TRABAJO FIN DE GRADO

Algunos aspectos de la teoría de (ultra)filtros

Realizado por

Francisco Planás Hernández

Para la obtención del título de
Grado en Matemáticas

Dirigido por
D. Rafael Ayala Gómez
D.ª María Trinidad Villar Liñán

Realizado en el departamento de
Geometría y Topología

Convocatoria de junio, curso 2021/22

Abstract

The notions of filter and ultrafilter are introduced in the field of General Topology to extend the notion of convergence sequences. Specifically, a filter $\mathcal{F}$ on a set X is a nonempty family of subsets of X such that $\mathcal{F}$ does not contain the empty set, for any two elements of $\mathcal{F}$ their intersection is also in $\mathcal{F}$ and every superset of every element of $\mathcal{F}$ is also an element of $\mathcal{F}$. The family of filters on a set admits a partial ordering for which one can obtain at least one maximal element called ultrafilter on X. In this paper we will study the usual fundamental properties of these objects within Set Theory and General Topology as well as some examples of applications to other mathematical areas such as Combinatorics, Graph Theory and Non-Standard Analysis.

Índice general

Introducción

El concepto de filtro está ampliamente extendido en la comunidad matemática. En primer lugar, el estudio del concepto de filtro es una forma natural de explicar la convergencia en espacios topológicos generales. Aunque para el estudio de la convergencia se pueden emplear las redes, que son en cierto sentido similares a los filtros cumpliendo el papel de generalización de las sucesiones (Véase [6]), la noción de filtro es mucho más general y encuentra aplicaciones fuera del estudio de la convergencia. De esta manera, aunque la aparición de las redes en un contexto analítico es mucho más natural que la de los filtros, fuera de este ámbito no desempeñan un papel esencial.

Aunque el origen de el concepto de filtro se atribuye a Cartan (Véase [4, 5]), pueden encontrarse artículos anteriores y coetáneos cuyos autores utilizaban familias de conjuntos con las propiedades que definen lo que hoy conocemos como filtro. Es por eso que aunque Cartan es quien formaliza el concepto y le da una teoría propia, el concepto surge de manera natural. Los filtros han sido muy popularizados en el ámbito europeo debido al gran uso que hizo de ellos Bourbaki (Véase [2]), lo que ha hecho que en asuntos de convergencia en espacios topológicos generales estén más extendidos en Europa que el uso de redes.

Los filtros debido a la generalidad de la definición que está dada desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, han encontrado acomodo en casi todas las ramas de las matemáticas: teoría de conjuntos (en particular, en teoría de modelos), topología, teoría de la medida (por ejemplo, para dar una prueba elemental de la existencia de liftings), análisis funcional (ultraproductos de espacios de Banach), teoría de Ramsey, teoría de números (teoremas de Hindman y van der Waerden), sistemas dinámicos, etc.

En cuanto al estudio de las propiedades y resultados de Topología General mediante filtros, podemos ver que el enfoque se vuelve conjuntista, y por tanto más general. Del mismo modo, al tratar temas de Combinatoria, tenemos que reduce el uso de herramientas de esta rama lo que la hace más accesible al lector no familiarizado con esta. En este trabajo se estudiarán propiedades fundamentales de estos objetos dentro de la Teoría de Conjuntos y la

Topología General así como algunos ejemplos de aplicaciones a otras áreas matemáticas como la Combinatoria, la teoría de Ramsey la Teoría de Grafos y el Análisis No Estándar.
En el primer capítulo de este trabajo, veremos la definición del concepto de filtro y como obtener algunos de ellos. Veremos también en el Capítulo 2 la relación entre el conjunto de los filtros y el conjunto de las topologías sobre un mismo conjunto X. Posteriormente, en el Capítulo 3, veremos que existen elementos maximales en el conjunto de los filtros llamados ultrafiltros y veremos sus propiedades. Veremos más tarde, en el capítulo 4 cómo se comporta la estructura de filtro mediante funciones. En el Capítulo 5 se comprueba como los filtros permiten caracterizar ciertas nociones topológicas fundamentales (clausura, continuidad, compacidad...) de la misma forma en la que las suceciones las caracterizan en los espacios métricos. En el Capítulo 6 se prueba el teorema de Tychonoff mediante el uso de ultrafiltros, y comprenderemos que la brevedad de esta demostración fue una razón importante para la difusión del concepto de filtro. También se incluye la corrección de la prueba de Kelley de la equivalencia entre el teorema de Tychonoff y el axioma de elección. En el Capítulo 7 se expone la construcción de la compactificación de Stone-Cech $\beta\mathbb{N}$ mediante ultrafiltros y veremos que admite una estructura algebraica de semigrupo, en el que hay elementos idempotentes. Esto será esencial a la hora de probar en el Capítulo 8 los resultados relativos a la Teoría de Ramsey.

De un modo intuitivo, se suele decir que la teoría de Ramsey pretende demostrar, que en cualquier conjunto suficientemente grande siempre se pueden encontrar subconjuntos con cierto orden o estructura. Uno de los resultados que da origen a esta teoría debida a P. Ramsey [22] afirma (en su versión infinita) que dados un conjunto infinito X y una partición finita cualquiera de sus 2-subconjuntos, existe un subconjunto infinito de X tal que todos sus 2-subconjuntos están en la misma clase de la partición. Una forma clara de interpretar este enunciado es considerando el conjunto X como los vértices de un grafo y los 2-subconjuntos como sus aristas, surgiendo así el grafo completo de infinitos vértices cuyas aristas se colorean con un número finito de colores dando lugar a la partición mencionada. El resultado de Ramsey constituye así, gracias a Erdös y Szekeres [9], uno de los teoremas más ilustres de la Combinatoria, que nosotros recogemos en el Teorema 8.2.1 del Capítulo 8. Recientemente [10, 25], se ha conocido una demostración de este resultado alternativa a la puramente combinatorial dada por [Erdos- Szekeres] y basada en el uso de ultrafiltros sobre el conjunto infinito X y el axioma de elección. Incluimos esta reciente prueba y se corrobora así que la estructura de un ultrafiltro sobre los vértices del grafo con sus aristas coloreadas permite

asegurar la existencia de un subgrafo infinito monocromático.
En el contexto de la Teoría de Números y directamente vinculados a los resultados de tipo Ramsey, encontramos el Teorema de Schur [24] y sus distintas generalizaciones recogidas en los Teoremas de Folkman–Rado–Sanders [10] y Hindman [15]. Todos ellos parten de una coloración finita del conjunto de los números naturales, es decir, una partición finita de $\mathbb{N}$, y demuestran que existe un subconjunto monocromático $A \subset \mathbb{N}$ con todas sus sumas finitas también monocromáticas. Gracias al Teorema 8.3.2 este subconjunto A es finito y gracias al Teorema 8.3.3 el subconjunto A es infinito. Las demostraciones presentadas utilizan de nuevo la estructura de un ultrafiltro, esta vez idempotente, sobre los números naturales.
En el ámbito de la Teoría de Grafos, especial relevancia tienen los problemas de coloración de vértices y de cálculo del número cromático. En el Capítulo 9 se presenta el Teorema 9.0.1 (Teorema de Bruijn-Erdös [3]) que establece que si cualquier subgrafo de un grafo G admite una k-coloración propia de sus vértices (i.e.: vértices vecinos llevan distinto color), entonces G también puede colorearse con k colores. El grafo G puede ser infinito, y es en este contexto en el que se presenta una prueba del Teorema de Bruijn-Erdös mediante la construcción de un filtro a partir de los subconjuntos finitos de vértices de G. Además, se ilustran dos ejemplos de grafos infinitos no numerables: el grafo de la recta y el grafo del plano con respectivas coloraciones finitas (Figuras 10.2 y 10.3).

Capítulo 1

Filtros

Empezaremos por ver la definición de lo que es un filtro y daremos varios ejemplos, posteriormente daremos la definición de base de filtro y veremos ejemplos de algunas de ellas. Por último estudiaremos las propiedades que tiene el conjunto de los filtros sobre un conjunto X.

1.1. Primeras definiciones.

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto, y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, se dice que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X si verifica las siguientes condiciones:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F} \neq \emptyset$
2. *Para todo* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ *se tiene que* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
3. *Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $F \subset G$, *entonces* $G \in \mathcal{F}$

Al conjunto de todos los filtros sobre X se le denota $Fil(X)$. De aquí se deduce fácilmente que se tiene siempre que $\{X\} \subset \mathcal{F}$ o lo que es lo mismo; que X$\in \mathcal{F}$. Además es importante destacar que dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ se verifica que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Esta última observación es de gran importancia.
Nótese también que un *filtro* se define sobre un conjunto cualquiera, sin necesidad de haberlo dotado de antemano de una estructura topológica y es independiente de la topología que se asocie al conjunto X, pese a esto se tiene siempre que:

Ejemplo 1. En cualquier espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, y para todo $x \in X$, el conjunto $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ de los entornos de x en el espacio dado forman un filtro sobre X.

Se pueden dar los filtros mediante la notación explícita de los elementos que los componen. Así, se tienen filtros como los siguientes:

Ejemplo 2. Dado un conjunto X y un subconjunto $A \subseteq X$ no vacío, se tiene que:

- En general, el conjunto $\mathcal{F}_A = \{ B \mid A \subset B\}$ es un filtro llamado filtro principal asociado a A. Si $A = \{a\}$ es un conjunto unitario a veces abusaremos de notación y lo llamaremos filtro principal asociado a a, es decir diremos que $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_{\{a\}}$.

- $\mathcal{F}_{\{a\}} = \{ \text{B} \mid a \in B \subset X\}$ es un filtro especialmente interesante y se llama filtro discreto.

- $\mathcal{F}_X = \{X\}$ es un filtro y se llama filtro indiscreto.

Proposición 1.1.2. *Sea X un conjunto finito, entonces los únicos filtros posibles son los principales.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, y X es finito, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito y también lo es $\mathcal{F}$. Podemos por tanto deducir que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Es fácil comprobar que entonces llamando $A = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ tenemos que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}$ y por ende, $\mathcal{F}$ es principal. <u>lqd</u>

Corolario 1.1.3. *Dado un conjunto finito X, hay un filtro por cada elemento de $\mathcal{P}(X)$ exceptuando el vacío (su filtro principal asociado). Además, estos son los únicos que hay.*

Se puede observar que si $\mathcal{F}$ es un filtro principal, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Sin embargo esta condición no es suficiente para que un filtro sea principal si el conjunto sobre el que está definido es infinito como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Basta ver el filtro sobre $\mathbb{R}$, definido por $\mathcal{F} = \{(a, b) \mid 0 \in (a, b)\}$ ya que claramente $\{0\} \notin \mathcal{F}$ luego $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_{\{0\}}$.

En este ejemplo se puede ver que la intersección numerable de elementos de un filtro no tiene por qué estar en el propio filtro. Además, es importante observar que no siempre la intersección de todos los elementos de un filtro es no vacía. Por ello daremos la siguiente definición.

Definición 1.1.4. *Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es un filtro libre si $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$.*

Es importante observar que la clasificación de los filtros dada de esta manera entre filtros principales y filtros libres no es exhaustiva como muestra el Ejemplo 3.

Ejemplo 4. Dado un conjunto X, definiremos la familia cofinita como
$\mathcal{F}_{cof} = \{A \mid X \backslash A = A^c \text{ es finito } \}$. Se tiene pues que:

- Si X es finito, $\mathcal{F}_{cof} = \mathcal{P}(X)$ y claramente no es un filtro ya que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.
- Si X es infinito, $\mathcal{F}_{cof}$ es un filtro que llamamos filtro cofinito. Además es un filtro libre.

Siguiendo con la misma idea, tenemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 5. Sea X un conjunto infinito no numerable, se tiene entonces que $\mathcal{F}_{con} = \{ A \mid A^c$ es numerable$\}$ es un filtro sobre X. Se llamará filtro conumerable.

Podemos ver también un último ejemplo curioso.

Ejemplo 6. En el espacio de medida usual $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e, m)$, $\mathcal{F}$=$\{ N \mid m(N^c) = 0\}$ es un filtro sobre X.

Demostración.

Claramente $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \neq \emptyset$

Dados $M, N \in \mathcal{F}$, se tiene pues que M^c, N^c son de medida nula. Por las leyes de De Morgan se tiene que $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$ y como la unión de conjuntos de medida nula es de medida nula se tiene pues que $(M \cap N)^c$ es de medida nula y por tanto $M \cap N \in \mathcal{F}$.

Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset G$, entonces claramente, $G^c \subset F^c$, y como un subconjunto de otro con medida nula ha de tener medida nula tenemos que G^c es de medida nula y por tanto $G \in \mathcal{F}$. <u>lqd</u>

Proposición 1.1.5. *Sean un conjunto X, $A \subset X$ y un filtro $\mathcal{F}$ sobre X, se tiene que la traza de $\mathcal{F}$ sobre A definida mediante*

$$\mathcal{F}|_A = \{F \cap A \mid \ F \in \mathcal{F}\}$$

forma un filtro sobre A si y solo si para todo $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $F \cap A \neq \emptyset$

Demostración. Veamos primero que una implicación es sencilla. Si $\mathcal{F}|_A$ es un filtro, entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}|_A$ por lo que se tiene el resultado. Por otro lado, si $F \cap A \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces vamos a ver que se verifican las propiedades de la definición de filtro.

1. Claramente como $X \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \in \mathcal{F}|_A$. Además por hipótesis $\emptyset \notin \mathcal{F}|_A$.
2. Dados $F_{1A}, F_{2A} \in \mathcal{F}|_A$, se tiene que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_1 \cap A = F_{1A}$ y $F_2 \cap A = F_{2A}$, por tanto como $F_1 \cap F_2 = F_3 \neq \emptyset$ y $F_3 \in \mathcal{F}$, por hipótesis se tiene que $F_3 \cap A = F_{3A} \neq \emptyset$ y por definición $F_3 A \in \mathcal{F}|_A$.

3. Es trivial ya que si tomamos $F_{1A} \in \mathcal{F}|_A$ entonces existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \cap A = F_{1A}$. Y claramente si $F_{1A} \subset F_{2A}$, entonces $F_1 \cup F_{2A} \in \mathcal{F}$ y así $F_{2A} \in \mathcal{F}|_A$.

$\underline{lqd}$

Un ejemplo de aplicación de la proposición anterior es el siguiente:

Ejemplo 7.

- Sea $X = \mathbb{Z}$, consideramos $A = \mathbb{N}$, y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ el filtro principal asociado al punto 2. Se puede observar que $\mathcal{F}|_A$ vuelve a ser el filtro principal asociado al 2 sobre A.
- Sea $X = \mathbb{Z}$, consideramos $A = \mathbb{N}$, y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{-5}$ el filtro principal asociado al punto -5. Se tiene que la traza $\mathcal{F}|_A$ no es un filtro ya que tendríamos $\mathcal{F}|_A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y esto claramente no es un filtro puesto que entonces $\emptyset \in \mathcal{F}|_A$.

1.2. Bases para filtros

Vamos a ver a continuación la noción de base para un filtro. Estas bases serán de gran utilidad y además veremos que nos pueden ayudar a definir un filtro sin nombrar explícitamente todos sus elementos.

Definición 1.2.1. *Sea X un conjunto, se dice que una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base para un filtro si verifica las siguientes condiciones:*

a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

b) *Para todo* $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow$ *existe* $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ *con* $B_3 \in \mathcal{B}$.

Obsérvese que todo filtro es base de sí mismo.

Ejemplo 8. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, se tiene que dado un $a \in \mathbb{R}$ tenemos las siguientes bases de filtro

- $\mathcal{B}_a = \{\ A \in \mathcal{T}_e \mid a \in A\}$
- $\mathcal{B}_{a^+} = \{\ A \in \mathcal{T}_e \mid a \in \overline{A \cap (a, +\infty)}\} \equiv \{(b, c) \mid a \in [b, c)\}$
- $\mathcal{B}_{a^-} = \{\ A \in \mathcal{T}_e \mid a \in \overline{(-\infty, a) \cap A}\} \equiv \{(b, c) \mid a \in (b, c]\}$

Definición 1.2.2. *Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, se dice que tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) si la intersección de cualquier número finito de sus elementos es no vacía.*

Definición 1.2.3. *Dado un conjunto X, una familia $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X, se llama subbase de filtro en X si*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i\in J} S_i \mid J \subset I \textit{ es finito} \right\}$$

es base de filtro en X.

Proposición 1.2.4. *$\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$ es subbase de filtro si y solo si $\mathcal{S}$ tiene la PIF. Además, el filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \rangle$ es el menor filtro en X que contiene a $\mathcal{S}$, y se llama filtro generado por $\mathcal{S}$.*

Demostración. Si $\mathcal{S}$ es una subbase de filtro, se tiene que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i\in J} S_i \mid J \subset I \text{ es finito} \right\}$$

es una base de filtro en X, y por tanto si $J \subset I$ es finito, $\bigcap_{i\in J} S_i \neq \emptyset$, es decir, $\mathcal{S}$ tiene la PIF.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{S}$ tiene la PIF. Sea

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i\in J} S_i \mid J \subset I \text{ es finito} \right\}$$

Entonces es inmediato probar que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ satisface las condiciones a) y b) de la Definición 1.2.1 lqd

Ejemplo 9. Sea $X = \mathbb{Z}$, el conjunto $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ es subbase para el filtro principal asociado a $\mathcal{F}_{\{2\}}$.

La siguiente definición, es la que motiva el nombre de base para filtro a los conjuntos $\mathcal{B}$ que verifican la Definición 1.2.1.

Definición 1.2.5. *Sea $\mathcal{B}$ una base para un filtro. Se llama filtro generado por $\mathcal{B}$ y lo denotamos como $\langle \mathcal{B} \rangle$ al filtro:*

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{F \mid A \subset F \textit{ para algún } A \in \mathcal{B}\}$$

Además cada base genera un único filtro.

Ejemplo 10. Sea X un conjunto cualquiera. Los siguientes conjuntos son bases de filtros sobre X:

- Sea $a \in X$, $\mathcal{B}_1 = \{\{a\}\}$, genera un filtro discreto en X. Abusando de notación, diremos que $\mathcal{F}_{\{a\}} = \mathcal{F}_a$ indistintamente en los casos donde se entienda por el contexto.

- Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Dado $m \in \mathbb{N}$ sea $B_m^{x_n} = \{x_n \mid n \geq m\}$. Entonces se tiene que:

$$\mathcal{B}_{x_n} = \{B_m^{x_n} \mid m \in \mathbb{N}\}$$

  forma una base para un filtro. El conjunto de elementos de $\mathcal{B}_{x_n}$ se llamará conjunto de secciones finales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Y al filtro generado se le llamará filtro asociado a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
  Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida por $x_n = x_{n-1} + 1$ con $x_0 = 1$ y $X = \mathbb{N}$, entonces el filtro asociado a la sucesión es el filtro de Frechet.

Cabe destacar que si $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ es una base de filtro, esto no implica que $\langle\mathcal{B}\rangle = \mathcal{F}$. Para ello, basta ver el contraejemplo surgido haciendo $\mathcal{B} = \{X\}$ y tomando como $\mathcal{F}$ cualquier filtro sobre X distinto a $\mathcal{F} = \{X\}$
En cambio, si tenemos un filtro $\mathcal{F}$ podemos considerar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.6. *Dados un filtro $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ verificando que para cada $F \in \mathcal{F}$ existe algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$, es decir, $\langle\mathcal{B}\rangle = \mathcal{F}$.*

Demostración. Ya que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ es claro que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. También es obvio que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Además, dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene por tanto que al ser $\mathcal{F}$ un filtro $B_1 \cap B_2 = F \in \mathcal{F}$, luego por hipótesis se tiene que existe B_3 tal que $B_3 \subseteq F = B_1 \cap B_2$. Y por tanto verifica las condiciones de ser base para un filtro.
Basta ver que $\langle\mathcal{B}\rangle = \mathcal{F}$ y lo haremos por doble inclusión.
En primer lugar, veremos que $\mathcal{F} \subseteq \langle\mathcal{B}\rangle$.Esto lo haremos tomando $F \in \mathcal{F}$, por hipótesis se tiene que existe $B_F \in \mathcal{B}$ tal que $B_F \subseteq F$ luego por definición de filtro generado se tiene que $F \in \langle\mathcal{B}\rangle$. Como esto se repite para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{F} \subseteq \langle\mathcal{B}\rangle$.
Vamos a probar ahora que $\langle\mathcal{B}\rangle \subseteq \mathcal{F}$. Para ello tomamos un elemento $F_B \in \langle\mathcal{B}\rangle$, que por definición ha de ser superconjunto de un elemento $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, tenemos que $B \in \mathcal{F}$ y por la tercera propiedad de la definición de filtros, de $B \subset F_B$ se sigue $F_B \in \mathcal{F}$. *lqd*

Obsérvese que la definición de base de filtro no hace referencia a los puntos de X, como en el caso de la definición de base para una topología. Además esta proposición es un resultado análogo al que se usa en topología para caracterizar localmente una topología dada.

