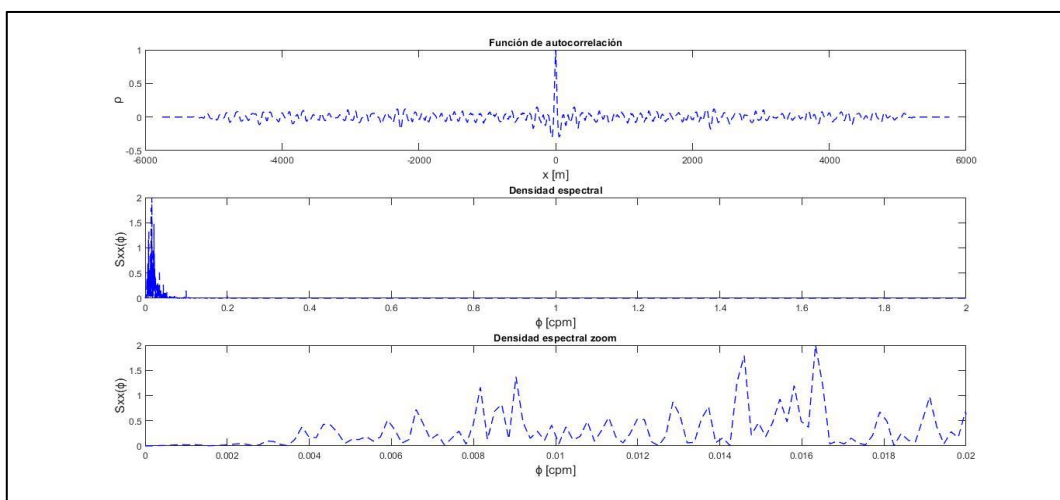


Figura 72 Densidad autoespectral nivelación longitudinal carril izquierdo (rango hasta 0,02 cpm)

Existen dos frecuencias dominantes, una a 0,016 cpm y la otra próxima a 0,014 cpm, del mismo modo, se vislumbra una banda de frecuencias subdominantes de 0,008 a 0,009 cpm.

### 3.5.1.6 Nivelación carril derecho

El contenido en frecuencia de la función de autocorrelación de la nivelación del carril derecho frente a  $\phi$ , se comporta como se observa en la figura 73.

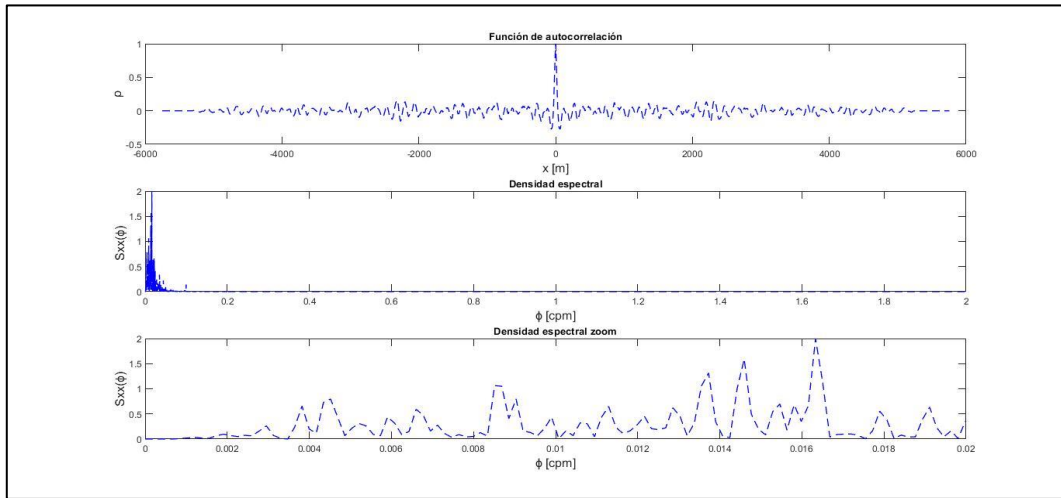


Figura 73 Densidad autoespectral nivelación longitudinal del carril derecho (rango hasta 0,02 cpm)

Al igual que el contenido frecuencial de la nivelación longitudinal del carril izquierdo, para el carril derecho se distinguen unas frecuencias dominantes de 0,016, 0,0145 y 0,0137 cpm y una banda de frecuencia subdominante de 0,008 a 0,01 cpm.

### 3.5.1.7 Alineación carril izquierdo

La curva que se desarrolla entre la densidad espectral de la función de autocorrelación de la alineación del carril izquierdo frente a la frecuencia espacial  $\phi$  es de la siguiente forma:

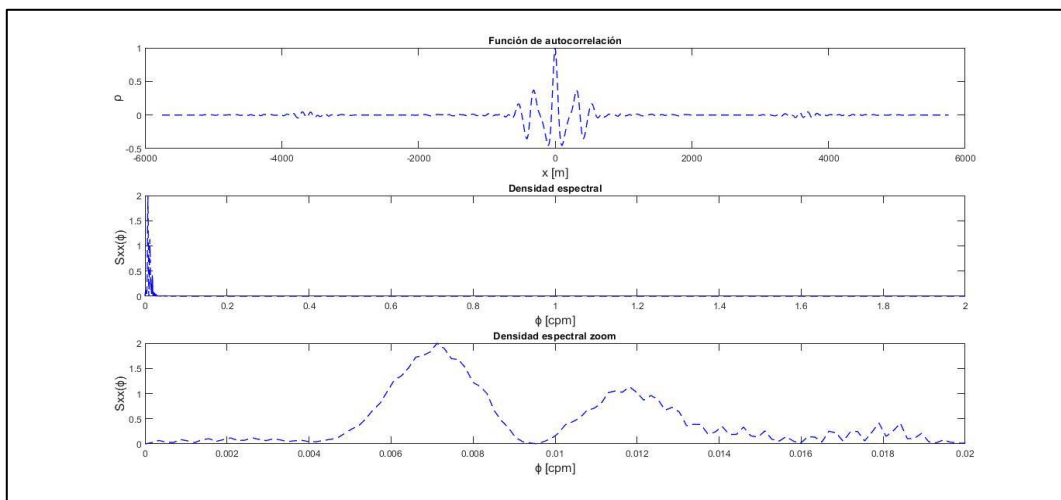


Figura 74 Densidad autoespectral alineación carril izquierdo (rango hasta 0,02 cpm)

Claramente se puede dilucidar que existen dos rangos de frecuencias una dominante desde 0,004 hasta 0,009 cpm y otra subdominante desde 0,009 a 0,014 cpm con la mitad de amplitud.

### 3.5.1.8 Alineación carril derecho

Al igual que el caso anterior se grafica la curva de densidad espectral de la función de autocorrelación de la alineación del carril derecho frente a la frecuencia espacial  $\phi$ .

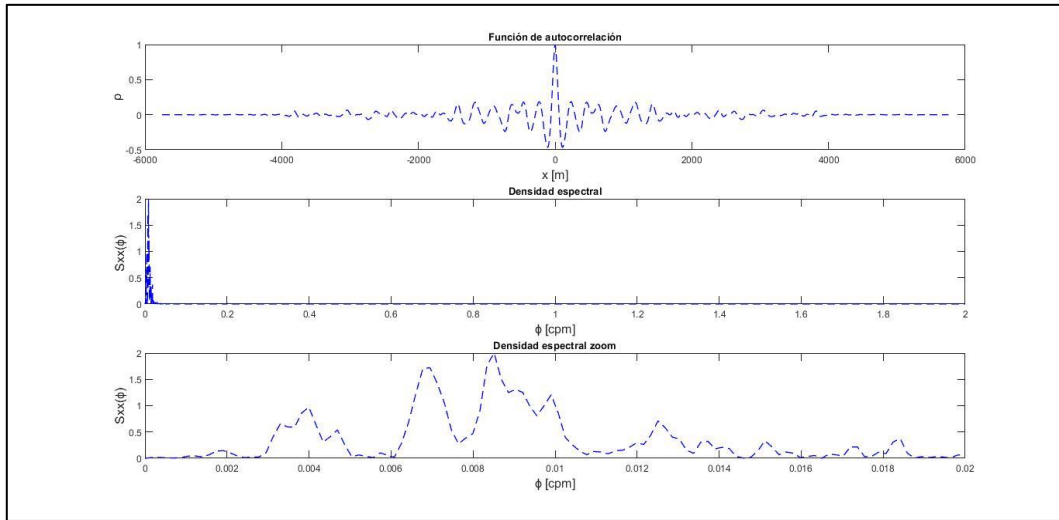


Figura 75 Densidad autoespectral alineación carril derecho (rango hasta 0,02 cpm)

Claramente hay tres rangos de frecuencia una banda dominante desde 0,008 a 0,011 cpm y otra de 0,006 a 0,008 cpm, los otros dos rangos de frecuencia con contenido mucho menor.

### 3.5.2 Densidad espectral cruzada

En primera instancia realizamos la transformada de Fourier a la función de correlación cruzada para analizar el contenido en frecuencia de todos los casos de estudio.

#### 3.5.2.1 Ancho de vía – alineación

En primera instancia analizamos el resultado de densidad espectral de la función de correlación cruzada del ancho de vía y alineación frente a la frecuencia espacial  $\phi$ .

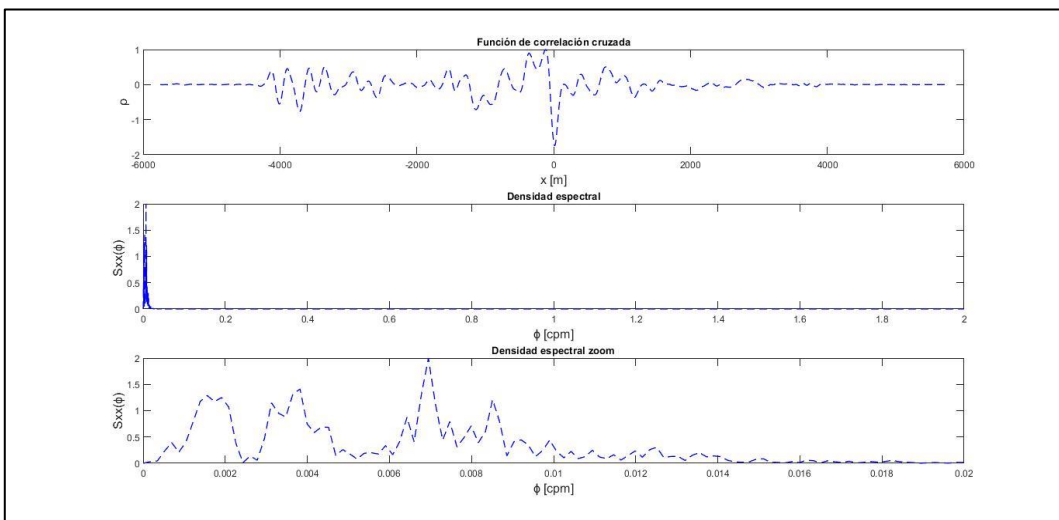


Figura 76 Densidad espectral cruzada ancho de vía y alineación (rango hasta 0,02 cpm)

Para el primer caso de estudio, se puede ver claramente una frecuencia dominante de 0,007 cpm, y otras dos bandas de frecuencia subdominantes de 0 a 0,0024 cpm y otra de 0,0024 a 0,0052, cuya amplitud es aproximadamente la mitad de la dominante.

### 3.5.2.2 Alineación del carril izquierdo – alineación del carril derecho

Ahora graficamos la densidad espectral de la función de correlación cruzada entre la alineación del carril izquierdo y derecho frente a la frecuencia espacial  $\phi$ .

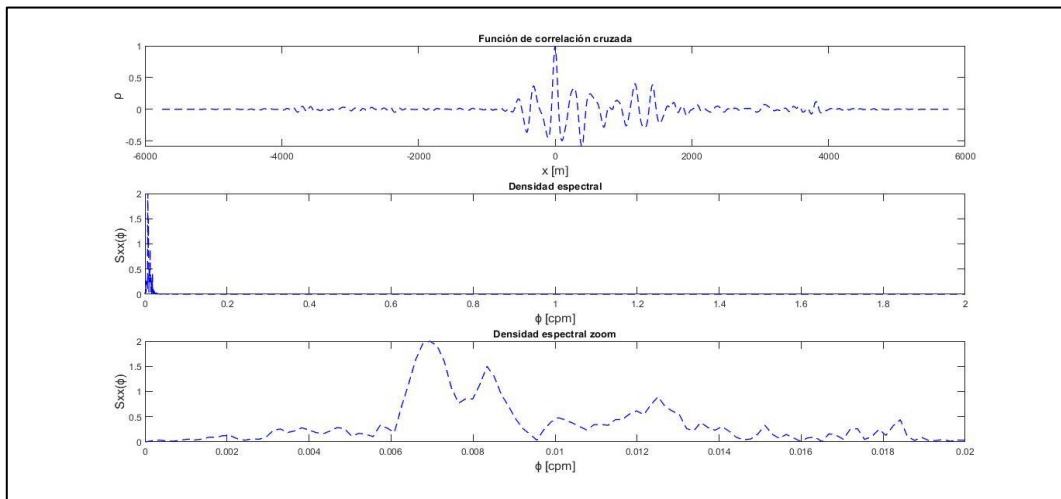


Figura 77 Densidad espectral cruzada alineación carril izquierdo y derecho (rango hasta 0,02 cpm)

En cuanto a la densidad espectral de la alineación del carril izquierdo y derecho, se puede observar claramente una banda de frecuencia dominante de 0,006 a 0,0085 cpm.

### 3.5.2.3 Nivelación – perfil vertical

Si desarrollamos la curva densidad espectral de la función de correlación cruzada entre la nivelación y el perfil vertical en función de la frecuencia espacial  $\phi$ , se obtiene:

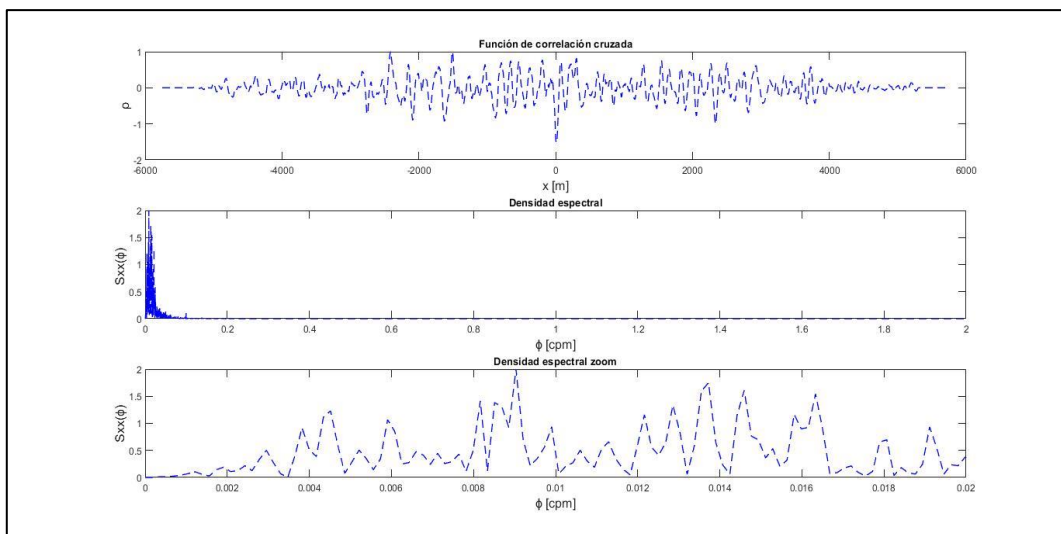


Figura 78 Densidad espectral cruzada nivelación y perfil vertical (rango hasta 0,02 cpm)

De acuerdo con lo mostrado en la figura 78 se pueden ver varias bandas de frecuencias cuya dominante es de 0,008 a 0,01 cpm, asimismo, hay otros picos subdominantes de amplitud similar a la mayor.

### 3.5.2.4 Nivelación carril izquierdo – Nivelación carril derecho

Si expresamos el contenido en frecuencia de la función de correlación de las variables de nivelación del carril izquierdo y derecho frente a  $\phi$ .

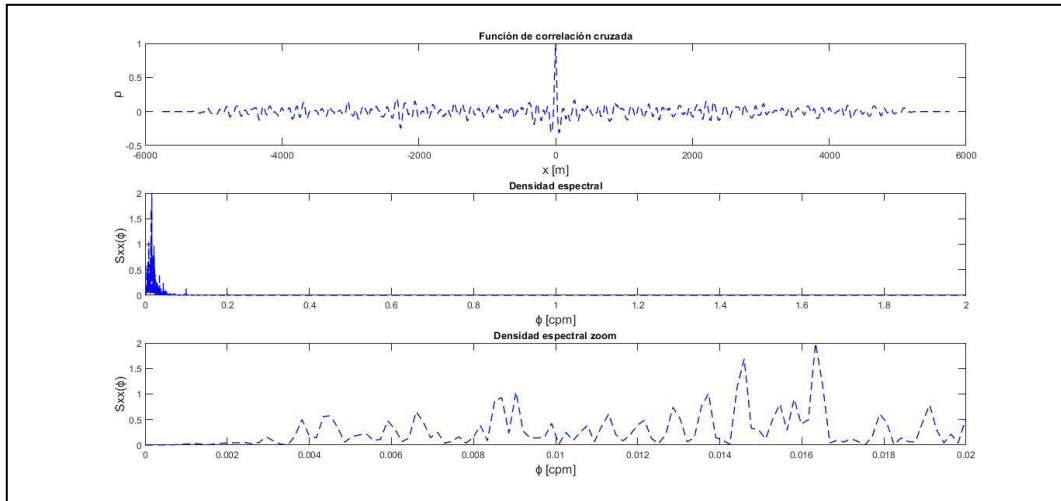


Figura 79 Densidad espectral cruzada nivelación carril izquierdo y derecho (rango hasta 0,02 cpm)

En la figura 79 se ve una frecuencia dominante de 0,016 y otra subdominante de 0,014 cpm y unas bandas de frecuencias de menor amplitud.

