



# LA INVERSIÓN RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Francisco Jesús Morilla Ortega





# LA INVERSIÓN RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Francisco Jesús Morilla Ortega

Memoria presentada como parte de los requisitos para  
la obtención del título de Grado en Matemáticas por la  
Universidad de Sevilla.

Tutorizada por Miguel Ángel Olalla Acosta



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Rectas y circunferencias</b>	<b>7</b>
1.1. Ciclos . . . . .	7
1.2. Posiciones relativas recta-circunferencia. Recta tangente . . . . .	9
<b>2. Potencia</b>	<b>13</b>
2.1. Potencia . . . . .	13
2.2. Eje y centro radical . . . . .	16
<b>3. Ángulos entre ciclos</b>	<b>23</b>
3.1. Ángulo entre recta y circunferencia . . . . .	23
3.2. Ángulo entre dos circunferencias . . . . .	24
<b>4. Haces de ciclos</b>	<b>27</b>
4.1. Definiciones y propiedades . . . . .	27

4.2. Clasificación de haces de ciclos . . . . .	29
<b>5. Inversión</b>	<b>35</b>
5.1. Definición de inversión . . . . .	35
5.2. Inversión en el plano inversivo . . . . .	37
5.3. Propiedades . . . . .	38
<b>6. Aplicaciones de la inversión</b>	<b>45</b>
6.1. Teorema de Ptolomeo . . . . .	45
6.2. Problemas de Apolonio . . . . .	47
6.2.1. Problema de tipo $(0,0,3)$ . . . . .	47
6.2.2. Problema de tipo $(0,3,0)$ . . . . .	47
6.2.3. Problema de tipo $(0,1,2)$ . . . . .	47
6.2.4. Problema de tipo $(1,0,2)$ . . . . .	48
6.2.5. Problema de tipo $(0,2,1)$ . . . . .	49
6.2.6. Problema de tipo $(1,1,1)$ . . . . .	49
6.2.7. Problema de tipo $(2,0,1)$ . . . . .	50
6.2.8. Problema de tipo $(3,0,0)$ . . . . .	50
6.3. Ejemplos de problemas de Apolonio . . . . .	51

# Resumen

La inversión es una transformación en el plano euclídeo extendido, que transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias. Sus aplicaciones van desde la resolución alternativa de problemas de geometría clásica, hasta el análisis complejo (gracias a sus relaciones con las transformaciones biholomorfas de la esfera de Riemann, las transformaciones de Möbius). En este trabajo se introducen algunos conceptos fundamentales sobre rectas y circunferencias, se tratan los conceptos básicos de geometría inversiva, y se aplican para la resolución de problemas clásicos, particularmente problemas de Apolonio.



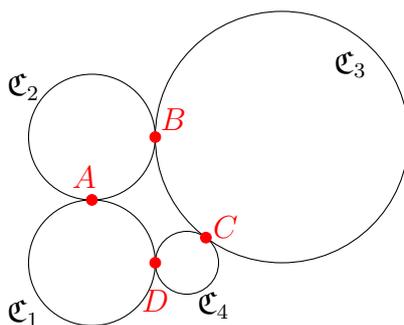
# Abstract

Inversion is a transformation defined in the extended Euclidean plane, mapping lines and circles to lines and circles. Applications range from alternative resolutions of classic geometry problems, to complex analysis (thanks to its connections with biholomorphic mappings of the Riemann sphere, the Möbius transformations). In this work, fundamentals about lines and circles are introduced; basic concepts about inversive geometry are worked with and used to solve classic problems, particularly problems of Apollonius.



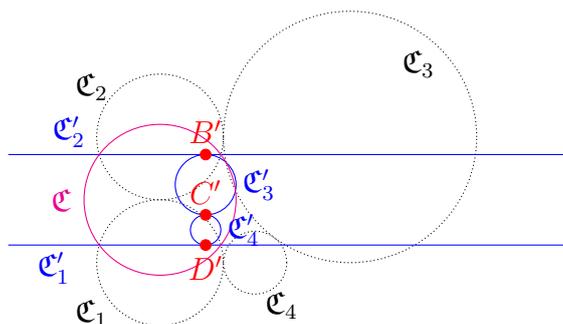
# Introducción

La inversión respecto de una circunferencia es una transformación involutiva del plano euclídeo extendido (que llamaremos plano inversivo) que envía rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, que respeta ángulos y que establece una biyección entre el interior y el exterior de la circunferencia, dejando fija a esta. La geometría basada en esta transformación, llamada geometría inversiva, nos permite (entre muchos otros usos) resolver problemas de geometría clásica, como el siguiente: "dadas cuatro circunferencias  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_4$ , tales que son tangentes exteriores cada una con la anterior y con la siguiente (es decir,  $\mathcal{C}_1$  tangente exterior con  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_4$ ,  $\mathcal{C}_2$  tangente exterior con  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$ , etc.), los cuatro puntos de tangencia están en una circunferencia común". Si bien este problema ya estaba resuelto antes del establecimiento de la geometría inversiva en el siglo XIX, utilizando como herramienta principal la inversión respecto de una circunferencia podemos dar una sencilla y elegante demostración de este resultado. En efecto, sean  $A, B, C, D$  los cuatro puntos de tangencia.



Una inversión respecto de una circunferencia  $\mathcal{D}$  centrada en  $A$  transforma las circunferencias que son tangentes en  $A$  (digamos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ ) en dos rectas paralelas  $\mathcal{C}'_1 = r$  y  $\mathcal{C}'_2 = s$ , y las dos circunferencias que no pasan por  $A$  en otras dos circunferencias

$\mathcal{C}'_3, \mathcal{C}'_4$ ; además el punto  $A$  se transforma en el infinito. Como la inversión respeta ángulos, si antes las circunferencias eran tangentes entre sí en  $A$ , ahora  $r$  es tangente con  $s$  (tangentes en el infinito, paralelas); además  $r$  es tangente con  $\mathcal{C}'_4$ ,  $s$  tangente con  $\mathcal{C}'_3$ , etc. Es decir: como la inversión respeta los ángulos, respeta las tangencias (si dos objetos son tangentes, sus inversos también lo son). Por ejemplo, en la figura anterior al invertir obtendríamos:



Ahora, se ve que el punto de tangencia de las dos circunferencias invertidas (en este caso  $C'$ ) es centro de una cierta homotecia que deja al conjunto  $\{\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_4\}$  fijo (porque dos rectas paralelas son homotéticas respecto de cualquier punto fuera de ellas, y dos circunferencias tangentes son homotéticas con centro su punto de tangencia). Es decir, que dicha homotecia nos garantiza que  $B', C', D'$  están alineados y por tanto en una recta, que también contiene al inverso de  $A, \infty$ . Dado que los inversos de los puntos de tangencia están en una misma recta, los puntos de tangencia deben estar en una misma recta o circunferencia (pues la inversa de una recta es una recta o una circunferencia). Esto es,  $A, B, C, D$  son concíclicos.

El objetivo de este trabajo es dar las bases para poder realizar este tipo de razonamientos de manera sistemática, para cualquier tipo de problema geométrico que admita simplificaciones a través de geometría inversiva. Para ello, en los capítulos 1, 2 y 3 se introducen las propiedades fundamentales sobre rectas y circunferencias (ciclos); en el capítulo 4 hablaremos de haces de ciclos, cuya importancia teórica se usará en los capítulos siguientes. En el capítulo 5 se introduce la inversión y se demuestran sus propiedades principales. Por último en el capítulo 6 se dan algunas aplicaciones de la inversión: en concreto, se demuestra el conocido teorema de Ptolomeo (que caracteriza a los cuadriláteros cíclicos), y se da un procedimiento general para resolver problemas de Apolonio.

# 1 | Rectas y circunferencias

## 1.1 Ciclos

Introducimos primero alguna notación que se utilizará a lo largo del trabajo. Denotamos por  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  al plano afín real, cuyo espacio de direcciones es  $\mathbb{R}^2$ . La distancia euclídea es la aplicación  $d : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea. Una vez fijo un sistema de referencia afín y una base vectorial, distinguiremos las coordenadas de un punto y de un vector mediante el uso de una flecha sobre el vector:  $(a_1, a_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ,  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Por  $\overline{AB}$ , dependiendo del contexto, nos referiremos o bien a la longitud  $\|\overrightarrow{AB}\|$ , o bien al segmento que va de  $A$  a  $B$  (si pudiera haber ambigüedad se usará otra notación). Cuando se diga "la recta  $AB$ " nos referiremos a la única recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ . Por último, para el producto escalar euclídeo en  $\mathbb{R}^2$  de  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  usaremos la notación  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

**Definición 1.1 (Circunferencia).** Sea  $O \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  un punto afín. Se llama *circunferencia* al conjunto

$$\mathfrak{C} = \{P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : d(O, P)^2 = k\},$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es un número real fijo cualquiera.

