

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Teoría de Juegos Cooperativos y su aplicación a recursos hídricos

Autor: Rafael Frutos Martín

Tutor: Manuel Ordoñez

Dpto. Matemáticas Aplicadas
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Teoría de Juegos Cooperativos y su aplicación a recursos hídricos

Autor:
Rafael Frutos Martin

Tutor:
Manuel Ordoñez
Profesor titular

Dpto. de Matemáticas Aplicadas
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Grado: Teoría de Juegos Cooperativos y su aplicación a recursos hídricos

Autor: Rafael Frutos Martín

Tutor: Manuel Ordoñez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mi Abuela Teresa

Agradecimientos

Quiero agradecer este trabajo sobretodo a mis padres, Rafael y M^o Teresa, pilares fundamentales en mi vida, por apoyarme en todo momento, sobre todo en los más duros, soy hoy gracias a ellos. Mis éxitos son suyos.

Quiero agradecer también a mi abuela Teresa su apoyo incondicional y confianza plena en mi, gran parte de este éxito es por ella ya que su motivación e ilusión me han dado fuerzas para continuar.

A mis hermanos, M^o Teresa y Pepe, mis tios Joaquin y Paloma y mis primas Paloma, Rosario y María por su compañía, apoyo, risas, y en general la convivencia que ha sido parte de esta etapa final confinados en Marchelina (Osuna).

A mis amigos tanto a los de toda la vida, como a los nuevos que han surgido a raíz de mi etapa en la escuela, por hacer que cada noche de estudio, cada almuerzo en el comedor o cada ruta en coche se conviertan en pasatiempos agradables creo sin duda que son lo mejor que me ha dado la escuela.

A mis tias Enriqueta, M^o Pepa, Pilar, Angelita las cuales son como abuelas para mi. Su compañía y ganas porque finalizase esta etapa han sido una motivación más.

A mis tios M^o Pilar y Joaquin

Rafael Frutos Martin

Graduado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Sevilla, 2020

Resumen

Este trabajo está centrado en la problemática que existe actualmente con el recurso del agua. Para solventar este problema nos basaremos en la teoría de juegos. Esta teoría mediante un enfoque matemático tratará de llegar al mejor reparto posible de este preciado bien.

El trabajo fundamentalmente se basa en explicar en qué consiste esta teoría, cuáles son sus bases y como son los posibles casos a los que ésta se enfrenta. Conforme indagamos más en ella, vemos que hay una serie de condiciones que facilitan o dificultan este reparto. Además, también se verán dos enfoques que tiene la teoría, el primero de ellos que consiste en llegar a un acuerdo mutuo entre los participantes para que todos salgan beneficiados y el segundo enfoque que está basado en un punto de vista más individual.

Los últimos dos capítulos están basados precisamente en estos dos enfoques. En el capítulo tres veremos como a través de la cooperación de todos los integrantes lograremos reducir los costes de cada uno.

En el capítulo cuatro veremos como los integrantes sin llegar a ningún acuerdo de cooperación toman sus decisiones individualmente.

Todo esto se explicará a través de un supuesto caso en el que una ciudad, deberá abastecer de agua a sus habitantes. Nosotros haremos una distinción entre los distintos fines que tendrá ésta como son la agricultura, la industria y uso doméstico.

Para explicar el enfoque de los juegos cooperativos, veremos el coste que tienen empresas externas que se dedican al intercambio de este bien e intentaremos llegar a un acuerdo que beneficie a todas. También se verá un enfoque no cooperativo asociado a cuanta agua va a necesitar cada sector de la ciudad.

Abstract

This work is focused on the problems that currently exist with water resources. To solve this problem, we will rely on game theory. This theory by means of a mathematical approach will try to arrive at the best possible distribution of this precious good.

The work is fundamentally based on explaining what this theory consists of, what its bases are and how the possible cases it faces are. As we dig deeper into it, we see that there are a series of conditions that facilitate or hinder this distribution. In addition, we will also see two approaches that the theory has, the first of which consists of reaching a mutual agreement among the participants so that everyone benefits and the second approach that is based on a more individual point of view.

The last two chapters are based precisely on these two approaches. In chapter three we will see how through the cooperation of all the participants we will manage to reduce the costs of each one.

In chapter four we will see how the members, without any cooperation agreement, make their decisions individually.

All this will be explained through a case in which a city will have to supply water to its inhabitants. We will make a distinction between the different purposes that this will have such as agriculture, industry and domestic use.

To explain the approach of cooperative games, we will see the cost of external companies that are dedicated to the exchange of this good and we will try to reach an agreement that benefits everyone. We will also see a non-cooperative approach associated with how much water each sector of the city will need.

Índice

Agradecimientos	viii
Resumen	x
Abstract	xi
Índice	xii
Índice de Tablas	xiv
Índice de Figuras	xv
Notación	xvii
1 Introducción	1
1.1. <i>La problemática global del agua</i>	1
1.2. <i>La escasez del agua</i>	2
1.3. <i>Consumo de los sectores</i>	3
1.4. <i>La contaminación del agua</i>	4
2 Teoría de juegos cooperativos y no cooperativos	7
2.1. <i>Introducción</i>	7
2.2. <i>Juegos Cooperativos</i>	8
2.3. <i>El conjunto de imputaciones</i>	9
2.4. <i>Concepto de solución de juegos cooperativos</i>	10
2.5. <i>El valor de Shapley</i>	11
2.6. <i>Juegos no cooperativos. El equilibrio de Nash</i>	12
3 Aplicación de la metodología a reparto de costos y beneficios	14
3.1. <i>Aclaraciones del modelo</i>	14
3.2. <i>Datos del modelo</i>	15
3.3. <i>Nucleolo</i>	23
3.4. <i>Esquema del modelo</i>	26
3.5. <i>Solución</i>	27
4 Enfoque no cooperativo	28
4.1. <i>Restricciones</i>	29
4.1.1. <i>Comunes</i>	30
4.1.2. <i>En función de cada jugador</i>	30
4.1.2.1. <i>Usuarios agrícolas</i>	30
4.1.2.2. <i>Usuarios industriales</i>	31
4.1.2.3. <i>Usuarios domésticos</i>	31
4.1.3. <i>Restricciones adicionales</i>	32
4.2. <i>Descripción</i>	32
4.3. <i>Parámetros</i>	33
4.4. <i>Modelo</i>	33
4.5. <i>Solucion</i>	35

4.6.	<i>Conclusiones</i>	35
4.7.	<i>Tratamiento de aguas residuales</i>	36
4.7.1.	Características de las Aguas	37
4.7.2.	Principales contaminantes	38
4.7.3.	Caudales	40
4.7.4.	Recogida y conducción	43
4.7.5.	Tratamiento	44
4.7.5.1.	Pretratamiento	45
4.7.5.2.	Tratamiento primario	47
4.7.5.3.	Tratamiento secundario	48
4.7.5.4.	Tratamiento terciario	49
4.7.6.	Evacuación y reutilización	50
	Referencias	51

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-1 Principales Indicadores Consumo de Agua	3
Tabla 2-1 Matriz de juego	13
Tabla 3-1 Características Embalse A	16
Tabla 3-2 Características Embalse B	17
Tabla 3-3 Características Embalse C	18
Tabla 4-1 Variables de decisión	29
Tabla 4-2 Parámetros del modelo	33
Tabla 4-3 Parámetros de los cultivos	33
Tabla 4-4 Soluciones modelo	35
Tabla 4-5 Biodegradabilidad del agua residual según relación DBO5/DQO	39
Tabla 4-6 Valores típicos de los contaminantes del agua residual urbana	40
Tabla 4-7 Consumos urbanos (l/hab día), según los usos y tamaño de población abastecida	41
Tabla 4-8 Rendimientos (%) en las etapas de depuración de las aguas residuales urbanas	49

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Consumo de agua	3
Figura 1-2 Zona Polisaprobia	5
Figura 3-1 Agua embalsada en España	16
Figura 3-2 Tipos de Acuíferos	19
Figura 3-3 Ahoyadora	19
Figura 3-4 Agua potable	20
Figura 3-5 Uso agua subterránea	20
Figura 3-6 Captaciones	21
Figura 3-7 Captaciones en embalses	21
Figura 3-8 Canal abierto	22
Figura 3-9 Distribución por gravedad	22
Figura 3-10 Distribución por bombas	23
Figura 3-11 Costes Jugadores	27
Figura 4-1 Intercambio no cooperativo	29
Figura 4-2 Ciclo Agua Residual Urbana	37
Figura 4-3 Evolución del caudal de agua residual generado	42
Figura 4-4 Reaccion F_p y Q_{med}	43
Figura 4-5 Tubería y válvula bypass	44
Figura 4-6 Componentes aguas residuales urbanas	44
Figura 4-7 Pozo de llegada	45
Figura 4-8 Reja de desbaste	46
Figura 4-9 Esquema Desarenador/Desengrasador	46
Figura 4-10 Desarenador/Desengrasador	47
Figura 4-11 Decantador Primario	47
Figura 4-12 Tratamiento secundario	48
Figura 4-13 Línea de Fangos	49

Notación

A^*	Conjugado
c.t.p.	En casi todos los puntos
c.q.d.	Como queríamos demostrar
■	Como queríamos demostrar
e.o.c.	En cualquier otro caso
e	número e
Re	Parte real
Im	Parte imaginaria
sen	Función seno
tg	Función tangente
arctg	Función arco tangente
sen	Función seno
$\sin^x y$	Función seno de x elevado a y
$\cos^x y$	Función coseno de x elevado a y
Sa	Función sampling
sgn	Función signo
rect	Función rectángulo
Sinc	Función sinc
$\partial y \partial x$	Derivada parcial de y respecto
x°	Notación de grado, x grados.
$\text{Pr}(A)$	Probabilidad del suceso A
SNR	Signal-to-noise ratio
MSE	Minimum square error
:	Tal que
$<$	Menor o igual
$>$	Mayor o igual
\	Backslash
\Leftrightarrow	Si y sólo si

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo de fin de grado está centrado en el actual problema que cada día se centra la atención de científicos, técnicos, políticos y en general a la mayoría de los habitantes del planeta relacionado con la optimización y aprovechamiento del agua.

La escasez de este bien vital obliga a reiterar nuevamente una llamada a la moderación de consumo por parte de la población mundial, ya que sin la colaboración de ésta los esfuerzos técnicos que llevan a cabo algunas organizaciones resultarían en vano.

Para que seamos conscientes de la escasez de este bien conviene saber que el 97,5% del agua de la tierra se encuentra en los océanos y mares de agua salada, eso nos deja un 2,5% restante de agua dulce. Del total de agua dulce del mundo, el 69% la encontramos en los polos y las cumbres de las montañas más altas y se encuentra en estado sólido, el 30% se encuentra en acuíferos profundos y en la humedad del suelo y el 1% se escurre por las cuencas hidrográficas en forma de arroyos y ríos y se depositan en lagos, lagunas y en otros cuerpos superficiales de agua y en acuíferos.

Además, el agua tal y como se encuentra en la naturaleza, para ser utilizada sin riesgo para el consumo humano requiere ser tratada, para así eliminar partículas y organismos que pueden ser perjudiciales para la salud. Posteriormente a su tratamiento ésta puede ser distribuida por una red de tuberías hasta llegar a domicilios donde la gente hace uso de ella.

1.1. La problemática global del agua

Hoy en día la creciente necesidad de lograr un equilibrio hidrológico que asegure el abasto suficiente de agua a la población se logrará armonizando la disponibilidad natural con las extracciones del recurso mediante el uso eficiente del agua.

Por poner un ejemplo México, un país rico en recursos naturales, obtiene el agua que consume la población de fuentes tales como ríos, arroyos y acuíferos del subsuelo, recargándose éstos últimos de forma natural en época de lluvias. Sin embargo, la época de lluvias tiene una duración promedio de cuatro meses lo que propicia una escasa captación, sumado a esto, del total de agua captada por lluvias el 70% se evapora.

La desproporción que existe entre la cantidad de agua que se capta por escurrimiento y las extensiones territoriales que comprenden sumado a la corta temporada de lluvias hace que la disponibilidad del agua sea cada vez menor. Bajo este panorama México se enfrenta a grandes problemas de disponibilidad, desperdicio y contaminación.

Para frenar esta problemática, se llevan a cabo construcciones de infraestructura hidráulica que permiten satisfacer de agua a distintos sectores de la población: el sector agrícola, el sector industrial, el sector doméstico y el de

servicios para la generación de energía hidráulica. No obstante, existen diferencias territoriales importantes que son desfavorables y por consiguiente más difíciles de evitar

En el norte del territorio nacional, el agua de lluvia que se capta por escurrimiento es únicamente el 4% mientras que en el sureste y zonas costeras se logra captar hasta el 50% del escurrimiento, por lo cual las diferencias territoriales son notables.

Así, entre otros beneficios de la infraestructura hidráulica se encuentra la protección de la población y áreas productivas de situaciones de inundación, además de aprovechar las zonas con alto porcentaje de escurrimiento para la generación de servicios como la energía eléctrica o llevar a cabo un reparto más equitativo del agua mediante la acumulación y distribución mediante redes de tuberías.

Así vemos una doble función de estas infraestructuras dependiendo de las características del terreno. Si estamos frente a un terreno árido la función será la captación del agua que se utilizará en actividades agrícolas. Sin embargo, si el terreno es húmedo éstas cumplen la función de almacenar agua para proteger a la población de inundaciones al mismo tiempo que ésta es utilizada para la generación de energía eléctrica o el control de avenidas.

Dada la importancia del agua, en nuestro deber utilizarla adecuada y racionalmente.

1.2. La escasez del agua

Las fuentes, los manantiales, las cuencas o cañadas están en acelerada vía de extinción, hay cambios de clima y de suelo, inundaciones, sequías y desertización. Pero, es la acción humana la más drástica: ejerce una deforestación delirante, ignora los conocimientos tradicionales sobre todo de las comunidades indígenas locales, retira el agua de los ríos de diferentes maneras, entre otras con obras de ingeniería, represas y desvíos.

En la agenda política internacional el tema de la escasez del agua se ha vuelto prioritario, por ejemplo, el acceso al agua es un punto importante de los acuerdos de paz entre Israel y sus vecinos. Pero este aspecto no está confinado al Medio Oriente, puesto que el compartir ríos es un asunto de índole de seguridad nacional, precisamente por la importancia del agua para el desarrollo; actualmente cerca del 40% de la gente en el mundo vive en más de 200 cuencas de ríos compartidos.

Y es que ante una situación de escasez del agua la amenaza se cierne sobre tres aspectos fundamentales del bienestar humano: la producción de alimentos, la salud y la estabilidad política y social. Esto se complica aún más si el recurso disponible se encuentra compartido, sin considerar el aspecto ecológico.

Es por esto por lo que la gestión del recurso deberá tender a evitar situaciones conflictivas debidas a la escasez, sobreexplotación y contaminación, mediante medidas preventivas que procuren un uso racional y de conservación

La conceptualización de la conservación del recurso agua debe entenderse como un proceso que cruza a varios sectores, por lo que la estrategia debe considerar todo: lo económico, lo social, lo biológico, lo político, etcétera.

La calidad del agua son fundamentales para el alimento, la energía y la productividad. El manejo juicioso de este recurso es central para la estrategia del desarrollo sustentable, entendido éste como una gestión integral que busque el equilibrio entre crecimiento económico, equidad y sustentabilidad ambiental a través de un mecanismo regulador que es la participación social efectiva.

En algunas regiones de España, la gravedad y la frecuencia de las sequías conducen a situaciones de escasez de agua, mientras que la sobreexplotación de los recursos hídricos disponibles agrava las consecuencias de las sequías. Por lo tanto, se debe prestar especial atención a las sinergias entre estos dos fenómenos, especialmente en las cuencas hidrográficas afectadas por la escasez de agua. En estas regiones, los planes hidrológicos y otros planes que influyen el dominio hidrológico y hidráulico deben incluir un análisis adecuado de la escasez de agua y una extensa evaluación de las consecuencias de futuras sequías.

