# EL POLINOMIO DE BERNSTEIN-SATO

**Miguel Navarro Castro**

# EL POLINOMIO DE BERNSTEIN-SATO

Miguel Navarro Castro

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Alberto Castaño Domínguez

# Índice general

# Presentación

## Resumen

En este trabajo hemos recopilado secciones de artículos de varios matemáticos para definir el polinomio de Bernstein. En primer lugar, definimos el álgebra de Weyl, que junto a algunos operadores y funciones nos ayudaran a definir filtraciones. Estas filtraciones son útiles para definir un tipo especial de módulos, los módulos holónomos, en los cuales somos capaces de definir el polinomio de Bernstein-Sato. Y para finalizar, daremos algunas propiedades y ejemplos de como calcularlo en el caso de polinomios cuasi-homogéneos.

In this work we have compiled work from other mathematicians to define the Bernstein-Sato polynomial. First, we define the Weyl algebra, over which we define some filtrations with the help of some order functions. Those filtrations are useful to define a special type of modules, holonomic ones, that lead us to define the Bernstein-Sato polynomial. Finally, we give some of its properties and concrete examples, including the case of quasihomogeneous polynomials.

## Introducción

El polinomio de Bernstein-Sato es una construcción matemática que facilita el estudio de determinadas integrales u operadores diferenciales. Se toma su nombre de los matemáticos Joseph Bernstein y Mikio Sato, que lo descubrieron en 1971 y 1972. Cuyo papel es importante en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales y está estrechamente vinculado a la construcción de $D$-módulos. Finalmente, permite demostrar la regularidad de ciertas construcciones de la física cuántica de campos.

La introducción de los polinomios de Bernstein-Sato fue motivada inicialmente por un problema planteado por Israel Gelfand en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1954 en Amsterdam:

*"Si es una función analítica real, entonces podemos construir el objeto para cualquier complejo. Como función, es continua según donde es de parte real positiva y analítica en donde es de parte real positiva."*

Gelfand luego pregunta: *"¿podemos extendernos analíticamente a todo el plano complejo?"*

Para responder a esta pregunta, Sato introdujo el polinomio, que Bernstein ha demostrado que existe en general. Desde entonces, la construcción se ha extendido a variedades algebraicas generales y se conocen varios algoritmos para determinar polinomios de Bernstein-Sato en casos de interés, en particular, lo veremos para los polinomios cuasi-homogéneos.

Antes de llegar al polinomio de Bernstein necesitamos construir una serie de herramientas. Entre ellas necesitamos definir el álgebra de Weyl ($A_n$), el anillo de operadores diferenciales lineales; donde posteriormente definiremos y haremos uso de las diferentes filtraciones en el álgebra de Weyl y en los $A_n$-módulos a la izquierda. Gracias a estas filtraciones podremos estudiar estructuras graduadas que nos generarán la **variedad característica**, la dimensión y la multiplicidad de un $A_n$-módulo finitamente generado.

Gracias a lo anterior J. Bernstein pudo desarrollar diferentes resultados, entre ellos cabe destacar que probó que el $A_n$-módulo de funciones racionales, con polos sobre una hipersuperficie en $\mathbb{C}^n$, es holónomo. Gracias a J. Bernstein podemos introducir el polinomio de Bernstein (conocido también como el polinomio de Bernstein-Sato) asociado a un polinomio $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Dada $f$, asociada a esa $f$ existe una función polinómica en una variable $b_f(s)$ llamada el polinomio de Bernstein-Sato, haciendo $s$ referencia a la potencia $f^s$.

El contenido de las notas es el siguiente. En el primer capítulo definiremos el álgebra de Weyl y a partir de ahí construiremos los operadores y unas aplicaciones que nos ayudarán a clasificar los elementos del álgebra. En este capítulo usaremos materiales de [CJ10].

En el segundo capítulo vamos a definir las filtraciones sobre el álgebra de Weyl, con las cuales podremos definir unos anillos graduados, en estos anillos daremos una serie de propiedades. En particular, vamos a definir unas filtraciones que generan un anillo graduado finitamente generado, las buenas filtraciones. En este capítulo usaremos los materiales de [CJ10] y [Cou95].

En el tercer capítulo el objetivo es definir los módulos holónomos, para ello definiremos una serie de elementos que nos ayudarán a entender mejor cada cosa. En este capítulo usaremos los materiales de [CJ10].

En el cuarto capítulo definiremos el polinomio de Bernstein-Sato y mencionaremos propiedades y ejemplos del calculo del polinomio de Bernstein-Sato para el caso de polinomios cuasi-homogéneos. En este capítulo hemos usado los materiales de [CJ10] y [Gra10].

# 1 El álgebra de Weyl

## 1.1 Operadores diferenciales lineales

Comenzaremos con la primera sección, en la que vamos a trabajar con el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$ como base, aunque eso no significa que las definiciones que demos no nos sirvan para los otros cuerpos.

Sea $n \geq 1$ un entero y sea $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n$ variables con coeficientes complejos.

Definimos $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$, el anillo de endomorfismos $\mathbb{C}$-lineales de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Además podemos observar que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ no es un anillo conmutativo con unidades, pues el producto se define con la composición de endomorfismos.

*Observación* 1.1.

1. Sea $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ un polinomio. Definimos la multiplicación por $f$

$$\phi_f : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}],$$

definida por $\phi_f(g) = fg$, para todo $g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Es un endomorfismo, al cual a continuación abreviaremos escribiendo $f$ en vez de $\phi_f$.En particular, la unidad del anillo $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$ es la identidad que coincide con $\phi_1$, que denotaremos de ahora en adelante como 1, para evitar confusiones.

2. La derivada parcial respecto a $x_i$

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_i}} \mathbb{C}[\mathbf{x}]$$

es también un endomorfismo. A partir de ahora denotaremos a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ como $\partial_i$ para $i \in \{1.\dots n\}$. Luego para cualquier $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ tenemos $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

**Definición 1.1.** *Sea $n \geq 1$ un entero. La $n$-ésima álgebra de Weyl compleja, denotada por $A_n(\mathbb{C})$, es la $\mathbb{C}$-subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\boldsymbol{x}])$ generada por los endomorfismos*

$$x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n.$$

*Usaremos la convención $A_0 = \mathbb{C}$ y simplificaremos la escritura de $A_n(\mathbb{C})$ como $A_n$.*

*Observación 1.2.* Un elemento de $A_n$ se puede expresar como una combinación lineal finita con coeficientes en $\mathbb{C}$ de productos de generadores $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$. Cada una de estos elementos representa el endomorfismo que resulta de componer los generadores que aparecen en él.

Para cualquier $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ tenemos que

$$(\partial_i \circ x_i)(f) = \partial_i(x_i f) = f + (x_i \circ \partial_i)(f)$$

Esto significa que la igualdad $\partial_i \circ \phi_{x_i} = \phi_{x_i} \circ \partial_i + 1$ se cumple en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$, por tanto en $A_n$. En particular, $A_n$ es un anillo no conmutativo para n positivo.

En general, para cualesquiera $f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, y $1 \leq i \leq n$ tenemos

$$(\partial_i \circ g)(f) = \partial_i(gf) = \partial_i(g)f + (g \circ \partial_i)(f)$$

Esto significa que la igualdad $\partial_i \circ g = g \circ \partial_i + \partial_i(g)$ se cumple en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}])$, por tanto en $A_n$. A esta última igualdad se la conoce como la regla de Leibniz.

*Proposición 1.1.* Las siguientes igualdades se cumplen en $A_n$:

1. $\partial_i \circ x_j = x_j \circ \partial_i$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$.
2. $\partial_i \circ \partial_j = \partial_j \circ \partial_i$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.
3. $x_i \circ x_j = x_j \circ x_i$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

*Demostración.*

1. Por definición tenemos que $\partial_i \circ x_j = \partial_i(x_j) + x_j \circ \partial_i$, pero como $\partial_i(x_j) = 0$, pues $i \neq j$, tenemos entonces la igualdad deseada.
2. Esta segunda igualdad se obtiene por definición de las derivadas cruzadas, ya que son funciones $C^\infty$ las que vamos a usar, pues son polinomios. Por lo tanto como son funciones diferenciables, sabemos que las derivadas cruzadas deben ser iguales.
3. Recordemos que $\phi_{x_i} = x_i$ y que $\phi_{x_j} = x_j$, sustituyendo entonces en nuestra igualdad tenemos
$$\phi_{x_i} \circ \phi_{x_j} = x_i x_j = x_j x_i = \phi_{x_j} \circ \phi_{x_i}$$
Pues el producto de polinomios es conmutativo.

∎

*Ejemplo* 1.1. Veamos algunos ejemplos de lo descrito en lo anterior. Escogiendo $i = 1$ y $j = 2$ en $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, vamos a a ver con un ejemplo la parte uno de la proposición anterior. Tomando $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$,

$$(\partial_2 \circ \phi_{x_1})(f) = \phi_{\partial_2(x_1)}(f) + (\phi_{x_1} \circ \partial_2(f)).$$

Pero el primer miembro del segundo sumando es 0, por tanto, hemos comprobado que se da sea quien sea el $f$.

*Proposición* 1.2. La aplicación definida de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ en $A_n$ por $f \mapsto \phi_f$ es un homomorfismo inyectivo de anillos.

*Demostración.* Comencemos con las siguientes cadenas de igualdades:

$$(f + g)h = fh + gh = f(h) + g(h),$$

$$fg(h) = (fg)h = f(gh) = f(g(h)) = (f \circ g)(h).$$

La cual se verifica para cualquier $f, g, h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$.

A continuación veremos la inyectividad, para ello comprobaremos que el único elemento en el $\mathrm{Ker}(\phi)$ es la aplicación nula.

Que la aplicación nula está en el núcleo de dicha aplicación es trivial pues $\phi_0(p)) = 0p = 0$ para todo $p \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, veamos ahora que no puede estar otro elemento.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe un elemento no nulo $g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ tal que $g(h) = gh = 0$ para toda $h$, pero como sabemos que $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ es un D.I, entonces es trivial la contradicción. Por lo tanto el único elemento en el $\mathrm{Ker}(\phi)$ es 0, luego la aplicación es inyectiva.

∎

*Observación* 1.3. Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ escribiremos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, para denotar el producto de monomios en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ como los correspondientes elementos en $A_n$. Además denotaremos $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \in A_n$.

Llamaremos monomio a un elemento $x^\alpha \partial^\beta \in A_n$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

*Proposición* 1.3.

1. Dados $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ y $\beta \in \mathbb{N}^n$, el producto $\partial^\beta f$ en $A_n$ satisface la igualdad

$$\partial^\beta f = \sum_{\sigma \ll \beta} \binom{\beta}{\sigma} \partial^\sigma(f) \partial^{\beta - \sigma},$$

donde $\sigma \ll \beta$ significa que $\sigma_i \leq \beta_i$ para $i = 1, \dots, n$, y $\binom{\beta}{\sigma} = \frac{\beta!}{\sigma!(\beta-\sigma)!}$ con $\beta! = \beta_1! \dots \beta_n!$

2. Si $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ entonces tenemos que $\partial^\beta(x^\gamma) = \beta!\binom{\gamma}{\beta}x^{\gamma-\beta}$ donde $\binom{\gamma}{\beta} = 0$ si la relación $\beta \ll \gamma$ no se cumple.
3. Si $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}^n$ entonces tenemos

$$x^\alpha \partial^\beta x^{\alpha'} \partial^{\beta'} = x^{\alpha+\alpha'}\partial^{\beta+\beta'} + \sum_{\sigma \ll \beta, \sigma \ll \alpha'} \sigma! \binom{\beta}{\sigma}\binom{\alpha'}{\sigma} x^{\alpha+\alpha'-\sigma}\partial^{\beta+\beta'-\sigma}.$$

*Demostración.*

1. La demostración se sigue del caso $n = 1$, pues podemos pensar que cada derivada en realidad es $\beta = (\beta_1, 0, \dots, 0)$, luego si vemos eso, solo hace falta ver la composición; y junto la distributividad del producto respecto de la suma en $A_n$. Para $n = 1$ (escribiendo $t$ y $\partial_t$ en vez de $x_1$ y $\partial_1$) tenemos que probar la fórmula

$$\partial_t^j f = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \partial_t^k(f)\partial_t^{j-k}.$$

Probémoslo por inducción en $j$:

*a*) Para $j = 0$, tenemos la propia $f$.
*b*) para $j = 1$, es por la propia definición ($\partial_t f = \partial_t \phi_f = f\partial_t^1 + \partial_t^1(f)$)
*c*) Supongamoslo cierto para $j = m - 1$.
*d*) Veámoslo para $j = m$. Como es cierto para $m-1$, sabemos que $\partial^n = \partial\partial^{n-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\partial_t^m f = \partial_t \partial_t^{m-1} f &= \partial_t \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \partial_t^k(f)\partial_t^{m-1-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left( \partial_t^k(f)\partial_t^{m-k} + \partial_t^{k+1}(f)\partial_t^{m-1-k} \right),\end{aligned}$$

que agrupando los términos dos a dos, excepto el primer y el último término que se tiene

$$\binom{m-1}{0}\partial_t^0(f)\partial^m = \binom{m}{0} f\partial^m \text{ y } \binom{m-1}{m-1}\partial_t^m(f) = \binom{m}{m}\partial_t^m(f),$$

y los siguientes términos de la siguiente forma

$$\left( \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k+1} \right) \partial_t^{k+1}(f)\partial_t^{m-k-1} = \binom{m}{k+1}\partial_t^{k+1}(f)\partial_t^{m-k-1}$$

que se verifica para todo $k$.

Veamos el caso $n > 1$, por inducción supongámoslo cierto para $n = k - 1$ y veámoslo para $k$.
Antes de comenzar recordemos que cuando hablamos de $\partial^\beta f$ con $\beta \in \mathbb{N}^k$, hablamos de $\partial^\beta f = \partial_1^{\beta_1}(\partial_2^{\beta_2}(\ldots(\partial_k^{\beta_k} f))\ldots)$, donde para cada $i$ se cumple $\beta_i \in \mathbb{N}$, aclarar que usaremos la hipótesis de inducción con las últimas $k-1$-ésimas variables y que $\beta' = \beta_2 \ldots \beta_k$ e igual para sigma, con respecto a cada $\sigma_i$

$$\begin{aligned}
\partial^\beta f = \partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\ldots\partial_{k-1}^{\beta_{k-1}}\partial_k^{\beta_k} f = \partial_1^{\beta_1}\sum_{\sigma'\ll\beta'}\binom{\beta'}{\sigma'}\partial^{\sigma'}(f)\partial^{\beta'-\sigma'} = \\
= \sum_{\sigma'\ll\beta'}\binom{\beta'}{\sigma'}\sum_{i=0}^{\beta_1}\binom{\beta_1}{i}\partial_1^i(\partial^{\sigma'}(f)\partial^{\beta'-\sigma'})\partial_1^{\beta_1-i} = \\
= \sum_{\sigma'\ll\beta'}\binom{\beta'}{\sigma'}\sum_{i=0}^{\beta_1}\binom{\beta_1}{i}\partial_1^i(\partial^{\sigma'}(f))\partial_1^{\beta_1-i}\partial^{\beta'-\sigma'} = \\
= \sum_{\sigma\ll\beta}\binom{\beta}{\sigma}\partial^\sigma(f)\partial^{\beta-\sigma},
\end{aligned}$$

aquí tenemos que recordar que la derivada de la suma es la suma de las derivadas y que podemos sacar factor común algunos términos, entonces aplicamos ahora el caso cuando $n = 1$. En último lugar, tomando $\beta = (\beta_1, \beta')$ y $\sigma = (i, \sigma')$ obtenemos así la última línea, completando el apartado 1.

2. Siguiendo inducción en n:

   *a)* Para $n = 1$, tenemos $\partial_t^j(t^i)$, veámoslo por inducción en j:

      1) Para $j = 1$, tenemos $\partial_t(t^i) = it^{i-1}$, que como $j = 1$, tenemos que $j! = 1$ y $\binom{i}{1} = i$, luego, queda probado para $j = 1$.
      2) Supongamos que es cierto para $m - 1$.
      3) veámoslo para $m$. Tenemos que ver quién es $\partial_t^m(t^i) = it^{i-1}$, está claro que si $m > i$ dicha derivada vale 0 (usando el convenio $\binom{\gamma}{\beta} = 0$ si no se verifica $\beta \ll \gamma$). Luego $n \leq i$, que sabemos que $\partial_t^m(t^i) = \partial_t(\partial_t^{m-1}(t^i))$, y por inducción:

$$\partial_t^m(t^i) = \partial_t(\partial_t^{m-1}(t^i)) = \partial_t((m-1)!\binom{i}{m-1}t^{i-m+1}) = (i-m+1)(m-1)!\binom{i}{m-1}t^{i-m}.$$

Se da la igualdad, pues

$$\begin{aligned}(i-m+1)(m-1)!\binom{i}{m-1} &= (i-m+1)(m-1)!\frac{i!}{(m-1)!(i-m+1)!}\\ &= \frac{(i-m+1)i!}{(i-m+1)!}\\ &= (i-m+1)i\dots(i-m+2)\\ &= m!\frac{i!}{m!(i-m)!} = m!\binom{i}{m}.\end{aligned}$$

*b*) Para el resto de dimensiones, como $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_n}$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, desarrollémoslo y veámoslo más claro:

$$\begin{aligned}\partial^\beta(x^\alpha) &= \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_n}(x^\alpha)\\ &= \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_n}(x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}).\end{aligned}$$

Aplicando la linealidad de la derivada, tenemos que

$$\begin{aligned}\partial^\beta(x^\alpha) &= \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_n}(x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n})\\ &= \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_{n-1}}(\partial_n^{\beta_n}(x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}))\\ &= \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}(x_1^{\alpha_1}\dots\beta_{n-1}!\binom{\alpha_n}{\beta_n}x_n^{\alpha_n-\beta_n}).\end{aligned}$$

Esto se tiene porque $\partial_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$. Y aplicándole ahora la inducción obtenemos

$$\begin{aligned}\partial^\beta(x^\alpha) &= \partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_{n-1}}(x_1^{\alpha_1}\dots\beta_n!\binom{\alpha_n}{\beta_n}x_n^{\alpha_n-\beta_n})\\ &= \prod_{i=1}^{n-1}\beta_i!\binom{\alpha_i}{\beta_i}x^{\alpha_i-\beta_i}\beta_n!\binom{\alpha_n}{\beta_n}x_n^{\alpha_n-\beta_n})\\ &= \prod_{i=1}^{n}\beta_i!\binom{\alpha_i}{\beta_i}x^{\alpha_i-\beta_i} = \beta!\binom{\alpha}{\beta}x^{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

3. Se sigue de los resultados 1. y 2.

∎

*Proposición 1.4.* El conjunto de los monomios $B = \{x^\alpha\partial^\beta | \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\}$ es una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $A_n$. Cada elemento $P \neq 0$ de $A_n$ puede ser escrito de forma única como una suma finita

$$P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta$$

tal que algún $p_{\alpha\beta}$ es no nulo. Además, $P = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta$ con $p_\beta(x) = \sum_\alpha p_{\alpha\beta}x^\alpha \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$.

