



Trabajo Fin de Grado:

EL PROBLEMA DE LA BRAQUISTÓCRONA DISCRETA

Silvia Marrero Hernández

Grado en Óptica y Optometría – Curso 2021/2022
Facultad de Farmacia



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE FARMACIA**

Trabajo Fin de Grado: El problema de la braquistócrona discreta.

Autor: Silvia Marrero Hernández

Titulación: Grado en Óptica y Optometría

Lugar y fecha de presentación: Facultad de Farmacia, 6 de julio de 2022.

Departamento/Área: Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico/Análisis Matemático.

Tutor: Manuel Luna Laynez.

Tipología: Revisión bibliográfica.

RESUMEN

En 1696 Johann Bernoulli planteó un problema a la comunidad científica: Dados dos puntos a distintas alturas, ¿qué recorrido debe seguir un móvil que se deja caer desde el punto más alto para llegar al más bajo en el menor tiempo posible afectado sólo por la gravedad? La solución, conocida como curva braquistócrona, es la cicloide, y a ella llegaron las mentes más destacadas del momento. Este reto, así como las herramientas desarrolladas para su resolución, dieron lugar a la rama de las Matemáticas conocida como Cálculo de Variaciones. En la presente memoria estudiamos un problema relacionado: el de la braquistócrona discreta. En él también deseamos obtener la trayectoria de descenso más rápido, pero buscando exclusivamente entre las curvas con forma poligonal formada por varias rampas. Una de las motivaciones es que la construcción en el mundo real de un trazado poligonal es más simple que el de otras curvas, y las poligonales que resuelven el problema discreto se va ajustando cada vez más a la cicloide.

La primera parte de este trabajo se destinada a la formulación y a la solución del problema de Johann Bernoulli, y a relatar el desafío que creó en la comunidad matemática de finales del siglo XVII. La segunda está dirigida a la versión discreta del problema. Se formula matemáticamente el problema y se estudian sus propiedades. Se trata de resolver directamente y se muestran las dificultades que se presentan cuando el número de rampas es elevado. Se plantea un algoritmo alternativo que consiste en abordar el problema no como un problema de minimización, sino construyendo la poligonal a partir de sus propiedades. Se recogen los programas informáticos que nos proporcionan las soluciones al problema original así como de su versión discreta, que permiten una comparativa entre ambos.

Palabras claves: Braquistócrona, aproximación poligonal, optimización, tiempo de mínimo descenso.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	9
OBJETIVOS	10
METODOLOGÍA	11
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	12
1-El problema de la curva de tiempo más breve (braquistócrona)	12
1.1-Un planteamiento novedoso	12
1.2-El desafío de Bernoulli a los matemáticos	13
1.3-Los intentos galileanos	15
1.4-Personalidades célebres involucradas	15
2-La ecuación de la cicloide	17
3-La ecuación de la braquistócrona	19
3.1- Resolución efectiva de la braquistócrona	20
3.2-Tiempo empleado en recorrer un tramo de la braquistócrona	21
4-El problema de la braquistócrona discreta	22
4.1-Planteamiento del problema a través de dos rampas	23
4.2-El caso de un número de planos inclinados (N RAMPAS)	25
4.3-Solución efectiva mediante rampas	26
4.3.1-Solución efectiva para dos rampas	26
4.3.2-Solución efectiva para cuatro rampas	27
4.3.3-Limitaciones de MATLAB ante un número x de rampas	29
4.4-Propiedades de la braquistócrona discreta	29
4.5-Algoritmo alternativo para resolver el problema de la braquistócrona discreta.....	31
4.5.1 solución efectiva con el nuevo algoritmo	33
CONCLUSIONES	35
BIBLIOGRAFÍA	36

ÍNDICE FIGURAS

Figura 1. Representación socorrista ante ahogado	13
Figura 2. Curva de descenso en menor tiempo	13
Figura 3. Representación del problema de Bernoulli	14
Figura 4. Curva de <i>brevissimo tempore</i> Galileana	15
Figura 5. Curva dibujada por una circunferencia	18
Figura 6. Circunferencia generatriz de la cicloide	18
Figura 7. Cicloide que une origen con B (9,-3)	21
Figura 8. Cicloide que une origen con B (3,-4)	21
Figura 9. Cicloide que une origen con B (8,-1)	21
Figura 10. Sistema de descenso por dos rampas	23
Figura 11. Representación del sistema \overline{AR}	23
Figura 12. Representación del sistema \overline{RB}	24
Figura 13. Sistema de referencia con N rampas	25
Figura 14. Expresión gráfica del programa para dos rampas	27
Figura 15. Expresión gráfica del programa para cuatro rampas	28
Figura 16. Expresión gráfica fallida del programa para seis rampas	29
Figura 17. Extensión de la Ley de Snell	30
Figura 18. Tabla de valores proporcionados por MATLAB	30
Figura 19. Expresión gráfica del programa para seis rampas	34

INTRODUCCIÓN

Los números y las relaciones establecidas entre ellos dan lugar a una ciencia denominada matemáticas. Esta maestría la encontramos aplicada a infinidad de ámbitos, entre ellos algunos muy comunes como en las localizaciones GPS, a través de algoritmos utilizados en múltiples ramas. Estos últimos se encuentran presentes en redes sociales (Instagram, Spotify, YouTube) a través de algoritmos de recomendación, el más conocido de todos ellos es el utilizado por google, el algoritmo PageRank, cuyo trabajo se basa en la selección del orden de los enlaces de búsqueda. Otro uso matemático que siempre se ha encontrado presente y muy apreciable se lo debemos a la relación de la belleza con las matemáticas a través de la proporción aurea presente en los rostros humanos y el arte. Ya algunos artistas como Leonardo da Vinci o Sandro Botticelli recurrían al uso de las matemáticas para la realización de sus obras, destacando entre muchas la Mona Lisa y El Nacimiento de Venus.

Teniendo en cuenta la atemporalidad del uso de las matemáticas en el mundo a lo largo de los años, sería lógico pensar que se plantearan retos tan interesantes como el que nos acontece: El problema de la braquistócrona discreto. Cualquier aproximación a este problema quedaría incompleto si no nos detuviésemos a considerar el problema de la curva braquistócrona. El matemático Johan Bernoulli (1667-1748) presenta el problema de la braquistócrona, como el cálculo de la curva que une dos puntos dados de diferente elevación y que se recorre en el menor tiempo posible desde la posición más alta. Un desafío planteado a los intelectuales más destacables de finales del siglo XVII, entre los que destacaban principalmente Isaac Newton, L'Hopital, Jakob Bernoulli y Gottfried Leibniz. Los nombres mencionados ilustran la importancia del problema. El mismo Johan Bernoulli publica su solución al problema de la braquistócrona en Acta Eruditorum, en el año 1667, bajo el título, "La curvatura de un rayo en un medio no-uniforme, y la solución del problema de la braquistócrona" (El título completo traducido del latín al inglés que aparece en (Struik, 1986) es "The curvature of a ray in nonuniform media, and the solution of the problem to find the brachystochrone, that is, the curve on which a heavy point falls from a given position to another given position in the shortest time, as well as on the construction of the synchrone or the wave of the rays."). En ella relaciona el problema de la curva de descenso más rápido con el problema de determinar la trayectoria que seguiría un rayo de luz al moverse en un medio heterogéneo entre dos puntos dados, que según el Principio de Fermat sería aquella que permite la propagación en el menor tiempo posible. Estableciendo esta analogía, Johan Bernoulli pone los principios de la Óptica al servicio de las Matemáticas para resolver un problema puramente mecánico, probando que la curva braquistócrona es la cicloide que une

los dos puntos dados. De esta manera se resuelve un innovador problema físico y a través de la premisa de el menor tiempo posible (optimización) este problema da lugar a una nueva rama en las Matemáticas, el Cálculo Variacional.

En esta memoria consideramos una versión discreta del problema planteado y resuelto por Johan Bernoulli en 1697: Dados dos puntos A y B , no situados sobre la misma vertical, y dado un número natural N , mayor o igual que dos, queremos determinar la forma de unir ambos puntos con N rampas o planos inclinados, de manera que un móvil que partiendo del reposo de A , y que se mueva sobre las rampas afectado únicamente por la fuerza de la gravedad, en ausencia de rozamiento, llegue hasta B en el menor tiempo posible. Nos referimos a él como el problema de la braquistócrona discreto porque, a diferencia con el problema original en el que se busca una curva (un continuo), en él basta determinar los $N - 1$ puntos intermedios entre A y B que sirven de unión entre una rampa y la siguiente. Como veremos, los procedimientos numérico usuales para resolver este problema no funcionan adecuadamente, y tendremos que acudir a las propiedades conocidas a priori de su solución para obtenerla.

Al analizar el problema de la curva braquistócrona, es más que apreciable que la comprobación de que la cicloide es la curva de descenso más rápido a través de una fabricación de la curva es bastante complicada. Ello ha sido uno de las razones que nos han llevado a plantearnos el problema discreto, el de determinar un sistema formado por un número finito de planos rectos (rampas) cuya solución sería más fácil de trasladar al mundo real.

El no encontrar referencia alguna que recoja algunos de los puntos expuestos anteriormente y por tanto el no encontrar una memoria que abarque completamente todos los aspectos más relevantes respecto al problema de la braquistócrona discreta, es lo que nos motiva a recogerlos en el presente documento.