1.3. Consumo de los sectores

El sector agrícola es el mayor consumidor de agua con el 65%, no sólo porque la superficie irrigada en el mundo ha tenido que quintuplicarse sino porque no se cuenta con un sistema de riego eficiente, razón principal que provoca que las pérdidas se tornen monumentales. Le siguen el sector industrial que requiere el 25% y el consumo doméstico, comercial y de otros servicios urbanos municipales que requieren el 10%.

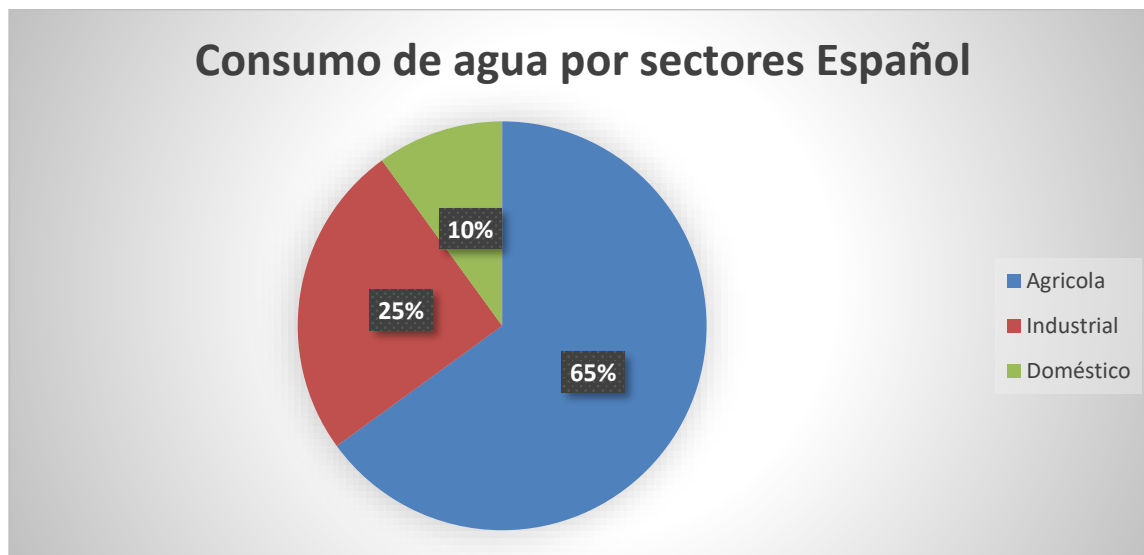


Figura 1-1 Consumo de agua

Según datos del INE, el consumo del sector agrario es similar actualmente al de 2016 siendo éste de 14,853 hm³/año.

A continuación, se muestran los principales indicadores sobre el consumo del agua en España.

Tabla 1-1 Principales Indicadores Consumo de Agua

Indicador	Valor	Unidades
Consumo medio hogar	136	Litros/hab/día
Volumen de pérdidas reales	701	Hm ³
Volumen de agua registrada para abastecimiento urbano	3200	Hm ³
Volumen de agua registrada para consumo del hogar	2297	Hm ³
Volumen de agua registrada para regadío	14948	Hm ³
Coste unitario	1.95	€/m ³

El consumo total de agua se ha triplicado desde 1950 sobrepasando los 4,300 km³/año, cifra que equivale al 30% de la dotación renovable del mundo que se puede considerar como estable.

Ante estas circunstancias muchas regiones del mundo han alcanzado el límite de aprovechamiento del agua, lo que los ha llevado a sobreexplotar los recursos hidráulicos superficiales y subterráneos, creando un fuerte impacto en el ambiente.

Aunque en las últimas dos décadas se ha logrado progreso sobre lo distintos aspectos del desarrollo y la administración de los recursos hidráulicos, los temas de la calidad del agua son más serios de lo que se creía.

Podríamos citar diversas razones, pero nos enfocaremos en dos:

1. Debemos tener en cuenta que la mayor parte de la población mundial vive en cuencas compartidas, lo que implica mayor competencia debido a los usos de estas, 50 países de los 4 continentes asientan más de tres cuartas partes del total de su población en las cuencas internacionales. Esto provoca que la situación jurídica sobre el uso y conservación de este bien, que se comparte en los Planes de Especiales de Depuración (PED) sea ambigua, ya que prácticamente se enfrentan a una ausencia de reglamentación. Los países desarrollados están desarrollando planes y metodologías para mejorar esta gestión del recurso ya que comenzaron a enfrentarse a problemas de regulación de agua desde la época de los 60. En este sentido el 47% de la población mundial, es decir, dos mil millones de personas dependen de la cooperación de todos los países que comparten cuencas para garantizar un suministro de agua en calidad y cantidad.
2. El agotamiento del agua subterránea es la amenaza oculta para la seguridad de los alimentos. La oferta de alimentos de muchos países en desarrollo depende del agua subterránea que utilizamos para riego y si este bien no se administra de forma más sostenible puede que algunas zonas más pobladas del mundo tengan que enfrentarse a una profunda crisis. En esos países, el agua subterránea se ha convertido en la base principal de las actividades agroalimentarias. Sin embargo, no están haciendo un uso sostenible de esta, provocando en países que tienen un exceso de extracción de agua, un descenso de los niveles freáticos muy alarmante.

Las consecuencias derivadas de no intentar solucionar la problemática del consumo del agua son potencialmente catastróficas, especialmente para las poblaciones pobres que son las que más padecen la escasez de este bien. Podríamos catalogar tres problemas principales que caracterizan la utilización del agua subterránea: El agotamiento debido a excesos de extracción; las inundaciones y la salinización causados por un drenaje insuficiente; y la contaminación debido a actividades intensivas agrícolas e industriales.

1.4. La contaminación del agua

La gestión inadecuada de aguas residuales urbanas, agrícolas e industriales conlleva a que el agua que beben cientos de millones de personas se vea peligrosamente contaminada o polucionada químicamente. La contaminación del agua también provoca que parte de los ecosistemas acuáticos terminen desapareciendo por la rápida proliferación de algas invasoras que se nutren de los nutrientes proporcionados por los residuos.

Un aspecto importante es la división del agua según su grado de contaminación. El primero es la polisaprobía: agua que está fuertemente contaminada con carbono orgánico, caracterizada por una población de organismos específicos y normalmente con una concentración muy baja e incluso total ausencia de oxígeno. El segundo es la mesosaprobiana: los organismos viven en medios con una cantidad moderada de materia orgánica y variable

cantidad de oxígeno en disolución, como algunas algas clorofíceas. Por último, esta la oligosaprobiana: zonas de vertido de aguas residuales a un río, donde las aguas han alcanzado el aspecto y característica de su estado natural.



Figura 1-2 Zona Polisaprobia

La contaminación del agua se genera por diferentes tipos de vertidos: aguas de proceso, aguas fecales y aguas blancas. El primero es un proceso productivo por lo que su carga contaminante dependerá de la actividad industrial. El segundo es generado por el aseo y el tercero se les conoce como “aguas crudas” por su carácter previo a la potabilización.

Los servicios de agua y saneamiento mal gestionados o insuficientes exponen a la población a enfermedades como el cólera, diarreas, disentería, o hepatitis. Según un artículo de Responsabilidad Socio Sanitaria publicado en octubre de 2016, se calcula que unas 842000 personas mueren al año por diarrea como consecuencia de la contaminación del agua, de un saneamiento insuficiente o de una mala higiene corporal. Esta infección es altamente prevenible y se podría evitar si se abordaran estos factores de riesgo.

Además, en muchas partes del mundo, los insectos que viven o se crían en el agua son portadores de enfermedades como el dengue. Otra de las causas de contaminación del agua es la deforestación de las zonas costeras debido a la creciente demanda de la construcción de edificios. Esto produce que los suelos de estas zonas se vuelvan más vulnerables, a su vez, si le agregamos que la pavimentación no permite el paso a las filtraciones de aguas fluviales cuando llueve, el ecosistema se ve seriamente damnificado. Esto favorece que las aguas saladas se filtren por debajo contaminando aguas dulces.

Soluciones a la contaminación:

1. **Plantar árboles en orillas de lagos o ríos:** Un río debe tener a ambos lados una franja considerable de bosque para evitar así erosiones del terreno y conservar su profundidad. Así mismo tienen la importante misión de conservar el agua, la flora y la fauna de los ecosistemas naturales
2. **Uso adecuado de productos por parte de las industrias:** Prácticas que reducen el uso de materiales peligrosos para así proteger recursos naturales. Otra modificación sería el cambio de producto incluyendo modificaciones en la composición para reducir el volumen y la toxicidad de los residuos

durante su ciclo de vida.

3. **Reducir el uso de combustibles fósiles:** Una de las maneras que tenemos para llevar a cabo esta medida es fomentar el uso del transporte sostenible como por ejemplo la bicicleta o el coche eléctrico.
4. **Reducción del uso de los productos químicos en plantaciones:** Utilizando biopesticidas o bioestimulantes, que reemplazan el uso de productos dañinos para el medio ambiente.
5. **Control de vertidos:** Para reducir la contaminación del agua debe existir una formación profesional para los operarios encargados de las líneas productivas de las industrias. El primer paso sería formar a los trabajadores en materia relacionada con el producto vertido, las acciones que se deben llevar a cabo, el orden en el que se han de realizar y el material ha utilizar. Además de disponer de un sistema independiente del sistema general que se encargue de la recogida de aguas residuales. El segundo paso sería hacer recircular el agua por circuitos de refrigeración y seprar aguas contaminadas de aquellas que no lo están. El tercer paso sería realizar inspecciones de la red hidráulica y establecer planes de mantenimiento y desinfección de instalaciones y equipos, asimismo, establecer un sistema de recogida de lixiviados que impida el vertido incontrolado de los mismos hasta suelos no protegidos. El último paso sería introducir bandejas, y canaletas para la recogida de derrames y goteos en las bocas de los estanques de trasiego y líneas de envasado.

2 TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS Y NO COOPERATIVOS

2.1. Introducción

Un juego es una situación con ciertas reglas que envuelve a un grupo de agentes en la cual dichos agentes pueden obtener ciertos beneficios. En un juego cada agente intenta conseguir el mayor resultado posible, teniendo en cuenta que el resultado del juego depende tanto de sus acciones como de las acciones de otros agentes. Es ésta la característica de los juegos: tomar las decisiones que más convienen para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás agentes también influyen en los resultados con sus decisiones.

En economía se estudian a menudo situaciones de decisión individual, en las que el agente intenta maximizar su utilidad, sin importar lo que hagan los otros. Por ejemplo:

- Elección de cantidades de cada bien a comprar por parte de un consumidor. Se suponen datos los precios de los bienes, así como la renta del consumidor.
- Elección de cantidades de un bien a producir por parte de una empresa. Se suponen dados los precios del bien y de los factores de producción y conocida la función de producción.
- Elección del precio de un bien por monopolista. Se suponen dados los precios de los factores de producción y la curva de demanda de dicho bien y conocida la función de producción.

Sin embargo, hay muchas otras situaciones en que la utilidad del resultado final no depende solo de la acción del agente, sino también de los otros agentes:

- Elección por la empresa A de la cantidad a producir de un bien o del precio de dicho bien, si también lo produce la empresa B y ninguna más (duopolio). Los resultados finales para la empresa A dependen de sus propias decisiones y de las de B.
- Elección por una empresa de automóviles de un nivel de gasto en publicidad. Las consecuencias finales de dicho gasto dependen del gasto realizado en publicidad por las empresas competidoras.
- Elección por un coleccionista de su puja (cantidad de dinero que ofrece) en la subasta de un cuadro. Los resultados (consigue o no que se adjudiquen el cuadro subastado) dependen también de la puja de otros participantes.

El planteamiento según el cual no importa lo que hagan otros agentes es más bien una simplificación de la realidad. La teoría de juegos se ocupa, por tanto, del análisis riguroso y sistemático de esas situaciones, donde interfieren las acciones de los agentes. Así pues, la teoría de juegos podría llamarse teoría de la decisión interactiva, que es diferente de la teoría de la decisión individual. Fue introducida por Von Neumann y Morgenstern en 1944 y numerosos premios nobeles de economía han trabajado sobre ello, Aumann, Senel, Shapley.

Algunos aspectos básicos en un juego son los siguientes. Se denominan jugadores a los agentes del juego que toman las decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más. Las acciones de cada jugador son las

decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento que le toque jugar. El conjunto de acciones de un jugador en cada momento del juego puede ser finito o infinito. Una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias, una por cada jugador. Los jugadores pueden formar grupos que realicen acciones y estrategias conjuntas. A estos grupos se les llama coaliciones. Los resultados del juego son los distintos modos en los que puede concluir un juego. Cada resultado lleva aparejado unas consecuencias para cada agente. Cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado; es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.

Hay dos tipos de juegos básicos, o, dicho de otro modo, dos enfoques diferentes en el análisis de un juego: cooperativos y no cooperativos.

En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Dos aspectos son vitales en dicho análisis: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos.

Entre los juegos no cooperativos caben dos distinciones básicas: los juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa. En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (cada jugador decide sin saber que han decidido los demás), mientras que en los dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir. En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás, del conjunto de decisiones tomadas, mientras que, en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce algunas de las consecuencias.

2.2. Juegos Cooperativos

Como se comentó antes existe la posibilidad de que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que estarían obligados de manera eludible), que denominamos coaliciones. Si en el juego las únicas acciones posibles de los jugadores son la realización de cooperaciones con otros el juego se reduce a estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se puedan formar. Se trata de analizar cómo puede actuar un grupo de jugadores, interesándonos en los comportamientos colectivos y sin que haya falta de detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de la coalición. Dos preguntas han de responderse ante una situación como ésta: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos. En esta sección veremos cómo la teoría de juegos cooperativos responde a la segunda pregunta.

Sea $J = \{1, 2, \dots, N\}$ un conjunto finito de jugadores. Sea el conjunto de las partes de J , $P(J)$, que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar dentro de (incluyendo la coalición sin jugadores que es \emptyset).

Haremos dos suposiciones más con la idea de reducir el problema.

Consideramos que cada coalición puede determinar la mejor consecuencia que sus componentes pueden asegurarse teniendo en cuenta sus acciones y la de los jugadores exteriores. Supongamos además que las utilidades de los jugadores son transferibles, lo cual quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse entre los jugadores que la componen; en ocasiones este reparto no es posible por lo que no existe una forma de transferir la unidad, problemas que no serán objeto del estudio. En un juego cooperativo de unidad transferible, se llama función característica a una función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero, es decir;

$$v: P(J) \rightarrow R, v(\emptyset) = 0.$$

Esta última suposición es una condición técnica.

Para una coalición $S \in P(J)$, al número $v(S)$, se le llama valor de la coalición y se interpreta como el valor mínimo que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición toma sus decisiones de forma adecuada. En este caso, utilizaremos la interpretación de $v(S)$ como beneficio, aunque podría interpretarse como costo.

Definición: Un juego cooperativo de unidad transferible consiste, por tanto, en un par $G = (J, v)$, dado por:

- Un conjunto finito de jugadores $J = \{1, 2, \dots, n\}$
- Una función característica, v , que asocia a cada subconjunto de J (o coalición) un número real (valor de la coalición).

Definición: Se dice que un juego es monótono si para todo par de coaliciones $S \subseteq T$ se verifica que: $v(S) \leq v(T)$.

Hablamos de un juego cooperativo monótono cuando al crecer el número de jugadores que forman una coalición el beneficio o pago de esta coalición no disminuye. No hay jugadores que resten beneficios.

Definición: Se dice que un juego es superaditivo si para todo par de coaliciones $S, T \in P(J)$, con $S \cap T = \emptyset$ se verifica que:

$$v(S) + v(T) \leq v(T \cup S)$$

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales. Nos interesan, por lo tanto, los juegos superaditivo. Si extendemos la condición de superaditivo a coaliciones no disyuntas obtenemos un tipo de juegos con grandes propiedades.

Uno de los problemas a resolver en este tipo de juegos es qué coaliciones se formarán. Para simplificar el problema consideramos que la coalición que se formará será J . Sin embargo, la monotonía de no garantiza el interés de los jugadores en que se forme J ya que pondrían de mutuo acuerdo grupos más pequeños cuya suma de pagos sea superior.

