



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

**EQUIDESCO PONIBILIDAD, EL
PROBLEMA DE LA MEDIDA Y LA
PARADOJA DE BANACH-TARSKI**

Trabajo de Fin de Grado realizado por:

JAVIER SUÁREZ LABAT

Tutor: FRANCISCO JOSÉ FRENICHE IBÁÑEZ

Catedrático de la Universidad de Sevilla

Índice

Summary	2
Introducción	3
1. Equidescomponibilidad en el plano	6
1.1. Polígonos	6
1.2. Equidescomponibilidad en polígonos	10
1.3. El Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien	12
1.4. Equidescomponibilidad del círculo y el cuadrado	16
2. La Paradoja de Banach-Tarski	23
2.1. Equidescomponibilidad y conjuntos paradójicos	23
2.2. La Paradoja de Hausdorff	26
2.3. La Paradoja de Banach-Tarski	30
2.4. La Paradoja de Banach-Tarski (versión fuerte)	32
3. El Teorema de Banach	35
3.1. Introducción a la amenabilidad	35
3.2. Amenabilidad de los grupos de isometrías \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2	44
3.3. Teorema de Banach: extensión de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 .	45
A. El Teorema de Tychonoff	51
Referencias	56

Summary

In this work we study the problem of equidecomposability. Two sets are said to be equidecomposable if there is a finite family of pairwise disjoint subsets of one of them that can be reassembled by rigid motions to form the other.

In the first section we prove two theorems on equidecomposability on the plane. The first result, Bolyai-Gerwien-Wallace theorem, states that two polygons with the same area are equidecomposable using only triangle pieces. The second theorem shows that the circle and the square are not equidecomposable only using cutout pieces (Jordan domains with piecewise differentiable boundary).

In the second section we study this problem in the three dimensional space, proving the Banach-Tarski Paradox. On our way to this objective we need to prove Hausdorff's Paradox as it sets the entry point of Banach-Tarski's result. The Banach-Tarski Paradox establishes that any solid sphere in \mathbb{R}^3 is paradoxical, meaning it can be divided into two disjoint subsets, each of them equidecomposable with the original sphere. Naturally, since Lebesgue measure is rigid motion invariant, the pieces considered in these paradoxes are non-measurable.

In the last section we will return to the equidecomposability problem on lower dimensions to show no bounded subset of the real line and the plane with non-empty interior is paradoxical. This is known as Banach Theorem and it shows that finitely additive, invariant under isometries, extensions of the Lebesgue length or area measure exists, defined on all $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ and $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

Introducción

La paradoja de Banach-Tarski es un resultado muy sorprendente. Afirma que en el espacio de tres dimensiones, una esfera sólida puede trocearse en un número finito de partes, de modo que colocando los trozos en otra posición se puede componer otra esfera ¡de radio doble! Es decir, con las mismas piezas de un puzle podemos formar esferas de distinto tamaño. Naturalmente, las piezas son conjuntos muy complicados, pues la invariancia por movimientos rígidos del volumen implica que no todas ellas pueden ser medibles Lebesgue.

Por otra parte, el llamado problema de la medida consiste en estudiar la existencia de una medida invariante por isometrías, definida en el conjunto de las partes del espacio de n dimensiones, que extiende a la medida de Lebesgue. Que no existe tal medida numerablemente aditiva es consecuencia de la existencia de conjuntos, que como el de Vitali, no son medibles Lebesgue. La paradoja de Banach-Tarski demuestra que no existe en tres dimensiones tal medida ni siquiera finitamente aditiva. En la dirección opuesta, el teorema de Banach demuestra que sí existen en el plano y en la recta.

En este trabajo estudiamos algunos resultados relacionados con el problema de la equidescomponibilidad. Se dice que dos conjuntos son equidescomponibles si existe una familia finita de conjuntos que puede utilizarse para formar ambos conjuntos, de alguna forma que hay que precisar (trasladando, girando, ...). Se trata de una idea parecida a la del juego Tangram, aunque en éste se dan unas piezas fijas y se pide formar distintas figuras con ellas.

El problema de Tarski consiste en la equidescomponibilidad mediante isometrías en el plano de un círculo y un cuadrado de igual área. La solución depende de las restricciones que se impongan a las piezas. Es conocido que se pueden conseguir piezas que son conjuntos de Borel (del orden de 10^{200} piezas) pero, como vemos en este trabajo, no existe un puzle con piezas “recortables con tijeras” que pueda a la vez formar el cuadrado y el círculo.

Durante la primera sección estudiaremos distintos resultados sobre la equidescomponibilidad en el plano. Comenzamos siguiendo el artículo de Kavanagh [3] que trata el Teorema de Gerwein, Wallace y Bolyai sobre la equidescomponibilidad de polígonos. Este resultado afirma que dos polígonos son equidescomponibles, con pie-

zas triangulares y con isometrías en el plano, si y solo si tienen la misma área. La demostración se puede visualizar bastante bien, para lo que hemos incluido varias figuras. Se comienza con un repaso de las definiciones y los resultados básicos para trabajar con polígonos, en particular, incluimos el Teorema de la curva de Jordan para curvas poligonales que, a diferencia del teorema general, tiene una demostración sencilla.

Para concluir la sección, desarrollamos un fragmento del artículo de Dubins, Hirsch y Karush [1] sobre la imposibilidad ya mencionada de usar piezas “recortables con tijeras”, es decir, que sean dominios de Jordan de clase C^1 a trozos, para formar un cuadrado y un círculo. Esencialmente la demostración consiste en construir un objeto invariante por isometrías del plano, que solo depende de la frontera. Debería coincidir en el círculo y el cuadrado si existiesen tales piezas con las que formar ambas figuras, pero no es así.

A lo largo de la segunda sección se estudia la paradoja de Banach-Tarski. La demostración está basada en la paradoja de Hausdorff, que también se demuestra, en la cual se establece el mismo resultado pero considerando la esfera sin un conjunto de volumen nulo. En la demostración se construyen cuatro piezas de forma que con dos de ellas se puede formar el conjunto original y con las otras dos también. Con este resultado queda patente la relación entre la equidescomponibilidad y el problema de la medida en \mathbb{R}^3 .

En esta sección y la siguiente se sigue el libro de Stan Wagon [5], en concreto, los capítulos 2, 3 y 12. La demostración de la paradoja de Banach-Tarski tiene dos partes bien diferenciadas. Primero se trabaja sobre la construcción de Hausdorff para evitar el conjunto de medida nula y demostrar así que la esfera completa puede duplicarse. La propiedad transitiva de la equidescomponibilidad es fundamental en todo el proceso.

La auténtica sorpresa que añade la paradoja de Banach-Tarski es la segunda parte de la demostración. Esta es conocida como la versión fuerte de la paradoja y tiene una implicación directa con el problema de la equidescomponibilidad. Concretamente, establece que dos figuras acotadas cualesquiera de \mathbb{R}^3 con interior no vacío pueden descomponerse en piezas para formar las dos, ¡aunque tengan distinto volumen! Es decir, si no ponemos ninguna restricción a las piezas, todas las figuras en tres dimensiones son equidescomponibles.

En la última sección se demuestra la existencia de una medida finitamente aditiva

invariante por isometrías en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 que extiende a la medida de Lebesgue, resolviendo el problema de la medida en la recta y en el plano. Para ello, se necesita construir una medida invariante en los grupos de isometrías \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 . Aquellos grupos que admiten una medida finitamente aditiva invariante respecto a sí mismos se llamarán grupos amenables. En el camino para demostrar que los grupos de isometrías \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son amenables deberemos estudiar el Teorema de Tychonoff [2, p. 138]. Se trata de un desvío notable, aunque necesario, por lo que las demostraciones se incluyen en el Apéndice.

Por último, para obtener una extensión invariante por isometrías de la medida de Lebesgue a todo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ se extiende la integral de Lebesgue a todas las funciones simples. Es decir, se demuestra que se puede extender la integral a cualquier función característica en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 . La aplicación del Teorema de extensión de Hahn-Banach [4, p. 288-289] casi demuestra este resultado, pero no garantiza que la extensión sea invariante por isometrías. La existencia de una extensión invariante, que se consigue a través de la medida en el grupo de isometrías, es el último resultado de nuestro trabajo.

1. Equidescomponibilidad en el plano

En esta primera sección se expondrán diferentes resultados sobre equidescomponibilidad en el plano. El primer objetivo es estudiar el Teorema 1.3.3 de Wallace-Bolyai-Gerwien sobre la caracterización de la congruencia a trozos en polígonos. Para ello se seguirán las demostraciones del artículo [3].

El segundo objetivo es extender la cuestión acerca de qué objetos del plano son equidescomponibles a otras figuras mediante la demostración del Teorema 1.4.3. Este resultado afirma que es imposible crear un puzle con piezas de frontera rectificable entre el cuadrado y el círculo. Estas piezas son parecidas a las que se podrían recortar con unas tijeras. De ahí el nombre del artículo [1] “Scissor Congruence”. Concretamente, se sigue el razonamiento de [1, p. 240-241].

1.1. Polígonos

Comenzaremos con las definiciones y propiedades necesarias para demostrar el Teorema de Wallace, Bolyai y Gerwein. Primero vamos a ver dos definiciones sobre curvas regulares a trozos:

Definición 1.1.1. *Una aplicación $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana regular a trozos si existen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y $\gamma \in C^1([t_{i-1}, t_i])$ para cada $i = 1, \dots, n$. Denotamos por γ^* al recorrido de la curva γ ; es decir, al compacto*

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}.$$

La curva se dice cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Haciendo abuso de notación, identificaremos por γ tanto a la curva como a su recorrido.

Definición 1.1.2. *Se dice que una curva plana regular a trozos Γ es una poligonal si está formada por segmentos. Con la notación de la definición anterior, para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene que $\Gamma_i(t) = tv_{i-1} + (1-t)v_i$ en $[t_{i-1}, t_i]$, con $v_i \in \mathbb{R}^2$ tales que v_{i-1}, v_i y v_{i+1} no están alineados. Cada segmento de Γ se denomina lado de la poligonal y los puntos v_i son los vértices.*

Se tiene que si una poligonal Γ es cerrada entonces el primer y último vértice coinciden.

Definición 1.1.3. *Una curva regular a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de Jordan si es cerrada e inyectiva en $[a, b)$. Si además es una poligonal decimos que es una poligonal de Jordan.*

Para definir los polígonos utilizaremos el interior de una poligonal por lo que es necesario demostrar el Teorema de la Curva de Jordan para poligonales.

Teorema 1.1.4. *Sea Γ una poligonal de Jordan en \mathbb{R}^2 . Entonces, $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ tiene dos componentes conexas, una acotada y la otra no acotada, ambas con Γ como frontera.*

Demostración. Sea Γ una poligonal, queremos demostrar que existen dos conjuntos abiertos A y B tales que todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ pertenece a uno de estos dos conjuntos. El conjunto A será el exterior y B el interior.

Comenzamos escogiendo un vector dirección v que no sea paralelo a ninguno de los lados de Γ . Esto es posible puesto que Γ tiene una cantidad finita de lados. Ahora consideramos, para cada punto $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, el rayo que parte de x y tiene dirección v . Diremos que x pertenece a A si el rayo que le corresponde corta a Γ una cantidad par de veces y a B en caso contrario.

Por otro lado, si el rayo corta a un vértice de Γ , no se cuenta el corte si los dos lados que parten del vértice se encuentran al mismo lado del rayo. Sí se contará el corte si los lados se encuentran en los lados opuestos del rayo. Para cada punto, a la paridad del número de cortes del rayo le llamamos paridad de x .

Veamos ahora que si dados dos puntos el segmento que los une no corta a Γ , entonces ambos puntos tienen la misma paridad. Para ello, estudiamos la paridad de los puntos del segmento. El número de cortes sólo puede cambiar cuando el rayo pasa por un vértice de Γ . Pero, como se ha establecido antes, o bien mantiene el número de cortes o varía en dos. Entonces, la paridad no cambia entre puntos unidos por un segmento que no corta a Γ . Entonces, tenemos que dos puntos conectados por una poligonal que no corte a Γ tienen la misma paridad ya que la paridad no cambia en ninguno de los segmentos de la poligonal.

Ahora queremos probar que si dos puntos tienen la misma paridad, entonces pueden unirse por una poligonal que no corte a Γ . Para ello, si Γ tiene más de 3 lados,

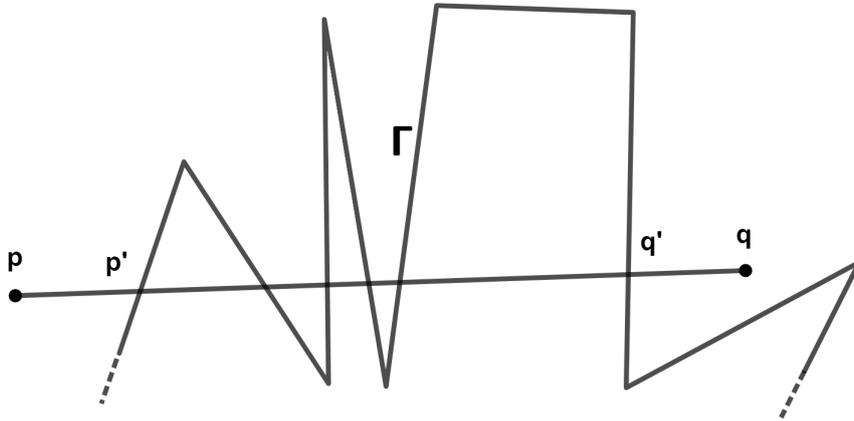
definimos la distancia δ como la mitad de la mínima distancia entre lados no adyacentes de Γ . Es decir,

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}d(\Gamma_i, \Gamma_j) : 2 \leq j - i \leq n - 1, i, j = 0, \dots, n \right\},$$

donde $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ son los lados que componen Γ . En el caso trivial en que Γ tenga 3 lados, se trata de un triángulo y el interior se define como la intersección de 3 regiones angulares definidas por los ángulos del triángulo y sus lados.

Entonces, partimos de dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ con la misma paridad. Si el segmento que los une \overline{pq} no corta a Γ hemos terminado. Si corta a Γ consideramos los puntos p' y q' , el primer y último punto respectivamente en el que \overline{pq} corta a Γ . Entonces, una poligonal P que une p y q está definida como el camino que sigue \overline{pq} hasta que diste δ de p' . Entonces, seguimos Γ a distancia δ en cualquiera de los dos sentidos hasta que corte \overline{pq} a distancia δ de q' .