OBJETIVOS

La finalidad de esta revisión y desarrollo del problema de la braquistócrona discreto viene recogida en los siguientes objetivos:

- Revisar, recopilar y unificar estructuralmente diversas memorias que abarcan el problema de la braquistócrona discreta.
- Desarrollar métodos y estrategias para la resolución de problemas matemáticos procedentes del mundo real.

- Proporcionar un método para el trazado y construcción de la curva de descenso más rápido entre dos puntos dados (cicloide).
- Resolver de manera efectiva problemas numéricos con ayuda de la herramienta informática MATLAB® (marca registrada por la compañía TheMath Works).

METODOLOGÍA

Proveernos de una base de referencias iniciales, fue el primer paso para la realización de esta revisión bibliográfica. Dicha base debía comenzar a construirse recurriendo a fuentes dedicadas al planteamiento del problema de la braquistócrona (caso continuo), para familiarizarnos con el planteamiento y la solución original de Johan Bernoulli basada en los principios de la Óptica, y en particular con el Principio de Fermat. Esto nos llevó a introducir la obra de H. H. Goldstine, “A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century” (Berlin Springer, 1980), el artículo de H. W. Broer, “Bernoulli’s light ray solution of the brachistochrone problem through Hamilton’s eyes”, (International Journal of Bifurcation and Chaos (8) 24, 2014), y también a algunas páginas de internet, entre las que destacamos el blog de N. Díaz “Historias de Matemáticas” (<http://historiasdematematicas.blogspot.com/>), que han sido consultadas con frecuencia para la elaboración de este trabajo.

Para completar nuestra base de referencias, recurrimos a publicaciones que recogiesen un tratamiento específico del problema de la braquistócrona en su versión discreta. Eran numerosas las fuentes que mencionaban el problema, pero muy pocas las que lo trataban con cierta profundidad. En este sentido tres han sido las referencias básicas:

- Mungan E. and Lipscombe T. C., “Minimum descent time along a set of connected inclined planes”, Eur. J. Phys. 38, 2017 (045002).
- Theilmann F., “Approaching the brachistochrone using inclined planes—striving for shortest or equal traveling times”, Phys. Educ. 52, 2017 (015009).^[1]_{SEP}
- Agmon D. and Yizhaq H., “The remarkable properties of the discrete brachistochrone”, Eur. J. Phys. 40, 2019 (035005).

La resolución numérica efectiva del problema de la braquistócrona discreta nos lleva a consultar referencias relacionadas con MATLAB®. La Universidad de Sevilla viene contando en los últimos cursos con una licencia de campus de esta potentísima herramienta de cálculo científico, cuyo uso está muy extendido. Ofrece su propio lenguaje de programación, que

hemos empleado para la aplicación de los diversos algoritmos. Las fuentes consultadas se corresponden con apuntes elaborados por la Profesora Rosa Echevarría Líbano, del Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, disponibles en su página web personal <https://personal.us.es/echevarria/docencia.html>

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

1. EL PROBLEMA DE LA CURVA DE TIEMPO MÁS BREVE (BRAQUISTÓCRONA)

En este primer capítulo nos centraremos en la solución original al problema de la braquistócrona. Para poder cumplir con este fin debemos recorrer un amplio periodo histórico ocupado por grandes intelectuales matemáticos. Además presentaremos la solución propia del problema y ciertas propiedades de la cicloide.

1.1. UN PLANTEAMIENTO NOVEDOSO

En el año 1696 se propone un desafío a los matemáticos europeos. Se presenta un problema con una sencilla formulación bastante comprensible para cualquier tipo de audiencia. Hallar el recorrido de la curva a través de la cual el tiempo se vuelve mínimo al dejar caer por ella una bola empujada exclusivamente por la fuerza de la gravedad, sin rozamiento existente, esta curva debe unir dos puntos A (inicio con velocidad cero) y B situados en un mismo plano y sin que se encuentren en la misma línea vertical u horizontal. Si estos puntos de situaran en la misma vertical, este problema perdería su esencia resumiéndose en un simple segmento recto. Incluso, aun así se podría seguir pensando que la solución sigue resumiéndose en una línea recta pues si hacemos referencia a distancia métrica, este será el camino más corto. (Ruiz, 2020)

Pero planteémonos un claro ejemplo cotidiano, para una mayor comprensión. Un socorrista se encuentra en una playa y divisa a una persona que precisa de ayuda en el agua. El puesto de socorrismo se muestra respecto al ahogado de la forma que se presenta en la figura1.

Será lo mas conveniente que el socorrista realice una línea diagonal hasta el ahogado, cuando este corre más rápido por la arena de lo que nada en el agua. En esta situación en la que el tiempo es un factor esencial para la supervivencia de una persona, el socorrista correrá por la arena y se acercará por la misma, lo mas cerca del ahogado y realizará el mínimo recorrido posible en el agua, realizando toda la distancia total en un tiempo mínimo aunque este recorrido suponga una mayor distancia en metros.

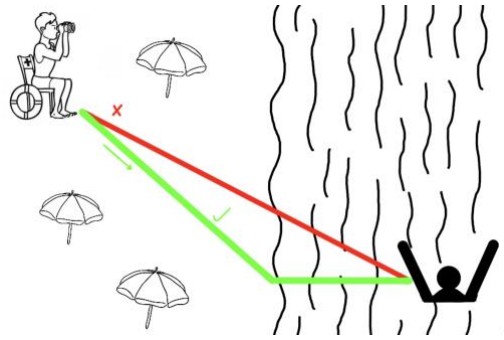


Figura 1. Representación socorrista ante ahogado

Ahora, planteado este claro ejemplo totalmente comprensible ante cualquier público, podríamos dejar de pensar que la línea a recta es la solución mas acertada y nos empezaría a plantear otro tipo de soluciones como una curva. Como en el problema que nos concierne se basa en dejar caer, ahora podríamos suponer que poner el camino más vertical al inicio, podría ayudarnos a lograr una mayor velocidad en menos tiempo.

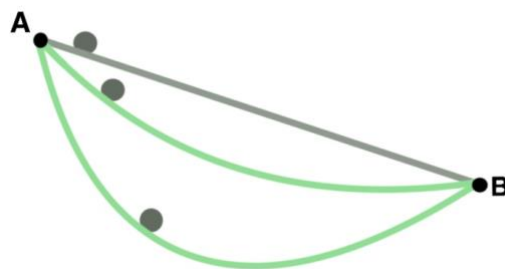


Figura 2. Curva de descenso en menor tiempo

A través del enunciado “en el menor tiempo posible” se le confiere su característico nombre de origen griego a nuestro problema, brachistos ($\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$) 'el más corto', y de chronos ($\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$) 'intervalo de tiempo', braquistócrona literalmente quiere decir, de tiempo mínimo. Conociéndose así la solución del problema como curva braquistócrona o curva de descenso más rápido. (Lima Zempoalteca and Rivera Figueroa, 2020)

1.2. EL DESAFÍO DE BERNOULLI A LOS MATEMÁTICOS

"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur", fue publicado en junio de 1696 por Johann Bernoulli en la revista *Acta Eruditorum Lipsiae*, a través del siguiente enunciado:

“Dados dos puntos A y B en un plano vertical, determínese una trayectoria AMB al cuerpo M que se desplaza, tal que el cuerpo llegue al punto B , cayendo por su propia gravedad desde el punto A en el menor tiempo”. (Johann Bernoulli, 1696).

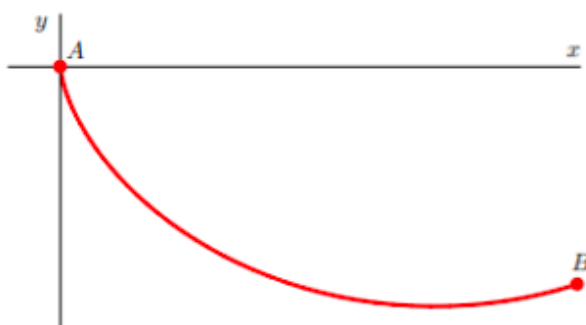


Figura 3. Representación del problema de Bernoulli

Como aclaración, Bernoulli advierte que la solución no se resume en una simple línea recta, como se podría pensar apresuradamente. En caso de que nadie fuera capaz de hallar la solución a finales de ese mismo año, él mismo presentaría la solución a tal enigma.

Durante 6 meses no se recibió solución apropiada alguna, fue entonces cuando Leibniz alega que ya tiene una solución posible y requiere que el plazo de presentación se exceda hasta pascua. Este también requiere que el problema fuese republicado en Francia e Italia.

El tiempo de silencio existente entre junio y diciembre fue interpretado por Bernoulli y Leibniz como una derrota a Newton, pretendiendo estos, a través de sus propias soluciones, demostrar su superioridad ante el matemático más reconocido del momento.

Este afán por avergonzar a Newton públicamente derivaba de una anterior disputa entre Leibniz y Newton, por la atribución del descubrimiento del cálculo infinitesimal. Por esta misma razón, se deduce que el problema que nos acontece iba dirigido principalmente a Newton, pues Bernoulli siempre apoyó a Leibniz ante la anterior disputa.