A continuación definiremos una relación de equivalencia para las bases de filtro, ya que varias bases distintas pueden generar el mismo filtro.

Definición 1.2.7. *Dos bases de filtro $B, B' \subset \mathcal{P}(X)$ se dicen equivalentes, y se denota $B \equiv B'$, si $\langle B \rangle = \langle B' \rangle$.*

Ejemplo 11.

1. Podemos considerar $X = \mathbb{Z}$, $B = \{\{2\}\}$ y $B' = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2\}\}$.Tenemos que las dos bases generan el filtro principal asociado al 2.

2. Sea $X = \mathbb{N}$, $B = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 2 \leq card(A^c) < \infty\}$ y $B' = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 3 \leq card(A^c) < \infty\}$. Tenemos que las dos bases generan el filtro cofinito.

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{B}_x$ una base local para un punto x en un espacio topológico, y sea $\mathcal{B}_{\mathcal{N}_x}$ una base de entornos de x. Se tiene que ambas son bases de filtro y además $\mathcal{B}_x \equiv \mathcal{B}_{\mathcal{N}_x}$

1.3. El conjunto $Fil(X)$

La siguiente definición nos permite considerar una relación de orden parcial en el conjunto de los filtros sobre X, que denotaremos $Fil(X)$.

Definición 1.3.1. *Dados dos filtros sobre X, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$. Decimos que $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Ánálogamente se dirá que $\mathcal{F}$ es más grueso que $\mathcal{F}'$. Lo notaremos como $\mathcal{F} \preceq \mathcal{F}'$.*

Nótese que este concepto se puede equiparar al de subsucesión, intuitivamente se puede observar que dada una sucesión, el filtro asociado a una subsucesión de esta es más fino que el asociado a la sucesión.

Proposición 1.3.2. *El conjunto $(Fil(X), \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena tiene cota superior.*

Demostración. Dada una cadena $\mathcal{C}$ en $Fil(X)$ se tiene que $\bigcup_{C_i \in \mathcal{C}} C_i \in Fil(X)$ y trivialmente es más fino que cualquier elemento de la cadena y por tanto, cota superior. $\underline{lqd}$

Tenemos además la siguiente definición.

Definición 1.3.3. *Dado un conjunto X, un elemento maximal $\mathcal{U}$ del conjunto $Fil(X)$ es un ultrafiltro; esto implica que ningún filtro es más fino que $\mathcal{U}$. Al conjunto de todos los ultrafiltros sobre X lo denotaremos $Ult(X)$.*

Proposición 1.3.4. *Si dos filtros F_1, F_2 sobre X son comparables entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $F_1, F_2 \subset \mathcal{U}$.*

Corolario 1.3.5. *Sean dos ultrafiltros $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ en X. Entonces son comparables si y solo si $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.*

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 12. Consideramos $\mathbb{Z}$ y los filtros principales asociados al 2 y al $A = \{2, 3\}$. Tenemos que $\mathcal{F}_A \preceq \mathcal{F}_2$, es decir, $\mathcal{F}_2$ es más fino que $\mathcal{F}_A$. Además como veremos en el Capítulo 3, que será cuando estudiemos los ultrafiltros, se tiene que $\mathcal{F}_2$ es un ultrafiltro.

Definiremos ahora una relación entre bases de filtro, que es un preorden sobre el conjunto de todas las bases de filtro en X; es decir, una relación reflexiva y transitiva.

Definición 1.3.6. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de filtro y $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ sus respectivos filtros asociados. Diremos que $\mathcal{B}$ es más fina que $\mathcal{B}'$, que $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{B}'$, o que $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{B}'$, si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Esto es equivalente a que $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{F}'$ en el sentido de la definición 1.3.1. Lo notaremos $\mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}$.*

Obsérvese que si $\mathcal{B}_1 \preceq \mathcal{B}_2 \preceq \mathcal{B}_1$ entonces se tiene que $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_2$.
Vamos a ver ahora qué ocurre cuando se consideran las operaciones conjuntistas sobre $Fil(X)$. Veremos en primer lugar, que la intersección de dos filtros es siempre un filtro.

Proposición 1.3.7. *Sea X un conjunto y $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \in Fil(X)$ una familia de filtros cualesquiera sobre X. Entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es también un filtro sobre X. Además, es más grueso que los originales.*

Demostración. Es trivial ver que $X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ y que $\emptyset \notin \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Además dados $F_1, F_2 \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ se tiene que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$. Y como los $\mathcal{F}_i$ son filtros se tiene que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $F_1 \cap F_2 \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. De igual modo, si tenemos $F_1 \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ y $F_1 \subseteq F_2$. Es fácil ver que $F_1 \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$, y como los $\mathcal{F}_i$ son filtros, entonces $F_2 \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$ y así $F_2 \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Tenemos así que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es un filtro, y por construcción es más grueso que todos los $\mathcal{F}_i$.

<u>lqd</u>

Sin embargo, con la unión de dos filtros no se tiene el mismo resultado ya que podría haber dos conjuntos disjuntos uno en cada filtro. Vamos a ver un ejemplo a continuación.

Ejemplo 13. Sea $X = \mathbb{Z}$, y consideramos el filtro principal asociado al 1, $\mathcal{F}_{\{1\}}$ y el filtro principal asociado al 2, $\mathcal{F}_{\{2\}}$. Claramente tenemos que $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{F}_{\{1\}} \cup \mathcal{F}_{\{2\}}$, pero sin embargo, $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset \notin \mathcal{F}_{\{1\}} \cup \mathcal{F}_{\{2\}}$ por lo que $\mathcal{F}_{\{1\}} \cup \mathcal{F}_{\{2\}}$ no es un filtro.

Supongamos, intentando evitar esto, que tenemos dos filtros $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in Fil(X)$ tales que para cualesquiera $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$ se tiene que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Pues en este caso, tenemos que la unión de ambos sigue sin ser un filtro. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 14. Sea $X = \mathbb{Z}$ y consideramos los filtros principales $\mathcal{F}_{\{1,2\}}$ y $\mathcal{F}_{\{2,3\}}$. Claramente tenemos que $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathcal{F}_{\{1,2\}} \cup \mathcal{F}_{\{2,3\}}$ luego no es un filtro su unión.

Sin embargo en este caso, como se puede intuir del ejemplo, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.3.8. *Sea X un conjunto, y consideremos dos filtros $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in Fil(X)$ tales que para cualesquiera $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$ se tiene que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ es subbase para un filtro $\mathcal{G}$. De hecho $\mathcal{G} = \langle\{F_1 \cap F_2 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}\rangle$. Además el filtro generado por esta subbase es más fino que ambos.*

Demostración. Inmediata a partir de la Proposición 1.2.4. $\underline{lqd}$

Tenemos por tanto que si queremos asegurar que la unión de dos filtros sea un filtro, ha de verificarse el siguiente resultado cuya demostración es inmediata:

Proposición 1.3.9. *Sean $F_1, F_2 \in Fil(X)$ dos filtros tales que existe una cadena en la cual están en los dos, o lo que es lo mismo, que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $F_1, F_2 \subset \mathcal{U}$. Entonces se tiene que $F_1 \cup F_2$ es un filtro y además es más fino que F_1 y F_2.*

Capítulo 2

Relación entre $Top(X)$ y $Fil(X)$

Sabemos que un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X, es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ con ciertas propiedades entre sus elementos. Una topología sobre X es también una familia de elementos de $\mathcal{P}(X)$ con relaciones entre ellos. Tiene sentido por tanto analizar similitudes y diferencias entre estas dos estructuras sobre el conjunto X. En este capítulo veremos qué aspectos comunes tienen.
En primer lugar, se tiene que a partir de un filtro cualquiera se puede obtener una topología de la siguiente manera:

Proposición 2.0.1. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X, se tiene que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X. La llamaremos topología generada por $\mathcal{F}$.*

Demostración. En primer lugar, es claro que $\emptyset \in \mathcal{T}$ y que $X \in \mathcal{T}$. Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{T}$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ o $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Dados $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, es claro que o $\bigcup_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$ o $\bigcup_{i\in I} F_i = \emptyset$ *lqd*

Veremos ahora qué características tienen las topologías que son de la forma $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ para algún $\mathcal{F}$, y qué condiciones tiene que cumplir una topología para asegurar que es de esa forma, es decir, responderemos a la pregunta de cuando basta eliminar de una topología el conjunto vacío para obtener un filtro. Caracterizaremos así los espacios topológicos que cumplen el recíproco de la proposición anterior.

2.1. Definiciones auxiliares

Para encontrar aquellas topologías que pueden obtenerse de un filtro añadiéndole el vacío va a ser necesario estudiar unos tipos especiales de espacios topológicos, algunos de ellos caracterizados por cómo son sus abiertos. Por tanto vamos a definir a continuación unos tipos de abiertos muy particulares:

Definición 2.1.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Y sea $A \subseteq X$ un conjunto:*

1. *A es un abierto regular si $A = int(\overline{A})$*
2. *A es un preabierto si $A \subseteq int(\overline{A})$*
3. *A es un semi-abierto si $A \subseteq \overline{int(A)}$*
4. *A es un α-abierto si $A \subseteq int(\overline{int(A)})$.*
5. *Al complementario de un abierto regular (resp. preabierto, semi-abierto, α-abierto) se le llama cerrado regular (resp. precerrado, semi-cerrado,α-cerrado).*

Vamos a ver un ejemplo de estas definiciones clasificando algunos conjuntos sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 15. Consideremos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

1. (a, b), es abierto, abierto regular, preabierto, semi-abierto y α-abierto.
2. $[a, b)$, no es abierto, no es abierto regular, no es preabierto y no es α-abierto pero es un semi-abierto.
3. $(a, b) \cup (b, c)$ es abierto, no es abierto regular, es preabierto, es semi-abierto, y es α-abierto.
4. $\mathbb{Q}$, no es abierto, no es abierto regular, no es semiabierto y no es α-abierto, pero es preabierto.
5. $(a, b] \cup \{c\}$, no es abierto, no es abierto regular, no es preabierto, no es semiabierto, y no es α-abierto.
6. $\mathbb{N}$ no es abierto, ni abierto regular, ni preabierto, ni semiabierto, ni α-abierto.

Vamos a hacer ahora ciertas observaciones sobre esto. En primer lugar, si un conjunto es abierto regular, es abierto. El recíproco no es cierto por lo general como muestra el ejemplo anterior (3). Sin embargo, los conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son también abiertos regulares, y de nuevo el recíproco vuelve a no ser cierto, basta tomar como contraejemplo el ejemplo anterior (1). Además todos los abiertos, son α-abiertos. Para la prueba, tenemos en cuenta que $A = int(A)$ por ser abierto, y por tanto $A \subseteq \overline{int(A)}$ y tomando interior se tiene el resultado.
A continuación ya podemos definir unos espacios topológicos particulares:

Definición 2.1.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.*

1. *Se dice que es un α-espacio (resp. semi-espacio) si cada subconjunto α-abierto (resp. semi-abierto) es abierto.*
2. *Se dice que es irreducible o hiperconexo si todo par de abiertos no vacíos tiene intersección no vacía, o lo que es lo mismo si todo (semi-)abierto es denso.*
3. *Se dice que el espacio es submaximal si todo conjunto denso es abierto.*
4. *Se dice que el espacio es extremadamente disconexo o extremal si la clausura de cada abierto es un abierto, o equivalentemente si todo semi-abierto es preabierto.*
5. *Se llama S-espacio (o tiene la S-topología) si todo subconjunto que contiene a un abierto no vacío es abierto.*
6. *Se llama espacio puerta a aquel donde todo subconjunto o es abierto o es cerrado.*
7. *Un espacio es superconexo si es un S-espacio conexo.*

Podemos ver aquí, que la topología generada por un filtro $\mathcal{F}$ verifica que:

Proposición 2.1.3. *Dado un espacio $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ donde $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es la topología generada por $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Se tiene que:*

1. *El espacio es superconexo.*
2. *El espacio es hiperconexo o irreducible.*

Demostración. Es inmediata a partir de las definiciones. lqd

Ejemplo 16. Las propiedades de irreducible y submaximal, por lo general, son completamente independientes, como veremos a continuación:

1. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ es irreducible pero no es submaximal. Basta ver que el conjunto $[0, 1]$, o cualquier intervalo, es denso pero no es abierto, por lo que no es submaximal. Mientras que todo abierto es denso, por lo que es irreducible.
2. En $\mathbb{Z}$ con la *topología de Khalinsky*, que recordemos es la que tiene como base al conjunto $B = \{\{n\} \mid n \text{ es impar}\} \cup \{\{n-1, n, n+1\} \mid n \text{ es par}\}$ se tiene que el conjunto de todos los números impares es un conjunto denso y abierto. Además es el menor conjunto denso que hay luego todo

conjunto denso ha de contenerlo. Se tiene también que por construcción si un conjunto cualquiera contiene a los impares es abierto, luego tendríamos que este espacio es un espacio submaximal ya que todo conjunto denso sería abierto. Sin embargo claramente no es irreducible, ya que existen abiertos unitarios disjuntos.

3. Sea $(X, \mathcal{T}_x)$ un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{T}_x$ la topología punto x incluido, es decir, la topología generada por $\mathcal{F}_{\{x\}}$. Es fácil ver que ya que $\{x\} \in \mathcal{T}_x$ todo conjunto denso ha de contener a este y por tanto será abierto. Se verifica también que todo abierto contiene a x y por tanto es denso. Luego estamos ante un espacio submaximal e irreducible. Es también un S-espacio.

4. Si consideramos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ es fácil ver que este espacio ni es irreducible, ni es maximal. Basta ver que $\mathbb{Q}$ es denso y no es abierto, y que cualquier intervalo abierto no es denso.

2.2. Caracterización y propiedades de separación

Tenemos ya todo lo necesario para poder caracterizar los espacios topológicos que cumplen el recíproco de la Proposición 2.0.1. Tenemos pues:

Teorema 2.2.1. *En un espacio $(X, \mathcal{T})$ no vacío son equivalentes.*

1. *Para algún filtro $\mathcal{F}$ en X, $\mathcal{F} \cup \{\emptyset\} = \mathcal{T}$*

2. *X es superconexo*

3. *X es un semi-espacio conexo*

4. *X es un α-espacio irreducible*

5. *X es un S-espacio irreducible*

6. *Todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X i.e. $(\mathcal{T} \backslash \{\emptyset\})$ forman un filtro sobre X.*

Demostración. Probaremos primero la equivalencia entre $2), 3)$, y $4)$, posteriormente probaremos que 2) y 5) son equivalentes. Y finalmente usando esto probaremos las equivalencias entre $1), 2)$ y 6.
Vamos a ver 2) $\Rightarrow$ 3). Sea A un semi-abierto no vacío subconjunto de X. Entonces para algún abierto no vacío U en X tenemos que $U \subset A \subset \overline{U}$. Ya

que X es un S-espacio, entonces A es abierto, y esto prueba que X es un semi-espacio.
3) $\Rightarrow$ 4) Como todo α-abierto es semi-abierto, entonces X es un α-espacio. Sean A y B dos subconjuntos abiertos no vacíos. Vamos a probar que tienen intersección no vacía. Ya que estamos en un semi-espacio, los semiabiertos, son abiertos y como los abiertos son preabiertos, tenemos que todo semiabierto es preabierto, *i.e.* X es extremadamente disconexo. Entonces $\overline{A}$ es abierto por ser X extremadamente disconexo y como X es conexo, $\overline{A}$ es X o lo que es lo mismo, A es denso. Por lo que $A \cap B \neq \emptyset$.
4) $\Rightarrow$ 2) Sea $U \subset A \subset X$, donde U es un abierto no vacío. Como X es irreducible, $\overline{U} = X$ y por tanto $U \subset A \subset \overline{U}$, lo que prueba que A es semi-abierto. Como todo espacio irreducible es extremadamente disconexo ya que la clausura de todo abierto en un espacio irreducible es el total y el total siempre es abierto, entonces A es un α-abierto y por tanto abierto ya que X es un α-espacio. Esto prueba que X es un S-espacio. Por otro lado, todo espacio irreducible es conexo.
2) $\Leftrightarrow$ 5). Se sigue de lo anterior y del hecho de que todo espacio irreducible es conexo.
En primer lugar, vamos a ver que 2) $\Rightarrow$ 6). Sea $\mathcal{F} = \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$. Como X es no vacío, entonces $X \in \mathcal{F}$. Si $U, V \in \mathcal{F}$, $U \cap V \in \mathcal{F}$ ya que X es irreducible debido a la equivalencia entre 2) y 4) probada anteriormente. Si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{F}$ ya que X es un S-espacio por la equivalencia entre 2) y 5) vista anteriormente. Por tanto $\mathcal{F}$ es un filtro.
Que 6) $\Rightarrow$ 1) es trivial.
Veamos pues 1) $\Rightarrow$ 2). Por reducción al absurdo, supongamos que X es no conexo. Sea U un conjunto no vacío, abierto y cerrado distinto de X. Entonces $U, U^c \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$, pero entonces $\emptyset = U \cap U^c \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro lo que es una contradicción. Falta ver que X es un semi-espacio. Para ello tomaremos un semi-abierto no vacío A. entonces $int(A) \neq \emptyset$ y por tanto $int(A) \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\} = \mathcal{F}$. Así pues, $A \in \mathcal{F}$. Esto prueba que A es abierto y por tanto X es un semi-espacio. Aplicamos ahora la equivalencia entre 2) y 3 probada antes y tenemos el resultado.

<u>lqd</u>

La topología generada por un filtro no puede dar lugar nunca a un espacio T_2 ya que no existen abiertos no vacíos disjuntos puesto que en un filtro no hay elementos disjuntos. Vamos a ver sin embargo qué propiedades de separación puede tener y qué ha de verificar para que se cumplan. En primer lugar tenemos que para que sea T_0 basta con que:

Teorema 2.2.2. *Sea X un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y consideramos el* *espacio $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ con $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ la topología generada por $\mathcal{F}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ es un espacio T_0*

2. *El conjunto $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ o es vacío o es unitario*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que el conjunto $T = \bigcap\{A \mid A \in \mathcal{F}\}$ contiene dos puntos diferentes a y b. Si $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{F}$ y así $\{a, b\} \subset U$. Por tanto $(X, \mathcal{T})$ no es un espacio T_0, lo que es una contradicción.
2) $\Rightarrow$ 1) Por hipótesis para algún $p \in X$, tenemos que $T \subseteq \{p\}$. Si a y b son distintos de p y $a \neq b$, entonces para algún $U \in \mathcal{F}$, tenemos que $a \notin U$.Así $U \cup \{b\}$ es un entorno de b que no contiene a a. Por tanto $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_0. *lqd*

Además, en el caso de ser T_0, tenemos que para que sea T_1 nos basta con que:

Teorema 2.2.3. *Sea X un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y consideramos el espacio $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ con $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ la topología generada por $\mathcal{F}$. Entonces son equivalentes:*

a) $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1

b) El conjunto $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$ (i.e. $\mathcal{F}$ es un filtro libre)

Demostración. Volvemos a considerar $T = \bigcap\{A \mid A \in \mathcal{F}\}$
$a) \Rightarrow b)$ Sea $p \in X$. Para todo $a \neq p$, existe por hipótesis un conjunto $U \in \mathcal{F}$ tal que $p \notin U$ y $a \in U$. Entonces $T \subset U$ y por tanto $p \notin T$. Por tanto $T = \emptyset$.
$b) \Rightarrow a)$ Sean a y b dos puntos distintos de X. Entonces por hipótesis, para algún $U \in \mathcal{F}$ tenemos que $a \notin U$. Por tanto, $U \cup \{b\}$ es un entorno abierto de b que no contiene a a. Esto prueba que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1. *lqd*

2.3. Topologías a partir de un subconjunto de $Fil(X)$

Hasta aquí hemos visto que tomando un elemento $\mathcal{F} \in Fil(X)$, sólo añadiéndole el conjunto vacío podemos obtener una topología sobre X y hemos visto sus propiedades. Por ello ahora cabe preguntarse qué pasará si tomamos un subconjunto de $Fil(X)$ en lugar de un solo elemento.