Definición: Se dice que un juego es convexo si para todo par de coaliciones $S, T \in P(J)$, se verifica que:

$$v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(T \cup S)$$

Es decir, si dos coaliciones no disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales menos el valor de intersección entre dichas coaliciones.

Ambos conceptos son aplicables también a juegos de costos sin más que cambiar las desigualdades.

El juego se dice subaditivo si para todo par de coaliciones $S, T \in P(J)$, con $S \cap T = \emptyset$ se verifica que:

$$v(S) + v(T) \geq v(T \cup S)$$

2.3. El conjunto de imputaciones

Sea $G = (J, v)$ un juego cooperativo de utilidad transferible superaditivo, en cual J es el conjunto de jugadores y v es la función característica. Si como hemos supuesto en el juego los jugadores deciden trabajar

conjuntamente, es decir, cooperar, el único problema que se presenta consiste en cómo repartir el valor $v(J)$ entre los jugadores.

Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ un vector de distribución de pagos, en donde x_i representa el pago que recibe el jugador i . Para cualquier $S \subset J$ se utilizará la siguiente notación:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Si deseamos hacer un reparto del valor de entonces debemos exigir el “principio de eficiencia”, esto es que:

$$x(J) = v(J)$$

Por otro lado, ningún jugador admitiría que su situación individual fuese mejor que su pago en la coalición, esto es para todo se verifica el “principio de racionalidad individual.”

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

Definición 1.4: El conjunto de imputaciones de un juego cooperativo en su forma coalicional es:

$$I(J, v) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in J\}$$

Ejemplo. Tres individuos pueden cooperar en un trabajo para ganar 400€ juntos. Si los jugadores 1 y 2 cooperan ganan 100€, si cooperan 1 y 3 ganan 200€ y, finalmente, si lo hacen 2 y 3 ganan 300€. Si dos de los individuos cooperan para realizar el trabajo, el que se queda fuera no gana nada. Esta situación puede modelarse mediante un juego cooperativo, con la siguiente función característica:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 100, v(\{1,3\}) = 200, v(\{2,3\}) = 300,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 400,$$

Pertencen al *core* de este juego los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las siguientes restricciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = 400 \text{ (Principio de eficiencia)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ (Racionalidad Individual)}$$

$$x_1 + x_2 \geq 100, x_2 + x_3 \geq 300, x_1 + x_3 \geq 200 \text{ (Racionalidad coalicional)}$$

2.4. Concepto de solución de juegos cooperativos

Siguiendo con el principio de racionalidad individual, podemos pensar exigir la “racionalidad condicional”, esto es, para todo $S \subset J$, ocurre que $x(S) \geq v(S)$.

Definición 1.4: El core de un juego cooperativo de beneficio en su forma coalicional es:

$$C(J, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S) \forall S \subset J \}$$

El Core conjunto es cerrado, acotado y convexo. Sin embargo, su principal problema es que puede ser o muy grande o bien incluso vacío. Si el core es vacío tendremos que olvidar la búsqueda de soluciones racionales para todas las coaliciones. Si es grande, la cuestión es cuál de sus vectores de pagos escoger.

Veamos una condición equivalente a que el core sea no vacío. Una familia $\{S_1, \dots, S_p\}$ de subconjuntos de J , disjuntos y no vacíos, es *equilibrada* sobre J si existen números positivos, $\{a_1, \dots, a_p\}$ denominados pesos, tales que para todo $i \in J$

$$\sum_{\{j, i \in S_j\}} a_j = 1$$

Se dice que un juego es equilibrado si para toda familia equilibrada $\{S_1, \dots, S_m\}$ partición de J se tiene que:

$$\sum_j a_j v(S_j) \leq v(J)$$

Esto es, ninguna partición ponderada se obtiene mejores beneficios.

Teorema: Un juego es equilibrado si y sólo si el core es no vacío.

2.5. El valor de Shapley

Se trata de hacer una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos.

Sea $G(J, v)$ un juego en forma coalicional, en donde $J = \{1, \dots, n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\phi(J, v) = (\phi_1(J, v), \dots, \phi_n(J, v))$$

La función de asignación de pagos debe cumplir los siguientes axiomas:

1. **Eficiencia.** La función de asignación debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser:

$$\sum_i \phi_i(J, v) = v(J).$$

2. **Simetría.** Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subset J, \text{ con } i, j \notin S \text{ se tiene que } \phi_i(J, v) = \phi_j(J, v)$$

3. **Tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de los

jugadores no debe recibir ningún pago coalicional. Es decir, para cada jugador, para el cual se verifica que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subset J, \text{ se tiene que } \phi_i(J, v) = v(\{i\})$$

4. **Aditividad.** La función de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera v y w , se tiene que

$$\phi_i(J, v + w) = \phi_i(J, v) + \phi_i(J, w), \forall i \in J$$

Teorema: La única asignación que verifica los 4 axiomas anteriores es el valor de Shapley es cual tiene la siguiente expresión:

$$\phi_i(J, v) = \sum_{\{S \subset N: i \in S\}} q(s)[v(S) - v(S \setminus i)], \forall i \in J$$

donde $q(s) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$, siendo s el número de jugadores que hay en la coalición S .

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el valor $v(S) - v(S \setminus i)$ es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a S , mientras que el factor $q(s)$ es la probabilidad de que a i le toque incorporarse precisamente a S .

Teorema: Si es un juego convexo entonces el valor de Shapley pertenece al Core de v .

2.6. Juegos no cooperativos. El equilibrio de Nash

Los equilibrios de Nash se definen como la combinación de estrategias tales que no hay ningún incentivo para que los jugadores se desvíen de su elección. Esta será la mejor opción que un jugador puede tomar, teniendo en cuenta la decisión de los otros jugadores y donde un cambio en la decisión de un jugador sólo conducirá a un resultado peor si los otros jugadores se adhieren a su estrategia. Uno de los equilibrios de Nash más conocidos se encuentra en el dilema del prisionero. Este concepto pertenece a la teoría de juegos, específicamente para los juegos no cooperativos, y toma el nombre de John Nash que lo desarrolló en el siglo XX.

Hay unos pocos requisitos de coherencia que deben tenerse en cuenta cuando se trata de equilibrios de Nash. Uno de ellos es conocido como el conocimiento común, que complementa la necesidad de información completa. Por lo tanto, las expectativas sobre las estrategias de otros jugadores deben ser racionales.

Por tanto, un equilibrio de Nash es una combinación de creencias acerca de las estrategias y las opciones del otro jugador. Es bastante fácil entender esto con un ejemplo, en este caso el dilema del prisionero, representado en la siguiente matriz de juego:

Tabla 2-1 Matriz de juego

		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	-5 / -5	-10 / 0
	No confesar	0 / -10	-2 / -2

El prisionero 1 (P1) tiene analizar lo que el prisionero 2 (P2) va a hacer, con el fin de elegir la mejor estrategia. Si P2 confiesa (P2_C), P1 irá a la cárcel 5 o 10 años por lo tanto se puede ver fácilmente que P1 elegirá confesar, ya que le resulta más conveniente. Pero si el prisionero 2, no confiesa la mejor opción del prisionero 1 sigue siendo confesar para así quedar libre. Lo racional para P1 es confesar. Procediendo a la inversa, se analizan las creencias que P2 tiene sobre las estrategias de P1, lo que nos lleva al mismo punto: lo racional para P2 es confesar. Por lo tanto, P1_C, P2_C es el equilibrio de Nash en este juego.

Los equilibrios Nash se pueden utilizar para predecir el resultado de *juegos finitos*, siempre que exista tal equilibrio. Por otra parte, el equilibrio se puede encontrar utilizando el método de la eliminación de las estrategias dominadas, lo que nos ayudará a encontrar el equilibrio de Nash mediante la exclusión de equilibrios de Nash ‘irracionales’.

Sin embargo, nos encontramos con el problema que surge cuando se trata de un equilibrio de Nash que no es ni social ni ético, y donde la eficiencia puede ser subjetiva, que es el caso en el dilema del prisionero. En este juego, el equilibrio de Nash no cumple con los criterios para ser el *óptimo de Pareto*. Además, la posibilidad de equilibrios múltiples hace que el resultado final del juego sea menos predecible.

3 APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA A REPARTO DE COSTOS Y BENEFICIOS

En este capítulo se resume la situación en la cual una ciudad debe hacer frente al consumo de agua y a su reparto de costes. A la hora de plantearse este consumo, la ciudad puede hacerle frente mediante dos vías, abasteciéndose a partir de aguas locales o comprando directamente el consumo de agua a empresas externas, es decir importándola. Este consumo lo vamos a calcular teniendo en cuenta que debe abastecer tanto al consumo para uso doméstico de sus habitantes como para el sector de agricultura e industria, por lo que podemos diferenciar tres usuarios principales:

1. Agricultura
2. Industria
3. Usuario doméstico

A su vez el agua de la que se puede hacer uso puede ser de tres tipos:

- I. Agua superficial
- II. Agua subterránea
- III. Agua tratada

3.1. Aclaraciones del modelo

Se aclaran varios aspectos relevantes en la optimización. En el siguiente modelo se muestran los tres jugadores (Agricultura, Industria y Uso doméstico), los dos medios por los que se abastece de agua (propio e importado) y los intercambios de agua entre ellos.

A su vez realizaremos un estudio de intercambio de agua y equilibrio de costes en el administrador externo de agua, haciendo un estudio entre tres posibles administradores A, B y C que intercambian agua entre sí, siendo

B el que intercambiará agua directamente con los jugadores, quedando por tanto A y C como administradores indirectos.

Se representan los diferentes elementos en el esquema de la siguiente forma:

1. Embalses como rectángulos
2. Pozos agua subterránea como círculos
3. Almacenamiento agua subterránea como triángulos
4. Jugadores como cuadrados

3.2. Datos del modelo

El principal objetivo de este modelo es el de “proveer y ayudar a proveer agua para el consumo humano”, siendo la búsqueda de fuentes para abastecimiento de agua uno de los principales problemas con los que se encuentra diariamente.

Si tomamos en cuenta que, solamente existen dos fuentes de agua a nuestra disposición: **las superficiales**, que comprenden los lagos, ríos, áreas de drenaje que envían el agua hacia los embalses y los procedimientos que permiten captar y retener agua de lluvia; y **las subterráneas**, que incluyen a los pozos, manantiales y galerías horizontales.

Y a esto agregamos que, el agua dulce en estado líquido de ríos y lagos representa la parte de este recurso que se encuentra en tránsito y por lo tanto en la mayor parte de los casos contaminada, entenderemos el por qué de la creciente demanda de perforaciones, que, con la finalidad de explotación de acuíferos para consumo, hemos tenido en los últimos años.

Teniendo en cuenta las necesidades humanas las obras hidráulicas presentes en el sistema y consideradas en el modelo son las siguientes:

- 4 embalses
- 4 pozos
- Plantas potabilizadoras de agua
- Red de distribución de agua
- Los retornos de aguas depuradas de los jugadores

En España hay más de 350 embalses con una capacidad de almacenamiento de 54.000 hectómetros cúbicos de agua, lo que supone el 50% del caudal de los ríos del territorio. A continuación, se muestra un gráfico donde se puede observar las variaciones de agua embalsada durante los dos últimos años y una media de los últimos diez.

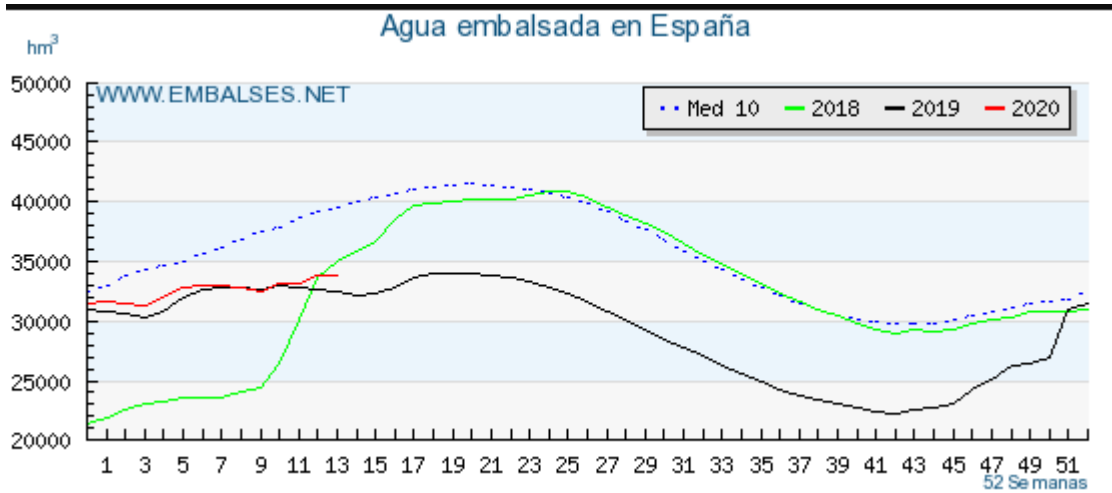


Figura 3-1 Agua embalsada en España

Para el caso que nos ocupa definiremos las principales características de los tres embalses pertenecientes a la gestión externa de aguas:

Tabla 3-1 Características Embalse A

Características Embalse A	
Superficie de la cuenca hidrográfica (km ²)	562,000
Precipitación media anual (mm)	820,000
Caudal punta avenida de proyecto (m ³ /s)	1.450,000
Superficie del embalse a NMN (ha)	1.500,000
Capacidad a NMN (hm ³)	190,000
Cota del NMN (m)	90,000
Cota de Coronación (m)	95
Altura desde cimientos (m)	55,000
Longitud de coronación (m)	550
Cota cimentación (m)	40,000

Cota del cauce en la presa (m)	45,000
Volumen del cuerpo presa (1000 m ³)	170,2
Volumen útil (hm ³)	170,2
Volumen total (hm ³)	190,6

Tabla 3-2 Características Embalse B

Características Embalse B	
Superficie de la cuenca hidrográfica (km ²)	560,000
Precipitación media anual (mm)	800,000
Caudal punta avenida de proyecto (m ³ /s)	1.450,000
Superficie del embalse a NMN (ha)	1.500,000
Capacidad a NMN (hm ³)	190,000
Cota del NMN (m)	90
Cota de Coronación (m)	95
Altura desde cimientos (m)	55,000
Longitud de coronación (m)	550
Cota cimentación (m)	40,000
Cota del cauce en la presa (m)	45,000
Volumen útil (hm ³)	165,000
Volumen total (hm ³)	187,600

Tabla 3-3 Características Embalse C

Características Embalse C	
Superficie de la cuenca hidrográfica (km ²)	440,000
Aportación media anual (hm ³)	80,000
Precipitación media anual (mm)	90,000
Caudal punta avenida de proyecto (m ³ /s)	750,000
Superficie del embalse a NMN (ha)	710,000
Capacidad a NMN (hm ³)	100,000
Cota del NMN (m)	200,000
Cota de Coronación (m)	240,000
Altura desde cimientos (m)	65,000
Longitud de coronación (m)	250,000
Cota cimentación (m)	190,000
Cota del cauce en la presa (m)	170,000
Volumen útil (hm ³)	120
Volumen total (hm ³)	125

Respecto al agua **subterránea** representa una fracción importante de la masa de agua presente en los continentes, el volumen de ésta es mucho más importante que la masa de agua retenida en lagos o circulante, y aunque menor al de los menores glaciares, las masas más extensas pueden alcanzar un millón de o más de kilómetros cuadrados (como el Acuífero de Guarani). El agua del subsuelo es un recurso importante y de este se abastece una tercera parte de la población mundial, pero de difícil gestión, por su sensibilidad a la contaminación y a la sobreexplotación. El agua subterránea es parte de la precipitación que se filtra a través del suelo hasta llegar al material rocoso que está saturado de agua, esta se mueve lentamente hacia niveles más bajos, generalmente en ángulos inclinados y finalmente llegan a los arroyos, lagos y océanos.