En mayo de 1697, se publica de forma anónima en el *Acta Eruditorum Lipsiae* un fragmento de un paper (publicado anteriormente en enero en Inglaterra) con una posible solución al problema de Bernoulli. Al leer el artífice del problema la nueva solución anónima, enseguida se percató de su firma implícita alegando: “Reconozco al león por su garra” (1697, Bernoulli). Esto volvía a colocar a Newton en la cúspide matemática, pues se bastó de una sola noche en resolver el problema, mientras que Bernoulli necesitó dos semanas.

Finalmente, acabaron respondiendo cinco matemáticos a través de sus soluciones: Gottfried Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus y Guillaume de l’Hôpital. Estas soluciones (excluyendo la de l’Hôpital) fueron publicadas en la misma edición de la revista que la de Johann Bernoulli. (Efrén and Rocha, 2020; Icaza Herrera, 1994)

1.3. LOS INTENTOS GALILEANOS

Remontándonos más atrás en el tiempo, ya en 1638 podemos encontrar algunas referencias similares a las planteadas por Bernoulli. El mismísimo Galileo Galilei en su obra *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*, creyó dar una respuesta correcta al presente problema, por medio de la curva de *brevissimo tempore*.

Galileo se había cuestionado la forma que debería tener un canal que une dos puntos, para que el tiempo que tarde en llegar una bola de un punto al otro fuese el menor posible. Este se había percatado que una bola que rueda por el arco de una circunferencia alcanza antes la meta que aquella que lo realiza en la recta correspondiente que une los puntos de referencia.

La solución galileana por tanto, es resumida de forma que el camino más rápido de todos se corresponde con el arco que conforma un círculo y no por la línea más corta (línea recta). (Lima Zempoalteca and Rivera Figueroa, 2020; Pérez Sanz, 2006)

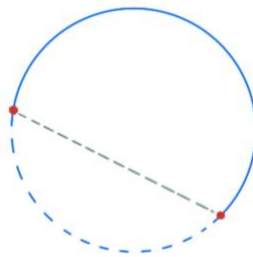


Figura 4. Curva de *brevissimo tempore* Galileana

1.4. PERSONALIDADES CÉLEBRES INVOLUCRADAS

Con el objetivo de cerrar este primer capítulo, en este epígrafe trataremos una breve descripción sobre algunos de los involucrados en los hechos históricos del problema que nos acontece, cuyos nombres nos resultaran familiares de las secciones anteriores.

JOHANN BERNOULLI

Johann Bernoulli, matemático, médico y filólogo suizo nacido en Basilea en julio de 1667 y fallecido en enero de 1748. Fue considerado el más célebre de los geómetras de su época.

Comenzó a estudiar medicina, al mismo tiempo que se adentraba en el terreno matemático junto a uno de sus hermanos mayores, Jakob. Su primer desafío matemático se desarrolló en 1690, en el halló la ecuación de la catenaria, que había sido formulada por su hermano. Rauda y veloz descifró el problema y obtuvo el reconocimiento de la comunidad científica europea, aunque nunca reconoció las enseñanzas que su hermano le había brindado, generándose así un conflicto fraternal.

En 1661 Johann viaja a París, donde su reputación le abrió las puertas del elitista Círculo de Malebranche (foco de la intelectualidad francesa). Allí estableció relación con L'Hôpital, quien le contrató como maestro para que le transmitiera las nuevas técnicas matemáticas. También forjó una gran amistad con Leibniz, junto al cuál descubrió la técnica de la diferenciación parcial, la cual mantuvieron años en secreto con el objetivo de utilizarla como arma secreta ante la resolución de problemas relacionados con curvas.

En 1705 acepta ocupar la cátedra matemática de la universidad de Basilea, cargo que ostentó hasta su muerte en 1748. Johann Bernoulli yace bajo el epitafio: "Aquí yace el Arquímedes de su tiempo" (Tovar Lopez, 2017)

JAKOB BERNOULLI

Jakob Bernoulli, afamado matemático y científico suizo, nacido en Basilea en 1654. Graduado en teología en 1676, durante ese periodo se dedicó de forma autodidacta al estudio de sus verdaderos intereses: matemáticas, física y astronomía. Desde 1687 y hasta su muerte, ocupa la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea.

Junto a su hermano Johann Bernoulli comienzan a estudiar los nuevos cálculos propuestos por Leibniz, dándose lugar a una relación entre los tres que sentaría las bases del nuevo cálculo ante el tratamiento de los problemas geométricos y mecánicos. Este y su hermano Johann, conformarían los pilares de la dinastía Bernoulli, caracterizada por la producción de matemáticos y científicos de gran prestigio. (Gutiérrez, 2006)

GALILEO GALILEI

Galileo fue un astrónomo y físico, nacido en Italia en 1564 y fallecido en 1642. Sus hazañas más épicas se resumen en:

- Utilización y contribución al desarrollo del telescopio en la observación de manchas solares y montañas lunares.
- Descubrimiento de los cuatro satélites mayores de Júpiter y las fases de venus
- Apoyo incondicional por la teoría de Copérnico (la tierra gira alrededor del sol) (Moreno, 2005)

ISAAC NEWTON

Newton fue un físico, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Nacido en diciembre de 1642 y fallecido en 1727. La contribución de Newton a la ciencia es incalculable, destacando:

-La demostración de que las leyes que rigen los movimientos de la Tierra y las de los cuerpos celestes son las mismas.

-Las denominadas las tres leyes de Newton: ley de la inercia, ley de la dinámica y ley de la acción y reacción.

-El descubrimiento de la ley de la gravitación universal.(Weigandt Beckrann, 2005)

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Fue un filósofo, físico y matemático alemán, nacido en 1646 y fallecido en 1716. A él se le atribuyen aportaciones en una amplia variedad de campos (historia, derecha, física, química o geología); realizó destacables descubrimientos científicos como el cálculo infinitesimal o la aportación de la energía cinética a la mecánica. (Leibniz, 2016)

GUILAUME FRANCOIS ANTOINE L'HÔPITAL

Nació en Paris en 1661 y ostentó el título de marqués de Saint-Mesme. Fue militar y matemático, mostrando interés por el nuevo cálculo presentado por Newton y Leibniz. El afán que mostraba por este cálculo, se transformó en el primer libro de cálculo *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), libro que muestra las influencias de sus profesores: Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli y Leibniz. (Alvarado et al., 2005)

2. LA ECUACIÓN DE LA CICLOIDE

El primero en utilizar el término cicloide para la curva que nos ocupa fue Galileo, a el también le debemos los primeros estudios exhaustivos de la misma. La cicloide es una curva descrita por un punto fijo situado en una circunferencia que rueda (sin resbalar) a lo largo de un plano recto. Esta curva fue apodada como la Helena de las matemáticas, tanto por las controversias que causó, a lo largo del siglo XVII, como por la belleza matemática que encerraba. Tal apelativo fue otorgado en relación con Helena de Troya conocida por su inquebrantable hermosura y por ser el motivo principal por el cual dio comienzo a través de su rapto la conocida guerra de Troya, narrada en la "*Iliada*" de Homero.

A lo largo de la historia pocas curvas han tenido un papel tan trascendental como la que nos acontece. A la cicloide le debemos el origen y el desarrollo del cálculo infinitesimal, cierto es que en el presente la curva cicloide carece del gran interés de su época frente a otras curvas trigonométricas (hiperbólicas, logarítmicas, exponenciales...). (Hernández Abreu, 2007)

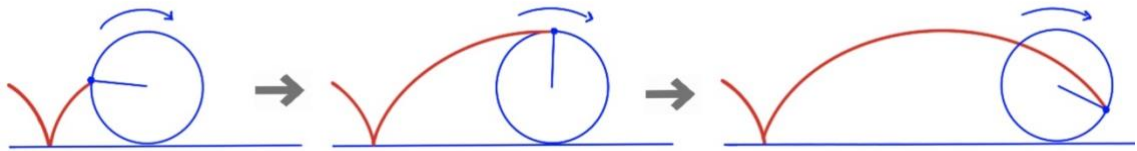


Figura 5. Curva dibujada por una circunferencia

Debido a su importancia histórica, en esta sección deduciremos las ecuaciones paramétricas de una cicloide. Como sabemos, una cicloide es la curva plana generada por la trayectoria de un punto fijo perteneciente a una circunferencia, al rodar ésta sobre una línea recta horizontal sin deslizamiento. Vamos a continuación a describir esta curva de una manera más precisa con ayuda de las Matemáticas.

Fijamos un plano vertical, y en él consideramos un sistema de referencia, de origen en un punto O , con un eje horizontal (eje OX), con valores positivos dispuestos hacia la derecha, y un eje vertical (eje OY), con valores positivos dispuestos hacia arriba. Denotaremos por R el radio de la circunferencia. Supondremos que la circunferencia rueda sobre el eje de abscisas (eje OX) en un plano vertical, y que lo hace de izquierda a derecha (entonces la circunferencia girará en el sentido de las agujas del reloj). Supondremos que inicialmente la circunferencia descansa sobre O el origen de nuestro sistema de referencia. De esta manera las coordenadas de su centro serán $(0, R)$. Nos dedicaremos a determinar la trayectoria trazada por el punto de la circunferencia que en el instante inicial se encuentra en el origen (es decir, en contacto con la recta horizontal). Nos referiremos a este punto por P .