Como vimos anteriormente en el Ejemplo 1, en un espacio topológico el conjunto de los entornos de un punto, forman un filtro; por ello vamos a construir basándonos en este hecho, una topología a partir de un conjunto de filtros en la cual cada filtro sea un filtro de entornos en esa topología.
Primero tendremos en cuenta que no es posible hacer esto a partir de cualquier subconjunto de $Fil(X)$ ya que, por ejemplo, si en este subconjunto está el filtro cofinito, o cualquier otro filtro libre, está claro que no puede ser filtro de entornos para ningún $x \in X$ ya que la intersección de sus elementos es vacía.
Empezaremos por tanto viendo qué ocurre con un subconjunto muy particular de filtros. Vamos a suponer, que para cada $x \in X$ tenemos un $\mathcal{F}(x) \in Fil(X)$ que verifica que $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}(x)$. Obsérvese que $\mathcal{F}(x)$ no tiene por qué ser el filtro generado por $\{x\}$ que denotábamos $\mathcal{F}_x$. Veamos un ejemplo de familia que verifica esta propiedad y aunque parezca trivial nos ayudará a comprender mejor lo que se está haciendo:

Ejemplo 17. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera. Es fácil ver que la familia $\{\ \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \mid x \in X\}$ verifica las propiedades anteriores.

A continuación vamos a definir una topología sobre X imponiendo que cada $\mathcal{F}(x)$ sea un filtro de entornos para x y denotando por abiertos a los conjuntos que son entornos de todos sus puntos como en la caracterización de abierto en un espacio topológico.
Veamos entonces el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1. *Sea* $\{\ \mathcal{F}(x) \mid x \in X\} \subset Fil(X)$ *tal que* $x \in F$ *para todo* $F \in \mathcal{F}(x)$. *Se tiene que el conjunto*

$$\mathcal{T} = \{F \subseteq X \mid F \in \mathcal{F}(x) \ \ \forall x \in F\} \cup \{\emptyset\}$$

forma una topología sobre X.

Demostración. Vamos a ver que $\mathcal{T}$ es cerrado respecto a intersecciones finitas, ya que las demás propiedades son fácilmente deducibles. Tomemos por tanto $U, V \in \mathcal{T}$, y tomemos $x \in U \cap V$, por construcción de $\mathcal{T}$, tenemos que como $x \in U$, $U \in \mathcal{F}(x)$, y de idéntica manera obtenemos que $V \in \mathcal{F}(x)$, y como $\mathcal{F}(x)$ es un filtro, $U \cap V \in \mathcal{F}(x)$, y como esto es así para todo $x \in U \cap V$, tenemos que $U \cap V$ es abierto. <u>lqd</u>

Tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.3.2. *Sea* $\{\ \mathcal{F}(x) \mid x \in X\} \subset Fil(X)$ *una familia de filtros tal que* $x \in F$ *para todo* $F \in \mathcal{F}(x)$, *y supongamos que para cualquier* $U \in \mathcal{F}(x)$ *existe* $V \in \mathcal{F}(x)$ *con* $V \subseteq U$ *y* $U \in \mathcal{F}(y)$ *para todo* $y \in V$.*Entonces* $\mathcal{F}(x)$ *coincide con los entornos de* x *en la topología* $\mathcal{T}$ *definida anteriormente.*

Por otra parte, si simplemente tenemos un conjunto de filtros cualesquiera, podemos hacer diversas construcciones. Aquí trataremos sobre cómo construir una topología con casos un poco más generales de subconjuntos de $Fil(X)$.

Ejemplo 18. Dado $A \subset Fil(X)$, tal que no hay ningún filtro libre en A, y que para todo $x \in X$, existe un único $\mathcal{F}(x) \in A$ tal que $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}(x)$. Entonces para construir una topología razonaremos como sigue.

1. En primer lugar, para cada $\mathcal{F}_i \in A$, llamaremos $F_{in} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_i} F$. Es decir, al conjunto cuyo filtro principal asociado es $\mathcal{F}_i$. Esto se puede hacer siempre ya que no tenemos filtros libres en A.

2. En segundo lugar construiremos el conjunto $\mathcal{T}_A$ de la siguiente manera. Si $x \in F_{in}$ para algún i, entonces $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_i$. Por el contrario si $x \notin F_{in}$ para todo i, tomaremos por ejemplo, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_{ind} = \{X\}$.

De esta manera hemos construido un conjunto de filtros que verifica las propiedades de la proposición anterior (Proposición 2.3.1) y por tanto construimos una topología de la misma manera.

Podemos dar otro ejemplo un poco más general en el caso siguiente:

Ejemplo 19. Dado $A \subset Fil(X)$, tal que no hay ningún filtro libre en A. Razonaremos de idéntica manera al ejemplo anterior (Ejemplo 18) pero en el caso de encontrar un $x \in X$ tal que $x \in F_{j_n}$ $\forall j \in J$; simplemente tomamos por $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_B$, donde $B = \bigcap_{j \in J} F_{j_n}$. Es fácil ver que también nos permite construir una topología como en el caso anterior (Ejemplo 18).

Cabría preguntarse qué características comunes cumplen las topologías formadas por este método, o si han de cumplir algunas. Sin embargo cualquier topología $\mathcal{T}$ teóricamente puede ser construida mediante este procedimiento sin más que tomar para cada $x \in X$, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, y por tanto las topologías construidas de esta manera no han de verificar ninguna propiedad especial. Esta construcción es completamente análoga a la realizada por Hausdorff (Véase [13]) en su definición axiomática de espacio topológico, tomando como noción de partida el concepto de entorno en lugar del de abierto.

Capítulo 3

Ultrafiltros

En este capítulo vamos a estudiar los ultrafiltros definidos en 1.3.3 con profundidad y veremos por qué son tan importantes. Para ello comenzaremos probando su existencia que viene garantizada por el lema de Zorn el cual establece que:

Lema 3.0.1 (Lema de Zorn)**.** *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado tal que $X \neq \emptyset$ y en el que toda cadena tiene cota superior. Entonces existe un elemento maximal en X.*

Veamos pues el siguiente teorema:

Teorema 3.0.2. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. Usaremos el lema de Zorn, el cual nos permite asegurar la existencia de al menos un elemento maximal en un conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena tiene cota superior, como es el caso del conjunto $Fil(X)$ por la Proposición 1.3.2. Tomaremos pues $\mathcal{F} \in Fil(X)$ y consideraremos el conjunto

$$S = \{ \mathcal{G} \in Fil(X) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \}$$

Nótese que podemos ordenar S por la inclusión y se puede comprobar que $(S, \subset)$ verifica las condiciones del lema de Zorn, por lo que existe un elemento maximal $\mathcal{U}$ en S. Este $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro buscado. *lqd*

Cabría preguntarse cómo es posible dado un filtro, reconocer si es un ultrafiltro o no. Para ello tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.0.3. *Dado un filtro $\mathcal{U}$ en X, son equivalentes:*

a) $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro

b) Dado $A \subset X$ entonces $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.

Demostración.
$a) \Leftarrow b)$: Lo haremos por reducción al absurdo. Suponemos que existe un filtro $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{U}$ y que $\mathcal{U} \neq \mathcal{F}$. Podemos tomar $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \notin \mathcal{U}$; por hipótesis entonces $F^c \in \mathcal{U}$ pero como $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ entonces $F \cap F^c = \emptyset \in \mathcal{F}$. Lo que es una contradicción con que $\mathcal{F}$ sea un filtro, luego si existe un filtro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.
$a) \Rightarrow b)$: Sea $A \subset X$ tal que $A \notin \mathcal{U}$, consideraremos el conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{A\}$. Este conjunto no es base ni subbase para un filtro, ya que si lo fuera, como trivialmente $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro se tiene que son iguales y por tanto $A \in \mathcal{U}$ lo que es una contradicción con la elección de A que hicimos. Como además $\mathcal{V} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{V}$, se tiene que $\mathcal{V}$ no verifica la propiedad b) de la caracterización de base de filtro. Es decir no verifica la PIF, luego existe $B \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap B = \emptyset$ por lo que $B \subset A^c$ y por ser $\mathcal{U}$ un filtro, $A^c \in \mathcal{U}$ $\underline{lqd}$

De aquí podemos deducir el siguiente corolario

Corolario 3.0.4. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en X y un subconjunto $A \subset X$ se tiene que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ o $A^c \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$*

Demostración. Por el Teorema 3.0.2 podemos asegurar que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Por la Proposición 3.0.3, se tiene que o bien $A \in \mathcal{U}$ o bien $A^c \in \mathcal{U}$. Tomando como B el que verifique lo anterior, se tiene que por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro $B \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{U}$, en particular, para todo $F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. $\underline{lqd}$

Y por último, tenemos este otro corolario:

Corolario 3.0.5. *Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X, se tiene que dado $A \subset X$, tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$.*

Basándonos en estos resultados podemos ver también el siguiente resultado:

Proposición 3.0.6. *Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y $A \cup B \in \mathcal{U}$ se tiene que o bien $A \in \mathcal{U}$ o bien $B \in \mathcal{U}$*

Demostración. Por la Proposición 3.0.3, se tiene que dados dos conjuntos $A, B \subset X$ tal que $A \cup B \in \mathcal{U}$ y tales que $A, B \notin \mathcal{U}$, entonces $A^c, B^c \in \mathcal{U}$, y por tanto $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{U}$, pero esto está en contradicción con que $A \cup B \in \mathcal{U}$, luego no puede darse que $A, B \notin \mathcal{U}$ así que o bien $A \in \mathcal{U}$ o bien $B \in \mathcal{U}$. $\underline{lqd}$

Esta proposición se puede generalizar como sigue:

Proposición 3.0.7. *Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, un elemento $P \in \mathcal{U}$, y una partición finita $\{P_i\}_{i\in I}$ de P; entonces existe un único $i_{\mathcal{U}} \in I$ tal que $P_{i_{\mathcal{U}}} \in \mathcal{U}$.*

Demostración. La prueba es sencilla teniendo en cuenta la proposición anterior (Proposición 3.0.6). Es claro que si $I = \{i_1, \cdots, i_n\}$ tenemos en primer lugar que $P_{i_1} \cup (\bigcup_{i\in I\setminus\{i_1\}} P_i) \in \mathcal{U}$. Tenemos que por la Proposición 3.0.6 o bien $P_{i_1} \in \mathcal{U}$ y habríamos terminado, o bien $(\bigcup_{i\in I\setminus\{i_1\}} P_i) = P_{i_2} \cup (\bigcup_{i\in I\setminus\{i_1,i_2\}} P_i) \in \mathcal{U}$. En este caso, no hay más que repetir el mismo proceso hasta encontrar $i_{\mathcal{U}}$. <u>lqd</u>

El resultado anterior, tomando el caso en el que $P = X$ es de gran utilidad en muchas de las demostraciones que utilizan ultrafiltros.
Además tenemos que dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X y un subconjunto $A \subset X$, podemos refinar $\mathcal{F}$ gracias a la siguiente proposición.

Proposición 3.0.8. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en X y un subconjunto $A \subset X$ se tiene que existe $B \in \{A, A^c\}$ tal que $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup B$ es subbase para un filtro $\mathcal{F}'$. Además $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$.*

Demostración. Por el Corolario 3.0.4 se tiene que existe $B \in \{A, A^c\}$ tal que $B \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{F}$. Luego es fácil ver que $\mathcal{B}$ es subbase para un filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. <u>lqd</u>

Proposición 3.0.9. *Un filtro $\mathcal{F}$ en X es la intersección de todos los ultrafiltros en X que lo contienen.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ la colección de todos los ultrafiltros que contienen a $\mathcal{F}$. Dado $A \in \bigcap \mathcal{D}$ veamos que $A \in \mathcal{F}$. Si $A \notin \mathcal{F}$, entonces $A^c \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, luego existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$ para el cual $A^c \in \mathcal{D}$ con lo que $A \notin \mathcal{D}$, y esto contradice que $A \in \bigcap \mathcal{D}$. <u>lqd</u>

Dado un filtro, el ultrafiltro que lo contiene no es único por lo general, basta ver por ejemplo en un conjunto finito X, sea $\mathcal{F}$ el filtro principal asociado a $A \subset X$, donde $\#A \neq 1$. Se tiene que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_i$ para $i \in A$ donde $\mathcal{U}_i = \{\ B \mid \{i\} \subset B\ \}$, es decir, $\mathcal{U}_i$ es el ultrafiltro principal asociado a $i \in A$. Hemos exigido la condición $\#A \neq 1$ ya que en el caso $\#A = 1$ tenemos la siguiente definición:

Definición 3.0.10. *Si $A \subset X$ es un conjunto unitario, el filtro principal asociado es un ultrafiltro llamado principal o fijo. Los otros ultrafiltros que existen se llaman no principales o libres.*

Este es el único ejemplo de ultrafiltro que conocemos de manera explícita. Para asegurar la existencia de ultrafiltros no principales, basta aplicar por ejemplo el Teorema 3.0.2 tomando $X = \mathbb{Z}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{cof}$, sin embargo no conocemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F}_{cof} \subset \mathcal{U}$.
Veamos una caracterización de los ultrafiltros libres y principales.

Proposición 3.0.11. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Se tiene que:*

(I) *$\mathcal{U}$ es principal si y solo si $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A \neq \emptyset$*

(II) *$\mathcal{U}$ es libre si y solo si $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A = \emptyset$*

Demostración. Tenemos que claramente si $\mathcal{U}$ es principal, $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A \neq \emptyset$. Recíprocamente, si $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A = B \neq \emptyset$, tenemos que B es unitario y por tanto $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro principal asociado a B. Esto es así ya que si B tiene más de un elemento, tomando $b \in B$ es claro que $\{b\} \notin \mathcal{U}$ y que $\{b\}^c \notin \mathcal{U}$ por construcción de B. Sin embargo esto no puede ocurrir ya que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y por la Proposición 3.0.3 uno de los dos debería estar.
Por otro lado, por lo anterior, si $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A = \emptyset$, $\mathcal{U}$ no puede ser principal y por tanto es libre. Además, si $\mathcal{U}$ no es principal, tenemos que para todo $x \in X$, se tiene que $\{x\} \notin \mathcal{U}$ ya que entonces $\mathcal{U}$ sería el filtro principal asociado a x, y por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, se tiene entonces que $\{x\}^c \in \mathcal{U}$ para todo $x \in X$, lo que se traduce en que claramente $x \notin \bigcap_{A\in\mathcal{U}} A$ para todo $x \in X$, luego $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A = \emptyset$.

<u>lqd</u>

Cabe destacar que todo ultrafiltro es libre o principal como se deduce de esta proposición, es decir, la clasificación es exhaustiva. Sin embargo existen filtros que no verifican ninguna de las dos definiciones como vimos en el Ejemplo 3.
Podemos ver por la Proposición 3.0.11, que los ultrafiltros libres son, en particular, filtros libres. Luego podemos aplicar la siguiente proposición tanto al caso en que $\mathcal{F}$ sea un filtro, como al caso en que sea un ultrafiltro.
Tenemos que:

Proposición 3.0.12. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto infinito X, se tiene que $\mathcal{F}$ es un filtro libre si y solo si $\mathcal{F}_{cof} \subset \mathcal{F}$.*

Demostración. Una implicación es trivial ya que si el filtro cofinito está contenido en $\mathcal{F}$ se tiene claramente que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}_{cof}} F = \emptyset$. Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es libre, se tiene por definición que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ luego para todo $x \in X$ se tiene que existe $G_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin G_x$. Como se tiene trivialmente que $G_x \subset \{x\}^c$ se tiene por ser $\mathcal{F}$ un filtro que $\{x\}^c \in \mathcal{F}$, y como esto se ha hecho con un $x \in X$ cualquiera, se tiene el resultado. <u>lqd</u>

Vamos a ver un ejemplo de aplicación de esta proposición.

Ejemplo 20. Todo filtro asociado a una sucesión divergente en $X = \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ es un filtro libre.

Demostración. Lo haremos viendo que el filtro cofinito está contenido en el asociado a la sucesión. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión y sea $x \in X$ cualquiera. Por definición de sucesión divergente, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < x_m$ para todo $m_0 < m$. Por tanto claramente $\{\ x_m \mid m_0 < m\} \subseteq \{x\}^c$ y por la definición de filtro asociado a una sucesión dada en el Ejemplo 10 se tiene que $\{x\}^c$ pertenece al filtro asociado a la sucesión. Como x era cualquiera, tenemos que el filtro cofinito está contenido en el asociado a la sucesión y por tanto este es libre. *lqd*

Se desprende de lo anterior el siguiente resultado:

Corolario 3.0.13. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en un espacio X. Si $\mathcal{U}$ tiene algún elemento finito, entonces es principal.*

Demostración. Si contiene a un elemento finito, $\mathcal{F}_{cof} \not\subset \mathcal{U}$, y por la Proposición 3.0.12 anterior aplicada a ultrafiltros, no puede ser libre, luego ha de ser principal ya que para los ultrafiltros la clasificación es exhaustiva como vimos en la Proposición 3.0.11. *lqd*

Obsérvese que de aquí se tiene que todo ultrafiltro en un conjunto finito es principal.

Capítulo 4

Filtros y aplicaciones

Vamos a ver que el comportamiento de la estructura de filtro mediante aplicaciones es favorable y sencillo, y que se tienen los resultados que serían esperables.

Proposición 4.0.1. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos, y sea $\mathcal{B}$ una base para un filtro en X. Entonces $f(\mathcal{B}) = \{\ f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base para un filtro en Y.*

Demostración. Trivialmente se tiene que $f(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y que $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$ ya que $\emptyset \notin \mathcal{B}$, luego solo falta ver que dados $U_1, U_2 \in f(\mathcal{B})$, se tiene que existe $U_3 \in f(\mathcal{B})$ tal que $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.
Para ello tomaremos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $U_i = f(B_i)$ para $i = 1, 2$. Por ser $\mathcal{B}$ una base de filtro dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, se tiene que existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Como $f(B_1) \cap f(B_2) = U_1 \cap U_2$ por definición de los B_i, y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, se tiene que $f(B_3) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2) = U_1 \cap U_2$. Por lo que tomando $f(B_3) = U_3 \in f(\mathcal{B})$, se tiene el resultado buscado. *lqd*

Proposición 4.0.2. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y consideremos un filtro $\mathcal{F}$ en X, con $\mathcal{F} \to x$, se tiene que*

$$\langle f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \rangle \ \subseteq \ \langle f(\mathcal{F}) \rangle$$

.

Demostración. Si $A \in \langle f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \rangle$, entonces $A \supset f(N)$ para algún $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Pero como $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \leq \mathcal{F}$, tenemos que $A \in f(\mathcal{F})$. *lqd*

Aunque el ser base de un filtro se conserva por aplicaciones, no se tiene por lo general el mismo resultado para los filtros como muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.0.3. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos, y sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Entonces $f(\mathcal{F})$ es una base de filtro en Y.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, es base de sí mismo y por tanto, su imagen por la aplicación f es una base por la Proposición 4.0.1. lqd

A continuación se muestra que, en general, la imagen de un filtro por una aplicación no es un filtro.

Ejemplo 21. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{1,2\}} = \langle\{1,2\}\rangle = \{\ A \mid \{1,2\} \subseteq A \subseteq \mathbb{N}\}$ el filtro principal asociado al conjunto $\{1,2\}$; sea también $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(1) = 2$, y $f(x) = x\ \forall x \neq 1$. Es fácil ver que por ejemplo, $f(\{1,2\}) = \{2\} \in f(\mathcal{F})$ pero que sin embargo como $f^{-1}(1) = \emptyset$, se tiene que aunque $\{2\} \subset \{1,2\}$, $\{1,2\} \notin f(\mathcal{F})$ luego $f(\mathcal{F})$ no puede ser un filtro.