### 3.5.2.5 Nivelación – alineación carril derecho

El contenido en frecuencia de la función de correlación de la nivelación con la alineación del carril derecho frente a  $\phi$ , tiene el siguiente comportamiento:

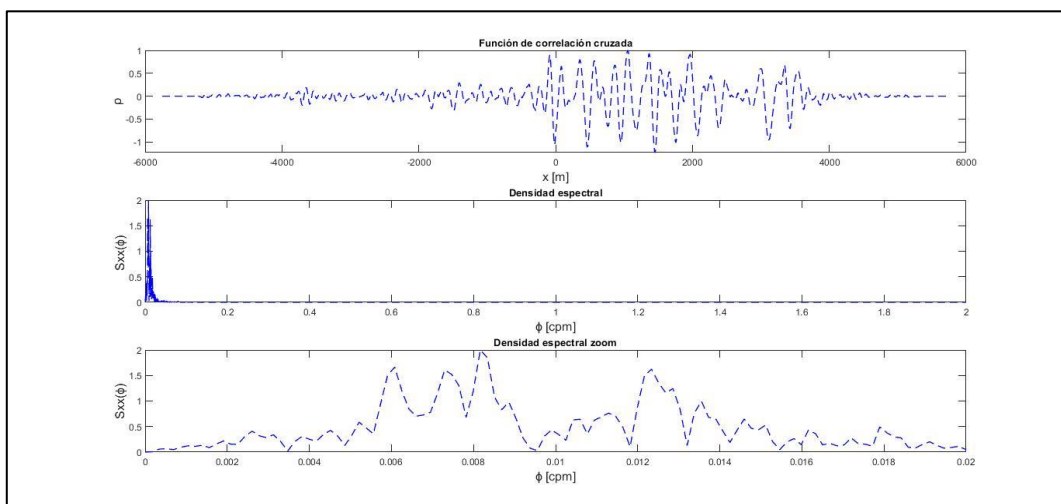


Figura 80 Densidad espectral cruzada nivelación y alineación carril derecho (rango hasta 0,02 cpm)

En este caso de estudio se ve claramente una banda de frecuencia dominante desde 0,005 a 0,0095 cpm, y otra banda de frecuencia subdominante de 0,012 a 0,013 cpm.

### 3.5.2.6 Nivelación – alineación carril izquierdo

El contenido en frecuencia de la función de correlación de la nivelación y la alineación del carril izquierdo frente a  $\phi$ , se comporta de la siguiente manera:

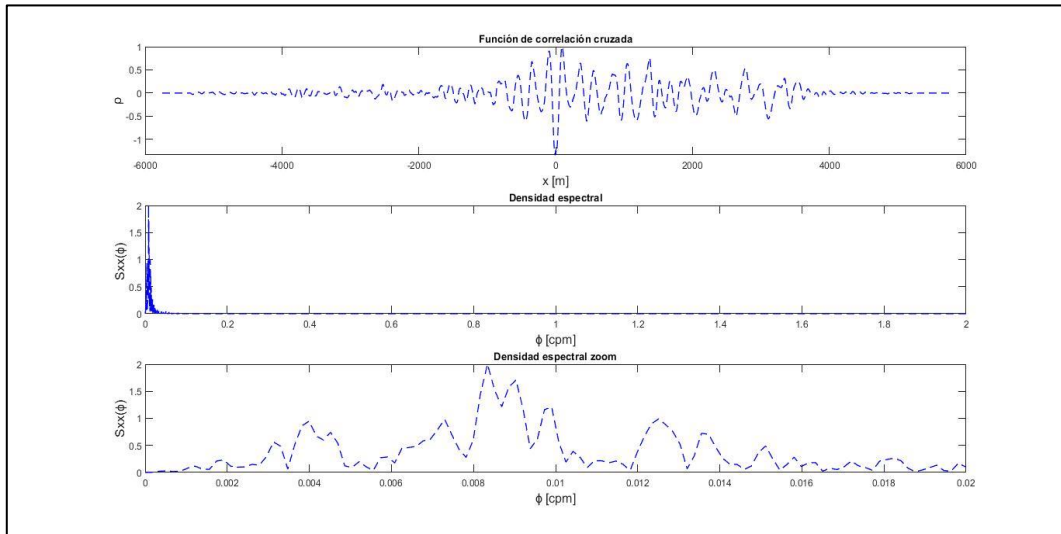


Figura 81 Densidad espectral cruzada nivelación y alineación carril izquierdo (rango hasta 0,02 cpm)

Para la correlación cruzada de la nivelación y alineación carril izquierdo, hay una frecuencia banda de frecuencia dominante de 0,006 a 0,011 cpm y otras bandas de frecuencia importantes con la mitad de amplitud.

### 3.5.2.7 Ancho de vía – Perfil vertical

La curva que se desarrolla entre la densidad espectral de la función de correlación cruzada del ancho de vía y el perfil vertical frente a la frecuencia espacial  $\phi$  presenta la siguiente forma:

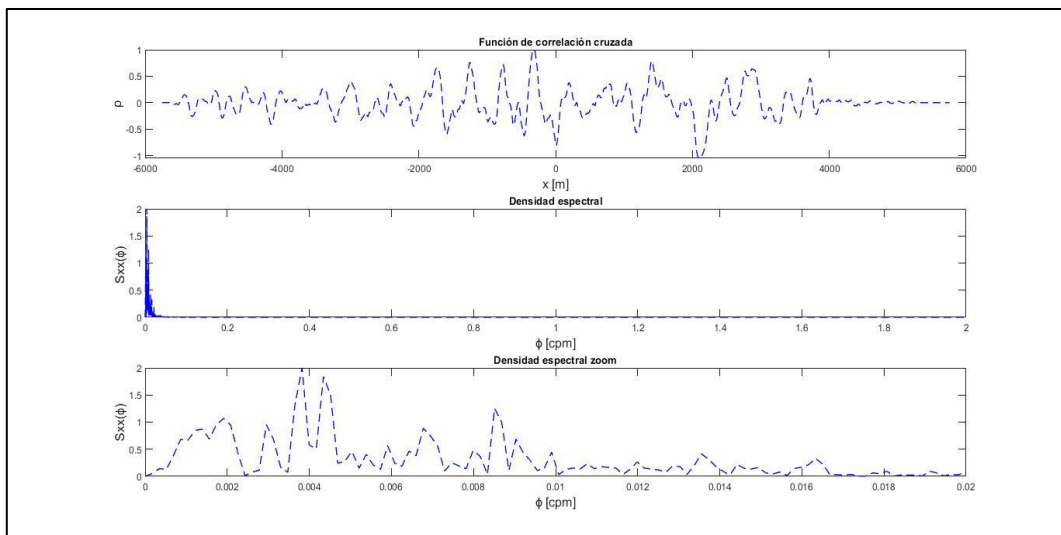


Figura 82 Densidad espectral cruzada ancho de vía y perfil vertical (rango hasta 0,02 cpm)

Por el contenido frecuencial, en la figura 82 se ven dos frecuencias dominantes una de 0,003 cpm y otra de 0,004 cpm, asimismo se observa una banda de frecuencia subdominante de 0 a 0,0025 cpm.

# 4 NORMATIVA

En el presente capítulo se presenta la normativa a utilizar para caracterizar la calidad geométrica de la vía en función de los parámetros auscultados.

## 4.1 Definiciones

La norma a emplear será la *UNE-EN 13848-1 Aplicaciones ferroviarias, Vía, Calidad de la geometría de la vía, Parte 1: Caracterización de la geometría de la vía* aprobada por Comité Europeo de Normalización el 23 de diciembre de 2018 [7].

El Documento tiene el objeto de proporcionar definiciones para los parámetros de geometría de la vía principal y específica y los requisitos mínimos para la medición y los métodos de análisis.

La calidad geométrica de las vías se define como la evaluación de las desviaciones respecto al valor medio al valor medio o al de proyecto de las características geométricas de determinados parámetros, en los planos vertical y horizontal, que afectan a la seguridad o se relacionan con la calidad de la rodadura.

La relación entre los ejes del sistema de coordenadas de la vía se puede ver en la siguiente imagen:

- Eje X: eje representado como una prolongación de la vía hacia la dirección del desplazamiento
- Eje Y: eje paralelo a la superficie de rodadura
- Eje Z: eje perpendicular a la superficie de rodadura apuntando hacia abajo

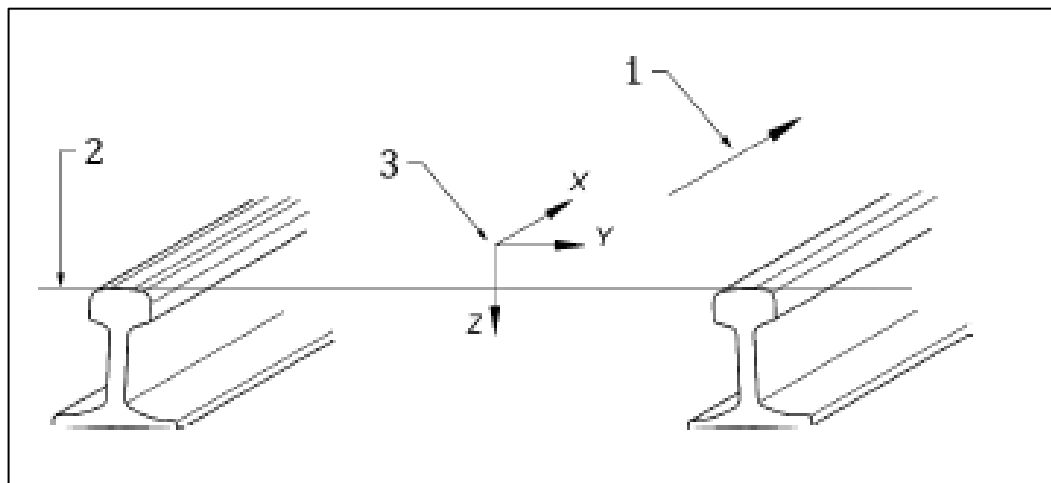


Figura 83 Relación entre los ejes del sistema de coordenadas de la vía

Dónde:

1. Dirección de marcha
2. Intersección entre la sección transversal y superficie de rodadura
3. Sistema de coordenadas de la vía



## 4.2 Parámetros principales de la geometría de vía

Los parámetros principales para caracterizar la geometría de la vía son los siguientes:

### 4.2.1 Ancho de vía

El rango de mediciones debe ser el ancho nominal entre -15 mm/ +50 mm.

Los defectos individuales se determinan a partir de la diferencia entre el valor nominal (G) menos el valor pico máximo y mínimo ( $G_p$ ).

Los datos a registrar:

1. Ancho de vía medido mínimo y máximo en el rango de 0 a 14 mm desde la tabla de rodadura:

$$\forall z \in (0,14)mm \rightarrow \begin{matrix} \max_z G_{xz} (\equiv MG_x) \\ \min_z G_{xz} (\equiv mG_x) \end{matrix} \quad (26)$$

$$\forall z \in (0,14)mm \rightarrow u_z(G_{xz}) (\equiv \overline{G_x}) \quad (27)$$

2. Diferencia entre el ancho de vía medido y el ancho de vía nominal:

$$MG_x - G \quad (28)$$

$$mG_x - G \quad (29)$$

$$\overline{G_x} - G \quad (30)$$

3. Ancho de vía medio sobre una distancia especificada:

$$\forall x \equiv (0, \lambda) \rightarrow \begin{cases} u_\lambda(MG_x) \equiv MG_\lambda \\ u_\lambda(mG_x) \equiv mG_\lambda \\ u_\lambda(\overline{G_x}) \equiv \overline{G}_\lambda \end{cases} \quad (31)$$

4. Variación del ancho de vía sobre una distancia especificada

$$\forall x \equiv (0, \lambda) \rightarrow \begin{cases} \sigma_\lambda(MG_x) \equiv \sigma MG_\lambda \\ \sigma_\lambda(mG_x) \equiv \sigma mG_\lambda \\ \sigma_\lambda(\overline{G_x}) \equiv \sigma \overline{G}_\lambda \end{cases} \quad (32)$$

#### 4.2.2 Nivelación longitudinal

Se deben considerar tres rangos expresados en longitudes de onda ( $\lambda$ ), en función de los mismos se define el rango de medición como se observa en la siguiente tabla:

Valor (mm)			
<b>Rango de longitud de onda*</b>	D1 $3 \text{ m} < \lambda \leq 25 \text{ m}$	D2 $25 \text{ m} < \lambda \leq 70 \text{ m}$	D3** $70 \text{ m} < \lambda \leq 150 \text{ m}$
<b>Rango medición</b>	$\pm 50$	$\pm 100$	$\pm 300$

**Nota:**  
\* Opcional D0:  $1 \text{ m} < \lambda \leq 5 \text{ m}$  (para detectar defectos que generan fuerzas dinámicas altas)  
\*\* Para velocidades  $> 230 \text{ km/h}$

Tabla 17. Rango de medición de nivelación longitudinal

Los defectos individuales se determinan de la diferencia entre el valor medio ( $Z_m$ ) y el valor pico máximo y mínimo ( $Z_p$ ).

#### 4.2.3 Alineación de carril

Asimismo, de la misma manera que para la nivelación longitudinal se deben considerar tres rangos expresados en longitudes de onda ( $\lambda$ ), y en función de estos definir el rango de medición como se vislumbra a continuación:

Valor (mm)			
<b>Rango de longitud de onda*</b>	D1 $3 \text{ m} < \lambda \leq 25 \text{ m}$	D2 $25 \text{ m} < \lambda \leq 70 \text{ m}$	D3** $70 \text{ m} < \lambda \leq 200 \text{ m}$
<b>Rango medición</b>	$\pm 50$	$\pm 100$	$\pm 300$

**Nota:**  
\* Opcional D0:  $1 \text{ m} < \lambda \leq 5 \text{ m}$  (para detectar defectos que generan fuerzas dinámicas altas)  
\*\* Para velocidades  $> 230 \text{ km/h}$

Tabla 18. Rango de medición de alineación

Los defectos individuales se determinan de la diferencia entre el valor medio ( $Y_m$ ) y el valor pico máximo y mínimo ( $Y_p$ ).

### 4.3 Método de cálculo de índices de calidad de la geometría de vía (TQI)

De acuerdo con lo dispuesto con la Norma Española UNE-EN 13848-6:2014+A1 parte 6 [8], la calidad geométrica de la vía se puede caracterizar por varios TQI conforme al nivel de agregación que se va a utilizar, este índice representa el estado de la técnica actual de descripción de la calidad de la geometría de vía en al menos una de las redes ferroviarias europeas. Para el presente trabajo se utilizará la técnica de la desviación general combinada (CoSD).

### 4.3.1 Desviación general combinada (CoSD)

Es una variante del indicador “desviación típica” para evaluar combinadamente las desviaciones típicas de varios parámetros geométricos individuales definiendo un índice de calidad global de la vía, a través de la siguiente expresión.

$$TQI(coSD) = \sqrt{w_A * \sigma_A^2 + w_G * \sigma_G^2 + w_N * \sigma_N^2} \quad (33)$$

Dónde:

A es la alineación media de la alineación de ambos carriles.

G es el ancho de vía.

N es la nivelación transversal de los carriles.

$w_i$  es el coeficiente de ponderación del parámetro i definido por la administración ferroviaria.

coSD es composición de la desviación estándar.

### 4.3.2 Clases de calidad geométrica de la vía

Teniendo en cuenta su amplio uso en las redes ferroviarias europeas y la necesidad de contar con un solo índice de la calidad de la vía TQI fácilmente comprensible, se utiliza la desviación típica (SD) del nivel longitudinal y la alineación como método de referencia para describir la calidad geométrica de la vía. Se han realizado la distribución de calidad de vías europeas para cinco rangos diferentes de velocidad (km/h):

- $V \leq 80$
- $80 < V \leq 120$
- $120 < V \leq 160$
- $160 < V \leq 230$
- $230 < V \leq 300$

En cuanto a los valores límite del nivel longitudinal y la alineación para cada clase de calidad de la vía TQC y para cada rango de velocidad. Las siguientes tablas 19 y 20, se fundamentan las características de las vías europeas encuestadas por el Comité Europeo de Normalización. Tomando la desviación típica (SD) de los parámetros descritos como referencia para describir la calidad de la geometría de la vía.