Para describir la trayectoria, vamos a utilizar como parámetro la medida del ángulo θ que describe el giro realizado por la circunferencia. Comenzamos describiendo la trayectoria del centro de la circunferencia en función de θ . Obviamente el centro describirá una trayectoria rectilínea, paralela al eje OX . Más concretamente, se moverá a lo largo de la recta $y = R$. Cuando la circunferencia haya rodado un ángulo θ , la distancia que habrá recorrido la circunferencia será igual a $R\theta$. Por tanto las coordenadas del centro serán $(R\theta, R)$.

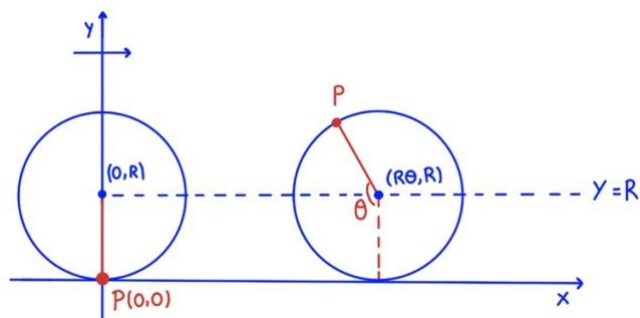


Figura 6. Circunferencia generatriz de la cicloide

Ahora consideramos el movimiento de rotación del punto P alrededor del centro de la circunferencia. Inicialmente, el radio que une el centro con el punto P forma un ángulo con la horizontal que mide $3\pi/2$ radianes (270°). Cuando la circunferencia gira un ángulo θ radianes, puesto que la circunferencia gira en sentido de las agujas del reloj, el radio hasta P pasa a formar un ángulo de $3\pi/2 - \theta$. Por tanto, las coordenadas del punto P vienen dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta + R \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \\ y(\theta) = R + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$ y que $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos(\theta)$, podemos reescribir las ecuaciones anteriores como:

$$\begin{cases} x(\theta) = R (\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = R (1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

Las anteriores se conocen como las ecuaciones paramétricas de la cicloide. Observar que si la circunferencia rodara estando en contacto con el eje OX , pero colocada por debajo de este (o equivalentemente, si rodara sobre la recta de ecuación $y = -2R$), por simetría las ecuaciones de la cicloide serían:

$$\begin{cases} x(\theta) = R (\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = -R (1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

Por este sistema deducimos que la curva cicloide no dependerá de la masa del cuerpo ni de la constante gravitacional.

En los próximos apartados trabajaremos con estas ecuaciones, que son las que nos interesarán en nuestro problema, además de hallarla por medio del programa informático MATLAB.

3. LA ECUACIÓN DE LA BRAQUISTÓCRONA

El objetivo de este capítulo ahora es, dados dos puntos A y B , determinar la ecuación de la cicloide que pasa por A y B . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el punto A coincide con el origen de nuestro sistema de referencia $(0,0)$. El haber supuesto en la construcción realizada en el apartado anterior para obtener la ecuación de la cicloide que inicialmente el punto P coincidía con el origen, nos garantiza que las curvas obtenidas pasan todas por A . Esto se prueba inmediatamente tomando $\theta = 0$ en las ecuaciones.

$$\begin{cases} x(0) = R (0 - \sin(0)) = 0 \\ y(0) = -R (1 - \cos(0)) = 0 \end{cases}$$

Si denotemos por (b_1, b_2) las coordenadas del punto B , con $b_1 > 0$ y $b_2 \leq 0$, para que la cicloide llegue hasta B debemos determinar el valor de R (radio de la circunferencia que genera la cicloide) y un valor de $\hat{\theta}$ de manera que se tenga:

$$\begin{cases} x(\hat{\theta}) = R (\hat{\theta} - \sin(\hat{\theta})) = b_1 \\ y(\hat{\theta}) = -R (1 - \cos(\hat{\theta})) = b_2 \end{cases}$$

Si dividimos las dos ecuaciones anteriores, la incógnita R desaparece, y resulta que $\hat{\theta}$ debe ser solución de la ecuación:

$$\frac{1 - \cos(\hat{\theta})}{\hat{\theta} - \sin(\hat{\theta})} + \frac{b_2}{b_1} = 0$$

Una vez calculado el valor de $\hat{\theta}$, de la ecuación para $y(\hat{\theta})$ se deduce que el valor de R viene dado por:

$$R = \frac{-b_2}{1 - \cos(\hat{\theta})}$$

A partir de estos valores de R y de $\hat{\theta}$ tendremos que la curva braquistócrona que se inicia en A y llega hasta B viene dada por :

$$\begin{cases} x(\theta) = R (\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = -R (1 - \cos(\theta)) \end{cases} \quad \text{con } \theta \in [0, \hat{\theta}]$$

3.1. RESOLUCIÓN EFECTIVA DE LA BRAQUISTÓCRONA

En esta sección presentaremos el programa elaborado a través del paquete informático MATLAB para dar una solución real a la braquistócrona, siendo B un punto concreto y A coincidiendo con el origen, además este programa nos permitirá una representación gráfica de la curva cicloide que pasa por el origen y un punto dado. Serán presentados como solución a ejercicios, dando valores reales, pudiendo ser modificado para la adaptación de nuevos datos o situaciones similares.

```
% Obtención de la cicloide que pasa por AB
% Dadas las coordenadas de un punto B(b1,b2), con b1>0 y b2<=0,
% En este m fichero determinamos la cicloide que pasa por A(0,0) y por B.
b1=9;
b2=-3;
%
fecu=@(tita) (1-cos(tita))/(tita-sin(tita)) + b2/b1;
titaG=fzero(fecu,pi);
titaGgrados=titaG*180/pi
R=-b2/(1-cos(titaG))
%
vtita=linspace(0,titaG);
vx=R*(vtita-sin(vtita));
vy=-R*(1-cos(vtita));
```

```

plot(vx,vy,'b')
hold on
plot(b1,b2,'.r',0,0,'.r','MarkerSize',20)
axis equal
%grid on
title(['R = ',num2str(R),' Tita= ',num2str(titaG)])
hold off
shg
%programa finalizado
%Al ejecutarlo obtenemos la cicloide AB de forma grafica

```

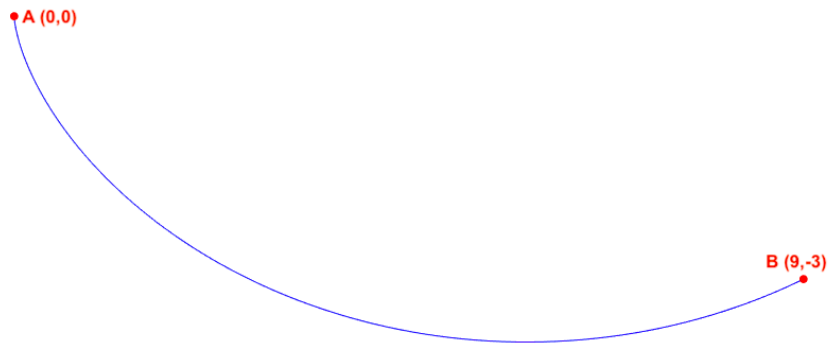


Figura 7. Cicloide que une origen con B (9,-3)

Cambiando en el anterior programa de MATLAB los datos de b_1 y b_2 , podemos obtener diferentes cicloides que unen A y B.

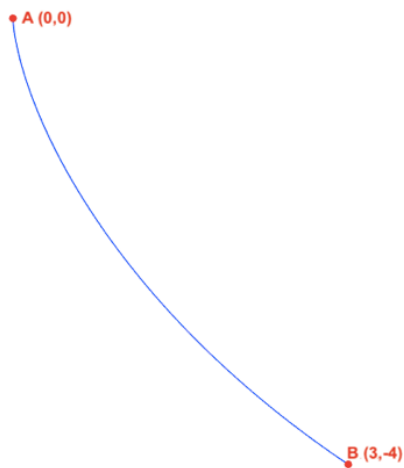


Figura 8. Cicloide que une origen con B (3,-4)

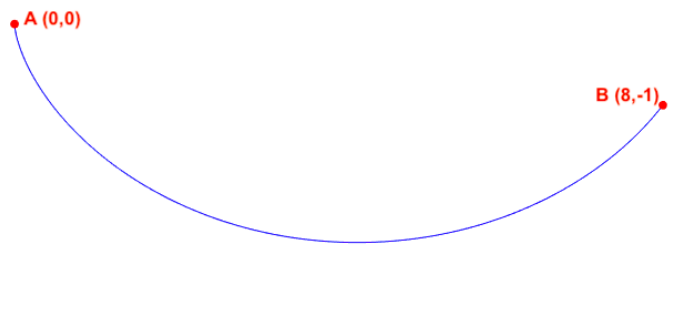


Figura 9. Cicloide que une origen con B (8,-1)

3.2. TIEMPO EMPLEADO EN RECORRER UN TRAMO DE LA BRAQUITÓCRONA

Sabemos que la cicloide es la curva braquistócrona que une A con B , es decir la que hace que un móvil que, partiendo del reposo, se desliza sobre ella sometida exclusivamente a la acción de la gravedad (en ausencia de rozamiento) llegue de A hasta B en el menor tiempo

posible. Pero, ¿cuál es el valor de ese tiempo mínimo? Es decir, ¿cuánto tiempo tarda un móvil en llegar de A hasta B deslizándose por la cicloide que los une? El responder a estas cuestiones y otras relacionadas es el objetivo de esta sección.