**Observación 1.1.** De la definición anterior tenemos:

1. Si  $k > 0$ , entonces  $\mathfrak{C}$  es una *circunferencia real de centro  $O$  y radio  $r = +\sqrt{k}$* , definida por  $\mathfrak{C} = \{P : d(O, P) = r\}$ . En particular  $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ .
2. Si  $k = 0$ , entonces por definición de distancia  $\mathfrak{C} = \{O\}$ ; decimos que es una *circunferencia colapsada* al punto  $O$ .
3. Si  $k < 0$  se tiene  $\mathfrak{C} = \emptyset$ . En ese caso, si  $r = \sqrt{k}$ , llamamos a  $\mathfrak{C}$  *circunferencia imaginaria de centro  $O$  y radio  $r$* .

A partir de ahora supondremos que se ha fijado un sistema de referencia métrico en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ . Por tanto  $\mathfrak{C} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k\}$  es una circunferencia. A

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - k = 0 \quad (1.1)$$

nos referiremos como *ecuación normal* de  $\mathfrak{C}$ . En general vemos que cualquier ecuación

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (1.2)$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , es ecuación normal de alguna circunferencia: de hecho basta tomar  $x_0 = -\frac{a}{2}, y_0 = -\frac{b}{2}, k = x_0^2 + y_0^2 - c$  para tener una ecuación como (1.1).

Usamos el término "normal" para referirnos a que los coeficientes de  $x^2$  e  $y^2$  son 1. Ahora bien, generalizando esto vemos que cualquier ecuación de la forma

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (1.3)$$

tal que  $A \neq 0$  es un múltiplo de una ecuación normal de alguna circunferencia  $\mathfrak{C}$ , pues basta dividir por  $A$ . Las ecuaciones del tipo (1.3) en las que  $A = 0$  no definen una circunferencia como tal, sino que, excepto casos particulares, representan rectas. Se ve motivada por tanto la siguiente definición:

**Definición 1.2 (Ciclo).** Llamamos *ciclo* indistintamente a circunferencias (reales o no) y a rectas.

**Observación 1.2.** A menudo definiremos ciclos (o particularmente circunferencias) diciendo que su ecuación es  $f = 0$ . En ese caso,  $f$  es un polinomio en  $\mathbb{R}[x, y]$ , de la forma (1.3). Es decir:  $f(x, y) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D$ , donde  $A \neq 0$  si y solo si el ciclo es una circunferencia; y si  $A = 0$ , entonces  $B, C$  y  $D$  son tales que  $Bx + Cy + D = 0$  defina una recta. Esto es, si  $A = 0$ , entonces  $B$  y  $C$  no son ambos nulos.

**Lema 1.1.** Sean  $P, Q, R \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  tres puntos distintos. Entonces existe un único ciclo que pasa por todos ellos. Además, ese ciclo es una recta si y solo si los puntos están alineados, y es una circunferencia si y solo si no están alineados.

**Demostración.** Si están alineados, el único ciclo que pasa por ellos es precisamente la recta que definen. Si no están alineados, el centro de la única circunferencia que pasa por ellos debe ser el circuncentro del triángulo que determinan (intersección de las mediatrices de los segmentos formados por cada par de puntos). ■

Introducimos a continuación también una extensión del plano afín  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 1.3 (Plano inversivo).** Se denomina plano inversivo (o plano conforme, o plano euclídeo extendido) al conjunto  $\hat{\mathbb{A}}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ .

Se interpreta este conjunto como la compactificación del plano por un punto: es decir, toda recta del plano pasa por el punto del infinito. Dos rectas paralelas son tangentes en el  $\infty$ , y dos rectas secantes en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  tienen un segundo punto de corte en  $\infty$ . Si identificamos  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ , al añadir el punto del infinito transformamos el espacio afín en proyectivo: es decir, que podemos ver al plano inversivo como la recta proyectiva compleja,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Topológicamente el plano inversivo es  $\mathbb{S}^2$  (la 2-esfera), que se puede ver como la conocida esfera de Riemann.

## 1.2 Posiciones relativas recta-circunferencia. Recta tangente

Buscamos definir la recta tangente a una circunferencia real de radio positivo. Para ello primero estudiamos las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia.

**Proposición 1.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia real de radio  $r > 0$ . Entonces si  $t$  es una recta en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , hay tres posibilidades mutuamente excluyentes: o bien  $\mathcal{C}$  y  $t$  se cortan en dos puntos distintos; o bien  $\mathcal{C}$  y  $t$  se cortan exactamente en un punto; o bien  $\mathcal{C}$  y  $t$  no se cortan.

**Demostración.** Sean  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$  la ecuación normal de  $\mathcal{C}$ , y sea  $Ax + By + C = 0$  una ecuación de  $t$ , donde  $A$  y  $B$  no son ambos nulos. Entonces la intersección  $\mathcal{C} \cap t$  es, respecto del sistema de referencia que tenemos fijo, el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}.$$

Como  $A$  y  $B$  no son ambos nulos (por definir  $Ax + By + C = 0$  una recta), supongamos primero  $A \neq 0$ . Entonces despejando de la ecuación de  $t$  se tiene

$$x = -\frac{By + C}{A},$$

que se puede sustituir en la ecuación de  $\mathcal{C}$  para tener una ecuación de segundo grado en  $y \in \mathbb{R}$ , que tiene como mucho dos soluciones. Hay tantas soluciones  $(x, y)$  del

sistema como soluciones de esta ecuación, por lo que la intersección de  $\mathfrak{C}$  y  $t$  es vacía (0 soluciones), un único punto (1 solución), o dos puntos distintos (2 soluciones).

Si tenemos  $A = 0$  por ser  $A, B$  no ambos 0, debemos tener  $B \neq 0$  y hay un razonamiento análogo del que vemos que la intersección es o vacía, o un único punto, o dos distintos. ■

De esta proposición se ve motivada la siguiente definición:

**Definición 1.4 (Recta tangente).** Sea  $\mathfrak{C}$  una circunferencia real de radio  $r > 0$ , y sea  $P \in \mathfrak{C}$  un punto suyo. Sea  $t$  una recta que pase por  $P$ . Decimos que  $t$  es la *recta tangente a  $\mathfrak{C}$  en  $P$*  si  $\mathfrak{C} \cap t = \{P\}$ .

**Proposición 1.2.** Sea  $\mathfrak{C}$  una circunferencia real de radio  $r > 0$  y centro  $O$ , y  $P$  un punto suyo. Entonces cualquier recta que pase por  $P$  corta a  $\mathfrak{C}$  en dos puntos distintos, salvo la perpendicular al radio  $\overrightarrow{OP}$  que es la (única) recta tangente a  $\mathfrak{C}$  en  $P$ .