Velocidad (en km/h)	Valor límite de la desviación típica (en mm)				
	Clase de calidad de la vía				
	A	B	C	D	E
$V \leq 80$	< 1,25	1,75	2,75	3,75	> 3,75
$80 < V \leq 120$	< 0,75	1,10	1,80	2,50	> 2,50
$120 < V \leq 160$	< 0,65	0,85	1,40	1,85	> 1,85
$160 < V \leq 230$	< 0,60	0,75	1,15	1,60	> 1,60
$230 < V \leq 300$	< 0,40	0,55	0,85	1,15	> 1,15
$V > 300$	No disponible	No disponible	No disponible	No disponible	No disponible
<p>{A1►} NOTA 1 Considerando que las velocidades superiores a 300 km/h, no se han tenido en cuenta en la encuesta, no se puede proporcionar ningún valor para este rango de velocidad.</p> <p>NOTA 2 Para velocidades superiores a 160 km/h se pueden considerar también las desviaciones típicas en una longitud de onda D2 (y D3) aunque los valores correspondientes todavía no se han definido. {◄A1}</p>					

Tabla 19. Nivel longitudinal, desviación típica, dominio D1

Velocidad (en km/h)	Valor límite de la desviación típica (en mm)				
	Clase de calidad de vía				
	A	B	C	D	E
$V \leq 80$	< 0,90	1,25	1,95	2,70	> 2,70
$80 < V \leq 120$	< 0,50	0,70	1,05	1,45	> 1,45
$120 < V \leq 160$	< 0,45	0,55	0,75	1,00	> 1,00
$160 < V \leq 230$	< 0,40	0,50	0,70	0,90	> 0,90
$230 < V \leq 300$	< 0,35	0,40	0,50	0,65	> 0,65
$V > 300$	No disponible	No disponible	No disponible	No disponible	No disponible
<p>{A1►} NOTA 1 Considerando que las velocidades superiores a 300 km/h, no se han tenido en cuenta en la encuesta, no se puede proporcionar ningún valor para este rango de velocidad.</p> <p>NOTA 2 Para velocidades superiores a 160 km/h se pueden considerar también las desviaciones típicas en una longitud de onda D2 (y D3) aunque los valores correspondientes todavía no se han definido. {◄A1}</p>					

Tabla 20. Alineación media, desviación típica, dominio D1

La definición de las clases de calidad de la vía TQC se basan en la distribución acumulada de la media ponderada de todas las redes europeas participantes. Las cinco TQC se definen como:

- Clase A: mejor 10% de la distribución de la calidad de las vías europeas
- Clase B: entre 10% y 30% de la distribución de la calidad de vías europeas
- Clase C: entre 30% y 70% de la distribución de la calidad de vías europeas
- Clase D: entre 70% y 90% de la distribución de la calidad de vías europeas
- Clase E: por encima del 90% de la distribución de la calidad de vías europeas, lo que representa el peor 10% de la distribución

Estas TQC de la A a E clasifican la calidad de la vía en orden decreciente para los cinco rangos de velocidad mencionados. Puesto que se hace por separado para la nivelación longitudinal y la alineación, da lugar a diferentes TQC para cada uno de los parámetros.

## 4.4 Comparación de resultados

Con el objeto de contrastar los resultados obtenidos, se optó por utilizar el informe técnico CEN/TR 16513 preparado por el Comité Técnico de Normalización CEN/TC 256 “Railway applications” cuya secretaría está a cargo de la Deutsches Institut für Normung (DIN).

CEN/TC 256 1/WG 28 “Railway applications/Infraestructre/Track geometry quality” llevó a cabo una encuesta sobre el TQI a través de red ferroviaria europea con el objeto de entender y definir las clases del TQI para la redacción de la norma europea EN 13848-6 [9].

La encuesta recabó datos de todas las líneas principales, vías principales en estaciones y desvíos aislados o grupo de desvíos que circulan a la velocidad de la línea. Se excluyeron todas las vías secundarias, vías de estación u otras vías menos importantes. La información comprende aproximadamente 60.000 km de vía.

La encuesta fue realizada para los cinco rangos de velocidades conforme con la serie EN 13848, que ya se puntualizó con antelación.

En la misma participaron administraciones de diferentes países: Austria, Bélgica, República Checa, Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Italia, Países Bajos, Portugal Suiza, Suecia y Reino Unido.

La distribución de la desviación estándar de la nivelación longitudinal y la alineación para cada uno de los rangos de velocidad se expone en las figuras 84 e 85 respectivamente.

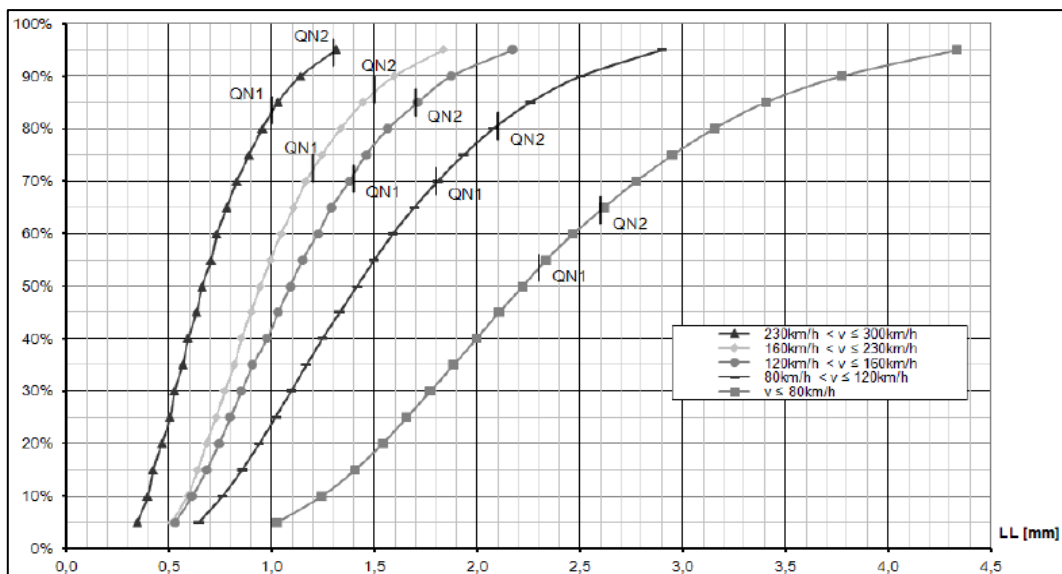


Figura 84 Resultado de la desviación estándar de la nivelación longitudinal

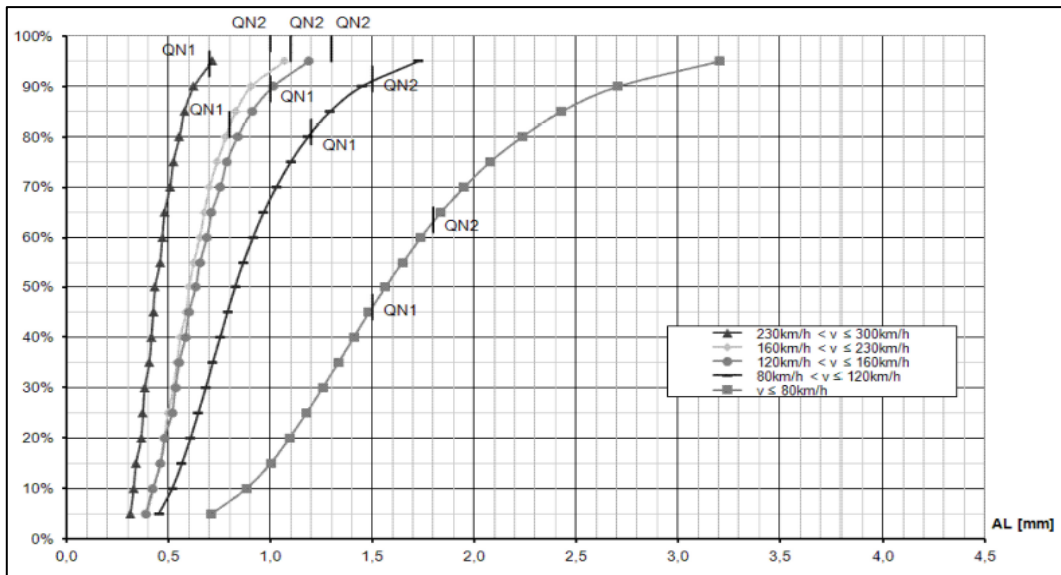


Figura 85 Resultado de la desviación estándar de la alineación

# 5 RESULTADOS

En base a lo explicado en el capítulo anterior se procederá a vislumbrar y analizar todos los resultados obtenidos para determinar la calidad de la vía. En primera instancia debemos analizar los resultados de los parámetros independientes para luego calcular el índice de calidad de la vía en función de la desviación estándar de los mismos.

## 5.1 Ancho de vía

En cuanto al ancho de vía, el ancho nominal no debe ser superado en un rango de  $-15 +50$  mm, considerándolo como un defecto máximo, en ese sentido en la siguiente gráfica podemos denotar la señal del ancho de vía limitado en líneas rojas segmentadas por la máxima diferencia admisible.

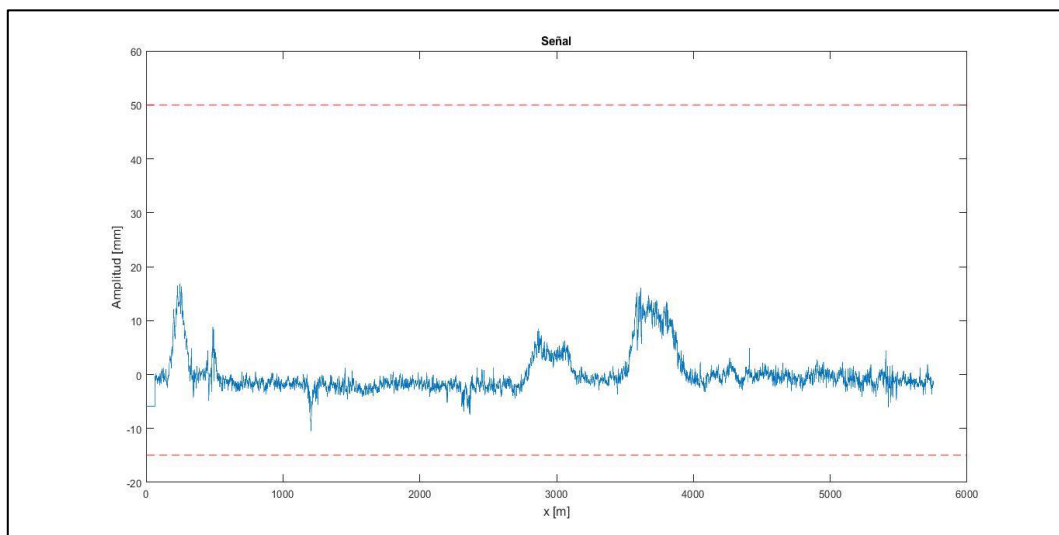


Figura 86 Caracterización geométrica del ancho de vía

Como se puede observar no existe ninguna sección en las cual el defecto de ancho de vía sea superior al rango admisible, llegando algunas muestras al inicio y en medio del trazado de la vía a alcanzar como máximo aproximadamente los 18 mm de desviación con relación al ancho de vía nominal. Por otro lado el valor de la desviación estándar es **3,63 mm**.

## 5.2 Alineación media

Por otra parte, para la alineación como se explicó con antelación lo primero que se hizo fue llevar la señal de la alineación al dominio de la frecuencia y posteriormente limitar en función de los rangos de longitud de onda para la clase D1, D2 y D3. Finalmente utilizar la transformada de Fourier inversa para retornar al dominio del espacio.

En la figura 87, se puede observar la señal de la alineación media en el dominio del espacio y la misma en el dominio de la frecuencia, en su espectro unilateral.

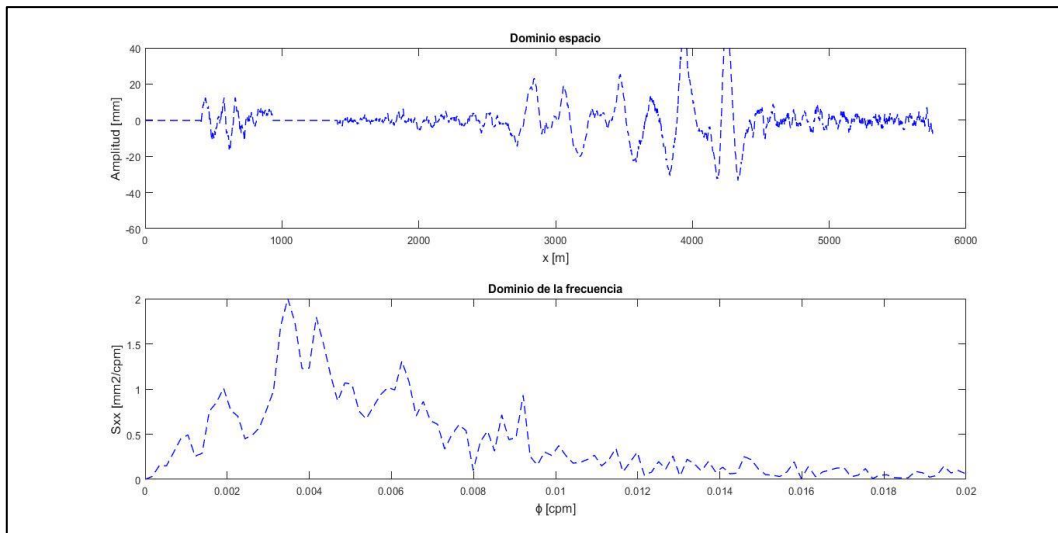


Figura 87 Alineación dominio del espacio y la frecuencia

Una vez filtrada la señal en el dominio de la frecuencia, para el rango D1 (longitud de onda entre 3 y 25 m), se puede observar que se suprimieron esos picos de gran amplitud presentes en la señal original, siendo la variabilidad de los datos con respecto a la media mínima, es decir, una desviación estándar de apenas **0,72 mm**, considerando la de la señal original de 9,99 mm.

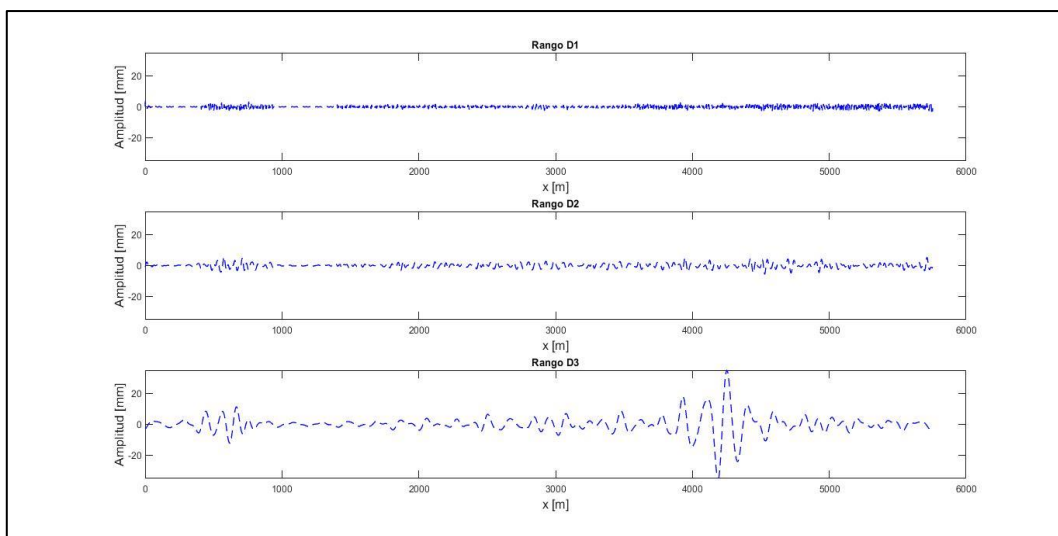


Figura 88 Alineación rango de longitud de onda D1, D2 y D3

Considerando la nota 2 de la tabla 20, para velocidades superiores a 160 km/h, se pueden considerar también las desviaciones típicas en una longitud de onda D2 y D3.

En ese sentido, en la misma figura 88, se puede observar el siguiente rango D2 ( $25 \text{ mm} < \lambda \leq 70 \text{ mm}$ ), que tiene una desviación estándar de **1,34 mm** ligeramente mayor que el rango D1.

En cuanto al rango D3 ( $70 \text{ mm} < \lambda \leq 200 \text{ mm}$ ), ya se observan algunos picos de mayor amplitud, siendo la desviación estándar de **5,85 mm**, mucho mayor que en el caso de los otros dos rangos, pero aun así menor que el de la señal original.



De acuerdo con lo dispuesto en la tabla 20, en función de la velocidad y el rango de la longitud de onda del parámetro de alineación media, se podría caracterizar la calidad de la vía.

En ese sentido para un rango D1 la calidad podría ser A cuando  $V \leq 80 \text{ km/h}$ , C cuando  $80 < V \leq 120 \text{ km/h}$  o D cuando  $120 < V \leq 160 \text{ km/h}$ , lo que significa que la vía se encuentra entre el 10% y el 90% de la distribución de la calidad de las vías europeas.

Con respecto a los rangos D2 y D3, la calidad de la vía sería E cuando la velocidad de la vía se encuentra entre  $160 < V \leq 230 \text{ km/h}$  y  $230 < V \leq 300 \text{ km/h}$  respectivamente, lo que significa que se trata del peor 10% de la distribución de la calidad de las vías europeas.

### 5.3 Nivelación longitudinal

La determinación de este parámetro es exactamente igual a la alineación, en este sentido en la siguiente imagen se vislumbra el parámetro tanto en el dominio del espacio como en el dominio de la frecuencia.