Si suponemos que el nivel de energía potencial en el punto A es nulo, como el móvil parte del reposo, tendremos que el valor de la energía potencial inicial es cero. Por el principio de conservación de la energía, cuando la partícula se encuentra en el punto $(x(\theta), y(\theta))$, se tendrá

$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgy(\theta) = 0,$$

donde $v(\theta)$ es la velocidad en dicho punto, m es la masa del móvil y g es la aceleración de la gravedad. De esta relación se deduce

$$v(\theta)^2 = -2gy(\theta) = 2gR(1 - \cos(\theta)).$$

También podemos calcular el valor de la velocidad como sigue. Teniendo en cuenta que el vector de posición de la partícula viene dado por

$$\vec{r}(\theta) = (R(\theta - \sin(\theta)), R(1 - \cos(\theta))).$$

Derivando respecto del tiempo t obtenemos que el vector velocidad viene dado por

$$\vec{v}(\theta) = (R\theta'(1 - \cos(\theta)), R\theta' \sin(\theta)).$$

Si calculamos el módulo de este vector obtenemos una nueva expresión para $v(\theta)$:

$$v(\theta)^2 = |\vec{v}(\theta)|^2 = 2R^2(\theta')^2(1 - \cos(\theta)).$$

Igualando ambas expresiones de $v(\theta)$, y usando que $\theta = 0$ en el instante $t = 0$, deducimos que

$$(\theta')^2 = \frac{g}{R} \Rightarrow \theta' = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{g}{R}} t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{R}{g}} \theta.$$

Luego el tiempo que tarda el móvil en deslizar desde A hasta el punto $(x(\theta), y(\theta))$ es

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \theta.$$

En particular, el tiempo mínimo en deslizar desde A hasta B es

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{R}{g}} \hat{\theta}.$$

4. EL PROBLEMA DE LA BRAQUISTÓCRONA DISCRETA

Como comentábamos al inicio de este dossier, el comprobar que la cicloide que une dos puntos dados es la curva braquistócrona es un asunto complicado. Por si fuera poco, construir tal cicloide en la vida real, parece una tarea difícil. La complejidad rudimentaria de conseguir dar a un material una curvatura exactamente igual a la de una concreta cicloide, es casi

imposible. Sin embargo, podríamos conseguir generar una estructura lo más similar posible a la cicloide que nos ocupa a través de un número finito de rectas (rampas).

En este capítulo, trataremos de dar una solución a esta variante del problema de la braquistócrona que se nos presenta, además hallaremos algunas de sus propiedades y obtendremos sus datos a través de programas específicos en MATLAB. Por medio de estos programas, también obtendremos su representación gráfica a través de rampas, pudiendo compararla con su cicloide correspondiente.

4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA A TRAVÉS DE DOS RAMPAS

Consideramos un sistema de referencia como el que se indica en la Figura 10. Denotamos por A el origen (0,0) y suponemos un punto B (b_1, b_2) con $b_1 > 0$ y $b_2 \leq 0$.

Fijamos un tercer punto R (x_1, y_1) con $x_1 \in (0, b_1)$, $y_1 < 0$, vamos a calcular el tiempo que emplearía una partícula en llegar hasta B (b_1, b_2), asumiendo que parte del reposo desde A (0,0), y se desliza sin rozamiento (únicamente por la acción de la gravedad) a lo largo de dos planos inclinados, el primero uniendo A con R y el segundo uniendo R con B.

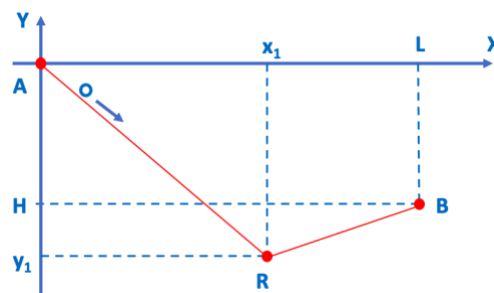


Figura 10. Sistema de descenso por dos rampas

Comenzamos calculando el tiempo empleado en recorrer el plano \overline{AR} . En ausencia de rozamiento, las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso \vec{P} y la reacción del plano inclinado \vec{N} . Descomponiendo en la dirección del plano y en la dirección normal a éste, se deduce que la aceleración tangencial es $a_t = g \cos(\theta)$.

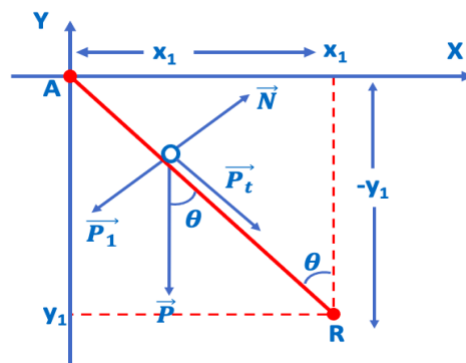


Figura 11. Representación del sistema \overline{AR}

Como la partícula parte del origen desde el reposo, y se mueve siguiendo una trayectoria rectilínea con aceleración constante, en el instante t_1 en el que llega a R se tendrá:

$$|\vec{AR}| = \frac{1}{2}g \cos(\theta) t_1^2 = \frac{1}{2}g \frac{-y_1}{|\vec{AR}|} t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{2|\vec{AR}|^2}{-gy_1} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2}{-gy_1}} |\vec{AR}| = \frac{2}{\sqrt{-2gy_1}} |\vec{AR}|$$

Por tanto: $t_1 = 2 \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{-2gy_1}}$

Entonces la velocidad v_1 en R será: $v_1 = g \cos(\theta) t_1 = g \frac{-y_1}{|\vec{AR}|} t_1 = \sqrt{-2gy_1}$

Otra forma de obtener el valor v_1 , es aplicando el principio de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy = 0$$

A continuación calculamos el tiempo t_2 que tarda en recorrer la rampa \overline{RB}

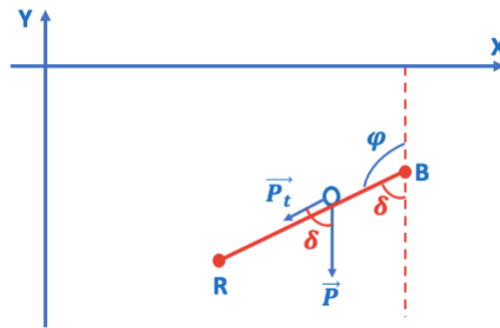


Figura 12. Representación del sistema \overline{RB}

$$\delta + \varphi = \Pi \Rightarrow \delta = \Pi - \varphi \Rightarrow \cos(\delta) = -\cos(\varphi)$$

Utilizamos el mismo razonamiento anterior, pero teniendo en cuenta que la velocidad en R ya no es cero sino v_1 , conduce a

$$\begin{cases} |\vec{RB}| = v_1 t_2 - \frac{1}{2}g \cos(\delta) t_2^2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2}g \cos(\varphi) t_2^2 \\ v_2 = v_1 - g \cos(\delta) t_2 = v_1 + \cos(\varphi) t_2 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $-\frac{1}{2}t_2$ y sumándole el resultado a la primera, se

obtiene: $|\vec{RB}| - \frac{1}{2}v_2 t_2 = \frac{1}{2}v_1 t_2 \Rightarrow |\vec{RB}| = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2 \Rightarrow t_2 = 2 \frac{|\vec{RB}|}{v_1 + v_2}$

Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + g \cos(\varphi) 2 \frac{|\vec{RB}|}{v_1 + v_2} = v_1 + g \frac{y_1 - b_2}{|\vec{RB}|} 2 \frac{|\vec{RB}|}{v_1 + v_2} \Rightarrow (v_2 - v_1) + (v_1 + v_2) \\ &= 2g(y_1 + b_2) \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2g(y_1 - b_2) \Rightarrow \\ v_2^2 &= -2gy_1 + 2g(y_1 - b_2) = -2gb_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{-2gb_2} \end{aligned}$$

Por tanto: $t_2 = 2 \frac{|\vec{RB}|}{v_1 + v_2} = 2 \frac{\sqrt{(b_1 - x_1)^2 + (b_2 - y_1)^2}}{\sqrt{-2gy_1} + \sqrt{-2gb_2}}$

Al igual que anteriormente, el valor v_2 se puede obtener también aplicando el principio de conservación de la energía $\frac{1}{2}mv_2^2 = mgy$

Del estudio anterior se deduce que el tiempo empleado por la partícula en trasladarse hasta B siguiendo las rampas \overline{AR} y \overline{RB} es:

$$T = t_1 + t_2 = 2 \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{-2gy_1}} + 2 \frac{\sqrt{(b_1 - x_1)^2 + (b_2 - y_1)^2}}{\sqrt{-2gy_1} + \sqrt{-2gb_2}}$$

El problema que queremos resolver es el de determinar las coordenadas (x,y) del punto R que hace que el tiempo sea mínimo:

$$T(x, y) = 2 \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{-2gy_1}} + 2 \frac{\sqrt{(b_1 - x_1)^2 + (b_2 - y_1)^2}}{\sqrt{-2gy_1} + \sqrt{-2gb_2}}$$

4.2. EL CASO DE UN NÚMERO DE N PLANOS INCLINADOS (RAMPAS)

En el apartado anterior hemos planteado el problema de la manera más simplificada posible para una mayor comprensión. A partir de lo anterior es posible sacar un sistema que nos permita utilizar un número de rampas concreto cualquiera, lo plantearemos a continuación.