Falta demostrar que este corte se produce en el segmento $\overline{q'q}$ y no sobre el segmento $\overline{p'q'}$. Primero, tenemos que los puntos de \overline{pq} que distan menos de δ de q' tienen dos paridades distintas, ya que la paridad cambia al pasar por q' . Además, como los puntos conectados por una poligonal que no corta a Γ tienen la misma paridad, tenemos que los puntos de $\overline{q'q}$ tienen la misma paridad que p y, por tanto, la misma que los puntos de P .



Entonces, P corta al segmento $\overline{q'q}$ cuando esta a distancia δ de q' y no al segmento $\overline{p'q'}$ pues en ese punto no tendría la misma paridad que p . Entonces, si continuamos

por $\overline{q'q}$ hasta q obtenemos un camino continuo que nunca corta a Γ , pues siempre dista $\delta > 0$ de Γ .

Con esto hemos demostrado que todo par de puntos con la misma paridad está conectado por un camino continuo que no corta a Γ . Es decir, A y B son dos componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Además sabemos que A es el exterior pues si escogemos un punto cualquiera de B y seguimos el rayo que parte de él en dirección v , eventualmente obtendremos un punto con paridad 0 y el resto del rayo tiene también paridad 0. Entonces, A es no acotado, con lo que concluye la demostración. □

Ya podemos dar la definición de polígono y, con ella, la definición formal de descomposición finita por polígonos.

Definición 1.1.5. *Un polígono es una región del plano compacta y cuya frontera es una poligonal de Jordan. Es decir, una poligonal de Jordan Γ define un polígono que es unión de Γ y la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.*

Definición 1.1.6. *Sea C un conjunto arbitrario. Una familia finita $\{C_i\}_{i=1}^n$ de subconjuntos de C es una descomposición finita por polígonos de C si se cumple:*

- Cada C_i es un polígono contenido en C .
- $\bigcup_{i=1}^n C_i = C$.
- $\text{int}(C_i) \cap \text{int}(C_j) = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

Además, si cada C_i es un triángulo decimos que la descomposición es una triangulación de C .

En esta definición es necesario que las piezas de la composición compartan frontera. Si tomásemos polígonos abiertos para formar una descomposición tendrían que superponerse en un conjunto de medida no nula. A continuación vamos a tratar un resultado básico que establece el punto de partida para la demostración del Teorema 1.3.3.

Proposición 1.1.7. *Todo polígono admite una triangulación.*

Demostración. Vamos a razonar por inducción en el número de vértices del polígono P . El número de vértices debe ser mayor o igual que 3, ya que en caso contrario no se puede formar un polígono. Si $n = 3$, el polígono es un triángulo y hemos terminado.

Supuesto cierto para todo $k < n$, vamos a demostrar el caso n . Sea v el vértice de P más a la izquierda y sean u y w los vértices adyacentes a v .

Ahora tenemos dos posibilidades. Si el segmento \overline{uw} está contenido en P , entonces P menos el triángulo vuw es un polígono de $n - 1$ vértices, que por hipótesis de inducción admite una triangulación. Si añadimos el triángulo vuw a esta triangulación ya tenemos una triangulación de P .

Veamos el caso en que el segmento \overline{uw} no está contenido en P . En este caso, existe algún punto del segmento \overline{uw} que no está en P . Entonces, escogemos un segmento que v con un punto cualquiera de \overline{uw} que no pertenezca a P . Este segmento corta a la poligonal de P en el interior del triángulo vuw por lo que hay al menos un vértice de P en el interior de vuw . Escogemos el vértice más alejado del vector \overline{uw} en dirección a v que llamaremos v' . Entonces, el segmento $\overline{vv'}$ está contenido en P ya que, en caso contrario, habría algún vértice más lejano al segmento \overline{uw} .

Finalmente, hemos encontrado un segmento que une dos vértices no adyacentes de P . Es decir, $\overline{vv'}$ divide a P en dos polígonos con a lo más $n - 1$ vértices cada uno por lo que aplicando la hipótesis de inducción ya tendríamos la triangulación de P . □

1.2. Equidescomponibilidad en polígonos

Para dar la definición de equidescomponibilidad debemos definir la noción de isometría en el plano, que representa el movimiento de las piezas del puzle.

Definición 1.2.1. Una isometría sobre \mathbb{R}^n es una biyección $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distancias. Es decir, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$|x - y| = |T(x) - T(y)|,$$

donde $|\cdot|$ representa la norma euclídea.

A lo largo de este trabajo aparecerán los grupos de isometrías en \mathbb{R}^n , \mathbf{G}_n ; y varios de sus subgrupos. Sabemos que el grupo de isometrías \mathbf{G}_n es un subespacio del

conjunto de aplicaciones afines \mathbf{A}_n . Concretamente, es el conjunto de funciones:

$$\mathbf{G}_n = \{Ax + b : A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\},$$

donde $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ es el grupo ortogonal.

En esta sección nos restringimos al plano por lo que el grupo de isometrías es \mathbf{G}_2 . En este grupo están las simetrías respecto a una recta, traslaciones y rotaciones respecto a un punto. Entonces, la imagen de un polígono por una isometría es un polígono. De esta forma, dos figuras serán equidescomponibles por polígonos cuando puedan descomponerse en una cantidad finita de polígonos que al trasladarlos, rotarlos o voltearlos, podamos formar ambas figuras. Es decir, no está permitido deformar las piezas. Aquí se introduce la definición formal.

Definición 1.2.2. *Diremos que dos polígonos P y Q son equidescomponibles (o congruentes) por polígonos cuando ambos admiten una descomposición finita en polígonos $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_i\}_{i=1}^n$ tales que existen $\{T_i\}_{i=1}^n$ isometrías en \mathbb{R}^2 que cumplen $T_i(A_i) = B_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

Nota. La congruencia a trozos es un sinónimo de equidescomponibilidad. Es decir, es equivalente decir que dos figuras son equidescomponibles por polígonos que congruentes por polígonos. Por otro lado, también diremos que dos conjuntos son congruentes cuando sean el mismo conjunto salvo isometría. Durante este apartado y el siguiente asumiremos que la equidescomponibilidad o congruencia es siempre por polígonos.

De la misma forma que en las descomposiciones, la equidescomponibilidad está ligada a los subconjuntos que se consideren. Si las restricciones sobre los subconjuntos se relajan también lo hacen las condiciones para la congruencia. Otro modo de relajar las restricciones sobre la congruencia es considerar más aplicaciones además de las isometrías. Por ejemplo, incluyendo homotecias. Estos problemas de congruencia distan más del ouzle que planteamos en la introducción pues se permitiría deformar las piezas. En este trabajo sólo se emplearán isometrías. Ahora vamos a demostrar una propiedad esencial en las demostraciones de equidescomponibilidad que, además, veremos de forma general (sin restricciones sobre las piezas) en la sección 3.

Proposición 1.2.3. *(Propiedad transitiva) Dos polígonos congruentes por polígonos con un tercero son congruentes por polígonos.*

Demostración. Sean A y B dos polígonos ambos congruentes por polígonos con otro polígono C . Entonces, A y C pueden descomponerse en polígonos congruentes. Sean $\{A_i\}_{i=1}^r$ y $\{A'_i\}_{i=1}^r$ las descomposiciones de A y C respectivamente. De la misma forma, podemos encontrar unas descomposiciones congruentes de B y C , $\{B_j\}_{j=1}^s$ y $\{B'_j\}_{j=1}^s$. Entonces, tenemos que

$$\{A'_i \cap B'_j : 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq s\} \quad (1)$$

es una descomposición de C que tiene a lo más rs piezas. Entonces, como la intersección de dos polígonos es un polígono, (1) también es una descomposición finita por polígonos. Entonces, podemos descomponer cada A_i en $A_i \cap \hat{B}_j$ congruentes con $A'_i \cap B'_j$. De forma análoga, podemos descomponer cada B_j en $\hat{A}_i \cap B_j$ congruentes con $A'_i \cap B'_j$. Es decir, $A_i \cap \hat{B}_j$ es congruente con $\hat{A}_i \cap B_j$ por lo que A y B son congruentes por polígonos. \square

1.3. El Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

Para demostrar el resultado tenemos que ver primero dos lemas. Las demostraciones son constructivas y están acompañadas de imágenes que clarifican el proceso. Son demostraciones geométricas en las que los únicos resultados que se aplican son postulados de Euclides. Antes de estudiar los lemas vamos a recordar los postulados necesarios:

1. Sean dos puntos sobre dos lados de un triángulo. Entonces, la recta que pasa por ellos es paralela al tercer lado si y solo si ambos puntos dividen los dos lados con la misma proporción.
2. Los ángulos definidos por la intersección de dos rectas son iguales dos a dos (parejas de ángulos no adyacentes).
3. Un triángulo está caracterizado por cualquiera de sus lados y los dos ángulos que se apoyan en él.

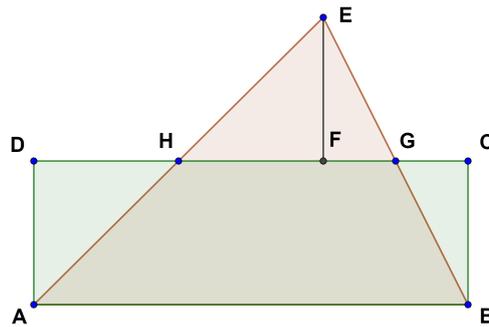
El apartado 3) será clave para demostrar que dos triángulos son congruentes.

Lema 1.3.1. *Todo triángulo es equidescomponible por polígonos con un rectángulo.*

Demostración. Dado un triángulo ABE cualquiera podemos suponer que el lado \overline{AB} es el más largo. En caso de haber más de uno se escoge cualquiera de ellos. Sean H y G los puntos medios de los segmentos \overline{AE} y \overline{BE} respectivamente. Entonces, por (1), la recta definida por \overline{HG} es paralela a \overline{AB} . Sean C y D los puntos de corte de esta recta con las rectas perpendiculares a \overline{HG} en B y A respectivamente. El rectángulo $ABCD$ es el rectángulo que buscamos. Veamos que es congruente con el triángulo ABE .

Sea F la proyección del punto E sobre el segmento \overline{CD} . Entonces, los triángulos FGE y HFE son rectángulos (con ángulos rectos $\angle GFE$ y $\angle EFH$) y el lado \overline{FG} tiene la misma longitud que \overline{GC} . Además, por (2), el ángulo $\angle FGE$ es igual a $\angle BGC$. Entonces, por (3), FGE es congruente con CGB . Por último, de forma análoga se tiene que el triángulo FHE es congruente a DHA . Entonces, el rectángulo $ABCD$ y el triángulo ABE cumplen la definición de equidescomponibilidad.

□



Con este Lema podemos convertir cualquier triángulo en un rectángulo de igual área. Nos falta poder “recortar” un rectángulo en piezas que nos permitan formar otro rectángulo con base cualquiera. De esta forma podremos convertir cada triángulo en un rectángulo de base a elegir.

Lema 1.3.2. *Dado un rectángulo $ABCD$ y un segmento \overline{EF} cualesquiera, existe un rectángulo $EFGH$ equidescomponible por polígonos con $ABCD$.*

Demostración. Separando por casos tenemos que se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\overline{AB} > 2\overline{EF}$
2. $2\overline{EF} \geq \overline{AB} \geq \overline{EF}$
3. $\overline{EF} > \overline{AB}$

Veamos que es suficiente razonar sobre el segundo caso. Para ello vamos a reducir el primero y el tercero a este. Si estuviésemos en el primer caso basta con dividir el rectángulo por la mitad y formar un rectángulo con la mitad de base y el doble de altura. Si no estamos en el segundo caso todavía repetimos el proceso.

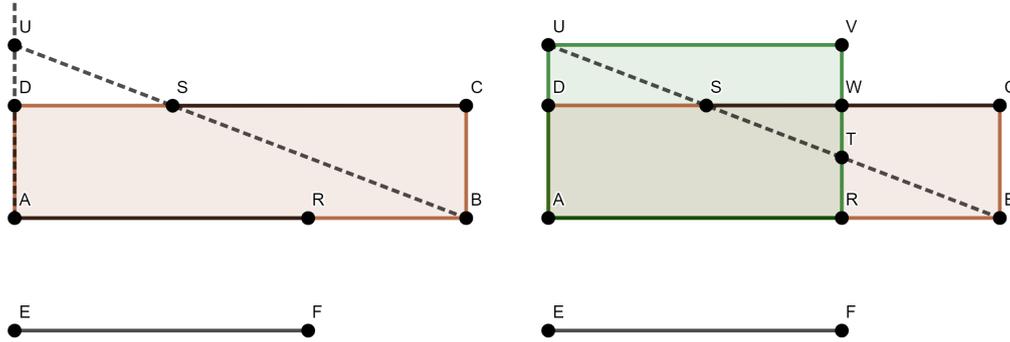
Análogamente, si estuviésemos en el tercer caso dividimos el rectángulo en dos mitades para formar otro con el doble de base y la mitad de altura. La equivalencia se tiene por la propiedad transitiva de la congruencia por polígonos. Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que estamos en el caso $2\overline{EF} \geq \overline{AB} \geq \overline{EF}$.

Escogemos dos puntos R y S sobre los segmentos \overline{AB} y \overline{DC} respectivamente tales que \overline{AR} y \overline{SC} tengan la misma longitud que el segmento \overline{EF} . Ahora, sea U la intersección de las rectas \overrightarrow{BS} y \overrightarrow{AD} , dibujamos el rectángulo $ARVU$ (el punto V está determinado por los otros tres).

Por otro lado, sean W y T las intersecciones de la recta perpendicular a \overline{AB} sobre V y los segmentos \overline{DC} y \overline{BU} respectivamente. Entonces, los ángulos $\angle RBT$ y $\angle DSU$ son iguales y tenemos que los triángulos RBT y DSU son congruentes.

De la misma forma, tenemos que los ángulos $\angle SUV$ y $\angle BSC$ son iguales. Además, como \overline{EF} , \overline{AR} , \overline{SC} y \overline{UV} son congruentes, los triángulos TUV y BSC son congruentes. Ahora bien, la intersección de estos dos triángulos es el triángulo TSW . Entonces, si restamos este triángulo a TUV y BSC obtenemos polígonos equidescomponibles, $USWV$ y $TWCB$. Con esto ya tenemos que los rectángulos $ABCD$ y $ARVU$ son congruentes por polígonos y \overline{AR} tiene la misma longitud que \overline{EF} . \square

El proceso de la demostración puede verse en las siguientes imágenes:



Con estos dos lemas ya tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema. Cabe destacar la importancia de la Proposición 1.2.3. Denotaremos por μ a la medida área de Lebesgue en el plano.

Teorema 1.3.3. *Dos polígonos son equidescomponibles por polígonos si y solo si tienen el mismo área.*

Demostración.