Es fácil ver también que si queremos que se conserve la propiedad de ser filtro hemos de exigirle a la aplicación la sobreyectividad.

Proposición 4.0.4. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva, y sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Entonces $f(\mathcal{F})$ es un filtro en Y.*

Demostración. Sabemos que $f(\mathcal{F})$ es base para un filtro por lo que basta comprobar que dado $A \in f(\mathcal{F})$ y $A \subseteq B$, $B \in f(\mathcal{F})$. Veámoslo.
Sea $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $f(F_1) = A$. Como $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, consideraremos el conjunto $F_1 \cup (\bigcup_{x\in B\setminus A} f^{-1}(x))$ que podemos tomar ya que como f es sobreyectiva sabemos que $f^{-1}(x) \neq \emptyset\ \forall x \in Y$. Por construcción $F_1 \subseteq F_1 \cup (\bigcup_{x\in B\setminus A} f^{-1}(x))$ luego por ser $\mathcal{F}$ un filtro se tiene que $F_1 \cup (\bigcup_{x\in B\setminus A} f^{-1}(x)) \in \mathcal{F}$. Por tanto $f(F_1 \cup (\bigcup_{x\in B\setminus A} f^{-1}(x))) \in f(\mathcal{F})$, y por construcción se tiene que $f(F_1 \cup (\bigcup_{x\in B\setminus A} f^{-1}(x))) = A \cup (\bigcup_{x\in B\setminus A} f(f^{-1}(x))) = A \cup (B\setminus A) = B \in f(\mathcal{F})$, donde se ha usado que f es sobreyectiva para decir que $f(f^{-1}(x)) = \{x\}$. lqd

Veremos ahora que si tenemos un ultrafiltro en X, su imagen por una aplicación cualquiera no tiene por qué ser ni siquiera un filtro, sin embargo, es base para un ultrafiltro.

Proposición 4.0.5. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. Entonces $\langle f(\mathcal{U})\rangle$ es un ultrafiltro en Y.*

Demostración. En primer lugar, se tiene claramente que la imagen de $\mathcal{U}$ es una base de filtro puesto que $\mathcal{U}$, en particular, es una base de filtro y podemos aplicarle la Proposición 4.0.1.
Falta ver que el filtro que genera es un ultrafiltro. Para ello usaremos la caracterización de ultrafiltro dada en la Proposición 3.0.3. Tomemos por tanto $A \subseteq Y$. Vamos a ver que o bien $A \in \langle f(\mathcal{U})\rangle$ o bien $A^c \in \langle f(\mathcal{U})\rangle$.

Trabajaremos usando preimágenes. Tenemos que $f^{-1}(A) \subseteq X$. Por tanto por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X, podemos volver a usar la Proposición 3.0.3 y asegurar que o bien $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, o bien $f^{-1}(A)^c \in \mathcal{U}$. Supongamos que estamos en el primer caso. Entonces como $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, tenemos que $f(f^{-1}(A)) \in f(\mathcal{U})$. Además sabemos que $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ por lo que tenemos que A contiene a un elemento de la base y por tanto $A \in \langle f(\mathcal{U}) \rangle$.
Si estamos en el segundo caso, tenemos que $f^{-1}(A)^c \in \mathcal{U}$. Se tiene siempre además que $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$ y sabiendo esto podemos decir que $f(f^{-1}(A)^c) = f(f^{-1}(A^c)) \in f(\mathcal{U})$. Procediendo como anteriormente, usamos que $f(f^{-1}(A^c)) \subseteq A^c$ y tenemos que A^c contiene a un elemento de la base y por tanto $A^c \in \langle f(\mathcal{U}) \rangle$.
En cualquier caso, tenemos que $f(\mathcal{U})$ genera un ultrafiltro. <u>lqd</u>

En cuanto a resultados acerca de las preimágenes de filtros por aplicación, tenemos en primer lugar la siguiente proposición.

Proposición 4.0.6. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación, y sea $\mathcal{B}'$ una base para un filtro en Y. Entonces $f^{-1}(\mathcal{B}') = \{\ f^{-1}(B') \mid B' \in \mathcal{B}'\}$ es una base para un filtro en X, si y solo si $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ para todo $B' \in \mathcal{B}'$.*

Demostración. $\Rightarrow)$: Trivialmente si $f^{-1}(\mathcal{B}')$ es base para un filtro en X, $\emptyset \notin f^{-1}(\mathcal{B}')$, o lo que es lo mismo, $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ para todo $B' \in \mathcal{B}'$.
$\Leftarrow)$: Veamos que $f^{-1}(\mathcal{B}')$ es base para un filtro en X. Para ello comprobaremos las siguientes condiciones:

1. Por hipótesis tenemos que $\emptyset \notin f^{-1}(\mathcal{B}')$, y es fácil ver que $f^{-1}(\mathcal{B}') \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{B}' \neq \emptyset$.

2. Como $\mathcal{B}'$ es base para un filtro, tenemos que dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$, existe $B_3 \in \mathcal{B}'$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. De aquí obtenemos que $f^{-1}(B_3) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Y por tanto dados dos elementos $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in f^{-1}(\mathcal{B}')$, hemos probado que existe $f^{-1}(\mathcal{B}') \ni f^{-1}(B_3) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ y por tanto es base. <u>lqd</u>

Como corolario de esto tenemos lo siguiente:

Corolario 4.0.7. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación y $\mathcal{F}'$ un filtro sobre Y, tenemos que $f^{-1}(\mathcal{F}')$ es una base de filtro en X si y solo si $f^{-1}(F') \neq \emptyset$ para todo $F' \in \mathcal{F}'$.*

Podemos ver también que si la aplicación es sobreyectiva se deduce de lo anterior que:

Corolario 4.0.8. *Si $f : X \to Y$ es sobreyectiva y $\mathcal{B}'$ es base de filtro en Y, entonces $f^{-1}(\mathcal{B}')$ es base de filtro en X.*

Si la aplicación es inyectiva se tiene que:

Proposición 4.0.9. *Si $f : X \to Y$ es inyectiva y $\mathcal{F}'$ es un filtro en Y tal que $f^{-1}(\mathcal{F}')$ es base de filtro en X, entonces $f^{-1}(\mathcal{F}')$ es un filtro sobre X.*

Demostración. Claramente es base de filtro por la Proposición 4.0.6.
Por tanto para ver si es un filtro basta ver que se verifica que dado $F \in f^{-1}(\mathcal{F}')$, para todo G que contiene a F se tiene que $G \in f^{-1}(\mathcal{F}')$. Tomemos pues $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$, y B que contiene a $f^{-1}(A)$. Entonces se tiene que si $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{F}')$, aplicando f tenemos que $f(f^{-1}(A)) \subseteq f(B)$.
En efecto basta tener en cuenta que si $f^{-1}(F') \subset M$, entonces $M = f^{-1}(f(M) \cup F')$. $\underline{lqd}$

Ejemplo 22. La preimagen de un ultrafiltro no siempre es un ultrafiltro. Basta considerar por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces considerando $\mathcal{U}_0 = \mathcal{F}_0$ el ultrafiltro principal asociado al 0 se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}_0) = \{\mathbb{R}\}$, aunque es un filtro, no es un ultrafiltro.

Capítulo 5

Convergencia de Filtros

Veamos a continuación lo que se define como convergencia de un filtro en un espacio topológico cualquiera.

Definición 5.0.1. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, y $x \in X$. Diremos que $\mathcal{F}$ converge al punto x, y lo denotaremos $\mathcal{F} \to x$, si $\mathcal{F} \succeq \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. En tal caso diremos que x es punto límite de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ tiene un único punto límite, pondremos que lim $\mathcal{F} = x$*

En otras palabras, esto significa que cada entorno N de x contiene un elemento de $\mathcal{F}$.

Definición 5.0.2. *Dada una base de filtro $\mathcal{B}$ diremos que $\mathcal{B}$ converge a x, $\mathcal{B} \to x$, si $\langle \mathcal{B} \rangle \to x$.*

Definición 5.0.3. *En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, un punto x es adherente a un filtro $\mathcal{F}$ si $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*
Diremos que es adherente a una base para un filtro si es adherente al filtro que genera. También lo llamaremos puntos de adherencia.

Proposición 5.0.4. *Si $\mathcal{F} \to x$, entonces x es adherente a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Si $\mathcal{F} \to x$, entonces $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$. Por tanto, dados $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $F \in \mathcal{F}$; $N \cap F \neq \emptyset$. Así pues, $x \in \overline{F}$. lqd

Tenemos esta caracterización de punto adherente:

Proposición 5.0.5. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$ un punto, y $\mathcal{B}$ una base de filtro. Son equivalentes:*

1. *x es punto adherente de $\mathcal{B}$*

2. *Cada elemento de $\mathcal{B}$ interseca a todos los entornos de x.*

Demostración. Si x es adherente a B para todo $B \in \mathcal{B}$, $x \in \overline{B}$, luego si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, $N \cap B = \emptyset$.
Recíprocamente si para todo $B \in \mathcal{B}$ y $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ se cumple que $B \cap N \neq \emptyset$, entonces $x \in \overline{B}$. Por tanto, si $A \in \langle B \rangle$, $x \in \overline{A}$, luego x es adherente a $\mathcal{B}$. *lqd*

Tenemos también las siguientes equivalencias que nos permiten caracterizar de más formas los puntos adherentes.

Proposición 5.0.6. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X, y x un punto de X. Son equivalentes:*

a) x es un punto adherente de $\mathcal{B}$.

b) $x \in \overline{B} \quad \forall B \in \mathcal{B}$.

c) $\mathcal{B} \cup \mathcal{N}_x$ tiene la PIF.

d) $\mathcal{B} \cup \mathcal{N}_x$ es subbase para un filtro.

Demostración. Inmediata utilizando la Proposición 5.0.5 *lqd*

Ejemplo 23. Se tiene que un punto puede ser adherente a un filtro y este no converger a dicho punto. Por ejemplo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ sea $\mathcal{F}_A$ el filtro asociado a $A = \{0, 1\}$. Se tiene que $\mathcal{F}_A$ no converge a ningún punto, y los puntos 0 y 1 son adherentes.
En efecto, los elementos de $\mathcal{F}_A$ contienen todos al conjunto A. Sin embargo, hay entornos del 0 que no contienen al 1, por tanto hay elementos en $\mathcal{N}_0^{\mathcal{T}_e}$ que no están en F_A. De la misma manera $A \notin \mathcal{N}_0^{\mathcal{T}_e}$ luego los filtros no son comparables y por tanto F_A no es más fino que $\mathcal{N}_0^{\mathcal{T}_e}$ luego $\mathcal{F}_A$ no converge a 0. Por un argumento similar se prueba que no converge a 1, ni a cualquier otro punto. Sin embargo es claro que 0 y 1 están en todos los elementos de $\mathcal{F}_A$ y por tanto, en sus clausuras, lo que implica que son adherentes.

El ejemplo anterior no puede darse en el caso de que $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro. De hecho, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 5.0.7. *Un punto x es adherente a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ si y solo si $\mathcal{U} \to x$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 5.0.4, basta probar que si x es adherente a $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U} \to x$, es decir, que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{U}$. Pero si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, y $U \in \mathcal{U}$, $N \cap U \neq \emptyset$, por ser $x \in \overline{U}$. Entonces $\mathcal{U} \cup \{N\}$ tiene la PIF, y por el Corolario 1.2.4 es subbase para un filtro $\mathcal{U}' \succeq \mathcal{U}$ con $N \in \mathcal{U}'$. Pero por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro ha de ser $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. *lqd*

A continuación vamos a ver una proposición que nos permitirá caracterizar los espacios T_2 en función de la convergencia de filtros. Recordemos que si queríamos hacer esto mediante sucesiones, es necesario exigirle al espacio que sea primero numerable (1^{o}N), es decir, un espacio en el que cada punto admite una base de entornos numerable. Esta es una de las ventajas del estudio de la convergencia mediante filtros.

Proposición 5.0.8. $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico de Hausdorff (T_2) si y solo si todo filtro en X converge como mucho a un punto.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_2. Por reducción al absurdo supongamos que $\mathcal{F}$ converge a $x, y \in X$. Entonces por definición de convergencia de filtro se tiene que $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{N}_y \subseteq \mathcal{F}$, luego por ser $\mathcal{F}$ un filtro no existen entornos disjuntos de x y de y, lo que es una contradicción con que $(X, \mathcal{T})$ sea T_2.
2) $\Rightarrow$ 1)Supongamos que todo filtro en X converge como mucho a un punto. Por reducción al absurdo. Sean $x, y \in X$ dos puntos que no admiten abiertos disjuntos. Entonces tampoco admiten entornos disjuntos. Y por tanto $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \cup \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ tiene la PIF. Y por la Proposición 1.2.4, $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \cup \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ genera un filtro $\mathcal{G}$ que converge tanto a x como a y por construcción, lo cual esta en contradicción con la hipótesis. <u>lqd</u>

Veremos ahora una proposición que nos va a ser de utilidad más adelante.

Proposición 5.0.9. *Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en X. Son equivalentes:*

a) x es un punto adherente de $\mathcal{B}$.

b) Existe un refinamiento $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}'$ converge a x.

Demostración. a)$\Rightarrow$ b): Si x es un punto adherente de $\mathcal{B}$, existe una base de filtro $\mathcal{B}'$ refinando a $\mathcal{B}$ y a $\mathcal{N}_x$, y entonces $\mathcal{B}'$ es una base de filtro más fina que converge a x puesto que es más fina que $\mathcal{N}_x$ por construcción.
b)$\Rightarrow$ a): Como $\mathcal{B}' \to x$, x es un punto adherente a $\mathcal{B}'$, y tenemos que $\mathcal{B}' \succeq \mathcal{B}$, tenemos también que x es un punto adherente a $\mathcal{B}$ ya que si existiere $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin \overline{A}$, como $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ entonces $x \notin \overline{A} \in \mathcal{B}'$ pero x es un punto adherente a $\mathcal{B}'$ lo que es absurdo. <u>lqd</u>

Veremos una proposición a continuación que nos permite caracterizar la clausura de un conjunto A en un espacio topológico mediante la convergencia de los filtros en el espacio.

Proposición 5.0.10. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, A un subconjunto no vacío de X y x un punto de X.Son equivalentes:*

1. *$x \in \overline{A}$*

2. *Existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.*

3. *El conjunto $\mathcal{F} = \{A\} \cup \mathcal{N}_x$ es subbase para un filtro.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 3) Si $x \in \overline{A}$, entonces todo entorno de x interseca a A y por tanto $\{A\} \cup \mathcal{N}_x$ tiene la PIF, luego por la Proposición 1.2.4 se tiene lo que buscamos.
3) $\Rightarrow$ 2) Es trivial que el filtro generado por la subbase $\{A\} \cup \mathcal{N}_x$ contiene a $\mathcal{N}_x$, luego por definición, converge a x.
2) $\Rightarrow$ 1) Como $\mathcal{F} \to x$, entonces $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ y como $A \in \mathcal{F}$ tenemos que $A \cap N \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$ por lo que tenemos que $x \in \overline{A}$

<u>lqd</u>

Vamos ahora a caracterizar también los abiertos de la topología y posteriormente los cerrados.

Proposición 5.0.11. *A es abierto si y solo si cuando $\mathcal{F} \to x \in A$ entonces $A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) : Supongamos que A es abierto, y por tanto, entorno de x para cualquier $x \in A$. Por definición de convergencia, si un filtro $\mathcal{F} \to x$, entonces $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$ y como teníamos que $A \in \mathcal{N}_x$, tenemos que $A \in \mathcal{F}$.
$\Leftarrow$) : Suponemos ahora que $\mathcal{F} \to x \in A$, implica que $A \in \mathcal{F}$. Luego tomando el caso particular en el que $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x$ tenemos por definición que $\mathcal{N}_x \to x$ lo que por hipótesis implica que $A \in \mathcal{N}_x$, o lo que es lo mismo que A es entorno de x, y como esto se puede hacer para cualquier $x \in A$ obtenemos que A es entorno de todos sus puntos; i.e. es abierto. <u>lqd</u>

Caracterizaremos ahora mediante la convergencia de filtros a los conjuntos cerrados:

Proposición 5.0.12. *Dados $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y un conjunto $A \subseteq X$, son equivalentes:*

1. *A es cerrado.*

2. *$x \in A$ si y solo si existe un filtro que contiene a A y converge a x.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que A es cerrado. Probaremos primero una implicación. Tomamos $x \in A$ y hay que ver que existe un filtro que contiene a A y converge a x. Esto es inmediato ya que $x \in A \Rightarrow x \in \overline{A}$ y por la Proposición 5.0.10 se tiene lo que buscamos. Para el recíproco volveremos

a usar la Proposición 5.0.10 y vemos que si existe un filtro que contiene a A y converge a x, entonces $x \in \overline{A}$ pero como A es cerrado, se tiene que entonces $x \in A$.
Veamos ahora 2) $\Rightarrow$ 1). Supongamos que $x \in A$ si y solo si existe un filtro que contiene a A y converge a x. Tomamos $x \in \overline{A}$ y hay que ver que $x \in A$. Aplicando de nuevo la Proposición 5.0.10, tenemos que si $x \in \overline{A}$ entonces existe un filtro que contiene a A y converge a x, pero por hipótesis esto implica que $x \in A$. Por tanto tenemos que $\overline{A} \subseteq A$ y A es cerrado. *lqd*

5.0.1. Filtros y aplicaciones continuas

Proposición 5.0.13. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua en x si y solo si para todo filtro $\mathcal{F}$ en X, con $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{F} \to x$ se tiene que $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \to f(x)$.*

Demostración. Sea f continua en x y $\mathcal{F} \in Fil(X)$ con $x \in lim\mathcal{F}$. Como $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$, $f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \subseteq f(\mathcal{F})$ y entonces se tiene que

$$\langle f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \rangle \ \subseteq \ \langle f(\mathcal{F}) \rangle$$

Pero por ser f continua en x se tiene que

$$\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'} \subseteq f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \subseteq \langle f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \rangle$$

y por tanto de todo lo anterior se tiene que

$$\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'} \subseteq \langle f(\mathcal{F}) \rangle$$

Recíprocamente como $x \in lim\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, entonces por hipótesis, $f(x) \in lim\langle f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \rangle$. Por tanto $\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'} \subseteq \langle f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \rangle$. *lqd*

Capítulo 6

Filtros y compacidad

Una de las mayores utilidades de los filtros en espacios topológicos es que nos permiten caracterizar la compacidad de un espacio y que nos permite probar el teorema de Tychonoff con una prueba considerablemente más corta que la original (Véase [26]). En este capítulo veremos caracterizaciones de la compacidad y una prueba del teorema de Tychonoff mediante el uso de filtros.

Proposición 6.0.1. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(X, \mathcal{T})$ *es compacto.*

2. *Todo ultrafiltro en* X *converge.*

3. *Si* $\mathcal{F} \in Fil(X)$, $\bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ *(Es decir, todo filtro en* X *tiene un punto adherente)*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es compacto y que $\mathcal{U} \in Ult(X)$ no converge. Entonces para cada $x \in X$ existe un entorno abierto $N_x \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{U}$. Por tanto, $C = \{N_x \mid x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X, por lo que $X = \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}$. Pero por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, existe $1 \leq m \leq n$ tal que $N_{x_m} \in \mathcal{U}$ lo que es una contradicción.
2) $\Rightarrow$ 3) Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, sea $\mathcal{G}$ un ultrafiltro con $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G} \to x$, dados $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $F \in \mathcal{F}$, $V \cap F \in \mathcal{G}$ así que $V \cap F \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{F}$ luego x es adherente a $\mathcal{F}$.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados de X que tiene la PIF. Entonces $\mathcal{C}$ es subbase para un filtro $\mathcal{F}$. Si x es adherente a $\mathcal{F}$, $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$. En particular, $x \in \overline{C_i} = C_i$ para todo i, así que $\bigcap C_i \neq \emptyset$, y por tanto $(X, \mathcal{T})$ es compacto.

<u>lqd</u>

Definición 6.0.2 (Producto cartesiano de una familia de conjuntos)**.** *Dada una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ se define su producto cartesiano como el conjunto*

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i\}$$

El elemento $x(i) = x_i$ se llama coordenada i-ésima de $x = (x_i)_{i\in I}$.