*Demostración.* Es suficiente probar la primera parte, pues la segunda es consecuencia de esta.

Cualquier palabra en los generadores $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ por la observación 1.2 es suma de monomios. Por la proposición 1.3, la suma de monomios es una combinación lineal con coeficientes en $\mathbb{C}$ de elementos en $B$. Esto prueba que $B$ esta generado por un sistema de vectores del espacio $A_n$. Veamos ahora que los elementos de $B$ son linealmente independientes. Consideremos:

$$P = \sum p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta,$$

un elemento no trivial formado por una combinación de monomios en $B$. Sea ahora $\beta' \in \mathbb{N}^n$ el menor elemento, con respecto al orden lexicográfico, que aparezcan en el exponente $\partial$ en $P$ y por la proposición 1.3 apartado 2, tenemos que $P(x^{\beta'}) = (\beta')!(\sum_\alpha p_{\alpha\beta'}x^\alpha)$ porque $\beta'$ es estrictamente menor que $\beta$ en el orden lexicográfico[1], entonces $\partial^\beta(x^{\beta'}) = 0$.

Por la elección de $\beta'$ existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $p_{\alpha\beta'} \neq 0$ y entonces $P(x^{\beta'}) \neq 0$. En particular el endomorfismo $P \in A_n$ es no nulo. ❙

*Observación 1.4.* Existe una acción natural de $A_n$ sobre el anillo de polinomios $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ pues cada elemento $P \in A_n$ es un endomorfismo de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. La acción natural inducida en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ genera una estructura de $A_n$-módulo a la izquierda.
Con la proposición 1.3 existe una acción del elemento $P = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta \in A_n$ en un elemento $g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, que puede ser escrito como:

$$P(g) = \sum_\beta p_\beta(x)\frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}(g)}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}.$$

Y esto justifica el nombre de operadores diferenciales lineales con coeficientes polinómicos a los elementos de $A_n$.

De hecho, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ es finitamente generado como $A_n$-módulo. Esto se puede probar considerando la aplicación

$$\phi : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \longrightarrow \frac{A_n}{A_n(\partial_1, \dots, \partial_n)},$$

[1]Dados $\beta, \beta' \in \mathbb{N}^n$ decimos que $\beta'$ es menor o igual que $\beta$ con respecto al orden lexicográfico si existe $0 \leq i \leq n-1$ tales que $\beta'_j = \beta_j$ para $1 \leq j \leq i$ y $\beta'_{i+1} \leq \beta_{i+1}$.

definida por $\phi(g) = \overline{g} = g + A_n(\partial_1, \dots, \partial_n)$, donde $A_n(\partial_1, \dots, \partial_n)$ es el ideal a la izquierda generado por $\partial_1, \dots, \partial_n$.
Esta aplicación es un homomorfismo de $A_n$-módulos a la izquierda y es inyectivo por la proposición 1.4. Veamos que además es sobreyectivo. Considerando $P \in A_n$ y escribiéndolo como $P = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta$, está claro que $\phi(p_0(x)) = \phi(P(1)) = \overline{P}$.

## 1.2 Orden y orden total

Denotaremos $|\beta| = \sum_i \beta_i$ para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$.

**Definición 1.2.** *Para un operador no nulo*

$$P = \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta \in A_n,$$

*el máximo de los $|\beta|$ para los que $p_\beta(x) \neq 0$ se llama el **orden** de P. A este entero no negativo lo denotaremos como $\operatorname{ord}(P)$. El máximo de los $|\alpha| + |\beta|$ para los que $p_{\alpha\beta} \neq 0$ se llama **orden total** de P y se denota como $\operatorname{ord}^T(P)$. Por convenio usaremos que $\operatorname{ord}(0) = \operatorname{ord}^T(0) = -\infty$.*

*Ejemplo* 1.2. A partir de la definición anterior calcularemos a continuación el orden y el orden total de varios operadores.

| Operadores | Orden | Orden total |
|---|---|---|
| $\partial_1^7$ | 7 | 7 |
| $x_2^7 + x_1\partial_1$ | 1 | 7 |
| $x_1^3\partial_2^4 + x_1\partial_1$ | 4 | 7 |

**Definición 1.3.** *El **símbolo principal** del operador*

$$P = \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta$$

*es el polinomio*

$$\sigma(P) = \sum_{|\beta| = \operatorname{ord}(P)} p_\beta(x)\xi^\beta \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \xi] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n],$$

*donde $\xi_1, \dots, \xi_n$ son nuevas variables. El **símbolo principal total** de P es el polinomio:*

$$\sigma^T(P) = \sum_{|\alpha+\beta| = \operatorname{ord}^T(P)} p_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \xi].$$

*Ejemplo* 1.3. Calculemos ahora el símbolo y el símbolo principal de los operadores dados en el ejemplo anterior:

| Operadores | $\sigma$ | $\sigma^T$ |
|---|---|---|
| $\xi_1^7$ | $\xi_1^7$ | $\xi_1^7$ |
| $x_2^7 + x_1\xi_1$ | $x_1\xi_1$ | $x_2^7$ |
| $x_1^3\xi_2^4 + x_1\xi_1$ | $x_1^3\xi_2^4$ | $x_1^3\xi_2^4$ |

*Observación* 1.5. Notemos que $\sigma(P) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ es un polinomio homogéneo de grado $\operatorname{ord}(P)$ en las $\xi$, mientras que $\sigma^T(P) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ es un polinomio homogéneo de grado $\operatorname{ord}^T(P)$. En general tenemos que $\operatorname{ord}(P) \neq \operatorname{ord}^T(P)$. En general, tampoco tenemos que $\sigma(P+Q) = \sigma(P) + \sigma(Q)$ o $\sigma^T(P+Q) = \sigma^T(P) + \sigma^T(Q)$. Sin embargo, tenemos la siguiente proposición:

*Proposición* 1.5. Para $P, Q \in A_n$ tenemos que:

1. $\operatorname{ord}(PQ) = \operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q)$ y $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$ (similar para el orden total).
2. $\operatorname{ord}(PQ - QP) \leq \operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q) - 1$ y $\operatorname{ord}^T(PQ - QP) \leq \operatorname{ord}^T(P) + \operatorname{ord}^T(Q) - 2$.
3. $\operatorname{ord}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{ord}(P), \operatorname{ord}(Q)\}$ (similar para orden total).
4. Si $\operatorname{ord}(P) = \operatorname{ord}(Q)$ y $\sigma(P) + \sigma(Q) \neq 0$ entonces $\sigma(P+Q) = \sigma(P) + \sigma(Q)$ (similar para el orden total).

*Demostración.* Definiremos $P$ y $Q$ que usaremos para todo el ejercicio

$$P = \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta \in A_n,$$
$$Q = \sum_{\alpha'\beta'} q_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'} \partial^{\beta'} = \sum_{\beta'} q_{\beta'}(x)\partial^{\beta'} \in A_n.$$

1. Veamos que $\operatorname{ord}(PQ) = \operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q)$ (respectivamente para el orden total), para ello usaremos 1.3. Entonces el producto $PQ$ es

$$PQ = \left(\sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta\right)\left(\sum_{\beta'} q_{\beta'}(x)\partial^{\beta'}\right),$$

como $p_\beta(x) = \sum_\alpha p_{\alpha,\beta}x^\alpha$, tenemos el siguiente producto

$$PQ = \left(\sum_\beta \left(\sum_\alpha p_{\alpha,\beta}x^\alpha\right)\partial^\beta\right)\left(\sum_{\beta'}\left(\sum_{\alpha'} q_{\alpha',\beta'}x^{\alpha'}\right)\partial^{\beta'}\right),$$

que aplicando ahora 1.3, obtenemos que como $p_{\alpha,\beta}$ y $q_{\alpha',\beta}$ son constantes, podemos sacarlas y aplicar la propiedad 3 obtenemos

$$PQ = \sum_{\beta,\alpha,\beta',\alpha'} p_{\alpha,\beta} p_{\alpha',\beta'} \left( x^{\alpha+\alpha'} \partial^{\beta+\beta'} + \sum_{\sigma\ll\beta,\sigma\ll\alpha'} \sigma! \binom{\beta}{\sigma} \binom{\alpha'}{\sigma} x^{\alpha+\alpha'-\sigma} \partial^{\beta+\beta'-\sigma} \right). \tag{1.1}$$

Entonces tenemos que el $\operatorname{ord}(PQ) = \text{máx}\,|\beta+\beta'|$, pues se puede apreciar en el cálculo anterior que ellos serán los términos de mayor grado y como todas las componentes de $\beta$ y $\beta'$ son positivas, entonces ese máximo es equivalente al siguiente $\text{máx}\,|\beta| + \text{máx}\,|\beta'|$, verificándose así $\operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q)$, se realiza de manera análoga para el orden total.

Veamos ahora la propiedad $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$. Tomando $P$ y $Q$ como antes el producto volverá a ser el mismo y aplicando $\sigma$

$$\sigma(PQ) = \sum_{|\beta+\beta'|} p_{\beta+\beta'} \xi^{\beta+\beta'},$$

y como $p_{\beta+\beta'} \in \mathbb{C}[\underline{x}]$ se puede descomponer como el producto $p_{\beta+\beta'} = p_\beta p_{\beta'}$, de la misma forma lo tenemos para $\xi$. Por tanto, volviendo a la ecuación

$$\sigma(PQ) = \sum_{|\beta+\beta'|} p_\beta p_{\beta'} \xi^\beta = \left( \sum_{|\beta|} p_\beta \xi^\beta \right) \left( \sum_{|\beta'|} p_{\beta'} \xi^{\beta'} \right) = \sigma(P)\sigma(Q).$$

De forma análoga se tiene para $\sigma^T$.

2. Una primera idea sería el pensar que ese orden es $-\infty$, pero recordemos que el anillo es no conmutativo. Volviendo a la proposición 1.3 apartado 3, vemos que el primer elemento de ambos se conserva, pues ambas poseen el mismo orden (se puede repetir la multiplicación 1.1 y el máximo será el mismo, lo que varían son los términos de menor grado), por tanto, el $\operatorname{ord}(PQ - QP) < \operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q)$ y como el orden es un entero, entonces eso es cierto si y solo si $\operatorname{ord}(PQ - QP) \leq \operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q) - 1$. En el caso del orden total, como los $\alpha$ de mayor grado también se van, por eso se queda -2.
3. Vamos a calcular $P + Q$

$$P + Q = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta + \sum_{\alpha',\beta'} q_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'} \partial^{\beta'}.$$

Esté será un nuevo elemento de nuestro anillo, que denotaremos por $H$, que por definición podemos escribir de la siguiente forma

$$H = \sum_{\alpha'',\beta''} q_{\alpha''\beta''} x^{\alpha''} \partial^{\beta''}.$$

Podemos hacer entonces un par de observaciones, $\mathrm{ord}(H) = \mathrm{ord}(P+Q)$, vamos a diferenciar varios casos:

*a*) **Caso 1**: Cuando $\mathrm{ord}(P) > \mathrm{ord}(Q)$ (análogo para $\mathrm{ord}(Q) > \mathrm{ord}(P)$, al sumarlos tenemos que el término principal de $Q$, no afectará al término principal de $P$, entonces $\mathrm{ord}(H) = \mathrm{ord}(P+Q) = \mathrm{ord}(P)$, pues $\sigma(H) = \sigma(P)$. Podemos generalizarlo a lo siguiente en este caso, dependiendo si el orden máximo lo tiene $P$ o $Q$ a la siguiente forma

$$\mathrm{ord}(H) = \max\{\mathrm{ord}(P), \mathrm{ord}(Q)\}.$$

Pues en ambos casos, se verifica la desigualdad estricta con respecto al otro.

*b*) **Caso 2**: Cuando $\mathrm{ord}(P) = \mathrm{ord}(Q)$, aquí tenemos que tener sumo cuidado, pues ahora $\sigma(H) \neq \sigma(P)$ o $\sigma(Q)$. Entonces, vamos a diferenciar dos casos:

1) **Caso 1**: Si $\sigma(P) + \sigma(Q) \neq 0$, lo veremos en el próximo apartado.
2) **Caso 2**: Si $\sigma(P) + \sigma(Q) = 0$, como los elementos de mayor grado de $P+Q$, se han ido, entonces ahora, el $\mathrm{ord}(H) \leq \mathrm{ord}(P) = \mathrm{ord}(Q) = \max\{\mathrm{ord}(P), \mathrm{ord}(Q)\}$

4. Volviendo al caso 2 del apartado anterior, vamos a resolver el caso 1, por hipótesis $\mathrm{ord}(Q) = \mathrm{ord}(P)$ y $\sigma(P) + \sigma(Q) \neq 0$, por tanto $\mathrm{ord}(P+Q) = \mathrm{ord}(P)$ (da igual poner $P$ o $Q$, pues tienen el mismo orden) y por definición de $\sigma(P+Q)$, serán los operadores que posean $\mathrm{ord}(P)$, que por hipótesis, son $\sigma(P) + \sigma(Q)$, pues esta suma es no nula, luego hay elementos de $\mathrm{ord}(P) = \mathrm{ord}(P+Q)$.

*Corolario* 1.1. $A_n$ es un dominio de integridad.

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que existen dos elementos $P$ y $Q$, no nulos, que verifican $\mathrm{ord}(P) > 0$ y $\mathrm{ord}(Q) > 0$, tales que $PQ = 0$. Usando la proposición anterior $\mathrm{ord}(PQ) = \mathrm{ord}(P) + \mathrm{ord}(Q)$, pero como el producto es 0, entonces $\mathrm{ord}(PQ) = -\infty$, sin embargo $\mathrm{ord}(P) + \mathrm{ord}(Q) > 0$, contradicción. Esta contradicción viene de suponer que $PQ = 0$, siendo ambos no nulos, entonces o $P = 0$ o $Q = 0$.

**Definición 1.4.** *Para cada ideal a la izquierda (o la derecha) $I \subset A_n$ el ideal graduado asociado a $I$ es el ideal $gr(I)$ de $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \xi]$ generado por la familia de los símbolos principales de los elementos de $I$*

$$gr(I) = \mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \xi]\{\sigma(P) | P \in I\}.$$

*El ideal graduado total asociado a $I$ es el ideal $gr^T(I)$ de $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ generado por la familia de símbolos principales totales de los elementos en I*

$$gr^T(I) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]\{\sigma^T(P)|P \in I\}.$$

*Observación* 1.6. Si $I = A_n P$ es un ideal a la izquierda generado por un operador $P \in A_n$, entonces $gr(I)$ es el ideal principal en $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ generado por el símbolo principal $\sigma(P)$ y tenemos $gr(I) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]\sigma(P)$. Tenemos el resultado análogo para $gr^T(I)$.

*Proposición* 1.6. Sea $I \subset A_n$ un ideal a la izquierda y sea $F(\mathbf{x}, \xi)$ un polinomio en $gr(I)$ (respectivamente $gr^T(I)$). Si $F(\mathbf{x}, \xi)$ es homogéneo con respecto a las $\xi$ (respectivamente homogéneo) entonces es el símbolo principal $\sigma(P)$ (respectivamente el símbolo principal total $\sigma^T(P)$) de algún $P \in I$.

*Demostración.* En ambos casos procederemos de forma análoga, luego escribiremos solo la prueba en el primer caso. Asumiendo que $F \in gr(I)$ es no nulo, como $gr(I)$ está generado por $\{\sigma(P)|P \in I\}$, $\exists P_1 \ldots, P_n$ en $I$, tenemos que

$$F = \sum_i H_i \sigma(P_i)$$

para algunos polinomios $H_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$. Denotemos por $d$ (respectivamente $d_i$) el grado en las $\xi_i$ de F respectivamente de las $H_i$. Entonces podemos asumir que los $H_i$ son $\xi$- homogéneos del grado $d - d_i$ (en particular $H_i = 0$ si $d < d_i$). Denotemos por $Q_i(\mathbf{x}, \partial)$ a algún elemento de $A_n$ tal que $\sigma(Q_i) = H_i$. Como

$$F = \sum_i \sigma(Q_i)\sigma(P_i)$$

es un polinomio homogéneo respecto de las variables $\xi_i$ distinto de cero de grado d por la proposición 1.5,

$$\sigma\left(\sum_i Q_i P_i\right) = \sum_i \sigma(Q_i)\sigma(P_i)$$

y $\sum_i Q_i P_i$ es el operador buscado en I. ∎

*Proposición* 1.7. $A_n$ es un anillo simple.

*Demostración.* Sea $J$ un ideal de $A_n$ bilátero. Sea $P$ un elemento de orden total mínimo de $J$ con $d = ord^T(P)$. Si $d = 0$ entonces $P \in \mathbb{C}$ y como $P \neq 0$ tenemos que $J = A_n$. Consideremos entonces que $d > 0$. Sean $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ tal que $|\alpha + \beta| = d$ y el

coeficiente $p_{\alpha\beta}$ de $x^\alpha\partial^\beta$ en $P$ es no nulo. Supongamos además que existe un $i$ tal que $\beta_i > 0$.
Entonces el operador $Q = [x_i, P] = x_iP - Px_i$ pertenece a $J$ y es no nulo. Veamos eso, como $J$ es un ideal en ambos lados, y escribiendo $P = P' + P''$ con $P'$ (respectivamente $P''$) la suma de los monomios en $P$ con orden total igual a $d$ (respectivamente menor o igual a $d-1$), podemos escribir

$$P' = \sum_{j=0}^{l} P_j(x,\partial)\partial_i^j,$$

donde $P_j = P_j(x,\partial)$ no depende de $\partial_i$, $P_l \neq 0$ y, además, todos los monomios en $P_j$ tienen orden total $d-j$. Tenemos también $l \leq d$ y como $\beta_i > 0$ tenemos $l > 0$. Por la igualdad $Q = [x_i, P'] + [x_i, P'']$ y por la proposición 1.5 tenemos que $ord^T([x_i, P'']) \leq d-2$. Además, cualquier monomio en $[x_i, P_j\partial_i^j] = jP_j\partial_i^{j-1}$ tiene orden total menor o igual que $d-1$ y $lP_l\partial_i^{l-1}$ es distinto de cero, por tanto tenemos $Q = [x_i, P] = x_iP - Px_i \in J \setminus \{0\}$.
Pero eso contradice que el grado $d$ sea mínimo. Entonces $\beta$ debe ser 0 siempre que $p_{\alpha\beta} \neq 0$ y $|\alpha + \beta| = d$. Asumiendo ahora que existe $i$ con $\alpha_i > 0$ y $|\alpha| = d$, y usando $Q' = [\partial_i, P]$, se llega a una contradicción similar con que $d$ sea mínimo. Por tanto, $P$ debe ser un elemento no nulo en $\mathbb{C}$ y entonces $J = A_n$. ∎

*Observación* 1.7. Los únicos elementos invertibles en $A_n$ son las constantes no negativas (es decir, los elementos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), pues si $1 = PQ$, para ciertos $P, Q \in A_n$ entonces $0 = \mathrm{ord}^T(1) = \mathrm{ord}^T(P) + \mathrm{ord}^T(Q)$ por la proposición (1.4) y esto implica que ambos $P, Q$ deben ser elementos en $\mathbb{C}$.