\Rightarrow Tenemos dos polígonos P y Q congruentes por polígonos. Es decir, existen A_1, \dots, A_n y B_1, \dots, B_n polígonos y T_1, \dots, T_n isometrías tales que para todo

1. $P = \bigcup_{i=1}^n A_i$,
2. $Q = \bigcup_{i=1}^n B_i$ y
3. $T_i(A_i) = B_i, i = 1, \dots, n$.

Como la medida de Lebesgue es invariante por isometrías, tenemos que $\mu(A_i) = \mu(T_i(A_i)) = \mu(B_i)$, donde μ es la medida área usual. Además, los A_i y B_i tienen interiores disjuntos, entonces sus intersecciones tienen medida nula, por lo que

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu(Q).$$

\Leftarrow Por la Proposición 1.1.7 sabemos que todo polígono admite una triangulación. Dados dos polígonos P y Q con el mismo área, consideramos dos triangulaciones

$\{A_i\}_{i=1}^r$ y $\{B_j\}_{j=1}^s$. Por la Proposición 1.2.3 y los lemas anteriores tenemos que cada uno de estos triángulos es congruente con un rectángulo de base 1, que llamaremos A'_i y B'_j . Si apilamos sucesivamente los rectángulos A'_i por la base (análogamente los B'_j), obtenemos un rectángulo de base 1 con altura a , que es la suma de las alturas de los A'_i . A este rectángulo lo llamaremos A (análogamente B con altura b). Entonces, como los polígonos P y Q tienen el mismo área tenemos que

$$\mu(A) = 1 \cdot a = a = \mu(P) = \mu(Q) = b = 1 \cdot b = \mu(B).$$

Entonces, los rectángulos A y B tienen la misma base y altura i.e. son el mismo rectángulo salvo isometría. Finalmente, por la Propiedad 1.2.3 tenemos que P y Q son congruentes por polígonos. □

1.4. Equidescomponibilidad del círculo y el cuadrado

En el anterior apartado el problema de la equidescomponibilidad consistía en crear piezas de un puzle con el objetivo de construir dos polígonos distintos. Hemos conseguido caracterizar la existencia de dicho puzle y solo ha sido necesario trabajar con polígonos. En esta sección, queremos extender la idea de este puzle escogiendo esta vez piezas más generales, parecido a las piezas que podemos recortar con unas tijeras. Para definir las piezas tenemos que definir los discos topológicos.

Definición 1.4.1. *Sea $\mathbb{D} = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad abierto. Llamamos disco topológico abierto (cerrado) a la imagen de \mathbb{D} ($\overline{\mathbb{D}}$) por un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 en sí mismo.*

Denotaremos por δD a la frontera de un disco topológico D . Tenemos que es equivalente trabajar con discos topológicos cerrados que con las clausuras de discos topológicos abiertos. Veamos la demostración de esta propiedad.

Sea Ω un disco topológico abierto. Entonces, existe un homeomorfismo ϕ tal que $\phi(\mathbb{D}) = \Omega$. De esta forma, por ser ϕ homeomorfismo, tenemos que ϕ lleva abiertos en abiertos y cerrados en cerrados; y $\overline{\Omega} = \overline{\phi(\mathbb{D})} = \phi(\overline{\mathbb{D}})$. Es decir, ϕ respeta fronteras.

Ahora vamos a introducir la definición de congruencia por tijeras. El objetivo de esta sección es demostrar que no existe un puzle resoluble que consista en: “Dadas las

siguientes piezas, construya un cuadrado y reordénelas adecuadamente para construir un círculo”, siempre y cuando solo se permitan un tipo de piezas. En la siguiente definición de equidescomponibilidad se introduce con precisión la clase de piezas de las que disponemos.

Definición 1.4.2. Sean D y D' dos discos topológicos. Decimos que son equidescomponibles por tijeras si existen $\{D_i\}_{i=1}^n$ discos topológicos cerrados con frontera de clase C^1 a trozos y $\{T_i\}_{i=1}^n$ isometrías en el plano tales que

- $\bigcup_{i=1}^n D_i = D$.
- $\bigcup_{i=1}^n T_i(D_i) = D'$.
- $\text{int}(D_i) \cap \text{int}(D_j) = \emptyset$, para todo $i \neq j$.
- $\text{int}(T_i(D_i)) \cap \text{int}(T_j(D_j)) = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

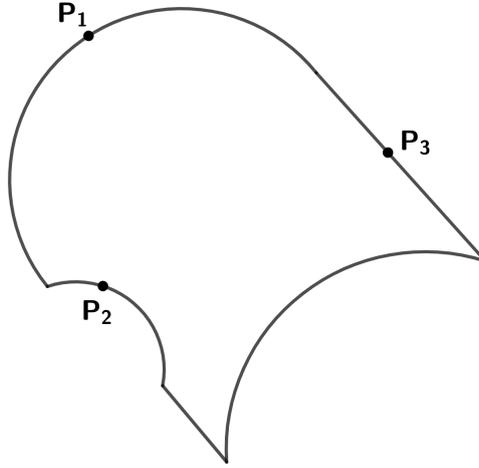
Se trata de una generalización de la Definición 1.2.2. En este caso, con las condiciones de esta definición, se dice que $\{D_i\}_{i=1}^n$ y $\{D'_i\}_{i=1}^n$ con $D'_i = T_i(D_i)$ forman una descomposición congruente de D y D' . Con estos conceptos, ya podemos enunciar el resultado que concluye esta sección:

Teorema 1.4.3. *El círculo y el cuadrado no son equidescomponibles por tijeras.*

Antes de ver la demostración, vamos a enunciar algunas definiciones que necesitaremos para demostrar el teorema. Definimos primero propiedades de convexidad y concavidad para la frontera de un disco topológico.

Definición 1.4.4. Sea D un disco topológico y x un punto de su frontera. Diremos que x es convexo respecto a D si existe un subarco abierto A de la frontera de D tal que todo segmento abierto que une dos de sus puntos está contenido en el interior de D . Análogamente, diremos que x es cóncavo respecto a D existe un subarco abierto A de la frontera de D tal que todo segmento abierto que une dos de sus puntos no corta a \bar{D} .

En la siguiente figura se puede ver un ejemplo de cada caso:



El punto P_1 es convexo respecto a D , P_2 es cóncavo y P_3 no es convexo ni cóncavo.

Vamos a definir un objeto invariante sobre la frontera para descomposiciones por tijeras. Denotaremos por σ a la medida longitud de arco usual en δD y por S^1 a la circunferencia unidad.

Definición 1.4.5. Sea D un disco topológico con frontera de clase C^1 a trozos. Definimos los conjuntos A_D y B_D como los puntos $x \in \delta D$ convexos y cóncavos respecto a D respectivamente y tales que existe un subarco abierto $L \subset \delta D$, con $x \in L$, congruente con un arco de S^1 . Entonces, definimos $\lambda(D)$ como:

$$\lambda(D) = \sigma(A_D) - \sigma(B_D).$$

Nota. 1. El objeto λ está bien definido ya que tanto A_D como B_D son abiertos de δD .

2. Si δD no contiene algún subarco congruente con ningún arco de S^1 , entonces $\lambda(D) = 0$.

Lema 1.4.6. Sea D un disco topológico con frontera de clase C^1 a trozos. Para toda T isometría en \mathbb{R}^2 se cumple que:

$$\lambda(T(D)) = \lambda(D).$$

Demostración. Tenemos que la propiedad de concavidad y convexidad es invariante por isometrías sobre el disco D por lo que $A_{T(D)} = T(A_D)$ y $B_{T(D)} = T(B_D)$. Entonces, aplicando la invarianza por isometrías de σ , λ es invariante por isometrías ya que

$$\lambda(T(D)) = \sigma(A_{T(D)}) - \sigma(B_{T(D)}) = \sigma(T(A_D)) - \sigma(T(B_D)) = \sigma(A_D) - \sigma(B_D) = \lambda(D).$$

□

Proposición 1.4.7. *Sea D un disco topológico con frontera de clase C^1 a trozos y $\{D_i\}_{i=1}^n$ una descomposición por tijeras de D . Entonces,*

$$\sum_{i=1}^n \lambda(D_i) = \lambda(D). \quad (2)$$

Demostración. Vamos a trabajar con los conjuntos A_{D_i} y B_{D_i} . Razonaremos sobre A_{D_i} . El caso B_{D_i} es análogo intercambiando convexidad y concavidad. Denotaremos por σ_i a la medida longitud de arco en δD_i , que coinciden en las fronteras comunes.

Tenemos que A_{D_i} son los puntos convexos de δD_i contenidos en un subarco congruente con un arco de S^1 . Entonces, como $\{D_i\}$ es una descomposición de D , para todo punto $x \in \text{int}D$ que pertenece a la frontera de un D_i existe otro disco D_j de la descomposición tal que $x \in \delta D_j$. Además, los puntos que sólo pertenecen a la frontera de un disco de la descomposición son aquellos que pertenecen a la frontera de D .

Con esta división, A_{D_i} (B_{D_i}) es la unión de los siguientes conjuntos:

- I) $\{x \in A_{D_i} : x \in \delta D\}$.
- II) $\{x \in A_{D_i} : \exists ! j \neq i \text{ tal que } x \in \delta D_j\}$.
- III) $\{x \in A_{D_i} : x \text{ pertenece a tres o más } D_j\}$.

Entonces, $\sigma_i(A_{D_i}) = \sigma_i(\text{I}) + \sigma_i(\text{II}) + \sigma_i(\text{III})$ ya que son conjuntos disjuntos y σ es finitamente aditiva.

Con el razonamiento anterior, si $x \in \text{II}$ entonces existe un único disco distinto de D_i tal que $x \in \delta D_j$. Ahora bien, por la propiedad de convexidad, x es cóncavo respecto a D_j ya que existe un arco tal que todo segmento abierto que une un par de sus punto está contenido en $\text{int}D_i$ que es disjunto de D_j . Es decir, todo segmento de ese arco cumple la propiedad de concavidad respecto a D_j i.e. $x \in B_{D_j}$. Entonces, al

considerar la suma $\lambda(D_i) + \lambda(D_j)$ todo punto de II será cancelado por pertenecer a B_{D_j} .

Con esto hemos demostrado que los conjuntos II se cancelan para todo $i = 1, \dots, n$ en la suma $\lambda(D_1) + \dots + \lambda(D_n)$.

Por otro lado, tenemos que si $x \in I$ entonces x no pertenece a la frontera de ningún otro disco de la descomposición y no se cancela en la suma. Falta estudiar el conjunto III.

Tenemos que la intersección de tres o más discos con interiores disjuntos es un conjunto de medida longitudinal nula ya que, en caso contrario, existiría un abierto de la frontera contenido en los tres discos y los abiertos sólo pueden pertenecer a la intersección de dos de ellos. Entonces, como la descomposición es finita, $\sigma(\text{III}) = 0$.

Recordamos que el mismo razonamiento se tiene para B_{D_j} . Entonces, hemos demostrado que en la suma

$$\sum_{i=1}^n \lambda(D_i)$$

solo aparece la medida σ de los conjuntos de la forma I .

Por último tenemos que, dado que la propiedad de concavidad y convexidad es local para cada punto, todo punto $x \in I$ que pertenezca a δD también es convexo respecto a D . Además, dado un arco $L \subset \delta D_i$ congruente con uno de S^1 que contenga a x , se tiene que $L \cap \delta D$ es un arco de δD que también contiene a x y es congruente con un arco de S^1 . Es decir, $x \in I$ para algún $i = 1, \dots, n$ si y solo si $x \in A_D$. Por lo tanto,

$$A_D = \bigcup_{i=1}^n (A_{D_i} \cap \delta D).$$

De la misma forma se obtiene que $B_D = \bigcup_{i=1}^n (B_{D_i} \cap \delta D)$.

Finalmente, podemos aplicar estas conclusiones para obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda(D_i) &= \sum_{i=1}^n (\sigma_i(A_{D_i}) - \sigma_i(B_{D_i})) = \sum_{i=1}^n (\sigma(A_{D_i} \cap \delta D) - \sigma(B_{D_i} \cap \delta D)) = \\ &= \sigma \left(\bigcup_{i=1}^n (A_{D_i} \cap \delta D) \right) - \sigma \left(\bigcup_{i=1}^n (B_{D_i} \cap \delta D) \right) = \sigma(A_D) - \sigma(B_D) = \lambda(D). \end{aligned}$$

□

Con estos resultados hemos demostrado que el objeto λ es efectivamente invariante por isometrías y que la expresión (2) no depende de la descomposición.

Teorema 1.4.3. *El círculo y el cuadrado no son equidescomponibles por tijeras rectificables.*

Demostración. Vamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos que existen un cuadrado C y un círculo D equidescomponibles. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el círculo es de radio unidad. Entonces, tenemos que existen $\{C_i\}_{i=1}^n$ discos topológicos cerrados contenidos en C con interiores disjuntos tales que

$$\bigcup_{i=1}^n C_i = C.$$

Además, existen $\{T_i\}_{i=1}^n$ movimientos rígidos del plano tales que

$$T_i(C_i) = D_i \subset D \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^n D_i = D,$$

con D_i a su vez discos topológicos cerrados con interiores disjuntos.

Entonces, aplicando el lema 1.4.6 tenemos que λ es invariante por isometrías y se cumple la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^n \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^n \lambda(T_i(C_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda(D_i).$$

Aplicando ahora la proposición anterior obtenemos:

$$\lambda(C) = \sum_{i=1}^n \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^n \lambda(D_i) = \lambda(D).$$

Es decir, si el círculo y el cuadrado fuesen equidescomponibles por tijeras $\lambda(C)$ sería igual a $\lambda(D)$. Veamos que esto no se cumple.

La frontera de C está formada por segmentos por lo que no contiene ningún arco congruente con un arco de S^1 . Entonces, $A_C = \emptyset = B_D$ y $\lambda(C) = 0$.

Por otro lado, tenemos que la frontera de D es S^1 por lo que toda su frontera es congruente con un arco de circunferencia. Además, todo punto de S^1 es convexo respecto a D por lo que $A_D = S^1$ y $B_D = \emptyset$ y $\lambda(D) = \sigma(S^1) = 2\pi$.

Entonces, $\lambda(D) \neq \lambda(C)$ con lo que hemos demostrado que no pueden existir descomposiciones por tijeras congruentes del círculo y la circunferencia.

□

2. La Paradoja de Banach-Tarski

Ya hemos estudiado dos casos particulares de la equidescomponibilidad en el plano. Para ello se han usado definiciones que restringían el tipo de piezas a usar en las descomposiciones. En esta sección eliminaremos estas restricciones por completo admitiendo cualquier subconjunto como pieza válida.

A continuación, trataremos la equidescomponibilidad en \mathbb{R}^3 viendo dos resultados paradójicos. El primero es la Paradoja de Hausdorff. Será el primer resultado de este estudio que relacione la equidescomponibilidad con el problema de la medida.