El Axioma de Elección permite probar que $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ si y solo si $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. La aplicación $p_j : \prod X_i \to X_j$ dada por $p_j((x_i)) = x_j$ para cada $j \in I$ se llama j-ésima proyección canónica.

Definición 6.0.3 (Topología producto o de Tychonoff)**.** *Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ es una familia de espacios topológicos. La topología producto sobre $\prod_{i\in I} X_i$ se define como la generada por la subbase $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$.*
Por tanto los elementos de la base son los conjuntos $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, o de manera equivalente, la familia:

$$\{\prod_{i\in I} U_i \mid \textit{Existe } J \subset I \textit{ finito tal que } U_i = X_i \textit{ si } i \in I\backslash J \textit{ y } U_i \in \mathcal{T}_i \textit{ para todo } i \in I\}$$

Es decir, son productos de conjuntos de manera que todos los espacios coordenados son los X_i salvo para un número finito de índices J en los que son abiertos propios de los espacios correspondientes a dichos índices.

Nota. Si se considera la familia $\{\prod U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$ se obtiene la llamada topología caja, que es estrictamente más fina que la topología producto si I es infinito, y que presenta ciertos inconvenientes como por ejemplo:

1. Tiene demasiados abiertos, si lo que se pretende es que las proyecciones sean continuas.
2. No siempre el producto de espacios compactos o conexos es compacto o conexo.
3. No se puede caracterizar la continuidad que llega a un producto en términos de la continuidad de las funciones coordenadas.
4. El producto numerable de espacios $1N$ no siempre lo es

Se demuestra igual que en el caso de un número finito de factores la siguiente proposición:

Proposición 6.0.4. *Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y sobre $\prod_{i\in I} X_i$ se considera la topología producto. Se cumple:*

1. *Las proyecciones canónicas* $p_i : (\prod X_i, \mathcal{T}_p) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ *son continuas y abiertas.*

2. $f : (X, \mathcal{T}) \to (\prod Y_i, \mathcal{T}_p)$ *es continua si y solo si lo son las aplicaciones coordenadas* $f_i = p_i \circ f$.

Proposición 6.0.5. *Si* $\mathcal{F}_i \in Fil(X_i)$ *entonces:*

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} F_i \mid \exists J \subset I \textit{ finito con } F_i = X_i \textit{ si } i \notin J \textit{ y } F_i \in \mathcal{F}_i\}$$

es una base de filtro en $\prod_{i\in I} X_i$.

Demostración. La prueba es una comprobación directa teniendo en cuenta que los elementos de $\mathcal{B}$ son intersecciones finitas de elementos de la forma $p_i^{-1}(F)$ con $f \in \mathcal{F}_i$. $\underline{lqd}$

Proposición 6.0.6 (Caracterización de la convergencia de filtros en un espacio producto)**.** *En* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *con la topología producto un filtro converge a* $x = (x_i)$ *si y solo si para cada* $i \in I$, $\langle p_i\mathcal{F}\rangle \to x_i$ *en* X_i.

Demostración. Si $\mathcal{F} \to x$, como p_i es continua, $\langle p_i\mathcal{F}\rangle \to x_i$. Recíprocamente, sea V_x un entorno básico de x. Entonces $V_x = \prod_{i\in I} U_i$, donde U_i es un abierto propio de X_i para un número finito de índices $i_1, \cdots, i_k$ para $k = 1, 2, \cdots, n$. Como $p_{i_k}(\mathcal{F}) \to x_{i_k}$, $p_{i_k}(V_x) \in p_{i_k}(\mathcal{F})$, para $k = 1, 2, \cdots, n$ y por tanto existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $p_{i_k}(F) \subset p_{i_k}(V_x)$, luego $F \subset \prod_{i\in I} O_i^k$, donde $O_i^k = X_i$ si $i \neq i_k$ y $O_{i_k}^k = U_{i_k}$. Por ser $\mathcal{F}$ filtro, $\prod_{i\in I} O_i^k \in \mathcal{F}$, y por tanto, la intersección finita $\bigcap_{k=1}^n \left(\prod_{i\in I} O_i^k\right) = V_x$ lo que significa que $\mathcal{F} \to x$. $\underline{lqd}$

Teorema 6.0.7 (Teorema de Tychonoff)**.** *Para cada* $i \in I$, *sea* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *un espacio topológico no vacío; y sea* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *dotado con la topología producto. Entonces son equivalentes:*

1. *Cada* X_i *es compacto*

2. X *es compacto*

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Como $p_i(X) = X_i$ y p_i es continua, entonces X_i es compacto.
1) $\Rightarrow$ 2) Veamos que cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ de X es convergente. Ya que las proyecciones son sobreyectivas, por cada $i \in I$, $p_i(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro en X_i utilizando la Proposición 4.0.4 y la Proposición 4.0.5. Además, como cada X_i es compacto, tenemos que $p_i(\mathcal{U}) \to x_i$ para algún $x_i \in X_i$ por la Proposición 6.0.1. Por la Proposición 6.0.6 tenemos que $\mathcal{U}$ converge al punto $x = (x_i)_{i\in I}$ en X.

$\underline{lqd}$

Cuando en un producto $\prod_{i \in I} X_i$ todos los factores son iguales a un mismo espacio A, es decir, si $X_i = A$ para todo $i \in I$ se usa en la notación $\prod X_i = A^I = \{f : I \to \bigcup X_i = A\}$.

Ejemplo 24. Sea $X = (\{0,1\}, \mathcal{T}_{discreta})$. Entonces la topología caja sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es la discreta, y por tanto no es compacto. Es decir, el Teorema de Tychonoff no es cierto en general para un producto infinito con la topología caja.

6.0.1. Axioma de elección y Teorema de Tychonoff

Vamos a ver ahora el Teorema de Kelley, el cual establece una equivalencia entre el Axioma de elección, y el teorema de Tychonoff.
Como es sabido, en la demostración del teorema de Tychonoff se utiliza el axioma de elección. Kelley probó en 1950 que el recíproco también es cierto, aunque en su demostración había un leve error corregido después por diversos autores.(Veáse [18]) El esquema de la demostración de Kelley es el siguiente:
Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos compactos, para cada $i \in I$ se considera el espacio $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ donde $Y_i = X_i \cup \{p\}$, con $p \notin X_i$ y $\mathcal{T}_i$ es la topologia cofinita sobre Y_i.
Nótese que $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ es un espacio compacto y por el Teorema de Tychonoff. $Y = \prod_{i \in I}(Y_i, \mathcal{T}_i)$ también lo es.
Kelley afirma que X_i es cerrado en Y_i (lo que evidentemente no es cierto en general), y de ello deduce que:

$$Z_i = p_i^{-1}(X_i) = X_i \times \prod_{j \neq i} Y_j$$

es cerrado en Y. A continuación basándose en la versión finita del axioma de elección, prueba que para todo $J \subset I$ finito, $\bigcap_{j \in J} Z_i \neq \emptyset$.
Concluye teniendo en cuenta que Y, por ser compacto, satisface la PIF, que:

$$\bigcap_{i \in I} Z_i = \prod_{i \in I} X_i = X \neq \emptyset$$

Pero veamos, que de hecho, Z_i no es cerrado en Y si X_i es infinito. En efecto, si lo fuese,

$$Z_i = \{p\} \times \prod_{j \neq i} Y_j$$

sería abierto en Y, no vacío, ya que $p \in Y_i \quad \forall i \in I$. Por tanto, existiría una familia finita de abiertos no vacíos O_{i_k} en Y_{i_k} $(i_k \in I,\ k = 1, 2, \cdots, n)$ tal que:

$$O_{i_1} \times \cdots \times O_{i_k} \times \prod_{i \neq i_k} Y_i \subset \{p\} \times \prod_{i \neq i_k} Y_i$$

Se tienen entonces dos opciones:

1. $i = i_k$, para algún k. Entonces $O_i = \{p\}$ no sería abierto en Y_i ya que $Y_i \backslash O_i = X_i$.

2. Para algún $i \notin \{i_1, \cdots, i_n\}$, $Y_i = \{p\}$ y sería $X_i = \emptyset$.

Corrección de la demostración de Kelley

Indicamos a continuación la corrección del resultado de Kelley, propuesto en [18].
Se considera sobre Y_i la topología $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, \{p\}, X_i, Y_i\}$. Como $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto, $Y = \prod Y_i$ también lo es. Además, X_i es cerrado en Y por la definición de $\mathcal{T}_i$, entonces $Z_i = p_i^{-1}(X_i)$ es cerrado en Y. Para cada $J \subset I$ finito, tomamos $x_i \in X_i$ $(\neq \emptyset)$(se usa el axioma de elección finito) y $x_i = p$. Si $i \notin J$ Entonces se tiene que:

$$\bigcap_{i \in J} Z_i = \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(X_i) = \prod_{i \in J} X_i \times \prod_{i \in I \backslash J} Y_i \neq \emptyset$$

Es decir, la familia de cerrados $\{Z_i\}_{i \in I}$ tiene la PIF en el espacio compacto Y; por tanto:

$$\bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(X_i) = \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$$

Nota. Obsérvese que para corregir la prueba de Kelley basta considerar cualquier topología que satisfaga la siguiente condición:
«*X_i es cerrado en Y_i, e Y_i es compacto*»
Por ejemplo se podía haber tomado $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, \{p\}, X_i\}$.

ver algunas referencias

Teorema 6.0.8 (Teorema de Kelley)**.** *Son equivalentes:*

1. *El Axioma de elección*

2. *El teorema de Tychonoff*

Capítulo 7

El espacio $\beta\mathbb{N}$

En este capítulo se expone la construcción de la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$, usando ultrafiltros, si bien dicha construcción sería válida para cualquier espacio discreto X. Recordemos, que la compactificación de un espacio consiste básicamente en «sumergir» un espacio topológico en uno que sea compacto. Esto es interesante debido a las propiedades que tienen los espacios compactos. En cierto sentido, para compactificar un espacio los que hacemos es evitar que haya sucesiones de puntos que «tiendan a infinito», para ello lo que hacemos, de alguna manera es añadir puntos a nuestro espacio, a los cuales converjan estas sucesiones.
Una de las compactificaciones más comunes y más simples en cierto sentido es la compactificación de Alexandroff. Consiste en compactificar un espacio X añadiéndole un solo punto que solemos llamar punto del infinito. Al espacio compactificado se le denota αX. En función de la topología que hubiera sobre X, definiremos la topología sobre αX. Ejemplos de compactificaciones que se construyen añadiendo más puntos al espacio son por ejemplo, la de $\mathbb{R}$ por dos puntos ($\{\pm\infty\}$) o la de $A = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \mid x \geq 0\}$ mediante los puntos de $\overline{A}$. De este modo, la compactificación de Stone Cech de X sería una compactificación «máxima» que consiste, intuitivamente, en añadir un punto por cada forma de «ir al infinito en X» de manera que βX sea T_2. Esta compactificación vamos a definirla mediante una propiedad universal ya que dotaremos a $\beta\mathbb{N}$ de una topología de forma que es una extensión compacta de $\mathbb{N}$ (que veremos más tarde que se puede identificar con $Ult(\mathbb{N})$) en la cual $\mathbb{N}$ es denso. Es el único espacio de Hausdorff compacto que extiende a $\mathbb{N}$ en el que $\mathbb{N}$ es denso y para el que para cada función real acotada sobre $\mathbb{N}$, se puede extender a una función continua en $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{T})$.
Intuitivamente podemos ver qué relación tienen los ultrafiltros con las compactificaciones ya que si X es un espacio discreto y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X, entonces $\mathcal{U} \to x$ si y solo si $\bigcap\{A \in \mathcal{U}\} = \{x\}$. Así pues, si X es infinito,

existen ultrafiltros libres sobre X y por tanto no convergen. Luego obtener βX supone añadir puntos a X para asegurar que estos ultrafiltros converjan. Es decir, para cada filtro libre sobre $\mathcal{U}$ se añade un nuevo punto $x_{\mathcal{U}}$ que puede interpretarse como el punto del infinito en $\bigcap\{A \in \mathcal{U}\}$ (Algo parecido a lo que supone añadir irracionales a $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ para asegurar la convergencia de sus sucesiones)

7.1. Estructura topológica en $\beta\mathbb{N}$

7.1.1. La compactificación de Stone-Cech mediante una propiedad universal

Empezaremos dando una definición de un cierto tipo de espacio topológico.

Definición 7.1.1. *Diremos que un espacio topológico X es completamente regular si para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que x no pertenece a F existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.*
Un espacio topológico X es de Tychonoff o $T_{3\frac{1}{2}}$ si es T_1 y completamente regular.

La forma habitual de definir βX para un espacio X es mediante la siguiente propiedad universal.

Definición 7.1.2. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$, la compactificación de Stone-Cech de $(X, \mathcal{T})$ es un par $(\beta X, \mathcal{T}')$ donde βX es un espacio T_2-compacto e $i : (X, \mathcal{T}) \to (\beta X, \mathcal{T}')$ una inmersión densa (i.e. tal que $i(X)$ es denso en βX) tal que se satisface la siguiente propiedad universal.*
Para cada aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}'')$ en un espacio T_2-compacto, existe una única aplicación continua $\overline{f} : \beta X \to Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ \beta X \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

7.1.2. La compactificación de Stone-Cech mediante ultrafiltros

En esta sección vamos a definir una topología $\mathcal{T}$ sobre el conjunto $Ult(\mathbb{N})$ de manera que el par $(Ult(\mathbb{N}), \mathcal{T})$ verifique la propiedad universal de la com-

pactificación de Stone-Cech. De esta manera podremos identificar $\beta\mathbb{N}$ con $Ult(\mathbb{N})$.
Empezaremos definiendo una estructura topológica en $Ult(\mathbb{N})$, para ello definiremos:

Definición 7.1.3. *Para cada $A \subseteq X$, notaremos*

$$[A] = \{ \mathcal{F} \in Ult(\mathbb{N}) \mid A \in \mathcal{F}\} = \{ \mathcal{F} \in Ult(\mathbb{N}) \mid \mathcal{F}_A \preceq \mathcal{F}\}$$

Vamos a ver primero algunas propiedades de los conjuntos que hemos definido.

Proposición 7.1.4. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $[A \cap B] = [A] \cap [B]$.
2. $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.
3. $Ult(\mathbb{N}) = [A] \cup [A^c]$.
4. $[A] = \emptyset \iff A = \emptyset$
5. $[A] = Ult(\mathbb{N}) \iff A = \mathbb{N}$
6. $[A] = [B] \iff A = B$

Demostración.

1. Veamos que $[A \cap B] \subseteq [A] \cap [B]$. Tomamos para ello $\mathcal{U} \in [A \cap B]$. Por definición $A \cap B \in \mathcal{U}$, y como $A \cap B \subseteq A, B$ y $\mathcal{U}$ es un filtro, se tiene que $A, B \in \mathcal{U}$; y por tanto, $\mathcal{U} \in [A] \cap [B]$, lo que implica que $[A \cap B] \subseteq [A] \cap [B]$. Por otro lado, si $\mathcal{U} \in [A] \cap [B]$, se tiene que $A, B \in \mathcal{U}$ y por la definición de filtro, $A \cap B \in \mathcal{U}$; lo que implica que $\mathcal{U} \in [A \cap B]$ satisfaciendo la inclusión contraria.

2. Si $\mathcal{U} \in [A \cup B]$, entonces $A \cup B \in \mathcal{U}$. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro se tiene que o bien $A \in \mathcal{U}$ o bien $B \in \mathcal{U}$; es decir, $\mathcal{U} \in [A]$ o $\mathcal{U} \in [B]$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{U} \in [A] \cup [B]$. Por otra parte, el recíproco es fácil de ver también por definición ya que si $\mathcal{U} \in [A] \cup [B]$ se tiene que o $A \in \mathcal{U}$, o $B \in \mathcal{U}$, que por ser $\mathcal{U}$ un filtro en cualquier caso se tiene que $A \cup B \in \mathcal{U}$, de donde se deduce la otra inclusión y por tanto la igualdad.

3. Es inmediato a partir de la caracterización de ultrafiltro (Proposición 3.0.3).

4. Se obtiene recordando que todo conjunto no vacío pertenece a algún ultrafiltro principal y de que el conjunto vacío no pertenece a ningún ultrafiltro.

5. Es consecuencia de 3 y 4.

6. Trivialmente si $A = B$, $[A] = [B]$ y el recíproco se sigue fácilmente ya que $\mathcal{U}_x \in [A]$ si y solo si $x \in A$. Repitiendo lo anterior con B en lugar de A se tiene el resultado.

lqd

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 7.1.5. *El conjunto* $\mathcal{B} = \{\ [A] \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ *es una base para una topología sobre* $Ult(\mathbb{N})$

Demostración. Llamaremos $\mathcal{T}$ a la topología generada por $\mathcal{B}$. Es claro que $Ult(\mathbb{N}) \in \mathcal{T}$, ya que $\mathcal{F}_{ind} = \{X\}$ es un filtro y se tiene que $[\{X\}] = Ult(\mathbb{N})$ ya que por definición de filtro, X pertenece a cualquiera. Además dados $[A], [B] \in \mathcal{B}$, si consideramos $[A] \cap [B]$, tenemos que $[A] \cap [B] = [A \cap B]$, y por lo tanto $[A] \cap [B] \in \mathcal{B}$, y es una base. *lqd*

Proposición 7.1.6. *Se tiene que* $Ult(\mathbb{N})$ *con esa topología es compacto y es de Hausdorff.*

Demostración. Haremos la demostración por pasos, en primer lugar veremos que es compacto y por último que es un espacio de Hausdorff.

1. Para ver que $(Ult(\mathbb{N}), \mathcal{T})$ es compacto basta ver que todo recubrimiento por abiertos admite un subrecubrimiento finito. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un recubrimiento de $Ult(\mathbb{N})$ que no verifique esto. Este recubrimiento será de la forma $\mathcal{R} = \{[A_\alpha] |\ \alpha \in I\}$, y como no tiene subrecubrimiento finito esto quiere decir que para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ se tiene que:

$$[A_{a_1} \cup \cdots \cup A_{a_n}] = [A_{a_1}] \cup \cdots \cup [A_{a_n}] \neq Ult(\mathbb{N}) = [X]$$

De aquí tenemos que $A_{a_1} \cup \cdots \cup A_{a_n} \neq X$, o lo que es lo mismo, $A^c_{a_1} \cap \cdots \cap A^c_{a_n} \neq \emptyset$. Como esto es para cualesquiera α_i tenemos que el conjunto $\{A^c_\alpha \mid \alpha \in I\}$, es subbase para un filtro sobre X, y por tanto hay un ultrafiltro que lo contiene. Llamemos a este ultrafiltro $\mathcal{U} \in Ult(\mathbb{N})$. Pero como $\mathcal{R}$ es un recubrimiento de $Ult(\mathbb{N})$ se tiene que $\exists \alpha_j \in I$ tal que $\mathcal{U} \in [A_{\alpha_j}]$. Pero como por definición de $[A_{\alpha_j}]$ se tiene que $A_{\alpha_j} \in \mathcal{U}$, y por construcción de $\mathcal{U}$ teníamos que $A^c_{\alpha_j} \in \mathcal{U}$;

tenemos por tanto que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, pero $A_{\alpha_j}, A^c_{\alpha_j} \in \mathcal{U}$, lo que es una contradicción. De donde se deduce que todo recubrimiento de $Ult(\mathbb{N})$, admite un subrecubrimiento finito, o lo que es lo mismo, que $(Ult(\mathbb{N}), \mathcal{T})$ es compacto.

2. Por último para ver que $(Ult(\mathbb{N}), \mathcal{T})$ es T_2, basta ver que dados dos ultrafiltros distintos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in Ult(\mathbb{N})$, se tiene que existen $A \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{V}$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Por tanto no existe un filtro que contenga a A y a B simultáneamente, lo que implica que $[A] \cap [B] = \emptyset$, habiendo encontrado así abiertos disjuntos en $\mathcal{T}$ que separan cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in Ult(\mathbb{N})$. Lo haremos por reducción al absurdo, si para todo $A \in \mathcal{U}$ y todo $B \in \mathcal{V}$ se tiene que su intersección es distinta de vacío, tenemos que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ es subbase para un filtro y por tanto aplicando la Proposición 3.0.2 hay un ultrafiltro que contiene a $\langle \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \rangle$ y por tanto contiene a $\mathcal{U}$ y a $\mathcal{V}$. Claramente por la maximalidad de los ultrafiltros, se tiene que entonces $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ lo que es una contradicción con que fueran ultrafiltros distintos.