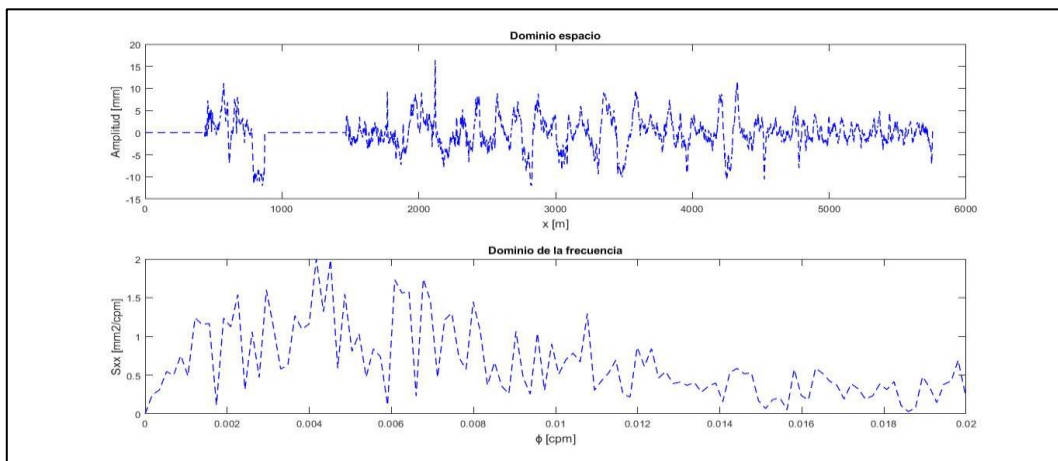


Figura 89 Nivelación dominio del espacio y la frecuencia

El rango de longitud de onda D1, luego de retornar al dominio del espacio la desviación estándar es de **0,81 mm**, bastante menor si se considera que el de la señal original es de 3,38 mm.

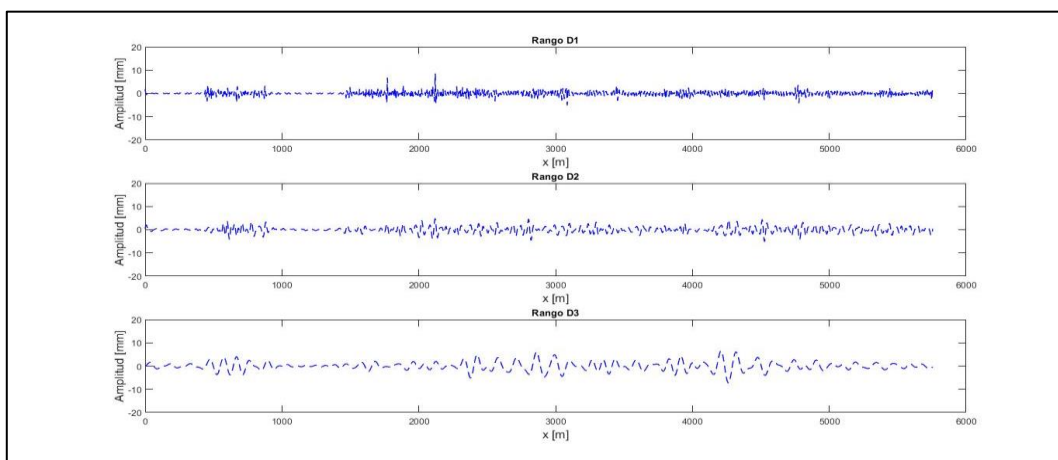


Figura 90 Nivelación rango de longitud de onda D1, D2 y D3

Al igual que para el otro parámetro consultamos la nota 2 de la tabla 19. Es así como para un rango de

longitud de onda D2 se obtiene una desviación estándar de **1,22 mm**, y es claro que los datos están más dispersos que el rango D1, como se observa en la figura 90.

Finalmente, la señal dentro del rango D3 ( $70 \text{ mm} < \lambda \leq 150 \text{ mm}$ ) tiene una desviación estándar de **1,83 mm**.

Si contrastamos los datos obtenidos con la dispuesto en tabla 19, en función de la nivelación longitudinal se podría caracterizar la vía, para un rango D1 como A cuando  $V \leq 80 \text{ km/h}$ , B cuando  $80 < V \leq 120 \text{ km/h}$  o C cuando  $120 < V \leq 160 \text{ km/h}$ , lo que significa que la vía se encuentra entre el 10% y el 70% de la distribución de la calidad de las vías europeas.

Para el rango D2 la calidad de la vía sería D que representa el 70% al 90% de la distribución de la calidad de las vías europeas, mientras que para el rango D3 la calidad de la vía sería E, es decir, el peor 10% de la distribución, considerando las mismas velocidades que se expusieron para la alineación media.

## 5.4 Índice de calidad TQI

Se considerará la desviación estándar de la señal en el dominio del espacio del rango de longitud de onda **D1**, **D2** y **D3** tanto para la alineación media como para la nivelación longitudinal. No se considerará el ancho de vía para poder contrastar los resultados con lo dispuesto en la normativa mencionada con antelación.

En cuanto a los coeficientes de ponderación, como se mencionó previamente están definidos por la administración de la infraestructura, no obstante, para un tramo de prueba se puede asumir un  $w_i$  igual a 0,25 referenciado en [10], criterio que se utilizará en el presente trabajo.

Con estas definiciones el valor de TQI para un rango de longitud de onda D1 es **0,54 mm** considerando vías de velocidad de entre 80 y 160 km/h.

Para contrastar dicho resultado, se utilizó la distribución de la desviación estándar de la nivelación longitudinal y de la alineación, figuras 84 y 85, dispuestos en el informe técnico CEN/TR 16513, para calcular la desviación estándar combinada (CoSD), utilizando los mismos coeficientes de ponderación asumidos previamente. Con estos preceptos los resultados obtenidos para el rango de longitud de onda D1 se reflejan en la figura 91.

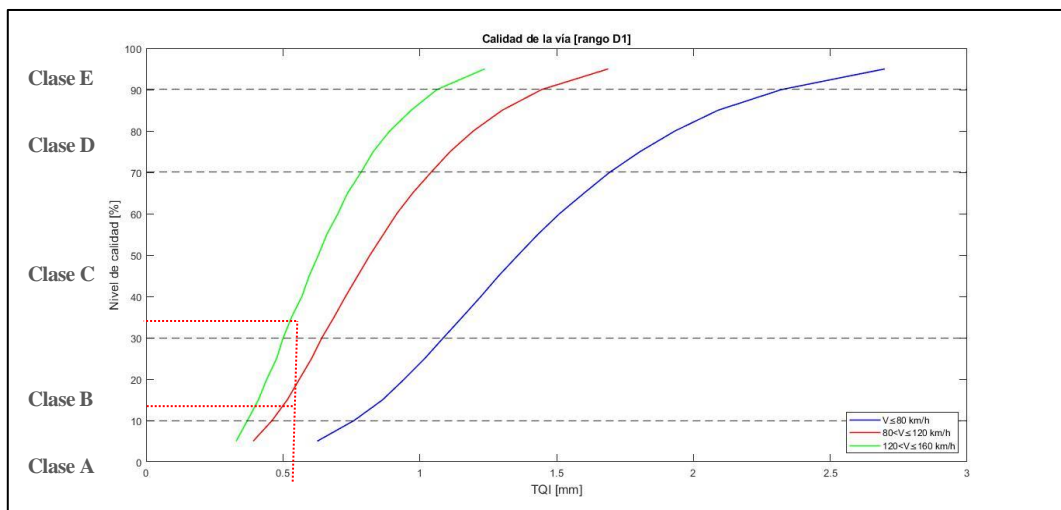


Figura 91 Desviación estándar de la distribución de calidad de las vías europeas (D1)

Como se puede observar para velocidades menores a 80 km/h no se puede realizar la caracterización, por otro lado, para velocidades de entre 80 y 120 km/h la calidad de la vía se clasifica como clase B, mientras que para velocidades de entre 120 y 160 km/h se clasifica como clase C.

Asimismo, para el rango D2 el valor del TQI es **0,91 mm** considerando vías de velocidad de entre 160 y 230 km/h, siendo así que de acuerdo con los resultados la calidad de la vía es de clase D como se vislumbra a continuación:

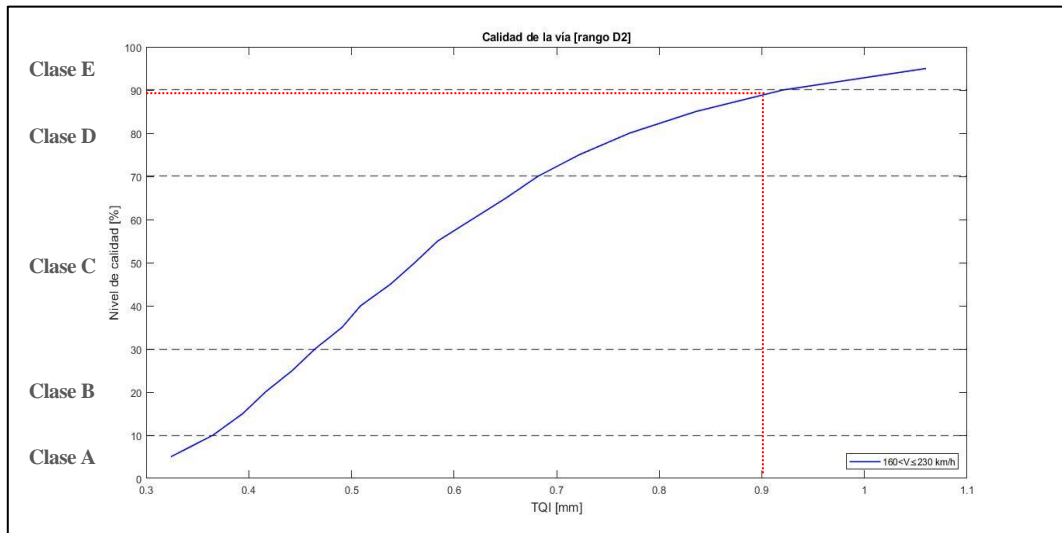


Figura 92 Desviación estándar de la distribución de calidad de las vías europeas (D2)

Mientras que para el rango D3 es cuyo valor del TQI es de **3,10 mm** considerando vías de velocidad superior a 230 km/h, no es posible categorizar la calidad de la vía de acuerdo con la distribución de calidad de las vías europeas encuestadas en el informe técnico mencionado previamente, no obstante, puesto que la distribución tiene un comportamiento monótono creciente se podría suponer que la calidad de la vía es de clase E.

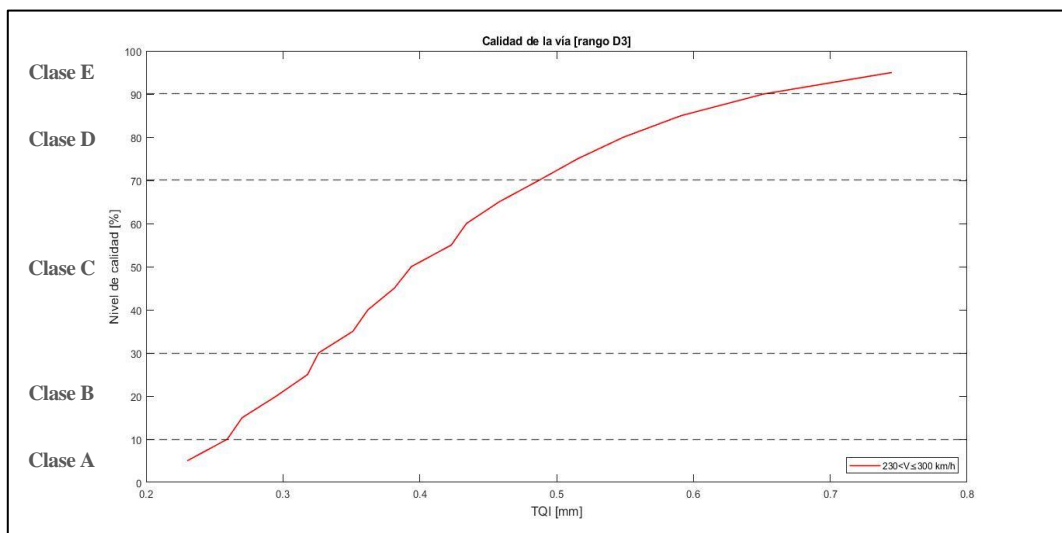


Figura 93 Desviación estándar de la distribución de calidad de las vías europeas (D3)

## 5.5 Análisis de resultados

Tanto la caracterización realizada a través de la desviación estándar independiente de la alineación y nivelación longitudinal como el método combinado (CoSD) tienen resultados similares, siendo categoría A, B o C dependiendo de la velocidad de la vía para un rango de longitud de onda D1, categoría D para un rango de longitud de onda D2 y categoría E para un rango de longitud de onda D3.

Si se considera el rango de longitud de onda D1, una clase A significa que la vía se encuentra dentro del 10% de la distribución de la calidad de las vías europeas o una clase B que la vía se encuentra entre 10% al 30%, sería un resultado cuanto menos cuestionable, debido a que los métodos de caracterización solo tomaron en cuenta parámetros como la alineación o nivelación longitudinal, y por lo que se ha visto a lo largo del trabajo, la variabilidad de las señales en otros parámetros como el alabeo era muy alta pues la dispersión de la nube de datos era evidente.

Situación que fue corroborada cuando se calculó el coeficiente de correlación, pues debido al valor de la desviación estándar, en principio se tuvo que analizar la señal en segmentos finitos de longitud de 25 m y solo se alcanzó una correlación de al menos el 60 % para un desfase de 2 m, siendo incluso necesario reducir el desfase asumido para alcanzar una correlación admisible en algunos parámetros como la alineación o la nivelación longitudinal de los carriles.

No obstante, si tomamos en cuenta un rango de longitud de onda D2 o D3, la categoría de la vía es D y E respectivamente, siendo más acordes con los resultados obtenidos a lo largo del presente trabajo.

# 6 CONCLUSIONES

---

A lo largo de este Trabajo Fin de Máster, se ha realizado una revisión bibliográfica sobre el análisis y tratamiento de señales en el dominio del espacio y la frecuencia, tomando conciencia de la preponderancia de herramientas estadísticas como la función de correlación y la función de densidad espectral para la caracterización geométrica de vías.

Considerando las características intrínsecas de las señales, la nivelación longitudinal del carril derecho es en la cual las observaciones se encuentran más dispersas, es decir, mayor variabilidad pues la desviación típica es igual a 7,31 mm, siendo el valor máximo 21,02 mm y el mínimo 30,25 mm con la media de la señal posicionada en el origen.

Al aplicar la función de autocorrelación en las señales de los parámetros auscultados, el alabeo tanto a 3 m como a 6 m alcanza un coeficiente de correlación admisible del 60% con apenas un desfase de 3,75 m. Otro caso crítico es el de la nivelación longitudinal del carril izquierdo y del derecho, pues cuando se supera un desfase de 13,5 m no se logra una correlación admisible.

Es así, que se decidió analizar las señales en segmentos finitos ( $L$ ) de 25 m y limitar el desfase ( $\chi_{\min}$ ) hasta 2 m para garantizar un coeficiente de correlación admisible (60%). Con estos preceptos se obtuvieron en general resultados satisfactorios, con excepción del alabeo a 3 m, en el cual debido a la variabilidad de las muestras de la señal, aproximadamente el 50% de los datos no alcanzaron la correlación admisible. Siendo entonces necesario decrementar más aun el desfase, cuestión que no tiene sentido pues ya se toma un valor muy pequeño que funciona para el resto de los parámetros.

Por otro lado, si analizamos los resultados de la función de correlación cruzada, prácticamente todos los casos de estudio tienen una correlación débil. De hecho un caso curioso, por tener un mismo orden de magnitud, podría ser el de la nivelación longitudinal del carril derecho e izquierdo, el cual alcanza una correlación de 0,89 cuando el desfase es cero, sin embargo, el valor de correlación media es está en torno a 0,1 y -0,1. El caso más crítico es del ancho de vía y perfil vertical, pues la correlación máxima es de 0,09 con un desfase de 2094,25 m, y un valor medio de correlación entre 0,06 a - 0,06.

Asimismo, en cuanto a la densidad espectral de la función de correlación, considerando una frecuencia de muestreo ( $\varphi$ ) de 4 cpm, la nivelación longitudinal del carril izquierdo es la que cuenta con más frecuencias dominantes de 0,016 y 0,00145 cpm e incluso una banda de frecuencias subdominantes de entre 0,009 y 0,016 cpm. De la misma forma se obtuvo la densidad espectral de la función de correlación cruzada, siendo el caso más destacable el de la nivelación longitudinal del carril izquierdo y derecho con dos frecuencias dominantes de 0,016 y 0,014 cpm.

En cuanto a la caracterización geométrica de la vía, se emplearon las normas desarrolladas por la Asociación Española de Normalización y Certificación, UNE-EN 13848-1 y UNE-EN 13848-6. Es así como con respecto al ancho de vía los valores de la muestra se encuentran dentro de los límites establecidos de  $-15 + 50$  mm.

En cuanto a la alineación y nivelación de la vía se realizó un filtro en función de las clases de longitud de onda D1, D2 y D3 establecidas en normativa. Para el primer parámetro, en función del valor de la desviación estándar de la señal resultante, se obtuvo que para un rango D1 la calidad de la vía podría ser A, C o D en función de la velocidad, lo que significa que se encuentra entre el 10 al 90% de la distribución de las vías europeas.

Para rangos D2 y D3 la calidad de la vía sería E, lo que significa que se trata del peor 10% de la distribución de la calidad de las vías europeas.

Para el segundo parámetro, el rango D1 establece que la calidad de la vía sería A o C, es decir entre el 10 y 70% de la distribución de la calidad de las vías europeas. Para el rango D2 la calidad de la vía sería D que representa entre el 70 al 90% de la distribución y finalmente para un rango D3 sería al igual que para la alineación clase E.

Análogamente, una vez calculado el índice de calidad (TQI), a través del método de desviación combinada (CoSD), para un rango D1, la calidad de la vía sería B o C en función de la velocidad. Para el rango D2 la calidad de la vía sería clase D, mientras que para el rango D3 sería clase E.