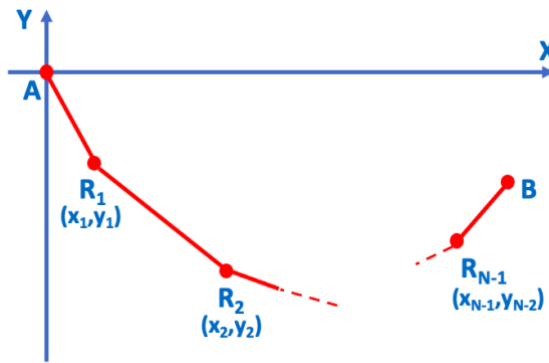


Figura 13. Sistema de referencia con N rampas

Siendo N el número de rampas, en este caso buscamos N-1 puntos R: R_1, R_2, \dots, R_{N-1} . Si denotamos $R_0=A$ y $R_N=B$, estos puntos definen la estructura formada por las N rampas $\overline{R_0R_1}, \overline{R_1R_2}, \dots, \overline{R_{N-1}R_N}$, unos cálculos totalmente análogos a los de la sección anterior demuestran:

- Primera rampa $\overline{R_0R_1}$: tiempo en recorrerse $t_1 = 2 \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{-2gy_1}}$ y la velocidad al llegar a R_1 , $v_1 = \sqrt{-2gy_1}$
- Segunda rampa $\overline{R_1R_2}$: tiempo en recorrerse $t_2 = 2 \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{-2gy_1} + \sqrt{-2gy_2}}$
- N rampa $\overline{R_{N-1}R_N}$: tiempo en recorrerse $t_N = 2 \frac{\sqrt{(x_N - x_{N-1})^2 + (y_N - y_{N-1})^2}}{\sqrt{-2gy_{N-1}} + \sqrt{-2gy_N}}$

Por tanto el tiempo total que tarda el móvil en desplazarse desde A hasta B a través de las N rampas es:

$$T = t_1 + t_2 + \dots + t_N$$

$$T = \left(2 \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{-2gy_1}} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{-2gy_1} + \sqrt{-2gy_2}} + \dots + \frac{\sqrt{(x_N - x_{N-1})^2 + (y_N - y_{N-1})^2}}{\sqrt{-2gy_N} + \sqrt{-2gy_{N-1}}} \right)$$

El problema que queremos resolver es el del determinar las coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{N-1}, y_{N-1})$ de los puntos R_1, R_2, \dots, R_{N-1} que hacen que el tiempo sea mínimo.

4.3. SOLUCIÓN EFECTIVA MEDIANTE RAMPAS

Elaborados los sistemas anteriores, nos favoreceremos de las utilidades ofrecidas por MATLAB para la resolución de nuestro problema, ya que la obtención de esta solución por medio de nuestros propios métodos resulta imposible de obtener. MATLAB a través de los programas elaborados en su propio lenguaje de programación, nos hallará los valores del tiempo en cada rampa, el tiempo total y la posición de los puntos que unen unas rampas con otras en el sistema. Estos programas han sido configurados de forma que podremos comparar los valores con los de la cicloide que resuelve el mismo problema, además podremos también comprar el dibujo de ambos gráficamente.

En estos programas, como $B(b_1, b_2)$ es un punto dado le daremos los valores siguientes para todos los programas $b_1=5$ y $b_2=-1$. A la constante de la aceleración de la gravedad le daremos el valor $g=9.8$

4.3.1. SOLUCIÓN EFECTIVA PARA DOS RAMPAS

```

5. % SOLUCION PARA DOS RAMPAS
6. %---
7. % A. Datos del problema
8. b1=5;
9. b2=-1;
10. %---
11. % B. Variables auxiliares
12. g=9.8;
13. %---
14. % C. Funcion a minimizar
15. f=@(x) 2 * ( sqrt(x(1)^2+x(2)^2)/sqrt(-2*g*x(2)) + ...
16. sqrt((b1-x(1))^2+(b2-x(2))^2)/(sqrt(-2*g*x(2))+sqrt(-2*g*b2)));
17. % D.Minimizacion
18. x=fminsearch(f,[1.1,-1.8])
19. %---
20. % E. Representacion grafica
21. % Ecuacion de la cicloide
22. %
23. fecu=@(tita) (1-cos(tita))/(tita-sin(tita)) + b2/b1;
24. titaG=fzero(fecu,pi);
25. R=-b2/(1-cos(titaG));
26. %

```

```

27. vtita=linspace(0,titaG);
28. vx=R*(vtita-sin(vtita));
29. vy=-R*(1-cos(vtita));
30. plot(vx,vy,'r')
31. grid on
32. axis equal
33. % E.2 Rampas
34. hold on
35. plot([0,x(1),b1],[0,x(2),b2],'b')
36. %% E.3 Puntos
37. % plot([0,x(1),b1],[0,x(2),b2],'.g','MarkerSize',15)
38. % grid on
39. hold off
40. shg
41. %% F. Calculo de los tiempos empleados en recorrer cada rampa
42. t1=2 * sqrt(x(1)^2+x(2)^2)/sqrt(-2*g*x(2))
43. t2=2 * sqrt((b1-x(1))^2+(b2-x(2))^2)/(sqrt(-2*g*x(2))+sqrt(-2*g*b2))
44. %% G. Tiempo empleado en deslizar entre amboas puntos:
45. Tr=t1+t2
46. Tc=titaG*sqrt(R/g)

```

Al ejecutar el programa anterior en MATLAB, obtenemos los siguientes resultados:

- $R_1(x_1, y_1) = R(1, 2425, -1, 8312)$
- Tiempo en recorrer la rampa 1: $t_1 = 0,7388$
- Tiempo en recorrer la rampa 2: $t_2 = 0,7388$
- Tiempo total en recorrer las dos rampas: $Tr = 1,4775$
- Tiempo en recorrer la cicloide: $Tc = 1.3884$

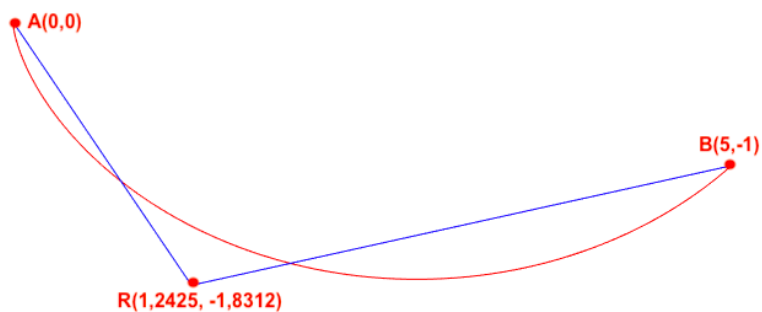


Figura 14. Expresión gráfica del programa para dos rampas

4.3.2. SOLUCIÓN EFECTIVA PARA CUATRO RAMPAS

```

% Datos
b1=5;
b2=-1;
% Variables auxiliares
g=9.8;

```

```

% Funcion a minimizar:
% x=[x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6)] con R1(x1,y1)=(x(1),x(2)),
% R2(x2,y2)=(x(3),x(4)), R3(x3,y3)=(x(5),x(6))
f=@(x) 2*sqrt(x(1)^2+x(2)^2)/sqrt(-2*g*x(2))+ ...
    2*sqrt((x(3)-x(1))^2+(x(4)-x(2))^2)/(sqrt(-2*g*x(2))+sqrt(-2*g*x(4)))+ ...
    2*sqrt((x(5)-x(3))^2+(x(6)-x(4))^2)/(sqrt(-2*g*x(4))+sqrt(-2*g*x(6)))+ ...
    2*sqrt((b1-x(5))^2+(b2-x(6))^2)/(sqrt(-2*g*x(6))+sqrt(-2*g*b2));
x=fminsearch(f,[1,-1.3,3.2,-1.7,4,-1.2]);
%cicloide
%
fecu=@(tita) (1-cos(tita))/(tita-sin(tita)) + b2/b1;
titaG=fzero(fecu,pi);
R=-b2/(1-cos(titaG));
%
vtita=linspace(0,titaG);
vx=R*(vtita-sin(vtita));
vy=-R*(1-cos(vtita));
plot(vx,vy,'r')
hold on
plot([0,x(1),x(3),x(5),b1],[0,x(2),x(4),x(6),b2],'b')
%planos inclinados
hold off
axis equal
%grid on
%tiempos
t1=2*sqrt(x(1)^2+x(2)^2)/sqrt(-2*g*x(2))
t2=2*sqrt((x(3)-x(1))^2+(x(4)-x(2))^2)/(sqrt(-2*g*x(2))+sqrt(-2*g*x(4)))
t3=2*sqrt((x(5)-x(3))^2+(x(6)-x(4))^2)/(sqrt(-2*g*x(4))+sqrt(-2*g*x(6)))
t4=2*sqrt((b1-x(5))^2+(b2-x(6))^2)/(sqrt(-2*g*x(6))+sqrt(-2*g*b2))
Tr=t1+t2+t3+t4
Tc=titaG*sqrt(R/g)

```

Al ejecutar el anterior programa obtenemos los siguientes resultados:

- Tiempo en recorrer las rampas 1,2,3,4 : $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0,3520$
- Tiempo total en recorrer las cuatro rampas: $Tr = 1,4081$
- Tiempo en recorrer la cicloide: $Tc = 1.3884$

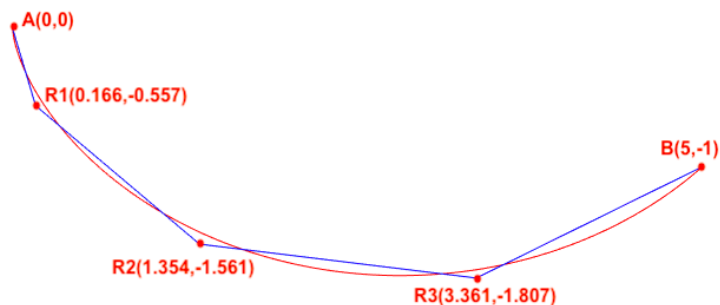


Figura 15. Expresión gráfica del programa para cuatro rampas

Obtenidos estos resultados, vemos como a la par que se aumenta el número de rampas, el tiempo de llegada va acercándose cada vez más a la cicloide y lo mismo va sucediendo con la forma que adoptan las rampas.