*Corolario* 1.2. Cualquier homomorfismo de anillos $\phi : A_n \longrightarrow S$ es inyectivo.

*Demostración.* En primer lugar vamos a probar que $\ker(\phi)$ es un ideal bilátero de $S$, donde $\phi : S \longrightarrow S'$.

Para comenzar con esta prueba recordemos que $\forall x \in \mathrm{Ker}(\phi)$ se tiene que $\phi(x) = 0$, por tanto tenemos:

1. $0 \in \mathrm{Ker}(\phi)$), por ser un homomorfismo.
2. Dados $a, b \in \mathrm{Ker}(\phi)$), se verifica que $a + b \in \mathrm{Ker}(\phi)$), pues $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) = 0$.
3. Ahora comprobaremos que lo es tanto a derecha como a izquierda, pues dado $a \in S$, $b \in \mathrm{Ker}(\phi)$) se verifica que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = 0 = \phi(b)\phi(a) = \phi(ba)$.

Por tanto, $\mathrm{Ker}(\phi)$) es un ideal bilátero de $S$. Teniendo eso, basta hacer uso de la proposición 1.7, pues al ser un anillo simple, sus únicos ideales biláteros son el total o el $\{0\}$, siendo entonces el $\ker(\phi) = A_n$ o $\ker(\phi) = \{0\}$, pero el primer caso no tiene sentido, pues anularíamos toda la aplicación, por tanto, $\ker(\phi) = \{0\}$ y $\phi$ es inyectiva. ∎

# 2 Módulos filtrados

## 2.1 Filtraciones y $A_n$−módulos

Antes de comenzar esta sección es recomendable hacer una lectura del apéndice A.1, para recordar conceptos y algunas propiedades de los anillos graduados.

Denotaremos

$$F_k(A_n) = \{P \in A_n |\, \mathrm{ord}(P) \leq k\}$$

y

$$B_k(A_n) = \{P \in A_n |\, \mathrm{ord}^T(P) \leq k\}$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Para no confundirnos, simplificaremos la notación $F_k = F_k(A_n)$ y $B_k = B_k(A_n)$.

**Definición 2.1.** *La familia $(F_k)_k$ (respectivamente $(B_k)_k$) se llama filtración por el orden (respectivamente filtración de Bernstein) en $A_n$*

*Ejemplo* 2.1. Comprobaremos que en toda graduación se puede definir una filtración. Supongamos que $G = \oplus_{k\geq 0} G_k$ es una. Consideremos el espacio vectorial $F_k = \oplus_{i=0}^{k} G_i$. Claramente $F_i \subset F_{i+1}$ y la unión es todo $G$. Comprobemos que se verifica el producto

$$F_k F_m = \bigoplus_{i+j\leq k+m} G_i G_j,$$

y como $G_i G_j \subset G_{i+j}$, tenemos $F_k F_m \subset F_{k+m}$. Luego $\{F_k\}_k$ es una filtración de $G$.

*Observación* 2.1. Hay que observar que $A_n$ no es un anillo graduado con el orden o el orden total por el modo en que se comportan con el producto (por ejemplo, $x\partial$ es homogéneo, mientras que $x\partial + 1$ no lo es. Sin embargo, si es posible definir filtraciones en ellos. Hay dos fundamentalmente, que serán de importancia en lo que sigue.

*Proposición* 2.1. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $1 \in B_0 = \mathbb{C}$, $1 \in F_0 = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$.
2. $B_k = F_k = \{0\}$ para $k \leq -1$.
3. $B_k \subset F_k$ para $k \in \mathbb{Z}$.
4. $B_k \subset B_{k+1}$, $F_k \subset F_{k+1}$ para $k \in \mathbb{Z}$.
5. $B_k B_l \subset B_{k+l}$, $F_k F_l \subset F_{k+l}$ para $k, l \in \mathbb{Z}$.
6. $A_n = \cup_k B_k = \cup_k F_k$.
7. Cada $B_k$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con dimensión $\binom{2n+k}{k}$.
8. Cada $F_k$ es un $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-módulo libre de rango $\binom{n+k}{k}$.

*Demostración.*

1. Sabemos que $B_0 = \{P \in A_n | \operatorname{ord}^T(P) \leq 0\}$, y sabemos que los únicos elementos que cumplen eso son las constantes complejas, es decir, $\mathbb{C}$, por tanto $1 \in \mathbb{C} = B_0$. Ahora veamos que $F_0 = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Recordando la definición de orden, tenemos que esos serán los elementos de $A_n$ tal que el grado de $\partial$ sea 0, por tanto, serán los elementos que pertenecen a $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$, como queríamos demostrar.
2. Por lo anterior, cuando escogemos $k < 0$, el único elemento posible sería el 0, pues declaramos que no tenía un grado finito establecido.
3. La contención de 3, es trivial por definición de ord y $\operatorname{ord}^T$, pues los elementos con $\operatorname{ord}^T(P) \leq k$, en concreto tienen $\operatorname{ord}(P) \leq k$, por lo tanto, tenemos la contención deseada, y es fácil observar que en $F_k$ hay elementos que no están en $B_k$, como puede ser el polinomio $x_i P(\mathbf{x}, \xi)$, donde $\operatorname{ord}^T(P) = k$ y $1 \leq i \leq n$, ese elemento no estaría en $B_k$, pues $\operatorname{ord}^T(x_i P(\mathbf{x}, \xi)) = k + 1$. Por tanto obtenemos también que la contención es estricta.
4. Es trivial por definición de $\operatorname{ord}^T$ y ord.
5. Es trivial recordando la proposición 1.5.
6. Lo haremos para el caso de $B_k$, pues es análogo para las $F$. La inclusión $\bigcup_k B_k \subset A_n$, es trivial, pues todos los $B_k \subset A_n$. Comprobemos entonces la otra contención, sea $P \in A_n$, un elemento cualquiera, al estar en $A_n$, se verifica que $\operatorname{ord}^T(P) < \infty$, por tanto existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{ord}^T(P) = n_0$, y usando la definición de los $B_k$, para todo $n \geq n_0$, se verifica que $P \in B_n$, por tanto $P \in \bigcup_k B_k$. Como lo hemos hecho para un $P$ arbitrario, entonces se verifica para todo $P \in A_n$, completando así la otra contención.
7. Usaremos el apartado 8, nos fijamos ahora en 2n variables sobre $\mathbb{C}$ y obtenemos el resultado.
8. En primer lugar vamos a ver el caso cuando el grado del polinomio es exactamente el $k$ de $F_k$, para calcular el caso de las $F_k$ basta sumar todos los anteriores hasta dicho grado. Para ello usaremos la definición de multiconjuntos, que podemos aplicar, pues son las formas de escoger k elementos con repetición. Por

tanto nos queda $\binom{n+m-1}{m}$.

Ya hemos probado cuando tienen exactamente grado $m$, para comprobar la igualdad, simplemente tenemos que sumarlo con los anteriores hasta llegar al grado $m$. Veámoslo también por inducción

*a)* Cuando $k = 1$, tenemos que sumar el caso $k = 0$ y $k = 1$ anteriores

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1},$$

que por las propiedades de los números combinatorios obtenemos el resultado deseado.

*b)* Supongámoslo cierto para $k = m - 1$.

*c)* Para el caso $k = m$, tenemos que sumar todos los términos desde 0 hasta $m$, pero por HI, solo nos hace falta sumarle los de grado $m$

$$\binom{n+m-1}{m-1} + \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m}{m},$$

obteniendo así el resultado deseado.

∎

Desde ahora, todos los $A_n$-módulos (respectivamente ideales) serán módulos a la izquierda (respectivamente ideales a la izquierda) a menos que se especifique lo contrario.

**Definición 2.2.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo. Una $B$-filtración en $M$ es una familia $\Sigma = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$-subespacios vectoriales de dimensión finita de $M$ tales que:*

1. $M_k \subset M_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$,
2. $\bigcup_k M_k = M$,
3. $B_k M_l \subset M_{k+l}$ *para todo* $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Podemos definir de forma similar como antes las $F$-filtraciones en $A_n$-módulos:

**Definición 2.3.** *Una $F$-filtración en un $A_n$- módulo $M$ es una familia $\Sigma = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$-submódulos finitamente generados de $M$ tales que:*

1. $M_k \subset M_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$,
2. $\bigcup_k M_k = M$,
3. $F_k M_l \subset M_{k+l}$ *para todo* $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

## 2.2 Los anillos graduados $gr^B(A_n)$ y $gr^F(A_n)$

*Proposición 2.2.*

1. Cada cociente $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con dimensión $\binom{2n+k-1}{k}$.
2. Cada cociente $\frac{F_k}{F_{k-1}}$ es un $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-módulo libre de rango $\binom{n+k-1}{k}$.

*Demostración.*

1. Las clases

$$\overline{x^\alpha \partial^\beta} = x^\alpha \partial^\beta + B_{k-1},$$

donde que $|\alpha+\beta| = k$, generan el espacio vectorial cociente $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ y, además, son linealmente independientes pues la combinación lineal

$$\sum_{|\alpha+\beta|=k} \lambda_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

está en $B_{k-1}$ si y solo si $\lambda_{\alpha\beta} = 0$ usando la proposición 1.4.
Ahora por la proposición 2.1 apartado 7, tenemos que la dimensión será $\binom{2n+k-1}{k}$, pues nos estamos quedando solamente con los elementos de orden total exactamente $k$.

2. Las clases

$$\overline{\partial^\beta} = \partial^\beta + F_{k-1},$$

donde se cumple que $|\beta| = k$, generando el cociente $\frac{F_k}{F_{k-1}}$ y, además, son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$:

$$\sum_{|\beta|=k} \lambda_{\alpha\beta} \partial^\beta$$

está en $F_{k-1}$ si y solo si $\lambda_{\alpha\beta} = 0$. Aplicando 2.1 apartado 8, tenemos que la dimensión será $\binom{n+k-1}{k}$, pues nos estamos quedando solamente con los elementos de orden exactamente $k$.

∎

*Proposición 2.3.* Los grupos abelianos

$$gr^B(A_n) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{B_k}{B_{k-1}} \text{ y}$$

$$gr^F(A_n) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{F_k}{F_{k-1}}$$

tienen una estructura de anillo conmutativo.

*Demostración.* Veremos el caso de la filtración $(B_k)_k$ con el orden total, es análogo con respecto a $F$. Consideremos, $\forall k, l \in \mathbb{Z}$, la aplicación:

$$\mu_{kl} : \frac{B_k}{B_{k-1}} \times \frac{B_l}{B_{l-1}} \longrightarrow \frac{B_{k+l}}{B_{k+l-1}}$$

definida por

$$\mu_{kl}(P + B_{k-1}, Q + B_{l-1}) = PQ + B_{k+l-1}$$

para $P \in B_k, Q \in B_l$. La aplicación está bien definida, pues $PQ + B_{k+l-1}$ no depende de las elecciones de los representantes $P \in B_k$ y $Q \in B_l$, por la proposición 1.5. Denotaremos $\overline{P} = P + B_{k-1}$ y $\overline{Q} = Q + B_{l-1}$ y $\overline{PQ}$ en vez de $\mu_{kl}(\overline{P}, \overline{Q})$.
De la proposición 1.5 se sigue que para $P \in B_k$ y $Q \in B_l$ tenemos que $PQ - QP \in B_{k+l-1}$ (en este caso también tenemos que están en $B_{k+l-2}$ pero no necesitamos esto), y entonces $\overline{PQ} = \overline{QP}$. Además tenemos $\overline{P}(\overline{Q}\,\overline{R}) = \overline{P}(\overline{QR}) = \overline{P(QR)} = \overline{(PQ)R} = \overline{(PQ)}\,\overline{R} = (\overline{P}\,\overline{Q})\overline{R}$, pues el producto es asociativo en $A_n$.

Definimos entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \mu' : gr^B(A_n) \times gr^B(A_n) &\longrightarrow gr^B(A_n) \\ (\overline{P}, \overline{Q}) &\longmapsto \overline{PQ} \end{aligned}$$

Escribiremos $\left(\sum_k \overline{P_k}\right)\left(\sum_l \overline{Q_l}\right)$ en vez de $\mu'\left(\sum_k \overline{P_k}, \sum_l \overline{Q_l}\right)$. La aplicación $\mu'$ está bien definida y define un producto en $gr^B(A_n)$. Podemos observar que $\mu'$ es asociativa y conmutativa (pues se mantienen las propiedades correspondientes de las $\mu_{kl}$). Como $\mu'$ está definida por bilinealidad es distributiva respecto a la suma.
Para comprobar la unidad, denotaremos por $\overline{1}$ a la clase de 1 módulo $B_{-1} = 0$. Está claro que $\overline{1}\left(\sum_k \overline{P_k}\right) = \left(\sum_k \overline{P_k}\right)$ y se tiene entonces la unidad del anillo conmutativo $gr^B(A_n)$. ∎

*Observación 2.2.* La familia de grupos abelianos $\left(\frac{B_k}{B_{k-1}}\right)_k$ (respectivamente $\left(\frac{F_k}{F_{k-1}}\right)_k$) forma una graduación del anillo $gr^B(A_n)$ (respectivamente de $gr^F(A_n)$).

Recordemos que hemos denotado $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$.

*Observación 2.3.* A continuación usaremos que una filtración en un álgebra sirve para construir un álgebra graduada. Esto es muy útil para muchas de las propiedades de esta álgebra graduada (ver A.1) pues hemos visto que también las tienen las filtraciones. Sea $R$ una $K$-álgebra. Supongamos que $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una filtración en $R$.

Como primer paso en la construcción del álgebra graduada, introduciremos la aplicación **símbolo de orden k**, que es la proyección canónica de los espacios vectoriales

$$\sigma_k : F_k \longrightarrow \frac{F_k}{F_{k-1}}$$
$$d \in F_k \mapsto \sigma_k(d) \neq 0 \iff d \notin F_{k-1}$$

Consideremos ahora el $K$-espacio vectorial

$$gr^{\mathcal{F}} R = \bigoplus_{i \geq 0} (F_i / F_{i-1}).$$

Queremos hacerlo un anillo graduado. Para ello es suficiente con definir la multiplicación de dos elementos homogéneos y extenderlo por linealidad. Un elemento homogéneo de $gr^{\mathcal{F}} R$ es de la forma $\sigma_k(a)$ con $a \in F_k$. Sea $\sigma_m(b)$, para $b \in F_k$ otro elemento homogéneo, y definimos el producto por

$$\sigma_k(a)\sigma_m(b) = \sigma_{k+m}(ab).$$

Para este producto usaremos el $\mu_{kl}$ definido anteriormente, de esta forma, podemos garantizar que dicha igualdad sea cierta. Todo esto podemos hacer lo mismo con la aplicación $\sigma_k : B_k \longrightarrow \frac{B_k}{B_{k-1}}$, con la misma definición.

*Proposición 2.4.* El anillo graduado $S_n = \mathrm{gr}^B(A_n)$ es isomorfo al anillo polinomial $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ dotado con el grado usual de los polinomios.

Daremos dos demostraciones, una de ellas proviene de [CJ10, Ch. 1, Prop. 1.9] y la segunda de [Cou95, Ch 7, Th. 3.1].

*Demostración.* Podemos considerar, para cada $k \in \mathbb{N}$, el isomorfismo (de espacios vectoriales)

$$\eta_k : B_k / B_{k-1} \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]_k$$

definido por

$$\eta_k\left(\left(\sum_{|\alpha+\beta| \leq k} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta\right) + B_{k-1}\right) = \sum_{|\alpha+\beta| = k} p_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta.$$

Aquí $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]_k$ denota al $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado $k$. La familia $\eta_k$ forma por bilinealidad y homogeneidad el isomorfismo

$$\eta : \mathrm{gr}^B(A_n) \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$$

de anillos graduados. ∎

*Demostración.* Para $i = 1, \dots, n$, definimos $y_i = \sigma_1(x_i)$ y $y_{i+n} = \sigma_1(\partial_i)$. Realizaremos la prueba en varios pasos:

**Primer paso:** $S_n$ está generado por $y_1, \dots, y_{2n}$ como $K-$álgebra.

Para ello, solo necesitamos ver los elementos homogéneos de $S_n$, pues son los generadores de todo el conjunto. Pero un elemento homogéneo de $S_n$ es de la forma $\sigma_k(P)$ y 1.5 apartado 1, para algún $P \in A_n$ de grado $k$. Ahora $P$ es combinación lineal de monomios $x^\alpha \partial^\beta$, con $|\alpha + \beta| \leq k$. Si $|\alpha + \beta| = k$, entonces

$$\sigma_k(x^\alpha \partial^\beta) = (y_1^{\alpha^1} \dots y_n^{\alpha^n})(y_{n+1}^{\beta^1} \dots y_{2n}^{\beta^n}).$$

Por tanto $\sigma_k(P)$ es una combinación lineal de monomios de $y_1, \dots, y_{2n}$ de grado k, como queríamos probar.

**Segundo paso:** $S_n$ es un anillo conmutativo.

Como $S_n$ está generado por $y_1, \dots, y_{2n}$, solo tenemos que ver que estos elementos conmutan en $S_n$. Para $i = 1, \dots, n$, tenemos que $y_i y_{i+n} = \sigma_2(x_i \partial_i)$ y $y_{i+n} y_i = \sigma_2(\partial_i x_i)$ y como $\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1$ se tiene

$$\sigma_2(\partial_i x_i) = \sigma_2(x_i \partial_i).$$

Por tanto $y_i y_{i+n} = y_{i+n} y_i$. En otro caso los $y_i$ conmutan por la proposición 1.1.

Definimos ahora $K[z_i, \dots, z_{2n}]$, el anillo de polinomios en $2n$ variables. Los dos pasos anteriores nos ayudan a definir un homomorfismo de anillos sobreyectivo

$$\phi : K[z_i, \dots, z_{2n}] \longrightarrow S_n$$

definido por $\phi(z_i) = y_i$. Y como las variables $z_i$ tienen grado uno en $K[z_i, \dots, z_{2n}]$ y las $y_i$ tienen grado uno en $S_n$, $\phi$ es un homomorfismo graduado de $K-$álgebras.