**Demostración.** Vamos a ver los puntos de corte de una recta que pasa por  $P$  con  $\mathfrak{C}$ . Consideramos  $\mathbf{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)} \in \mathbb{R}^2$  un vector no nulo cualquiera. La recta que pasa por  $P$  y tiene dirección  $\mathbf{u}$  es el subespacio afín  $t = P + \langle \mathbf{u} \rangle$ : un punto arbitrario de  $t$  es de la forma  $P + \lambda \mathbf{u}$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Usamos esto para ver los puntos de  $t$  que están en la circunferencia  $\mathfrak{C}$ : pues los puntos de corte de  $t$  con  $\mathfrak{C}$  serán aquellos que verifiquen  $d(O, P + \lambda \mathbf{u})^2 = r^2$ . Si  $O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (a, b)$ , entonces los puntos de corte  $\mathfrak{C} \cap t$  corresponderán con los  $\lambda$  que sean solución de

$$d((x_0, y_0), (a, b) + \lambda \overrightarrow{(u_1, u_2)})^2 = r^2;$$

es decir, las soluciones de

$$(x_0 - a - \lambda u_1)^2 + (y_0 - b - \lambda u_2)^2 - r^2 = 0.$$

Desarrollando cuadrados tenemos

$$\begin{aligned} (x_0 - a)^2 - 2\lambda(x_0 - a)u_1 + \lambda^2 u_1^2 + (y_0 - b)^2 - 2\lambda(y_0 - b)u_2 + \lambda^2 u_2^2 - r^2 = \\ \lambda^2(u_1^2 + u_2^2) - 2\lambda((x_0 - a)u_1 + (y_0 - b)u_2) + (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0, \end{aligned}$$

la ecuación que satisfacen los  $\lambda$  tales que  $d(O, P + \lambda \mathbf{u}) = r$ . Notemos que  $\lambda = 0$  debe ser solución, ya que  $d(O, P) = r$  al estar  $P$  en la circunferencia  $\mathfrak{C}$ . Por lo que substituyendo  $\lambda = 0$  debemos tener  $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$  (que no es más que

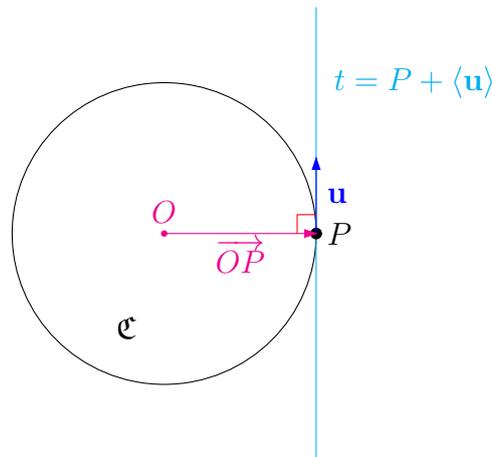
$d(O, P) = r$ ). Así que los puntos de corte de  $\mathcal{C}$  y  $t$  son los correspondientes a las soluciones de

$$\lambda^2(u_1^2 + u_2^2) - 2\lambda((O_1 - P_1)u_1 + (O_2 - P_2)u_2) = 0.$$

Una solución es  $\lambda = 0$  que corresponde al punto  $P$ , y la otra es

$$\lambda = 2 \frac{(x_0 - a)u_1 + (y_0 - b)u_2}{u_1^2 + u_2^2} = -2 \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2},$$

teniendo en cuenta que  $\overrightarrow{OP} = (a - x_0, b - y_0)$ . Obtenemos que la recta  $t = P + \langle \mathbf{u} \rangle$  corta a  $\mathcal{C}$  en los puntos  $\{P, P - 2 \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}\}$ . Son dos puntos distintos si y solo si  $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ , y son el mismo punto (el propio  $P$ ) si y solo si  $\overrightarrow{OP} \perp \mathbf{u}$ . Por tanto, cualquier recta que pasa por  $P$  corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos distintos, salvo la que tiene dirección perpendicular a  $\overrightarrow{OP}$ , que la corta en un único punto y es la única recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$ . ■



**Figura 1.1.** Recta tangente a  $\mathcal{C}$  en el punto  $P$ ,  $\overrightarrow{OP} \perp \mathbf{u}$

Por último vamos a ver que este concepto de vector tangente a una circunferencia coincide con el de geometría diferencial. Como es habitual (ver [HP10], definición 1.1.1), se define el vector tangente a una curva parametrizada regular como su derivada respecto del parámetro.

**Proposición 1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia real de radio  $r > 0$ , y de centro  $O$ . Entonces el vector tangente de  $\mathcal{C}$  en un punto suyo  $P$ , en el sentido de la geometría

diferencial, es perpendicular al radio en ese punto. Dicho de otra forma, la recta tangente en  $P$  como en la **definición 1.4** es la misma que la recta tangente en  $P$  a la curva diferenciable de imagen  $\mathfrak{C}$ .

**Demostración.** Basta tomar una parametrización de  $\mathfrak{C}$  cualquiera. Podemos considerar  $\gamma : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathfrak{C}$ ,  $\gamma(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$ , donde el centro es  $O = (x_0, y_0)$ . Entonces el radio en el punto  $P = \gamma(t_0)$  es  $\overrightarrow{(r \cos t_0, r \sin t_0)}$ , y el vector tangente en ese punto es  $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{(-r \sin t_0, r \cos t_0)}$ . Es fácil ver que el radio en  $P$  y  $\gamma'(t_0)$  son perpendiculares, luego por la **proposición 1.2** el vector  $\gamma'(t_0)$  es tangente, en el sentido de la **definición 1.4**. ■

## 2 | Potencia

En este capítulo estudiaremos un concepto muy importante sobre las circunferencias: el de potencia. Si bien tiene interés por él mismo, sobre todo nos va a ser de gran utilidad en otros ámbitos que estudiaremos en capítulos posteriores.

### 2.1 Potencia

**Definición 2.1 (Potencia).** Sea  $\mathfrak{C}$  una circunferencia real, de centro  $O$  y radio  $r > 0$ . Sea  $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  un punto afín cualquiera. Sea  $t$  una recta cualquiera que pase por  $P$  y corte a  $\mathfrak{C}$  en dos puntos  $Q$  y  $R$ , no necesariamente distintos. Se define la *potencia* del punto  $P$  respecto de la circunferencia  $\mathfrak{C}$ , denotada  $\Pi_{\mathfrak{C}}(P)$  (o simplemente  $\Pi(P)$  si no hay ambigüedad), como el valor del producto  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ .

**Proposición 2.1.** En las condiciones de la definición anterior, la potencia solo depende del punto  $P$  y la circunferencia  $\mathfrak{C}$ , pero no de la recta  $t$ . Es más: tenemos que  $\Pi(P) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2$

**Demostración.** Basta ver que para cualquier recta  $t$  que corte a  $\mathfrak{C}$  en dos puntos  $Q$  y  $R$ , tenemos que  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2$  (que es independiente de  $t$ ). Distinguiamos cuatro casos, dependiendo de la posición del punto  $P$ .

Si el punto  $P$  está en el exterior de la circunferencia ( $d(O, P) > r$ ), entonces trazamos la recta  $s$  que pasa por  $P$  y por  $O$  (como son puntos distintos por ser  $P$  exterior la recta es única). Además esta recta, al pasar por el centro de la circunferencia, la corta en dos puntos distintos  $S$  y  $T$ ,  $S$  el más cercano a  $P$ . Vamos a ver  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PT}$ . En efecto, las diagonales  $\overline{SR}$  y  $\overline{QT}$  se cortan en un punto  $M$ . Por el teorema del ángulo inscrito (o arco capaz, ver [Cox61] III.21, o [Moi63] 16.4.2) los ángulos  $\widehat{QRS}$  y  $\widehat{QTS}$  son iguales. Por estar  $P, Q, R$  alineados (en la recta

$t$ ), y  $P, S, T$  alineados (en la recta  $s$ ), podemos escribir la igualdad de los ángulos de arriba como  $\widehat{PRS} = \widehat{QTP}$ . Por otro lado, el ángulo  $\widehat{RPS}$  es el mismo que  $\widehat{QPT}$  (es el ángulo que forman  $s$  y  $t$ ). Así que los triángulos  $\triangle PRS$  y  $\triangle PTQ$  son congruentes, y obtenemos

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PT}},$$

o lo que es lo mismo

$$\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PS}\| \cdot \|\overrightarrow{PT}\|. \quad (2.1)$$

Como  $P$  es exterior a  $\mathfrak{C}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{PR}$  tienen el mismo sentido (es decir, el ángulo que forman entre ellos es 0). Así que el producto de sus módulos es simplemente el producto escalar. Por otro lado, como la recta  $s$  pasa por el centro  $O$  tenemos que  $\overline{PS} = \overline{PO} - \overline{OS} = \overline{OP} - r$ , porque  $S \in \mathfrak{C}$ ; igualmente  $\overline{PT} = \overline{PO} + \overline{OT} = \overline{OP} + r$  porque  $T \in \mathfrak{C}$ . En (2.1) tenemos por tanto

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (\overline{OP} - r)(\overline{OP} + r) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2,$$

que es lo que queríamos ver.