El segundo resultado concluye la sección. Se trata de la Paradoja de Banach-Tarski, que está basada en la de Hausdorff. Aunque también relaciona la congruencia a trozos con el problema de la medida, en este sentido aporta las mismas consecuencias que la Paradoja de Hausdorff. En el contexto de este trabajo, el interés de esta paradoja es la implicación que tiene con el problema de la equidescomponibilidad. Concretamente, establece que la existencia del puzle que hemos estado trabajando en la sección anterior, en las tres dimensiones es independiente de las figuras que escojamos.

2.1. Equidescomponibilidad y conjuntos paradójicos

En el primer apartado de la sección estableceremos las definiciones generales de equidescomponibilidad y conjuntos paradójicos. Para definir de forma general las acciones posibles sobre las descomposiciones se introduce la estructura de grupo.

Definición 2.1.1. *Sean G un grupo y X un conjunto. Se dice que G actúa sobre X si a cada $g \in G$ está asociada una biyección de X en sí mismo, que representamos también g , tal que para todo $x \in X$, se cumple que $g(h(x)) = (gh)(x)$ y $1(x) = x$, para todos $g, h \in G$ (donde 1 es el neutro del grupo).*

Un grupo que actúa sobre un conjunto también se denomina acción o grupo acción. Todo grupo actúa sobre sí mismo de forma natural con la operación interna del grupo. Durante este trabajo el grupo será siempre un grupo de isometrías con la composición. Entonces, la actuación de \mathbf{G}_n sobre sí mismo viene dada por la siguiente expresión: sean $g \in \mathbf{G}_n$ y $A \subseteq \mathbf{G}_n$, se define $gA = \{gh : h \in A\}$.

Recordamos que el grupo de isometrías \mathbf{G}_n es el conjunto de funciones:

$$\mathbf{G}_n = \{Ax + b : A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\},$$

donde $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ es el grupo ortogonal. A lo largo de las demostraciones aparecerán los siguientes subgrupos (A representa una matriz $n \times n$):

- Traslaciones: $\mathbf{T}_n = \{x + b : b \in \mathbb{R}^n\}$.
- Rotaciones con eje sobre el origen, grupo especial ortogonal: $\mathbf{SO}_n = \{Ax : A^{-1} = A^t, \det(A) = 1\}$.
- Rotaciones y traslaciones: $\mathbf{SG}_n = \{Ax + b : \det(A) = 1 \text{ y } b \in \mathbb{R}^n\}$.
- Rotaciones y simetrías con eje sobre el origen, grupo ortogonal: $\mathbf{O}_n = \{Ax : A^{-1} = A^t\}$.

A continuación definimos equidescomponibilidad para grupos acción. Al igual que en la sección anterior, utilizaremos el término congruencia a trozos como un sinónimo de equidescomponibilidad.

Definición 2.1.2. *Sea G un grupo que actúa sobre X . Sean A y B subconjuntos de X . Se dice que A y B son congruentes a trozos mediante G , notado $A \sim_G B$, cuando existen A_1, \dots, A_n y B_1, \dots, B_n particiones de A y B respectivamente, y existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $B_i = g_i(A_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

Cuando no haya confusión se omitirá el grupo G . En esta definición de equidescomponibilidad, las descomposiciones son particiones. La propiedad transitiva de la siguiente proposición se aplica en la mayoría de las demostraciones de esta sección.

Proposición 2.1.3. *La relación “ser congruentes a trozos” es de equivalencia en el conjunto de partes de X .*

Demostración. Para ver que es reflexiva basta coger el elemento neutro $1 \in G$. Para la simetría se considera la misma descomposición en trozos con los inversos $g_i^{-1} \in G$. Falta ver la transitividad:

Sean A y B dos conjuntos congruentes a trozos con otro conjunto C mediante el grupo G . Entonces, A y C pueden descomponerse en subconjuntos congruentes. Sean

$\{A_i\}_{i=1}^r$ y $\{A'_i\}_{i=1}^r$ las descomposiciones de A y C respectivamente tal que existen $g_i \in G$ con $g(A_i) = A'_i$ para $i = 1, \dots, r$. De la misma forma, podemos encontrar unas descomposiciones congruentes de B y C , $\{B_j\}_{j=1}^s$ y $\{B'_j\}_{j=1}^s$. Entonces, si denotamos a la intersección de A'_i con B'_j como $A'_i \cap B'_j$, tenemos que

$$\{A'_i \cap B'_j : 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq s\}$$

es una descomposición finita de C . Entonces, podemos descomponer cada A_i en $A_i \cap \hat{B}_j$ congruentes con $A'_i \cap B'_j$ por medio de g_i^{-1} . De forma análoga, podemos descomponer cada B_j en $\hat{A}_i \cap B_j$ congruentes con $A'_i \cap B'_j$. Si llamamos h_j a los elementos de G tales que $h_j(B_j) = B'_j$, entonces $h_j^{-1}(g_i(A_i \cap \hat{B}_j)) = h_j^{-1}(A'_i \cap B'_j) = \hat{A}_i \cap B_j$. Es decir, $A_i \cap \hat{B}_j$ es congruente con $\hat{A}_i \cap B_j$ por medio de $h_j^{-1}g_i$, por lo que A y B son congruentes a trozos mediante G . \square

Ya están establecidas las bases de la equidescomponibilidad. Ahora vamos a introducir la definición de conjunto paradójico respecto de un grupo que actúa sobre él. Se trata de conjuntos que son congruentes a trozos con dos subconjuntos disjuntos no vacíos de sí mismo.

Definición 2.1.4. *Sea G un grupo que actúa sobre X . Se dice que $E \subset X$ es paradójico respecto de G (G -paradójico) si existen $A, B \subset E$ disjuntos tales que A, B y E son congruentes a trozos mediante G .*

Dado que la definición se basa en la congruencia a trozos, podemos aprovechar la propiedad transitiva para obtener el siguiente resultado:

Proposición 2.1.5. *Sean $E, F \subset X$. Si E y F son congruentes a trozos y E es paradójico, entonces F es paradójico.*

Demostración. Sea E un conjunto paradójico respecto de un grupo G . Entonces, existen $A, B \subset E$ disjuntos y congruentes a trozos con E . Como E es congruente con F , existen $\{E_i\}_{i=1}^n$ y $\{F_i\}_{i=1}^n$ descomposiciones de E y F respectivamente, tales que existen $g_1, \dots, g_n \in G$ con $g_i(E_i) = F_i$. Entonces, como A y B son disjuntos, los conjuntos

$$F_A = \bigcup_{i=1}^n r_i^{-1}(A \cap E_i) \quad \text{y} \quad F_B = \bigcup_{i=1}^n r_i^{-1}(B \cap E_i),$$

son subconjuntos disjuntos de F por definición de congruencia a trozos. Entonces, tenemos que $F_A \sim A \sim E \sim F$ que por transitividad implica, $F_A \sim F$. De la misma forma, tenemos que $F_B \sim F$, por lo que F es G -paradójico. \square

Ya estamos preparados para demostrar la paradoja de Hausdorff. Con ella comenzamos el proceso hacia la paradoja de Banach-Tarski.

2.2. La Paradoja de Hausdorff

En este apartado trabajaremos con la superficie de la esfera y la esfera maciza, que denotaremos \mathbf{S}^2 y \mathbf{B} respectivamente.

Antes de abordar la paradoja de Hausdorff, tenemos que trabajar con el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^3 cuyos ejes pasan por el origen, \mathbf{SO}_3 . Vamos a dar dos rotaciones independientes con las que construiremos las piezas de la paradoja. Decimos que dos elementos de un grupo $g, h \in G$ son independientes si no existe ninguna combinación finita de $g^{\pm 1}$ y $h^{\pm 1}$ no trivial que sea el elemento neutro.

Teorema 2.2.1. *Existen dos rotaciones independientes en \mathbb{R}^3 , con ejes sobre el origen.*

Demostración. Sabemos que el grupo \mathbf{SO}_3 se identifica con el grupo de matrices ortogonales especiales 3×3 . Concretamente vamos a considerar los giros sobre los ejes x y z de ángulo $\arccos \frac{1}{3}$ que llamaremos ϕ y ρ . Entonces, las rotaciones $\phi^{\pm 1}$ y $\rho^{\pm 1}$ están representadas por las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \phi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ -2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \rho^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & -2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Queremos demostrar que estas rotaciones son independientes, es decir, que no podemos generar la rotación identidad mediante una composición finita no trivial de estas rotaciones. Razonamos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una composición finita no trivial de $\phi^{\pm 1}$ y $\rho^{\pm 1}$ que llamaremos ω tal que $\omega = id$. Entonces, $\omega(1, 0, 0)^T = (1, 0, 0)$. Para llegar a una contradicción, veamos que $\omega(1, 0, 0)^T$ es de la forma $(a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ donde a, b, c son enteros y b no es divisible por 3. De esta forma, tendríamos que $\omega(1, 0, 0)^T \neq (1, 0, 0)$.

Podemos asumir que ω comienza a la derecha por $\phi^{\pm 1}$ ya que siempre podemos considerar $\omega\phi\phi^{-1}$. Razonando por inducción en la longitud de ω tenemos que, si $\omega = \phi^{\pm 1}$, entonces $\omega(1, 0, 0)^T$ es $\frac{1}{3}(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)$.

Veamos ahora el caso general. Si descomponemos ω por la izquierda tenemos cuatro casos, $\omega = \phi^{\pm 1}\omega'$ o $\omega = \rho^{\pm 1}\omega'$, donde $\omega'(1, 0, 0)^T = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$ con a, b, c enteros y b no divisible por 3 por hipótesis de inducción. Entonces, estudiando los casos dos a dos, $\omega(1, 0, 0)^T$ tiene la siguiente forma:

$$\phi^{\pm 1}\omega'(1, 0, 0)^T = \phi^{\pm 1}(a', b'\sqrt{2}, c')^T/3^{k-1} = \frac{1}{3^k}(a' \mp 4b', (b' \pm 2a')\sqrt{2}, 3c')^T, \quad (3)$$

$$\rho^{\pm 1}\omega'(1, 0, 0)^T = \frac{1}{3^k}(3a', (b' \pm 2c')\sqrt{2}, c' \pm 4b')^T. \quad (4)$$

Con esto ya tenemos que $\omega(1, 0, 0)^T = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ con a, b y c enteros. Sólo falta ver que b no es divisible por 3. Para ello descomponemos ω una vez más, con lo que obtenemos las siguientes posibilidades:

$$\omega = \begin{cases} \phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v \\ \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1}v \\ \phi^{\pm 1}\phi^{\pm 1}v \\ \rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v \end{cases}.$$

Esencialmente vamos a diferenciar los casos según si las dos primeras letras son el mismo generador (contando inversos) o no. Descartamos los casos en los que la palabra que aparece a la izquierda de v es trivial ya que se demuestra inmediatamente por hipótesis de inducción. Nos fijamos primero en los dos primeros casos. En el primero, $b = b' \mp 2a'$ donde a' es un múltiplo de 3 ya que se corresponde con la primera componente de (4). Con el mismo razonamiento en el segundo caso, $b = b' \pm 2c'$ con c' múltiplo de 3. En ambos casos, si b' no es múltiplo de 3, entonces b tampoco.

Veamos ahora los otros dos casos. Sean a'', b'' y c'' tales que

$$v(1, 0, 0)^T = (a'', b''\sqrt{2}, c'')^T.$$

Por hipótesis de inducción, sabemos que son enteros y que 3 no divide a b . En ambos casos, sustituyendo $a' = a'' \mp 4b''$ y $\pm 2a'' = b' - b''$, obtenemos

$$b = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''.$$

El último caso es idéntico sustituyendo a', a'' por c', c'' . Entonces, tenemos que si b' no es divisible por 3, tampoco lo es $b = 2b' - 9b''$.

Hemos demostrado que $\omega(1, 0, 0)^T = (a, b\sqrt{2}, c)^T/3^k$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $b \not\equiv 0 \pmod{3}$ por lo que $b\sqrt{2} \neq 0$ y $\omega(1, 0, 0)^T \neq (1, 0, 0)$. Entonces, ϕ y ρ son rotaciones independientes. \square

Ahora emplearemos el subgrupo generado por estas dos rotaciones ϕ y ρ para construir las piezas de \mathbf{S}^2 .

Teorema 2.2.2. (*Paradoja de Hausdorff*) *Existe un subconjunto numerable D de \mathbf{S}^2 tal que $\mathbf{S}^2 \setminus D$ es paradójico respecto de \mathbf{SO}_3 .*

Demostración. Sean ϕ y ρ las rotaciones del teorema anterior. Sea $G = \langle \phi, \rho \rangle$ el subgrupo de \mathbf{SO}_3 generado por los productos no triviales de $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ y la identidad. Ahora definimos $G(\phi)$ como el conjunto de elementos de G que comienzan con ϕ a la izquierda. De la misma forma podemos definir $G(\phi^{-1}), G(\rho)$ y $G(\rho^{-1})$.

Como por el teorema anterior tenemos que ϕ y ρ son independientes, todos ellos son subgrupos disjuntos dos a dos que no contienen la identidad. Entonces, tenemos que

$$G = \{1\} \cup G(\phi) \cup G(\phi^{-1}) \cup G(\rho) \cup G(\rho^{-1}).$$

Además, si aplicamos ϕ a $G(\phi^{-1})$ obtenemos todos los elementos de G que no empiezan por ϕ , ya que para todo elemento $g \in G(\phi^{-1})$, tenemos que $g \neq \phi^{-1}\phi \dots$ pues este elemento contiene un producto trivial. Entonces, $G = G(\phi) \cup \phi G(\phi^{-1})$. De la misma forma se tiene que $G = G(\rho) \cup \rho G(\rho^{-1})$.

Sea $D \subset \mathbf{S}^2$ el subconjunto formado por la unión de los puntos fijos de cada elemento $\psi \in G \setminus \{1\}$. Como cada ϕ es una rotación de la esfera, el conjunto de puntos fijos es la intersección del eje de rotación con \mathbf{S}^2 , es decir, dos puntos. Entonces, como G es numerable, D es numerable. Ya tenemos todo lo necesario para demostrar que $\mathbf{S}^2 \setminus D$ es G -paradójico y, por tanto, \mathbf{SO}_3 -paradójico.

Para construir las piezas de $\mathbf{S}^2 \setminus D$, consideramos la siguiente relación de equivalencia: dados dos elementos $x, y \in \mathbf{S}^2 \setminus D$, x está relacionado con y si y sólo si existe

una rotación $g \in G$ tal que $y = g(x)$. Esta relación es efectivamente de equivalencia pues cumple las propiedades reflexiva, por $1 \in G$, simétrica, por $g^{-1} \in G$ para todo $g \in G$, y transitiva ya que se cumple $gh \in G$ para todo $g, h \in G$. Entonces, podemos formar el conjunto M escogiendo un único elemento de cada clase de equivalencia.