**Tercer paso:** ver que $\phi$ es inyectiva.

Para ello tomemos un $F \in K[z_i, \dots, z_{2n}]$ y supongamos que $\phi(F) = 0$, es decir $F \in \ker(\phi)$. Como $\phi$ es un homomorfismo graduado, podemos asumir que $F$ es un polinomio homogéneo, definimos $F$ como

$$F(z_1, \dots, z_{2n}) = \sum c_{\alpha\beta} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \cdot z_{n+1}^{\beta_1} \dots z_{2n}^{\beta_n}$$

donde $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = k$. Definimos el operador $P$ de $A_n$ de la forma

$$P = \sum c_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \cdot \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}.$$

Entonces $\sigma_k(P) = \phi(F) = F(y)$.

Si $\sigma_k(P) = \phi(F) = 0$, entonces $P \in B_{k-1}$. Como $P$ puede ser escrito como combinación lineal de monomios $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha + \beta| < k$ por la proposición 1.4, todos los coeficientes $c_{\alpha\beta}$ son 0. Por tanto, $F$ es el polinomio nulo y $\phi$ es inyectiva. ∎

*Observación* 2.4. El anillo de polinomios $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ puede también ser dotado con el grado de las variables $\xi$

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi] = \oplus_k \mathbb{C}[x, \xi]_{(k)},$$

donde

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]_{(k)} = \sum_{|\beta|=k} \mathbb{C}[\mathbf{x}]\xi^{\beta}.$$

Llamaremos a dicho grado $\xi$-grado en $\mathbb{C}[x, \xi]$.

*Proposición* 2.5. El anillo graduado $gr^F(A_n)$ es isomorfo al anillo polinomial $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ dotado con el $\xi$-grado.

Daremos dos demostraciones, una de ellas proviene de [CJ10, Ch. I, Prop. 1.10] y la segunda de [Cou95].

*Demostración.* Similar a la primera prueba de la proposición 2.4. ∎

*Demostración.* Se puede realizar un razonamiento similar a la proposición 2.4, pero en este caso viendo que es isomorfo a $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ como $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-módulo. Usando la aplicación $\sigma(x_i) = x_i$ y $\sigma(\partial_i) = \xi_i$ para $i = 1, \dots, n$, los siguientes pasos son similares a la demostración anterior.

∎

Desde ahora, identificaremos los anillos graduados $gr^B(A_n)$ y $\mathbb{C}[x, \xi]$ (dotado con el grado de los polinomios) (respectivamente $gr^F(A_n)$ y $\mathbb{C}[x, \xi]$ (con el $\xi$-grado)) por el isomorfismo $\eta$ (respectivamente $\eta'$).

## 2.3 El $\Gamma$−orden y el $\Gamma$-símbolo

Sea $\Gamma = (M_k)_k$ una filtración en un $A_n$-módulo $M$. Para cada $m \in M \setminus \{0\}$ llamaremos $\Gamma$-orden de $m$, y lo denotaremos por $\mathrm{ord}^{\Gamma}(m)$, al entero $k$ tal que $m \in M_k \setminus M_{k-1}$.
Denotaremos por

$$\sigma_k^{\Gamma} : M_k \longrightarrow M_k / M_{k-1}$$

la proyección canónica (la cual es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal). Tenemos $\sigma_k^{\Gamma}(m) = m + M_{k-1}$ para $m \in M_k$.

Si $\Gamma$ es una $F$-filtración entonces $\sigma_k^{\Gamma}$ es también un homomorfismo de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-módulos. La aplicación $\sigma_k^{\Gamma}$ se llama la $k$-ésima $\Gamma$-aplicación asociada a la filtración $\Gamma$. Si $M = A_n$

y $\Gamma = (B_k)_k$ por el orden total la filtración $A_n$ (también llamada $B$-filtración en $A_n$), la correspondiente $k$-ésima aplicación es $\sigma_k^T$. Si $\Gamma = (F_k)_k$ por el orden la filtración $A_n$ (también llamado $F$-filtración en $A_n$), la $k$-ésima aplicación correspondiente es $\sigma_k$.

*Observación* 2.5. Usando la notación de las proposiciones 2.4 y 2.5, si $P \in B_k \setminus B_{k-1}$ (respectivamente $P \in F_k \setminus F_{k-1}$) entonces:

$$(\eta_k \circ \sigma_k^T)(P) = \sigma^T(P)$$

$$(\text{respectivamente } (\eta'_k \circ \sigma_k)(P) = \sigma(P)),$$

donde $\eta_k$ es la aplicación definida en la proposición 2.4 (y $\eta'_k$ la definida en la proposición 2.5).

Sea $M$ un $A_n$-módulo y sea $\Gamma = (M_k)_k$ una $B$-filtración (respectivamente una $F$-filtración) en $M$.
Cada cociente $M_k/M_{k-1}$ es un grupo abeliano (y un $\mathbb{C}$-espacio vectorial) con la operación suma

$$gr^\Gamma(M) := \oplus_k \frac{M_k}{M_{k-1}}.$$

Para $m \in M_k$ denotaremos por $\overline{m}$ a la clase

$$m + M_{k-1} \in M_k/M_{k-1}$$

para evitar confusión.
Un elemento en $gr^\Gamma(M)$ es una suma finita $\sum_k \overline{m_k}$ donde cada $m_k$ pertenece a $M_k$.

*Proposición* 2.6. Sea $M$ un $A_n$-módulo y sea $\Gamma = (M_k)_k$ una $B$-filtración (respectivamente una $F$-filtración) en $M$. El grupo abeliano $gr^\Gamma(M)$ tiene una estructura natural de $gr^B(A_n)$-módulo (respectivamente $gr^F(A_n)$-módulo).

*Demostración.* Solo vamos a tratar el caso de $B$-filtraciones, pues el otro caso es análogo.

Consideremos la aplicación:

$$\mathcal{V} : gr^B(A_n) \times gr^\Gamma(M) \longrightarrow gr^\Gamma(M),$$

definidas por bilinealidad a partir de las siguientes aplicaciones:

$$\mathcal{V}_k : \frac{B_k}{B_{k-1}} \times \frac{M_l}{M_{l-1}} \longrightarrow \frac{M_{k+l}}{M_{k+l-1}},$$

definida a su vez como
$$\mathcal{V}_k(\overline{P_k}, \overline{m_l}) = \overline{P_k m_l}.$$
Lo cual es suficiente para mostrar que la aplicación $\mathcal{V}$ define en $gr^{\Gamma}(M)$ una estructura $gr^B(A_n)$-módulo, por bilinealidad y homogeneidad se verifica el resultado. ∎

**Definición 2.4.** *El módulo graduado $gr^{\Gamma}(M)$ se llamará el modulo graduado asociado a la filtración $\Gamma = (M_k)_k$ de $M$.*

## 2.4 Filtraciones inducidas

A continuación vamos a renombrar una filtración en un $A_n$-módulo $M$, será o bien una $B$-filtración o una $F$-filtración en $M$.

Sea $M$ un $A_n$-módulo, sea $N \subset M$ un submódulo de $M$ y sea $\Gamma = (M_k)_k$ una filtración en $M$, construiremos una filtración para $N$ y para $M/N$, tal que para cada $k \in \mathbb{Z}$ denotaremos: $N_k := M_k \cap N$ y $(M/N)_k := (M_k + N)/N$.

*Proposición 2.7.*

1. La familia $\Gamma' = (N_k)_k$ es una filtración en $N$. Se llamará la filtración inducida de $\Gamma$ en N.
2. La familia $\Gamma'' = ((M/N)_k)_k$ es una filtración en $M/N$. Se llamará la filtración inducida de $\Gamma$ en $M/N$.

*Demostración.* Supongamos que ambos casos son una $B$- filtración (pues si son $F$-filtraciones es análogo), entonces, tenemos que ver que se verifican los tres apartados de la definición 2.2, comprobémoslo primero para $\Gamma'$,

1. Tenemos que ver que $N_k \subset N_{k+1}$, por definición, sabemos que $N_k = M_k \cap N$ y $N_{k+1} = M_{k+1} \cap N$ y como $M_k \subset M_{k+1}$, tenemos el resultado buscado, dado que $N$ es la misma en ambas intersecciones.
2. Tenemos que comprobar que $\bigcup_k N_k = N$. Volviendo a la definición, tenemos que dicha unión sería equivalente a $\bigcup_k (M_k \cap N) = N \cap (\bigcup_k M_k) = N \cap M$ y como $N \subset M$, tenemos el resultado deseado.
3. Ahora es donde usaremos que hemos considerado una $B$-filtración, pero sería análogo para una $F$-filtración. Tenemos que comprobar que $B_k N_l \subset N_{k+l}$, por tanto tenemos que ver que $B_k(M_k \cap N) \subset M_{k+l} \cap N$, pero por las propiedades de $M$, que por hipótesis es una $B$-filtración, es cierto.

La prueba para el segundo punto, cambiando los $N_k$ por $(M/N)_k$ y aplicando la definición salen las dos primeras condiciones. Veamos ahora que pasa con la tercera .

Vamos a comprobar que $B_k(M/N)_l \subset (M/N)_{k+l}$, cuyo problema es equivalente a probar que $B_k((M_l + N)/N) \subset ((M_{k+l} + N)/N)$, pues $M$ es una $B$-filtración, que completando por definición de $(M/N)_{k+l} = (M_{k+l} + N/N)$, por tanto es una $B$-filtración. ∎

Sea $I$ un ideal en $A_n$. Usando la notación de la observación 2.1, la familia $(B_k(I))_k$ (respectivamente $(B_k(A_n/I))_k$) es la $B$-filtración inducida en $I$ (respectivamente en $A_n/I$). Tenemos el análogo para las $F$-filtraciones (usando la observación 2.1).

Sea $N \subset M$ de nuevo un submódulo pongamos $\Gamma' = \{N \cap \Gamma\}_{i \leq 0}$. La inclusión $N \subseteq M$ nos permite definir una aplicación lineal inyectiva

$$\phi_k : (N \cap \Gamma_k)/(N \cap \Gamma_{k-1}) \longrightarrow \Gamma_k/\Gamma_{k-1}.$$

Usando la suma directa, obtenemos la siguiente familia de aplicaciones

$$\phi : gr^{\Gamma'} N \longrightarrow gr^{\Gamma} M.$$

Un cálculo de los elementos homogéneos de $S_n$ y $gr^{\Gamma'} N$ muestra que $\phi$ es un homomorfismo de módulos. Ya que las $\phi_k$ son inyectivas, entonces $\phi$ lo es. Algunas veces escribiremos $gr^{\Gamma'} N \subseteq gr^{\Gamma} M$ para abreviar.
Ahora consideremos el cociente de módulos $M/N$. Sea $\Gamma''$ el subespacio de $M/N$ definido por

$$\Gamma''_k = \Gamma_k/(\Gamma_k \cap N)$$

y sea

$$\pi_k : \Gamma_k/\Gamma_{k-1} \longrightarrow \Gamma''_k/\Gamma''_{k-1}$$

La proyección canónica. Poniendo estos juntos tenemos la $K-$aplicación lineal

$$\pi : gr^{\Gamma} M \longrightarrow gr^{\Gamma''} M/N.$$

Vamos a comprobar la inyectividad de la aplicación $\phi_k$, por el tercer teorema de isomorfa tenemos que

$$\frac{\Gamma_k + N}{N} \cong \frac{\Gamma_k}{\Gamma_k \cap N},$$

y que gracias al segundo teorema de isomorfía tenemos

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \cong \frac{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}\cap N}}{\frac{\Gamma_{k-1}}{\Gamma_{k-1}\cap N}}$$

Tenemos que la proyección siguiente

$$\frac{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}\cap N}}{\frac{\Gamma_{k-1}}{\Gamma_{k-1}\cap N}} \twoheadrightarrow \frac{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_k\cap N}}{\frac{\Gamma_{k-1}}{\Gamma_{k-1}\cap N}}$$

Como es composición de homomorfismo y el ker de la aplicación esta formado por los elementos de $N\cap\Gamma_{k-1}$, que van a $N\cap\Gamma_{k-1}$, tenemos entonces que todos los elementos que van al 0, son el propio 0, luego $\ker(\phi_k) = \{0\}$ y por tanto $\phi_k$ es inyectiva. Y con esto, hemos construido a su vez la proyección $\pi_k$ que estabamos buscando.

*Proposición 2.8.* Sea M un $A_n$−módulo,sea $N \subset M$ un submódulo de M y sea $\Gamma = (M_k)_k$ una filtración de M. Entonces existe una sucesión exacta canónica de módulos graduados:

$$0 \longrightarrow gr^{\Gamma'}(N) \xrightarrow{\phi} gr^{\Gamma}(M) \longrightarrow gr^{\Gamma''}(M/N) \longrightarrow 0$$

*Demostración.* Notar que el núcleo de la aplicación $\pi_k$ es

$$(\Gamma_{k-1} + \Gamma_k \cap N)/\Gamma_{k-1} \cong (\Gamma_k \cap N)/(\Gamma_{k-1} \cap N).$$

Gracias a esto tenemos una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow (\Gamma_k \cap N)/(\Gamma_{k-1} \cap N) \xrightarrow{\phi} \Gamma_k/\Gamma_{k-1} \xrightarrow{\pi} \Gamma_k/(\Gamma_{k-1} + \Gamma_k \cap N) \longrightarrow 0$$

La sucesión de $S_n$−módulos obtenida en el lema se obtiene al añadir la hipótesis de que tenemos una sucesión de espacios vectoriales que forman la del enunciado, para $k \geq 0$. Por lo tanto es exacta. ∎

*Corolario 2.1.* Sea I un ideal en $A_n$. Tenemos los siguientes isomorfismos canónicos:

$$gr^B\left(\frac{A_n}{I}\right) \backsimeq \frac{gr^B(A_n)}{gr^B(I)} \quad \text{y} \quad gr^F\left(\frac{A_n}{I}\right) \backsimeq \frac{gr^F(A_n)}{gr^F(I)}$$

*Demostración.* Basta seguir la proposición 2.8 y aplicar la sucesión exacta canónica

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A_n \longrightarrow \frac{A_n}{I} \longrightarrow 0,$$

donde cada término de la sucesión está dotada con la correspondiente $B$-filtración o $F$-filtración. ∎

Por la proposición 2.8 existe una aplicación inyectiva $gr^B(I) \longrightarrow gr^B(A_n)$ que es un morfismo graduado de módulos y entonces $gr^B(I)$ puede ser identificado como un submódulo graduado de $gr^B(A_n)$. Esto significa que $gr^B(I)$ es un ideal graduado -identificado como módulo- del anillo graduado $gr^B(A_n)$.
Usando la proposición 2.4 existe un isomorfismo natural de anillos graduados:

$$\eta : gr^B(A_n) \longrightarrow \mathbb{C}[x, \xi]$$

cuya $k$-ésima componente homogénea

$$\eta_k : B_k/B_{k-1} \longrightarrow \mathbb{C}[x, \xi]_k$$

que está definida por

$$\eta_k\left(\left(\sum_{|\alpha+\beta|\le k} p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta\right) + B_{k-1}\right) = \sum_{|\alpha+\beta|=k} p_{\alpha\beta}x^\alpha\xi^\beta.$$

Aquí $\mathbb{C}[x, \xi]_k$ denota el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado k.

*Proposición 2.9.* Con las notaciones anteriores, el ideal $\eta(gr^B(I))$ es el ideal homogéneo de $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ generado por la familia $\{\sigma^T(P) \mid P \in I\}$.

Tenemos el resultado análogo para $gr^F(I)$ y la familia $\{\sigma(P) \mid P \in I\}$ (usando la notación de la proposición 2.5).

Recordemos que, hemos identificado $gr^B$ con $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$. Sea $I$ un ideal de $A_n$ y denotemos $M = A_n/I$ y $\Gamma'' = (B_k(M))_k$ una $B$-filtración inducida en $M$. Por el corolario anterior $gr^{\Gamma''}(M)$ induce un isomorfismo entre el $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$-módulo y

$$\frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]}{gr^B(I)}.$$

Tenemos el resultado análogo para las $F$-filtraciones.

## 2.5 Buenas filtraciones

Antes de comenzar esta sección es recomendable hacer una lectura del apéndice A.2, para recordar conceptos y algunas propiedades de los módulos noetherianos.

Podemos usar el teorema de la base de Hilbert para probar que $A_n$ es un anillo noetheriano. Eso se sigue del siguiente teorema general. Renombremos como $B$ la filtración de **Bernstein** de $A_n$ y $S_n = gr^{\mathcal{B}} A_n$ .

**Teorema 2.1.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo a la izquierda con una $B$-filtración $\Gamma$. Si $gr^{\Gamma} M$ es un $S_n$-módulo noetheriano, entonces $M$ es noetheriano.*

*Demostración.* Sea $N$ un submódulo de $M$, y sea $\Gamma'$ la filtración de $N$ inducida por $\Gamma$. Como $gr^{\Gamma'} N \subseteq gr^{\Gamma} M$ y $gr^{\Gamma} M$ es noetheriano por hipótesis, podemos concluir que $gr^{\Gamma'} N$ está finitamente generado.
Como los generadores de $gr^{\Gamma'} N$ son un número finito, tendrán grado $\leq m$, para algún entero $m$. Ahora podemos demostrar que $N$ está generado por elementos en $\Gamma'_m$. Por reducción al absurdo, supongamos que no lo está y que $k$ es el menor entero para el cual existe un $v \in \Gamma'_k$ que no está generado por elementos de $\Gamma'_m$. Claramente $k > m$, pues si $k \leq m$, entonces podríamos expresar a $v$ como combinación lineal de una base de $\Gamma'_k \subset \Gamma'_m$, y como esto es para un $v$ genérico, entonces $\Gamma'_k$ estaría generado por $\Gamma'_m$, y aquí estaríamos en contradicción, pues supusimos lo contrario. Entonces para $k > m$, sea $\mu_k$ el símbolo de orden $k$ de $\Gamma'$. Como $gr^{\Gamma'} N$ está finitamente generado, existen $a_i \in A_n$ y $u_i \in \Gamma'_{r_i}$ tales que

$$\mu_k(v) = \sum_{1}^{s} \sigma_{k-r_i}(a_i)\mu_{r_i}(u_i),$$

donde $r_i \leq m$, para $i = 1, 2, \ldots, s$.

Por eso

$$v - \sum_{1}^{s} a_i u_i \in \Gamma'_{k-1},$$

donde, por la minimalidad de $k$, podemos escribirlo como una combinación $A_n$-lineal de elementos de $\Gamma'_m$. Por lo tanto, $v$ debe ser escrito como una combinación lineal de elementos de $\Gamma'_m$, lo cual es una contradicción.