Si  $P$  está en el interior de la circunferencia pero no es el centro  $O$ , trazamos la recta  $s$  que pasa por  $P$  y  $O$ , y corta a  $\mathfrak{C}$  en dos puntos  $S$  y  $T$  (la corta en algún punto porque al pasar por  $O$  hay un punto en  $s$  a distancia 0 del centro, y la recta no es acotada por lo que debe haber algún punto en  $s$  a distancia  $r$  de  $O$ ; además no puede ser tangente porque si digamos fuera tangente en el punto  $S$ , por la **proposición 1.2** el vector director de  $s$ ,  $\overrightarrow{OP}$ , es perpendicular a  $\overrightarrow{OS}$ . Pero como  $O, P, S \in s$  se tiene  $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OS}$ , lo que no es posible). Además sea  $S$  el punto más cercano a  $P$ , y  $T$  el más alejado: sabemos que no son equidistantes a  $P$  porque el único punto de la recta  $s$  que equidista de  $S$  y  $T$  es  $O$  (y  $P \neq O$ ). Igual que en el apartado anterior por el teorema del ángulo inscrito  $\widehat{QRS} = \widehat{QTS}$ ; por ser  $P \in s \cap t$  la igualdad de ángulos se puede escribir  $\widehat{PRS} = \widehat{QTP}$ . Además las rectas  $s$  y  $t$  son secantes en  $P$  así que los ángulos opuestos son iguales: por eso  $\widehat{SPR} = \widehat{QPT}$ . Por lo que dos pares de ángulos son iguales, y los triángulos  $\triangle PRS$  y  $\triangle PTQ$  son congruentes. Luego

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PT}},$$

y

$$\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PS}\| \cdot \|\overrightarrow{PT}\|. \quad (2.2)$$

Ahora, como  $P$  es interior, y está alineado con  $Q$  y  $R$ ,  $\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{PR}\| = -\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$  (el ángulo que forman los dos vectores es  $\pi$ ). Por otro lado  $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = r - \|\overrightarrow{OP}\|$ , y  $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT} = \|\overrightarrow{OP}\| + r$ : ya que  $S$  es el punto más cercano a  $P$  y por tanto está en el mismo radio que  $P$ , y  $T$  es el más alejado. De (2.2) tenemos que

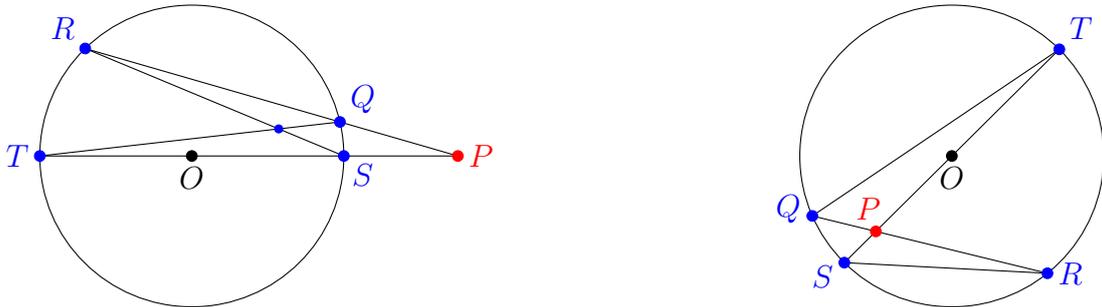
$$-\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (r - \|\overrightarrow{OP}\|)(\|\overrightarrow{OP}\| + r);$$

es decir,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2.$$

Si  $P$  está en  $\mathcal{C}$ , entonces una recta que pasa por  $P$  y que corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos, la corta en  $P$  y en otro distinto  $Q$ . Por definición de potencia  $\overrightarrow{PP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ ; que además coincide con  $\|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2$  ya que  $\overrightarrow{OP} = r$ : luego  $\Pi(P) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2 = 0$ .

Si  $P$  es el centro  $O$  entonces cualquier recta que pasa por  $P$  corta a la circunferencia en dos puntos diametralmente opuestos  $Q$  y  $R$ . En ese caso la potencia es  $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} = -r^2$ , porque  $\overrightarrow{OQ}$  y  $\overrightarrow{OR}$  son radios, que apuntan en sentidos opuestos. Por otro lado,  $\|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2 = -r^2 = \Pi(P)$ , porque  $O = P$ . ■



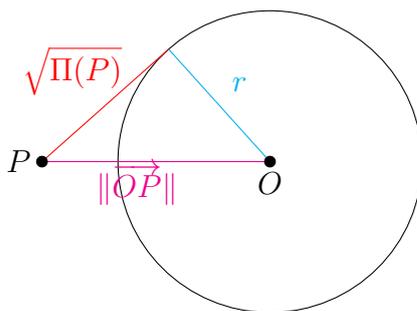
**Figura 2.1.** Potencia de un punto exterior y de un punto interior,  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PT} = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2$

**Observación 2.1.** En base a la proposición anterior, tenemos que si  $\mathcal{C}$  es una circunferencia real de centro  $O$  y radio  $r > 0$ :

1. Dado un punto  $P$  cualquiera,  $\Pi(P) > 0$  si y solo si  $P$  es exterior a  $\mathcal{C}$  (es decir,  $d(O, P) > r$ );  $\Pi(P) = 0$  si y solo si  $P \in \mathcal{C}$ ;  $\Pi(P) < 0$  si y solo si  $d(O, P) < r$ . Es más,  $\Pi(P) = -r^2$  si y solo si  $P = O$ .
2. La potencia de un punto exterior tiene una interpretación geométrica obvia por el teorema de Pitágoras: como  $\Pi(P) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2 > 0$ , tenemos que  $+\sqrt{\Pi(P)}$  es la longitud de  $P$  al punto de tangencia de una recta tangente a  $\mathcal{C}$

que pasa por  $P$ , pues  $\sqrt{\Pi(P)}$  es el cateto del triángulo rectángulo que tiene a  $\overrightarrow{OP}$  como hipotenusa y un cateto  $r$ . Si el segmento es perpendicular al radio, por la **proposición 1.2** es tangente.

- De la expresión  $\Pi(P) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2$ , extendemos la definición de potencia a circunferencias imaginarias o colapsadas a un punto.
- Si  $\mathfrak{C}$  tiene ecuación  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$ , entonces dado un punto  $P = (a, b)$  arbitrario,  $\|\overrightarrow{OP}\|^2$  es  $(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2$ . Por tanto la potencia de  $P$  es  $\Pi(P) = (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 - r^2$ : es decir, si la ecuación normal de  $\mathfrak{C}$  es  $f = 0$ , entonces la potencia de  $P$  es  $f(P)$ . Esto es cierto también en circunferencias no reales.
- Tenemos una aplicación  $\Pi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\Pi(P) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2$ , que solo depende de la distancia de  $P$  al centro  $O$  de la circunferencia. Por tanto si  $\mathfrak{C}'$  es una circunferencia real concéntrica con  $\mathfrak{C}$ , todo punto de  $\mathfrak{C}'$  tiene potencia respecto de  $\mathfrak{C}$  constante. Esto es cierto también en circunferencias no reales.



**Figura 2.2.** Interpretación geométrica de potencia por un punto exterior

## 2.2 Eje y centro radical

Vamos a ver cómo podemos usar las potencias de un punto respecto de dos circunferencias para deducir propiedades sobre ellas.

**Proposición 2.2.** Sean  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  dos circunferencias no concéntricas (reales, imaginarias o colapsadas a un punto), centradas en  $O_1$  y en  $O_2$ , y de radios  $r_1, r_2$ , respectivamente. Entonces el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de  $\mathfrak{C}_1$  y de  $\mathfrak{C}_2$  es una recta, perpendicular al vector  $\overrightarrow{O_1O_2}$ .