Conforme a los resultados obtenidos, es difícil pensar que la calidad de la vía estudiada puede encontrarse dentro de una clase A, B o C, esto en función de la variabilidad de las muestras auscultadas y de la limitada correlación en todos los tramos, entendiéndose que probablemente la vía no ha sido mantenida con respecto a las propiedades geométricas analizadas, o que tal vez ha sido emplazada para salvar un entorno accidentado a través de un diseño geométrico algo sinuoso. Puesto que la categoría E implica que la vía debería ser de alta velocidad y que éstas se han empezado a implementar en Europa y resto del mundo recién a partir de los años 90 expuesto en [11], podríamos desestimar esta alternativa. Por lo tanto parece más evidente que la calidad de la vía sería D para velocidades de vía convencionales (160 km/h a 230km/h) lo que implicaría que la vía analizada se encuentra entre el 70 al 90% de la distribución del resto de las vías europeas.

Finalmente, en cuanto a desarrollos futuros sería interesante profundizar en el índice de calidad de la vía (TQI), pues existe una diversidad modelos matemáticos que engloban diferentes parámetros los cuales varían unos de otros en función de la administración, e intentar unificar un criterio.

# 7 BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] M. P. -. Y. H. Kim, *Structural Dynamics*, Springer, 2004.
- [2] B. P. Lathi, *Signals, Systems and Communications*, John Wiley & Sons, 1965.
- [3] D. Newland, *An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis*, Mineola, New York: Dover Publications, 1993.
- [4] MathWorks, «Mathworks.com,» The MathWorks, inc., 1994-2003. [En línea]. Available: <https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/xcorr.html>.
- [5] MathWorks, «Matchworks.com,» The MathWorks, Inc., 1994-2003. [En línea]. Available: <https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html>.
- [6] A. d. I. F. (Adif), *Parámetros de geometría de la vía NAV 3-0-5.2*, Comité de normativa, 2020.
- [7] CETREN, *UNE-EN-13848-1Aplicaciones ferroviarias vía. Calidad geométrica de la vía. Parte 1: Caracterización geométrica de la vía*, AENOR, 2020.
- [8] CETREN, *UNE-EN 13848-6:2014+A1 Aplicaciones ferroviarias vías. Calidad geométrica de la vía. Parte 6: Caracterización de la calidad geométrica de la vía*, AENOR, 2021.
- [9] T. c. C. 256, *Technical report: Railways applications - Track - Survey of track geometry quality*, European committee for standarization, 2014.
- [10] J. N. P. V. a. M. L. Stefan Offenbacher, «Analyzing major track quality indices and introducing universally applicable TQI,» *Institute of railway engineering and transport economy, Graz University of Technology*, 2020.
- [11] D. Scordamaglia, *High-speed rail in the EU*, European parliamentary research service, 2015.

# **ANEXOS**



# **ANEXO 1**

## 1. Descripción estadística

La señal o función se puede clasificar de la siguiente manera:

- Periódica
  - Armónicas
  - No armónica
- Aperiódica
  - Determinista
  - Aleatoria
    - No estacionaria
    - Estacionaria

En ese sentido una función aleatoria es aquella cuyos valores instantáneos no pueden ser predichos en un sentido determinista, es decir, que la función no puede ser determinada por una ley de causalidad matemática.

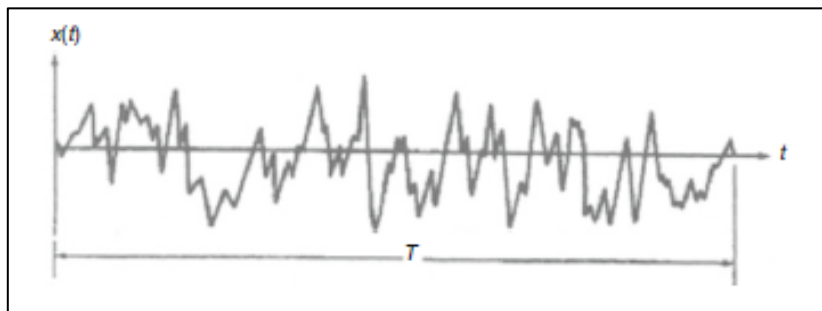


Figura A. 1 Señal aleatoria en el dominio del tiempo

En cualquier método estadístico es necesario un gran número de muestras para describir un comportamiento aleatorio, ahora bien, las señales se refieren a cada registro y varios registros forman un conjunto de señales. Si cogemos un intervalo hasta un valor  $x_i$  en el dominio del espacio o  $t_i$  en el dominio del tiempo, la esperanza matemática de las amplitudes no debe diferir si seleccionamos otro valor de  $x_i$  o  $t_i$  en ese momento el proceso aleatorio se define como estacionario.

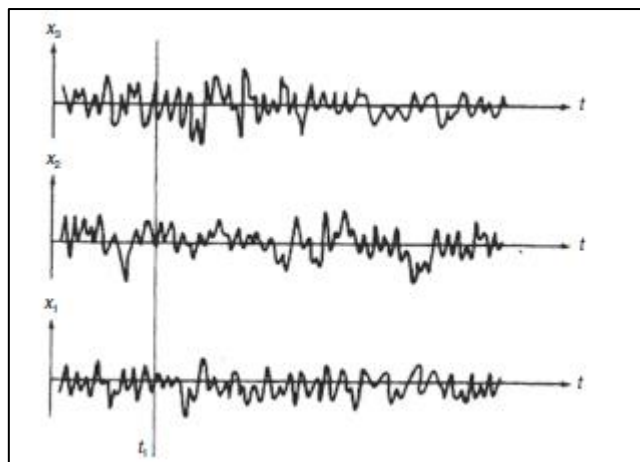


Figura A. 2 Conjunto de funciones aleatorias en el dominio del tiempo

Además, si la esperanza matemática obtenida para cualquier señal miembro del conjunto es igual a esperanza matemática del conjunto, de modo que sus propiedades estadísticas pueden definirse a partir de una única muestra aleatoria, la señal es ergódica.

## 2. Correlación de señales

Las señales pueden compararse cuantitativamente con respecto a la cantidad de amplitudes iguales que contengan una de otra y viceversa.

Entonces dadas dos señales  $Z_1(x)$  y  $Z_2(x)$ , una se puede aproximar en términos de la otra para un cierto intervalo de longitud  $[x_1 < x < x_2]$ , denotando la siguiente expresión:

$$Z_1(x) \approx C_{12} * Z_2(x)$$

Dónde  $C_{12}$  sería una matriz constante de dimensiones  $[x_1 \ x_2] \times [x_1 \ x_2]$ . Para conseguir una adecuada aproximación se pueden seguir múltiples criterios como los que se denotan a continuación:

- Minimización del error
- Valor cuadrático medio
- Función de correlación

### 2.1. Minimización del error

Para utilizar este criterio se debe definir primeramente la función error  $Z_e(x)$ , la cual se expresa a partir de la siguiente ecuación:

$$Z_e(x) \approx Z_1(x) - C_{12} * Z_2(x)$$

El error mínimo, en un intervalo  $[x_1 < x < x_2]$ , se obtiene a través de la siguiente ecuación:

$$e = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [Z_1(x) - C_{12} * Z_2(x)] dx$$

Sin embargo, este criterio no puede ser generalizado para funciones que tengan valores iguales a cero dentro de este intervalo de integración, puesto que para estas funciones la ecuación es igual a cero.

### 2.2. Valor cuadrático medio

Este criterio consiste en elegir el mínimo valor cuadrático medio, en función de las siguientes expresiones:

$$e^2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [Z_1(x) - C_{12} * Z_2(x)]^2 dx$$

Se podrá ahora determinar el valor de  $C_{12}$  para que el error sea mínimo, como se desarrolla a continuación:

$$\frac{de^2}{dC_{12}} = 0$$

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [Z_1(x) - C_{12} * Z_2(x)]^2 dx \right\} = 0$$

$$\frac{-2}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} Z_1(x) * Z_2(x) dx + \frac{2C_{12}}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} Z_2(x)^2 dx = 0$$

$$C_{12} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} Z_1(x) * Z_2(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} Z_2(x)^2 dx}$$

El numerador, es fundamental para indicar el grado de similitud entre dos funciones, si se diese el caso de que esta integral sea nula, tal que,  $\int_{x_1}^{x_2} Z_1(x) * Z_2(x) dx \equiv 0$ . Se podría aseverar que no existe relación entre las funciones  $Z_1(x)$  y  $Z_2(x)$ , para este intervalo determinado.

El inconveniente es que este método no toma en cuenta el desplazamiento que una puede tener sobre la otra, es decir, que no reconoce la relación entre dos funciones desplazadas cierta longitud, aunque ambas sean idénticas.

### 2.3. Función de Correlación

Es un método que relaciona dos señales para cualquier tipo de función, suponiendo una posible traslación.

En ese caso, si queremos expresar una función aproximada de relación entre dos señales llámense  $x$  e  $y$ , que se ajusten a una recta la única manera de hacerlo es minimizar la desviación de los valores de  $y$  de los predichos por la recta:

$$E[x] = E[y] = 0$$

Suponiendo que la recta trazada pase por el origen, se podría escribir entonces:

$$y = m * x$$

La desviación entonces de cualquier valor de  $y$  se expresa a través de:

$$\Delta = y - m * x$$

Y el valor promedio de cuadrado de la desviación es:

$$E[\Delta^2] = E[(y - m * x)^2] = E[y^2] + m^2 * E[x^2] - 2m * E[x * y]$$

El cual es mínimo cuando, lo derivamos con respecto a  $m$ :

$$0 = +2m * E[x^2] - 2 * E[x * y] \quad \rightarrow \quad m = \frac{E[x * y]}{E[x^2]}$$

Sustituyendo la pendiente en la ecuación de la recta, queda entonces como:

$$y = \frac{E[x * y]}{E[x^2]} * x$$

Si sustituimos el valor de la varianza entonces obtenemos finalmente la ecuación de la recta para una regresión de y en x.

$$\frac{y}{\sigma_y} = \frac{E[x * y]}{\sigma_y * \sigma_x} * \frac{x}{\sigma_x}$$

Para un caso más general donde x e y no empiecen en el origen, como asumimos previamente, entonces la ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \frac{E[(x - m_x) * (y - m_y)]}{\sigma_y * \sigma_x} * \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

Donde  $m_x$  y  $m_y$  son valores medios de x e y respectivamente.

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x - m_x) * (y - m_y)]}{\sigma_y * \sigma_x}$$

Este parámetro es llamado coeficiente de correlación o covarianza normalizada y representa la linealidad, si  $\rho_{xy} = \pm 1$  significa una perfecta correlación, mientras que si  $\rho_{xy} = 0$  quiere decir que no hay correlación.

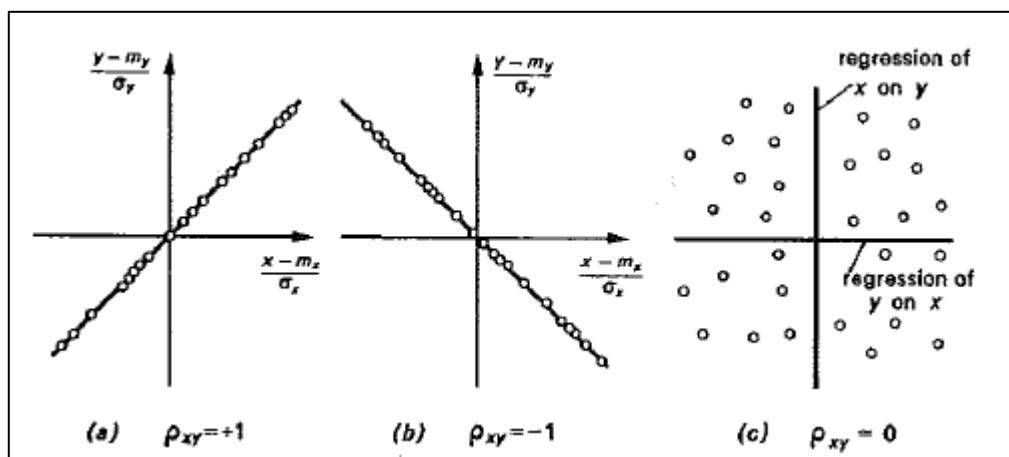


Figura A. 3 Regresión lineal para diferentes coeficientes de correlación

### 2.3.1. Función de autocorrelación

Al tratarse de un proceso estacionario algunas de las propiedades más relevantes de la función de autocorrelación se exponen a continuación:

#### Simetría hermítica de la función de autocorrelación

La función de autocorrelación presenta simetría hermítica, es decir que  $R_Z(\chi) = R_Z'(-\chi)$

$$R_Z(\chi) = E[z(x + \chi) * z'(x)]$$

$$R_Z'(\chi) = E[z'(x + \chi) * z(x)]$$

$$R_Z'(-\chi) = E[z'(x + \chi) * z(x)] = R_Z(\chi)$$

Si el proceso es real, es decir que  $z(x) = z'(x)$ , entonces la función de autocorrelación es también real y por lo tanto tendrá simetría par:  $R_Z(\chi) = R_Z(-\chi)$

### Máximo en el origen

La función de autocorrelación presenta un máximo en el origen:  $R_Z(\chi) < R_Z(0)$ . Si partimos del hecho de que la potencia de un producto es siempre positiva y se aplican a procesos  $z_1(x) = y(x + \chi) + y(x)$  e  $z_2(x) = y(x + \chi) - y(x)$ :

$$R_Z(0) = E[z(x)^2] > 0$$

$$E[(y(x + \chi) \pm y(x))(y(x + \chi) \pm y(x))] > 0$$

$$E[|y(x + \chi)|^2] + E[|y(x)|^2] \pm E[y(x) * y(x + \chi)] \pm E[y(x + \chi) * y(x)] > 0$$

$$2(R_Z(0)) \pm R_Z(\chi) > 0$$

De forma que:

$$R_Z(0) > |R_Z(\chi)|$$

### Otras propiedades

Asimismo, al tratarse de un proceso estacionario significa que la esperanza matemática y la desviación típica no dependen de  $x$ , por lo que:

$$E[z(x)] = E[z(x + \chi)] = m$$

$$\sigma_{z(x)} = \sigma_{z(x+\chi)} = \sigma$$

Y el coeficiente de correlación para  $z(x)$  y  $z(x + \chi)$ , está definida por:

$$\rho = \frac{E[(z(x) - m) * (z(x + \chi) - m)]}{\sigma^2}$$

En este contexto,  $R_Z(\chi) = \sigma^2 * \rho + m^2$ , y limitando el valor de  $\rho$  a  $\pm 1$ , significa que:

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_Z(\chi) \leq \sigma^2 + m^2$$

Por tanto, el valor de la autocorrelación nunca puede ser mayor que la esperanza matemática cuadrática del valor  $E[x^2] = \sigma^2 + m^2$  y nunca puede ser menor que  $-\sigma^2 + m^2$ .

Cuando el desplazamiento  $\chi$  es cero entonces es igual al valor medio cuadrático del proceso  $R_Z(0) = E[z^2]$ .

Finalmente, cuando el desplazamiento es muy grande,  $\chi \rightarrow \infty$ , en un proceso aleatorio no habrá una correlación entre dos valores  $z(x)$  y  $z(x + \chi)$  y por lo tanto el coeficiente de correlación será cero. En este caso  $R_Z(\chi \rightarrow \infty) \rightarrow m^2$ .

### 2.3.2. Función de correlación cruzada

La función de correlación cruzada entre dos diferentes señales aleatorias estacionarias en el dominio del espacio  $z(x)$  e  $y(x)$  vendrían definidas de la siguiente manera:

$$R_{zy}(\chi) = E[z(x) * y(x + \chi)]$$

y

$$R_{yz}(\chi) = E[y(x) * z(x + \chi)]$$

De la misma manera que en el caso anterior al ser un proceso estacionario, se procedería de la misma manera:

$$R_{zy}(\chi) = E[z(x) * y(x + \chi)] = R_{yz}(-\chi)$$

y

$$R_{yz}(\chi) = E[y(x) * z(x + \chi)] = R_{zy}(-\chi)$$

Sin embargo, en general  $R_{zy}(\chi) \neq R_{yz}(\chi)$ , a diferencia de lo que ocurría en la función de autocorrelación.

Asimismo, la función de correlación puede escribirse en términos de la covarianza normalizada  $\rho$ , de la siguiente forma:

$$R_{zy}(\chi) = \sigma_z * \sigma_y * \rho_{zy}(\chi) + m_z m_y$$

y

$$R_{yz}(\chi) = \sigma_y * \sigma_z * \rho_{yz}(\chi) + m_y m_z$$

Al igual que en el caso de la autocorrelación, al ser el valor de  $\rho$  igual a  $\pm 1$ , los límites de la función de correlación cruzada deben ser  $\pm \sigma_z \sigma_y + m_z m_y$ , por lo que estaría truncada entre:

$$-\sigma_z \sigma_y + m_z m_y \leq R_{zy}(\chi) \leq \sigma_z \sigma_y + m_z m_y$$

Para un proceso aleatorio en el que esperemos que la correlación entre  $z$  e  $y$  sea nula, es decir cuando el desplazamiento  $\chi$ , sea muy grande, podríamos aproximarla función a:

$$R_{zy}(\chi \rightarrow \infty) \rightarrow m_z m_y$$

$$R_{yz}(\chi \rightarrow \infty) \rightarrow m_y m_z$$

### 3. Densidad espectral

Utilizamos los coeficientes de las series de Fourier si nos referimos a un proceso periódico o en términos de la transformada de Fourier si se trata de una función no periódica.