Para finalizar esta prueba basta tener en cuenta que cualquier base de $\Gamma'_m$ es de dimensión finita por ser $\Gamma'$ una $B$-filtración, y así $N$ está finitamente generado. Como $N$ es cualquier submódulo de $M$, entonces tendríamos que $M$ es noetheriano.

*Corolario 2.2.* El anillo $A_n$ es noetheriano a la izquierda y a la derecha.

*Demostración.* El anillo graduado $S_n$ está asociado a la filtración de Bernstein es un anillo polinómico en $2n$ variables por la proposición 2.4. Por el teorema de la base de Hilbert, $S_n$ es noetheriano. Gracias a lo anterior, $A_n$ es noetheriano por el teorema 2.1.

**Definición 2.5.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo y $\Gamma$ una filtración de $M$. Si $gr^{\Gamma} M$ está finitamente generado, diremos que $\Gamma$ es una buena filtración. Además como $gr^{\Gamma} M$ está finitamente generado, entonces es noetheriano por la proposición A.4.*

Gracias a esto $M$ será finitamente generado, por el teorema 2.1.

*Observación 2.6.* Sin embargo, no es siempre cierto que si $M$ está finitamente generado sobre $A_n$ entonces $gr^\Gamma M$ está finitamente generado sobre $S$. Por otro lado, es cierto que todo $A_n$-módulo finitamente generado admite una buena filtración. Es claro que si $M$ está generado por $u_1, \dots, u_s$ entonces la filtración $\Gamma$ de $M$ definida por $\Gamma_k = \sum_1^s B_k u_i$ es buena. El módulo graduado $gr^\Gamma M$ está generada sobre $S$ por los símbolos $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_s)$.

A continuación estableceremos un criterio para saber cuándo una filtración es buena.

*Proposición 2.10.* Sea $M$ un $A_n$-módulo a la izquierda. Una $B$-filtración $\Gamma$ de $M$ es buena si y solo si existe $k_0$ tal que $\Gamma_{k+i} = B_i \Gamma_k$, para todo $k \geq k_0$.

*Demostración.* Supongamos que existe ese $k_0$ que verifica que $\Gamma_{k+1} = B_i \Gamma_k$, para todo $k \geq k_0$. El $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\Gamma_{k_0}$ tiene una base finita. Los símbolos de los elementos en la base generan $gr^\Gamma M$. Debido a esto $\Gamma$ es una buena filtración.
Por otro lado, supongamos que $gr^\Gamma M$ es finitamente generado sobre $S_n$. Sean $u_1, \dots, u_s$ elementos de $M$ cuyos símbolos generen $gr^\Gamma M$. Asumamos que $u_j \in \Gamma_{k_j} \setminus \Gamma_{k_{j-1}}$ para $j = 1, 2, \dots, s$, y que $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_s\}$.
Sea $k \geq k_0$. Vamos a probar que $\Gamma_{i+k} = B_i \Gamma_k$ por inducción en $i$. Si $i = 0$, el resultado es obviamente trivial. Supongamos que se verifica la igualdad en el caso $i - 1$. Escogemos un elemento $v \in \Gamma_{i+k}$. Como $gr^\Gamma M$ es finitamente generado por hipótesis, y denotando $\mu_k$ al símbolo de orden $k$, se tiene que

$$\mu_{i+k}(v) \in \sum_{j=1}^{s} \sigma_{k+i-k_j}(B_{k+i-k_j}) \mu_{k_j}(u_j).$$

Como $B_{i+k-k_j} = B_i B_{k-k_j}$, concluimos que

$$v \in \sum_{j=1}^{s} B_i B_{k-k_j} u_j + \Gamma_{i+k-1}.$$

Ahora $B_{k-k_j} u_j \subset \Gamma_k$ para todo $j$, y por la hipótesis de inducción $\Gamma_{k+i-1} = B_{i-1} \Gamma_k$. Como $B_{i-1} \subseteq B_i$, por las propiedades de la filtración, entonces $v \in B_i \Gamma_k$. Por lo tanto $\Gamma_{i+k} \subseteq B_i \Gamma_k$. La otra inclusión es obvia, entonces tenemos la igualdad como queríamos. ∎

*Ejemplo 2.2.* Ahora es fácil de distinguir cuándo una filtración es buena o no. Por ejemplo, sea $\Omega$ definida como $\Omega_k = B_{2k}$ para $k \in \mathbb{Z}$, veamos que es una $B$-filtración de $A_n$, siguiendo la definición 2.2.
La partes (1) y (2) se cumplen por la propia definición de $\Omega_k$. Con quien tenemos que tener un poco de cuidado es con (3), dados $k > 0$ y $n > 0$ veamos la tercera propiedad

$$B_k\Omega_n = B_kB_{2n} \subset B_{k+2n} \subset B_{2k+2n} = B_{2(n+k)} = \Omega_{k+n},$$

por lo tanto también la cumple y es una filtración. Entonces tenemos que $B_i\Omega_k = B_{i+2k}$ que no está propiamente contenido, es decir, no es igual a $B_{2(i+k)} = \Omega_{i+k}$. Por la proposición anterior, $\Omega$ no es una buena $B$-filtración de $A_n$.

*Proposición 2.11.* Sea $M$ un $A_n$-módulo; $\Gamma = (M_k)_k$ y $\Gamma' = (M'_k)_k$ dos $B$-filtraciones de $M$. Tenemos:

1. Si $\Gamma$ es una buena filtración, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$$M_k \subset M'_{k+k_1}$$
para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. Si $\Gamma$ y $\Gamma'$ ambas son buenas filtraciones entonces existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que
$$M'_{k-k_2} \subset M_k \subset M'_{k+k_2}.$$

*Demostración.* Probemos primero que 2) se obtiene de 1). Entonces existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M_k \subset M'_{k+j_1}$, y aplicando 1), pero a $\Gamma'$, tenemos que existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $M'_k \subset M_{k+j_1}$, y ambas inclusiones se mantienen para todo $k$. Fijemos $k_2$ como el máximo de $j_1$ y $j_2$. Entonces $k_2$ satisface 2).

Vamos a probar el apartado 1). Por la proposición 2.10, entonces existen $k_0 \geq 0$ tales que $M_{k+l} = B_lM_k$ para todo $l \geq 0$ y para todo $k \geq k_0$. En este caso no sabemos si se verifica que $\Gamma'$ sea una buena filtración, luego no tiene porque darse la proposición 2.12. Entonces tenemos lo siguiente:

$$M_{k+l} = B_lM_k.$$

Pero como ambas son $B$-filtraciones, en concreto para $\Gamma'$ se verifica $B_kM'_l \subset M'_{k+l}$ y que $\bigcup_{i=1} M'_i = M$ (por definición 2.2), esta última nos garantiza que para cierto $k_1$ suficientemente grande se tiene que $M_k \subset M'_{k+k_1}$. Aquí es importante el hecho de que $\Gamma$ sea una buena filtración, pues gracias a esto, se tiene que al multiplicar por $B_l$ para $l \geq 0$ se tiene

$$B_lM_k = M_{k+l} \subset B_lM'_{k+k_1} \subset M'_{k+l+k_1},$$

obteniendo así que dicha contención se verifica para todo $k \in \mathbb{N}$. ∎

*Proposición 2.12.* Sea $I$ un ideal de $A_n$, vamos a probar que:

1. La $B$-filtración inducida de $I$ es una buena filtración.
2. La $B$-filtración inducida en $A_n/I$ es una buena filtración.
3. Cualquier $A_n$-módulo $M$ finitamente generado admite una buena $B$-filtración

*Demostración.*

1. $\mathrm{gr}^B(I)$ es un ideal de $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$, que es un anillo noetheriano. Entonces, por definición de buena filtración (2.5) $B(I)$ es una buena filtración.
2. Por el corolario 2.1, $\mathrm{gr}^B(A_n/I)$ es un cociente de $\mathrm{gr}^B(A_n)$, luego está finitamente generada por la clase de 1.
3. Ya habíamos probado este apartado en la observación 2.6

∎

*Observación 2.7.* Hay que observar que en las definiciones y proposiciones dadas anteriormente podemos considerar también las $F$-filtraciones, tomando donde proceda $gr^F(A_n)$.

# 3 Módulos holónomos

## 3.1 Variedad característica

En esta sección, trabajaremos con las $F$-filtraciones y hablemos de componentes o de elementos homogéneos, nos referimos respecto de las variables $\xi_i$, y en el caso de las $B-$filtraciones, hablaremos del grado total.

**Definición 3.1.** *Sea $I \subset A_n$ un ideal a la izquierda. La variedad característica de $A_n/I$ como $A_n$-módulo es definida como*

$$\mathrm{Char}(A_n/I) = \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\mathrm{gr}(I)).$$

*Observación* 3.1. Sea $M$ un $A_n$-módulo dotado de una $F$-filtración (respectivamente para $B$-filtración) $\Gamma = (M_k)_k$. El ideal anulador $\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M))$ es un ideal homogéneo (respectivamente $A_n$ en $\mathrm{gr}^B(A_n)$).

Lo probaremos con las $F$-filtraciones (el otro caso es análogo). Consideremos un elemento no nulo $G = G(\mathbf{x}, \xi) \in \mathrm{gr}^F(A_n) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ (ver la proposición 2.5) $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$. A continuación, podemos expresar $G$ como suma de sus componentes homogéneas, es decir, $G = \sum_j G_j$ donde $G_j \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]_{(j)}$ (ver 2.4). Sea ahora $P_j$ un elemento de $F_j(A_n)$ que verifica $\sigma(P_j) = P_j + F_{j-1}(A_n) = G_j$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $G\frac{M_k}{M_{k-1}} = 0$, por tanto, tenemos $\sum_j (P_j + F_{j-1}(A_n))\frac{M_k}{M_{k-1}} = 0$. Para concluir, tenemos que para cada $j, k \in \mathbb{N}$, $P_j M_k \subset M_{j+k-1}$ por lo que se obtiene que $G_j = P_j + F_{j-1}(A_n)$ anula a $\frac{M_k}{M_{k-1}}$ para todo $k$.

Entonces $G_j \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M))$ para cada $j$. Esto prueba que el ideal $\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M))$ es homogéneo.

*Proposición* 3.1. Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado, con dos buenas $F$-

filtraciones $\Gamma = (M_k)_k$ y $\Gamma' = (M'_k)$. Entonces

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma}(M))} = \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M'))}.$$

*Demostración.* Escribamos

$$J = \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma}(M))$$

y

$$J' = \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M')).$$

Por simetría es suficiente probar la inclusión $\sqrt{J} \subset \sqrt{J'}$. Por la observación anterior, el ideal $J$ y $J'$ es homogéneo. Entonces $\sqrt{J}$ y $\sqrt{J'}$ son también homogéneos. Sea $G \in \sqrt{J}$ un elemento homogéneo de $\xi$-grado $v \geq 0$. Entonces existe un entero $l > 0$ tal que $G^l \in J$. Sea $P$ un elemento en $F_v(A_n)$ tal que $\sigma(P) = G$. Tenemos $P^l M_k \subset M_{lv+k-p}$, por tanto, para todo $p \in \mathbb{N}$ también se verifica:

$$P^{pl} M_k \subset M_{plv+k-p}.$$

Por la proposición 2.11, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{k-k_2} \subset M'_k \subset M_{k+k_2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, para $p = 2k_2 + 1$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$P^{(2k_2+1)l} M'_k \subset P^{(2k_2+1)l} M_{k+k_2} \subset M_{(2k_2+1)lv+k+k_2-2k_2-1} \subset M'_{(2k_2+1)lv+k-1}.$$

Con esto hemos probado que $\sigma(P^{(2k_2+1)l}) = G^{(2k_2+1)l}$ anula a $\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M)$ y entonces $G \in J'$. Como hemos hecho eso para un $G$ cualquiera en $J$, en particular lo tenemos para todo $J$, luego $J \subset J'$ como queríamos probar. ▍

Obtenemos el mismo resultado cambiando $\mathrm{gr}^F(M)$ por $\mathrm{gr}^B(M)$:

*Proposición 3.2.* Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado, con dos buenas $B$-filtraciones $\Gamma = (M_k)_k$ y $\Gamma' = (M'_k)_k$. Entonces

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma}(M))} = \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M'))}.$$

*Demostración.* La prueba de esta proposición se realiza de la misma forma que la proposición anterior, cambiando las $F$-filtraciones por $B$-filtraciones y el $\xi$-grado por el grado de los elementos. ▍

**Definición 3.2.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado. La variedad característica de $M$ se define como*

$$\mathrm{Char}(M) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}^F(A_n)}(\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)))$$

*para una buena $F$-filtración $\Gamma$ en $M$.*

Por la proposición 3.1, la definición de $\mathrm{Char}(M)$ no depende de la elección de una buena $F$-filtración.

*Observación* 3.2. Si $M = A_n/I$ para algún ideal $I$ de $A_n$ entonces por el corolario 2.1 tenemos

$$\mathrm{gr}^F\left(\frac{A_n}{I}\right) \simeq \frac{\mathrm{gr}^F(A_n)}{\mathrm{gr}^F(I)}$$

y entonces las definiciones 3.1 y 3.2 coinciden.

## 3.2 Dimensión de un $A_n$-módulo

La dimensión de Krull de un subconjunto $Z \subset \mathbb{C}^n$ cerrado de Zariski (denotada por $\dim(Z)$) es por definición [1] el máximo de las longitudes $m$ de las cadenas decrecientes

$$Z \supseteq Z_0 \supsetneq Z_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Z_m$$

de cerrados de Zariski en $Z$.

Por el *Nullstellensatz* de Hilbert la dimensión de Krull de $Z$ es igual a la dimensión de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/J$ si $J \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ un ideal que verifica $\mathcal{V}(J) = Z$. La dimensión de Krull del anillo es el máximo de las longitudes de las cadenas de ideales primos en el anillo (ver ejemplo [Har77, Chapter I, Prop. 1.7] ).

Por convención, la dimensión de Krull del conjunto vacío es $-1$.

**Definición 3.3.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado. La dimensión de $M$ (denotada $dim(M)$) es la dimensión de Krull de* $\mathrm{Char}(M)$*, la variedad característica de $M$.*

*Ejemplo* 3.1. Sea $I = A_nP$ para algún $P \in A_n$. Si $P$ es una constante no nula entonces $A_n/I = (0)$ y su dimensión es $-1$. Si $P = 0$ entonces $\mathrm{Char}(A_n/I) = \mathrm{Char}(A_n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ y su dimensión es $2n$. Si $P \in A_n \setminus \mathbb{C}$ entonces $\sigma(P) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ es un polinomio no constante y la dimensión de Krull de $\mathrm{Char}(A_n/I) = \mathcal{V}(\sigma(P))$ es $2n - 1$. En este caso $\dim(A_n/I) = 2n - 1$.

[1] Ejemplo en [Har77, 30, Ch. I, pag. 5].

## 3.3 Polinomio de Hilbert

Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado no nulo con una $B$-filtración $\Gamma = (M_k)_k$. Denotemos por

$$gHF_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

la función de Hilbert [2] del $\mathrm{gr}^B(A_n)$-módulo $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$. Por definición tenemos

$$gHF_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(v) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{M_v}{M_{v-1}}\right)$$

para todo $v \in \mathbb{N}$. Notemos que por la definición 2.2 cada $M_v$ (y cada cociente $M_v/M_{v-1}$) es un espacio de dimensión finita.

**Teorema 3.1 (Hilbert, Serre).** *Con la notación anterior, existe un único polinomio $gHP_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $gHF_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(v) = gHP_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(v)$ para $v \in \mathbb{N}$, $v$ suficientemente grande. Además, el grado de $gHP_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(t)$ es igual a $d-1$ donde $d = dim(\mathcal{V}(Ann_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M))))$. Además el grado de $gHP_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(t)$ es menor o igual a $2n-1$.*

*Demostración.* Ver [Har77, Ch, VII,12] o [ZS75, Ch I, th. 7.5].

**Definición 3.4.** *Llamaremos al polinomio $gHP_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ polinomio de Hilbert del módulo graduado $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$.*

*Observación* 3.3. Denotaremos por

$$HF_{M,\Gamma} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

a la aplicación definida por

$$HF_{M,\Gamma} = \sum_{k=0}^{v} gHF_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(k)$$

para todo $v \in \mathbb{N}$.
Por inducción en $v$ y usando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_{v-1} \longrightarrow M_v \longrightarrow \frac{M_v}{M_{v-1}} \longrightarrow 0$$

se puede probar que $HF_{M,\Gamma}(v) = dim_{\mathbb{C}}(M_v)$, pues cada elemento del sumando nos da la dimensión de $M_v/M_{v-1}$, es decir, la dimensión del conjunto de elementos que tiene grado exactamente $v$.
Si $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una aplicación, denotaremos por $\Delta\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación definida por $\Delta\phi(v)) = \phi(v+1) - \phi(v)$.
Por definición tenemos $\Delta HF_{M,\Gamma}(v) = gHF_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(v+1)$.

[2] También llamada función característica en [Har77, Ch VII, 12].

**Definición 3.5.** *Diremos que un polinomio $Q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio numérico si $Q(v) \in \mathbb{Z}$ para todo $v \in \mathbb{Z}$, con $v$ suficientemente grande.*

*Proposición* 3.3.

1. Si $Q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio numérico, entonces existen enteros $c_0, \dots, c_d$ tales que
$$Q(t) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{t}{k}$$
donde
$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}.$$
2. Si $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una aplicación, y si existe un polinomio numérico $Q(t)$ tal que $\Delta(\phi(v)) = Q(v)$ para $v \in \mathbb{N}$, $v$ suficientemente grande, entonces existe un polinomio numérico $R(t)$ tal que $\phi(v) = R(v)$ para $v \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Además, si el término líder de $Q(t)$ es $a_d t^d$ entonces el término líder de $R(t)$ es $\frac{a_d}{d+1} t^{v+1}$.

*Demostración.* Ver [Har77, Ch. VII, § 12] o [ZS75, Ch. I, prop. 7.3]

*Corolario* 3.1. Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado, con una $B$-filtración $\Gamma = (M_k)_k$. Entonces existe un único polinomio $HP_{M,\Gamma}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $HF_{M,\Gamma}(v) = HP_{M,\Gamma}(v)$ para todo $v \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Además, el grado de $HP_{M,\Gamma}(t)$ es igual al grado de la dimensión de Krull de $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(Ann_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M)))$ y entonces es menor o igual que $2n$.

*Demostración.* La prueba del corolario anterior viene del teorema 3.1, de la proposición anterior y del hecho de que $\Delta HF_{M,\Gamma}(v) = gHF_{\mathrm{gr}^\Gamma(M)}(v+1)$ para todo $v \in \mathbb{N}$.