**Demostración.** El lugar geométrico que se busca es

$$\{P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : \Pi_{\mathfrak{C}_1}(P) = \Pi_{\mathfrak{C}_2}(P)\}.$$

Sean  $O_1 = (x_1, y_1)$ , y  $O_2 = (x_2, y_2)$  las coordenadas de los centros. Entonces la ecuación normal de  $\mathfrak{C}_1$  es  $f_1 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = 0$ , y la de  $\mathfrak{C}_2$  es  $f_2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2 = 0$ . Por la **observación 2.1** la potencia de  $P$  respecto de  $\mathfrak{C}_1$  es  $f_1(P)$ ; igualmente  $\Pi_{\mathfrak{C}_2}(P) = f_2(P)$  para cualquier punto  $P$ . Así que el lugar geométrico buscado es el conjunto

$$\{P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : f_1(P) = f_2(P)\}.$$

Es decir,  $P = (x, y)$  tiene igual potencia respecto de ambas circunferencias si y solo si

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2.$$

Desarrollando cuadrados y reorganizando vemos que el lugar geométrico que buscamos es precisamente el de los puntos  $(x, y)$  que satisfacen

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + r_1^2 - r_2^2 - (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0. \quad (2.3)$$

Estos puntos forman una recta ya que como las circunferencias no son concéntricas  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ : así que los coeficientes de  $x$  e  $y$ ,  $2(x_1 - x_2)$  y  $2(y_1 - y_2)$ , no son ambos nulos y la ecuación (2.3) es la ecuación de una recta. Además el vector normal de la recta, que tiene por coordenadas los coeficientes de la  $x$  y la  $y$  en (2.3), es  $\mathbf{n} = \overrightarrow{2(x_1 - x_2, y_1 - y_2)}$ . Pero como las coordenadas de los centros son  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  el vector normal no es más que  $\mathbf{n} = -2\overrightarrow{O_1O_2}$ : es decir, la recta de ecuación (2.3) (el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias) es perpendicular a la recta que une a los centros  $O_1$  y  $O_2$ . ■

**Observación 2.2.** Si  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son circunferencias cualesquiera, notemos que aunque sean concéntricas el conjunto  $\{P : \Pi_{\mathfrak{C}_1}(P) = \Pi_{\mathfrak{C}_2}(P)\}$  también está definido por la ecuación (2.3), donde  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  son los centros y  $r_1, r_2$  son los radios (pues la hipótesis de que no sean concéntricas se utiliza para ver que (2.3) define una recta). Ahora bien, la ecuación queda  $r_1^2 - r_2^2 = 0$ : define al conjunto vacío si  $r_1 \neq r_2$  (es decir, son concéntricas pero distintas), y a todo el plano afín si son la misma circunferencia.

De acuerdo con esta proposición podemos definir ya el eje radical:

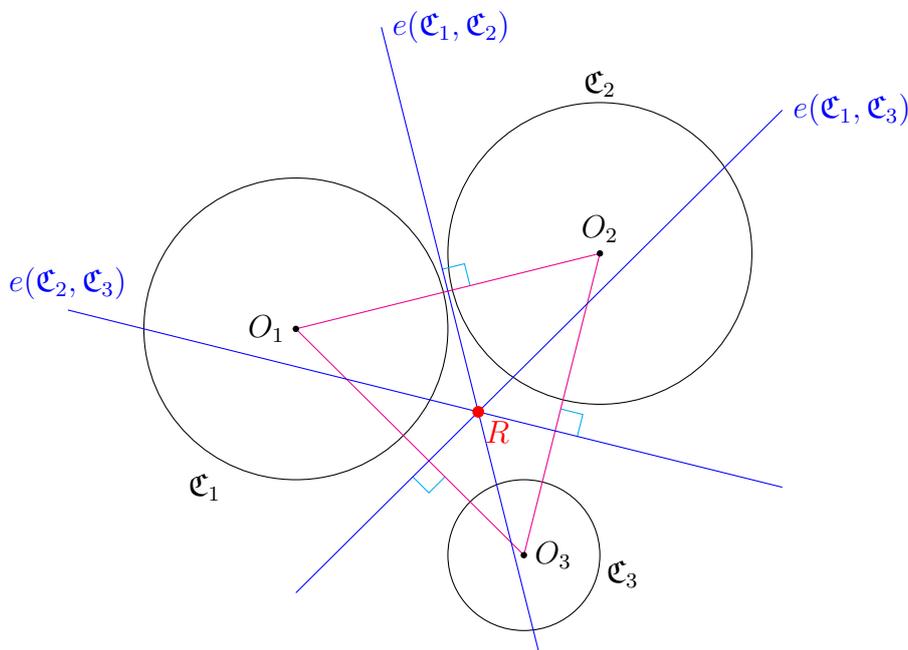
**Definición 2.2 (Eje radical).** Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  dos circunferencias cualesquiera que no son concéntricas. Se define el *eje radical* de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  como la recta de puntos que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias. Se denota  $e(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ , o simplemente  $e$ .

Además en casos generales existe un único punto que tiene igual potencia respecto de 3 circunferencias reales: el centro radical.

**Definición 2.3 (Centro radical).** Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  tres circunferencias cualesquiera, cuyos centros están en posición general (es decir, son 3 puntos distintos que no están alineados). Se define el *centro radical* de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  como el único punto que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias. Se denota por  $R(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  (o simplemente  $R$ ).

**Proposición 2.3.** El centro radical está bien definido: esto es, en las condiciones de la definición anterior existe un único punto que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias.

**Demostración.** Como los centros están en posición general se comprueba fácilmente que los ejes radicales de los 3 pares de circunferencias se cortan en un único punto. Por definición de eje radical es el único punto que puede tener igual potencia respecto de las tres circunferencias. ■



**Figura 2.3.** Centro radical

**Observación 2.3.** Tenemos las siguientes propiedades sobre el eje radical  $e$  de dos circunferencias reales no concéntricas  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ :

1. Si las circunferencias se cortan en algún punto  $P$ , entonces  $P \in e$ : pues en virtud de la **observación 2.1** por ser  $P$  un punto de  $\mathfrak{C}_1$  tenemos  $\Pi_{\mathfrak{C}_1}(P) = 0$ ; igualmente como  $P \in \mathfrak{C}_2$ ,  $\Pi_{\mathfrak{C}_2}(P) = 0$ . Luego las potencias en  $P$  coinciden y  $P$  está en el eje radical.
2. En particular si las circunferencias se cortan en dos puntos distintos debemos tener que el eje radical es la única recta que pasa por ellos.
3. Recíprocamente si el eje radical corta a una de las circunferencias (digamos  $\mathfrak{C}_1$ ) en un punto  $P$ , debemos tener también que  $P \in \mathfrak{C}_2$ : ya que como  $P$  está en  $\mathfrak{C}_1$  y en el eje radical  $e$ ,  $0 = \Pi_{\mathfrak{C}_1}(P) = \Pi_{\mathfrak{C}_2}(P)$ , lo que por la **observación 2.1** equivale a que  $P \in \mathfrak{C}_2$ .
4. De nuevo por el mismo razonamiento si las circunferencias son disjuntas también su eje radical es disjunto con cada una de ellas (si no lo fuera el punto de corte de  $e$  con alguna circunferencia es común con la otra).
5. Si  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  se cortan exactamente en un punto  $P$ , entonces  $e$  es la recta tangente a ambas por  $P$  (las rectas tangentes en el punto  $P$  coinciden y son el eje radical). Esto se debe a que  $e$  pasa por  $P$  (por la primera observación), y si  $e$  cortase a  $\mathfrak{C}_1$  en algún otro punto  $Q$  tendríamos que por la tercera observación también  $Q \in \mathfrak{C}_2$  (lo que no es posible porque las circunferencias se cortan solo en  $P$ ). Es decir,  $e$  solo corta a  $\mathfrak{C}_1$  en un punto y es tangente (con  $\mathfrak{C}_2$  es análogo). Por el mismo razonamiento que antes el recíproco es cierto: si el eje radical  $e$  es tangente a una circunferencia entonces es tangente a la otra, y ambas se cortan en un único punto (que es el punto de tangencia con  $e$ ).
6. Si  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$  son ecuaciones normales respectivamente de  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ , entonces por la **observación 2.1** la potencia es evaluar el punto en la expresión de la ecuación normal. Por tanto el eje radical es

$$e = \{P : f_1(P) = f_2(P)\};$$

esto es, la recta que tiene ecuación  $f_1 - f_2 = 0$ . Esto es cierto también en circunferencias imaginarias o colapsadas a un punto.

Es decir: al introducir el eje radical de dos circunferencias podemos hablar de la relación entre ellas estudiando posiciones relativas de una recta y una circunferencia, que ya las conocemos. Concretamente tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.** Sean  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  dos circunferencias reales, de radios  $r_1 \geq r_2 > 0$  y centros  $O_1$  y  $O_2$ , respectivamente. Sea  $d = d(O_1, O_2)$  la distancia entre los centros. Entonces las posibles posiciones relativas de  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son:

- $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son la misma circunferencia.
- $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son concéntricas y tienen distinto radio.
- No son concéntricas, y  $d > r_1 + r_2$ . Entonces  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son disjuntas, y decimos que son exteriores.
- No son concéntricas, y  $d = r_1 + r_2$ . Entonces  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  se cortan en un punto, y decimos que son tangentes exteriores.
- No son concéntricas y  $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ . Entonces  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  se cortan en dos puntos distintos, y decimos que son secantes.
- No son concéntricas, y  $d = r_1 - r_2$ . Entonces  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  se cortan en un punto, y decimos que  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son tangentes interiores.
- No son concéntricas, y  $d < r_1 - r_2$ . Entonces  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  son disjuntas, y decimos que son interiores.