### 3.1. Series de Fourier

Comenzando por el análisis espectral de una función periódica  $z(x)$  siempre se puede expresar como una serie trigonométrica infinita de Fourier:

$$z(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kx}{\lambda} + a_k \sin \frac{2\pi kx}{\lambda} \right)$$

Dónde  $a_0$ ,  $a_k$  y  $b_k$  son las constantes de Fourier dadas por:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) dx$$

$$a_k = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) \cos \frac{2\pi kx}{\lambda} dx$$

$$b_k = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) \sin \frac{2\pi kx}{\lambda} dx$$

Dónde  $\lambda$  es el periodo espacial o longitud de onda, cuya relación con la frecuencia espacial del armónico  $\phi_k$  se da a partir de:

$$\phi_k = \frac{2\pi k}{\lambda}$$

Cuyas unidades son ciclos por unidad de longitud, y dónde el espacio entre armónicos estaría dado por  $\Delta\phi$ .

Si reemplazamos los coeficientes en la notación compacta de las series de Fourier, para  $a_0 = 0$ , obtenemos:

$$z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) \cos \frac{2\pi kx}{\lambda} dx \right\} \cos \frac{2\pi kx}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) \sin \frac{2\pi kx}{\lambda} dx \right\} \sin \frac{2\pi kx}{\lambda}$$

Si ahora lo expresamos en términos de frecuencia, nos da como resultado:

$$z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\phi}{\pi} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) \cos \phi_k x dx \right\} \cos \phi_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\phi}{\pi} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} z(x) \sin \phi_k x dx \right\} \sin \phi_k x$$

Cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$  y la sumatoria se expresa como una integral con límites en 0 e  $\infty$ . En este caso:

$$z(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cos \phi x dx \right\} \cos \phi x + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \sin \phi x dx \right\} \sin \phi x$$



Para simplificar:

$$A(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cos \phi x \, dx$$

$$B(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \sin \phi x \, dx$$

Resultando entonces:

$$z(x) = 2 \int_0^{\infty} A(\phi) \cos \phi x \, d\phi + 2 \int_0^{\infty} B(\phi) \sin \phi x \, d\phi$$

Los términos  $A(\phi)$  y  $B(\phi)$  son los componentes de la transformada de Fourier y la expresión conocida como integral de Fourier. Aunque para aplicaciones ingenieriles debemos tomar en cuenta la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(x) \, dx < \infty$$

### 3.2. Transformada de Fourier

En el caso de señales aleatorias podríamos escribir la integral de Fourier en su forma compleja, de la siguiente manera:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Definiendo  $z(x)$  como:

$$z(\phi) = A(\phi) + i B(\phi)$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos la expresión expuesta a continuación:

$$z(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) (\cos \phi x - i \sin \phi x) \, dx$$

$$z(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-i\phi x} \, dx$$

Esta ecuación definición formal de  $z(x)$  y es conocida como la **transformada de Fourier** de  $z(x)$ .

Podemos notar que  $A(\phi)$  es una función par y  $B(\phi)$  una función impar, es decir que si cambiamos el signo de  $\phi$ ,  $A(\phi)$  se mantiene, pero  $B(\phi)$  cambia de signo. Por lo que se deduce que  $A(\phi) \cos \phi x$  y  $B(\phi) \sin \phi x$  son funciones pares de  $\phi$  y ambas se mantiene iguales cuando el signo de  $\phi$  cambia. Entonces la ecuación integral de Fourier equivalente podría ser escrita como:

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\phi) \cos \phi x \, d\phi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\phi) \sin \phi x \, d\phi$$

Dónde las integrales ahora van desde  $-\infty$  a  $\infty$  en lugar de 0 a  $\infty$ , y además nos deshacemos del coeficiente 2. La idea de considerar una frecuencia negativa es un artificio matemático que nos ayuda a simplificar la ecuación. Ahora si  $A(\phi)$  es una función par y  $\sin \phi x$  es una función impar de  $\phi$ ,  $A(\phi) \sin \phi x$  es una función impar y, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\phi) \sin \phi x d\phi = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\phi) \cos \phi x d\phi = 0$$

Adicionando estas integrales a la ecuación compacta encontrada previamente, puesto que estas no modificarán el valor de  $z(x)$ , resulta:

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\phi) \cos \phi x d\phi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\phi) \sin \phi x d\phi + i \int_{-\infty}^{\infty} A(\phi) \sin \phi x d\phi - i \int_{-\infty}^{\infty} B(\phi) \cos \phi x d\phi$$

Si agrupamos los términos obtenemos finalmente:

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\phi) + i B(\phi)\} \{\cos \phi x - i \sin \phi x\} d\phi$$

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\phi) e^{i\phi x} d\phi$$

Siendo esta última ecuación, la que se conoce como la **antitransformada de Fourier**.

### 3.3. Función de densidad espectral

El contenido en frecuencia de un proceso aleatorio no puede ser representado por una serie discreta de Fourier. De hecho, para un proceso estacionario  $z(x)$ , no se satisface la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(x) dx < \infty$$

Así que el análisis clásico de Fourier no es aplicable para este caso, sin embargo, esta dificultad puede ser superada si se analiza la función de autocorrelación  $R_z(\chi)$ .

Esto se debe a que la función de autocorrelación proporciona información acerca de las frecuencias presentes en un proceso aleatorio indirectamente, ya que  $R_z(\chi)$  tiene un valor máximo para valores de  $\chi$  para los cuales  $z(x)$  y  $z(x + \chi)$  están en fase y el mínimo para valores de  $\chi$  los cuales están en antifase, y estas frecuencias quedan claras si graficamos  $R_z(\chi)$  frente al desplazamiento  $\chi$  para un proceso aleatorio  $z(x)$ .

Si el valor cero del proceso aleatorio  $z(x)$  es normalizado tal que la esperanza matemática del proceso  $m = E[x]$  es cero, entonces siempre que la señal  $z(x)$  tenga componentes aperiódicas  $R_z(\chi \rightarrow \infty) = 0$  y la condición se satisface.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_z(\chi)| d\chi < \infty$$

Entonces se puede aplicar la transformada de Fourier a la autocorrelación  $R_z(\chi)$  y viceversa, dadas por las siguientes expresiones:

$$S_z(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\chi) e^{-i\phi\chi} d\chi$$

$$R_z(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\phi) e^{i\phi\chi} d\phi$$

Dónde  $S_z(\phi)$  es la densidad autoespectral del proceso  $z(x)$  y su función de frecuencia espacial  $\phi$ . Siendo su propiedad más importante que cuando ponemos  $\chi = 0$ , la ecuación se transforma de la siguiente manera:

$$R_z(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\phi) d\phi$$

En este caso, de la definición fundamental de  $R_z(\chi)$ , se deduce que:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\phi) d\phi$$

Entonces el valor medio cuadrático de un proceso estacionario aleatorio  $z(x)$  esta dada por el área bajo la curva de densidad espectral  $S_z(\phi)$  frente a  $\phi$ . Las unidades de  $S_z(\phi)$  están acorde a (esperanza matemática cuadrática/unidad de frecuencia).

Como vimos con antelación la transformada Fourier compleja se puede expresar en términos de una parte real e imaginaria. En este caso tenemos:

$$S_z(\phi) = A(\phi) + i B(\phi)$$

Dónde:

$$A(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\chi) \cos \phi\chi d\chi$$

y

$$B(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\chi) \sin \phi\chi d\chi$$

Como  $R_z(\chi)$  es una función par de  $\chi$  mientras  $\sin \phi\chi$  es una función impar, entonces el producto  $R_z(\chi) \sin \phi\chi$  es una función impar y así la integral de  $-\infty$  a 0 es exactamente igual y opuesta a la integral de 0 a  $\infty$ . Por lo tanto  $B(\phi)$  es cero y  $A(\phi)$  es una función par de  $\phi$ .

$$S_z(\phi) = A(\phi)$$

En resumen, la esperanza matemática cuadrática de densidad espectral de un proceso aleatorio estacionario  $z(x)$  es real, par y siempre positivo.

### 3.4. Densidad espectral cruzada

De la misma manera como el caso anterior, la densidad espectral cruzada de un par de procesos aleatorios están definidos como la transformada de Fourier de la función de correlación cruzada. Por tanto, si  $R_{zy}(\chi)$  y  $R_{yz}(\chi)$  son las funciones correlación cruzada tenemos:

$$S_{zy}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{zy}(\chi) e^{-i\phi\chi} d\chi$$

Y

$$S_{yz}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yz}(\chi) e^{-i\phi\chi} d\chi$$

Y la antitransformada de Fourier viene dada por:

$$R_{zy}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zy}(\phi) e^{i\phi\chi} d\phi$$

Y

$$R_{yz}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yz}(\phi) e^{i\phi\chi} d\phi$$

De acuerdo con la teoría clásica de la transformada de Fourier, se debe dar cumplimiento a la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{zy}(\chi)| d\chi < \infty$$

En el caso de la correlación cruzada, una de las propiedades es que  $R_{zy}(\chi) = R_{yz}(-\chi)$ , de la misma manera existe una relación en la densidad espectral cruzada.

$$S_{zy}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{zy}(-\chi) e^{-i\phi\chi} d\chi$$

Si aplicamos un cambio de variable  $\chi' = -\chi$

$$S_{zy}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} R_{zy}(\chi') e^{i\phi\chi'} (-d\chi') = S_{zy}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{zy}(\chi') e^{i\phi\chi'} d\chi'$$

Es igual excepto por el signo de  $i\phi$  que ha cambiado. Entonces si escribimos la ecuación como:

$$S_{zy}(\phi) = A(\phi) - i B(\phi)$$

$$S_{yz}(\phi) = C(\phi) - i D(\phi)$$

Dónde  $A(\emptyset)$ ,  $B(\emptyset)$ ,  $C(\emptyset)$  y  $D(\emptyset)$  son funciones reales de  $\emptyset$ , entonces si comparamos ambas ecuaciones término a término:

$$C(\emptyset) = A(\emptyset)$$

$$D(\emptyset) = -B(\emptyset)$$

Siendo así,  $S_{zy}(\emptyset)$  y  $S_{yz}(\emptyset)$  son iguales con excepción del signo de su parte imaginaria. Por lo tanto  $S_{yz}(\emptyset)$  es la conjugada compleja de  $S_{zy}(\emptyset)$ , que podríamos escribir como:

$$S_{yz}(\emptyset) = S_{zy}^*(\emptyset)$$

La función de densidad espectral se expresa en unidades (xy)/(unidades de frecuencia espacial).

### 3.5. Transforma Rápida de Fourier (FFT)

La transformada rápida de Fourier (FFT), se trata de un algoritmo computacional diseñado por J. W. Cooley y J. W. Turkey en 1965, para calcular la transformada discreta de Fourier (DFT's). La transformada de Fourier discreta de una secuencia finita  $\{x_r\}$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$ , es una nueva secuencia finita  $\{x_k\}$  definida como:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i(2\pi kr/N)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$$

Dónde N es el tamaño del vector de entrada al algoritmo, de hecho, la FFT reduce la complejidad de DFT del  $O(N^2)$  a  $O(N \log N)$ .

La FFT representa un menor coste computacional, y además incrementa el grado de exactitud. Pues trabaja de la siguiente manera:

1. Dividir el problema en varios subproblemas análogos de tamaños menores
2. Resolver de forma recursiva cada uno de los subproblemas con el algoritmo
3. Obtener la solución del problema original combinando la solución de cada uno de los subproblemas.

Si suponemos que  $\{x_r\}$  se divide en dos subsecuencias más cortas  $\{y_r\}$  y  $\{z_r\}$  dónde:

$$y_r = x_{2r} \quad r = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$$

$$z_r = x_{2r+1} \quad r = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$$

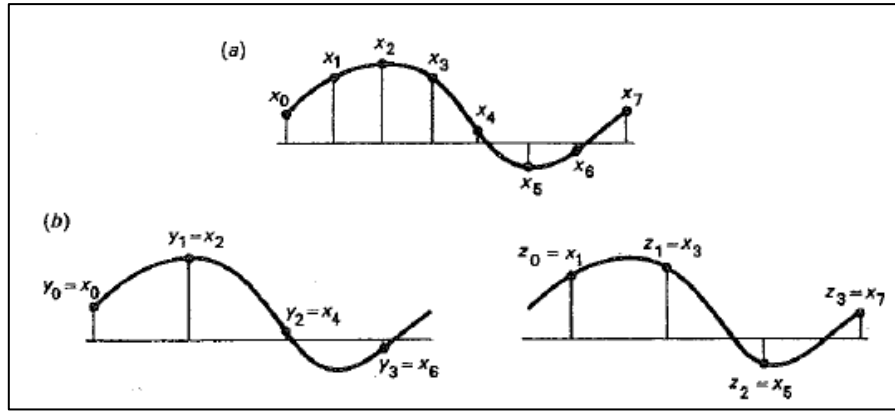


Figura A. 4 Discretización de  $x_r$

Entonces la DFT's de las secuencias más pequeñas  $\{y_k\}$  y  $\{z_k\}$  son:

$$y_k = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{N/2-1} y_r e^{-i(2\pi kr/N/2)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$$

$$z_k = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{N/2-1} z_r e^{-i(2\pi kr/N/2)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$$

Entonces retornando a la DFT de la secuencia original  $\{x_r\}$ , considerándola como una sumatoria de las dos subsecuencias obtendríamos:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{N} \left( \sum_{r=0}^{N/2-1} x_{2r} e^{-i(2\pi k 2r/N)} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x_{2r+1} e^{-i(2\pi k(2r+1)/N)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{r=0}^{N/2-1} y_r e^{-i(2\pi kr/N/2)} + e^{-i(2\pi k/N)} \sum_{r=0}^{N/2-1} z_r e^{-i(2\pi kr/N/2)} \right) \end{aligned}$$

De dónde se puede ver la comparación:

$$x_k = \frac{1}{2} (y_k + e^{-i(2\pi k/N)} z_k)$$

Este es el pilar fundamental del algoritmo, que se conoce como FFT de radio 2 en el cual se calcula la DFT dividiendo cada paso del proceso del problema original en dos subproblemas cuyo tamaño es la mitad del tamaño del problema original.

Esto solo aplica para valores de  $k$  entre 0 y  $N/2-1$ , pero si buscamos generalizar el problema entonces podríamos escribirlo como  $N/2 \leq k \leq N - 1$ , por lo que  $y_k$  y  $z_k$  son periódicos en  $k$  y se repiten con periodo  $N/2$  tal que:

$$y_{k-N/2} = y_k$$

$$z_{k-N/2} = z_k$$

Entonces la manera general de escribir los valores de  $x_k$  a partir de  $y_k$  y  $z_k$  consiste:

$$x_k = \frac{1}{2} (y_{k-N/2} + e^{-i(2\pi k/N)} z_{k-N/2}) \quad k = (N/2), (N/2 + 1), \dots, (N/2 - 1)$$

O si solo se permite  $k$  corra de 0 a  $N/2$ , entonces una alternativa equivalente sería:

$$x_{k+N/2} = \frac{1}{2} (y_k + e^{-i(2\pi(k+2/N)/N)} z_k) \quad k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$$

Si lo simplificamos usando el hecho de que  $e^{-i(\pi)} = -1$ , podríamos simplificar

$$x_{k+N/2} = \frac{1}{2} (y_k - e^{-i(2\pi k/N)} z_k) \quad k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$$

Finalmente, si definimos una nueva variable  $w$  tal que:

$$w = e^{-i(2\pi/N)}$$

Entonces obtendríamos lo que se conoce como la herramienta computacional de operación mariposa de Cooley-Turkey:

$$x_k = \frac{1}{2} (y_k + w^k z_k) \quad k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$$

$$x_{k+N/2} = \frac{1}{2} (y_k - w^k z_k) \quad k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$$