**Definición 3.6.** *Llamaremos al polinomio $HP_{M,\Gamma}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ el polinomio de Hilbert de $M$ respecto a una $B$-filtración $\Gamma$.*

*Proposición* 3.4. Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado provisto de dos buenas $B$-filtraciones $\Gamma = (M_k)_k$ y $\Gamma' = (M'_k)_k$. Entonces los términos lideres de $HP_{M,\Gamma}(t)$ y $HP_{M',\Gamma'}(t)$ coinciden. En particular los grados de los polinomios de Hilbert son los mismos.

*Demostración.* Asumimos que
$$HP_{M,\Gamma}(t) = a_d t^d + (\text{términos de menor grado en } t)$$
y
$$HP_{M,\Gamma'}(t) = a'_{d'} t^{d'} + (\text{términos de menor grado en } t)$$

con $a_d$ y $a_{d'}$ no nulos. Por la proposición 2.11, existe un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos $M_{k-k_2} \subset M'_k \subset M_{k+k_2}$. Entonces para todo $k$ suficientemente grande tenemos

$$HP_{M,\Gamma}(k-k_2) \leq HP_{M,\Gamma'}(k) \leq HP_{M,\Gamma}(k+k_2).$$

dividiendo por $k^d$, tenemos para el primer término de la desigualdad

$$\frac{HP_{M,\Gamma}(k-k_2)}{k^d} = a_d\left(\frac{k-k_2}{k}\right)^d + \dots$$

que cuando $k \longrightarrow \infty$, tiende a $a_d$. De forma análoga obtenemos lo mismo para $HP_{M,\Gamma}(k+k_2)$. Entonces para

$$\frac{HP_{M,\Gamma'}(k)}{k^d} = a'_d k^{d'-d} + \dots$$

y por las desigualdades anteriores, obtenemos que cuando $k \longrightarrow \infty$, debe ser exactamente $a_d$. Luego tenemos varias opciones:

1. Si $d' < d$, entonces $HP_{M,\Gamma'}(k)/k^d \longrightarrow 0$, contradicción, pues sabemos que $a_d \neq 0$.
2. Si $d' > d$, entonces $HP_{M,\Gamma'}(k)/k^d \longrightarrow \infty$, contradicción.

Entonces, la única posibilidad que tenemos es que $d = d'$ y entonces $a_d = a'_{d'}$ ∎

**Definición 3.7.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado. La multiplicidad de $M$ es $e(M) = a_d d!$ donde $a_d t^d$ es el término líder del polinomio $HP_{M,\Gamma}(t)$ para cualquier buena $B$-filtración $\Gamma$ en $M$*[3].

*Observación 3.4.* Si $M \neq (0)$ entonces la multiplicidad $e(M)$ es un entero estrictamente positivo. Se sigue de la proposición 3.3 y el hecho de que $HP_{M,\Gamma}(k) \in \mathbb{N}$ para $k$ suficientemente grande.

Un resultado importante a resaltar es que la dimensión de un $A_n$-módulo y el grado del polinomio de Hilbert, con respecto a una buena $B$-filtración es el siguiente

**Teorema 3.2 (Th. 3.1., Bernstein [Ber71]).** *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado con una buena $B$-filtración $\Gamma$. Entonces* $\dim(M) = \deg(HP_{M,\Gamma}(t))$.

Hay que observar que, del teorema anterior podemos remarcar, que el polinomio de Hilbert $HP_{M,\Gamma}(t)$ y la multiplicidad $e(M)$ se definen usando una buena $B$-filtración

[3]Dicha notación aparece en [Ber72, Def. 1.1].

$\Gamma$ de $M$, la dimensión de $M$, $\dim(M)$, con la dimensión de Krull de la variedad característica $\mathrm{Char}(M)$, se define usando una buena $F-$filtración en $M$.

A cada buena $B$-filtración $\Gamma = (M_k)_k$ en un $A_n$-módulo finitamente generado $M$, le podemos asociar la variedad algebraica definida en $\mathbb{C}^{2n}$ con el ideal homogéneo $Ann_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M))$ el anillo graduado $\mathrm{gr}^B(A_n)$ (mirar la proposición 2.4).

Denotemos $\bigtriangledown(M) = \mathcal{V}(Ann_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M)))$ que es una variedad afín en el espacio afín $\mathbb{C}^{2n}$.
Por la proposición 3.2 la variedad algebraica $\bigtriangledown(M)$ es independiente de la elección de la buena $B$-filtración $\Gamma$ en $M$.
La variedad $\bigtriangledown(M)$ puede ser diferente de la variedad característica $\mathrm{Char}(M)$. Lo siguiente es un ejemplo de la situación. Consideremos $P = x_1^2 + \partial_1^2$ en el álgebra de Weyl $A_1(\mathbb{C})$ y definimos $M = \frac{A_1}{A_1 P}$. Entonces la variedad característica de $M$ es la línea $\xi_1 = 0$ en el plano $\mathbb{C}^2$ (con coordenadas $x_1, \xi_1$) mientras que $\bigtriangledown(M)$ es $\mathcal{V}(x_1^2+\xi_1^2) \subset \mathbb{C}^2$.

*Ejemplo* 3.2. Sea $I = A_n P$, un ideal principal propio en $A_n$. En primer lugar vamos a calcular $\dim(A_n/I)$ y la multiplicidad $e(A_n/I)$. Como $I = A_n P$, ya habíamos calculado en el ejemplo 3.1, las posibles dimensiones que puede tener $I$. Calculemos ahora la multiplicidad, en este caso lo podemos hacer un poco más general, pues el término líder del polinomio de Hilbert del $\mathrm{gr}^B(A_n)$-módulo graduado, por la observación 3.2, que es equivalente para $B$-filtraciones, por el isomorfismo que podemos establecer entre $A_n$ y $\mathbb{C}^{2n}$:

$$\mathrm{gr}^B(A_n/I) \simeq \frac{\mathrm{gr}^B(A_n)}{\langle \sigma^T(P) \rangle}.$$

Veamos cuál es el término principal del $HP(A_n/I)$, sabemos que $\Gamma_k(A_n/I) = \frac{B_k+I}{I} = \frac{B_k}{B_k \cap I}$, por tanto, tenemos que calcular

$$dim_{\mathbb{C}}(B_k) - dim_{\mathbb{C}}(B_k \cap I) = \binom{2n+k}{k} - \binom{2n+k-d}{k-d}.$$

Aquí hemos usado la proposición 2.1, donde $d = \mathrm{ord}^T(P)$. Desarrollando ambos binomios obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2n)!}(k+2n)(k+2n-1)\dots(k+1) - \frac{1}{(2n)!}(k-d+2n)\dots(k-d+1)\\
&= \frac{1}{(2n)!}\left(\left(k^{2n} + \frac{2n(2n+1)}{2}k^{2n-1} + \dots\right) - \left(k^{2n} + \sum_{i=-d+1}^{-d+2n} i k^{2n-1} + \dots\right)\right)\\
&= \frac{1}{(2n)!}\left(\left(k^{2n} + \frac{2n(2n+1)}{2}k^{2n-1} + \dots\right) - \left(k^{2n} + \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - d2n\right)k^{2n-1} + \dots\right)\right)\\
&= \frac{d}{(2n-1)!}k^{2n-1} + \dots,
\end{aligned}
$$

por tanto $e(A_n/I) = d$.

A continuación, vamos a ver que la dimensión del $A_n$-módulo $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ es $n$ y comprobar que las multiplicidades de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ y de $A_n$ son 1.

Sea $M = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, definimos $\Gamma_k M = B_k A_n \cap \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, por el corolario 3.1 y la proposición 2.1 sabemos que para un t suficientemente grande $HP_{M,\Gamma} = HF_{M,\Gamma}$, entonces tenemos

$$HP_{M,\Gamma}(t) = \frac{1}{n!}(t+n-1)\dots(t+1) = \frac{1}{n!}t^{n-1} + \text{ términos de menor grado}$$

Pero por el teorema 3.1, tenemos que el grado del polinomio de Hilbert es igual a $d-1$ con $d = \dim(\mathcal{V}(Ann_{\mathrm{gr}^B(A_n)}(\mathrm{gr}^\Gamma(M))))$, es decir, la dimensión de nuestra $M$ es igual a $n$. De forma similar, se puede obtener que la dimensión de $A_n$ es $2n$, pues tomando $M = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$, el polinomio sería, pues por el corolario 3.1 y la proposición 2.1 sabemos que para un t suficientemente grande $HP_{M,\Gamma} = HF_{M,\Gamma}$, entonces tenemos

$$HP_{M,\Gamma}(t) = \frac{1}{2n!}(t+2n)\dots(t+1) = \frac{1}{n!}t^{2n} + \text{términos de menor grado.}$$

Para calcular ahora la multiplicidad, sabemos que $e(M) = a_n n!$ y vimos que $a_n = \frac{1}{n!}$, que haciendo el producto, se comprueba que es 1.

Como también hemos calculado la dimensión y el polinomio de $A_n$, observando su coeficiente líder vemos que $a_{2n} = \frac{1}{2n!}$, por tanto al igual que en el caso de $M = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, su multiplicidad es 1.

**Teorema 3.3.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado y $N \subset M$ un submódulo. Entonces*

1. $\dim(M) = \text{máx}\{\dim(N), \dim(M/N)\}$.

2. *Si* $\dim(N) = \dim(M/N)$ *entonces* $e(M) = e(N) + e(M/N)$.
3. $\dim(M) \leq 2n$.

*Demostración.* Para comenzar vamos a considerar $\Gamma = (M_k)_k$ una buena $B$-filtración y denotemos por $\Gamma'$ y $\Gamma''$ las filtraciones inducidas en $N$ y $M/N$ respectivamente. Por la proposición 2.8 tenemos que

$$(\Gamma''/N)_k = \frac{M_k + N}{N} \simeq \frac{M_k}{M_k \cap N} = \frac{M_k}{\Gamma'_k}$$

Por tanto tenemos que $HF_{M,\Gamma}(k) = HF_{N,\Gamma'}(k) + HF_{M/N,\Gamma''}(k)$ y por tanto

$$HP_{M,\Gamma}(t) = HP_{N,\Gamma'}(t) + HP_{M/N,\Gamma''}(t).$$

Recordemos que la dimensión viene dado por el grado del polinomio, luego el grado del polinomio es el máximo de cada uno de sus sumandos, concluyendo así la primera parte.

Para la segunda, suponiendo que los grados de cada uno de los polinomios de Hilbert son los mismos, entonces los términos principales se pueden sumar, basta aplicar la definición de multiplicidad y como ambos son multiplicados por $d!$, desarrollando el factor común tenemos el resultado siguiente.

La última de las tres propiedades viene por la definición de dimensión, como estamos usando la dimensión de Krull y cualquier conjunto algebraico está contenido en $\mathbb{C}^{2n}$ que tiene dimensión igual a $2n$, entonces las dimensiones serán siempre menor o igual a $2n$. ∎

## 3.4 Módulos holónomos

**Teorema 3.4 (Desigualdad de Bernstein).** *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado no nulo. Entonces $dim(M) \geq n$.*

*Demostración.* Para esta demostración seguiremos la demostración de **A. Joseph**.

Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado y sea $(M_k)_k$ una $B$ filtración con $M_0 \neq 0$. Entonces la aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\phi_i : B_i \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(M_i, M_{2i})$$

definida por $\phi_i(P)(m) = Pm$ es inyectiva para todo $i \geq 0$.

Por inducción en $i$:

Para $i = 0$ tenemos $B_0 = \mathbb{C}$ y para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\phi_0(\lambda)$ es no nula siempre que $M_0 \neq (0)$ (que lo tenemos por hipótesis). Asumimos cierto para $i-1$, veámoslo para el caso $i$ Sea $P \in B_i$ no nulo. Asumimos $PM_i = (0)$. Como $M_i \neq (0)$, entonces $P$ no es una constante. Entonces, deben existir $j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $x_j$ aparece en al menos uno de los monomios en $P$ o debe existir $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\partial_k$ aparezca en al menos uno de los monomios en $P$. En el primer caso tenemos $[P, \partial_j] \neq 0$ y en el segundo $[P, x_k] \neq 0$.
Por la proposición 1.5 tenemos que $[P, \partial_j]$ y $[P, x_k]$ pertenecen a $B_{i-1}$. Además

$$[P, \partial_j]M_{i-1} \subset P\partial_j M_{i-1} + \partial_j P M_{i-1} = (0),$$

pues estaríamos en el caso $i-1$, que por H.I. es ciertoy análogamente $[P, x_k]M_{i-1} = (0)$. Entonces por la hipótesis de inducción $[P, \partial_j]$ y $[P, x_k]$ deben ser 0. Que es una contradicción, por tanto tenemos lo dicho al principio.

Sea ahora $m_1, \ldots, m_l$ un sistema de generadores finito de $M$ y $\Gamma = (M_k)_k$ una buena $B$-filtración definida por $M_k = \sum_j B_k m_j$. Entonces $M_0 = \sum_j \mathbb{C} m_j \neq 0$. De lo anterior tenemos que

$$\dim_{\mathbb{C}}(B_k) \leq \dim(Hom_{\mathbb{C}}(M_k, M_{2k})) = \dim_{\mathbb{C}}(M_k) \dim_{\mathbb{C}}(M_{2k}).$$

Para un entero $k$ suficientemente grande tenemos

$$\binom{2n+k}{k} = \dim_{\mathbb{C}}(B_k) \leq HP_{M,\Gamma}(k) HP_{M,\Gamma}(2k)$$

y entonces $2\deg(HP_{M,\Gamma}(t)) \geq 2n$ y $\dim(M) \geq n$. Aqui $HP_{M,\Gamma}(t)$ es el polinomio de Hilbert de $M$ respecto a la $B$-filtración $\Gamma$.

*Ejemplo* 3.3. Vamos a calcular la dimensión y la multiplicidad del cociente $\frac{A_n}{A_n(\partial_{k+1}, \ldots, \partial_n)}$ como $A_n$-módulo para cada $k = 0, \ldots, n-1$.

Escribamos $I_k = A_n(\partial_{k+1}, \ldots, \partial_n)$ y $M^{(k)} = \frac{A_n}{I_k}$. Usando el corolario 2.1, $gr^B(I_k) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]/(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. El polinomio de Hilbert del módulo cociente del graduado

$$\frac{gr^B(A_n)}{gr^B(I_k)} \simeq \frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]}{\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]/(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)}$$

es $\binom{t+n+k-1}{n+k-1}$ de manera análoga a proposición 2.1 apartado 7 u 8. Entonces el coeficiente líder del polinomio de Hilbert $HP(t)$ del $A_n$-módulo $\frac{A_n}{I_k}$ es $\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$. Entonces, $\dim(M^{(k)}) = n + k$ y $e(M^k) = 1$.

**Definición 3.8.** *Un $A_n$-módulo $M$ se dice holónomo si $M = (0)$ o $\dim(M) = n$.*

*Observación* 3.5. Para $P \in A_n \setminus \mathbb{C}$ el cociente $A_n/A_nP$ es holónomo si y solo si $n = 1$.

*Ejemplo* 3.4.

1. Sea $I$ un ideal propio en $A_1$ y $P$ un elemento no nulo en $I$. Llamemos $J = A_1P$. Consideremos la sucesión exacta de $A_1$-módulos finitamente generados

$$0 \longrightarrow I/J \longrightarrow A_1/J \longrightarrow A_1/I \longrightarrow 0.$$

   El cociente $A_1/J$ es holónomo (ver la observación anterior). Aplicando los teorema 3.3 y 3.4 tenemos que $A_1/I$ es holónomo. Sin embargo, el ideal $I$ no es holónomo (considerándolo como $A_1$-módulo): si así lo fuera, usando la sucesión exacta de $A_n$-módulos

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_1/I \longrightarrow 0$$

   en este caso tendríamos que $A_1$ sería también holónomo y esto no es cierto porque $\dim(A_1) = 2$.
2. Asumamos que $M$ es un $A_1$-módulo finitamente generado, de la forma $M = \sum_{l=1}^{r} A_1 m_l$, para algunos $m_1, \dots, m_r \in M$. Entonces $M$ es suma de los módulos del tipo $A_1/I_l$ donde $I_l = \mathrm{Ann}_{A_1}(m_l)$. Tenemos que $M$ es holónomo si y solo si todos los $I_l$ son no nulos.
3. El $A_n$-módulo $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es isomorfo a $\frac{A_n}{A_n(\partial_1,\dots,\partial_n)}$ y entonces es holónomo, por la proposición 3.5.

**Teorema 3.5.**

1. *Sea $M$ un $A_n$-módulo finitamente generado y $N$ un submódulo de $M$. Entonces $M$ es holónomo si y solo si $N$ y $M/N$ son holónomos. Si $M$ es holónomo entonces $e(M) = e(N) + e(M/N)$.*
2. *Si $M_l, l = 1, \dots, r$ es un $A_n$-módulo holónomo, entonces $\bigoplus_l M_l$ es holónomo y*

$$e(\oplus_{l=1}^{r} M_l) = \sum_{l=1}^{r} e(M_l)$$

*Demostración.* Es trivial si $N = (0)$ o $N = M$. Asumiendo que $N$ es un submódulo propio de $M$ y $M \neq (0)$, del teorema 3.3 tenemos $\dim(M) = \max\{\dim(N), \dim(M/N)\}$ y por lo tanto si $N$ y $M/N$ son holónomos, entonces $M$ lo es.

Del teorema 3.4 tenemos que $\dim(N) \geq n$ y $\dim(M/N) \geq n$.
Asumiendo que $M$ es holónomo. Entonces tenemos que $n = \dim(M) = \dim(N) = \dim(M/N)$. Aplicando otra vez el teorema 3.3 tenemos que $e(M) = e(N) + e(M/N)$.
La segunda parte se prueba usando inducción finita, y asumiendo que $M = \bigoplus_{l=1}^{i} M_l$ y $N = \bigoplus_{l=1}^{i-1} M_l$ tenemos el resultado.