**Demostración.** Si  $O_1 = O_2$ , son concéntricas. En ese caso, si  $r_1 = r_2$  entonces  $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$ ; si  $r_1 \neq r_2$  son disjuntas. Supongamos ahora que no son concéntricas ( $O_1 \neq O_2$ ): entonces  $d > 0$ . Sea  $e = e(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$  el eje radical. Sean  $d_1 = d(O_1, e)$ ,  $d_2 = d(O_2, e)$  las distancias de los centros al eje radical. Sea  $Q$  la intersección de  $e$  con la recta que pasa por  $O_1$  y  $O_2$  (existe la intersección porque son perpendiculares). Primero, por definición de potencia  $\Pi_{\mathfrak{C}_1}(Q) = d_1^2 - r_1^2$  y  $\Pi_{\mathfrak{C}_2}(Q) = d_2^2 - r_2^2$ . Pero como  $Q$  está en el eje radical  $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ , así que  $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ . Factorizando se tiene

$$\underbrace{(d_1 + d_2)}_{\geq 0}(d_1 - d_2) = \underbrace{(r_1 + r_2)}_{\geq 0} \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\geq 0}, \quad (2.4)$$

donde por hipótesis  $r_1 - r_2 \geq 0$ . Por tanto  $d_1 \geq d_2$ . De aquí sacamos que  $O_1$  no está en el segmento  $\overline{QO_2}$ , ya que de estarlo tendríamos  $d(Q, O_1) + d(O_1, O_2) = d(Q, O_2)$  (es decir,  $d_1 + d = d_2$ ). Pero esto es  $d_1 < d + d_1 = d_2$ , que es absurdo. Si tenemos que  $Q$  está en el segmento  $\overline{O_1O_2}$  entonces  $d = d(O_1, O_2) = d(O_1, Q) + d(Q, O_2) = d_1 + d_2$ . Luego  $d_2 = d - d_1$ , y por (2.4) se tiene  $d(d_1 - d + d_1) = r_1^2 - r_2^2$ . Despejando

$$d_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Por otro lado si  $O_2$  está en el segmento  $\overline{QO_1}$  tenemos que  $d_1 = d(Q, O_1) = d(Q, O_2) + d(O_2, O_1) = d_2 + d$ , así que  $d_2 = d_1 - d$ . De (2.4) se obtiene  $(d_1 + d_1 - d)d = r_1^2 - r_2^2$ , y despejando de nuevo

$$d_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}, \quad (2.5)$$

por lo que en cualquier caso se tiene esta expresión de  $d_1$ . Tenemos 5 posibilidades:

$d > r_1 + r_2$  Si un punto  $P$  está en  $\mathfrak{C}_2$  por la desigualdad triangular  $r_1 + r_2 < d = d(O_1, O_2) \leq d(O_1, P) + d(O_2, P) = d(O_1, P) + r_2$ : es decir,  $d(O_1, P) > r_1$  y  $P \notin \mathfrak{C}_1$ . Igualmente vemos que si  $P \in \mathfrak{C}_1$ , se tiene que  $d(O_2, P) > r_2$  y  $P \notin \mathfrak{C}_2$ . Es decir,  $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 = \emptyset$ , y cada punto de una de ellas es exterior a la otra. Además por (2.5) tenemos que

$$d - d_1 = \frac{2d^2 - r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2d} = \frac{d^2 - r_1^2 + r_2^2}{2d} > \frac{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 + r_2^2}{2d} = \frac{r_1 r_2 + r_2^2}{d} > 0,$$

por tanto  $d > d_1 \geq d_2$ , y el eje radical está entre los centros  $O_1$  y  $O_2$ .

$d = r_1 + r_2$  Hay un punto en el segmento  $\overline{O_1 O_2}$  que está a distancia  $r_1$  de  $O_1$  y a distancia  $r_2$  de  $O_2$ : es decir, está en ambas circunferencias. Por tanto tiene igual potencia (0) respecto de  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  (está en el eje radical), así que dicho punto debe ser  $Q$  (que es  $\overline{O_1 O_2} \cap e$ ). Notemos que por la **proposición 2.2**, el eje radical  $e$  es perpendicular al radio de  $\mathfrak{C}_1$  en  $Q$ , porque este radio es  $\overrightarrow{O_1 Q}$  (paralelo a  $\overrightarrow{O_1 O_2}$  al estar  $O_1, O_2, Q$  alineados). Por tanto  $e$  es tangente a  $\mathfrak{C}_1$  en  $Q$ , y por la **observación 2.3** las circunferencias se cortan en un solo punto. Tenemos que si  $P \in \mathfrak{C}_2$  debe ser  $r_1 + r_2 = d = d(O_1, O_2) \leq d(O_1, P) + d(P, O_2) = d(O_1, P) + r_2$ , por lo que  $d(O_1, P) \geq r_1$ . Si se da la igualdad es porque  $P \in \mathfrak{C}_1$  por lo que  $P = Q$ ; en el resto de puntos de  $\mathfrak{C}_2$  se da  $d(O_1, P) > r_1$ . Si  $P \in \mathfrak{C}_1$  igualmente se ve que o bien  $P = Q$  o bien  $d(O_2, P) > r_2$ , y por tanto las circunferencias son exteriores.

$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$  Restando  $r_1$  se tiene  $-r_2 < d - r_1 < r_2$ . De (2.5) tenemos

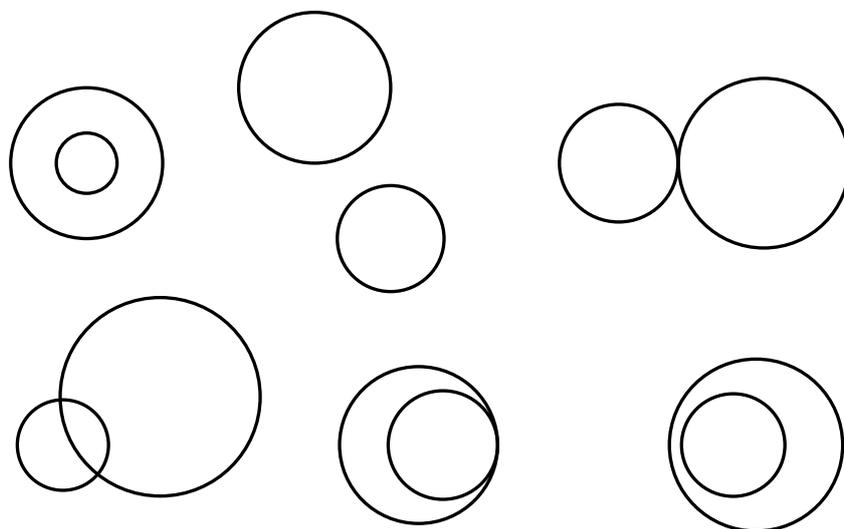
$$r_1 - d_1 = \frac{2dr_1 - r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2d} = \frac{r_2^2 - (d - r_1)^2}{2d} > \frac{r_2^2 - r_2^2}{2d} = 0,$$

por lo que  $Q$  (que pertenece al eje) está en el interior de la circunferencia  $\mathfrak{C}_1$ , y  $e$  debe cortarla en dos puntos. Por la **observación 2.3** estos dos puntos son puntos de corte de ambas circunferencias, así que son secantes.

$d = r_1 - r_2$  Sumando  $r_2$  es  $r_1 = d + r_2$ . Luego hay un punto en la recta que une  $O_1$  y  $O_2$  que está a distancia  $r_1$  de  $O_1$  y a distancia  $r_2$  de  $O_2$ . Este punto está en ambas circunferencias, y por tanto está en el eje radical. Por estar en la recta que une los centros dicho punto es  $Q$ . Como  $e$  corta a  $\mathfrak{C}_1$  en  $Q$  y es perpendicular al radio en ese punto (porque  $O_1, O_2$  y  $Q$  están alineados, el radio es  $\overrightarrow{O_1 Q}$  que es paralelo a  $\overrightarrow{O_1 O_2}$ ), tiene que ser que  $e$  es tangente a  $\mathfrak{C}_1$ . Por la **observación 2.3** las circunferencias se cortan en un punto. Además, si  $P \in \mathfrak{C}_2$ , por la desigualdad triangular  $d(O_1, P) \leq d(O_1, O_2) + d(O_2, P) = d + r_2 = r_1 - r_2 + r_2 = r_1$ . Si  $P \neq Q$  entonces

$d(O_1, P) < r_1$ , y  $\mathcal{C}_2$  es interior a  $\mathcal{C}_1$ .