4.3.3. LIMITACIONES DE MATLAB ANTE UN NÚMERO ELEVADO DE RAMPAS

Las limitaciones que presenta MATLAB para la ejecución de nuestro problema a través de rampas, comienzan a surgir cuando realizamos un programa con 6 rampas. Al ejecutar un programa como los anteriores realizado para 6 rampas, MATLAB nos proporcionará unos resultados que no se ajustaran a lo esperado.

Además MATLAB nos advierte con el siguiente mensaje en la ventana de resultados, "Exiting: Maximum number of function evaluations has been exceeded", queriéndonos decir así que se ha excedido el número máximo de funciones evaluables.

Mostrándonos un conjunto de rampas que comienzan a alejarse de la forma de la cicloide y proporcionándonos un total de 5 rampas en lugar de 6 como se muestra en la Figura 16.

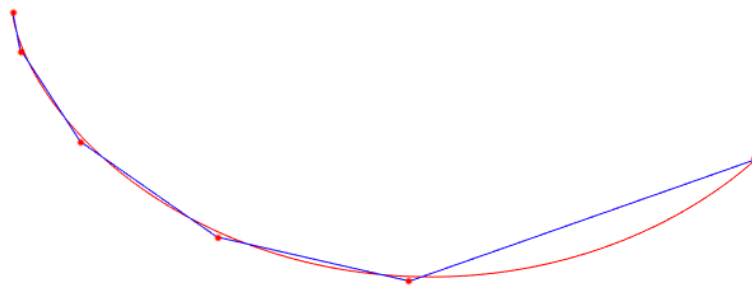


Figura 16. Expresión gráfica fallida del programa para seis rampas

4.4. PROPIEDADES DE LA BRAQUISTÓCROMA DISCRETA

En esta sección vamos a destacar dos propiedades interesantes y sorprendentes de la solución del problema de la braquistócrona discreta. Supongamos que nos han dado dos puntos A y B , como en la sección anterior, y hemos resuelto el problema de la braquistócrona discreta, es decir, el de determinar la disposición de N rampas que una ambos puntos, para que un móvil que, partiendo del reposo de A , se deslice sobre ellas hasta B , haciéndolo en el menor tiempo posible, sometido exclusivamente a la acción de la gravedad (en ausencia de rozamiento). Estas N rampas constituyen una poligonal que une A con B , y queda determinada por otros $N - 1$ vértices (los puntos de unión entre dos rampas que se suceden), que denotaremos por R_1, R_2, \dots, R_{N-1} . Las coordenadas del punto R_i las denotaremos por (x_i, y_i) para cada valor de i entre 1 y $N - 1$. Así, la primera rampa unirá A con R_1 , la segunda unirá R_1 con R_2 , y así sucesivamente, hasta la última que unirá R_{N-1} con B . Esta poligonal la

denominaremos como la braquistócrona discreta de N rampas (o segmento, o planos inclinados).

La braquistócrona discreta de N rampas verifica las siguientes propiedades:

1. Si denotamos por t_1, t_2, \dots, t_N los tiempos que tarde el móvil en recorrer cada una de las N rampas, se tiene que todos ellos son iguales, es decir

$$t_1 = t_2 = \dots = t_N$$

2. Si denotamos por $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ los ángulos que forman cada rampa con la vertical, y por v_1, v_2, \dots, v_N la velocidad media del móvil en cada rampa, entonces se cumple la relación

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \dots = \frac{\sin \theta_N}{v_N}$$

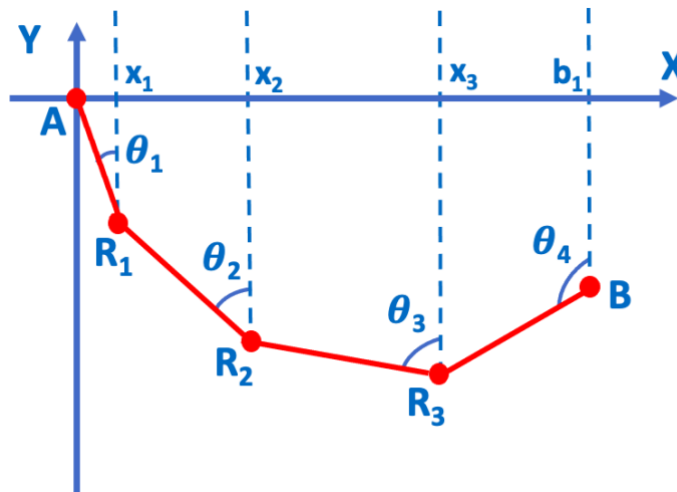


Figura 17. Extensión de la Ley de Snell

La demostración rigurosa de estas propiedades no es simple, y escapa a los objetivos de la presente memoria. Aquí nos limitaremos a justificarlas comprobando que se verifican en los distintos casos que resolveremos numéricamente.

La propiedad 2 nos recuerda a la Ley de Snell de la refracción, que como sabemos se puede deducir a partir del Principio de Fermat, como la solución también de un problema de tiempo mínimo.

Número Rampas	Tiempo cicloide	Tiempo rampas	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
2	1,3884	1,4775	0,7388	0,7388	-	-	-
3	1,3884	1,4247	0,4749	0,4749	0,4749	-	-
4	1,3884	1,4081	0,3520	0,3520	0,3520	0,3520	-
5	1,3884	1,4009	0,2802	0,2802	0,2802	0,2802	0,2802

Figura 18. Tabla de valores proporcionados por MATLAB

De la tabla ilustrada en la figura 18, se puede apreciar claramente como los tiempos empleados en recorrer cada rampa del mismo sistema son iguales. También se observa que cuantas más rampas tengamos, más conseguimos acercarnos al tiempo mínimo que tarda el móvil en recorrer la cicloide.

4.5. ALGORITMO ALTERNATIVO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE LA BRAQUISTÓCRONA DISCRETA

Hemos podido comprobar en la sección 4.3.3, que un intento de resolver el problema de la braquistócrona discreto con ayuda del comando *fminsearch* de Matlab sólo funciona para los casos de dos, tres, cuatro y cinco rampas. A partir de seis rampas la dificultad del problema se incrementa y el problema se hace intratable por este medio.

En esta sección vamos a dar un procedimiento alternativo para la resolución numérica de nuestro problema con ayuda de Matlab, basado en explotar adecuadamente las interesantes propiedades de la braquistócrona discreta destacadas en la sección 4.4, y que hemos podido constatar en nuestros experimentos numéricos. Con la notación de esa sección, y por la Propiedad 2, sabemos que existe una constante, que denotaremos por V_0 tal que

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \dots = \frac{\sin \theta_N}{v_N} = V_0$$

y por consiguiente se tiene la siguiente relación para las velocidades media a lo largo de las distintas rampas

$$v_1 = V_0 \sin \theta_1, \quad v_2 = V_0 \sin \theta_2, \quad \dots \quad v_N = V_0 \sin \theta_N$$

Por la Propiedad 1, sabemos que existe una constante t_0 tal que

$$t_1 = t_2 = \dots = t_N = t_0$$

Si denotamos por $u_0 = 0$ la velocidad del móvil en el punto A , u_1 la velocidad en el punto R_1 , u_2 la velocidad en el punto R_2 , ..., u_{N-1} la velocidad en el punto R_{N-1} , u_N la velocidad en el punto B , se tienen las siguientes relaciones

$$u_i = u_{i-1} + g \cos \theta_i t_0, \quad u_{i+1} = u_i + g \cos \theta_{i+1} t_0$$

para todo i . A partir de las relaciones anteriores, y teniendo en cuenta que

$$v_i = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \quad v_{i+1} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

se deducen las relaciones

$$\begin{cases} u_i = v_i + \frac{1}{2} g \cos \theta_i t_0 \\ u_i = v_{i+1} - \frac{1}{2} g \cos \theta_{i+1} t_0 \end{cases}$$

Igualando ambas relaciones, y usando la expresión obtenida para las velocidades medias $v_i = V_0 \sin \theta_i$, $v_{i+1} = V_0 \sin \theta_{i+1}$, se prueba

$$\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i = \frac{gt_0}{2V_0} (\cos \theta_{i+1} + \cos \theta_i)$$

con ayuda de las bien conocidas fórmulas trigonométricas, de esta expresión se llega a

$$\tan \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2} = \frac{gt_0}{2V_0}$$

es decir, la diferencia entre dos ángulos consecutivos $\theta_{i+1} - \theta_i$ es constante. Entonces los ángulos se pueden determinar por las fórmulas

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{gt_0}{2V_0},$$

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \tan^{-1} \frac{gt_0}{2V_0} = \theta_1 \rightarrow \theta_2 = \theta_1 + 2\theta_1 = 3\theta_1$$

$$\frac{\theta_3 - \theta_2}{2} = \tan^{-1} \frac{gt_0}{2V_0} = \theta_1 \rightarrow \theta_3 = \theta_2 + 2\theta_1 = 3\theta_1 + 2\theta_1 = 5\theta_1$$

...

$$\frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{2} = \tan^{-1} \frac{gt_0}{2V_0} = \theta_1 \rightarrow \theta_N = \theta_{N-1} + 2\theta_1 = (2N - 1)\theta_1$$

Es decir, cada ángulo θ_i se obtiene del anterior sumándole $2\theta_1$.