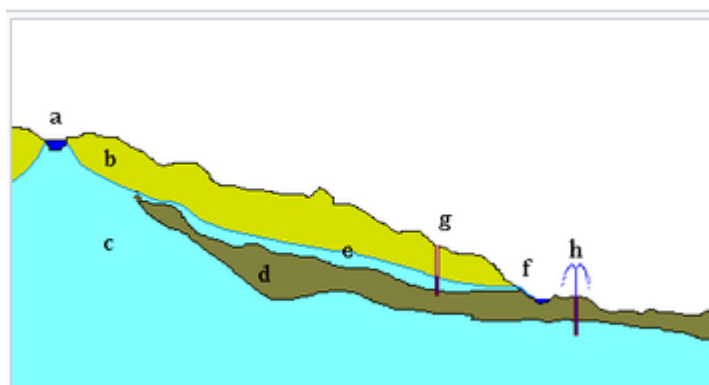


Figura 3-2 Tipos de Acuíferos

Los pozos de los jugadores, representados en la imagen anterior con la letra g, se caracterizan por ser profundos (profundidad mayor a 30 m) y por ser excavados a través de herramientas de perforación rotatorias que trituran o rompen las rocas o, previamente, si el suelo está blando, algo que suele ocurrir al inicio de las perforaciones, mediante grandes taladros denominados ahoyadoras.



Figura 3-3 Ahoyadora

Además, el agua proveniente de los pozos pertenece a un alto porcentaje del agua dulce a la cual tenemos acceso, siendo estos los que siguen:

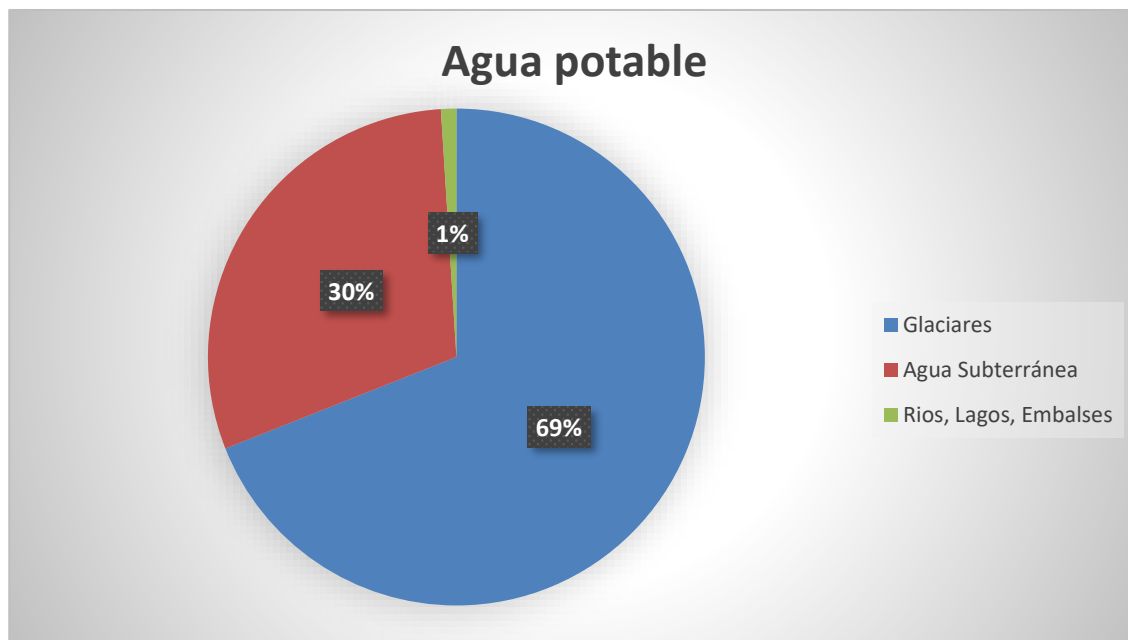


Figura 3-4 Agua potable

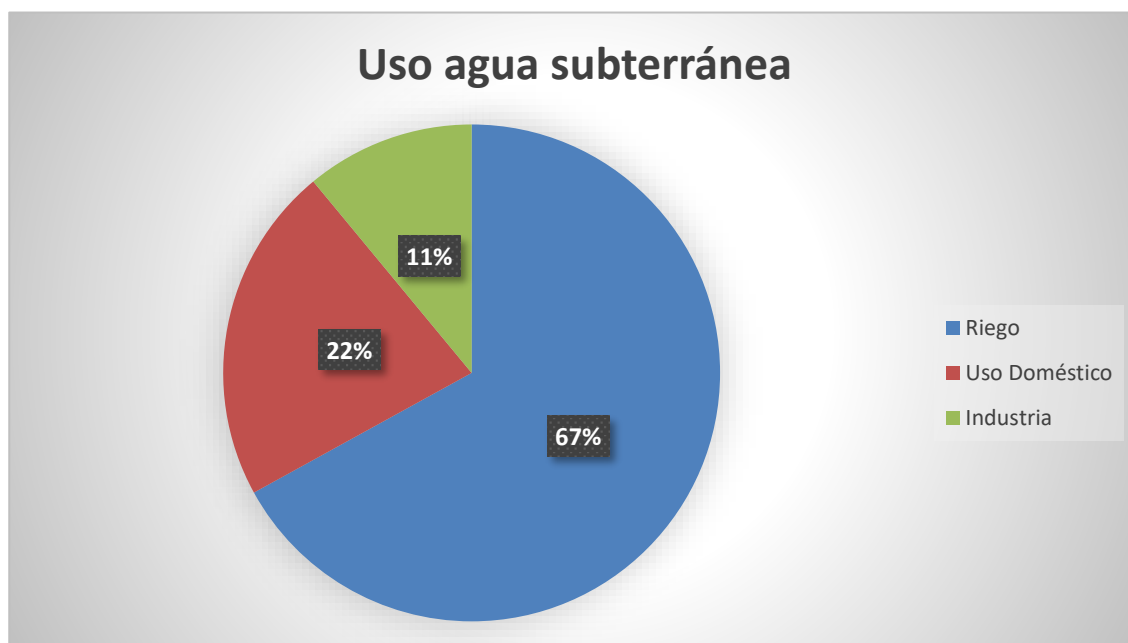


Figura 3-5 Uso agua subterránea

También será necesaria una captación, siendo precisas estructuras especiales, para los embalses y ríos. Si la fuente está situada a mucha distancia de la ciudad, será necesario una tubería o canal abierto para conducir el agua. Si el agua procede de corrientes superficiales, se requerirá normalmente una instalación de tratamiento, aunque el agua subterránea también se trata. En muchos casos será necesaria una estación elevadora para obtener la presión suficiente para que el agua discurra a través de la red de distribución. Algunas ciudades pueden efectuar la distribución por simple gravedad; otras tienen bombas en la captación y además elevan el agua después de tratada. Las bombas pueden descargar toda o parte del agua en depósitos elevados o no, que suministran el agua necesaria en emergencias y permiten equilibrar la demanda por medio del bombeo. Finalmente, existe un **sistema de distribución de agua**, que comprende las tuberías, válvulas, y las bocas de riego para baldeos y los hidrantes para incendios que se hallan en las calles de la ciudad.

Captaciones: Las captaciones consisten en una rejilla, a través de la cual entra el agua que, por una conducción, pasa por gravedad a un pozo, desde el cual se eleva hasta la instalación de depuración.

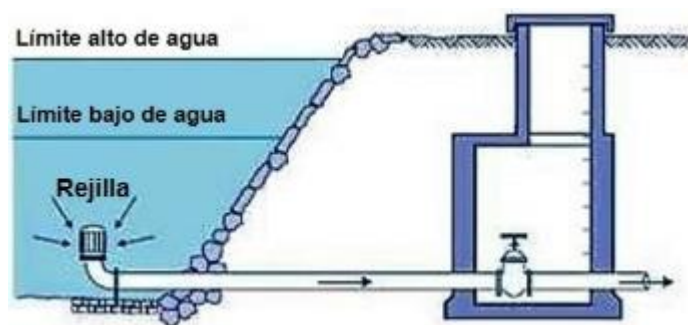


Figura 3-6 Captaciones

Para proyectar y ubicar las captaciones deben considerarse los siguientes aspectos:

- I. El origen del suministro ya sea embalse o río
- II. El carácter de los alrededores de la captación, altura de agua, índole del fondo, efectos de las corrientes, avenidas y aguaceros sobre la estructura y socavado del fondo
- III. La ubicación, con respecto a los focos de contaminación
- IV. Presencia de materiales flotantes tales como vegetación o hielo.

Captaciones en los embalses: El agua de los embalses puede variar de calidad a distintos niveles, lo que hace aconsejable realizar la captación de agua alrededor de un metro por debajo de la superficie. Como son de prever fluctuaciones del nivel del agua, resulta conveniente disponer entradas a varias alturas.

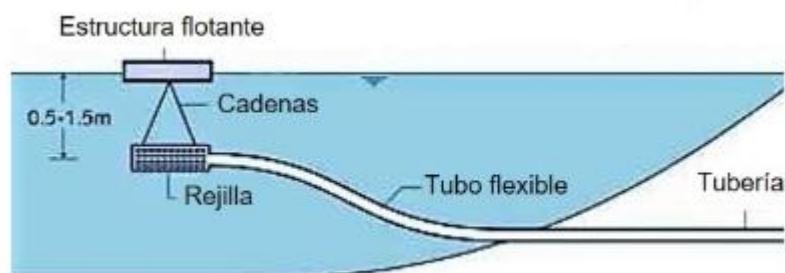


Figura 3-7 Captaciones en embalses

Canales abiertos: Los canales abiertos se utilizan para conducir el agua desde la captación hasta la instalación de elevación o la de tratamiento. Este sistema tiene la ventaja de que permite ahorros en la instalación. Tiene las siguientes desventajas: hay que ajustarse al gradiente hidráulico del agua, se produce una pérdida de agua por filtraciones y evaporación, existe el peligro de contaminación del agua. En climas fríos son de temer perturbaciones por el hielo y el ganado, las raíces de los árboles y los agujeros de los roedores pueden causar serios daños.



Figura 3-8 Canal abierto

El sistema de distribución: La distribución del agua a los consumidores se realiza por distintos métodos que dependen de las condiciones locales o de otras consideraciones. Estos métodos son:

1. Distribución por gravedad. Este sistema es posible cuando la fuente de suministro está situada en algún punto elevado respecto a la ciudad, de manera que pueda mantenerse una presión suficiente en las tuberías principales, tanto para los servicios domésticos como para los de extinción de incendios. Es el método más aconsejable si la conducción que une la fuente con la ciudad es de tamaño adecuado y está bien protegida contra roturas accidentales.

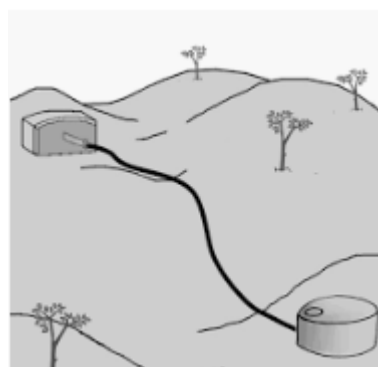


Figura 3-9 Distribución por gravedad

2. Distribución por medio de bombas, almacenando más o menos cantidad de agua. En general, cuando se emplea este método, el exceso de agua elevada durante los períodos de bajo consumo se almacena en depósitos. Durante los períodos de alto consumo el agua almacenada se utiliza para aumentar la

suministrada por las bombas. Este sistema permite obtener un rendimiento uniforme de las bombas y, por lo tanto, es económico, ya que se las puede hacer trabajar en condiciones óptimas. Por otra parte, como el agua almacenada proporciona una reserva que pueda utilizarse en los casos de averías en las bombas o tuberías, por lo que este método de operación proporciona una amplia seguridad.

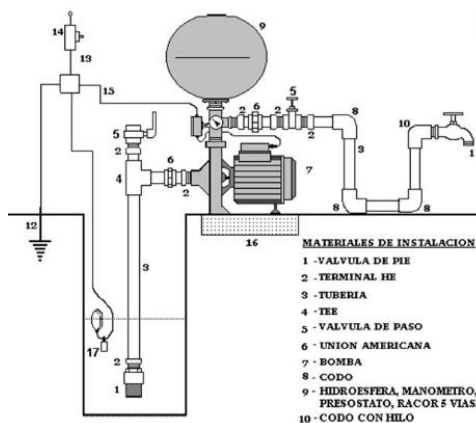


Figura 3-10 Distribución por bombas

3. Empleo de bombas sin almacenamiento. En este caso, las bombas introducen el agua directamente en las tuberías sin otra salida que la del agua realmente consumida. Es el sistema menos deseable, ya que una avería en la fuente de energía ocasionará una interrupción completa en el suministro del agua. Si las bombas se accionan eléctricamente, su punta de consumo es fácil que coincida con la de la demanda general, lo que incrementa el coste de la energía.

3.3. Nucleolo

La teoría de juegos modela procesos de decisión en los que dos o más agentes (llamados jugadores) confluyen esperando obtener un rendimiento. Aquellos juegos en los que los jugadores cooperan para optimizar el resultado del proceso se llaman juegos cooperativos. El problema principal de los juegos cooperativos consiste en dividir el beneficio obtenido (o repartir los costes generados como es el caso por estudiar) por la cooperación de todos los jugadores. Una forma de repartir dicho beneficio (o coste) es mediante el **nucleolo** del juego. El nucleolo es una regla de reparto conocida tanto por sus propiedades de justicia como por su complejidad computacional.

El nucleolo se define como la configuración de pagos que maximiza lexicográficamente el mínimo exceso. En otras palabras, el nucleolo representa la configuración de pagos en la que el valor del mínimo exceso es el mayor posible y se produce en el menor número de subgrupos de jugadores.

La solución se basa en maximizar el mínimo exceso asociado a cada posible coalición, el problema se resuelve a través de métodos de programación lineal.

Si el núcleo dispone de una única solución, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, esta es el nucleolo. Si el nucleolo es amplio y hay distintas soluciones posibles se procede con la siguiente regla:

Para cada configuración de pagos X se define el vector $z(X)$, cuyos valores representan los excesos $e(x, S)$ correspondientes a las $2^n - 1$ coaliciones posibles.

$$e(x, S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Donde:

x_i es un vector de imputación

$e(x, S)$ mide el grado de aceptación de la coalición S con respecto a la imputación x

Detallemos, en primer lugar, el sentido de grado de aceptación.

Cuando $e(x, S) \geq 0$, se cumple que $c(S) \geq \sum_{i \in S} x_i$. Esto muestra que los miembros de S aceptan el reparto propuesto, de modo que el coste asignado por el vector imputación a los miembros de S es menor que el que hubieran obtenido al formar la coalición S independientemente de las demás divisiones.

Cuando $e(x, S) \leq 0$, se cumple que $c(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$. En este caso, el grado de aceptación sería nulo, puesto que las divisiones de S saldrían perjudicadas.

a. Para el cálculo del nucleolo, formaremos un vector $Z \in \mathbb{R}^{2^n}$, donde cada componente viene definido por $e(x, S) \forall S \in P(N)$, realizando una ordenación de estas, siguiendo un orden creciente de aceptación.

b. Se escoge el vector $z(X)$ lexicográficamente mayor comparando uno a uno los componentes.

El nucleolo proporciona una solución única al problema de la asignación de costes cuando el núcleo está constituido por un conjunto amplio de soluciones factibles. Mediante el nucleolo se aplica rigurosamente el principio de equidad en cuanto se realiza un balance en la configuración de pagos tal que la coalición más desfavorecida sea lo menos perjudicada posible.

Para calcular el nucleolo, siguiendo la exposición efectuada anteriormente, debemos resolver el problema de programación lineal:

Max δ

S.a.

$$c(S) - \sum_{i \in S} u_i \geq \delta \quad \forall S \in P(N)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i = c(N)$$

$$u_i \geq 0, \text{ con } i=1,2,3.$$

Consideramos los tres jugadores primeros A, B y C, siendo éstos los administradores externos del agua. Éstos

tres jugadores, como empresarios deben asumir una serie de gastos en relación con costes de mantenimiento, impuestos, tasas (pozos, embalses) y costes de distribución.