# **ANEXO 2**



**ANCHO DE VÍA**



**PERALTE**



**ALABEO 3 m**



**ALABEO 6 m**

0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00	5.25	5.50	5.75	6.00	6.25	6.50	7.00	7.25	7.50	7.75	8.00	8.25	8.50	8.75	9.00			
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000			
0.996	0.996	0.992	0.993	0.997	0.998	0.997	0.996	0.992	0.991	0.989	0.986	0.984	0.981	0.978	0.976	0.974	0.972	0.969	0.966	0.963	0.960	0.957	0.954	0.951	0.948	0.944	0.941	0.937	0.934	0.931	0.927	0.924	0.921	0.918			
0.959	0.875	0.880	0.886	0.900	0.893	0.892	0.892	0.897	0.901	0.913	0.925	0.932	0.941	0.953	0.962	0.969	0.972	0.974	0.973	0.971	0.971	0.971	0.968	0.965	0.959	0.955	0.950	0.946	0.943	0.940	0.938	0.937	0.936	0.935			
0.789	0.803	0.815	0.829	0.838	0.843	0.838	0.837	0.842	0.854	0.862	0.880	0.891	0.906	0.919	0.934	0.942	0.946	0.946	0.947	0.945	0.944	0.944	0.942	0.938	0.939	0.938	0.937	0.936	0.935	0.934	0.933	0.932	0.931	0.930			
0.723	0.738	0.748	0.768	0.784	0.785	0.790	0.794	0.789	0.801	0.816	0.830	0.847	0.865	0.883	0.896	0.910	0.914	0.918	0.915	0.910	0.910	0.907	0.905	0.903	0.902	0.901	0.900	0.899	0.898	0.897	0.896	0.895	0.894	0.893	0.892		
0.629	0.680	0.680	0.698	0.726	0.730	0.732	0.744	0.744	0.748	0.763	0.782	0.798	0.818	0.837	0.854	0.868	0.874	0.878	0.880	0.887	0.884	0.880	0.880	0.880	0.879	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878		
0.563	0.620	0.620	0.638	0.676	0.684	0.684	0.692	0.701	0.701	0.714	0.734	0.751	0.771	0.791	0.811	0.829	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.834		
0.490	0.492	0.537	0.576	0.596	0.611	0.627	0.642	0.649	0.663	0.673	0.685	0.703	0.725	0.745	0.767	0.783	0.790	0.794	0.790	0.782	0.780	0.773	0.765	0.759	0.750	0.740	0.737	0.736	0.735	0.734	0.733	0.732	0.731	0.730	0.729		
0.362	0.413	0.453	0.498	0.517	0.533	0.568	0.588	0.601	0.613	0.629	0.644	0.655	0.676	0.699	0.718	0.736	0.743	0.748	0.744	0.734	0.732	0.724	0.713	0.702	0.692	0.683	0.674	0.665	0.656	0.647	0.638	0.629	0.620	0.611	0.602		
0.285	0.332	0.381	0.421	0.455	0.501	0.517	0.535	0.554	0.570	0.584	0.603	0.617	0.632	0.654	0.675	0.692	0.698	0.704	0.700	0.690	0.688	0.679	0.667	0.653	0.638	0.621	0.604	0.587	0.570	0.553	0.536	0.519	0.502	0.485	0.468		
0.221	0.259	0.305	0.352	0.391	0.434	0.468	0.487	0.504	0.524	0.542	0.559	0.578	0.595	0.611	0.627	0.649	0.655	0.661	0.657	0.647	0.644	0.633	0.620	0.605	0.590	0.574	0.558	0.542	0.526	0.510	0.494	0.478	0.462	0.446	0.430		
0.164	0.201	0.235	0.282	0.327	0.355	0.406	0.442	0.457	0.476	0.488	0.517	0.533	0.554	0.571	0.588	0.604	0.611	0.611	0.603	0.599	0.588	0.572	0.556	0.540	0.524	0.508	0.492	0.476	0.460	0.444	0.428	0.412	0.396	0.380	0.364		
0.106	0.147	0.184	0.219	0.260	0.305	0.342	0.381	0.414	0.433	0.452	0.475	0.494	0.512	0.533	0.548	0.563	0.569	0.575	0.570	0.560	0.557	0.546	0.531	0.515	0.500	0.484	0.468	0.452	0.436	0.420	0.404	0.388	0.372	0.356	0.340		
0.081	0.096	0.117	0.130	0.204	0.245	0.288	0.323	0.360	0.393	0.412	0.424	0.454	0.475	0.492	0.511	0.525	0.530	0.535	0.531	0.521	0.519	0.508	0.492	0.477	0.461	0.445	0.429	0.413	0.397	0.381	0.365	0.349	0.333	0.317	0.301		
0.046	0.074	0.089	0.126	0.157	0.191	0.231	0.270	0.304	0.340	0.371	0.391	0.413	0.433	0.452	0.469	0.484	0.489	0.490	0.480	0.477	0.466	0.449	0.432	0.415	0.398	0.381	0.364	0.347	0.330	0.313	0.296	0.279	0.262	0.245	0.228		
0.034	0.043	0.071	0.084	0.118	0.150	0.182	0.218	0.257	0.289	0.323	0.352	0.372	0.392	0.412	0.431	0.444	0.449	0.454	0.451	0.441	0.439	0.428	0.411	0.394	0.377	0.360	0.343	0.326	0.309	0.292	0.275	0.258	0.241	0.224	0.207	0.190	
0.028	0.031	0.035	0.063	0.077	0.112	0.142	0.172	0.207	0.243	0.273	0.304	0.334	0.353	0.373	0.391	0.405	0.405	0.415	0.411	0.403	0.401	0.390	0.375	0.358	0.341	0.324	0.307	0.290	0.273	0.256	0.239	0.222	0.205	0.188	0.171	0.154	
-0.001	0.007	0.029	0.037	0.064	0.073	0.106	0.134	0.162	0.193	0.228	0.256	0.288	0.314	0.332	0.348	0.354	0.369	0.373	0.370	0.362	0.360	0.349	0.334	0.314	0.301	0.291	0.281	0.271	0.261	0.251	0.241	0.231	0.221	0.211	0.201		
-0.001	0.001	0.007	0.026	0.033	0.057	0.070	0.099	0.127	0.155	0.183	0.214	0.242	0.269	0.293	0.309	0.323	0.328	0.332	0.329	0.320	0.318	0.310	0.299	0.275	0.262	0.252	0.242	0.232	0.222	0.212	0.202	0.192	0.182	0.172	0.162	0.152	
0.003	-0.001	0.001	0.007	0.024	0.032	0.054	0.066	0.095	0.119	0.144	0.171	0.202	0.226	0.250	0.271	0.284	0.289	0.293	0.290	0.282	0.280	0.272	0.259	0.241	0.223	0.205	0.187	0.169	0.151	0.133	0.115	0.097	0.079	0.061	0.043	0.025	0.007
0.003	0.003	-0.001	0.001	0.026	0.025	0.031	0.051	0.062	0.089	0.112	0.134	0.161	0.186	0.208	0.229	0.245	0.249	0.253	0.250	0.243	0.241	0.232	0.220	0.204	0.187	0.170	0.153	0.136	0.119	0.102	0.085	0.068	0.051	0.034	0.017	0.000	
0.003	0.003	0.003	-0.001	0.026	0.026	0.034	0.051	0.062	0.089	0.112	0.134	0.161	0.186	0.208	0.229	0.245	0.249	0.253	0.250	0.243	0.241	0.232	0.220	0.204	0.187	0.170	0.153	0.136	0.119	0.102	0.085	0.068	0.051	0.034	0.017	0.000	
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.006	0.022	0.028	0.045	0.055	0.076	0.097	0.115	0.135	0.154	0.168	0.173	0.178	0.175	0.168	0.166	0.158	0.147	0.131	0.114	0.097	0.080	0.063	0.046	0.029	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000		
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.001	0.005	0.021	0.026	0.042	0.051	0.072	0.089	0.105	0.122	0.136	0.140	0.145	0.142	0.135	0.124	0.115	0.104	0.093	0.083	0.073	0.063	0.053	0.043	0.033	0.023	0.013	0.003	0.000	0.000	
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.001	0.005	0.019	0.024	0.038	0.047	0.063	0.078	0.092	0.104	0.109	0.112	0.109	0.102	0.100	0.093	0.082	0.067	0.052	0.037	0.022	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0.070	0.080	0.084	0.088	0.085	0.078	0.076	0.069	0.059	0.044	0.029	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000	0.001	0.005	0.017	0.022	0.036	0.043	0.058	0																						



**NIVELACIÓN  
LONGITUDINAL CARRIL  
IZQUIERDO**



**NIVELACIÓN  
LONGITUDINAL CARRIL  
DERECHO**



# **ALINEACIÓN CARRIL IZQUIERDO**



# **ALINEACIÓN CARRIL DERECHO**





# **ANEXO 3**

# **ANCHO DE VÍA ALINEACIÓN**

0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
-0.971	-0.969	-0.966	-0.964	-0.962	-0.959	-0.956	-0.953	-0.950	-0.948	-0.946	-0.943	-0.941	-0.938	-0.936
-0.934	-0.932	-0.929	-0.926	-0.924	-0.921	-0.918	-0.915	-0.912	-0.909	-0.907	-0.904	-0.901	-0.898	-0.896
-0.954	-0.952	-0.949	-0.947	-0.945	-0.943	-0.940	-0.937	-0.934	-0.930	-0.928	-0.925	-0.923	-0.921	-0.920
-0.945	-0.943	-0.941	-0.939	-0.937	-0.934	-0.932	-0.929	-0.926	-0.923	-0.920	-0.918	-0.916	-0.914	-0.912
-0.936	-0.934	-0.932	-0.930	-0.929	-0.926	-0.924	-0.921	-0.918	-0.915	-0.913	-0.910	-0.908	-0.906	-0.905
-0.927	-0.926	-0.923	-0.922	-0.920	-0.918	-0.915	-0.913	-0.910	-0.907	-0.905	-0.903	-0.901	-0.900	-0.900
-0.918	-0.917	-0.914	-0.913	-0.911	-0.909	-0.907	-0.904	-0.902	-0.899	-0.897	-0.895	-0.893	-0.891	-0.890
-0.910	-0.908	-0.906	-0.905	-0.903	-0.901	-0.899	-0.897	-0.895	-0.892	-0.890	-0.888	-0.886	-0.884	-0.884
-0.901	-0.900	-0.898	-0.896	-0.895	-0.893	-0.891	-0.889	-0.887	-0.884	-0.882	-0.880	-0.878	-0.877	-0.876
-0.892	-0.891	-0.889	-0.887	-0.885	-0.883	-0.881	-0.879	-0.877	-0.874	-0.873	-0.871	-0.869	-0.867	-0.866
-0.883	-0.882	-0.881	-0.879	-0.878	-0.876	-0.875	-0.873	-0.871	-0.868	-0.867	-0.865	-0.864	-0.862	-0.862
-0.874	-0.873	-0.871	-0.870	-0.868	-0.866	-0.865	-0.863	-0.861	-0.858	-0.857	-0.855	-0.854	-0.852	-0.852
-0.865	-0.865	-0.863	-0.862	-0.860	-0.858	-0.857	-0.855	-0.853	-0.851	-0.850	-0.848	-0.846	-0.844	-0.844
-0.857	-0.856	-0.855	-0.853	-0.852	-0.850	-0.849	-0.847	-0.845	-0.844	-0.842	-0.841	-0.840	-0.840	-0.840
-0.848	-0.847	-0.846	-0.845	-0.843	-0.842	-0.841	-0.839	-0.837	-0.836	-0.835	-0.834	-0.833	-0.833	-0.833
-0.840	-0.839	-0.838	-0.837	-0.836	-0.835	-0.834	-0.833	-0.831	-0.829	-0.828	-0.826	-0.825	-0.823	-0.823
-0.831	-0.830	-0.829	-0.828	-0.828	-0.827	-0.826	-0.825	-0.823	-0.822	-0.821	-0.820	-0.819	-0.818	-0.818
-0.822	-0.821	-0.821	-0.820	-0.819	-0.818	-0.817	-0.815	-0.814	-0.813	-0.812	-0.811	-0.811	-0.811	-0.811
-0.813	-0.813	-0.812	-0.812	-0.811	-0.810	-0.809	-0.809	-0.808	-0.807	-0.806	-0.805	-0.804	-0.804	-0.804
-0.804	-0.804	-0.803	-0.803	-0.802	-0.802	-0.801	-0.801	-0.800	-0.799	-0.798	-0.797	-0.797	-0.796	-0.796
-0.795	-0.795	-0.795	-0.794	-0.794	-0.793	-0.793	-0.792	-0.792	-0.791	-0.791	-0.790	-0.790	-0.789	-0.789
-0.787	-0.787	-0.786	-0.786	-0.786	-0.785	-0.785	-0.784	-0.784	-0.783	-0.783	-0.782	-0.782	-0.781	-0.781
-0.778	-0.778	-0.778	-0.778	-0.777	-0.777	-0.777	-0.776	-0.776	-0.775	-0.775	-0.774	-0.774	-0.773	-0.773
-0.769	-0.769	-0.769	-0.769	-0.769	-0.768	-0.768	-0.767	-0.767	-0.766	-0.766	-0.765	-0.765	-0.764	-0.764
-0.761	-0.761	-0.761	-0.761	-0.761	-0.760	-0.760	-0.759	-0.759	-0.759	-0.758	-0.758	-0.757	-0.757	-0.757
-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752
-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744	-0.744
-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735	-0.735
-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726	-0.726
-0.717	-0.717	-0.718	-0.718	-0.719	-0.719	-0.720	-0.720	-0.721	-0.721	-0.722	-0.722	-0.723	-0.723	-0.723
-0.708	-0.709	-0.709	-0.710	-0.711	-0.711	-0.712	-0.712	-0.713	-0.714	-0.715	-0.716	-0.717	-0.718	-0.719
-0.700	-0.701	-0.702	-0.703	-0.704	-0.705	-0.706	-0.707	-0.708	-0.709	-0.710	-0.711	-0.712	-0.713	-0.714
-0.691	-0.692	-0.693	-0.694	-0.695	-0.696	-0.697	-0.698	-0.699	-0.700	-0.701	-0.702	-0.703	-0.704	-0.705
-0.682	-0.683	-0.684	-0.685	-0.686	-0.687	-0.688	-0.689	-0.690	-0.691	-0.692	-0.693	-0.694	-0.695	-0.696
-0.674	-0.674	-0.675	-0.676	-0.677	-0.678	-0.679	-0.680	-0.681	-0.681	-0.682	-0.683	-0.684	-0.685	-0.686
-0.665	-0.665	-0.666	-0.667	-0.668	-0.669	-0.670	-0.671	-0.672	-0.673	-0.674	-0.675	-0.676	-0.677	-0.678
-0.656	-0.656	-0.657	-0.658	-0.659	-0.660	-0.661	-0.662	-0.663	-0.664	-0.665	-0.666	-0.667	-0.668	-0.669
-0.648	-0.648	-0.649	-0.650	-0.651	-0.652	-0.653	-0.654	-0.655	-0.656	-0.657	-0.658	-0.659	-0.660	-0.661
-0.639	-0.639	-0.640	-0.641	-0.642	-0.643	-0.644	-0.645	-0.646	-0.647	-0.648	-0.649	-0.650	-0.651	-0.652
-0.630	-0.630	-0.631	-0.632	-0.633	-0.634	-0.635	-0.636	-0.637	-0.638	-0.639	-0.640	-0.641	-0.642	-0.643
-0.621	-0.622	-0.623	-0.624	-0.625	-0.626	-0.627	-0.628	-0.629	-0.630	-0.631	-0.632	-0.633	-0.634	-0.635
-0.612	-0.613	-0.614	-0.615	-0.616	-0.617	-0.618	-0.619	-0.620	-0.621	-0.622	-0.623	-0.624	-0.625	-0.626
-0.603	-0.604	-0.605	-0.606	-0.607	-0.608	-0.609	-0.610	-0.611	-0.612	-0.613	-0.614	-0.615	-0.616	-0.617
-0.594	-0.595	-0.596	-0.597	-0.598	-0.599	-0.600	-0.601	-0.602	-0.603	-0.604	-0.605	-0.606	-0.607	-0.608
-0.585	-0.587	-0.589	-0.591	-0.593	-0.595	-0.597	-0.600	-0.602	-0.604	-0.606	-0.608	-0.610	-0.613	-0.616
-0.576	-0.578	-0.581	-0.583	-0.585	-0.587	-0.589	-0.592	-0.594	-0.596	-0.598	-0.600	-0.603	-0.605	-0.608
-0.567	-0.569	-0.571	-0.573	-0.575	-0.577	-0.579	-0.582	-0.584	-0.586	-0.588	-0.591	-0.593	-0.596	-0.599
-0.558	-0.561	-0.563	-0.565	-0.567	-0.569	-0.571	-0.573	-0.575	-0.578	-0.580	-0.583	-0.586	-0.589	-0.591
-0.550	-0.552	-0.555	-0.557	-0.560	-0.562	-0.565	-0.567	-0.570	-0.572	-0.575	-0.578	-0.581	-0.583	-0.586
-0.541	-0.544	-0.546	-0.549	-0.551	-0.554	-0.557	-0.559	-0.562	-0.565	-0.567	-0.570	-0.573	-0.576	-0.579
-0.532	-0.535	-0.538	-0.540	-0.543	-0.546	-0.549	-0.551	-0.554	-0.557	-0.560	-0.563	-0.566	-0.569	-0.572
-0.523	-0.526	-0.529	-0.532	-0.535	-0.538	-0.541	-0.544	-0.547	-0.550	-0.553	-0.556	-0.559	-0.562	-0.565
-0.515	-0.518	-0.521	-0.524	-0.527	-0.530	-0.533	-0.536	-0.539	-0.542	-0.545	-0.548	-0.551	-0.554	-0.557
-0.506	-0.509	-0.512	-0.515	-0.518	-0.521	-0.524	-0.527	-0.530	-0.533	-0.536	-0.539	-0.542	-0.545	-0.548
-0.497	-0.500	-0.503	-0.506	-0.510	-0.513	-0.516	-0.519	-0.522	-0.526	-0.529	-0.532	-0.536	-0.539	-0.543
-0.489	-0.492	-0.495	-0.498	-0.501	-0.504	-0.508	-0.511	-0.515	-0.518	-0.521	-0.525	-0.528	-0.532	-0.536
-0.480	-0.483	-0.486	-0.489	-0.493	-0.496	-0.500	-0.503	-0.507	-0.511	-0.514	-0.517	-0.521	-0.524	-0.528
-0.471	-0.474	-0.478	-0.481	-0.484	-0.488	-0.492	-0.495	-0.499	-0.502	-0.506	-0.510	-0.513	-0.517	-0.521
-0.462	-0.466	-0.470	-0.473	-0.476	-0.480	-0.483	-0.487	-0.491	-0.495	-0.498	-0.502	-0.506	-0.510	-0.514
-0.453	-0.457	-0.461	-0.464	-0.468	-0.471	-0.475	-0.479	-0.483	-0.487	-0.491	-0.495	-0.499	-0.502	-0.506
-0.444	-0.448	-0.452	-0.456	-0.460	-0.463	-0.467	-0.471	-0.475	-0.479	-0.483	-0.487	-0.491	-0.495	-0.499
-0.435	-0.440	-0.444	-0.447	-0.451	-0.455	-0.459	-0.463	-0.467	-0.471	-0.475	-0.479	-0.483	-0.487	-0.491
-0.427	-0.431	-0.435	-0.439	-0.443	-0.447	-0.451	-0.455	-0.459	-0.464	-0.468	-0.472	-0.476	-0.480	-0.484
-0.418	-0.422	-0.426	-0.430	-0.434	-0.438	-0.443	-0.447	-0.451	-0.456	-0.460	-0.464	-0.469	-0.473	-0.477
-0.410	-0.414	-0.418	-0.422	-0.426	-0.430	-0.434	-0.439	-0.443	-0.448	-0.452	-0.457	-0.461	-0.466	-0.470
-0.401	-0.405	-0.409	-0.413	-0.417	-0.422	-0.426	-0.431	-0.435	-0.440	-0.445	-0.449	-0.454	-0.458	-0.463
-0.392	-0.396	-0.400	-0.405	-0.409	-0.414	-0.418	-0.423	-0.428	-0.432	-0.437	-0.442	-0.446	-0.451	-0.455
-0.383	-0.388	-0.393	-0.398	-0.403	-0.408	-0.413	-0.418	-0.423	-0.428	-0.433	-0.438	-0.443	-0.448	-0.453
-0.374	-0.379	-0.383	-0.388	-0.392	-0.397	-0.402	-0.407	-0.412	-0.417	-0.422	-0.427	-0.432	-0.437	-0.442
-0.366	-0.370	-0.375	-0.379	-0.384	-0.389	-0.394	-0.399	-0.404	-0.409	-0.414	-0.419	-0.424	-0.429	-0.434
-0.357	-0.361	-0.366	-0.371	-0.375	-0.381	-0.386	-0.391	-0.396	-0.401	-0.406	-0.411	-0.416	-0.421	-0.426
-0.348	-0.353	-0.358	-0.363	-0.367	-0.372	-0.377	-0.382	-0.387	-0.392	-0.397	-0.402	-0.407	-0.412	-0.417
-0.339	-0.344	-0.349	-0.354	-0.359	-0.364	-0.369	-0.374	-0.379	-0.384	-0.389	-0.394	-0.399	-0.404	-0.409
-0.331	-0.335	-0.340	-0.345	-0.350	-0.355	-0.361	-0.366	-0.371	-0.376	-0.381	-0.386	-0.391	-0.396	-0.401
-0.322	-0.327	-0.332	-0.337	-0.342	-0.347	-0.353	-0.358	-0.364	-0.370	-0.375	-0.381	-0.386	-0.391	-0.396
-0.313	-0.318	-0.323	-0.328	-0.334	-0.339	-0.345	-0.351	-0.356	-0.362	-0.368	-0.373	-0.378	-0.383	-0.388
-0.304	-0.309	-0.315	-0.320	-0.325	-0.331	-0.337	-0.342	-0.348	-0.352	-0.357	-0.363	-0.368	-0.373	-0.378
-0.295	-0.301	-0.306	-0.311	-0.317	-0.322	-0.327	-0.332	-0.338	-0.343	-0.348	-0.353	-0.358	-0.363	-0.368
-0.287	-0.292	-0.298	-0.303	-0.309	-0.314	-0.320	-0.324	-0.330	-0.334	-0				