<u>*lqd*</u>

Proposición 7.1.7. *Todo punto de* $\mathbb{N}$ *es aislado en* $Ult(\mathbb{N})$ *pero* $\mathbb{N}$ *es denso en* $Ult(\mathbb{N})$*. Dicho de otro modo, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *el conjunto* $\{\mathcal{F}_{\{n\}}\}$ *es abierto en* $Ult(\mathbb{N})$*, y la clausura del conjunto* $\{\mathcal{F}_{\{x\}} \mid x \in \mathbb{N}\}$ *es todo* $Ult(\mathbb{N})$*.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$. Por definición, $\mathcal{U} \in [\{n\}]$ si y solo si $\{n\} \in \mathcal{U}$ o lo que es lo mismo $\mathcal{U} = \mathcal{F}_n$, y por tanto $\{\mathcal{F}_n\}$ es un abierto básico.
Sea $\mathcal{V} \in Ult(\mathbb{N})$. Para cada entorno básico $[A]$ de $\mathcal{V}$, tenemos que $A \in \mathcal{V}$ y por tanto $A \neq \emptyset$. Tomando $x \in A$, tenemos que $A \in \mathcal{U}_x$, o lo que es lo mismo $\mathcal{U}_x \in [A]$. Por tanto hemos visto que dado un punto cualquiera de $Ult(\mathbb{N})$ y un entorno abierto suyo cualquiera, este interseca al conjunto $\{\mathcal{F}_{\{x\}} \mid x \in \mathbb{N}\}$ por lo que este conjunto es denso. <u>*lqd*</u>

Llegados a este punto es fácil ver que $(Ult(\mathbb{N}), \mathcal{T})$ verifican las propiedades de la propiedad universal de la compactificación de Stone-Cech, y por tanto, podemos identificar $\beta\mathbb{N}$ con $Ult(\mathbb{N})$. Por tanto, a partir de aquí usaremos indistintamente $\beta\mathbb{N}$ y $Ult(\mathbb{N})$

7.1.3. $Ult(X)$ como subespacio de un espacio producto

Veremos que la topología que hemos definido sobre $Ult(\mathbb{N})$ coincide con la que se obtiene viendo a $Ult(\mathbb{N})$ como subconjunto de un cierto producto cartesiano de espacios compactos con la topología producto. Aunque esta construcción del producto sirve para cualquier conjunto I, nosotros consideraremos el caso particular $I = P(X)$ y consideremos el conjunto $\{0,1\}$ como un espacio topológico discreto. Por el teorema de Tychonoff, el espacio $\{0,1\}^I = \prod_{\alpha\in I}\{0,1\}$ es compacto. Los abiertos básicos en este espacio son:

$$\{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \{0,1\}^I | x_{\alpha_1} = i_1, \cdots, x_{\alpha_n} = i_n\},$$

donde n es un número natural, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$, y $i_1, \cdots, i_n \in \{0,1\}$. Reordenando los elementos, podemos asumir que existe un $l \leq n$ tal que $i_1 = \cdots = i_l = 0$ y $i_{l+1} = \cdots = i_n = 1$. De esta manera, los abiertos básicos pueden ser denotados como

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_l; \beta_1, \cdots, \beta_m] := \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \{0,1\}^I | x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_l} = 0, x_{\beta_1}, \cdots, x_{\beta_m} = 1\}.$$

Podemos identificar el conjunto $\{0,1\}^I$ con la familia $P(I)$ de todos los subconjuntos de I, identificando cada conjunto $J \subseteq I$ con su *sucesión característica* $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \{0,1\}^I$ definida por

$$x_\alpha = \begin{cases} 1 & si \quad \alpha \in J \\ \\ 0 & si \quad \alpha \notin J \end{cases}$$

para todo $\alpha \in I$. Esta identificación transporta la topología producto de Tychonoff en $\{0,1\}^I$ a $P(I)$. Los abiertos básicos en $P(I)$ son de la forma

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_l; \beta_1, \cdots, \beta_m] = \{J \in P(I) | \alpha_1, \cdots, \alpha_l \notin J, \beta_1, \cdots, \beta_m \in J\}.$$

Esta es la topología producto en $P(I)$. Entonces el conjunto $Ult(X)$ es un subconjunto de $P(I) = P(P(X))$. La siguiente proposición afirma, en efecto, que si X es cualquier espacio discreto, y se repite en $Ult(X)$ la construcción realizada anteriormente para obtener una topología en $Ult(\mathbb{N})$, la topología obtenida coincide con la que se obtiene de la topología producto sobre $P(I)$, con $I = P(\mathbb{N})$.

Proposición 7.1.8. *Sea X un conjunto e $I = P(X)$. Consideramos el conjunto $P(I)$ con la topología producto. Entonces la topología de $Ult(X)$ coincide con la topología inducida en $Ult(X)$ como subconjunto de $P(I)$.*

Demostración. Consideramos la topología inducida en $Ult(X)$. Los abiertos básicos son las intersecciones de los abiertos en $P(I)$ con $Ult(X)$. Por lo visto más arriba, un abierto básico en $P(I)$ está determinado por unos elementos $A_1, \cdots, A_l, B_1, \cdots, B_m \in I = P(X)$, y los abiertos básicos de la topología inducida, son:

$$[A_1, \cdots, A_l; B_1, \cdots, B_m] = \{p \in Ult(X) | A_1, \cdots, A_l \notin p, B_1, \cdots, B_m \in p\}.$$

Tomemos $p \in Ult(X)$. Como p es un ultrafiltro, tenemos que las siguientes afirmación son equivalentes:

1. $A_1, \cdots, A_l \notin p, B_1, \cdots, B_m \in p$;
2. $A_1^c, \cdots, A_l^c, B_1, \cdots, B_m \in p$;
3. $A_1^c \cap \cdots \cap A_l^c \cap B_1 \cap \cdots \cap B_m \in p$.

Así llamando $A := A_1^c \cap \cdots \cap A_l^c \cap B_1 \cap \cdots \cap B_m$ vemos que el abierto básico es equivalente a

$$[A] := \{p \in Ult(X) | A \in p\}.$$

Esos son exactamente los abiertos básicos en la topología original en $Ult(X)$.

<u>*lqd*</u>

Entendiendo esto, la compacidad de $Ult(X)$ se sigue de forma natural.

Teorema 7.1.9. *El espacio $Ult(X)$ es compacto*

Demostración. Sea $I = P(X)$, y consideremos el espacio $P(I)$ con la topología producto. Ya que $P(I)$ es un espacio compacto por el Teorema de Tychonoff y la compacidad se hereda para cerrados, es suficiente con observar que $Ult(X)$ es un subconjunto cerrado de $P(I)$. Sea $q \in P(I) \backslash Ult(X)$. Mostraremos que q tiene un entorno disjunto con $Ult(X)$. De hecho cada motivo por el que q no es un ultrafiltro define un entorno abierto de q disjunto con $Ult(X)$. Por ejemplo:

1. Si $X \notin q$, entonces $q \in [X;]$, que es disjunto a $Ult(X)$.
2. Si $\emptyset \in q$, entonces $q \in [;\emptyset]$, que es disjunto a $Ult(X)$.
3. Si hay un conjunto $B \subseteq X$ tal que $B \supseteq A \in q$ y $B \notin q$, entonces $q \in [B, A]$, que es disjunto a $Ult(X)$.
4. Si existe $A \subseteq X$ tal que $A, A^c \in q$, entonces $q \in [;A, A^c]$ que es disjunto con $Ult(X)$.
5. Si existe $A \subseteq X$ tal que $A, A^c \notin q$, entonces $q \in [A, A^c;]$ que es disjunto con $Ult(X)$.
6. Si existen $A, B \subset X$ disjuntos con $A, B \in q$, entonces $q \in [;A, B]$ disjunto con $Ult(X)$.

<u>*lqd*</u>

7.2. Álgebra en $\beta\mathbb{N}$

Considerando el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$, vamos a proceder a extender esta operación a la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$. Para ello, definiremos la operación binaria $+ : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to 2^{2^{\mathbb{N}}}$ como sigue.

Definición 7.2.1. *Para $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$,*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \{\ n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}$$

donde $A - n = \{\ a - n \mid a \in A\} = \{y \mid y + n \in A\}$.

Detrás de esta definición de suma, podemos ver que como sería esperable, dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, se tiene que si $\mathcal{F}_{n_i} = \langle\{n_i\}\rangle$, entonces $\mathcal{F}_{n_1} + \mathcal{F}_{n_2} = \mathcal{F}_{n_1+n_2}$. Veámoslo:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}_{n_1} + \mathcal{F}_{n_2} &\iff \{\ n \mid A - n \in \mathcal{F}_{n_2}\} \in \mathcal{F}_{n_1} \\ &\iff n_1 \in \{\ n \mid A - n \in \mathcal{F}_{n_2}\} \\ &\iff A - n_1 \in \mathcal{F}_{n_2} \\ &\iff n_2 \in A - n_1 \\ &\iff n_2 + n_1 \in A \\ &\iff A \in \mathcal{F}_{n_1+n_2} \end{aligned}$$

Proposición 7.2.2. *Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{U} + \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, luego la operación $+$ es una operación binaria sobre $\beta\mathbb{N}$. Además es asociativa.*

Demostración. Veamos que $+$ es una operación binaria sobre $\beta\mathbb{N}$. Vamos a ver primero que $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ es un filtro.
Tenemos que $\{\ n \mid X - n \in \mathcal{V}\} = \{\ n \mid X \in \mathcal{V}\} = X \in \mathcal{U}$, por lo que $X \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Y de igual manera $\{\ n \mid \emptyset - n \in \mathcal{V}\} = \{\ n \mid \emptyset \in \mathcal{V}\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$, luego $\emptyset \notin \mathcal{U} + \mathcal{V}$.
Supongamos que $A, B \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$, tenemos que $A' := \{\ n \mid A - n \in \mathcal{V}\}, B' := \{\ n \mid B - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, luego $A' \cap B' \in \mathcal{U}$. Comprobando que $A' \cap B' \subseteq \{\ n \mid (A \cap B) - n \in \mathcal{V}\}$ se tendría que $A \cap B \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Veámoslo:

$$\begin{aligned} m \in A' \cap B' &\Rightarrow A - m, B - m \in \mathcal{V} \\ &\Rightarrow (A \cap B) - m \in \mathcal{V} \text{ (ya que } (A - m) \cap (B - m) = (A \cap B) - m) \\ &\Rightarrow m \in \{\ n \mid (A \cap B) - n \in \mathcal{V}\} \end{aligned}$$

Veamos que es un ultrafiltro y por tanto $\mathcal{U} + \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Tomemos $A \notin \mathcal{U} + \mathcal{V}$, se tiene pues que $\{\ n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$ y por ello $\{\ n \mid A - n \notin \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Ya que $(A - n)^c = A^c - n$ esto es lo mismo que $\{\ n \mid A^c - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ luego $A^c \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ es un ultrafiltro.

Para ver que + es asociativa veamos que:

$$A \in \mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{H}) \Longleftrightarrow \{n \mid \{m \mid A - n - m \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

y

$$A \in (\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{H} \Longleftrightarrow \{m \mid \{n \mid A - n \in \mathcal{H}\} - m \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

y así si se verifica lo siguiente la suma será asociativa. Ha de verificarse que:

$$\{ n \mid A - n \in \mathcal{H}\} - m = \{n \mid A - n - m \in \mathcal{H}\}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} x \in \{n \mid A - n \in \mathcal{H}\} - m &\Longleftrightarrow x + m \in \{n \mid A - n \in \mathcal{H}\} \\ &\Longleftrightarrow A - x - m \in \mathcal{H} \\ &\Longleftrightarrow x \in \{n \mid A - n - m \in \mathcal{H}\} \end{aligned}$$

Y con esto queda probado el resultado. *lqd*

Aunque hemos probado la conmutatividad de la suma en $\beta\mathbb{N}$ para los ultrafiltros principales, se puede probar que no lo es en general (Véase Teorema 4.27 de [?]).
Tras poner en $\beta\mathbb{N}$ una estructura topológica y otra algebraica, vamos a ver ahora la relación existente entre la operación binaria definida anteriormente y la topología definida sobre $\beta\mathbb{N}$.

Proposición 7.2.3. *Dado un $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, la aplicación $+_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, dada por $+_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ para todo $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, es continua.*

Demostración. Mostraremos que para todo abierto básico, su preimagen es abierto.

$$\begin{aligned} +_{\mathcal{V}}^{-1}([A]) &= \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} + \mathcal{V} \in [A]\} \\ &= \{\mathcal{F} \mid A \in \mathcal{F} + \mathcal{V}\} \\ &= \{\mathcal{F} \mid \{ n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{F}\} \\ &= [\{ n \mid A - n \in \mathcal{V}\}] \end{aligned}$$

lqd

La importancia de la continuidad de la adición es que nos permite asegurar que en $\beta\mathbb{N}$ hay un elemento idempotente (un elemento $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}+\mathcal{E} = \mathcal{E}$). La prueba funciona para cualquier semigrupo compacto dotado de una operación que sea continua a un lado.

Lema 7.2.4 (Lema del idempotente)**.** *Existe $\mathcal{E} \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E} + \mathcal{E} = \mathcal{E}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de los semigrupos compactos que están contenidos en $\beta\mathbb{N}$. Claramente $\mathcal{A}$ es no vacío ya que $\beta\mathbb{N} \in \mathcal{A}$, además está parcialmente ordenado por la inclusión. Toda cadena $\mathcal{C}$ tiene como cota inferior $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ que es no vacía y compacta ya que todos los $C \in \mathcal{A}$ son compactos y es fácil ver que es un semigrupo. Por el lema de Zorn existe un semigrupo compacto minimal A. Veamos que cualquier $\mathcal{E} \in A$ es idempotente.
Primero observemos que $A + \mathcal{E}$ es un semigrupo. Esto es así, ya que dados $A_1, A_2 \in A$ si $A_1 + \mathcal{E}$ y $A_2 + \mathcal{E}$ son elementos de $A + \mathcal{E}$ se tiene que $(A_1 + \mathcal{E}) + (A_2 + \mathcal{E}) = (A_1 + \mathcal{E} + A_2) + \mathcal{E}$, y $A_1 + \mathcal{E} + A_2 \in A$ ya que es suma de elementos de A y A es un semigrupo. Además es compacto (por la continuidad a la izquierda de la adición). Y como $\mathcal{E} \in A$, entonces $A + \mathcal{E} \subseteq A$, y la minimalidad de A implica que $A + \mathcal{E} = A$.
Consideremos ahora el conjunto $B = \{\ \mathcal{G} \in A \mid \mathcal{G} + \mathcal{E} = \mathcal{E}\}$. Nótese que $B \neq \emptyset$ ya que como $A + \mathcal{E} = A$ y como $\mathcal{E} \in A$, tiene que existir al menos un $A_{\mathcal{E}} \in A$ tal que $A_{\mathcal{E}} + \mathcal{E} = \mathcal{E}$ y por tanto $A_{\mathcal{E}} \in B$. Por continuidad de $+_{\mathcal{E}}$, B es compacto por ser $B = +_{\mathcal{E}}^{-1}(\mathcal{E})$. Y también es un semigrupo ya que $B_1 + \mathcal{E} = \mathcal{E}$ y $B_2 + \mathcal{E} = \mathcal{E}$ implican sustituyendo que $(B_1 + B_2) + \mathcal{E} = \mathcal{E}$. Como $B \subseteq A$, por minimalidad, $A = B$, luego como $\mathcal{E} \in A$, entonces $\mathcal{E} \in B$ y por definición de B, $\mathcal{E} + \mathcal{E} = \mathcal{E}$. <u>lqd</u>

Este resultado se conoce también en la literatura como lemma de Ellis-Numakura. Obsérvese que si un ultrafiltro es idempotente, entonces ha de ser libre. Ya que si un ultrafiltro es principal, entonces no puede ser idempotente.

Capítulo 8

Teoremas de tipo Ramsey

De un modo intuitivo, se suele decir que la teoría de Ramsey pretende demostrar, que en cualquier conjunto suficientemente grande siempre se pueden encontrar subconjuntos con cierto orden o estructura. Uno de los resultados que da origen a esta teoría debida a P. Ramsey [22] afirma (en su versión infinita) que dados un conjunto infinito X y una partición finita cualquiera de sus 2-subconjunto, existe un subconjunto infinito de X tal que todos sus 2-subconjuntos están en la misma clase de la partición. En el contexto de la Teoría de Números y directamente vinculados a los resultados de tipo Ramsey, encontramos el Teorema de Schur [24] y sus distintas generalizaciones recogidas en los Teoremas de Folkman–Rado–Sanders [10] y Hindman [15]. Todos ellos parten de una coloración finita del conjunto de los números naturales, es decir, una partición finita de $\mathbb{N}$, y demuestran que existe subconjunto monocromático $A \subset \mathbb{N}$ con todas sus sumas finitas también monocromáticas. Las demostraciones presentadas utilizan de nuevo la estructura de un ultrafiltro, esta vez idempotente, sobre los números naturales.

8.1. Coloraciones de grafos

Definición 8.1.1. *Denotaremos por $[V]^2$ al conjunto de todos los posibles 2-subconjuntos de V. Es decir, $[V]^2 = \{\ \{u, v\} \mid u, v \in V\}$.*

Definición 8.1.2. *Dado un conjunto no vacío V, y $A \subseteq [V]^2$, el par $G = (V, A)$ se llama grafo. Los elementos de $V = V(G)$ se llaman vértices de G y los elementos de $A = A(G)$ se llaman aristas de G. Para cada $v \in V$, llamaremos entorno de v al conjunto $N(v) = \{x \in V \mid \{v, x\} \in A\}$. Si $A = [V]^2$, diremos que el grafo es completo. En particular, el grafo completo de $n \in \mathbb{N}$ vértices se denota por K_n. Si consideramos $V' \subset V$ y $A' \subset (A \cap (V' \times V'))$ y diremos entonces que $H = (V', A')$ es un subgrafo de G.*

Definición 8.1.3. *Sean X y C conjuntos. Entonces una función $f : X \to C$ es una coloración de X por C. Si C es finito, diremos que f es una coloración finita.*
Si $G = (V, A)$ un grafo, entonces cuando $X = V$ diremos que f es una coloración por vértices de G y cuando $X = A$ diremos que f es una coloración por aristas de G. Sea $G = (V, A)$ un grafo y C un conjunto. Entonces una función $f : V \to C$ es una coloración por vértices propia de G si para cada $\{u, v\} \in A$ se tiene que $f(u) \neq f(v)$.

Los elementos de C pueden ser pensados como colores y tener por ejemplo $C = \{rojo, azul\}$ y definir la coloración de un grafo como una forma de colorear los vértices de este sin que haya dos vértices adyacentes del mismo color. Esta terminología proviene del problema de colorear mapas. Sin embargo el considerar C como un conjunto de colores (azul,rojo,etc...) sólo se utiliza si el número de colores es pequeño, normalmente se considera $C \subseteq \mathbb{N}$.

Definición 8.1.4. *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Al menor número $k \in \mathbb{N}$ tal que existe una coloración propia en un conjunto C tal que $|C| = k$ se le llama número cromático de G y se representa $\chi(G) = k$. Diremos que G es k-cromático.*

8.2. El Teorema de Ramsey

La primera vez que aparece este teorema es en el ámbito de la lógica formal y es publicado por Ramsey en [22], aunque más tarde se encuentran aplicaciones de él en diversas ramas de la matemática. La idea del enunciado y prueba con grafos se debe a Erdös y Szekeres y ha trascendido por su simplicidad y fácil lectura. Fue presentada y demostrada por ellos en [9]. Aunque hay una prueba original que emplea herramientas de la combinatoria, nosotros daremos aquí una prueba mediante ultrafiltros. Tenemos pues el siguiente teorema.