Si estos juegan solos los costes serán:

- $C(A) = 5000 \text{ €}$
- $C(B) = 3000 \text{ €}$
- $C(C) = 7000 \text{ €}$

Del mismo modo, si decidiesen agruparse para acceder al citado servicio, formando distintas coaliciones, los costes de cada posible coalición, se situarían en:

- $C(AB) = 7000 \text{ €}$
- $C(AC) = 10000 \text{ €}$
- $C(BC) = 10000 \text{ €}$
- $C(N) = 12000 \text{ €}$

Para calcular el nucleolo, siguiendo la exposición efectuada anteriormente, debemos resolver el problema de programación lineal:

$$\text{Max } \delta$$

$$\text{S.a.}$$

$$c(S) - \sum_{i \in S} u_i \geq \delta \quad \forall S \in P(N)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i = c(N)$$

$$u_i \geq 0, \text{ con } i=1,2,3.$$

En nuestro caso, tendremos:

$$\text{Max } \delta$$

$$5.000 - u_1 \geq \delta$$

$$3.000 - u_2 \geq \delta$$

$$7.000 - u_3 \geq \delta$$

$$7.000 - u_1 - u_2 \geq \delta$$

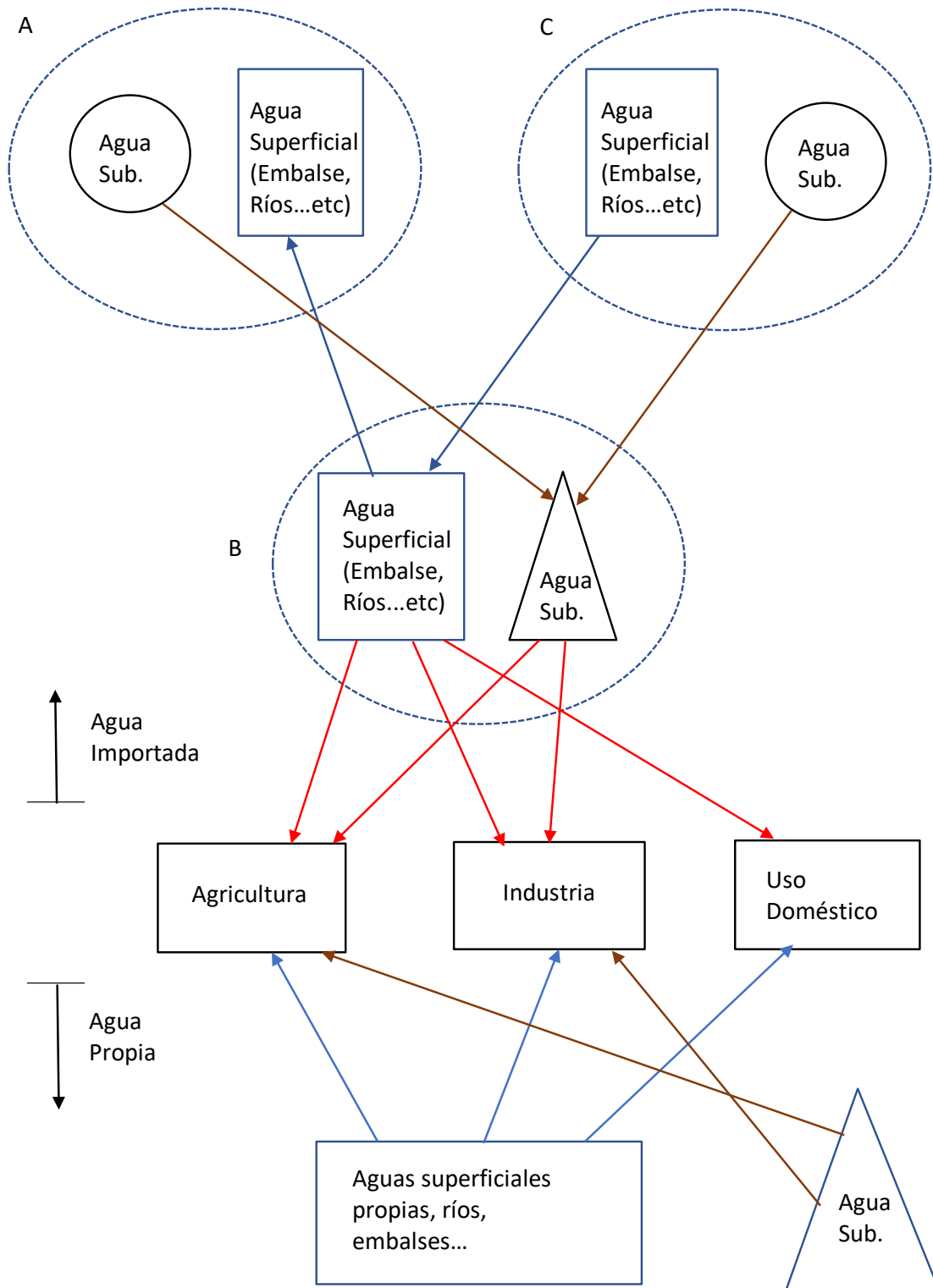
$$10.000 - u_1 - u_3 \geq \delta$$

$$10.000 - u_2 - u_3 \geq \delta$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 12.000$$

$$u_i \geq 0 \text{ con } i=1,2,3.$$

3.4. Esquema del modelo



3.5. Solución

Resolviendo el sistema llegamos a la solución [4150,2620,5230], que implica lo siguiente:

- El jugador A pasa a pagar 4150€, siendo su beneficio del juego de 850€ que se ahorra ya que sin cooperar pagaba 5000€.
- El jugador B pasa a pagar 2650€, siendo su beneficio del juego de 350€ que se ahorra ya que sin cooperar pagaba 3000€.
- El jugador C pasa a pagar 5230€, siendo su beneficio del juego de 350€ que se ahorra ya que sin cooperar pagaba 7000€.

En el siguiente gráfico se muestran los tres jugadores, sus gastos antes y después de cooperar y por consiguiente los beneficios de participar en el juego.

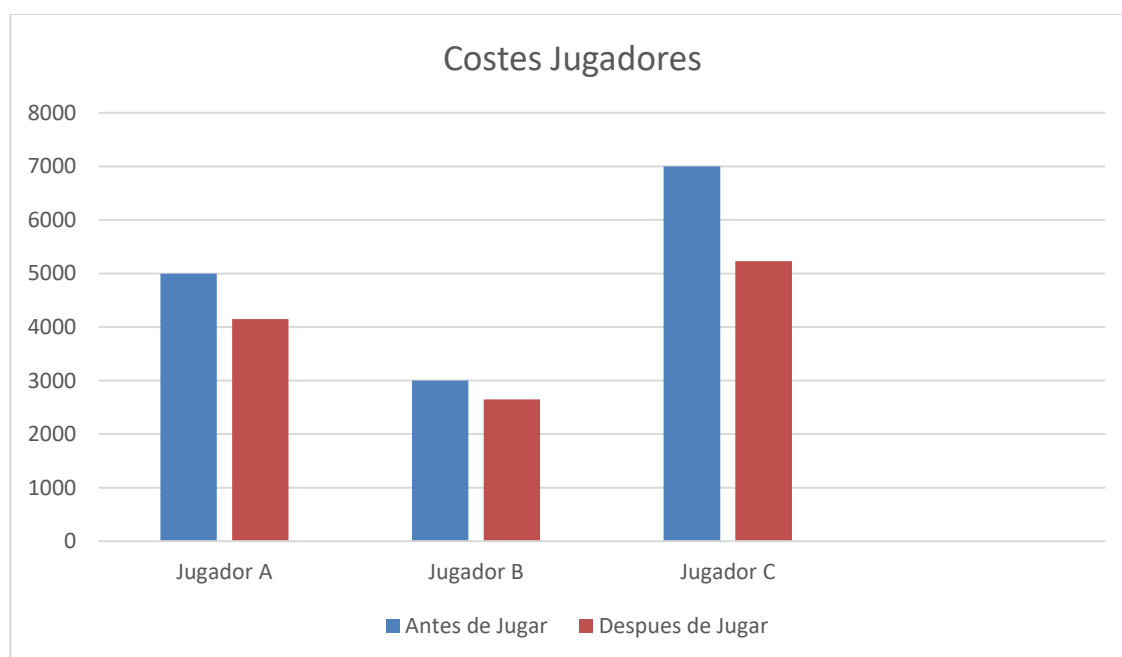


Figura 3-11 Costes Jugadores

4 ENFOQUE NO COOPERATIVO

Se plantea a continuación el segundo caso de resolución. Siguiendo el orden de descripción del trabajo, nos adentramos en un enfoque no colaborativo, es decir, los actores del problema no llegarán acuerdos. Para poder plasmar este enfoque a la realidad, recurriremos a su aplicación por medio de una situación cotidiana en nuestra sociedad, el abastecimiento de diferentes tipos de aguas para su posterior uso en diferentes fines.

Para ello, en primer lugar, será necesario definir los actores principales del problema. Estos son:

1. Agricultura
2. Industria
3. Usuarios Domésticos

Cada uno de estos actores, para su correcto funcionamiento demanda una determinada cantidad de agua. El agua, tal y como la conocemos en sociedad, puede encontrarse con diferentes propiedades en función del tratamiento que haya recibido. En este escenario, suponemos tres tipos de agua. Estas son:

- a) Agua superficial
- b) Agua subterránea
- c) Agua tratada.

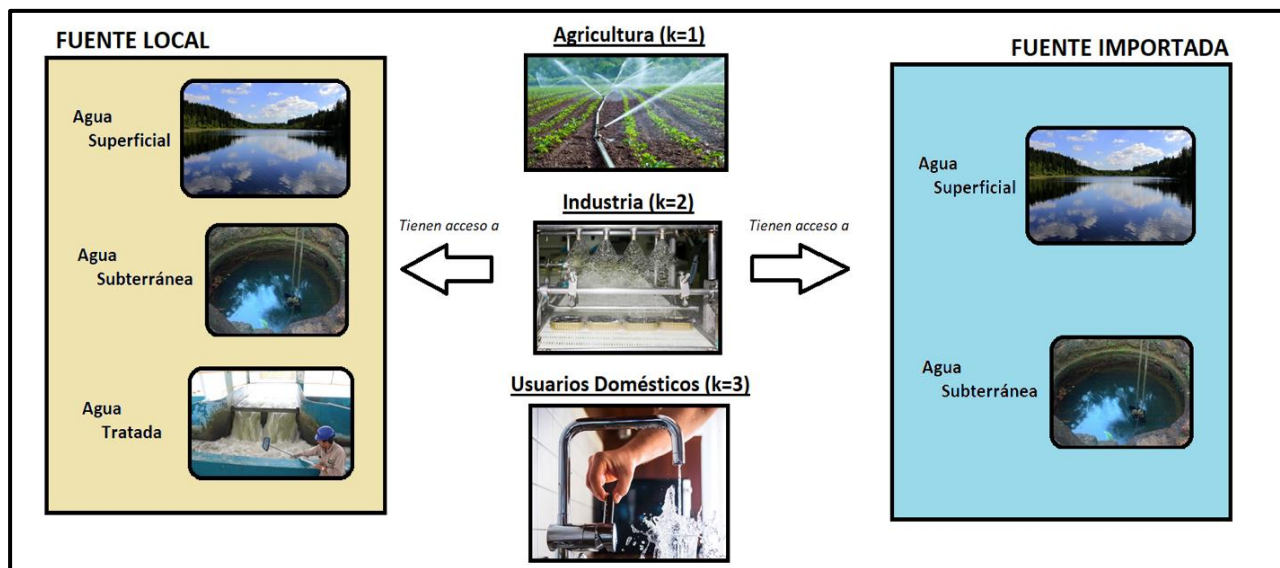
El suministro de agua superficial y subterránea se puede obtener de fuentes locales, aunque también, se puede importar de otras cuencas vecinas.

Definiendo un contador genérico k que represente un índice para cada usuario, definimos:

- $k=1$: Agricultura
- $k=2$: Industria
- $k=3$: Usuarios domésticos

De forma gráfica, el problema definido se representa en la siguiente ilustración:

Figura 4-1 Intercambio no cooperativo



A continuación, se definen las siguientes variables de decisión para cada uno de los tres usuarios:

Variable de decisión	Definición
s_k	Uso de agua superficial de fuente local.
g_k	Uso de agua subterránea de fuente local.
t_k	Uso de agua tratada.
s_k^*	Uso importado de agua superficial.
g_k^*	Uso importado de agua subterránea.

Tabla 4-1 Variables de decisión

Con ello, podemos definir la estrategia de cada jugador. Se define la estrategia como el conjunto de decisiones que un jugador toma a lo largo de la partida, en nuestro caso, la estrategia hace referencia a las cantidades de agua que cada usuario demanda. Teniendo cinco opciones para ser abastecido, se define el vector estrategia para cada consumidor compuesto por cinco elementos:

$$x_k = (s_k, g_k, t_k, s_k^*, g_k^*)$$

Por otro lado, se puede definir la función de pagos. La función de pagos representa la valoración que para cada jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado. Particularizando a nuestro escenario, representa la cantidad total de agua que recibe cada uno de los tres actores del modelo. Luego:

$$F_k = s_k + g_k + t_k + s_k^* + g_k^*$$

4.1. Restricciones

4.1.1. Comunes

Cada actor tiene una limitación común. Esta restricción está asociada a la demanda total de agua que cada jugador puede consumir, la cual debe estar entre unos umbrales que acotan la cantidades máximas y mínimas de agua que cada actor puede demandar.

Con ello, se definen dos restricciones asociadas a cada actor. En la primera, la cantidad total de agua suministrada no puede ser menor que una cantidad mínima, D_{min} . Y en la segunda, el agua total suministrada no debe ser mayor que un dato de demanda máxima, D_k . Por tanto:

$$sk + gk + tk + sk * + gk * \geq D_{min}k \quad (I)$$

$$sk + gk + tk + sk * + gk * \leq Dk \quad (II)$$

4.1.2. En función de cada jugador

Además de la limitación asociada a la demanda, cada jugador tiene sus propias limitaciones individuales.

4.1.2.1. Usuarios agrícolas

Los usuarios agrícolas, asociados al primer valor del contador $k=1$, tienen dos restricciones principales. Para definir las será necesario introducir nuevas variables:

G = conjunto de cultivos que solo pueden usar agua subterránea.

a_i = proporción del cultivo i en el área agrícola.

w_i = necesidad de agua del cultivo i por hectárea.

T = conjunto de cultivos que pueden usar agua tratada.

W = necesidad total de agua por hectárea.

Es inmediato deducir:

$$W = \sum ai * wi$$

La diferenciación de los cultivos en función del agua es debida a que el agua subterránea tiene la mejor calidad de riego, mientras que el agua tratada tiene la peor.

Por tanto, la presencia de cultivos sensibles a la calidad del agua hace que muchos de estos solo puedan ser regados con agua subterránea. Siendo los cultivos menos sensibles, accesibles al riego por medio de agua tratada.

Teniendo esta información en cuenta, pasaremos a definir las restricciones asociadas al sector agrícola. En primer lugar, la proporción de agua subterránea disponible (cociente a) no puede ser menor que la necesidad de agua de los cultivos que solo pueden usar agua subterránea (cociente b).

- a) Agua subterránea demandada por el sector agrario / Agua demandada total por el sector agrario.
- b) Necesidad de agua por parte del sector agrario para los cultivos con riego exclusivo de agua subterránea / Necesidad total de agua por parte del sector agrario.

Por tanto:

$$\frac{(g1 + g1 *)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 *)} \geq \frac{\sum_{i \text{ en } G} (ai * wi)}{W} \quad (III)$$

$$\text{Con } W = \sum_{\text{Para todo } i} (ai * wi)$$

En segundo lugar, para la proporción de agua tratada, la disponibilidad de esta agua (c) no puede ser mayor que la proporción de necesidad de agua de los cultivos que usan agua tratada (d).

- Agua tratada demandada por el sector agrario / Agua demanda total por el sector agrario.
- Necesidad de agua por parte del sector agrario para los cultivos con riego de agua tratada / Necesidad total de agua por parte del sector agrario.