Veamos que $\{g(M) : g \in G\}$ es una partición de $\mathbf{S}^2 \setminus D$. Es inmediato que $\mathbf{S}^2 \setminus D$ está contenido en este conjunto pues, dado cualquier elemento de $\mathbf{S}^2 \setminus D$, M contiene un único representante de su clase de equivalencia y, por tanto, está relacionado con él a través de una rotación de G .

Nos falta ver que $g(M)$ y $h(M)$ son disjuntos para todos $g, h \in G$. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $g, h \in G$ y un elemento y que pertenece a $g(M) \cap h(M)$. Es decir, existen dos elementos $x, x' \in M$ tales que $g(x) = y = h(x')$. Entonces, x está relacionado con x' , como en M sólo hay un representante de cada clase, x y x' tienen que ser el mismo elemento de $\mathbf{S}^2 \setminus D$. Sin embargo, ahora tenemos que $h^{-1}g(x) = x' = x$, por lo que $h^{-1}g$ tiene un punto fijo, pero ningún elemento de $G \setminus \{1\}$ tiene puntos fijos en $\mathbf{S}^2 \setminus D$. Entonces, $h^{-1}g = 1$ i.e. $g = h$.

Por último, hemos construido una partición de $\mathbf{S}^2 \setminus D$ que, según los subgrupos de G , podemos separar en 4 piezas. Por ejemplo, $A = \{g(M) : g \in G(\phi)\}$. Vamos a denotar por A, A', B y B' a estos conjuntos según si están asociados a $G(\phi), G(\phi^{-1}), G(\rho)$ y $G(\rho^{-1})$ respectivamente. Ahora bien, hemos visto que estos conjuntos son disjuntos y que $A \cup \phi(A') = \mathbf{S}^2 \setminus D$, ya que

$$\phi\{g(M) : g \in G(\phi^{-1})\} = \{g(M) : g \in G \setminus G(\phi)\}.$$

De la misma forma, tenemos que $B \cup \rho(B') = \mathbf{S}^2 \setminus D$, por lo que $A \cup A'$ y $B \cup B'$ forman una partición de $\mathbf{S}^2 \setminus D$ y ambos son congruentes a trozos con $\mathbf{S}^2 \setminus D$. Es decir, $\mathbf{S}^2 \setminus D$ es G -paradójico y, por tanto, \mathbf{SO}_3 -paradójico. \square

Hemos demostrado que la superficie de la esfera es \mathbf{G}_3 -paradójica. Esto implica que no existe una medida finitamente aditiva invariante por \mathbf{G}_3 definida en todo subconjunto de \mathbb{R}^3 . Sin embargo, esta implicación no es trivial ya que $\mathbf{S}^2 \setminus D$ es un conjunto de volumen nula. Es decir, supongamos que μ es una medida finitamente aditiva invariante por \mathbf{G}_3 definida en todo subconjunto de \mathbb{R}^3 . Entonces, siguiendo la

notación de la demostración, hemos probado que

$$\begin{aligned}\mu(A \cup A') &= \mu(A) + \mu(A') = \mu(A) + \mu(\phi(A')) = \mu(A \cup \phi(A')) = \mu(\mathbf{S}^2 \setminus D), \\ \mu(B \cup B') &= \mu(B) + \mu(B') = \mu(B) + \mu(\rho(B')) = \mu(B \cup \rho(B')) = \mu(\mathbf{S}^2 \setminus D), \\ \mu(\mathbf{S}^2 \setminus D) &= \mu(A \cup A' \cup B \cup B') = \mu(A \cup A') + \mu(B \cup B').\end{aligned}$$

Entonces, $\mu(\mathbf{S}^2 \setminus D) = 2\mu(\mathbf{S}^2 \setminus D)$. Pero la medida volumen de $\mathbf{S}^2 \setminus D$ es 0 por lo que no es un resultado paradójico.

Sin embargo, basta considerar el subconjunto de la esfera maciza formado por las varillas que unen el centro de la esfera con cada punto de $\mathbf{S}^2 \setminus D$. Es decir, a cada punto $x \in \mathbf{S}^2 \setminus D$ le corresponde el segmento semi-abierto $\{tx : 0 < t \leq 1\}$. Con esto obtenemos nuevos conjuntos A, A', B y B' con los que podemos repetir el razonamiento de la paradoja de Hausdorff. Entonces, como ahora el subconjunto de la esfera maciza \mathbf{B} que es paradójico es la esfera completa salvo una cantidad numerable de segmentos V , tenemos que la medida de Lebesgue de $\mathbf{B} \setminus V$ es igual a la medida de \mathbf{B} . Razonando como antes obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{4}{3}\pi = \mu(\mathbf{B}) = \mu(\mathbf{B} \setminus V) = 2\mu(\mathbf{B} \setminus V) = \frac{8}{3}\pi !!!$$

Con la paradoja de Hausdorff hemos llegado al problema de la medida en el espacio. El problema surge del uso de conjuntos no medibles de \mathbb{R}^3 , que construimos basándonos en el axioma de elección. Acabamos de demostrar que no existe ninguna medida finitamente aditiva invariante por \mathbf{G}_3 que esté definida en todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$.

2.3. La Paradoja de Banach-Tarski

En este apartado extenderemos la Paradoja de Hausdorff a toda la esfera maciza. Esta extensión es la paradoja de Banach-Tarski. Para ello crearemos una cadena de conjuntos congruentes a trozos hasta llegar a la esfera completa y aplicaremos la propiedad transitiva de la congruencia a trozos. En ese momento, gracias a la proposición 2.1.5, habremos concluido la prueba. Comenzamos resolviendo el conjunto numerable del teorema 2.2.2.

Proposición 2.3.1. *Si D es un subconjunto numerable de \mathbf{S}^2 , entonces \mathbf{S}^2 y $\mathbf{S}^2 \setminus D$ son congruentes a trozos respecto del grupo especial ortogonal \mathbf{SO}_3 .*

Demostración. Supongamos que existe $\rho \in \mathbf{SO}_3$ tal que los conjuntos $D, \rho(D), \rho^2(D), \dots$ sean disjuntos dos a dos. Entonces, dado el conjunto

$$D^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D),$$

tenemos que

$$\rho(D^*) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(D).$$

Entonces, D^* y $\rho(D^*)$ son congruentes a trozos y, como $\mathbf{S}^2 = D^* \cup (\mathbf{S}^2 \setminus D^*)$, se tiene $\rho(D^*) \cup (\mathbf{S}^2 \setminus D^*) = \mathbf{S}^2 \setminus D$. Es decir, \mathbf{S}^2 es congruente a trozos con $\mathbf{S}^2 \setminus D$.

Ahora vamos a construir la rotación ρ . Como D es un conjunto numerable, podemos encontrar una recta r , que pase por el origen y no corte a D . Este será el eje de la rotación. Ahora consideramos el conjunto de rotaciones L de eje r tales que $\pi \in L$ si y sólo si existe un $n > 0$ y un $x \in D$ tales que $\pi^n(x) \in D$. Como D es un conjunto numerable, L también lo es. Entonces, podemos escoger ρ con eje la recta r y con ángulo tal que $\rho \notin L$.

Veamos que ρ es una rotación válida. Por construcción, $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Entonces, si aplicamos ρ^m a esta expresión obtenemos que $\rho^{n+m}(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset$ para todo $0 \leq m < n$. Es decir, $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset$ para todo $0 \leq m < n$. \square

Con estos resultados, podemos aplicar fácilmente la Proposición 2.1.5 para obtener la paradoja de Banach-Tarski. Primero veremos el resultado para \mathbf{S}^2 del que se deduce una generalización a cualquier bola sólida de \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.3.2. *La esfera \mathbf{S}^2 es \mathbf{SO}_3 -paradójica.*

Demostración. Por la paradoja de Hausdorff (Teorema 2.2.2) $\mathbf{S}^2 \setminus D$ es \mathbf{SO}_3 -paradójica y por la proposición 2.3.1 la esfera \mathbf{S}^2 es congruente a trozos con $\mathbf{S}^2 \setminus D$ mediante \mathbf{SO}_3 . Entonces, por la Proposición 2.1.5, \mathbf{S}^2 es \mathbf{SO}_3 -paradójica. \square

Hemos resuelto el conjunto numerable de la paradoja de Hausdorff. Sólo nos falta extender \mathbf{S}^2 a la bola maciza.

Teorema 2.3.3. *(Paradoja de Banach-Tarski) Cualquier bola sólida de \mathbb{R}^3 es paradójica respecto del grupo de isometrías \mathbf{G}_3 .*

Demostración. Podemos suponer que la bola es de radio unidad y, como \mathbf{G}_3 contiene todas las traslaciones, que está centrada en el origen. Comenzamos aplicando el mismo razonamiento que en la discusión tras el teorema 2.2.2. Basta considerar, en lugar del conjunto formado por los puntos de \mathbf{S}^2 , el conjunto formado por las “varillas” que unen dichos puntos con el centro, es decir, a cada punto $x \in \mathbf{S}^2$ le corresponde el segmento semi-abierto $\{tx : 0 < t \leq 1\}$.

Como el centro de la esfera no está en ninguno de estos segmentos; tenemos que $\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ es \mathbf{G}_3 -paradójica. Para resolver el problema del centro, vamos a aplicar un razonamiento parecido al de la Proposición 2.3.1. Vamos a demostrar que \mathbf{B} es congruente a trozos con $\mathbf{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Consideramos una rotación ψ cuyo eje r diste $1/4$ del origen y ángulo α tal que $\psi^n(\mathbf{0}) \neq \psi^m(\mathbf{0})$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$. Dicho ángulo existe, pues el conjunto de ángulos $\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists n > m \geq 0 \text{ tales que } \psi^n(\mathbf{0}) = \psi^m(\mathbf{0})\}$ es un conjunto numerable. Entonces, sea

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^n(\mathbf{0}).$$

Además tenemos que la imagen del origen por las rotaciones siempre es menor que la distancia del origen a su simétrico por el eje de rotación. Es decir, el $\psi^n(\mathbf{0})$ nunca se dista de $\mathbf{0}$ más del doble de la distancia al eje de rotación, por lo que

$$d(\psi^n(\mathbf{0}), \mathbf{0}) \leq 2d(\mathbf{0}, r) = \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 0.$$

Entonces, $V \subset \mathbf{B}$ y se cumple que $\psi(V) = V \setminus \{\mathbf{0}\}$, luego V y $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ son congruentes a trozos. Como $\mathbf{B} = (\mathbf{B} \setminus V) \cup V$, \mathbf{B} es congruente a trozos con $(\mathbf{B} \setminus V) \cup (V \setminus \{\mathbf{0}\}) = \mathbf{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Finalmente, aplicando la proposición 2.1.5, tenemos que la esfera maciza \mathbf{B} es \mathbf{G}_3 -paradójica. \square

2.4. La Paradoja de Banach-Tarski (versión fuerte)

Concluiremos esta sección con la consecuencia de esta paradoja en el problema de la equidescomponibilidad. Primero veremos una propiedad de la equidescomponibilidad que cerrará la última demostración de la sección. En ella se usa la siguiente notación: dados dos conjuntos A y B , denotamos que A es congruente a trozos con un subconjunto de B como $A \preceq B$.

Teorema 2.4.1. *Sea G un grupo que actúa sobre X y sean $A, B \subset X$. Si A es congruente a trozos con un subconjunto de B y B lo es con uno de A , entonces A y B son equidescomponibles.*

Demostración. Para esta demostración vamos a utilizar las siguientes propiedades inmediatas de la congruencia a trozos:

- (a) si A y B son congruentes a trozos, existe una biyección f de A en B tal que C y $f(C)$ son congruentes a trozos, para todo $C \subset A$: la biyección se define en cada trozo de intersección entre C y las piezas de A como el correspondiente elemento de G ; y
- (b) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ y A_i es congruente a trozos con B_i para $i = 1, 2$, entonces $A_1 \cup A_2$ y $B_1 \cup B_2$ son congruentes a trozos.

Veamos la demostración del Teorema. Sean las biyecciones f_1 y f_2 con las propiedades enunciadas en (a) con

$$\begin{aligned} f_1 : A &\longrightarrow B, \\ f_2 : B &\longrightarrow A. \end{aligned}$$

Sean $F = f_2 \circ f_1$ y $C_0 = A \setminus f_2(B) \subset A$ definimos los conjuntos $C_n = F^n(C_0)$ para $n \geq 0$. Como F es una biyección de A en sí mismo, cada C_n es un subconjunto de A . Definimos ahora el conjunto C como la unión de todos los C_n ,

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

que es a su vez un subconjunto de A .

Entonces, $A \setminus C = f_2(B \setminus f_1(C))$ ya que:

$$f_2(B \setminus f_1(C)) = f_2(B) \setminus C_1 = (A \setminus C_0) \setminus (C \setminus C_0) = A \setminus C.$$

Luego, por (a), $A \setminus C$ y $f_2(B) \setminus f_1(C)$ son congruentes a trozos. Por tanto, de nuevo por (a), se tiene que C y $f_1(C)$ son congruentes a trozos, luego $A = (A \setminus C) \cup C$ y $B = (B \setminus f_1(C)) \cup f_1(C)$ son congruentes a trozos, por (b). \square

Teorema 2.4.2. (*Paradoja de Banach-Tarski, Versión Fuerte*) Sean A y B subconjuntos acotados de \mathbb{R}^3 con interior no vacío, entonces A y B son equidescomponibles.

Demostración. Queremos aplicar el teorema anterior. Basta ver que A es congruente a trozos con un subconjunto de B pues el recíproco se razona análogamente intercambiando A y B .

Sean K y L dos bolas sólidas tales que $A \subset K$ y $L \subset B$. Escogemos n tal que K pueda ser recubierta con n copias de L . Ahora creamos un conjunto S formado por n bolas disjuntas semejantes a L , es decir, iguales a L salvo traslación. Entonces, tenemos que $K \preceq S$.

Aquí es donde aplicamos la paradoja de Banach-Tarski 2.3.3 n veces para obtener n bolas L . Es decir, tenemos que L es congruente con S . Ahora, por transitividad de la congruencia a trozos, tenemos la siguiente relación:

$$A \subseteq K \preceq S \sim L \subseteq B.$$

Entonces, ya tenemos que $A \preceq B$. Como comentamos al principio de la demostración, $B \preceq A$ es análogo y entonces, por el teorema anterior, A y B son equidescomponibles. \square

Acabamos de demostrar que, si las piezas no tienen ninguna restricción, el puzle que planteamos en las secciones anteriores siempre existe en \mathbb{R}^3 .