**ALINEACIÓN CARRIL  
DERECHO - IZQUIERDO**



# **NIVELACIÓN – PERFIL VERTICAL**



# **NIVELACIÓN CARRIL IZQUIERDO- DERECHO**





**NIVELACIÓN –  
ALINEACIÓN CARRIL  
DERECHO**



**NIVELACIÓN –  
ALINEACIÓN CARRIL  
IZQUIERDO**



# **ANCHO DE VÍA – PERFIL VERTICAL**

0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
-0.971	-0.969	-0.966	-0.964	-0.962	-0.959	-0.956	-0.953	-0.950	-0.948	-0.946	-0.943	-0.941	-0.938	-0.936
-0.934	-0.932	-0.929	-0.926	-0.924	-0.921	-0.918	-0.915	-0.912	-0.909	-0.907	-0.904	-0.901	-0.898	-0.895
-0.954	-0.952	-0.949	-0.947	-0.945	-0.943	-0.940	-0.937	-0.934	-0.930	-0.928	-0.925	-0.923	-0.921	-0.920
-0.945	-0.943	-0.941	-0.939	-0.937	-0.934	-0.932	-0.929	-0.926	-0.923	-0.920	-0.918	-0.916	-0.912	-0.912
-0.936	-0.934	-0.932	-0.930	-0.929	-0.926	-0.924	-0.921	-0.918	-0.915	-0.913	-0.910	-0.908	-0.906	-0.905
-0.927	-0.926	-0.923	-0.922	-0.920	-0.918	-0.915	-0.913	-0.910	-0.907	-0.905	-0.903	-0.901	-0.900	-0.900
-0.918	-0.917	-0.914	-0.913	-0.911	-0.909	-0.907	-0.904	-0.902	-0.899	-0.897	-0.895	-0.893	-0.891	-0.890
-0.910	-0.908	-0.906	-0.905	-0.903	-0.901	-0.899	-0.897	-0.895	-0.892	-0.890	-0.888	-0.886	-0.884	-0.884
-0.901	-0.900	-0.898	-0.896	-0.895	-0.893	-0.891	-0.889	-0.887	-0.884	-0.882	-0.880	-0.878	-0.877	-0.877
-0.892	-0.891	-0.889	-0.887	-0.885	-0.883	-0.881	-0.879	-0.877	-0.874	-0.873	-0.871	-0.869	-0.867	-0.867
-0.883	-0.882	-0.881	-0.879	-0.878	-0.876	-0.875	-0.873	-0.871	-0.868	-0.867	-0.865	-0.864	-0.862	-0.862
-0.874	-0.873	-0.871	-0.870	-0.868	-0.866	-0.865	-0.863	-0.861	-0.858	-0.857	-0.855	-0.854	-0.852	-0.852
-0.865	-0.865	-0.863	-0.862	-0.860	-0.858	-0.857	-0.855	-0.853	-0.851	-0.850	-0.848	-0.846	-0.844	-0.844
-0.857	-0.856	-0.855	-0.853	-0.852	-0.850	-0.849	-0.847	-0.845	-0.844	-0.842	-0.841	-0.840	-0.840	-0.840
-0.848	-0.847	-0.846	-0.845	-0.843	-0.842	-0.841	-0.839	-0.837	-0.836	-0.835	-0.834	-0.833	-0.833	-0.833
-0.840	-0.839	-0.838	-0.837	-0.836	-0.835	-0.834	-0.833	-0.831	-0.829	-0.828	-0.826	-0.825	-0.823	-0.823
-0.831	-0.830	-0.829	-0.828	-0.828	-0.827	-0.826	-0.825	-0.823	-0.822	-0.821	-0.819	-0.818	-0.816	-0.816
-0.822	-0.821	-0.821	-0.820	-0.819	-0.818	-0.817	-0.815	-0.814	-0.813	-0.812	-0.811	-0.811	-0.811	-0.811
-0.813	-0.813	-0.812	-0.812	-0.811	-0.810	-0.809	-0.808	-0.807	-0.806	-0.805	-0.804	-0.804	-0.804	-0.804
-0.804	-0.804	-0.803	-0.803	-0.802	-0.802	-0.801	-0.801	-0.800	-0.799	-0.798	-0.797	-0.797	-0.797	-0.797
-0.796	-0.795	-0.795	-0.794	-0.794	-0.793	-0.793	-0.792	-0.792	-0.791	-0.791	-0.790	-0.790	-0.790	-0.790
-0.787	-0.787	-0.786	-0.786	-0.786	-0.785	-0.785	-0.784	-0.784	-0.783	-0.783	-0.782	-0.782	-0.782	-0.782
-0.778	-0.778	-0.778	-0.778	-0.777	-0.777	-0.777	-0.776	-0.776	-0.775	-0.775	-0.774	-0.774	-0.774	-0.774
-0.769	-0.769	-0.769	-0.769	-0.769	-0.768	-0.768	-0.767	-0.767	-0.767	-0.767	-0.766	-0.766	-0.766	-0.766
-0.761	-0.761	-0.761	-0.761	-0.761	-0.760	-0.760	-0.759	-0.759	-0.759	-0.759	-0.758	-0.758	-0.758	-0.758
-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752	-0.752
-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743	-0.743
-0.734	-0.735	-0.735	-0.735	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736	-0.736
-0.725	-0.726	-0.726	-0.727	-0.727	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728	-0.728
-0.717	-0.717	-0.718	-0.718	-0.719	-0.719	-0.720	-0.720	-0.721	-0.721	-0.722	-0.722	-0.723	-0.723	-0.723
-0.708	-0.709	-0.709	-0.710	-0.711	-0.711	-0.712	-0.712	-0.713	-0.713	-0.714	-0.714	-0.715	-0.715	-0.715
-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700
-0.691	-0.691	-0.692	-0.693	-0.694	-0.695	-0.695	-0.696	-0.697	-0.698	-0.699	-0.700	-0.701	-0.702	-0.702
-0.682	-0.683	-0.683	-0.684	-0.686	-0.686	-0.687	-0.688	-0.689	-0.690	-0.691	-0.692	-0.693	-0.694	-0.694
-0.674	-0.674	-0.675	-0.676	-0.677	-0.678	-0.679	-0.680	-0.681	-0.681	-0.683	-0.684	-0.685	-0.686	-0.686
-0.665	-0.665	-0.666	-0.667	-0.668	-0.670	-0.671	-0.672	-0.673	-0.674	-0.675	-0.676	-0.677	-0.678	-0.678
-0.656	-0.656	-0.657	-0.658	-0.659	-0.660	-0.661	-0.662	-0.663	-0.664	-0.665	-0.666	-0.667	-0.668	-0.668
-0.648	-0.648	-0.649	-0.651	-0.652	-0.653	-0.655	-0.656	-0.657	-0.658	-0.659	-0.660	-0.661	-0.662	-0.662
-0.639	-0.639	-0.641	-0.642	-0.644	-0.645	-0.646	-0.648	-0.649	-0.650	-0.652	-0.653	-0.655	-0.656	-0.656
-0.629	-0.630	-0.632	-0.634	-0.635	-0.637	-0.638	-0.640	-0.641	-0.643	-0.644	-0.646	-0.648	-0.649	-0.649
-0.620	-0.622	-0.623	-0.625	-0.627	-0.628	-0.630	-0.632	-0.633	-0.635	-0.637	-0.638	-0.640	-0.642	-0.643
-0.611	-0.612	-0.614	-0.616	-0.618	-0.620	-0.621	-0.623	-0.624	-0.626	-0.627	-0.629	-0.631	-0.633	-0.634
-0.603	-0.604	-0.606	-0.608	-0.611	-0.614	-0.617	-0.621	-0.623	-0.625	-0.627	-0.630	-0.633	-0.636	-0.637
-0.594	-0.596	-0.598	-0.600	-0.602	-0.604	-0.606	-0.608	-0.611	-0.614	-0.616	-0.618	-0.620	-0.622	-0.623
-0.585	-0.587	-0.589	-0.591	-0.593	-0.595	-0.597	-0.600	-0.602	-0.604	-0.606	-0.608	-0.610	-0.613	-0.614
-0.576	-0.578	-0.581	-0.583	-0.585	-0.587	-0.589	-0.592	-0.594	-0.596	-0.598	-0.600	-0.603	-0.605	-0.606
-0.567	-0.569	-0.571	-0.573	-0.575	-0.577	-0.579	-0.582	-0.584	-0.586	-0.588	-0.591	-0.593	-0.595	-0.596
-0.558	-0.561	-0.563	-0.565	-0.568	-0.571	-0.573	-0.575	-0.578	-0.580	-0.583	-0.585	-0.588	-0.591	-0.593
-0.550	-0.552	-0.555	-0.556	-0.558	-0.561	-0.563	-0.567	-0.570	-0.572	-0.575	-0.578	-0.581	-0.583	-0.584
-0.541	-0.544	-0.546	-0.549	-0.551	-0.554	-0.557	-0.559	-0.562	-0.565	-0.567	-0.570	-0.573	-0.576	-0.577
-0.532	-0.535	-0.538	-0.540	-0.543	-0.546	-0.549	-0.551	-0.554	-0.557	-0.560	-0.563	-0.566	-0.569	-0.570
-0.523	-0.526	-0.529	-0.532	-0.535	-0.538	-0.541	-0.544	-0.547	-0.550	-0.553	-0.556	-0.559	-0.562	-0.563
-0.515	-0.518	-0.521	-0.524	-0.527	-0.530	-0.533	-0.535	-0.538	-0.541	-0.544	-0.547	-0.550	-0.553	-0.554
-0.506	-0.509	-0.512	-0.515	-0.518	-0.521	-0.524	-0.527	-0.530	-0.534	-0.537	-0.540	-0.543	-0.547	-0.548
-0.497	-0.500	-0.503	-0.506	-0.510	-0.513	-0.516	-0.519	-0.522	-0.526	-0.529	-0.532	-0.536	-0.539	-0.541
-0.489	-0.492	-0.495	-0.498	-0.501	-0.504	-0.508	-0.511	-0.515	-0.518	-0.521	-0.525	-0.528	-0.532	-0.534
-0.480	-0.483	-0.486	-0.489	-0.493	-0.496	-0.500	-0.503	-0.507	-0.511	-0.514	-0.517	-0.521	-0.524	-0.526
-0.471	-0.474	-0.478	-0.481	-0.484	-0.488	-0.492	-0.495	-0.499	-0.502	-0.506	-0.510	-0.513	-0.517	-0.520
-0.462	-0.466	-0.470	-0.473	-0.476	-0.480	-0.483	-0.487	-0.491	-0.495	-0.498	-0.502	-0.506	-0.510	-0.514
-0.453	-0.457	-0.461	-0.464	-0.468	-0.471	-0.475	-0.479	-0.483	-0.487	-0.491	-0.495	-0.499	-0.502	-0.506
-0.444	-0.448	-0.452	-0.456	-0.459	-0.463	-0.467	-0.471	-0.475	-0.479	-0.483	-0.487	-0.491	-0.495	-0.499
-0.435	-0.440	-0.444	-0.447	-0.451	-0.455	-0.459	-0.463	-0.467	-0.471	-0.475	-0.479	-0.483	-0.487	-0.491
-0.427	-0.431	-0.435	-0.439	-0.443	-0.447	-0.451	-0.455	-0.459	-0.464	-0.468	-0.472	-0.476	-0.480	-0.484
-0.418	-0.422	-0.426	-0.430	-0.434	-0.438	-0.443	-0.447	-0.451	-0.456	-0.460	-0.464	-0.469	-0.473	-0.477
-0.410	-0.414	-0.418	-0.422	-0.426	-0.430	-0.434	-0.439	-0.443	-0.448	-0.452	-0.457	-0.461	-0.466	-0.470
-0.401	-0.405	-0.409	-0.413	-0.417	-0.422	-0.426	-0.431	-0.435	-0.440	-0.445	-0.449	-0.454	-0.458	-0.463
-0.392	-0.396	-0.400	-0.405	-0.409	-0.414	-0.418	-0.423	-0.428	-0.432	-0.437	-0.442	-0.446	-0.451	-0.455
-0.383	-0.388	-0.393	-0.398	-0.403	-0.408	-0.413	-0.418	-0.423	-0.428	-0.433	-0.438	-0.443	-0.448	-0.453
-0.374	-0.379	-0.383	-0.388	-0.392	-0.397	-0.402	-0.407	-0.412	-0.417	-0.422	-0.427	-0.432	-0.436	-0.441
-0.366	-0.370	-0.375	-0.379	-0.384	-0.389	-0.394	-0.399	-0.404	-0.409	-0.414	-0.419	-0.424	-0.429	-0.434
-0.357	-0.361	-0.366	-0.371	-0.375	-0.381	-0.386	-0.391	-0.396	-0.401	-0.406	-0.411	-0.416	-0.421	-0.426
-0.348	-0.353	-0.358	-0.363	-0.367	-0.372	-0.377	-0.382	-0.387	-0.392	-0.397	-0.402	-0.407	-0.412	-0.417
-0.339	-0.344	-0.349	-0.354	-0.359	-0.364	-0.369	-0.374	-0.379	-0.384	-0.389	-0.394	-0.399	-0.404	-0.409
-0.331	-0.335	-0.341	-0.345	-0.350	-0.355	-0.361	-0.366	-0.371	-0.376	-0.381	-0.386	-0.391	-0.396	-0.401
-0.322	-0.327	-0.332	-0.337	-0.342	-0.347	-0.353	-0.358	-0.364	-0.370	-0.375	-0.381	-0.387	-0.392	-0.397
-0.313	-0.318	-0.323	-0.329	-0.334	-0.339	-0.345	-0.351	-0.356	-0.362	-0.368	-0.373	-0.379	-0.384	-0.389
-0.304	-0.309	-0.315	-0.320	-0.325	-0.331	-0.337	-0.342	-0.348	-0.352	-0.357	-0.363	-0.368	-0.373	-0.378
-0.295	-0.299	-0.305	-0.310	-0.316	-0.321	-0.327	-0.332	-0.338	-0.343	-0.348	-0.353	-0.359	-0.364	-0.369
-0.287	-0.292	-0.298	-0.303	-0.309	-0.314	-0.320	-0.324	-0.330	-0.334	-0				