Esto es:

$$\frac{(t1)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 *)} \leq \frac{\sum_{i \text{ en } T} (ai * wi)}{W} \quad (IV)$$

4.1.2.2. Usuarios industriales

Por otro lado, los usuarios industriales (asociados a $k = 2$) también tienen sus propias restricciones. Para poder definir las es necesario introducir las siguientes variables de diseño:

Bg = proporción mínima de agua subterránea que la industria debe que recibir

Bt = proporción máxima de agua tratada que la industria puede usar

Debido a que el agua subterránea tiene la mejor calidad, para mantener una calidad media suficiente del agua utilizada por la industria se especifica una proporción mínima de agua subterránea: Bg.

De modo similar, la peor calidad del agua tratada requiere que la industria use solo una proporción limitada de agua tratada: Bt.

Con estos valores límites dados, las restricciones serán de la forma:

$$\frac{(g2 + g2 *)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 *)} \geq Bg \quad (V)$$

$$\frac{(t2)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 *)} \leq Bt \quad (VI)$$

4.1.2.3. Usuarios domésticos

Por último, los usuarios domésticos (con $k = 3$) llevan asociados una única restricción relativa a la limitación del uso del agua tratada. Esto se debe a que esta agua sólo puede usarse unos fines determinados y muy limitados: riego en parques, fuentes públicas...

Definiendo la siguiente variable auxiliar:

Bd = proporción máxima de agua tratada que los usuarios domésticos pueden solicitar.

Se plantea la siguiente restricción:

$$\frac{(t3)}{(s3 + g3 + t3 + s3 * + g3 *)} \leq Bd \text{ (VII)}$$

4.1.3. Restricciones adicionales

Debido a la limitación de los recursos empleados en el modelo, es necesario definir restricciones adicionales de interconexión. Estas restricciones se definen para garantizar el uso de todos los recursos locales disponibles antes de recurrir a importar agua de otras cuencas vecinas. Por tanto:

$$\begin{aligned} s1 + s2 + s3 &= Ss \text{ (VIII)} \\ g1 + g2 + g3 &= Sg \text{ (IX)} \\ s1 * + s2 * + s3 * &\leq Ss * \text{ (X)} \\ g1 * + g2 * + g3 * &\leq Sg * \text{ (XI)} \end{aligned}$$

Siendo:

Ss = cantidad máxima disponible de agua superficial a partir de la fuente local.

Sg = cantidad máxima disponible de agua subterránea a partir de la fuente local.

Ss^* = máxima cantidad disponible de agua superficial obtenida por medio de importación.

Sg^* = máxima cantidad disponible de agua subterránea obtenida por medio de importación.

4.2. Descripción

Este modelo se define como un juego no cooperativo compuesto por tres actores, con funciones de pago dadas y conjuntos de estrategias definidos por medio de las ecuaciones asociadas a cada restricción. Además, cabe destacar que todas las variables presentes en el modelo se definen no negativas.

4.3. Parámetros

	K=1	K=2	K=3
D_k^{min}	600	180	1100
D_k	998	2000	2150
B_g	0,07		
B_t	0,25		
B_d	0,58		
S_s	800		
S_g	800		
S_s^*	2300		
S_g^*	2300		

Tabla 4-2 Parámetros del modelo

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
a_i	0,14	0,15	0,25	0,25	0,2
w_i	1	1	0.5	0.5	5

Tabla 4-3 Parámetros de los cultivos

Para $G = \{i: 1, 2\}$ y $T = \{i: 3, 4, 5\}$.

4.4. Modelo

Funciones objetivo

$$F1 = s1 + g1 + t1 + s1^* + g1^*$$

$$F2 = s2 + g2 + t2 + s2^* + g2^*$$

$$F3 = s3 + g3 + t3 + s3^* + g3^*$$

Restricciones I, II:

$$s1 + g1 + t1 + s1^* + g1^* \geq 600$$

$$s1 + g1 + t1 + s1^* + g1^* \leq 998$$

$$s2 + g2 + t2 + s2^* + g2^* \geq 180$$

$$s2 + g2 + t2 + s2^* + g2^* \leq 2000$$

Restricción III:

$$\frac{(g1 + g1^*)}{(s1 + g1 + t1 + s1^* + g1^*)} \geq \frac{0,29}{1,54}$$

Restricción IV:

$$\frac{(t1)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 *)} \leq \frac{1,25}{1,54}$$

Restricción V:

$$\frac{(g2 + g2 *)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 *)} \geq 0,07$$

Restricción VI:

$$\frac{(t2)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 *)} \leq 0,25$$

Restricción VII:

$$\frac{(t3)}{(s3 + g3 + t3 + s3 * + g3 *)} \leq 0,58$$

Restricciones VIII, IX, X, XI:

$$s1 + s2 + s3 = 800$$

$$g1 + g2 + g3 = 800$$

$$s1 * + s2 * + s3 * \leq 2300$$

$$g1 * + g2 * + g3 * \leq 2300$$

4.5. Solucion

<i>s1</i>	378
<i>g1</i>	179
<i>t1</i>	23
<i>s1*</i>	10
<i>g1*</i>	10
<i>s2</i>	261
<i>g2</i>	159
<i>t2</i>	118
<i>s2*</i>	13
<i>g2*</i>	20
<i>s3</i>	161
<i>g3</i>	462
<i>t3</i>	0
<i>s3*</i>	638
<i>g3*</i>	25
<i>F1</i>	$378+179+23+10+10 = 600$
<i>F2</i>	$261+159+118+13+20 = 571$
<i>F3</i>	$161+462+0+638+25 = 1286$

Tabla 4-4 Soluciones modelo

4.6. Conclusiones

Como se ha venido insistiendo, la conclusión principal reside en entender que, ante las decisiones que se nos presentan en cualquier sector de la sociedad, un determinado actor podrá actuar conforme a dos principios fundamentales: colaborar o no colaborar.

El primero de ellos es el enfoque de cooperación, que no ha sido objeto de estudio de este caso. El segundo, representa una visión más individualista y de rechazo a cooperar, tomando decisiones en base a analizar únicamente el computo de factores que tenemos en nuestro entorno más personal. Esta forma de proceder se ha podido observar durante el desarrollo de este problema que hemos analizado y que se basa, en el estudio del suministro de aguas para demandantes de zonas metropolitanas.

Cada uno de estos actores toman decisiones de “puertas para adentro” sin tener en cuenta lo que puede suceder con el resto de los actores presentes. Este escenario, como todo, tiene siempre sus ventajas y desventajas. En cuanto a las ventajas, tomar decisiones centrándose en minimizar los costes asociados a los aspectos individuales suele conllevar un aumento de eficiencia, ya que, no nos preocupamos de la presencia de aspectos externos de análisis muy complejo.

Sin embargo, el hecho de colaborar implica abrirse a un campo de nuevas oportunidades con beneficios que desde un enfoque no colaborativo jamás se podrían adquirir. Es quizá un poco más complejo, debido a que la decisión de cada actor dependerá también de las decisiones de los demás. Pero también, permite que los beneficios totales sean repartidos evitando competir con otros actores del sistema que puedan ser superiores.

En este problema el escenario es claramente no cooperativo. Tenemos tres actores que necesitan abastecerse de agua, para lo que deberán cumplir unas restricciones impuestas por la Administración. Mientras que se cumplan estas restricciones de demanda, cada uno puede tomar la decisión que crea más oportuna.

4.7. Tratamiento de aguas residuales

Según la definición establecida por el Real Decreto-Ley 11/1995 de 28 de diciembre (BOE 312, de 30-12-95) que tiene por objeto la transposición al ordenamiento interno de la *Directiva 91/271/CEE* del Consejo relativa al tratamiento de las aguas residuales urbanas, se entiende por aguas residuales urbanas, aquellas aguas residuales domésticas o la mezcla de estas con aguas residuales industriales y/o aguas de escorrentía pluvial.

Así mismo, y de acuerdo con dicha directiva distinguimos tres tipos de aguas:

Las **aguas residuales domésticas** son aquellas aguas residuales procedentes de zonas de vivienda y de servicios y generadas principalmente por el metabolismo humano y las actividades domésticas, incluyen las aguas de cocina, las aguas de lavadoras, las aguas de baño y las aguas negras procedentes del metabolismo humano.

Las **aguas industriales** proceden de actividades industriales que descargan sus vertidos a la red de alcantarillado municipal y presentan una composición muy variable dependiendo del tipo de industria.

Las **aguas pluviales o de tormenta** arrastran partículas y contaminantes presentes tanto en la atmósfera como en los viales. En la mayoría de las ocasiones, donde los sistemas de alcantarillado son unitarios, las aguas de lluvia son recogidas por el mismo sistema que se emplea para la recogida y conducción de las aguas residuales domésticas e industriales.

En muchas ocasiones los vertidos de aguas residuales urbanas superan la capacidad de dilución y autodepuración de los cauces y medios receptores, lo que conlleva a un deterioro progresivo de la calidad de estos, e imposibilita la reutilización posterior del agua.

Independientemente del origen y características de las aguas residuales urbanas, éstas han de ser tratadas adecuadamente antes de su vertido o reutilización, con el fin de:

- Proteger el estado ecológico de los medios receptores (embalses, ríos, barrancos, acuíferos, mar, etc.) del grueso de la contaminación orgánica procedente de las aguas residuales urbanas.
- Evitar riesgos para la salud pública de la población.
- Producir efluentes con características físicas, químicas y microbiológicas aptas para su reutilización.

Hoy en día, las estaciones de tratamiento de aguas residuales son un complemento artificial e imprescindible de los ecosistemas acuáticos, aunque también es cierto que el grado de tratamiento de un agua residual dependerá en gran medida del conocimiento que se tenga del medio receptor, ya que esto podrá determinar la carga contaminante que puede admitir el medio receptor, sin llegar a producir un desequilibrio irreversible o importante en el mismo. Por tanto, el grado de tratamiento

debe estar de acuerdo con:

- Características del medio receptor y estado de las aguas de este.
- Relación de caudales entre el medio receptor y el vertido.
- Utilización por parte de otros usuarios aguas abajo del vertido, así como posibilidad de tomas de aguas próximas o subterráneas.
- Balance hídrico de la zona.
- Fauna y flora tanto del medio receptor como del entorno.

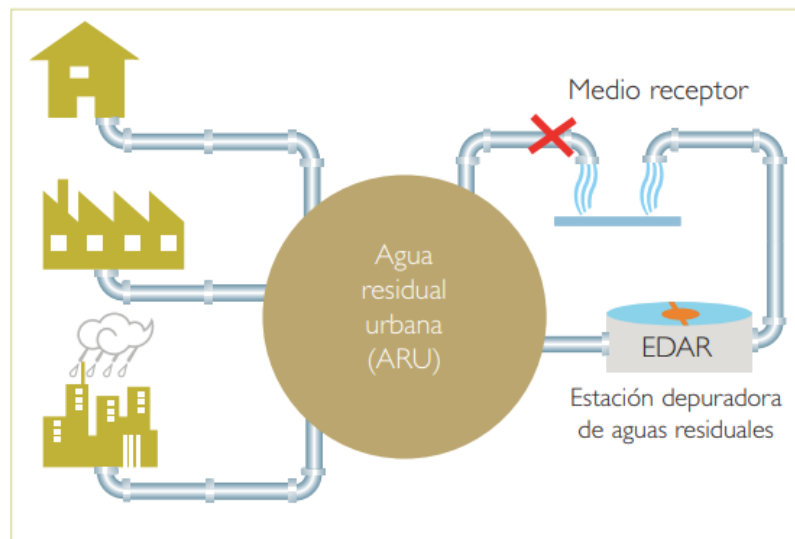


Figura 4-2 Ciclo Agua Residual Urbana

4.7.1. Características de las Aguas

Las aguas residuales urbanas se caracterizan por su composición física, química y biológica, apareciendo una interrelación entre muchos de los parámetros que integran dicha composición. A la hora de realizar una adecuada gestión de dichas aguas, se hace imprescindible el disponer de una información lo más detallada posible sobre su naturaleza y características. A continuación, se muestran las principales características físicas, químicas y biológicas de las aguas residuales urbanas.

Características físicas:

1. **Color:** Generalmente varía del beige claro al negro. Si el agua es reciente, suele presentar coloración beige clara; oscureciéndose a medida que pasa el tiempo, pasando a ser de color gris o negro, debido a la implantación de condiciones de anaerobiosis, por descomposición bacteriana de la materia orgánica.
2. **Olor:** Se debe principalmente a la presencia de determinadas sustancias producidas por la descomposición anaerobia de la materia orgánica. Si las aguas residuales son recientes, no presentan olores desagradables ni intensos, a medida que pasa el tiempo, aumenta el olor por desprendimiento de gases como el sulfhídrico o compuestos amoniacales por descomposición anaerobia.

3. **Temperatura:** En los efluentes urbanos oscila entre 15° y 20°C, lo que facilita el desarrollo de los microorganismos existentes.
4. **Sólidos:** De forma genérica, los sólidos son todos aquellos elementos o compuestos presentes en el agua residual urbana que no son agua. Entre los efectos negativos sobre los medios hídricos, caben destacar entre otros, disminución en la fotosíntesis por el aumento de la turbidez del agua, deposiciones sobre los vegetales y branquias de los peces, pudiendo provocar asfixia por colmatación de estas; formación de depósitos por sedimentación en el fondo de los medios receptores, favoreciendo la aparición de condiciones anaerobias o aumentos de la salinidad e incrementos de la presión osmótica.

Las características químicas de las aguas residuales urbanas vienen definidas por sus componentes orgánicos, inorgánicos y gaseosos.

1. **Los componentes orgánicos** pueden ser de origen vegetal o animal, aunque cada vez, y con mayor frecuencia, las aguas residuales urbanas también contienen compuestos orgánicos sintéticos. Las proteínas, hidratos de carbono y lípidos, así como sus derivados, son los compuestos orgánicos que principalmente aparecen en este tipo de aguas. Son biodegradables y su eliminación por oxidación es relativamente sencilla.
2. **Los componentes inorgánicos** se incluyen a todos los sólidos de origen generalmente mineral, como las sales minerales, arcillas, lodos, arenas y gravas, y ciertos compuestos como sulfatos, carbonatos, etc., que pueden sufrir algunas transformaciones (fenómenos de óxido-reducción y otros).
3. **La componente gaseosa** de las aguas residuales urbanas contiene diversos gases en diferente concentración, entre los que destacan oxígeno disuelto, ácido sulfhídrico, anhídrido carbónico, metano y otros gases malolientes como ácidos grasos volátiles, indol y otros derivados del nitrógeno.

Las características biológicas de las aguas residuales urbanas vienen dadas por una gran variedad de organismos vivos de alta capacidad metabólica, y gran potencial de descomposición y degradación de la materia orgánica e inorgánica. Los organismos que principalmente se encuentran en las aguas residuales urbanas son: algas, mohos, bacterias, virus, flagelados, ciliados, rotíferos, nemátodos, anélidos, larvas, etc.

4.7.2. Principales contaminantes

Los principales compuestos a controlar y eliminar de las aguas residuales urbanas pueden resumirse en los siguientes:

Objetos gruesos: trozos de madera, trapos, plásticos, etc.... que son arrojados a la red de alcantarillado.

Arenas: bajo esta denominación se engloban las arenas propiamente dichas, gravas y partículas más o menos grandes de origen mineral u orgánico.

Grasas y aceites: sustancias que al no mezclarse con el agua permanecen en su superficie dando lugar a natas. Su procedencia es tanto doméstica como industrial.

Sustancias con requerimientos de oxígeno: materia orgánica y compuestos inorgánicos que se

oxidan fácilmente, lo que provoca un consumo del oxígeno del medio al que se vierten.

Nutrientes (Nitrógeno y Fósforo): su presencia en las aguas es debida principalmente a los detergentes y a los fertilizantes. El nitrógeno, fósforo y carbono son nutrientes esenciales para el crecimiento de los organismos. Cuando se vierten al medio acuático, pueden favorecer el crecimiento de una vida acuática no deseada.

Agentes patógenos: organismos presentes en mayor o menor cantidad en las aguas residuales y que pueden producir o transmitir enfermedades (virus, bacterias, protozoos, hongos, etc.).