**Definición 3.9.** *Sea $M$ un módulo de $A_n$. Dada una cadena de submódulos de $M$*

$$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$$

*diremos que n es la longitud de $M$ de la cadena. La longitud de $M$ se define como la longitud más grande de sus cadenas. Si no existe una cadena maximal, entonces la longitud de $M$ es infinita.*

**Teorema 3.6.** *Sea $M$ un $A_n$-módulo holónomo. Entonces tenemos*

1. *$M$ es un módulo de torsión, es decir, para cada $m \in M$ existe $P \in A_n$, $P \neq 0$ tal que $Pm = 0$.*
2. *$M$ es un módulo artiniano de longitud finita. Además, la longitud de $M$ es menor o igual que $e(M)$.*

*Demostración.*

1. Podemos asumir que $M \neq (0)$, pues si no es trivial. Tomemos $m \in M \setminus \{0\}$. Consideremos el morfismo de $A_n$-módulos
$$\phi : A_n \longrightarrow M$$
definido por $\phi(P) = Pm$. La imagen de $\phi$ es no nula, pues $m \in Im(\phi) \subset M$ y, además, es holónomo, por la primera parte del teorema anterior. Como $A_n$ no es holónomo, entonces el núcleo $\mathrm{Ker}(\phi)$ no puede ser nulo, pues si lo fuera, entonces existiría un isomorfismo entre $A_n$y $M$, pero $A_n$ no es holónomo y $M$ sí, contradicción. Por tanto existe un elemento $Q \neq 0$ tal que $Qm = 0$.
2. Sea $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$una cadena decreciente de $A_n$-módulos de $M$. Por el teorema anterior, cada $M_i$ es holónomo. Si existe un $i$ tal que $M_i = (0)$, entonces la cadena es estacionaria. Asumiendo que la cadena es no estacionaria y que cada $M_i$ es no nulo, de la sucesión exacta
$$0 \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i+1} \longrightarrow 0$$
tenemos que $e(M_i) = e(M_{i+1}) + e(M_i/M_{i+1})$. Entonces tenemos que $e(M) = e(M_{r+1}) + \sum_{i=0}^{r} e(M_i/M_{i+1}) \geq r+1$, para cada $r \leq 0$. Esto es una contradicción. Además la longitud de $M$ debe ser menor o igual que $e(M)$.

*Observación* 3.6. Hay $A_n$-módulos finitamente generados y de longitud finita, e incluso irreducibles que no son holónomos.
Un ejemplo de esto (dado por J. T. Stafford) es el siguiente. Considerando $M = A_2(\mathbb{C})/A_2(\mathbb{C})P$ con $P = x_2\partial_1\partial_2 - \partial_2 + x_1 + x_2$, tenemos que $\dim(M) = 3$ y que $M$ no es holónomo (ver ejemplo 3.5)

*Proposición* 3.5. Veamos que si un $A_n$-módulo es holónomo con multiplicidad 1, entonces es irreducible.

*Demostración.* Por hipótesis, tenemos que $M$ es holónomo, con $e(M) = 1$ y consideremos $N \subset M$ un submódulo de $M$ no nulo. Por el teorema 3.5 $1 = e(N) + e(M/N)$. Como el entero $e(N)$ es estrictamente positivo (ver la observación 3.4), por tanto tenemos que $e(N) = 1$ y $e(M/N) = 0$. La última igualdad implica que $N = M$.

*Observación* 3.7. Como verificamos en el ejemplo 3.2, sabemos que $\mathbb{C}[x]$ es un $A_n$-módulo holónomo con $e(\mathbb{C}[x]) = 1$, por tanto por la proposición anterior, es irreducible.

*Proposición* 3.6 (Cor. 1.4, Bernstein). Sea $M$ un $A_n$-módulo provisto de una $B$-filtración $\Gamma = (M_k)_k$ tal que existen dos racionales $c_1, c_2$ que satisfacen

$$dim_{\mathbb{C}}(M_j) \leq \frac{c_1}{n!}j^n + c_2(j+1)^{n-1}$$

para $j \in \mathbb{N}$, con $j$ suficientemente grande. Entonces $M$ es finitamente generado. Además, es holónomo y $e(M) \leq c_1$.

*Demostración.* Comencemos probando que para cualquier submódulo $N$ finitamente generado de $M$, se verifica que es holónomo y que $e(N) \leq c_1$. Como $N$ es finitamente generado admite una buena $B$-filtración $\Gamma_N = (N_k)_k$. Considerando la $B$-filtración $\Gamma' = (M_k \cap N)_k$, por la proposición 2.11 existe un entero positivo $r$ tal que $N_j \subset M_{j+r} \cap N$ para todo $j$. Entonces tenemos

$$dim_{\mathbb{C}}(N_j) \leq dim_{\mathbb{C}}(M_{j+r}) \leq \frac{c_1}{n!}(j+r)^n + c_2(j+r+1)^{n-1}$$

y entonces el grado del polinomio de Hilbert de $N$ con respecto a $\Gamma_N$ es menor o igual a $n$. Aplicando el teorema 3.4 tenemos que $dim(N) = n$ y entonces $N$ es holónomo. Además, de la desigualdad anterior obtenemos que $e(N) \leq c_1$. Probaremos ahora que $M$ es finitamente generado. Si $M$ es no nulo, consideremos un elemento $m_1 \in M$ no nulo. Denotemos $M_1 = A_n m_1$. Si $M \neq M_1$ consideramos un elemento $m_2 \in M \setminus M_1$ y denotamos $M_2 = A_n m_1 + A_n m_2$. Por reducción al absurdo, supongamos que podemos construir una cadena infinitamente creciente

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$$

de submódulos de $M$ finitamente generados. En la primera parte de la prueba hemos visto que cada $M_i$ es holónomo y $e(M_i) \leq c_1$. Tenemos también que $e(M_i) \geq i$ para cada $i$, lo cual es una contradicción. Luego existe un número finito de generadores $m_1, m_2, \ldots, m_r$ de $M$.

# 4 El polinomio de Bernstein-Sato

## 4.1 El polinomio de Bernstein

Consideremos $\mathbb{C}(\mathbf{x})$, el cuerpo de fracciones del dominio $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. los elementos de $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ son funciones racionales, es decir, cocientes $\frac{g}{f}$ de polinomios $g, f \in C[\mathbf{x}]$ con $f \neq 0$.

Para estas funciones racionales $\frac{g}{f}$ la derivada parcial $\partial_i \left(\frac{g}{f}\right)$

$$\frac{\partial_i(g)f - g\partial_i(f)}{f^2}$$

es también una función racional. Esto permite extender a la acción de $A_n$ en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ a otra en $\mathbb{C}(\mathbf{x})$.

Para cualquier polinomio $f = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ no nulo, el anillo

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f = \left\{ \frac{g}{f^m} \in \mathbb{C}(x) | g \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

es un $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-módulo. De hecho, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ tiene también una estructura natural como $A_n$-módulo pues $\partial_i \left(\frac{g}{f}\right) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ para todo $g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ y todo $m \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ es simplemente el anillo $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Si $f$ no es constante, entonces los elementos en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ son funciones racionales con polos en la hipersuperficie afín $\mathcal{V}(f) := \{a \in \mathbb{C} | f(a) = 0\}$.

Si $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \setminus \mathbb{C}$ entonces $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ no es finitamente generado como $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-módulo. Sin embargo tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.1 (J. Bernstein).** *$\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ es un $A_n$-módulo finitamente generado.*

Este teorema se debe a J Bernstein [Ber72]. De hecho se puede probar un resultado más fuerte:

**Teorema 4.2 (§2, Bernstein [Ber72]).** *$\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ es un $A_n$-módulo holónomo.*

*Demostración.* Llamemos $N = \mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ con $\deg(f) = d \geq 0$, con esto nos garantizamos que $f \neq 0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$N_k = \{g/f^k \in \mathbb{N} | \deg(g) \leq (d+1)k\}.$$

Probemos primero que $\Gamma = (N_k)_k$ una $B$-filtración de $N$.

Es claro que $N_k \subset N_l$ para $k \leq l$.

Sea $g/f^k \in N_k$. Tenemos que $\deg(x_i g) = \deg(g)+1 \leq (d+1)k+1 \leq (d+1)(k+1)$. Esto prueba la inclusión $x_i N_k \subset N_{k+1}$. Tenemos también

$$\partial_i \left( \frac{g}{f^k} \right) = \frac{\partial_i(g) f - kg\partial_i f}{f^{k+1}}$$

y $\deg(\partial_i(g)f - kg\partial_i f) \leq d + \deg(g) - 1 \leq d - 1 + (d+1)k \leq (d+1)(k+1)$. Esto prueba que $\partial_i N_k \subset N_{k+1}$. Entonces $B_1 N_k \subset N_{k+1}$. Además, como $B_l = (B_1)^l$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial tenemos que $B_l N_k \subset N_{k+l}$.

Probaremos ahora que $N = \bigcup_k N_k$. Tomamos $g/f^k \in N$ y asumimos que $\deg(g) = m$. Entonces tenemos

$$\frac{g}{f^k} = \frac{gf^m}{f^{k+m}}$$

y $\deg(gf^m) = m + dm \leq (d+1)(k+m)$. Esto prueba que $g/f^k \in N_{m+k}$.

Entonces hemos probado que $(N_k)_k$ es una $B$-filtración de $N = \mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$.

Veamos que satisface la hipótesis de la proposición 3.6 para $c_1$ y $c_2$ adecuados.

La dimensión de $N_k$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial está acotada por el número de monomios $x^\alpha$ de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ de grado $|\alpha| \leq (d+1)k$. Este número es

$$\binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k),$$

como en la proposición 2.1, donde $p(t)$ es un polinomio en $t$ con coeficientes racionales y grado menor o igual que $n-1$. Entonces existe un número entero $c_2 > 0$ tal que

$$dim_{\mathbb{C}}(N_k) \leq \binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k) \leq \frac{(d+1)^n k^n}{n!} + c_2(k+1)^{n-1}$$

para $k$ suficientemente grande. Y por la proposición 3.6 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ es holónomo.

∎

*Observación* 4.1. De la prueba anterior podemos deducir también, aplicando la proposición 3.6, que la multiplicidad de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$ está acotada por $(d+1)^n$. Veámoslo con los siguientes ejemplos:

*Ejemplo* 4.1. Sea $f = x_1$ y consideremos el ideal anulador $\mathrm{Ann}_{A_n}(\frac{1}{f})$, que por definición es el ideal $\{P \in A_n | P(1/f) = 0\}$.

1. Veamos que $C[\mathbf{x}]_f = A_n\frac{1}{f}$. Por definición $A_n\frac{1}{f} \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}]_f$. La igualdad
$$g\partial_1\left(\frac{1}{x_1^m}\right) = \frac{(-m)g}{x_1^{m+1}}$$
se mantiene para cualquier $g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ y cualquier $m \in \mathbb{N}$. Esta igualdad prueba que cualquier función racional del tipo $\frac{g}{x_1^{m+1}}$ pertenece a $A_n\frac{1}{f}$ y eso prueba la igualdad deseada.
2. Comprobemos que $\mathrm{Ann}_{A_n}(1/f) = A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$. La inclusión de derecha a izquierda es obvia. Luego probemos que $\mathrm{Ann}_{A_n}(1/f) \subset A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$, para ello consideremos un elemento $P = P(\lambda, \partial) \in A_n$ que anule a $\frac{1}{x_1}$. Podemos escribir
$$P = Q_2\partial_2 + \ldots + Q_n\partial_n + P_1$$
para algunos $Q_2, \ldots, Q_n, \in A_n$ y $P_1 = \sum_l a_l(x)\partial_1^l$ para algunos $a_l(x) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$. El operador $P_1$ anula a $\frac{1}{x_1}$ pues $P$ también lo hace.
Llamaremos al conjunto $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ $\mathbf{x}'$, entonces podemos escribir
$$P_1 = Q(x_1\partial_1 + 1) + S(\mathbf{x}', \partial_1) + r(\mathbf{x})$$
para ciertos $Q, S(\mathbf{x}', \partial_1) \in A_n$, $r(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ y $S := S(\mathbf{x}', \partial_1) = \sum_{k\geq 0} b_k(\mathbf{x}')\partial_1^k$ para algún $b_k(\mathbf{x}') \in \mathbb{C}[\mathbf{x}'] := \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]$.
Tenemos que $0 = P_1\left(\frac{1}{x_1}\right) = S\left(\frac{1}{x_1}\right) + \frac{r(\mathbf{x})}{x_1}$. Asumiendo que $S$ es no nulo, sea $d > 0$ el grado de $S$ respecto de $\partial_1$. El orden del polo de $S_1\left(\frac{1}{x_1}\right)$ en $x_1 = 0$ es $d+1$ mientras que $\frac{r(\mathbf{x})}{x_1}$ tiene un polo de orden al menos 1. Esto implica que $d = 0$ lo cual es una contradicción. Entonces tenemos que $S = 0$ y $r(\mathbf{x}) = 0$ pues $\frac{r(\mathbf{x})}{x_1} = 0$. Esto prueba que $P = Q_2\partial_2 + \ldots + Q_n\partial_n + Q(x_1\partial_1 + 1) \in A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$.

3. En último lugar comprobemos que $\dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f) = n$ y $e(\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f) = 2$. Denotaremos $I = A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ y sea $J \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]$ el ideal generado por $(x_1\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Tenemos la inclusión $J \subset gr^F(I)$ por la construcción dada, entonces sabemos que $\mathcal{V}(gr^F(I)) \subset \mathcal{V}(J)$. El último conjunto es un conjunto algebraico afín con dimensión de Krull $n$, entonces $\dim(A_n/I) = \dim(\mathcal{V}(gr^F(I)) \leq n$ y por el teorema 3.4 $\dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f) = n$.
Para el calculo de la multiplicidad. Probaremos primero la igualdad $\mathrm{gr}^B(I) = J$. Por [CJ10, Th. A.1], podemos observar que cualquier elemento $P \in I$ no nulo puede ser escrito como
$$P = Q_2\partial_2 + \ldots + Q_n\partial_n + Q(x_1\partial_1 + 1)$$
donde $\mathrm{ord}^T(Q) = \mathrm{ord}^T(P) - 2$ y $\mathrm{ord}^T(P) - 1$ para $i = 2, \ldots, n$. Entonces, por la proposición 1.5, tenemos
$$\sigma^T(P) = \sum_{i=2}^{n} \sigma^T(Q_i)\xi_i + \sigma^T x_1\xi_1$$
y entonces $\sigma^T \in J$. Esto prueba la igualdad $gr^B(I) = J$. Ahora calcularemos la multiplicidad, para ello observaremos el término líder del polinomio de Hilbert $gHP_{\mathrm{gr}^\Gamma(\mathbb{C}[x]_f}(t)$ del módulo graduado cociente
$$\frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}, \xi]}{J} \simeq \mathrm{gr}^\Gamma\left(\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f\right)$$
es igual a $\frac{2}{(n-1)!}t^{n-1}$, pues por el teorema 3.2, el grado del polinomio de Hilbert es el mismo que la dimensión de nuestro espacio. Comprobemos entonces que la dimensión es esa, para ello usaremos la fórmula de la proposición 2.2 apartado 2, entonces como nuestro $\mathbf{x}' = [x_2, \ldots, x_n]$, tenemos $n - 1$ variables, y el $k$ de nuestra $\varepsilon F \varepsilon$ sería $d$, luego la dimensión es $\binom{n+d-1}{n-1}$, cuyo término de mayor grado en las $d$, sería $\frac{d^{n-1}}{(n-1)!}$. Ahora, hay que observar ese hecho, pues queremos un polinomio de grado $n$ en las $t$, para ello podemos multiplicar por $x_1$ o $\partial_1$, pero de forma independiente, pues si aparecieran las dos en el mismo término, ese término se anularía en nuestro módulo, tenemos entonces dos formas de obtener el grado $n$ desde el polinomio de Hilbert de grado $n-1$. entonces el término principal de nuestra "F", sería $\frac{2}{(n-1)!}d^{n-1}$, y usando la fórmula de la multiplicidad obtenemos $e(\mathbb{C}[\mathbf{x}]_f) = 2$.

Sea $f$ un polinomio de $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ no nulo. Sea $s$ una nueva variable y $\mathbb{C}(x)$ el cuerpo de funciones racionales en $s$. Denotaremos por $A_n(s)$ al álgebra de Weyl sobre el cuerpo

$\mathbb{C}(s)$, $A_n(s) := A_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s)$. Denotamos por $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]_f f^s$ al $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]_f$-módulo libre de rango uno generado por el símbolo formal $f^s$. Este módulo libre admite una estructura natural de $A_n(s)$-módulo a la izquierda definida por

$$\partial_i f^s = s f^{-1} \partial_i(f) f^s$$

para $i = 1, \dots, n$ (la acción de $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]$ es la natural dada por el producto).

*Proposición 4.1.* $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]_f f^s$ es un $A_n(s)$-módulo holónomo.

*Demostración.* Llamemos $N = \mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]_f f^s$ y $\deg(f) = d \geq 0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$N_k = \left\{ \frac{g(s, \mathbf{x})}{f^k} \in N \,|\, \deg(g) \leq (d+1)k \right\}.$$

Se puede probar de forma similar a la prueba del teorema 4.2 que la familia $\Gamma = (N_k)_k$ es una $B$-filtración en $N$.

Probaremos ahora que satisface la hipótesis de la proposición 3.6, para $c_1$ y $c_2$ adecuados.

La dimensión de $N_k$ como $\mathbb{C}(s)$-espacio vectorial está dada por el número de monomios $x^\alpha$ en $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]$ con grado $|\alpha| \leq (d+1)k$. Este número es

$$\binom{(d+1)k + n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k)$$

donde $p(t)$ es un polinomio en $t$ con coeficientes racionales y grado menor o igual a $n - 1$. Entonces existe un entero $c_2 > 0$ tal que

$$dim_{C(s)}(N_k) \leq \binom{(d+1)k + n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k)$$
$$\frac{(d+1)^n k^n}{n!} + c_2(k+1)^{n-1}$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces por la proposición 3.6 $N$ como $A_n(s)$-módulo es holónomo. ∎

**Teorema 4.3.** *Sea $f$ un polinomio no nulo en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Entonces existen un polinomio no nulo $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ y un operador diferencial $P(s) \in A_n[s]$ que verifican la siguiente igualdad en $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]_f f^s$:*

$$P(s) f f^s = b(s) f^s. \tag{4.1}$$

*Demostración.* El módulo $A_n(s)f^s$ es un $A_n(s)$-submódulo de $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]_f f^s$ y entonces, por la proposición anterior, es holónomo y además de dimensión finita (ver los teoremas 3.5 y 3.6). Entonces la cadena descendente

$$A_n(s)f^s \supseteq A_n(s)f f^s \supseteq \ldots \supseteq A_n(s)f^l f^s \supseteq \ldots$$

es estacionaria. Por tanto existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^l f^s \in A_n(s)f^{l+1} f^s.$$

Entonces, existe $Q(s) \in A_n(s)$ tal que $f^l f^s = Q(s)f^{l+1} f^s$. Entonces $f^s = Q(s-l)f f^s$. Sea $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polinomio no nulo tal que $P(s) := b(s)Q(s-l) \in A_n[s]$. Por la construcción dada tenemos entonces $b(s)f^s = P(s)f f^s$. ∎

Entonces tenemos que para un polinomio no nulo $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ el conjunto de polinomios $c(s) \in \mathbb{C}[s]$ tal que existe un operador $P(s) \in A_n(s)$ tal que $P(s)f f^s = c(s)f^s$ es un ideal no nulo en $\mathbb{C}[s]$. Denotaremos a este ideal por $\mathcal{B}_f$.