Por otra parte, si denotamos por l_1, l_2, \dots, l_N las longitudes de las distintas rampas, entonces se verifican las relaciones

$$\begin{cases} l_1 = v_1 t_0 = V_0 \sin \theta_1 t_0 \\ l_i = v_i t_0 = V_0 \sin \theta_i t_0 \end{cases} \rightarrow l_i = l_1 \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_1} \text{ para todo valor de } i.$$

A partir de estas igualdades se obtiene fácilmente

$$b_1 = \sum_{i=1}^N l_i \sin \theta_i = \frac{l_1}{\sin \theta_1} \sum_{i=1}^N \sin((2i - 1)\theta_1) = \frac{l_1}{\sin \theta_1} P_X(\theta_1)$$

$$-b_2 = \sum_{i=1}^N l_i \cos \theta_i = \frac{l_1}{\sin \theta_1} \sum_{i=1}^N \sin((2i - 1)\theta_1) \cos((2i - 1)\theta_1) = \frac{l_1}{\sin \theta_1} P_Y(\theta_1)$$

Dividiendo ambas expresiones, eliminamos el parámetro l_1 y obtenemos una ecuación donde sólo interviene la incógnita θ_1 :

$$\frac{b_1}{-b_2} = \frac{P_X(\theta_1)}{P_Y(\theta_1)}$$

Una vez calculado θ_1 , ya podemos calcular todos los ángulos $\theta_i = (2i - 1)\theta_1$ y a partir de ellos las longitudes de todas las rampas mediante las fórmulas

$$l_1 = b_1 \frac{\sin \theta_1}{P_X(\theta_1)}, l_2 = l_1 \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}, l_3 = l_1 \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1}, \dots, l_N = l_1 \frac{\sin \theta_N}{\sin \theta_1}$$

Las coordenadas de los puntos R_1, R_2, \dots, R_{N-1} se calculan mediante las expresiones

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_i = x_{i-1} + l_i \sin \theta_i \\ y_i = y_{i-1} - l_i \cos \theta_i \end{cases}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1.$$

Destacar que el nuevo algoritmo diseñado para obtener la solución del problema de la braquistócrona discreto, ya no pasa por resolver un problema de mínimos (ya no hace uso del comando *fminsearch*), sino que en su lugar explota sus notables propiedades. La dificultad matemática se limita a resolver la ecuación que nos proporciona el valor de θ_1 , todo lo que sigue después es un cálculo simple. La experiencia numérica demuestra la eficiencia del algoritmo, que permite tratar el caso general de N rampas.

4.5.1. SOLUCIÓN EFECTIVA CON EL NUEVO ALGORITMO

```
% Datos
b1=5;
b2=-1;
g=9.8;
N=6;
%---
% Calculo de theta1:
funecu=@(theta) sum(sin((1:2:2*N-1)*theta).^2)/...
    sum(sin((1:2:2*N-1).*theta).*cos((1:2:2*N-1).*theta))+b1/b2;
theta1=fzero(funecu,0.1);
%---
% Calculo de todos los angulos:
vectheta=(1:2:2*N-1)*theta1;
%---
% Calculo de las longitudes de las rampas:
long1=b1*sin(theta1)/sum(sin((1:2:2*N-1).*theta1).^2);
veclong=long1*sin(vectheta)/sin(theta1);
%---
% Calculo de las coordenadas de los puntos de union:
vecX=zeros(1,N-1);
vecY=zeros(1,N-1);
vecX(1)=long1*sin(theta1);
vecY(1)=-long1*cos(theta1);
for i=2:N-1
    vecX(i)=vecX(i-1)+veclong(i)*sin(vectheta(i));
    vecY(i)=vecY(i-1)-veclong(i)*cos(vectheta(i));
end
%---
% Graficas
% 1) Cicloide
%
fecu=@(tita) (1-cos(tita))/(tita-sin(tita)) + b2/b1;
titaG=fzero(fecu,pi);
R=-b2/(1-cos(titaG));
%
vtita=linspace(0,titaG);
vx=R*(vtita-sin(vtita));
vy=-R*(1-cos(vtita));
plot(vx,vy,'r')
hold on
```

```

% 2) Planos inclinados
plot([0,vecX,b1],[0,vecY,b2],'.b-','MarkerSize',12)
hold off
axis equal
grid on
%---
% Tiempos en recorrer cicloide y rampas
Tc=titaG*sqrt(R/g)
t1=2*sqrt(vecX(1)^2+vecY(1)^2)/sqrt(-2*g*vecY(1))
Tr=N*t1

```

Al ejecutar el anterior programa obtenemos los siguientes resultados:

- Tiempo en recorrer las rampas 1,2,3,4 : $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 0.2328$
- Tiempo total en recorrer las cuatro rampas: $Tr = 1.3970$
- Tiempo en recorrer la cicloide: $Tc = 1.3884$

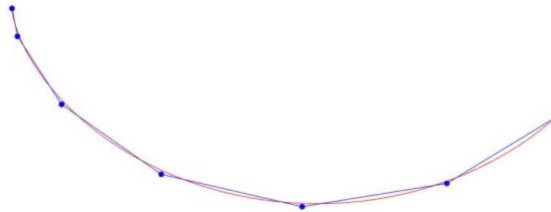


Figura 19. Expresión gráfica del programa para seis rampas

CONCLUSIONES

A través de la realización de esta memoria hemos llegado a varias conclusiones:

- El papel fundamental de las Matemáticas como herramienta para la formulación y resolución de problemas complejos, como el de la braquistócrona discreta.
- La importancia de la discretización de un problema, es decir, la formulación de problemas aproximados de menor dificultad (de dimensión finita) en los que las soluciones son más fáciles de obtener y/o de manipular, y que por tanto constituyen una alternativa más simple que el tratar de construir directamente la solución del problema de partida. Este es el caso de la aproximación por poligonales de la curva cicloide.
- El valor del conocimiento de la historia de las ciencias, y en particular, de los problemas más destacados en el desarrollo de las Matemáticas, como fuente de inspiración para nuevos retos y avances. Un claro ejemplo el reto formulado por Johann Bernoulli en 1696 sobre la curva de descenso más rápido.
- Las ventajas que aportan las herramientas informáticas de cálculo científico para la realización de cálculos complejos, el desarrollo gráfico y la resolución efectiva de los problemas. Este trabajo no hubiera sido posible en su forma actual sin la ayuda del paquete MATLAB® (marca registrada por la compañía TheMath Works).

BIBLIOGRAFÍA

Agmon D, Yizhaq H. The remarkable properties of the discrete brachistochrone 2019.

Alvarado EC, Gomez Dévora MC, González Martínez IY, González Vara MI. La regla de L'Hôpital y una controversia a su alrededor. vol. 12. 2005.

Broer HW. Bernoulli's light ray solution of the brachistochrone problem through Hamilton's eyes 2014.

Díaz N. Historia de matemáticas, <http://historiasdematematicas.blogspot.com>

Echevarría R, Apuntes de Matlab, <https://personal.us.es/echevarria/docencia.html>

Efrén C, Rocha V. El problema de la curva braquistócrona. Contexto histórico, la solución de Johann Bernoulli y una deducción analítica de la ecuación. La curva braquistócrona View project 2020. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.13244.56966>.

Goldstine H. A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century 1980.

Gutiérrez S. Jakob Bernoulli: La geometría y el nuevo cálculo 2006.

Hernández Abreu D. La cicloide: un recorrido histórico por sus propiedades 2007.

Icaza Herrera M. Historia y Filosofía de la Física Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem. 1994.

Leibniz GW. Nuevos ensayos sobre el entendimiento. Madrid: Ediciones Akal; 2016.

Lima Zempoalteca I, Rivera Figueroa A. Uso de la tecnología para visualizar el deslizamiento de un cuerpo sobre una cicloide. 2020.

Moreno JE. Revista cultural Lotería. 2005.

Mungan CE, Lipscombe T. Minimum descent time along a set of connected inclined planes 2017.

Pérez Sanz A. El mejor tobogán o Galileo no llevaba razón. 2006.

Ruiz C. Elementos de ecuaciones diferenciales. 2020.

Theilmann F. Approaching the brachistochrone using inclined planes—striving for shortest or equal traveling times 2017.

Tovar Lopez JC. Aportes a la enseñanza de la hidráulica: un análisis histórico de Johann Bernoulli. 2017.