Contaminantes emergentes o prioritarios: los hábitos de consumo de la sociedad actual generan una serie de contaminantes que no existían anteriormente. Estas sustancias aparecen principalmente añadidas a productos de cuidado personal, de limpieza doméstica, farmacéuticos (residuos de antibióticos, hormonas, etc.).

Para caracterizar las aguas residuales se emplean un conjunto de parámetros que permiten cuantificar los contaminantes anteriormente definidos. Los parámetros de uso más habitual son los siguientes:

1. **Sólidos en Suspensión:** sólidos que no pasan a través de una membrana filtrante de un tamaño determinado (0,45 micras). Dentro de los sólidos en suspensión se encuentran los sólidos sedimentables, que decantan por su propio peso y los no sedimentables.
2. **Aceites y Grasas:** el contenido en aceites y grasas presentes en un agua residual se determina mediante su extracción previa con un disolvente apropiado, la posterior evaporación del disolvente y el pesaje del residuo obtenido.
3. **Demanda Bioquímica de Oxígeno a los 5 días (DBO5):** cantidad de oxígeno disuelto (mg O₂/l) necesario para oxidar biológicamente la materia orgánica de las aguas residuales. En el transcurso de los cinco días de duración del ensayo se consume aproximadamente el 70 % de las sustancias biodegradables.

La relación DBO5/DQO es un factor importante, que indica la biodegradabilidad de las aguas residuales urbanas, entendiéndose por biodegradabilidad, la característica de algunas sustancias químicas de poder ser utilizadas como sustrato por microorganismos.

Tabla 4-5 Biodegradabilidad del agua residual según relación DBO5/DQO

DBO ₅ /DQO	Biodegradabilidad del agua residual
0.4	Alta
0.2-0.4	Normal
0.2	Baja

Tabla 4-6 Valores típicos de los contaminantes del agua residual urbana

Parámetro	Contaminación Fuerte	Contaminación Media	Contaminación Baja
Sólidos en Suspensión(mg/l)	350	220	100
DBO₅ (mg O₂/l)	400	220	110
DQO (mg O₂/l)	1000	500	250
Nitrógeno (mg N/l)	85	40	20
Fósforo (mg P/l)	15	8	4
Grasas (mg/l)	150	100	50
Coliformes Fecales (ufc/100ml)	10 ⁶ -10 ⁸	10 ⁶ -10 ⁷	10 ⁵ -10 ⁷

4.7.3. Caudales

El caudal de agua a tratar corresponde al volumen de agua que llega a la estación depuradora por unidad de tiempo. La cantidad de aguas residuales que produce una comunidad está en proporción con el consumo de agua de abastecimiento y el grado de desarrollo económico y social de la misma, ya que un mayor desarrollo conlleva un mayor y más diverso uso del agua en las actividades humanas.

Según las instrucciones para la redacción de proyectos de abastecimiento y saneamiento del agua, dictadas en 1995 por el Ministerio de Obras Públicas, Transporte y Medio Ambiente (MOPTMA), las dotaciones de abastecimiento para los distintos rangos poblacionales se muestran en la Tabla 4-3.

Tabla 4-7 Consumos urbanos (l/hab día), según los usos y tamaño de población abastecida

Población (habitantes)	Doméstico Municipales	Industrial	Servicios	Fugas de redes y varios	TOTAL
1000	60	5	10	25	100
1000-6000	70	30	25	25	150
6000-12000	90	50	35	25	200
12000-50000	110	70	45	25	250
50000-250000	125	100	50	25	300
>250000	165	150	60	25	400

La estimación del caudal diario del agua residual urbana que llega a una estación depuradora, en la mayoría de los casos, se realiza a partir de la dotación y población servida, de la forma:

$$Q = \frac{D \times P}{1000}$$

Donde:

- Q = Caudal diario (m³/Día)
- D = Dotación (l/hab. Día)
- P = Población (hab.)

Los caudales que llegan a las estaciones depuradoras siguen una variación diaria que es fiel reflejo de las actividades desarrolladas en la zona. Estas variaciones suelen ser importantes.

Durante la noche y primeras horas del día, en las que los consumos de agua son mínimos, también son mínimos los caudales de aguas residuales, estando estos compuestos fundamentalmente por aguas infiltradas y pequeñas cantidades de aguas residuales domésticas. La primera punta de caudal se alcanza cuando llega a la estación depuradora el agua correspondiente al consumo punta, aproximadamente a media mañana. La segunda punta de caudal suele tener lugar a últimas horas de la tarde entre las 19:00 y 21:00 horas. Esta evolución puede observarse en la siguiente gráfica.

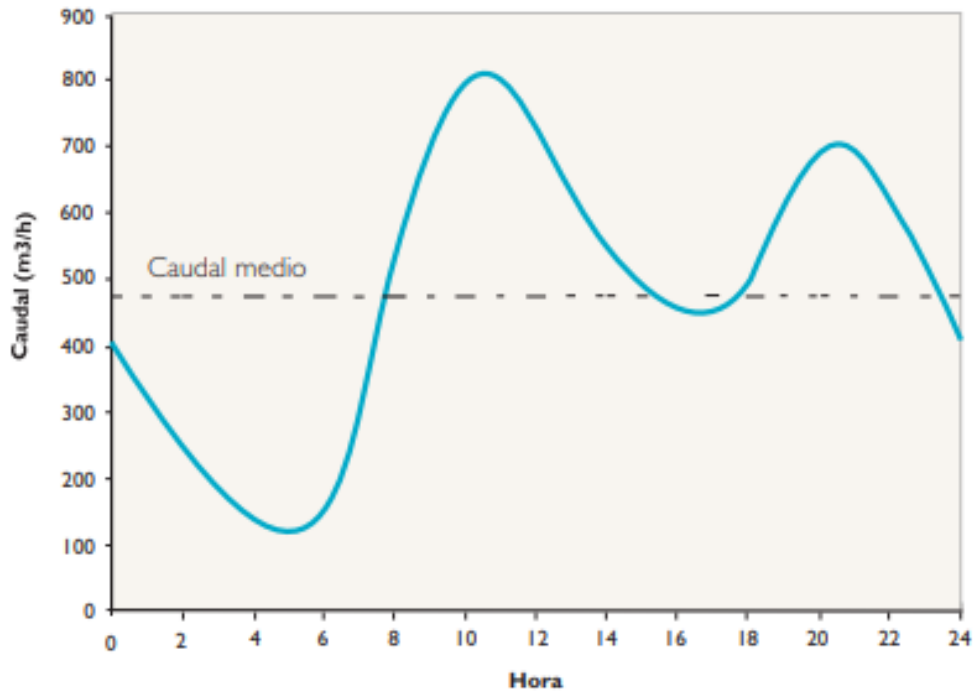


Figura 4-3 Evolución del caudal de agua residual generado

Es importante conocer los valores máximos (Q_{\max}), mínimos (Q_{\min}), medios (Q_{med}) y el factor de punta (F_p) de dichos caudales.

El caudal medio vendrá definido por:

$$Q_{\text{med}} (m^3/h) = \frac{Q}{24}$$

El caudal máximo, se puede determinar a partir de una serie de fórmulas matemáticas de tipo empírico, siendo una de las más utilizadas:

$$Q_{\max}(m^3/h) = Q_{\text{med}} \times \left(1.15 + \frac{2.575}{Q_{\text{med}}^{0.25}}\right)$$

La relación entre el caudal máximo y el medio se define como F_p , de la forma:

$$F_p = \frac{Q_{\max}}{Q_{\text{med}}}$$

En este tipo de aguas, la relación entre el caudal máximo y el medio varía ente 1,5 y 2,5. En la ilustración 3, se representan los valores de F_p , en función de los distintos valores de Q_{med} . Como se aprecia en la gráfica anterior el factor de punta es máximo en las pequeñas aglomeraciones debido a que en estas áreas son extremas las diferencias entre los caudales máximos y medios frente a las grandes poblaciones en las que la variabilidad de caudales es menos acentuada y se produce una generación de aguas residuales de manera constante a lo largo del día.

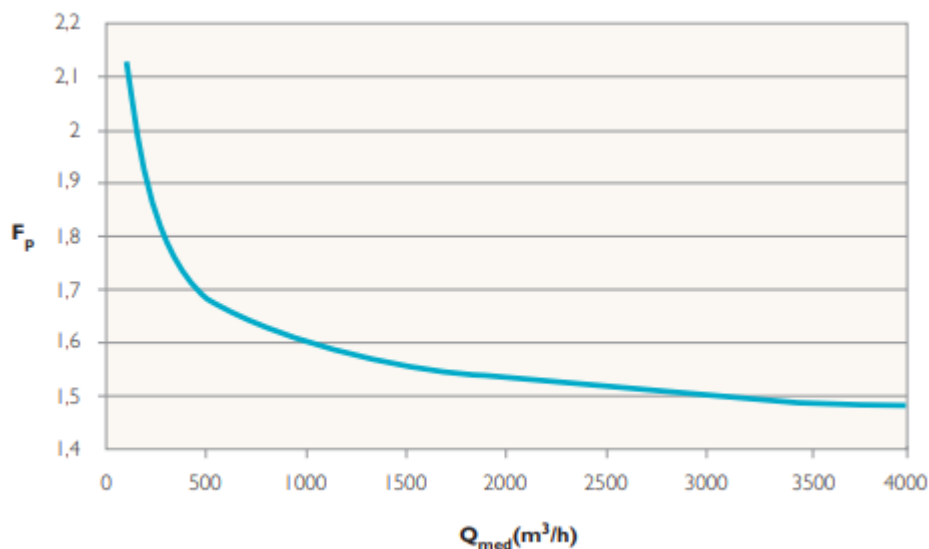


Figura 4-4 Relación F_p y Q_{med}

4.7.4. Recogida y conducción

La recogida y conducción de las aguas residuales urbanas desde la población en la que se generan hasta la estación depuradora se realiza a través de una compleja red de tuberías (alcantarillado, colectores). Esta agua, dependiendo de la topografía del terreno, será conducida por gravedad a la planta de tratamiento, o en determinados casos, habrá que recurrir a su bombeo.

Normalmente, los sistemas de recogida son unitarios, es decir, la red de saneamiento recoge tanto las aguas residuales como las de lluvia. En ocasiones, los colectores que llegan a la estación de tratamiento transportan tan sólo aguas residuales, mientras que las aguas de lluvia se recogen en colectores independientes (sistema separativo).

Con el objetivo de que a la estación depuradora no llegue más caudal del proyectado, en los colectores se instalan aliviaderos, que permiten derivar los excesos de caudal. Esta situación tiene lugar principalmente en los períodos en que se registran fuertes lluvias.

Igualmente, para poder derivar toda el agua residual antes de su entrada a la depuradora, en caso de problemas de funcionamiento, se instala a la llegada de los vertidos un bypass general.

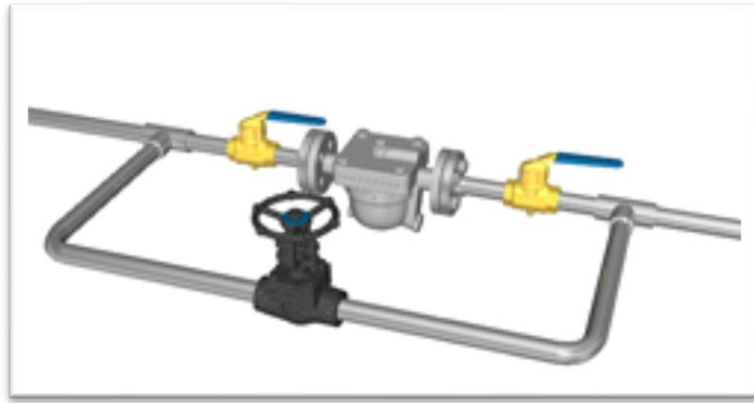


Figura 4-5 Tubería y válvula bypass

4.7.5. Tratamiento

El tratamiento de las aguas residuales urbanas supone la aplicación de unos procesos físicos, biológicos y químicos, de forma que los niveles de contaminación que queden en los efluentes tratados cumplan los límites legales existentes y puedan ser asimilados de forma natural por los medios receptores.

El tratamiento de las aguas residuales urbanas supone la aplicación de unos procesos físicos, biológicos y químicos, de forma que los niveles de contaminación que queden en los efluentes tratados cumplan los límites legales existentes y puedan ser asimilados de forma natural por los medios receptores.

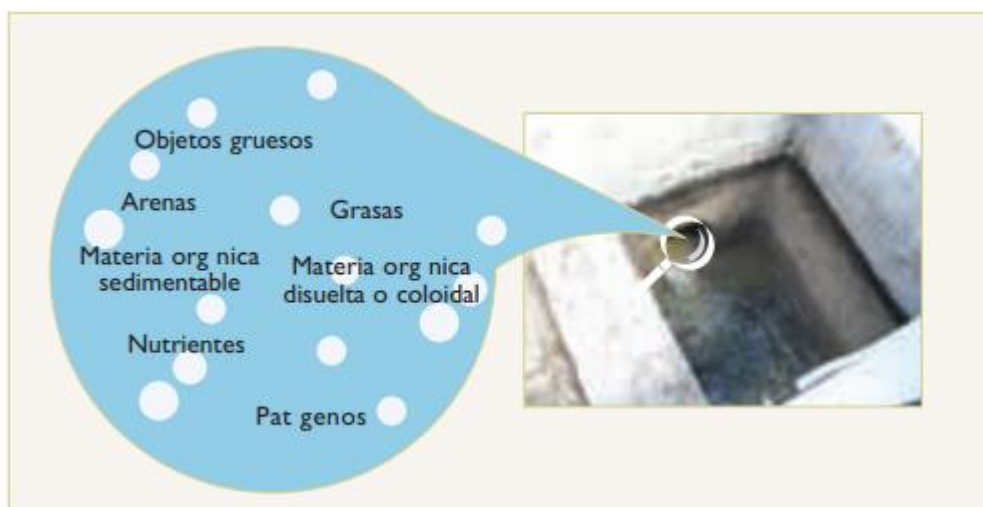


Figura 4-6 Componentes aguas residuales urbanas

El orden de eliminación de los componentes presentes durante el proceso de depuración es: objetos gruesos, arenas, grasas, materia orgánica sedimentable, materia orgánica disuelta o coloidal, nutrientes y patógenos.

En las depuradoras convencionales de aguas residuales urbanas se distinguen dos líneas de tratamiento:

- **Línea de agua**, donde se incluyen los procesos o tratamientos que permiten reducir los contaminantes presentes en las aguas residuales.

- **Línea de lodos**, donde se tratan la mayor parte de los subproductos que se originan en la línea de agua.

La **línea de agua** se caracteriza por estar comprendida en diferentes etapas:

1. Pretratamiento
2. Tratamiento Primario
3. Tratamiento Secundario
4. Tratamiento Terciario

4.7.5.1. Pretratamiento

Comprende una serie de operaciones físicas y mecánicas, cuyo objetivo es separar del agua residual la mayor cantidad posible de materias que por su naturaleza o tamaño pueden originar problemas en las etapas posteriores del tratamiento. El correcto diseño y posterior mantenimiento de la etapa de pretratamiento son aspectos de gran importancia, pues cualquier deficiencia en los mismos repercute negativamente en el resto de las instalaciones, originando obstrucciones de tuberías, válvulas y bombas, desgaste de equipos, formación de costras, etc.

Las operaciones que comprende el pretratamiento generalmente son: desbaste, desarenado, y desengrasado.

- **Desbaste:** consiste en la eliminación de los sólidos de tamaño grande y mediano (trozos de madera, trapos, raíces, etc.), así como de finos, que de otro modo podrían deteriorar o bloquear los equipos mecánicos y obstruir el paso de la corriente de agua. El procedimiento más usual consiste en hacer pasar las aguas a través de rejas.