Teorema 8.2.1 (Teorema de Ramsey-Erdös-Szequeres[22, 9])**.** *Dado un grafo infinito completo, y una coloración finita de sus aristas, se tiene que existe un subgrafo completo infinito monocromático.*

Demostración. Llamaremos $G = (V, A)$ al grafo con $A = [V]^2$. Sea $c : [V]^2 \to \{1, 2, \cdots, k\}$ una k-coloración por aristas de G. Para cada $v \in V$ y para cada color $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ sea $A_i(v)$ el conjunto de los vértices adyacentes a v por una arista de color i. Entonces,

$$V \backslash \{v\} = A_1(v) \cup \cdots \cup A_k(v)$$

por ser G un grafo completo. Tomamos un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ cualquiera sobre V. Como el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es no principal, $V \backslash \{v\} \in \mathcal{U}$ y por tanto existe (un único) $A_i(v) \in \mathcal{U}$ que es infinito por ser $\mathcal{U}$ no principal.
Definiendo $\mathcal{X}(v) := i$ para cada $v \in V$, obtenemos una k-coloración de V.
Es fácil ver que la k-coloración $\mathcal{X}$ define una partición finita de los vértices de G de manera que si $V_j = \{v \in V \mid \mathcal{X}(v) = j\}$, tenemos que $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, podemos aplicar la Proposición 3.0.7 y tenemos que existe un $i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $V_i \in \mathcal{U}$ y es monocromático por construcción. Llamamos $A = V_i$. Vamos a mostrar que hay un subgrafo infinito con todas sus aristas de color i. Tomamos:

$$\begin{array}{rcl} v_1 & \in & A \\ v_2 & \in & A \cap A_i(v_1) \\ v_3 & \in & A \cap A_i(v_1) \cap A_i(v_2) \\ & \vdots & \end{array}$$

Esto se puede hacer ya que en cada paso, tomamos un elemento de una intersección finita de elementos de un filtro. Por ser un filtro, esta intersección nunca es vacía. El grafo completo con los vértices $\{ v_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ es monocromático de color i; para cada $n < m$, tenemos que $v_m \in A_i(v_n)$, y por tanto, $c(v_n, v_m) = i$, o lo que es lo mismo, la arista que une a v_n y a v_m es de color i. lqd

Obsérvese que en el grafo del enunciado del teorema anterior, este grafo puede tener un número no numerable de vértices, sin embargo el subgrafo que hemos encontrado con este teorema, será siempre numerable por construcción.
Tenemos también en [25] una conexión bastante más fuerte entre el Teorema de Ramsey y los ultrafiltros.

Lema 8.2.2. *Sea X un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X. Entonces son equivalentes:*

1. *Para cualquier coloración finita de X, existe un conjunto $G \in \mathcal{G}$ monocromático (Propiedad de Ramsey).*

2. *Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $G \in \mathcal{G}$ con $G \subseteq U$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Consideremos el ultrafiltro en las condiciones de las hipótesis. Dada una coloración finita sobre X, hay un conjunto monocromático en $\mathcal{U}$, que llamaremos $U \in \mathcal{U}$. Dado que por hipótesis tenemos que existe al menos un $G \in \mathcal{G}$ con $G \subseteq U$. Es claro que dicho G es monocromático.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que tenemos la propiedad de Ramsey. Sea

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \mid B \cap G \neq \emptyset \ \forall G \in \mathcal{G}\}$$

y sea $\mathcal{B}^+$ el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{B}^+$ es una base para un filtro. Claramente $X \in \mathcal{B}^+$ y es fácil ver que si $A, B \in \mathcal{B}^+$ entonces $A \cap B \in \mathcal{B}^+$ por construcción. Luego nos falta ver que $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$.
Tomaremos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}$. Particionaremos X en 2^k partes $\{C_S\}_{S \subseteq \{1,\ldots,k\}}$ de la siguiente manera:

$$x \in C_S \Longleftrightarrow x \in (\bigcap_{i \in S} A_i) \cap (\bigcap_{i \notin S} A_i^c)$$

Por la propiedad de Ramsey para algún $S \subseteq \{1, \ldots, k\}$ existe un $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subseteq (\bigcap_{i \in S} A_i) \cap (\bigcap_{i \notin S} A_i^c)$. Pero ya que $A_i \in \mathcal{B}$ $\forall i$, por construcción de $\mathcal{B}$ se tiene que $A_i \cap G \neq \emptyset$ $\forall i$ por lo que no puede tenerse para ningún $S \neq \{1, \ldots, k\}$ que $G \subseteq \bigcap_{i \notin S} A_i^c$. Luego ha de tenerse que $G \subseteq \bigcap_{i=1}^k A_i$, luego como $G \neq \emptyset$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^k A_i \neq \emptyset$ y por tanto $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$ y $\mathcal{B}^+$ es base para un filtro. Por ello existe un ultrafiltro $\mathcal{B}^+ \subseteq \mathcal{U}$ sobre X. Tomando $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $U^c \notin \mathcal{U}$ y por tanto $U^c \notin \mathcal{B}^+$ y $U^c \notin \mathcal{B}$. De aquí se deriva que existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \cap U^c = \emptyset$ lo que implica que $G \subseteq U$. lqd

Un ejemplo bien conocido que ilustra el lema anterior es el siguiente:

Ejemplo 25. El principio del palomar (cuando dividimos $\mathbb{N}$ en un número finito de partes, hay una parte infinita) corresponde al caso en el que $X = \mathbb{N}$ y $\mathcal{G} = \{G \subseteq \mathbb{N} \mid G \text{ es infinito}\}$. Podemos tomar un ultrafiltro libre cualquiera sobre $\mathbb{N}$ en el apartado 2) del lema anterior y usar la equivalencia dada.

8.3. El Teorema de Hindman

Definición 8.3.1. *Dado un conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ llamamos*

$$FS(A) = \{\sum_{i \in X} x_i \ |x_i \in A, X \subset \mathbb{N}, |X| < \infty\}$$

esto es, al conjunto de todas las posibles sumas finitas de elementos distintos de A.

Ejemplo 26. En el caso de que A sea finito se define de forma análoga y se pueden dar los siguientes ejemplos:

1. Sea $A = \{x, y\}$, claramente $FS(A) = \{x, y, x + y\}$.

2. Sea $A = \{x, y, z\}$, entonces $FS(A) = \{x, y, z, x+y, x+z, y+z, x+y+z\}$.

Teorema 8.3.2 (Teorema de Folkman-Rado-Sanders [10]). *Dada una coloración finita de $\mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, es posible encontrar n elementos distintos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$ de manera que el conjunto $FS(x_1, \cdots, x_n)$ es monocromático.*

Demostración. Sea $\mathcal{E}$ un ultrafiltro no principal e idempotente sobre $\mathcal{N}$.
Vamos a probar por inducción en n, que si $A \in \mathcal{E}$ entonces hay n elementos distintos $x_1, \cdots, x_n$ tales que $FS(x_1, \cdots, x_n) \subseteq A$. El caso $n = 1$ es trivial, por lo que vamos a suponer que se cumple para n y tomamos pues $A \in \mathcal{E}$. Como $\mathcal{E}$ es idempotente, tenemos que el conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{E}$ y por tanto $A^\star = A \cap \{x \in \mathbb{N} \mid \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in A\} \in \mathcal{E}\}$. En particular, es no vacío por lo que podemos tomar $x_1 \in A^\star$.
Esto implica que $x_1 \in A$ y que $\{y \in \mathbb{N} \mid x_1 + y \in A\} \in \mathcal{E}$, de nuevo $B = A \cap \{y \in \mathbb{N} \mid x_1 + y \in A\} \in \mathcal{E}$. Luego por hipótesis de inducción podemos encontrar n elementos distintos $x_2, \cdots, x_{n+1}$ tales que $FS(x_2, \cdots, x_{n+1}) \subseteq B$.
Es preciso ver ahora que si $z \in FS(x_1, \cdots, x_{n+1})$ entonces o bien $z \in FS(x_2, \cdots, x_{n+1}) \subseteq B \subseteq A$, o bien $z = x_1 + y$ con $y \in FS(x_2, \cdots, x_{n+1}) \subset B$ lo que significa por la definición de B que $z = x_1 + y \in A$. Es cualquier caso, $z \in A$ y como $z \in FS(x_1, \cdots, x_{n+1})$ era cualquiera, hemos probado que $FS(x_1, \cdots, x_{n+1}) \subseteq A$.
Usaremos ahora el hecho de que $\mathbb{N}$ esté coloreado.
Sea $A_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es de color } i\}$. Claramente los A_i son una partición finita disjunta de $\mathbb{N}$ por lo que aplicando la Proposición 3.0.7 tenemos que existe $j \in \{1, \cdots, k\}$ de manera que $A_j \in \mathcal{E}$. Tomamos entonces $A = A_j$ el cual es monocromático por construcción y habremos probado que $FS(x_1, \cdots, x_n)$ es monocromático.

<u>*lqd*</u>

Teorema 8.3.3 (Teorema de Hindman). *Dada una coloración finita de $\mathbb{N}$, es posible encontrar un conjunto de elementos distintos $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ de manera que el conjunto $FS(A)$ es monocromático.*

Demostración. Sea χ una coloración finita sobre $\mathbb{N}$. Construiremos inductivamente la sucesión $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$ y distintos $a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{N}$ con las propiedades de que $a_i \in A_{i-1}$ y $A_{i+1} \subseteq A_i - a_{i+1}$ y con χ constante en A_0.
Tomemos un ultrafiltro idempotente $\mathcal{F} = \mathcal{E} \in \beta\mathbb{N}$. Por la Proposición 3.0.7, hay un único color i tal que $A_0 \in \mathcal{E}$ con $A_0 := \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{X}(n) = i\}$. Obsérvese que A_0 es infinito ya que los ultrafiltros idempotentes son no principales.

Ahora para cualquier $B \subseteq \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $B' = \{n \mid B - n \in \mathcal{E}\}$. Si $B \in \mathcal{E}$, como $\mathcal{E}$ es idempotente por la definición de suma en $\beta\mathbb{N}$, se tiene que $B' \in \mathcal{E}$ y por ser un ultrafiltro se tiene que $B \cap B' \in \mathcal{E}$.
Por tanto, como $A_0 \in \mathcal{E}$, entonces $A_0' \in \mathcal{E}$ y así $A_0 \cap A_0' \in \mathcal{E}$. Entonces $A_0 \cap A_0' \neq \emptyset$ y podemos tomar, $a_1 \in A_0 \cap A_0'$. Como $\mathcal{E}$ es idempotente, $\{a_1\}^c \in \mathcal{E}$ ya que los ultrafiltros libres contienen al filtro cofinito por la Proposición 3.0.12. Además por la elección de a_1, tenemos que $a_1 \in A_0'$ y por tanto que $A_0 - a_1 \in \mathcal{E}$. Luego de todo lo anterior tenemos que $A_0 \cap (A_0 - a_1) \cap \{a_1\}^c \in \mathcal{E}$. Llamaremos ahora $A_1 = A_0 \cap (A_0 - a_1) \cap \{a_1\}^c$ y es trivial por construcción ver que $A_1 \subseteq A_0$, $a_1 \in A_0$, $A_1 \subseteq A_0 - a_1$ y $A_1 \in \mathcal{E}$. Además es claro también que si tomamos ahora cualquier elemento de A_1 será diferente de a_1. Podemos así por inducción, una vez definido A_n, tomar $a_{n+1} \in A_n \cap A_n'$ y definir $A_{n+1} = A_n \cap (A_n - a_{n+1}) \cap \{a_{n+1}\}^c$ y así tenemos las propiedades buscadas; $a_{n+1} \in A_n$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $A_{n+1} \subseteq A_n - a_{n+1}$ y $A_{n+1} \in \mathcal{E}$.
El conjunto $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, por la forma de construirlo, es de color i y sus sumas finitas son elementos de A_0, y por tanto, $FS(A)$ es monocromático. Ilustrémoslo con el siguiente ejemplo: Veamos que $a_7 + a_4 + a_3 \in A_0$. Tenemos que $a_7 \in A_6 \subseteq A_5 \subseteq A_4$, y como $A_4 \subseteq A_3 - a_4$, tenemos que $a_7 + a_4 \in A_3$, y como $A_2 \subseteq A_3 - (a_7 + a_4)$, de igual manera $a_7 + a_4 + a_3 \in A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$.

<u>lqd</u>

También es posible probar mediante el uso de ultrafiltros otro teorema interesante acerca de las particiones sobre $\mathbb{N}$, que fue conjeturado por Schur y demostrado por Van der Waerden. Aunque nosotros no daremos la prueba debido a que requiere de conocimientos de álgebra que se escapan a nuestro trabajo. Se puede consultar una prueba con ultrafiltros en [25].

Teorema 8.3.4 (Teorema de Van der Waerden)**.** *Para cada coloración finita de* $\mathbb{N}$*, hay progresiones aritméticas monocromáticas arbitrariamente largas.*

Capítulo 9

Teorema de Bruijn-Erdös

Podemos plantearnos la posibilidad de construir grafos con una cantidad no numerable de vértices y colorearlos. Para esto tomaremos como conjunto de vértices del grafo un conjunto no numerable como $\mathbb{R}$. A continuación vamos a considerar que dos vértices son adyacentes si tienen distancia euclídea 1. Es fácil ver que por tanto se tiene que cada vértice tiene grado exactamente 2. Esto es ya que

$$d(x,y) = 1 \Longleftrightarrow |x-y| = 1 \Longleftrightarrow y = x \pm 1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Vamos ahora a colorear los vértices con una coloración propia , *i.e.* colorear $\mathbb{R}$ de tal manera que dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x-y| = 1$ entonces x e y tengan colores distintos. Podemos por tanto hacer lo siguiente; consideraremos los intervalos de la forma $[k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$. De esta manera es fácil ver que en primer lugar los intervalos de esta forma recubren $\mathbb{R}$. Además es fácil observar que fijado $k_0 \in \mathbb{Z}$ si tomamos $x, y \in [k_0, k_0+1)$ se tiene que $|x-y| < 1$ y por tanto es posible colorear todos los puntos del intervalo $[k_0, k_0+1)$ del mismo color. Y es fácil ver también que dado un $y \in [k_0, k_0+1)$ cualquiera, se tiene que $y-1 \in [k_0-1, k_0)$ y que $y+1 \in [k_0+1, k_0+2)$, por tanto dichos intervalos los colorearemos de un segundo color. Y repitiendo el proceso para todo $k \in \mathbb{Z}$ podemos colorear fácilmente $\mathbb{R}$ verificando las condiciones necesarias con sólo dos colores.

Podemos verlo en la imagen siguiente

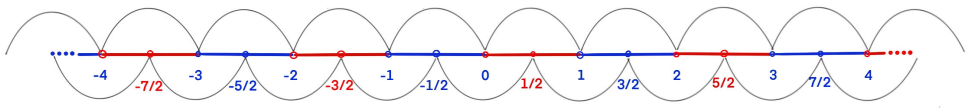


Figura 9.1: Representación de dos subgrafos sobre $\mathbb{R}$

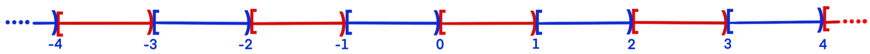


Figura 9.2: Vértices del grafo real coloreados con 2 colores

Al haber encontrado esa coloración por vértices del grafo usando sólo 2 colores, sabemos que su número cromático ha de ser menor o igual a 2. Y trivialmente, el número crómatico de un grafo cualquiera que tenga al menos una arista es mayor o igual que 2. Por tanto el del grafo que estamos considerando ha de verificar que $\chi(G) = 2$.
Como hemos visto, hemos podido acotar superiormente el número cromático de un grafo de infinitos vértices basándonos en que hay una cota que vale para el número cromático de todo subgrafo finito de este. Esto quizás puede parecer lógico intuitivamente, pero para poder hacerlo verdaderamente hay que probar el siguiente teorema probado por De Bruijn y Erdös en 1951 [3] que podría considerarse una especie de teorema de compacidad que claramente facilita mucho el trabajo. Aunque puede probarse utilizando el Teorema de Tychonoff tal y como se ve en [14], vamos a incluir la demostración mediante el uso de ultrafiltros.
Incluiremos aquí la prueba encontrada en [19] del teorema de De Bruijn y Erdös utilizando filtros por dos motivos, en primer lugar, debido claramente a que es de lo que trata este trabajo; además, lo haremos debido a que comparándolo con la prueba que utiliza el teorema de Tychonoff, es fácil ver que esta requiere de mucha menos formación previa en topología general y por tanto para el lector ajeno a este campo sea quizás más fácil su comprensión.

Teorema 9.0.1 (Teorema de De Bruijn y Erdös)**.** *Sea $G = (V, A)$ un grafo* *que para todo subgrafo finito H de G se tiene que $\chi(H) \leq d$. Entonces $\chi(G) \leq d$.*

Demostración. Llamaremos $X = \{W \subset V \mid W \text{ es finito}\}$ es decir, al conjunto de todos los subconjuntos finitos de vértices. Dado $W \in X$, llamaremos $X_W = \{U \in X \mid W \subseteq U\}$ y consideraremos el conjunto

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{X_W \mid W \in X\}$$

Vamos a ver que este conjunto es base para un filtro $\mathcal{F}$ sobre X. En concreto:

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid \exists W \in X \text{ tal que } X_W \subseteq Y\} = \langle\{X_W \mid W \in X\}\rangle$$

En primer lugar es trivial comprobar que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y por tanto de generar un filtro lo haría sobre X. Es fácil ver por definición que $\emptyset \notin \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, y que $\emptyset \neq \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. Vamos a probar que es cerrada para intersecciones finitas y así habremos probado que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ es base para un filtro sobre X.
Tomaremos para ello $X_{W_1}, X_{W_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ y vamos a ver que $X_{W_1} \cap X_{W_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$.
En primer lugar probaremos que $X_{W_1} \cap X_{W_2} = X_{W_1 \cup W_2}$

$$\begin{aligned} x \in X_{W_1} \cap X_{W_2} &\iff (x \in X, W_1 \subseteq x) \text{ y } (x \in X, W_2 \subseteq x) \\ &\iff x \in X, W_1 \cup W_2 \subseteq x \\ &\iff x \in X_{W_1 \cup W_2} \end{aligned}$$

Y claramente $W_1 \cup W_2 \in X$ y por tanto, por definición de $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ se tiene que $X_{W_1} \cap X_{W_2} = X_{W_1 \cup W_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ y por tanto queda probado que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ es base para el filtro $\mathcal{F}$ sobre X.
Luego por el lema de Zorn (o en este caso por la Proposición 3.0.2) existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Volviendo al grafo, por hipótesis tenemos que para todo subgrafo finito H de G se tiene que $\chi(H) \leq d$, y esto podemos reformularlo de la siguiente manera:
Para cualquier $W \in X$, podemos encontrar una coloración propia $f_W : W \to \{1, 2, \ldots, d\}$, *i.e.* una función $f_W : W \to \{1, 2, \ldots, d\}$ tal que $\forall v, w \in W$, si $\{v, w\} \in A$, entonces $f_W(v) \neq f_W(w)$.
Consideremos ahora para cada $w \in V$ e $i < d$ el conjunto

$$X_{w,i} = \{W \in X \mid w \in W \text{ y } f_W(w) = i\}.$$

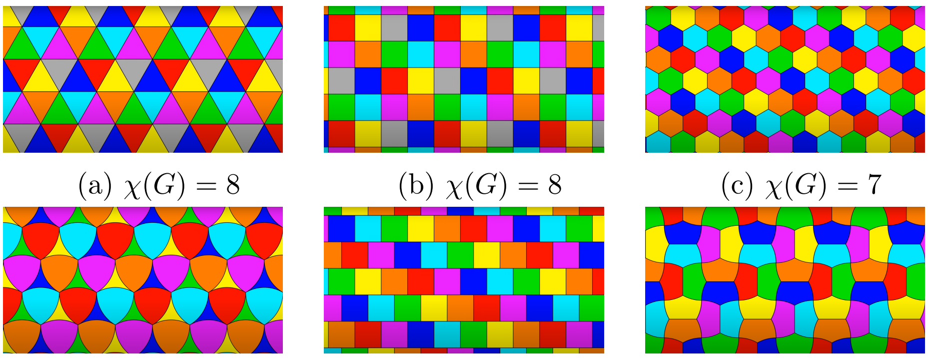
Se puede observar que $\bigcup_{i=1}^{d} X_{w,i} = X_{\{w\}} \in \mathcal{U}$, y además dado un $w \in V$ los $X_{w,i}$ son claramente disjuntos entre sí. Luego como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro existe un único $i_w \in \{1, 2, \ldots, d\}$ tal que $X_{w,i_w} \in \mathcal{U}$. Definiremos entonces

una función $f : V \to \{1, 2, \ldots, d\}$ definida como $f : v \mapsto i_v$ para cada $v \in V$. Veamos que f es una coloración propia por vértices del grafo y habremos probado el resultado.
Para ello veamos que dados $v, w \in V$ tales que $\{v, w\} \in A$ se tiene que $f(v) \neq f(w)$. Tomaremos pues $\{u, v\} \in A$. Tenemos que $X_{u,i_u}, X_{v,i_v} \in \mathcal{U}$, luego $X_{u,i_u} \cap X_{v,i_v} \in \mathcal{U}$ y por tanto $X_{u,i_u} \cap X_{v,i_v} \neq \emptyset$, luego podemos tomar $W \in X_{u,i_u} \cap X_{v,i_v}$. Tenemos necesariamente que $f_W(u) = i_u$ y $f_W(v) = i_v$ por la definición de $X_{w,j}$, y como f_W es una coloración de W y $\{u, v\} \in A$ se tiene que $f_W(u) \neq f_W(v)$ luego $i_u \neq i_v$ y $f(u) \neq f(v)$ comprobándose que f es una coloración del grafo G. Al emplear f solamente d colores, es claro que $\chi(G) \leq d$ y se tiene el resultado. *lqd*

Como hemos visto, este teorema facilita mucho las cosas a la hora de trabajar con grafos con infinitos vértices. Esto es así, ya que basta dar la coloración de la Figura 9.2 en la que se observa que todo subgrafo finito es 2-coloreable para asegurar que el grafo entero lo es. En particular por dar otro ejemplo más; consideremos el grafo $G = (V, A)$, donde $V = \mathbb{R}^2$ y $(u, v) \in A \Leftrightarrow d(u, v) = 1$. Este grafo es el que aparece en el problema de Hadwiger-Nelson [11, 12] el cual se enuncia de la siguiente manera:

¿Cuántos colores hacen falta para colorear todos los puntos del plano de forma que dos puntos cualesquiera a distancia 1 tengan colores distintos?

y es conocido como grafo de distancia unidad sobre el plano o simplemente grafo del plano.