**Definición 4.1.** *Sea $f$ un polinomio no nulo en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. el generador mónico del ideal $\mathcal{B}_f$ se denota por $b_f(s)$ y se llama el **Polinomio de Bernstein** (o **Polinomio de Bernstein-Sato** de $f$).*

## 4.2 Ejemplos y propiedades

La ecuación funcional 4.1 es una identidad en $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}] \cdot f^s$ que es un módulo libre de rango uno sobre $\mathbb{C}(s)[\mathbf{x}]$, con $s$ indeterminada.

Podemos considerar el submódulo $A_n \cdot f^s$ generado por $f^s$. La ecuación 4.1 significa que la acción de $s$ en el cociente

$$\tilde{s} : \frac{A_n[s] \cdot f^s}{A_n[s] \cdot f^{s+1}} \longrightarrow \frac{A_n[s] \cdot f^s}{A_n[s] \cdot f^{s+1}},$$

que es una $A_n$-aplicación lineal

$$[P(s)f^s] \longrightarrow [sP(s)f^s],$$

admite un polinomio minimal pues el módulo $\frac{A_n[s] \cdot f^s}{A_n[s] \cdot f^{s+1}}$ es finito sobre $A_n$.

Algunas veces denotamos $f^m \cdot f^s = f^{s+m}$, que se corresponde con la idea intuitiva de cambiar $s$ con $s+m$, inducido por el automorfismo $A_n$-lineal sobre $\mathbb{C}[x]_f(s) \cdot f(s)$, que restringido a $A_n[s] \cdot f^s \longrightarrow A_n[s] \cdot f^{s+m}$ viene dado por $P(s)f^s \longrightarrow P(s+m)f^{s+m}$.

Si $f$ es una unidad en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ entonces $b_f = 1$.

Si $f$ no es constante, obtenemos por construcción $s = -1$ en la ecuación funcional: $P(-1) \cdot 1 = b(-1)\frac{1}{f}$, y esto implica $b(-1) = 0$, porque $P(-1)1 \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ y $b(-1)/f \notin \mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Podemos escribir en este caso $b(s) = (s+1)\widetilde{b}(s)$.

Por construcción si $s = -1$ en la ecuación, ahora tenemos $P(-1) \cdot 1 = 0$ y entonces

$$P(-1) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}}, \quad P(s) = (s+1)Q(s) + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \tag{4.2}$$

Llevando esto sobre la ecuación funcional obtenemos el siguiente resultado:

*Proposición* 4.2. El polinomio $\widetilde{b}(s)$ es el polinomio minimal de la acción de $s$ en $(s+1)\frac{A_n \cdot f^s}{A_n \cdot f^{s+1}}$. Esto es lo mismo que el polinomio minimal mónico para esta ecuación funcional:

$$\widetilde{b}(s) f^s = \left[ \sum_{i=1}^{n} Q(s) \cdot f + A_i(s) \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \right] \cdot f^s.$$

Para resumir este hecho escribimos $\widetilde{b}(s) f^s \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, s](f + J(f)) \cdot f^s$, donde $J(f)$ el ideal jacobiano de $f$ generado por $\frac{\partial f}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}$.

A continuación daremos unos cuantos ejemplos.

*Ejemplo* 4.2. Cuando la hipersuperficie definida por $f$ es lisa tenemos que $b_f(s) = s+1$. Esto se puede probar fácilmente reduciendo el cálculo al caso $f = x_1$. El inverso de esto es cierto: la igualdad $b_f(s) = s+1$ puede solo pasar en el caso de las hipersuperficies lisas. Se puede encontrar el resultado en [BM96] de Briançon y Maisonobe.

Cuando $f = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ obtenemos por cálculos de forma directa que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\alpha_i}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \cdot f^{s+1} \\ &\qquad = \prod_{i=1}^{n} \left( \prod_{k=0}^{\alpha_i - 1} \left( s + 1 - \frac{k}{\alpha_i} \right) \right) \cdot f^s. \end{aligned}$$

Esta última expresión obtenida tenemos que sería nuestra $b_f$, pero es más difícil de verlo.

Sea $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ y sea $\triangle$ el operador laplaciano, entonces hay una ecuación funcional para el polinomio $b(s) = (s+1)\left(s + \frac{n}{2}\right)$. Para ser precisos

$$\triangle\, f^{s+1} = (s+1)(4s+2n) \cdot f^s.$$

La minimalidad del polinomio no es obvia pero se puede deducir del resultado que veremos un poco más tarde.

**Definición 4.2.** *Definimos un sistema de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, donde $w_i \in \mathbb{Q}_+$, para todo $i$. Sea $I \in \mathbb{N}^n$, el sistema de pesos $\mathbf{w}$ define la siguiente aplicación*

$$\langle w, I \rangle = w_1 I_1 + \ldots + w_n I_n.$$

Gracias a la definición anterior, podemos definir otro tipo de polinomios, los polinomios cuasi-homogéneos:

**Definición 4.3.** *Sea $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, diremos que $f$ es cuasi-homogéneo de peso $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ de grado $\rho$, si verifica*

$$f = \sum_{\langle \mathbf{w}, I \rangle = \rho} f_I x^I$$

Veámoslo con un ejemplo

*Ejemplo* 4.3. Sea $f = x^2 + y^3$, definimos un sistema de pesos $\mathbf{w} = (3,2)$, es decir, le asignamos a la variable $x$ peso 3 y a la variable $y$ peso 2. Sean $I_1 = (2,0)$ e $I_2 = (0,3)$, los grados de las componentes de $f$, y calculamos el grado $\rho$, $\langle (3,2), I_i \rangle = 6$ para $i = 1,2$. Luego podemos expresar $f$ como suma según la formula dada en la definición anterior. Por tanto, $f$ es cuasi-homogéneo.

*Observación* 4.2. Hay que observar que el sistema de pesos no es único, es decir, que para el polinomio del ejemplo anterior, pues el sistema de pesos $\mathbf{v} = (1/2, 1/3)$, también es válido, pero de grado 1.

El siguiente elemento que necesitamos construir son las singularidades de $f$:

**Definición 4.4.** *$f$ tiene una singularidad aislada en $0$ si $\{0\}$ es un punto aislado del conjunto definido por las ecuaciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

*Y definimos el ideal jacobiano como el ideal generado por las derivadas parciales, es decir,* $J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

*Observación* 4.3. Hay que observar que si $f$ tiene una singularidad aislada en el 0, entonces $dim\left(\frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}]}{J(f)}\right) < \infty$

Y ahora introduciremos una proposición que nos ayudará a calcular el polinomio de Bernstein de una función cuasi-homogénea:

*Proposición* 4.3. Sea $f$ un polinomio cuasi-homogéneo con una singularidad aislada en el $(0,0)$ y $\mathbf{w}$-peso 1. Sea $M$ una base de monomios del cociente $\frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}]}{J(f)}$. Sea $|\mathbf{w}| = \sum w_i$, y sea $\prod$ el conjunto de grados sin repetición de los elementos de $M$. Entonces:

$$b_f(s) = (s+1)\prod_{\rho\in\prod}(s+|\mathbf{w}|+\rho)$$

*Demostración.* Ver [Gra10, Ch. 4, Section 3]. ∎

*Ejemplo* 4.4. Usaremos el ejemplo anterior, es decir $f = x^2 + y^3$. Ya vimos que era cuasi-homogéneo y un sistema de pesos para él de grado 1 es $\mathbf{w} = (1/2, 1/3)$. Para aplicar la proposición anterior vamos a comprobar que posee un cero aislado en el punto $(0,0)$:

$$\partial_1 f = 2x.$$
$$\partial_2 f = 3y^2.$$

Donde el único punto donde $\partial_i f = 0$ y $f = 0$ para $i = 1, 2$, es el $(0,0)$. Luego es una singularidad aislada. Por tanto, definimos $M$, que es la base de monomios del cociente $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{J(f)} = \mathbb{C}\overline{1} + \mathbb{C}\overline{y}$. Calculamos el grado de cada una de las componentes del cociente anterior:

$$\langle(1/2, 1/3), 1\rangle = 0$$
$$\langle(1/2, 1/3), y\rangle = 1/3$$

entonces tenemos que $\prod = \{0, 1/3\}$. Usando la proposición anterior, tenemos que

$$b_f(s) = (s+1)(s+|\mathbf{w}|+0)((s+|\mathbf{w}|+1/3) = (s+1)(s+5/6)(s+7/6)$$

Y con todo esto calculado, una ecuación funcional asociada a $f = x^2 + y^3$ es

$$P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$$

donde

$$P(s) = \frac{1}{2}(x\partial_1 + 1)s + \frac{1}{6}xy\partial_1\partial_2 + \frac{1}{9}y^2\partial_2^2 + \frac{3}{4}x\partial_1 + \frac{11}{18}y\partial_2 + 35/36.$$

# A Apéndices

## A.1 Anillos y módulos graduados

En esta sección auxiliar definiremos qué es un anillo graduado y daremos algunas de sus propiedades.

**Definición A.1.** *Sea $R$ una $K$-álgebra. Diremos que $R$ es graduada si existen $K$-espacios vectoriales $R_i \subset R$ tales que*

1. $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$,
2. $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$.

*donde los $R_i$ son las componentes homogéneas de $R$. Los elementos de $R_i$ se llaman elementos homogéneos de grado $i$. Se verifica $R_i = 0$ si $i < 0$. Por lo tanto diremos que la graduación es positiva.*

Un ejemplo de anillo graduado sería el anillo de los polinomios $K[\mathbf{x}]$, donde los monomios $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ con $k_1 + \dots + k_n = m \in \mathbb{N}$ forman una base de la componente homogénea de grado $m$.

Sea $R$ una $K$-álgebra graduada. Un ideal bilátero $I \subseteq R$ es un ideal graduado si $I = \bigoplus_{i \geq 0}(I \bigcap R_i)$. Debido a esto un ideal graduado es generado por elementos homogéneos.

Sea ahora $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ otra $K$-álgebra graduada. Un homomorfismo de $K$-álgebras $\phi : R \longrightarrow S$ es graduado si $\phi(R_i) \subseteq S_i$. Por lo tanto un homomorfismo graduado preserva el grado.

Estos conceptos de homomorfismo graduado e ideal graduado están relacionados:

*Proposición* A.1. Sea $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ y $S = \oplus_{i \geq 0} S_i$ $K$-álgebras graduadas

1. El núcleo de un homomorfismo graduado de $K$-álgebras $\phi : R \longrightarrow S$ es un ideal bilátero graduado de R.
2. Si $I$ es un ideal graduado bilátero de $R$ entonces $R/I$ es una $K$-álgebra graduada.

*Demostración.* Ver [Cou95, Ch. 7, prop 1.1] ∎

Esto nos da una manera de generar ejemplos de anillos graduados. Sean $F_1, \ldots, F_n$ polinomios homogéneos en $K[\underline{x}]$. El cociente $K[\underline{x}]/(F_1, \ldots, F_n)$ es un anillo graduado.

Una álgebra graduada admite un tipo especial de módulos. Sea $R = \oplus_{i \leq 0} R_i$ una $K$-álgebra graduada. Un $R$-módulo a la izquierda $M$ se dirá graduado si existen $K$-espacios vectoriales $M_i$ para $i \leq 0$ tales que

1. $M = \oplus_{i \leq 0} M_i$,
2. $R_i M_i \subseteq M_{i+j}$.

Los $M_i$ son las componentes homogéneas de grado $i$ de $M$. Hay que notar que esta definición de módulo graduado depende del anillo graduado $R$.

Podemos definir también los submódulos y módulos graduados homogéneos. Sea $R$ una $K$-álgebra graduada y sean $M, M'$ $R$-módulos a la izquierda. Un submódulo $N \subset M$ es un submódulo graduado si $N = \oplus_{i \leq 0}(N \cap M_i)$. Un homomorfismo de $R$-módulos $\phi : M \longrightarrow M'$ es graduado si $\phi(M_i) \subset M'_i$. Se sigue que $\operatorname{Ker}(\phi)$ es un submódulo graduado y el cociente $M/N$ es un $R$-módulo graduado, proposición idéntica al caso de anillos graduados.

Esto nos permite generar ejemplos de módulos graduados. Sea $R = \oplus_{i \leq 0} R_i$ una $K$-álgebra graduada y sea $R^n$ un $R$-módulo libre a la izquierda de rango $n$. Este módulo tiene un grado natural, la $k$-ésima componente homogénea es el espacio vectorial

$$\sum_{i_1 + \ldots + i_n = k} (R_{i_1} \oplus \ldots \oplus R_{i_n}).$$

Si $L$ es un submódulo graduado de $R^n$, entonces $R^n/L$ es un módulo graduado a la izquierda finitamente generado.

## A.2 Módulos noetherianos

Una clase muy importante de anillos y módulos son los llamados noetherianos. Su importancia radica en que son mínimamente tratables: todo ideal de un tal anillo posee un sistema finito de generadores, y análogamente, todo submódulo de un módulo noetheriano está finitamente generado. Es decir, la noetherianidad nos permite reducir muchos problemas al caso finitamente generado, que suele ser bastante más sencillo de tratar. Aunque hay que tener en cuenta que si tenemos un módulo finitamente generado pude tener un submódulo que no lo es. Un ejemplo es el anillo de polinomios en infinitas variables $K[x_1, \dots, x_2, \dots]$. Como módulo sobre él mismo se obtiene un módulo cíclico generado por el 1. Sin embargo, si escogemos el ideal generado por las variables $x_1, \dots, x_n, \dots$, no es finitamente generado, pues todo polinomio en $K[x_1, x_2, \dots]$ usa solo un conjunto finito de las variables.

*Proposición A.2.* Sea $(\sum, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1. Toda cadena ascendente $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots x_n \preceq \dots$ es estacionaria.
2. Todo subconjunto $\Gamma \subset \sum$ no vacío posee algún elemento maximal (con respecto a $\preceq$).

*Demostración.* Ver [AM16, Ch. 6, prop. 6.1]

**Definición A.2.** *Diremos que un conjunto parcialmente ordenado satisface la condición de cadena (ascendente) si verifica las propiedades de la proposición anterior.*

**Definición A.3.** *Sea $A$ un anillo y sea $M$ un $A$-módulo. Diremos que $M$ es un $A$-módulo noetheriano si el conjunto ordenado de los submódulos de $M$ con respecto a la relación de orden dada por la inclusión, $P \preceq Q \iff P \subseteq Q$, verifica la condición de cadena. Asimismo, diremos que $A$ es un anillo noetheriano si lo es en tanto que $A$-módulo. Dicho de otra forma, $M$ es un $A$-módulo noetheriano si toda cadena ascendente $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ de submódulos de $M$ es estacionaria. Asimismo $A$ es un anillo noetheriano si toda cadena ascendente $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ de ideales de $A$ es estacionaria.*

*Observación A.1.* Sea $A$ un anillo, sea $a \subseteq A$ un ideal y sea $M$ un $A$-módulo tal que $aM = 0$. En tal caso $M$ es también de forma natural un $A/a$-módulo y, como todos los submódulos $N$ de $M$ también satisfacen $aN = 0$, se tiene que $M$ es noetheriano en tanto que $A$-módulo si y solo si lo es en tanto que $A/a$-módulo.

*Proposición A.3.* Sea $A$ un anillo y sea $M$ un $A$-módulo. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1. $M$ es un $A$-módulo noetheriano.
2. Todo submódulo de $M$ es finitamente generado.

*Demostración.* Ver [AM16, Ch. 6, prop. 6.2] ∎

*Corolario* A.1. Sea $A$ un anillo. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1. $A$ es un anillo noetheriano.
2. Todo ideal de $A$ es finitamente generado.

*Proposición* A.4. Sea $A$ un anillo y sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de $A$-módulos. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1. $M$ es un $A$-módulo noetheriano.
2. $M'$ y $M''$ son $A$-módulos noetherianos.

*Demostración.* Ver [AM16, Ch. 6, prop. 6.3] ∎

*Corolario* A.2. Sea $A$ un anillo, sea $M$ un $A$-módulo y consideremos una cadena finita de submódulos de $M$, $M_0 = 0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{r-1} \subseteq M_r = M$. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1. $M$ es un $A$-módulo noetheriano.
2. Cada cociente $M_i/M_{i-1}$, $i = 1, \ldots, r$, es un $A$-módulo noetheriano.

*Demostración.* Trivial por proposición anterior. ∎

*Corolario* A.3. Todo anillo cociente de un anillo noetheriano es noetheriano.

*Demostración.* Ver [AM16, Ch. 6, prop 6.6] ∎

*Corolario* A.4. Sea $R$ un anillo noetheriano a la izquierda. Los $R$-módulos finitamente generados a la izquierda son noetherianos.

*Demostración.* Siguiendo la demostración de la proposición anterior, el resultado para los $R$-módulos a la izquierda (es análogo para derecha) es idéntico. ∎

Hemos dicho que un anillo $R$ es un anillo noetheriano a la izquierda si $R$ es noetheriano como $R$-módulo a la izquierda. Algunos ejemplos son cualquier cuerpo y dominio de ideal principal, como $\mathbb{Z}$ o $K[\mathbf{x}]$. Además sabemos que los anillos de polinomios en varias variables son noetherianos. Esto se conoce como:

**Teorema A.1 (Teorema de la base de Hilbert).** *Todo anillo de polinomios en un número finito de variables con coeficientes en un anillo noetheriano es noetheriano.*

*Demostración.* Ver [AM16, Ch. 7, th. 7.5]

Aunque todo ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado, no es cierto que haya un mínimo número de generadores de ideales en este anillo. Por ejemplo, podemos construir ideales $I_k = \{x_1^i x_2^j | i + j = k\}$ de $K[x_1, x_2]$ que no pueden ser generados con menos de $k$ elementos.

# Bibliografía


[AM16] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, economy ed., Addison-Wesley Series in Mathematics, Westview Press, Boulder, CO, 2016. MR 3525784

[Ber71] J. Bernshtein, *Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Functional analysis and its applications **5** (1971), no. 2, 89–101.

[Ber72] ———, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Funct. Analy. and its Appl. **6** (1972), 273–285.

[BM96] J. Briançon and Ph. Maisonobe, *Caractérisation géométrique de l'existence du polynôme de Bernstein relatif*, Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991), Progr. Math., vol. 134, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 215–236.

[CJ10] Francisco J. Castro Jiménez, *Modules over the Weyl algebra*, Algebraic approach to differential equations, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010, pp. 52–118.

[Cou95] Severino Collier Coutinho, *A primer of algebraic D-modules*, no. 33, Cambridge University Press, 1995.

[Gra10] Michel Granger, *Bernstein-Sato polynomials and functional equations*, Algebraic approach to differential equations, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010, pp. 225–291.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[ZS75] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra*, Vol. I and II, Springer-Verlag, 1975.