3. El Teorema de Banach

En la sección anterior hemos demostrado que no existe una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. En esta sección vamos a tratar este problema en la recta real y el plano. Recordamos que la inexistencia de tal medida en el espacio es consecuencia de la paradoja de Hausdorff 2.2.2.

Ahora nos disponemos a demostrar que podemos extender las medidas de Lebesgue en la recta y el plano a todo subconjunto. Vamos a demostrar que existe una medida finitamente aditiva e invariante por isometrías para todo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, por lo que no puede realizarse una construcción semejante a la del Teorema 2.2.2. Es decir, en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 no hay ningún conjunto paradójico de interior no vacío respecto al grupo de isometrías.

3.1. Introducción a la amenabilidad

Comenzamos introduciendo una propiedad de medibilidad para grupos. El objetivo es demostrar que los grupos de isometrías admiten una medida apropiada. Al grupo acción con medida lo llamaremos grupo amenable.

Definición 3.1.1. *Sea λ una función de valores reales no negativa definida en $\mathcal{P}(G)$. Decimos que λ es invariante a la izquierda si $\lambda(gA) = \lambda(A)$ para todo $g \in G$ y $A \subset G$.*

Definición 3.1.2. *Diremos que un grupo G es amenable si existe una medida λ finitamente aditiva G -invariante a la izquierda definida en todo $\mathcal{P}(G)$ con $\lambda(G) = 1$.*

Nota. A partir de una medida de un grupo amenable vamos a definir la integral sobre G del conjunto $B(G)$, formado por las funciones $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas. La integración de estas funciones nos permitirá extender medidas y definir medidas sobre los conjuntos donde actúan grupos amenables. Concretamente, aparecerán en las demostraciones de los resultados 3.1.4 b) y 3.3.3.

Denotaremos por χ_A a la función característica del conjunto A . Es decir, la función definida como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Llamamos funciones simples a las combinaciones lineales finitas de funciones características. Es decir, φ es una función simple si existen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $A_1, \dots, A_n \subset G$ tales que:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \quad \forall x \in G.$$

Denotamos por $S(G)$ al conjunto de funciones simples y se tiene que $S(G) \subset B(G)$. Sabemos que toda función acotada es límite uniforme de funciones simples i.e. $S(G)$ es denso en $B(G)$ con la norma supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Ahora definimos la integral sobre funciones simples como:

$$\int_G \varphi d\lambda = \int_G \left(\sum_{i=1}^n (c_i \chi_{E_i}) \right) d\lambda = \sum_{i=1}^n c_i \lambda(E_i).$$

Entonces, esta integral es un funcional continuo en el espacio de funciones simples $S(G)$ por lo que podemos definir la integral de una función acotada sobre G como el límite de las integrales de funciones simples, que existe y es finito.

Por último, vamos a demostrar las siguientes propiedades de las integrales en $B(G)$. Por continuidad, basta demostrarlas para $S(G)$.

- 1) $\int (\alpha f_1 + \beta f_2) d\lambda = \int \alpha f_1 d\lambda + \int \beta f_2 d\lambda$, para todo $f_1, f_2 \in B(G)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- 2) $\int \chi_A d\lambda = \lambda(A)$, por lo que $\int \chi_G d\lambda = \lambda(G) = 1$.
- 3) $\int g(f) d\lambda = \int f d\lambda$ para todo $g \in G$ y $f \in B(G)$, donde se define $g(f(h)) = f(g^{-1}h)$. Es decir, la integral es G -invariante por la izquierda.

La propiedad 2) es inmediata por definición de la integral. Veamos la primera propiedad: sean $\varphi_1, \varphi_2 \in S(G)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\varphi_1 = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ y $\varphi_2 = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$, entonces

$$\begin{aligned} \int (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) d\lambda &= \int_G \left(\alpha \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} + \beta \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i} \right) d\lambda = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \lambda(A_i) + \beta \sum_{i=1}^m b_i \lambda(B_i) = \int \alpha \varphi_1 d\lambda + \int \beta \varphi_2 d\lambda. \end{aligned}$$

La tercera propiedad se tiene aplicando la invariancia de λ como sigue: sea $g \in G$ y $\varphi \in S(G)$, se cumple que

$$\begin{aligned} \int g(\varphi(x)) d\lambda(x) &= \int \varphi(g^{-1}x) d\lambda(x) = \int \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(g^{-1}x) \right) d\lambda(x) = \\ &= \int \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{gA_i}(x) \right) d\lambda(x) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda(gA_i) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda(A_i) = \int \varphi(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

En la introducción de esta sección comentamos la diferencia entre demostrar que \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 no contienen conjuntos paradójicos y extender la medida de Lebesgue. En el siguiente resultado se visualiza esta diferencia. Un grupo amenable que actúa sobre un conjunto aporta una medida sobre dicho conjunto. Sin embargo, puede ser una medida completamente distinta a la de Lebesgue.

Si el propósito de esta sección fuese demostrar que no hay conjunto paradójicos en la recta y el plano, con el siguiente resultado y la amenabilidad de \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 ya tendríamos la demostración.

Proposición 3.1.3. *Sea G un grupo acción sobre X . Si G es amenable, entonces existe una medida finitamente aditiva G -invariante sobre X .*

Demostración. Sea G un grupo amenable que actúa sobre el conjunto X . Entonces, escogemos una medida λ sobre G y construimos la medida μ como sigue. Fijado un $x \in X$ cualquiera, definimos $\mu(A)$ para todo $A \subset X$ como:

$$\mu(A) = \lambda(\{g \in G : g(x) \in A\})$$

Esta medida tiene las siguientes propiedades:

1. $\mu(X) = 1$.
2. μ es finitamente aditiva ya que, si $A, B \subset X$ son disjuntos, se cumple que

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \lambda(\{g \in G : g(x) \in A \cup B\}) = \\ &= \lambda(\{g \in G : g(x) \in A\}) + \lambda(\{g \in G : g(x) \in B\}) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

3. Para todo $h \in G$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mu(hA) &= \lambda(\{g \in G : g(x) \in hA\}) = \lambda(\{g \in G : h^{-1}g(x) \in A\}) = \\ &= \lambda(\{g \in G : g(x) \in A\}) = \mu(A). \end{aligned}$$

□

Entonces, si \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 fuesen amenables podríamos definir una medida finita, invariante por isometrías y finitamente aditiva en todo \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 .

En lo restante de este apartado introduciremos las herramientas necesarias para probar que los grupos de isometrías de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 son amenables (Proposición 3.2.1). Para ello vamos a usar dos resultados de compacidad que juegan un papel fundamental en la demostración. Sus demostraciones se desvían del objetivo de este trabajo por lo que están incluidas en el Apéndice.

Proposición A.3. *Un espacio topológico X es compacto si y solo si toda colección de cerrados de X tal que cualquier subcolección tiene intersección finita no vacía, tiene intersección común no vacía.*

Teorema A.9. *Sea*

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha},$$

el producto de espacios topológicos compactos con la topología producto. Entonces, X es un espacio topológico compacto.

Ahora vamos a demostrar dos propiedades que nos permitirán cumplir el primer objetivo. El primer apartado del teorema es considerablemente más complejo que el otro y el motivo por el que hemos introducido los resultados de compacidad.

Teorema 3.1.4. *Se cumple que:*

- a) *Los grupos abelianos son amenables.*
- b) *Sea N un subgrupo normal de G . Si N y G/N son amenables, entonces G también lo es.*

Demostración. [a) Esta demostración tiene dos partes:

Parte 1: Sea $G = \cup_{\alpha \in I} G_{\alpha}$ la unión de un sistema dirigido de grupos amenables $\{G_{\alpha} : \alpha \in I\}$. Esto es, para cada $\alpha, \beta \in I$ existe un $\gamma \in I$ tal que G_{α} y G_{β} son subgrupos de G_{γ} . Queremos demostrar que G es amenable para reducir la demostración a un grupo abeliano finitamente generado.

Escogemos una medida μ_{α} sobre G_{α} para cada $\alpha \in I$. Consideramos el conjunto

$$[0, 1]^{\mathcal{P}(G)} = \prod_{ACG} [0, 1]$$

de funciones $f : \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1]$ con la topología producto. Por el Teorema de Tychonoff, este espacio es compacto.

También definimos $\mathcal{M}_\alpha \subset [0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$ como el conjunto de medidas μ finitamente aditivas G_α -invariantes sobre G tales que $\mu(G) = 1$. Estos conjuntos son no vacíos para cada $\alpha \in I$ ya que la medida

$$\mu(A) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha),$$

está bien definida para todo $A \subset G$. Veamos que μ hereda las propiedades de μ_α .

Es inmediato que $\mu(G) = \mu_\alpha(G_\alpha) = 1$. Dados $A, B \subset G$ disjuntos, como μ_α es finitamente aditiva, se cumple que

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \cap G_\alpha) \cup (B \cap G_\alpha)) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha) + \mu_\alpha(B \cap G_\alpha) = \mu(A) + \mu(B).$$

Por último, tenemos que para todo $g \in G_\alpha$ se tiene que $gG_\alpha = G_\alpha$ y μ_α es G_α -invariante. Entonces,

$$\mu(gA) = \mu_\alpha(gA \cap G_\alpha) = \mu_\alpha(g(A \cap G_\alpha)) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha) = \mu(A),$$

por lo que μ es G_α -invariante. Hemos demostrado que para cada $\alpha \in I$, μ es una medida finitamente aditiva G_α -invariante definida sobre G con $\mu(G) = 1$.

Veamos que \mathcal{M}_α es cerrado: Tenemos que \mathcal{M}_α es la intersección de tres conjuntos:

1. $\{f \in [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} : f(G) = 1\}$.
2. $\{f \in [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} : f(gA) = f(A), \forall A \subset G, \forall g \in G\}$.
3. $\{f \in [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} : f(A \cup B) = f(A) + f(B), \forall A, B \subset G \text{ disjuntos}\}$.

Vamos a demostrar que los tres son cerrados. Para ello vamos a emplear las funciones continuas η_A definidas como:

$$\begin{aligned} \eta_A : [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} &\longrightarrow [0, 1] \\ f &\longmapsto f(A). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que la anti-imagen de $\{1\}$ por η_G es el conjunto 1). Como es la anti-imagen de un cerrado de $[0, 1]$ tenemos que 1) es cerrado.

Con un razonamiento similar vamos a probar que 2) y 3) son cerrados. Además, aplicaremos que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada. Sean $g \in G$ y $A \subset G$. El conjunto

$$C_{g,A} = \{f \in [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} : \eta_{gA}(f) = \eta_A(f)\}$$

es cerrado. Entonces, 2) es la intersección de todos los $C_{g,A}$ variando $g \in G$ y $A \subset G$,

$$\bigcap_{\substack{A \subset G \\ g \in G}} C_{g,A},$$

que también es cerrado.

Para 3) consideramos la función continua H definida como

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

Entonces, 3) es cerrado por ser la intersección de cerrados

$$\bigcap_{\substack{A, B \subset G \\ A \cap B = \emptyset}} \{f \in [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} : \eta_{A \cup B}(f) = H \circ (\eta_A, \eta_B)(f)\}$$

Con lo que tenemos, que \mathcal{M}_α es cerrado por ser intersección de 1), 2) y 3).

Por otro lado, usando que $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ es un conjunto dirigido, tenemos que para todo $\alpha, \beta \in I$ existe un $\gamma \in I$ tal que $G_\alpha, G_\beta \subset G_\gamma$ como subgrupos. Entonces, $\mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta \supset \mathcal{M}_\gamma \neq \emptyset$. Con esto tenemos que la familia $\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I\} \subset [0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$ tiene la propiedad de intersección finita que, por la Proposición A.3, equivale a que la intersección común es no vacía. Es decir, existe una función $\mu \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$.

Esta función es G_α -invariante para todo $\alpha \in I$. Esto implica que μ es G -invariante ya que para todo $g \in G$ existe un $\alpha \in I$ tal que $g \in G_\alpha$. Con esto, hemos obtenido una medida μ sobre G finitamente aditiva G -invariante y con $\mu(G) = 1$.

Parte 2: Sabemos que cada grupo es la unión de sus subgrupos finitamente generados. El conjunto de estos subgrupos es un conjunto dirigido ya que, para todo par de subgrupos finitamente generado el grupo generado por la unión de sus generadores contiene a ambos y está a su vez finitamente generado. Entonces, basta demostrar que todo grupo abeliano finitamente generado es amenable.

Sea G un grupo abeliano generado por el conjunto $\{g_1, \dots, g_m\}$. Primero vamos a demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una medida μ_ε en $\mathcal{P}(G)$ que cumple:

- 1) $\mu_\varepsilon(G) = 1$,
- 2) μ_ε es finitamente aditiva y
- 3) μ_ε es casi invariante respecto a los generadores de G . Es decir, para todo $A \subset G$ y g_k generador de G se cumple que

$$|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_k A)| \leq \varepsilon.$$

El objetivo es tomar límite cuando ε tiende a 0 para obtener una medida G -invariante que cumpla 1) y 2). Veamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal medida.

Vamos a definir μ_ε en el caso de un único generador $G = \langle h \rangle$. Escogemos un $N > 0$ natural tal que $2/N \leq \varepsilon$ y definimos la medida casi invariante para cada $A \subset G$ como:

$$\mu_\varepsilon(A) = |\{i : 1 \leq i \leq N, h^i \in A\}| / N.$$

Es inmediato que $\mu_\varepsilon(G) = 1$. Además, se tiene que para todos $A, B \subset G$ disjuntos, $\mu_\varepsilon(A \cup B) = \mu_\varepsilon(A) + \mu_\varepsilon(B)$ ya que se trata de un cardinal que mide la cantidad de elementos que están en A o B y, al ser disjuntos, nunca coinciden en ningún elemento.