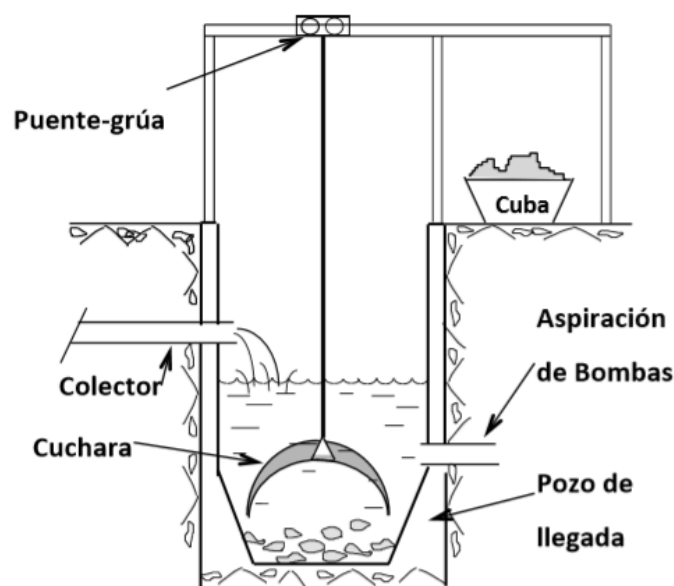


Figura 4-7 Pozo de llegada



Figura 4-8 Reja de desbaste

- Desarenado: su objetivo es la extracción de la mayor cantidad posible de las arenas presentes en las aguas residuales. Dentro de la denominación “arenas” se incluyen las arenas propiamente dichas, gravas y partículas más o menos grandes de origen mineral u orgánico. Con esta operación se pretende proteger los equipos mecánicos contra la abrasión y el desgaste y evitar la acumulación de estas materias pesadas. Normalmente, se dimensionan los desarenadores para la eliminación de partículas de tamaño superior a los 0,2 mm.
- Desengrasado: en esta etapa se eliminan las grasas y demás materias flotantes de menor densidad que el agua. Normalmente, las operaciones de desarenado y desengrasado se llevan a cabo de forma conjunta en unidades de tratamiento conocidas como desarenadores-desengrasadores aireados.

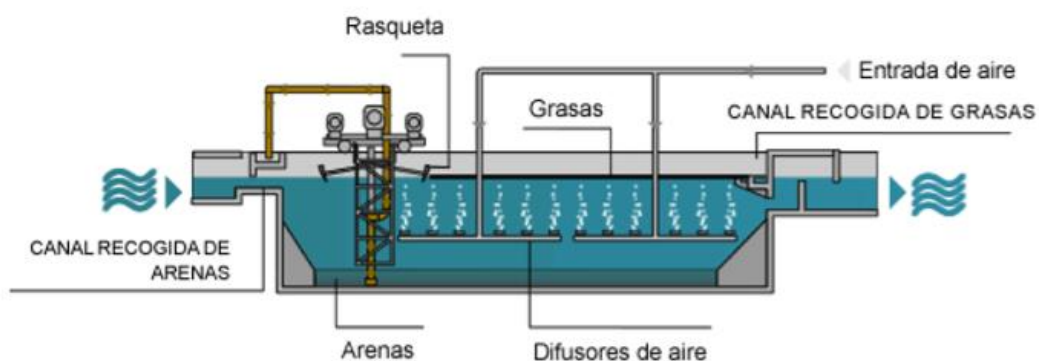


Figura 4-9 Esquema Desarenador/Desengrasador



Figura 4-10 Desarenador/Desengrasador

4.7.5.2. Tratamiento primario

El Real Decreto Ley 11/95 define Tratamiento Primario como “el tratamiento de aguas residuales urbanas mediante un proceso físico o fisicoquímico que incluya la sedimentación de sólidos en suspensión, u otros procesos en los que la DBO_5 de las aguas residuales que entren, se reduzca, por lo menos, en un 20% antes del vertido, y el total de sólidos en suspensión en las aguas residuales de entrada se reduzca, por lo menos, en un 50%”.

Los Tratamientos Primarios más habituales son:

- Decantación primaria: su objetivo es la eliminación de la mayor parte de los sólidos sedimentables, bajo la acción exclusiva de la gravedad. La retirada de estos sólidos es muy importante, ya que en caso contrario originarían fuertes demandas de oxígeno en el resto de las etapas de tratamiento de la estación.



Figura 4-11 Decantador Primario

- Tratamientos fisicoquímicos: en este tipo de tratamiento se consigue, mediante la adición de reactivos químicos, incrementar la reducción de los sólidos en suspensión, al eliminar, además, sólidos coloidales. Se incrementa el tamaño y densidad de estos mediante procesos de coagulación-floculación.

4.7.5.3. Tratamiento secundario

El Real Decreto Ley 11/95 define Tratamiento Secundario como “el tratamiento de aguas residuales urbanas mediante un proceso que incluya un tratamiento biológico con sedimentación secundaria u otro proceso, en el que se respeten los requisitos que se establecerán reglamentariamente”.

Con estos tratamientos se pretende la reducción de la contaminación orgánica y la coagulación y eliminación de sólidos coloidales no decantables. Los procesos biológicos se realizan con la ayuda de microorganismos (fundamentalmente bacterias), que en condiciones aerobias actúan sobre la materia orgánica presente en las aguas residuales. El aporte de oxígeno para el mantenimiento de las reacciones biológicas (oxidación, síntesis y respiración endógena), generalmente se realiza introduciendo aire en los recipientes donde se llevan a cabo estas reacciones. Estos recipientes se conocen con el nombre de **reactores biológicos o cubas de aireación**. Los dos métodos más habituales para el aporte de oxígeno a los reactores biológicos hacen usos de aireadores mecánicos o de difusores.

Las nuevas bacterias que van apareciendo en los reactores tienden a unirse (floculación), formando agregados de mayor densidad que el líquido circundante, y en cuya superficie se va adsorbiendo la materia en forma coloidal. Para la separación de estos agregados, conocidos como lodos o fangos, el contenido de los Reactores Biológicos (licor de mezcla) se conduce a una etapa posterior de decantación (Decantación o Clarificación Secundaria), donde se consigue la separación de los lodos de los efluentes depurados por la acción de la gravedad.

De los lodos decantados una fracción se purga como lodos en exceso, mientras que otra porción se recircula al Reactor Biológico para mantener en él una concentración determinada de microorganismos.



Figura 4-12 Tratamiento secundario

4.7.5.4. Tratamiento terciario

También conocidos como tratamientos avanzados, más rigurosos, complementarios, etc., permiten obtener mejores rendimientos de eliminación de DBO₅ y materia en suspensión, así como reducir otros contaminantes como nutrientes y metales, lo que puede permitir la posterior reutilización de los efluentes depurados.

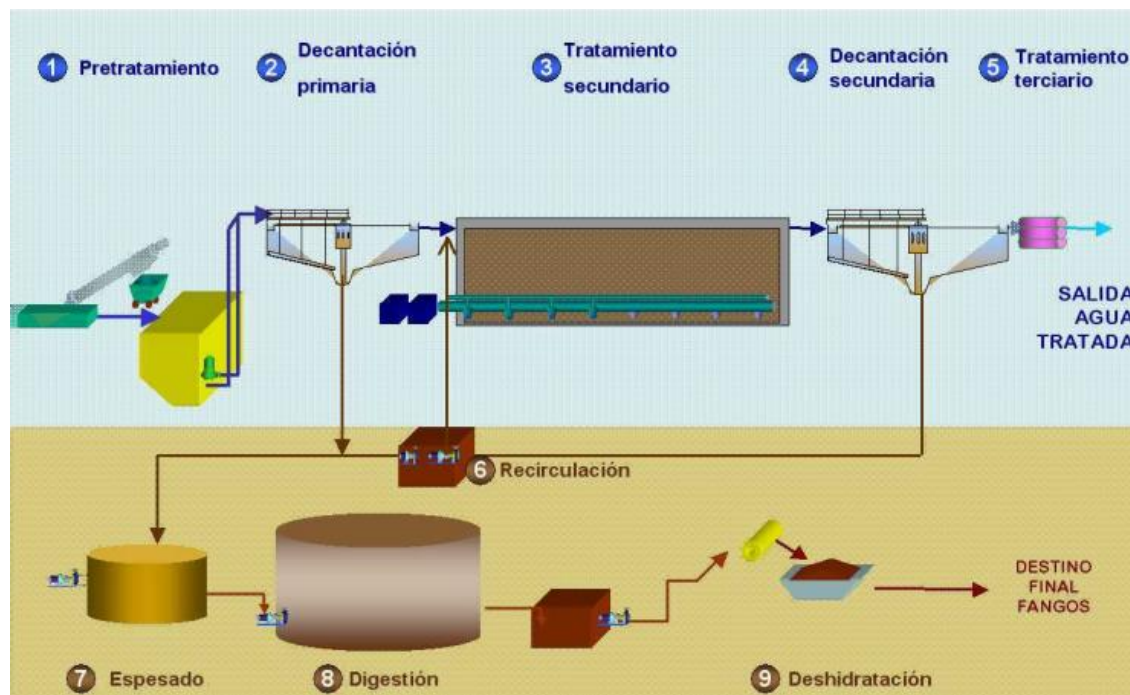


Figura 4-13 Línea de Fangos

Tabla 4-8 Rendimientos (%) en las etapas de depuración de las aguas residuales urbanas

Etapas de depuración	Sólidos en suspensión	DBO₅
Pretratamiento	5 - 15	5 - 10
Tratamientos Primarios	40 - 70	25 - 40
Tratamientos Secundarios	80 - 90	90 - 98
Tratamientos Terciarios	90 - 95	98 - 99

4.7.6. Evacuación y reutilización

En una estación depuradora la corriente entrante (aguas residuales urbanas), como consecuencia de los procesos de tratamiento a que se ve sometida, se transforma en dos corrientes salientes: efluentes depurados y lodos. Con la evacuación de ambas corrientes se da por finalizado el tratamiento de las aguas residuales urbanas.

REFERENCIAS

[0]

“*Perspectivas del Medio Ambiente Mundial 2000*. PNUMA. Ed. Mundi-Prensa. 2000. Vivendi Environment. Annual Report 2000.”

[1]

El periódico de la energía. 13 julio 2015 [consulta: 2 febrero 2020]. Disponible en: <https://elperiodicodelaenergia.com/las-10-mayores-centrales-hidroelectricas-de-espana/>

[2]

Wikipedia: la enciclopedia libre. 02 junio 2016 [consulta: 14 febrero 2020]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Dilema_del_prisionero

[3]

iAgua. 13 marzo 2017 [consulta: 25 febrero 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/beatriz-pradillo/aguas-residuales-y-roma>

[4]

Blog: Itálica Romana. 22 febrero 2009 [consulta: 25 febrero 2020]. Disponible en: <http://italicaromana.blogspot.com/2009/02/acueducto-romano.html>

[5]

Gobierno de Aragón. [en línea]. MANUAL PARA MANIPULADORES DE ALIMENTOS. [consulta: 26 febrero,2020].Disponible:
<https://www.aragon.es/documents/20127/674325/Manual%20de%20manipuladores%20de%20abastecimiento%20de%20agua-1.pdf/614d228b-06c6-bde7-2b54-8589cbaf03c0>

[6]

iAgua. 07 mayo 2015 [consulta: 27 febrero 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/facts-and-figures/20-paises-mas-probabilidades-tener-escasez-agua-2040>

[7]

Apuntes de Demografía. 15 junio 2016 [consulta: 27 febrero 2020]. Disponible en: <https://apuntesdedemografia.com/curso-de-demografia/ejercicios-resueltos/ejercicio-3-poblacion-mundial-grafico-de-su-evolucion/>

[8]

iAgua. 30 enero 2016 [consulta: 27 febrero 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/noticias/abb-uso-redes-agua-inteligente-suministro-agua-seguro-fiable-y-eficiente>

[9]

Youtube. [consulta: 2 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=OmMt7a5M5Uo&t=29s>

[10]

Semana. 01 julio 2017 [consulta: 2 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.semana.com/nacion/articulo/metroagua-prestacion-del-servicio-de-agua-potable-en-santa-marta/511542>

[11]

Asociación Española de Abastecimiento de Agua y Saneamiento, 2012. [consulta: 10 marzo 2020]. Disponible en: http://www.aeas.es/servlet/mgc?pg=ListNews&ret=next&news_id=1249&areaCode=publicarea&newsCategory=Noticias%20AEAS

[12]

TeleMadrid. 10 diciembre 2019 [consulta: 12 marzo 2020]. Disponible en: <http://www.telemadrid.es/noticias/madrid/Varios-Madrid-Canal-Isabel-II-0-2184681518--20191210113040.html>

[13]

Planeta Inteligente. El Mundo. Acciona. 30 enero 2019 [consulta: 14 marzo 2020]. Disponible en: <https://planetainteligente.elmundo.es/retos-y-soluciones/mas-inundaciones-menos-acceso-al-agua>

[14]

UH Noticias. 06 abril 2019 [consulta: 16 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.ultimahora.es/noticias/part-forana/2019/04/06/1070797/trafico-agua-potable-vuelven-llevar-seis-meses-despues-torrentada.html>

[15]

El Mundo. 01 mayo 2018 [consulta: 16 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.elmundo.es/baleares/2018/05/01/5ae891b8e2704e1a7a8b4586.html>

[16]

FLOODUP, 2015-2016. [consulta: 18 marzo 2020]. Disponible en: <http://www.floodup.ub.edu/el-impacto-de-las-inundaciones/>

[17]

EL DIARIO Montañés. 02 diciembre 2019 [consulta: 20 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.eldiariomontanes.es/santander/resueltas-incidencias-suministro-20191202095457-nt.html>

[18]

iAgua. 19 marzo 2016 [consulta: 22 marzo 2020]. Disponible en:

<https://www.iagua.es/noticias/locken/vuelven-aumentar-perdidas-agua-espana>

[19]

iAgua. 20 febrero 2020 [consulta: 22 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/noticias/ministerio-transicion-ecologica-y-reto-demografico/agua-principales-ejes-adaptacion-al>

[20]

iAgua. 02 julio 2018 [consulta: 24 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/mixzaida-pena/problemas-recurso-agua>

[21]

Universidad de Oviedo. [en línea]. SISTEMAS DE BOMBEO. [consulta: 24 marzo 2020]. Disponible en: https://agasca.net/wp-content/uploads/2018/08/PDF_SistemasdeBombeo2.pdf

[22]

Diario LARIOJA. 09 agosto 2019 [consulta: 25 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.larioja.com/comarcas/alfaro/alfaro-recupera-abastecimiento-20190809093415-nt.html?ref=https:%2F%2Fwww.google.com%2F>

[23]

General Water Company Argentina, 2018. [consulta: 28 marzo 2020]. Disponible en: <https://gwc.com.ar/servicios/abastecimiento-agua/>

[24]

Agua. 28 febrero 2020 [consulta: 10 abril 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/siham-amasri/agua-agricultura-y-bosques-marruecos>

[25]

Ainia Centro Tecnológico. 15 abril 2019 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <https://www.interempresas.net/Alimentaria/Articulos/243863-10-medidas-de-economia-circular-para-gestion-del-agua-en-industrias-agroalimentarias.html>

[26]

El Eix Clot, Associació de Comerciants Emprenedors del Clot - Camp de l'Arpa del distrito de San Martí. 20 marzo 2020 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <https://www.eixclot.cat/es/noticia/el-gobierno-aprueba-reducir-a-la-mitad-el-canon-del-agua-para-usuarios-domesticos-y-actividades-economicas>

[27]

Wikipedia: la enciclopedia libre. 16 octubre 2013 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Agua_subterr%C3%A1nea

[28]

Escuela de Ingeniería y medio Ambiente. [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <http://eimaformacion.com/categorias-de-las-masas-de-agua-superficial/>

[29]

Blog. Gestión de residuos industriales. 08 agosto 2018 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <https://gestionderesiduosindustriales.blogspot.com/2018/08/agua-tratada-definicion.html>

Referencias Electronicas

"Game Theory", Wilfrid Hodges, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

"A framework for the unification of the behavioral sciences", Herbert Gintis, *Behavioral and Brain Sciences* (2007) 30:1-61.

Game Theory, Experimental Economics, and Market Design Page, Alvin Roth.

A Chronology of Game Theory, Paul Walker.

GameTheory.net: A resource for educators and students of game theory, Mike Shor.

Introduction to Game Theory. Lecture by Benjamin Polak.