(a) $\chi(G) = 8$ (b) $\chi(G) = 8$ (c) $\chi(G) = 7$

(d) $\chi(G) = 7$ (e) $\chi(G) = 7$ (f) $\chi(G) = 7$

Figura 9.3: Algunas teselaciones del grafo del plano con su número cromático. Fuente: `https://www.youtube.com/user/XorUnison`

Según [1], a día de hoy sólo se conoce que $\chi(G) \in \{5, 6, 7\}$, donde la co-

ta superior de $\chi(G) \leq 7$ se obtiene aplicando el teorema de Bruijn-Erdös probado anteriormente ya que basta dar una teselación del plano como en la Figura 9.3 de manera que todo subgrafo finito del grafo del plano que se pueda construir quede coloreado por el color de esos vértices en la teselación con $\chi(G) = 7$ colores como máximo. Si no hubiéramos probado el teorema anterior no podríamos asegurar que hubiera relación entre los números cromáticos de los subgrafos finitos y el del grafo del plano.
La cota inferior se conoce debido a que existen subgrafos del grafo del plano que tienen como número cromático 5 (Véase [1]) y por tanto no pueden ser coloreados con menos colores.

Capítulo 10

Filtros en Análisis no estándar

10.1. Ultrafiltros y medidas finitamente aditivas

Como ya dijimos en la introducción, los filtros son equivalentes a las redes y por tanto son una generalización de las sucesiones. Sin embargo se pueden considerar también los ultrafiltros, como el conjunto de todos los conjuntos «grandes» sobre X. Veremos a continuación ejemplos de esto.
En esta sección veremos que dado un ultrafiltro sobre X, este define una medida booleana sobre X. De esta manera tenemos que podemos decir intuitivamente, que un conjunto es «grande» si su complementario tiene medida nula considerando la medida inducida por el propio ultrafiltro, es decir, si el conjunto está en el ultrafiltro, entonces es «grande». De esta manera tenemos una justificación intuitiva de por qué algunos autores consideran a los ultrafiltros como una forma de decidir qué conjuntos son «grandes» y cuales no. Empezaremos pues, viendo una definición de medida finitamente aditiva.

Definición 10.1.1. *Una medida finitamente aditiva (o booleana) en X es una aplicación $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ tal que:*

1. $\mu(X) = 1$ *y* $\mu(\emptyset) = 0$.

2. *Si* $A_1, \cdots, A_n \subset X$ *son disjuntos,* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

Y vemos a continuación que como decíamos anteriormente, todo ultrafiltro define una de estas medidas.

Proposición 10.1.2. *Existe una biyección entre $Ult(X)$ y las medidas finitamente aditivas en X $\mu_B(X)$.*

Demostración. Sea $\phi : Ult(X) \to \mu_B(X)$ dada por $\phi(\mathcal{U}) = \mu_{\mathcal{U}}$, donde

$$\mu_{\mathcal{U}}(A) = \begin{cases} 0 & si \quad A \notin \mathcal{U} \\ \\ 1 & si \quad A \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Veamos que $\mu_{\mathcal{U}} \in \mu_B(X)$:

1. Como $X \in \mathcal{U}$, $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1$ y como $\emptyset \notin \mathcal{U}$, $\mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$.
2. Sean $A, B \subset X$ disjuntos. Si $A \in \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{U}$ y se cumple la propiedad 2) de la Definición 10.1.1.

   Por otro lado, si $A \notin \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$, entonces $X \backslash A \in \mathcal{U}$ y $X \backslash B \in \mathcal{U}$, luego

   $$(X \backslash A) \cap (X \backslash B) = X \backslash (A \cup B) \in \mathcal{U}.$$

   Por tanto, $A \cup B \notin \mathcal{U}$ y se tiene $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 0 = \mu_{\mathcal{U}}(B) = \mu_{\mathcal{U}}(A \cup B)$.

Por otra parte, sea $\psi : \mu_B(X) \to Ult(X)$ dada por $\psi(\mu) = \mu^{-1}(1)$. Veamos que $\mu^{-1}(1) \in Ult(X)$. Sea $A \subset X$ y veamos que o bien $A \in \mu^{-1}(1)$, o bien $A^c \in \mu^{-1}(1)$. De esta manera aplicando la Proposición 3.0.3 tendremos que $\mu^{-1}(1)$ es un ultrafiltro. Aplicando las propiedades de la Definición 10.1.1 tenemos que $\mu(X) = 1$ y que $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$. Por tanto, tenemos que:

$$\mu(A) + \mu(A^c) = 1$$

Y de aquí tenemos claramente que como la medida μ es booleana, tenemos que o bien $\mu(A^c) = 0$, $\mu(A) = 1$ y por tanto $A \in \mathcal{U}$. O bien $\mu(A) = 0$, $\mu(A^c) = 1$ y por tanto $A^c \in \mathcal{U}$. Por tanto, tenemos que $\mu^{-1}(1)$ es un ultrafiltro. Es inmediato comprobar que ϕ y ψ son aplicaciones inversas. *lqd*

Una vez visto esto, podemos considerar intuitivamente que dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$, un conjunto A es «grande» si $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 1$ y por tanto $A \in \mathcal{U}$. Esto nos será de utilidad en la siguiente sección a la hora de construir lo que llamamos números hiperreales.

10.2. Construcción de los números hiperreales

Vamos a presentar la construcción de los números hiperreales, que denotaremos $\mathbb{R}^*$. Para hacer esto, tomaremos un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ y X será el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$ es decir, el conjunto

de todas las funciones definidas de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Se podría intentar construir los hiperreales a partir de las sucesiones de reales usuales identificando las que coinciden a partir de un término en adelanteSin embargo, esta construcción se encuentra con el problema de que se pierde la propiedad de orden total y la estructura de cuerpo aunque mantiene un orden parcial, la estructura de anillo y ya aparecen los infinitésimos y los elementos infinitos. Esto ocurre porque la relación de equivalencia dada no hace suficientes identificaciones. Por esto utilizaremos la siguiente equivalencia:
Dados dos elementos $f, g \in X$, diremos que $f =_{\mathcal{U}} g$ si f y g coinciden en un conjunto «grande» de valores, o formalmente,

$$f =_{\mathcal{U}} g \iff \{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}.$$

Es fácil ver que la relación $=_{\mathcal{U}}$ es una relación de equivalencia. Pues bien, los hiperreales son las clases de equivalencia de X modulo $=_{\mathcal{U}}$, es decir, $\mathbb{R}^* := X/ =_{\mathcal{U}}$. Para que los hiperreales sean una extensión de $\mathbb{R}$, se identifica cada número real $r \in \mathbb{R}$ con la clase de equivalencia de la función $f_r \in X$ donde $f_r(n) = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puede uno observar que la relación de equivalencia $=_{\mathcal{U}}$ depende del ultrafiltro $\mathcal{U}$ elegido, por lo que la construcción de los hiperreales depende del ultrafiltro $\mathcal{U}$ elegido sobre $\mathbb{N}$ y no es única. En efecto, el cociente por diferentes ultrafiltros podría dar lugar a versiones no isomorfas. Definiremos por esto, la conocida Hipótesis del Continuo.

Proposición 10.2.1 (Hipótesis del Continuo)**.** *No existe ningún conjunto A tal que su cardinal cumpla que:*

$$\aleph_0 \leq |A| \leq 2^{\aleph_0}$$

Asumiendo esta Hipótesis del Continuo, todas las versiones de $\mathbb{R}^*$ son isomorfas, por un resultado de Erdös, Guillman y Henriksen en 1955. No veremos esto en este trabajo, se puede consultar en [**?**, 17]
A continuación, definiremos una relación de orden en $\mathbb{R}^*$, veremos que es una relación de orden total y posteriormente dotaremos a $\mathbb{R}^*$ de dos operaciones para que tengamos una estructura de cuerpo totalmente ordenado.
Dados $f, g \in X$ diremos que $f <_{\mathcal{U}} g$ si $\{ n \mid f(n) < g(n)\} \in \mathcal{U}$. De idéntica manera definiremos $f \leq_{\mathcal{U}} g$, $f \geq_{\mathcal{U}} g$ y $f >_{\mathcal{U}} g$.

Proposición 10.2.2. *La relación $\leq_{\mathcal{U}}$ es un orden total sobre $\mathbb{R}^*$.*

Demostración. Se puede ver fácilmente que $\mathbb{N} = \{ n \mid f(n) < g(n)\} \cup \{ n \mid f(n) = g(n)\} \cup \{ n \mid f(n) > g(n)\}$ y por tanto aplicando la Proposición 3.0.7, dados $f, g \in X$, siempre se verifica una de las afirmaciones siguientes:

1. $f <_{\mathcal{U}} g$
2. $f =_{\mathcal{U}} g$
3. $f >_{\mathcal{U}} g$

Por tanto es fácil ver que es un orden total. *lqd*

Las operaciones las definimos punto a punto de tal manera que dadas dos funciones $f, g \in X$ definimos $(f+g) \in X$ tal que $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De la misma manera haremos para $(f-g), (f \cdot g)$ y (f/g).

Proposición 10.2.3. $(\mathbb{R}^*, +, 0, \cdot, 1)$ *es un cuerpo totalmente ordenado.*

Además de contener a $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}^*$ posee elementos no estándar, en particular se tiene que contiene elementos infinitos, e infinitesimales. Veamos primero los elementos infinitos.

Teorema 10.2.4. $\mathbb{R}^*$ *no es arquimediano; existe* $\omega \in \mathbb{R}^*$ *tal que* $n < \omega$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$

Proposición 10.2.5. *Existe* $\omega \in \mathbb{R}^*$ *tal que* $r <_{\mathcal{U}} \omega$ *para todo* $r \in \mathbb{R}$

Demostración. Consideremos por ejemplo $\omega = [f] \in \mathbb{R}^*$ donde f está definida como $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos un número real $r \in \mathbb{R}$. Es claro que hay un $m \in \mathbb{N}$ tal que $r < m$ luego claramente para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $m < k$, $r < k$. Luego $f_r(n) < f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre, $\{n \mid n > m\} \in \mathcal{U}$ ya que su complementario es finito y los ultrafiltros libres contienen al filtro cofinito por la Proposición 3.0.12 luego $f_r <_{\mathcal{U}} f$ y por tanto, abusando de notación $r = r^* = [f_r]$, $r <_{\mathcal{U}} \omega$. Como esto fue para cualquier $r \in \mathbb{R}$, se tiene el resultado. *lqd*

A ω se le llama elemento infinito. Además, se tiene que este elemento infinito es positivo pero de igual manera se puede definir un elemento negativo infinito.
Dado un elemento positivo infinito, $\omega \in \mathbb{R}^*$ entonces $1^*/\omega$ es un infinitesimal, es decir, es un elemento positivo que no es cero pero es más pequeño que cualquier cantidad $0 < r \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, si ω es el construido en la demostración anterior se tiene que $1^*/\omega$ es la función $g \in X$ definida como $g(n) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Damos a continuación una definición que usaremos más tarde:

Definición 10.2.6. *Dados* $f, g \in X$; f *está infinitamente cerca de* g *si* $f - g$ *es infinitesimal o es* 0.

Con esta definición podemos apreciar un hecho importante sobre $\mathbb{R}^*$, y es que aunque contiene muchos elementos no-estándar, todo hiperreal o es infinito, o esta infinitamente cerca de un real estándar. Por ello podemos definir la parte estándar de un hiperreal f como sigue:

Definición 10.2.7. *La parte estándar de un hiperreal f, denotada $st(f)$ se define como:*

a) Si f positivo e infinito, entonces $st(f) = \infty$

b) Si f negativo e infinito, entonces $st(f) = -\infty$

c) Si f es finito, $st(f) = r$ donde r es el único $r \in \mathbb{R}$ tal que $f - f_r$ o es 0, o es infinitesimal.

Vamos a calcular ahora la derivada F' de una función F utilizando los infinitesimales de $\mathbb{R}^*$. La fórmula que utilizaremos será la siguiente:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Donde h es un infinitesimal en $\mathbb{R}^*$. Como esto nos dará un hiperreal, para obtener un número real estándar solo hay que hacer la parte estándar del resultado de tal manera que:

$$st(\frac{F(x^* + h) - F(x^*)}{h})$$

Calcularemos la derivada ahora de $F(x) = x^2$, tomando $h = [g] \in \mathbb{R}^*$ donde $g \in X$ está definida como $g(n) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos pues que:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= st(\tfrac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h}) \\
&= st(\tfrac{(x^*+h)^2-(x^*)^2}{h}) \\
&= st(\tfrac{x^{*2}+h^2+2\cdot x^*\cdot h-x^{*2}}{h}) \\
&= st(\tfrac{h^2+2\cdot x^*\cdot h}{h}) \\
&= st(h + 2 \cdot x^*) \\
&= 2 \cdot x
\end{aligned}$$

Si ahora consideramos $F(x) = x^3$ tenemos de igual modo que:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= st(\tfrac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h}) \\
&= st(\tfrac{(x^*+h)^3-(x^*)^3}{h}) \\
&= st(\tfrac{x^{*3}+h^3+3\cdot(x^*)^2\cdot h+3\cdot x^*\cdot h^2-x^{*3}}{h}) \\
&= st(\tfrac{+h^3+3\cdot(x^*)^2\cdot h+3\cdot x^*\cdot h^2}{h}) \\
&= st(h^2 + 3 \cdot (x^*)^2 + 3 \cdot x^* \cdot h) \\
&= 3 \cdot x^2
\end{aligned}$$

Como era de esperar, hemos comprobado que el cálculo de derivadas realizado de esta manera es equivalente al cálculo de derivadas de la forma usual a través de la definición de límites. Tenemos pues que la construcción de los hiperreales de esta forma ha permitido definir formalmente los infinitesimales utilizados por Leibniz en su cálculo infinitesimal. Podemos decir que nos ha permitido hacer una justificación *a posteriori* de los procedimientos realizados por él.

Bibliografía

[1] Barril Pizarro, Sergio. Coloración del plano: el problema de Hadwiger-Nelson. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Barcelona. España. `http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/148597/3/memoria.pdf`

[2] Bourbaki, Nicolas. *Topologie générale: Chapitres 1 à 4. Vol. 3.* Springer Science Business Media, (2007).

[3] Bruijn, NG de, y P. Erdos. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Indigationes Mathematicae* 13 (1951): 371-373.

[4] Cartan, Henri. *Filtres et ultrafiltres.* Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences, Paris 205 (1937): 777-779.

[5] Cartan, Henri. *Théorie des filtres.* CR Acad. Sci. Paris 205 (1937): 595-598.

[6] Clark, Pete L. Convergence. Universidad de Georgia. `https://web.archive.org/web/20190818155003/http://math.uga.edu/~pete/convergence.pdf`.

[7] Dasser, Abdellatif. *The Use Of Filters In Topology.* (2004) `https://stars.library.ucf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1176&context=etd`

[8] Dontchev, J. On superconected spaces, *SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes*, 20 (1994), 345-350.

[9] Erdös, Paul, y George Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio mathematica* 2 (1935): 463-470.

[10] Fernández-Bretón, David J. Using ultrafilters to prove Ramsey-type theorems. *The American Mathematical Monthly* 129.2 (2022): 116-131.

[11] Gardner, M. A new collection of "brain teasers", *Scientific American* 206 (1960), 172–180.

[12] H. Hadwiger, Ungelöste Probleme, *Nr. 11, Elemente der Mathematik* 16 (1961), 103–104.

[13] Hausdorff, Felix. *Set theory. Vol. 119.* American Mathematical Soc., 2005.

[14] Hernández, Fernando y Pelayo Gómez, José de Jesús. El número cromático de Borel. Posgrado conjunto en ciencias matemáticas. Universidad de México. (2013) http://xamanek.izt.uam.mx/coloquio/2013/Platicas/Pelayo.pdf

[15] Hindman, Neil. *Finite sums from sequences within cells of a partition of N.* Journal of Combinatorial Theory, Series A 17.1 (1974): 1-11.

[16] Hindman, Neil, and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-ˇCech compactification.* Algebra in the Stone-Cech Compactification. de Gruyter, 2011.

[17] Ibarlucía, Tomás. Ultraproductos de estructuras finitas. Tesis de licenciatura. Universidad de Buenos Aires. (2012) http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2012/Ibarlucia_Tomas.pdf

[18] Kum, S. A correction of Kelley's proof on the equivalence between the Tychonoff product theorem and the axiom of choice, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, **16(2)** (2003) 75–78.

[19] Lambie-Hanson, Chris. https://pointatinfinityblog.wordpress.com/2017/01/10/ultrafilters-viii-chromatic-compactness/

[20] Lugo C., Óscar Andrés y Suárez, Deiver. Principios matemáticos de los hiperreales. Trabajo de Grado. Universidad del Tolima. Colombia. (2014) https://web.archive.org/web/20170810064328/http://repository.ut.edu.co/bitstream/001/1179/1/RIUT-BFA-spa-2014-%20Principios%20Matematicos%20De%20Los%20Hiperreales.pdf

[21] Pérez Hernández, Antonio. Filtros y sus aplicaciones. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Murcia. (2013) https://webs.um.es/beca/Investigacion/TFM_PEREZ%20HERNANDEZ.pdf

[22] Ramsey, Frank P. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society,* (1930). 264-286

[23] Rubiano, G. *Topología general*, Universidad Nacional de Colombia , Bogotá, (2000).

[24] Schur, Issai. *Uber die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen.* (1912).

[25] Tsaban, Boaz. Numbers and Colors: A tour of Ramsey Theory. `https://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/RT/Book/BookSkeleton.pdf`

[26] Tychonoff, Andrei. *Über die topologische Erweiterung von Räumen.* Mathematische Annalen 102.1 (1930): 544-561.

[27] Villaescusa Almagro, Javier. El teorema de Hindmann y el teorema de Van der Waerden. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Murcia. (2020) `https://webs.um.es/joserr/miwiki/lib/exe/fetch.php?media=villaescusaalmagro-tfg.pdf`

Todos los enlaces estaban disponibles a 24/06/2022.