Nos falta ver que μ_ε es casi invariante respecto a h . Tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(hA) &= |\{i : 1 \leq i \leq N, h^i \in hA\}| / N = |\{i : 0 \leq i \leq N-1, h^i \in A\}| / N = \\ &= (|\{i : 1 \leq i \leq N-1, h^i \in A\}| + \chi_A(h^0)) / N. \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\mu_\varepsilon(A) = (|\{i : 1 \leq i \leq N-1, h^i \in A\}| + \chi_A(h^N)) / N.$$

Es decir, los cardinales difieren en $\chi_A(h^0) + \chi_A(h^N)$ por lo que

$$|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(hA)| = |\chi_A(h^0) - \chi_A(h^N)| / N \leq 2/N \leq \varepsilon.$$

El caso general se trata con una definición de μ_ε parecida. Sea $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$, se define μ_ε de la siguiente forma,

$$\mu_\varepsilon(A) = |\{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N, g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in A\}| / N^m.$$

Al igual que en el caso anterior, tenemos que se cumplen 1) y 2). Para 3) hay que aplicar que, $g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in g_k A$ si y sólo si $g_k^{-1} g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in A$. Aquí es donde aplicamos

que G es abeliano. De esta forma, g_k^{-1} permuta hasta el término $g_k^{i_k}$. Separando los cardinales tenemos que

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon(g_k A) &= \left| \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N, g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in g_k A\} \right| / N^m = \\ &= \frac{1}{N^m} \left(\left| \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N, i_k \neq N \text{ y } g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in A\} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_m \leq N, i_k = 0 \text{ y } g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in A\} \right| \right).\end{aligned}$$

Entonces, $\mu_\varepsilon(A)$ y $\mu_\varepsilon(g_k A)$ coinciden en el primer sumando, por lo que se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}& |\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_k A)| \leq \\ & \leq \left| \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_m \leq N \text{ y } i_k = 0, N\} \right| / N^m = \\ & = 2N^{m-1} / N^m = 2/N \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Entonces, hemos demostrado que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto \mathcal{M}_ε de funciones en $[0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$ que cumplen 1), 2) y 3) es no vacío. Además, \mathcal{M}_ε es cerrado. La demostración es similar a la de \mathcal{M}_α en la Parte 1. De hecho, los conjunto de las funciones que cumplen 1) y 2) son cerrados aplicando el mismo razonamiento. Para ver que el conjunto de las funciones que cumplen 3) es cerrado tenemos que, dado un $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\bigcap_{\substack{A \subset G \\ k=1, \dots, n}} \{f \in [0, 1]^{\mathcal{P}(G)} : |\eta_A(f) - \eta_{g_k A}(f)| \leq \varepsilon\}$$

es cerrado ya que cada conjunto de la intersección es cerrado.

Por otro lado, para todo $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}_{\varepsilon_i} = \mathcal{M}_{\min \varepsilon_i} \neq \emptyset.$$

Es decir, la familia $\{\mathcal{M}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita. Entonces, por la Proposición A.3, razonando como en la primera parte; existe una μ que pertenece a $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{M}_\varepsilon$. Esta μ debe cumplir 1), 2) y 3) para cada ε por lo que tiene que ser una medida invariante para cada generador. Entonces, μ es G -invariante, ya que todo elemento de G es producto de sus generadores por lo que se tiene la siguiente igualdad para todo $g \in G$ y $A \subset G$,

$$\mu(gA) = \mu(g_1^{k_1} \cdots g_n^{k_n} A) = \mu(g_1^{k_1-1} \cdots g_n^{k_n} A) = \mu(g_1^{k_1-2} \cdots g_n^{k_n} A) = \cdots = \mu(A).$$

Por lo que μ es la medida finitamente aditiva invariante por G que buscábamos.

b) Sean λ_1 y λ_2 medidas de N y G/N respectivamente. Definimos la función f_A para todo $A \subset G$ como

$$\begin{aligned} f_A : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \lambda_1(N \cap g^{-1}A). \end{aligned}$$

Veamos que podemos considerar f_A como una función bien definida sobre G/N . Para ello veamos que para todo $g_1, g_2 \in G$ tal que existe $h \in N$ con $g_1 = g_2h$ entonces $f_A(g_1) = f_A(g_2)$. Es decir, que si dos elementos de G tienen pertenecen a la misma clase de G/N , entonces tienen la misma imagen por f_A . Efectivamente, como N es invariante por cualquier elemento $h \in N$, tenemos que si $g_1 = g_2h$,

$$f_A(g_2) = \lambda_1(N \cap g_2^{-1}A) = \lambda_1(N \cap h g_1^{-1}A) = \lambda_1(h(N \cap g_1^{-1}A)) = \lambda_1(N \cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1).$$

Considerando entonces f_A como una función sobre G/N , podemos definir la medida μ sobre G como

$$\mu(A) = \int_{G/N} f_A d\lambda_2.$$

donde la integral $\int_{G/N} d\lambda_2$ se define como en la construcción tras la definición 3.1.2 con el grupo G/N y la medida λ_2 . Veamos que μ cumple todas las propiedades necesarias. Se aplicarán las propiedades de las integrales sobre grupos amenables vistas tras la definición 3.1.2:

a) G tiene medida 1: $f_G(g) = \lambda_1(N \cap g^{-1}G) = \lambda_1(N) = 1$ para todo $g \in G$ luego

$$\mu(G) = \int_{G/N} f_G d\lambda_2 = \int_{G/N} d\lambda_2 = \lambda_2(G/N) = 1.$$

b) La medida μ es finitamente aditiva: es consecuencia directa de que λ_1 y $\int d\lambda_2$, propiedad 1), sean finitamente aditivas. Sean $A, B \subset G$ tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces, $g(A \cap B) = gA \cap gB = \emptyset$ para todo $g \in G$ y

$$\begin{aligned} f_{A \cup B}(g) &= \lambda_1(N \cap g^{-1}(A \cup B)) = \lambda_1((N \cap g^{-1}A) \cup (N \cap g^{-1}B)) = \\ &= \lambda_1(N \cap g^{-1}A) + \lambda_1(N \cap g^{-1}B) = f_A(g) + f_B(g), \end{aligned}$$

con lo que se tiene $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

c) μ es G -invariante por la izquierda:

$$f_{gA}(h) = \lambda_1(N \cap h^{-1}gA) = f_A(g^{-1}h) = gf_A(h),$$

para todo $g, h \in G$. Entonces, por la propiedad 3), tenemos que

$$\mu(gA) = \int_{G/N} f_{gA}(h) d\lambda_2(h) = \int_{G/N} gf_A(h) d\lambda_2(h) = \int_{G/N} f_A(h) d\lambda_2(h) = \mu(A).$$

Entonces, μ es una medida finitamente aditiva G -invariante por la izquierda sobre G . □

Nota. Aunque no se ha incluido en este trabajo, hay familias más sencillas de grupos amenables. Por ejemplo, los grupos finitos, ya que la medida

$$\mu(A) = \frac{\text{card}(A)}{|G|}, \forall A \subset G,$$

cumple con las tres propiedades necesarias. También, con una idea similar, se tiene que los subgrupos de grupos amenables son amenables. En este caso, si H es subgrupo de un grupo amenable G , la medida se define como $\mu_H(A) = \mu(H \cap A)/\mu(H)$, con μ una medida sobre G .

Cabe destacar la aparición del Axioma de Elección durante este apartado en forma del Teorema de Tychonoff, que requiere del Lema A.7, en el que se aplica el Lema de Zorn. En este sentido, la misma herramienta que permitía en la sección anterior formar las piezas para la Paradoja de Hausdorff ahora aparece para demostrar que esas mismas piezas no pueden crearse en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 para obtener una paradoja con la medida.

3.2. Amenabilidad de los grupos de isometrías \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2

Ya podemos demostrar que \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son amenables. La demostración consiste en crear una cadena de subgrupos normales tales que cada cociente de dos grupos adyacentes en la cadena sea abeliano.

Antes de empezar la demostración vamos a desarrollar algunos de los subgrupos normales de \mathbf{G}_n y sus cocientes. Primero tenemos el grupo de traslaciones en \mathbb{R}^n , $\mathbf{T}_n = \{x + b : b \in \mathbb{R}^n\}$, que es abeliano.

Por otro lado, al hacer el cociente de grupos $\mathbf{G}_n/\mathbf{T}_n$ se identifican todos los vectores de traslación b con el $\mathbf{0}$, por lo que

$$\mathbf{G}_n/\mathbf{T}_n = \{Ax : \det(A) = \pm 1\}.$$

Además, como el grupo especial lineal $\mathbf{SO}_n = \{Ax : A^{-1} = A^t, \det(A) = 1\}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}_n/\mathbf{T}_n$, tenemos que

$$(\mathbf{G}_n/\mathbf{T}_n)/\mathbf{SO}_n = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2.$$

Estas descomposiciones se aplican durante la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *Los grupos de isometrías \mathbf{G}_2 y \mathbf{G}_1 son amenables.*

Demostración. Sabemos que el grupo $\mathbf{G}_1 = \{\alpha x + c : \alpha = \pm 1, c \in \mathbb{R}\}$. Entonces, como $\mathbf{T}_1 = \{x + c : c \in \mathbb{R}\}$ es el grupo de traslaciones, tenemos que $\mathbf{G}_1/\mathbf{T}_1 \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$. Ahora bien, como \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2 y \mathbf{T}_1 son abelianos y, aplicando el Teorema 3.1.4 a), amenables. Entonces, tenemos que \mathbf{G}_1 es amenable por el apartado b) del mismo teorema aplicado a \mathbf{T}_1 y $\mathbf{G}_1/\mathbf{T}_1$.

Para el grupo $\mathbf{G}_2 = \{Ax + b : A^{-1} = A^t, b \in \mathbb{R}^2\}$ se sigue un razonamiento parecido. De nuevo partimos de \mathbf{T}_2 que es abeliano. Primero, consideramos el grupo \mathbf{SG}_2 formado por los elementos de \mathbf{G}_2 con $\det(A) = 1$. Es decir, los movimientos directos en dos dimensiones; rotaciones y traslaciones. Con esto tenemos que $\mathbf{SG}_2/\mathbf{T}_2$ es el grupo de rotaciones respecto del origen, que es abeliano. Además, hemos visto que $\mathbf{G}_2/\mathbf{SG}_2 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$. Entonces, con la misma cadena de razonamiento que en \mathbf{G}_1 , tenemos que \mathbf{G}_2 es amenable aplicando 3.1.4 a \mathbf{T}_2 , $\mathbf{SG}_2/\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{G}_2/\mathbf{SG}_2$. \square

Hemos demostrado que los grupos \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son amenables. Este hecho es fundamental para extender la medida de Lebesgue. Naturalmente, no puede aplicarse para ningún grupo \mathbf{G}_n con $n \geq 3$. Estos grupos no son amenables pues contienen un grupo isomorfo a \mathbf{G}_3 , que ya vimos en la sección anterior que es paradójico.

3.3. Teorema de Banach: extensión de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2

Para demostrar el Teorema de Banach vamos a necesitar un resultado fundamental del análisis funcional, el Teorema de extensión de Hahn-Banach para funcionales

lineales. Se omite la demostración pues se trata en la asignatura de Análisis Funcional. Para enunciarlo es necesaria la siguiente definición.

Definición 3.3.1. *Decimos que un funcional p sobre un espacio vectorial V es positivamente homogéneo y subaditivo si cumple las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} p(v_1 + v_2) &\leq p(v_1) + p(v_2), \\ p(\alpha v_1) &= \alpha p(v_1), \end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \geq 0$.

Teorema 3.3.2 (de Hahn-Banach). *Sea p un funcional subaditivo positivamente homogéneo definido sobre un espacio vectorial X . Sea ψ un funcional lineal sobre Y subespacio de X tal que*

$$\psi \leq p \text{ en } Y.$$

Entonces, existe un funcional lineal $\bar{\psi}$ sobre todo X que extiende ψ con $\bar{\psi} \leq p$ en X .

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [4, p. 288-289].

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para enunciar y demostrar el teorema que permitirá extender la integral de Lebesgue a algunas funciones no medibles. La demostración consiste en aplicar el Teorema de Hahn-Banach y construir un funcional apropiado a partir de esta extensión.

Teorema 3.3.3. *Sea G un grupo amenable tal que:*

- a) *G es un grupo de operadores lineales sobre un espacio vectorial V .*
- b) *F es un funcional lineal G -invariante sobre un subespacio V_0 G -invariante de V .*
- c) *Existe un funcional subaditivo positivamente homogéneo p sobre V tal que para todo $v \in V$ y $g \in G$ se cumple:*

$$\begin{aligned} F(v) &\leq p(v), \\ p(g(v)) &\leq p(v). \end{aligned}$$

Entonces, existe un funcional lineal G -invariante \bar{F} sobre V que extiende a F y está dominado por p .

Demostración. Partimos de un funcional F . Aplicando el teorema de Hahn-Banach obtenemos una extensión F_0 sobre todo V dominada por p . La demostración consiste en construir a partir de F_0 un funcional lineal sobre V que sea G -invariante. Para ello, consideramos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f_v : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto F_0(h^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Con esta definición tenemos que f_v está acotada en G ya que, aplicando c) y que $p(v)$ es finito para todo $v \in V$, se cumple que

$$\begin{aligned} f_v(h) &= F_0(h^{-1}(v)) \leq p(h^{-1}(v)) \leq p(v), \\ -f_v(h) &= F_0(-h^{-1}(v)) = F_0(h^{-1}(-v)) \leq p(h^{-1}(-v)) \leq p(-v), \end{aligned}$$

por lo que $f_v(h) \in [-p(-v), p(v)]$. Entonces, por G amenable, podemos escoger λ medida G -invariante en G y, como $f_v \in B(G)$, definir

$$\bar{F}(v) = \int_G f_v d\lambda,$$

que es un funcional lineal ya que, aplicando que F_0 y $\int_G d\lambda$ son lineales,

$$\begin{aligned} \bar{F}(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_G F_0(h^{-1}\alpha v_1 + h^{-1}\beta v_2) d\lambda(h) = \\ &= \int_G \alpha F_0(h^{-1}v_1) d\lambda(h) + \int_G \beta F_0(h^{-1}v_2) d\lambda(h) = \\ &= \alpha \int_G F_0(h^{-1}v_1) d\lambda(h) + \beta \int_G F_0(h^{-1}v_2) d\lambda(h) = \alpha \bar{F}(v_1) + \beta \bar{F}(v_2). \end{aligned}$$

Nos falta demostrar que \bar{F} es una extensión de F , G -invariante y dominada por p en V . Primero recordamos que G actúa sobre f_v como $g(f_v)(x) = f_v(g^{-1}(v))$. Entonces, la G -invariancia de \bar{F} se tiene por la invariancia de la integral de funciones de $B(G)$ ya que para todo $g \in G$ se cumple

$$\begin{aligned} \bar{F}(g(v)) &= \int_G f_{g(v)}(h) d\lambda(h) = \int_G F_0(h^{-1}g(v)) d\lambda(h) = \int_G g^{-1}h F_0(v) d\lambda(h) = \\ &= \int_G h F_0(v) d\lambda(h) = \int_G F_0(h^{-1}(v)) d\lambda(h) = \bar{F}(v). \end{aligned}$$

Además, \bar{F} está dominado por p pues, por $\lambda(G) = 1$, se cumple que

$$\bar{F}(v) = \int_G f_v(h) d\lambda(h) \leq \int_G p(v) d\lambda(h) = p(v)\lambda(G) = p(v).$$

Solo nos falta ver que \bar{F} coincide con F en V_0 . Para todo $v \in V_0$ tenemos que, como F_0 es una extensión de F , $F_0(v) = F(v)$ y, como V_0 es un subespacio G -invariante de V , para todo $g \in G$ tenemos que $gv \in V_0$. Entonces, aplicando que F es G -invariante,

$$\bar{F}(v) = \int_G F_0(h^{-1}v) d\lambda(h) = \int_G F(h^{-1}v) d\lambda(h) = \int_G F(v) d\lambda(h) = F(v)\lambda(G) = F(v).$$

Es decir, hemos demostrado que \bar{F} es un funcional lineal G -invariante dominado por p que extiende F a todo V . \square

El Teorema de Banach de la extensión de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 consiste en adaptar el enunciado de este teorema a los datos apropiados. El funcional F corresponde a la integral de Lebesgue, el grupo G a \mathbf{G}_1 o \mathbf{G}_2 y V_0 a las funciones medibles Lebesgue. El único objeto a construir es el funcional p , que marcará el espacio V .

Teorema 3.3.4 (de Banach). *Para $n = 1, 2$ existe una extensión \mathbf{G}_n -invariante finitamente aditiva de la medida de Lebesgue, μ_n , definida en todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} o \mathbb{R}^2 . Para $n = 1, 2$, sabemos que \mathbf{G}_n es amenable por la Proposición 3.2.1. Entonces, con la notación del Teorema anterior, consideramos V_0 como el conjunto de las funciones integrables Lebesgue y V como el espacio de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que existe $f_0 \in V_0$ con $f_0(x) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, \mathbf{G}_n actúa sobre V de forma natural, es decir; sea $g \in \mathbf{G}_n$ y $f \in V$ se define $g(f(x)) = f(g^{-1}(x))$.

Ahora consideramos la integral de Lebesgue como el funcional F . De esta forma, $F(f) = \int f d\mu$. Además, F es \mathbf{G}_n -invariante por la invariancia por isometrías de μ . Por último, para aplicar el teorema anterior necesitamos un funcional subaditivo positivamente homogéneo sobre V que domine a F en V_0 . Para ello definimos el siguiente funcional:

$$p(f) = \inf\{F(f_0) : f_0 \in V_0 \text{ y } f_0(x) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Por definición de V tenemos que $p(f)$ está bien definido para toda función $f \in V$, ya que siempre existe una función $g \in V_0$ que domina a f .

Con esto ya podemos aplicar el Teorema 3.3.3 y obtener una extensión \bar{F} \mathbf{G}_n -invariante sobre todo V . Ahora bien, veamos que esta extensión nos permite definir una medida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Sea A un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^n . Consideramos la función χ_A y definimos $\bar{\mu}(A) = \bar{F}(\chi_A)$ si $\chi_A \in V$ y $\bar{\mu}(A) = +\infty$ si no. De esta forma, todo conjunto A que admita un recubrimiento por un conjunto medible E de medida finita tiene asociada una medida finita por $\bar{\mu}$, ya que $p(\chi_A) \leq p(\chi_E) = \mu(E) < +\infty$. Falta demostrar que $\bar{\mu}$ es una extensión de μ positiva, finitamente aditiva y \mathbf{G}_n -invariante.

Primero vamos a probar que si A es medible Lebesgue entonces $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$. Tenemos que A es medible con medida finita si y solo si $\chi_A \in V_0$. Entonces, como \bar{F} y F coinciden en V_0 , $\bar{\mu}(A) = \bar{F}(\chi_A) = F(\chi_A) = \mu(A)$. Si A es medible con $\mu(A) = +\infty$, entonces $\chi_A \notin V$ y $\bar{\mu}(A) = +\infty$.

En segundo lugar vamos a demostrar que $\bar{\mu}$ es finitamente aditiva. Sean A_1, \dots, A_n subconjuntos disjuntos de \mathbb{R}^n y A la unión de los A_i , tenemos que $\chi_A = \chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}$. Entonces, si $\bar{\mu}(A_i)$ es finito para todo $i = 1, \dots, n$, se cumple que

$$\bar{\mu}(A) = \bar{F}(\chi_A) = \sum_{i=1}^n \bar{F}(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(A_i) < +\infty.$$

Además $\bar{\mu}(A_i) = +\infty$ para algún A_i si y solo si $\chi_{A_i} \notin V$ si y solo si $\chi_A \notin V$ por lo que $\bar{\mu}(A_i) = +\infty$ si y solo si $\bar{\mu}(A) = +\infty$

Que $\bar{\mu}$ es \mathbf{G}_n -invariante es consecuencia de la invariancia de \bar{F} . Para toda $\chi_A \in V$ y $g \in \mathbf{G}_n$, se cumple que $\chi_{gA}(x) = \chi_A(g^{-1}x) = g\chi_A(x)$ y entonces

$$\bar{\mu}(gA) = \bar{F}(\chi_{gA}) = \bar{F}(\chi_A),$$

y para toda $\chi_A \notin V$ entonces $\chi_{gA} \notin V$ y $\bar{\mu}(gA) = \bar{\mu}(A) = +\infty$.

Por último, tenemos que demostrar que $\bar{\mu}$ es positiva. Para ello aplicaremos la siguiente cota: sea $f \in V$ con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $-f(x) \leq 0$ y $p(-f) \leq 0$ pues $-f$ está dominada por la función nula, que es medible. De esta forma, se cumple que $\bar{F}(-f) \leq p(-f) \leq 0$ que implica $-\bar{F}(-f) = \bar{F}(f) \geq 0$. Entonces, como las funciones χ_A son positivas para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que $\bar{\mu}(A) = \bar{F}(\chi_A) \geq 0$.

Entonces, $\bar{\mu}$ es una medida positiva finitamente aditiva \mathbf{G}_n -invariante que extiende μ a todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. \square

Acabamos de demostrar que existe una extensión finitamente aditiva invariante por isometrías de la medida de Lebesgue en la recta y el plano. Cabe destacar la aparición del Lema de Zorn en la demostración de estos resultados. Mientras en la sección anterior el axioma de elección nos llevaba a demostrar una paradoja, en esta sección nos permite demostrar precisamente lo contrario. Cuando en la paradoja de Banach-Tarski asociamos al axioma de elección la culpa de un resultado tan incómodo para la intuición, aquí el uso del Lema de Zorn aporta un resultado tranquilizador.

A. El Teorema de Tychonoff

En este apéndice presentamos los resultados topológicos de compacidad necesarios para la demostración del Teorema de Banach en la tercera sección. Los resultados objetivo son la Proposición A.3 y el Teorema de Tychonoff A.9. Recordamos aquí la definición general de espacio compacto.

Definición A.1. *Un espacio topológico X es compacto si todo recubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.*

Ahora se introduce la definición de una propiedad presente en todas las demostraciones de este apartado. Con ella establecemos una caracterización de espacios compactos.

Definición A.2. *Decimos que una familia A de subconjuntos de un espacio topológico X tiene la propiedad de intersección finita (propiedad IF) si toda intersección finita de conjuntos de A es no vacía.*

Proposición A.3. *Un espacio topológico X es compacto si y solo si toda colección de cerrados de X tal que cualquier subcolección tiene intersección finita no vacía, tiene intersección común no vacía.*

Demostración. Sea \mathcal{D} una colección de cerrados de X con la propiedad IF tal que

$$\bigcap_{C \in \mathcal{D}} C = \emptyset.$$

Por definición, esto equivale a que $\mathcal{A} = \{C^c : C \in \mathcal{D}\}$ es un recubrimiento por abiertos de X que no contiene ninguna subfamilia finita que recubra X i.e. X no es compacto. Como todo el razonamiento está compuesto de equivalencias, el recíproco también está probado. \square

Esta caracterización se aplica de forma directa en la demostración del teorema 3.1.4 a) y también es fundamental para la demostración del Teorema de Tychonoff.

A continuación vemos dos resultados cuyo único propósito es la demostración del teorema A.9. Antes de enunciar el primer lema vamos a recordar el enunciado del Lema de Zorn, así como las definiciones de conjunto parcialmente ordenado y cota superior.

Definición A.4. Un conjunto (A, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado si \leq es un orden parcial esto es, una relación de orden. Es decir, \leq cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $a \leq a$ para todo $a \in A$.
2. Antisimétrica: Para todo $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces, $a = b$.
3. Transitiva: Para todo $a, b, c \in A$ tales que $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces, $a \leq c$.

Definición A.5. Sea (A, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Una cadena es una sucesión $\{C_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos de A tal que $C_n \leq C_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Se dice que $C \subseteq A$ es una cota superior si $C_n \leq C$ para todo $n \geq 1$.

Lema A.6 (de Zorn). Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.

Pasamos a demostrar los resultados necesarios para el Teorema de Tychonoff.

Lema A.7. Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X con la propiedad IF. Entonces existe una familia maximal \mathcal{D} de subconjuntos de X que contiene estrictamente a \mathcal{A} , tiene la propiedad IF y no existe una familia mayor en X que tenga esta propiedad.

Demostración. La demostración es una aplicación directa del Lema de Zorn. Para aplicarlo comenzamos con el conjunto de las familias \mathcal{B} de subconjuntos de X que contienen a \mathcal{A} con la propiedad IF. Entonces, toda cadena C de estas familias cumple que:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\mathcal{B} \in C} \mathcal{B},$$

es una cota superior de la cadena que contiene a \mathcal{A} , ya que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ para toda familia \mathcal{B} por construcción. Además, el conjunto de familias en X que contienen a \mathcal{A} es no vacío pues contiene, al menos, a \mathcal{A} .

Por último, vamos a demostrar que \mathcal{V} tiene la propiedad IF. Sean $\{Q_i\}_{i=1}^n$ elementos de \mathcal{V} . Entonces, para cada Q_i existe un $\mathcal{B}_i \in C$ tal que $Q_i \in \mathcal{B}_i$. Como $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^n$ es una cadena finita de C , existe un \mathcal{B}_j , que contiene a todas las familias \mathcal{B}_i y tiene la propiedad IF por lo que $\{Q_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{B}_j$, y

$$\bigcap_{i=1}^n Q_i \neq \emptyset.$$

Es decir, \mathcal{V} tiene la propiedad IF. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal \mathcal{D} que cumple el enunciado del lema. \square

Lema A.8. *Sea \mathcal{D} una familia de subconjuntos de X maximal respecto a la propiedad IF. Entonces,*

- a) *Toda intersección finita de elementos de \mathcal{D} es un elemento de \mathcal{D} .*
- b) *Sea $S \subseteq X$ tal que S corta a todos los elementos de \mathcal{D} , entonces $S \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Razonamos ambos apartados por reducción al absurdo:

- a) Sean $\{D_i\}_{i=1}^n$ una subfamilia finita de \mathcal{D} . Si

$$A = \bigcap_{i=1}^n D_i \notin \mathcal{D},$$

entonces $A \neq \emptyset$ y $\mathcal{D} \cup \{A\}$ es una familia con la propiedad IF ya que cualquier otra subfamilia $\{C_i\}_{i=1}^m$ de \mathcal{D} cumple

$$A \cap \left(\bigcap_{i=1}^m C_i \right) = \bigcap_{i=1}^n D_i \cap \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset,$$

por ser una intersección finita de elementos de \mathcal{D} . Por lo tanto, $\mathcal{D} \cup \{A\}$ es una familia con la propiedad IF estrictamente mayor que \mathcal{D} .

- b) Sea S un subconjunto de X tal que S corta a todo elemento de \mathcal{D} . Si $S \notin \mathcal{D}$ entonces la familia $\mathcal{D} \cup \{S\}$ es una familia que contiene estrictamente a \mathcal{D} y tiene la propiedad IF, pues por el apartado a), toda intersección finita está en \mathcal{D} que por hipótesis que corta a S .

\square

Teorema A.9 (de Tychonoff). *Sea*

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha,$$

el producto de espacios topológicos compactos con la topología producto. Entonces, X es un espacio topológico compacto.

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con X_α espacios compactos. Sea \mathcal{A} una familia de cerrados de X con la propiedad IF. Aplicando el Lema A.7, obtenemos una familia maximal \mathcal{D} . Como \mathcal{A} es una familia de cerrados se tiene que

$$\mathcal{A} \subseteq \{\overline{D} : D \in \mathcal{D}\}.$$

Entonces, basta demostrar que

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset,$$

ya que esto implicaría que la intersección de todos los elementos de \mathcal{A} es no vacía.

Para demostrarlo consideramos la proyección natural π_α con $\alpha \in I$ cualquiera. Como se trata de una aplicación continua la familia

$$\mathcal{D}_\alpha = \{\overline{\pi_\alpha(D)}\}$$

es una familia de cerrados de X_α que cumple que para todo $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$,

$$\overline{\pi_\alpha(D_1 \cap D_2)} = \overline{\pi_\alpha(D_1) \cap \pi_\alpha(D_2)} \neq \emptyset,$$

ya que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ por la propiedad IF de \mathcal{D} . Entonces, \mathcal{D}_α tiene la propiedad IF. Aplicando que X_α es compacto junto con la Proposición A.3, se tiene que existe un $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}. \quad (5)$$

Ahora sea V_α un entorno de x_α en X_α , entonces $V_\alpha \cap \pi_\alpha(D) \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$. Esto equivale a que

$$\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap D \neq \emptyset, \quad \forall D \in \mathcal{D}.$$

Entonces, aplicando el Lema A.8, se tiene que $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{D}$.

Ahora podemos definir $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \in X$ tal que cada x_α cumpla (5). Entonces, todo abierto básico de X que contenga a x es producto de abiertos V_α por lo que corta a todo elemento de \mathcal{D} . De nuevo, aplicando el Lema A.8, tenemos que dichos abiertos pertenecen a \mathcal{D} . Por último, como todo entorno de x corta a todos los elementos de \mathcal{D} , entonces $x \in \overline{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$. Es decir,

$$x \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}.$$

□

Para la demostración de este Teorema es necesario el Axioma de Elección que aparece en el Lema A.7 como el Lema de Zorn.

Referencias

- [1] Lester Dubins, Morris W Hirsch y Jack Karush. «Scissor congruence». En: *Israel Journal of Mathematics* 1.4 (1963), págs. 239-247.
- [2] Ryszard Engelking. *General Topology*. Vol. 6. Sigma series in pure mathematics. Berlin: Heldermann, 1989.
- [3] Ryan Kavanagh. «Explorations on the Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem». En: *URL: <https://rak.ac/files/papers/wallace-bolyai-gerwien.pdf>*. *Luettu* 22 (2021).
- [4] Halsey Lawrence Royden y Patrick Fitzpatrick. *Real analysis*. Vol. 32. Macmillan New York, 1988.
- [5] Stan Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. 24. Cambridge University Press, 1993.