$d < r_1 - r_2$  Sea  $P \in \mathcal{C}_2$ . Entonces  $d(O_1, P) \leq d(O_1, O_2) + d(O_2, P) = d + r_2 < r_1 - r_2 + r_2 = r_1$ , por lo que  $P \notin \mathcal{C}_1$ . Es decir,  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ , y  $\mathcal{C}_2$  es interior a  $\mathcal{C}_1$ . ■



**Figura 2.4.** Posiciones relativas de dos circunferencias distintas

## 3 | Ángulos entre ciclos

Antes de estudiar los ángulos en ciclos, definamos primero el ángulo entre vectores. Decimos que dos vectores no nulos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  forman un ángulo (no orientado)  $\alpha \in [0, \pi]$  si se tiene que

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Se define el ángulo entre dos rectas  $r$  y  $s$  como  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tal que

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

donde  $\mathbf{u}$  es un vector director de  $r$  y  $\mathbf{v}$  un vector director de  $s$ . Se comprueba fácilmente que no depende del vector escogido. Por otro lado, por convenio se definen los ángulos entre rectas en el infinito: si dos rectas son paralelas, decimos que el ángulo que forman en el infinito es 0; si dos rectas son secantes, decimos que forman el mismo ángulo en el infinito que en el punto afín en el que se cortan. Así, dos rectas son perpendiculares en el infinito si y solo si lo son en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ .

### 3.1 Ángulo entre recta y circunferencia

**Definición 3.1 (Ángulo recta-circunferencia).** Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia real de radio positivo, y sea  $r$  una recta que la corta. Sea  $P \in \mathcal{C} \cap r$ , y sea  $s$  la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Se define el ángulo entre  $r$  y  $\mathcal{C}$  como el ángulo entre  $r$  y  $s$ .

**Observación 3.1.** Notemos que una recta  $r$  es tangente a  $\mathcal{C}$  si y solo si el ángulo entre  $r$  y  $\mathcal{C}$  es 0: en efecto, si es tangente en  $P$ , el ángulo entre  $r$  y la recta tangente en  $P$  es 0 (son la misma); por otro lado si forman ángulo 0 en el punto  $P$  debemos tener que  $r$  es precisamente la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$ .

**Proposición 3.1.** En las condiciones de la definición anterior, el ángulo entre recta y circunferencia está bien definido: esto es, no depende del punto tomado de  $\mathcal{C} \cap r$ .

**Demostración.** Supongamos que  $r$  corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos distintos,  $P$  y  $Q$ . Sea  $s$  la recta tangente en  $P$  y  $t$  la recta tangente en  $Q$ . La simetría axial de eje la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$  intercambia los puntos  $P$  y  $Q$ , y por tanto intercambia los vectores  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OQ}$ , así que intercambia las rectas tangentes y el ángulo con  $r$  es el mismo en ambos puntos. ■

**Observación 3.2.** Se tienen las siguientes propiedades sobre el ángulo entre una recta  $r$  y una circunferencia  $\mathcal{C}$  de centro  $O$ :

1. Si  $P \in \mathcal{C} \cap r$ , entonces el ángulo entre  $r$  y  $\mathcal{C}$  coincide con el complementario al ángulo entre  $r$  y la recta  $OP$  (el radio en  $P$ ): ya que el radio y la tangente en  $P$  son perpendiculares en virtud de la **proposición 1.2**.
2. El ángulo entre  $r$  y  $\mathcal{C}$  es  $\frac{\pi}{2}$  si y solo si  $\mathcal{C}$  pasa por  $O$ : esto es porque por el punto anterior  $r$  es perpendicular a  $\mathcal{C}$  si y solo si  $r$  es paralela al radio en  $P$ . Como  $r$  pasa por  $P$ , esto es lo mismo que  $r = P + \langle \overrightarrow{OP} \rangle$ , y por tanto lo mismo que  $O \in r$ .
3. Por el punto anterior podemos extender la noción de perpendicularidad de recta y circunferencia a casos más generales: en efecto, dada una circunferencia cualquiera  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  (real, colapsada a un punto, o imaginaria), decimos que  $r$  es perpendicular a  $\mathcal{C}$  si pasa por  $O$ .

## 3.2 Ángulo entre dos circunferencias

**Definición 3.2 (Ángulo entre dos circunferencias).** Sean  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  dos circunferencias reales tales que  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  no es vacío. Sea  $P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ . Sean  $r_1$  y  $r_2$  las rectas tangentes a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  en  $P$ , respectivamente. Se define el ángulo entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  como el ángulo entre  $r_1$  y  $r_2$ .

**Observación 3.3.** Se tiene que dos circunferencias  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son tangentes en  $P$  si y solo si forman ángulo 0, ya que como vimos en el **teorema 2.1** el eje radical de ambas es tangente (a las dos a la vez) si y solo si son tangentes. Luego las rectas tangentes en  $P$  coinciden si y solo si esta recta es precisamente el eje radical (o lo que es lo mismo, si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son tangentes).

**Observación 3.4.** Supongamos que  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  se cortan, y tienen centros  $O_1, O_2$ , respectivamente. Sea  $P$  un punto de la intersección; sean  $\mathbf{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$  un vector tan-

gente a  $\mathfrak{C}_1$  en  $P$ , y sea  $\mathbf{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$  un vector tangente a  $\mathfrak{C}_2$  en  $P$  (perpendiculares al radio). Sabemos entonces que el ángulo entre  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Pero:

$$\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}} = \frac{|u_2 v_2 + (-u_1)(-v_1)|}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}} = \frac{|\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp|}{\|\mathbf{u}^\perp\| \|\mathbf{v}^\perp\|},$$

donde  $\overrightarrow{(w_1, w_2)}^\perp = \overrightarrow{(w_2, -w_1)}$  es un vector perpendicular. Esto es, el ángulo entre las rectas tangentes (y entre dos rectas cualesquiera) es el mismo que el ángulo entre sus vectores normales: en concreto, en virtud de la **proposición 1.2** es el que forman los radios  $\overrightarrow{O_1 P}$ ,  $\overrightarrow{O_2 P}$ .

**Proposición 3.2.** En las condiciones de la definición anterior, el ángulo entre dos circunferencias está bien definido: esto es, no depende del punto de  $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$ .

**Demostración.** Supongamos que se cortan en dos puntos distintos  $P$  y  $Q$ . Entonces, sea  $m$  la recta que une los centros de  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ . La simetría axial de eje  $m$  deja fijas a las circunferencias, pero intercambia los radios en  $P$  y los radios en  $Q$ . Luego los ángulos que forman las dos circunferencias, que son los que forman los radios por la **observación 3.4**, son iguales. ■

**Observación 3.5.** Se tienen las siguientes propiedades sobre el ángulo entre dos circunferencias reales  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ , de centros  $O_1$  y  $O_2$  y radios  $r_1, r_2 > 0$ , que se cortan en  $P$ :

1. Como hemos visto en la **observación 3.4** el ángulo que forman  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  es el que forman los radios en  $P$ . Sea  $d = d(O_1, O_2)$  la distancia entre los centros. Tenemos por tanto un triángulo  $\triangle O_1 O_2 P$ , tal que el ángulo  $\widehat{O_1 P O_2}$  es o bien el ángulo entre los radios, o bien el suplementario (por como hemos definido el ángulo entre rectas). Del teorema del coseno vemos que

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \tilde{\alpha},$$

donde  $\tilde{\alpha}$  es o bien el ángulo entre los radios o su suplementario, el que coincide con  $\widehat{O_1 P O_2}$ . Como el coseno de un ángulo y su suplementario es igual salvo signo, vemos que podemos despejar y

$$\cos \alpha = \frac{|r_1^2 + r_2^2 - d^2|}{2r_1 r_2}$$

es el coseno del ángulo que forman  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ .

2. En base a lo anterior, vemos que las dos circunferencias son ortogonales si y solo si  $r_1^2 + r_2^2 = d^2$ : esto es, si y solo si los radios son perpendiculares en el punto

$P$  (por el Teorema de Pitágoras, ya lo sabíamos de la **observación 3.4**). Es decir,  $d^2 - r_1^2 = r_2^2$ , lo que en potencia significa que  $\Pi_{\mathfrak{C}_1}(O_2) = r_2^2$  (lógicamente por simetría tenemos también  $\Pi_{\mathfrak{C}_2}(O_1) = r_1^2$ ). Esto es otra caracterización: dos circunferencias son ortogonales si y solo si el centro de cualquiera de las dos tiene potencia el cuadrado de su radio respecto de la otra.

3. También podemos ver que dos circunferencias forman ángulo 0 si o bien  $r_1^2 + r_2^2 - d^2 = 2r_1r_2$  o bien  $d^2 - r_1^2 - r_2^2 = 2r_1r_2$ : esto es, o bien  $(r_1 - r_2)^2 = d^2$  o bien  $(r_1 + r_2)^2 = d^2$ . Por el **teorema 2.1** esto equivale a que sean tangentes (como vimos en la **observación 3.3**).
4. Podemos extender la definición de ortogonalidad de circunferencias a casos más generales: en efecto, sean  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  circunferencias cualesquiera de centros  $O_1$  y  $O_2$ , y radios  $r_1$  y  $r_2$  (radio positivo en el caso real, igual a cero en el caso de circunferencia colapsada a un punto, y radio imaginario en el caso imaginario). Se dice que son ortogonales si  $r_1^2 + r_2^2 = d^2$ , donde  $d = d(O_1, O_2)$ .

# 4 | Haces de ciclos

## 4.1 Definiciones y propiedades

**Definición 4.1 (Haz de ciclos).** Sean  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  ciclos distintos, definidos por ecuaciones  $f_1 = 0, f_2 = 0$  respectivamente. Se llama haz de ciclos generado por  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ , notado  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ , al conjunto de ciclos que tienen una ecuación de la forma  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ , para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  números reales no ambos nulos.

Si no hay ambigüedad acerca de los ciclos que generan al haz, se suele notar a este simplemente por  $\mathcal{H}$ . Al ciclo del haz  $\mathcal{H}$  definido por los escalares  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se le denotará por  $\mathfrak{C}_{\lambda_1, \lambda_2}$ , de nuevo siempre que esté claro qué haz estamos teniendo en cuenta.

**Observación 4.1.** Deducimos las siguientes propiedades de los haces de ciclos:

1. Dado un haz  $\mathcal{H}$  generado como en la definición anterior, si  $(\lambda_1 : \lambda_2) = (\mu_1 : \mu_2)$  (vistos como puntos proyectivos de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ), entonces  $\mathfrak{C}_{\lambda_1, \lambda_2} = \mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}$ , entendiéndose la igualdad de ciclos no solo como conjuntos sino que en el caso de circunferencias imaginarias coincidan los centros y los radios (imaginarios). En efecto por definición de espacio proyectivo existe un  $\beta \in \mathbb{R}^*$  tal que  $(\lambda_1, \lambda_2) = \beta(\mu_1, \mu_2)$ . Por tanto las ecuaciones  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$  y  $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = 0$  son proporcionales y definen el mismo ciclo.
2. Por cada punto del plano pasa al menos un ciclo: en efecto, sea  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ , con  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  de ecuaciones respectivas  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$ . Si  $P$  está en  $\mathfrak{C}_1$  o  $\mathfrak{C}_2$  ya hay un elemento del haz que pasa por  $P$ ; si no, el ciclo  $\mathfrak{C}_{-f_2(P), f_1(P)}$  contiene a  $P$  ya que  $[-f_2(P)] f_1(P) + [f_1(P)] f_2(P) = 0$ .
3. Obviamente un haz solo depende de los ciclos que lo generen y no de las ecuaciones que escojamos, pues las ecuaciones de un ciclo son la misma salvo múltiplo por un escalar. Por ello podemos suponer sin pérdida de generalidad

que las ecuaciones de las circunferencias que generan un haz (si es que hay alguna) son normales.

4. Sea el haz  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ , donde las circunferencias tienen ecuaciones normales  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$  respectivamente. Entonces, si no son concéntricas, su eje radical  $e$ , según se vio en la **observación 2.3**, tiene ecuación  $f_1 - f_2 = 0$ , y por tanto está en el haz  $\mathcal{H}$ .

**Proposición 4.1.** Sean  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  ciclos distintos definidos por  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$ . Sean  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  ciclos del haz  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$  distintos. Entonces  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \mathcal{H}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ .

**Demostración.** Sean  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  definidos por  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ ,  $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = 0$ , respectivamente. Entonces  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{D}$  (como ciclos) si y solo si

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(es decir, si las ecuaciones no son proporcionales). Esto es, se tiene que  $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$ . Veamos la igualdad por doble inclusión.

$\supseteq$  Las ecuaciones de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  son combinaciones lineales no nulas de las de  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ , luego toda combinación lineal no nula de las ecuaciones de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  es también combinación de  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$ . Así que todo ciclo de  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$  es ciclo de  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ .

$\subseteq$  Notemos que una combinación lineal de las ecuaciones de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  es

$$\mu_2(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) - \lambda_2(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = 0;$$

es combinación lineal no nula porque si  $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ , entonces  $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{C}_1$ , lo que contradice la hipótesis de que fueran distintas. Pero la ecuación queda

$$(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) f_1 = 0,$$

que es múltiplo no nulo de la ecuación de  $\mathfrak{C}_1$  (no nulo por la hipótesis sobre el determinante). Luego  $\mathfrak{C}_1 \in \mathcal{H}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ . De igual forma se ve que  $\mathfrak{C}_2 \in \mathcal{H}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ . Usando un razonamiento como el de arriba, vemos que tomar haz generado por dos ciclos respeta las inclusiones, así que como  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathcal{H}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ , tenemos  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) \subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ . ■

**Corolario 4.1.** Si un punto pertenece a dos ciclos distintos de un haz  $\mathcal{H}$ , pertenece a todos los ciclos del haz.

**Demostración.** Supongamos  $P \in \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$ , con  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  ciclos de  $\mathcal{H}$ . Entonces por la proposición anterior  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ . Si  $P$  es afín,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$  son ecuaciones de los ciclos respectivamente, entonces un ciclo  $\mathfrak{C}$  cualquiera del haz tiene una ecuación de la forma  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ , no ambos coeficientes nulos. En ese caso  $\lambda_1 f_1(P) +$

$\lambda_2 f_2(P) = 0$ , luego  $P \in \mathfrak{C}$ . Si  $P = \infty$ , los dos ciclos son rectas, el haz generado es de rectas (porque la combinación lineal de ecuaciones lineales es lineal), y todo ciclo del haz es una recta así que pasa por  $P$ . ■

Se ve motivada por tanto la siguiente definición:

**Definición 4.2 (Puntos base).** Sea  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$  un haz de ciclos. Entonces se definen los puntos base del haz como

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 = \bigcap_{\mathfrak{C} \in \mathcal{H}} \mathfrak{C}.$$

Notemos que, como vimos, por cada punto del plano pasa al menos un ciclo del haz. Además si por un punto pasan dos ciclos, pasan todos los del haz. Luego por todo punto afín que no sea base pasa exactamente un ciclo del haz.

## 4.2 Clasificación de haces de ciclos

### • Haces generados por dos rectas

Si un haz  $\mathcal{H}$  contiene a dos rectas  $r$  y  $s$  (y por tanto está generado por ellas), todo ciclo del haz es una recta (obviamente, pues la combinación lineal de ecuaciones lineales es lineal). Hay dos opciones:

1.  $r$  y  $s$  son paralelas. En ese caso, el único punto base es el infinito. Además, por ser las rectas paralelas podemos tomar las ecuaciones de ambas como  $r : Ax + By + C = 0$ ,  $s : Ax + By + D = 0$ ,  $A, B$  no ambos nulos y  $C \neq D$ . Entonces cualquier recta de  $\mathcal{H}$  tiene una ecuación de la forma  $Ax + By + \frac{(\lambda_1 C + \lambda_2 D)}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0$ , con  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ . Dado  $\beta \in \mathbb{R}$ , vemos que tomando  $\lambda_1 = \beta - D$ ,  $\lambda_2 = C - \beta$ , el ciclo  $\mathfrak{C}_{\lambda_1, \lambda_2}$  del haz tiene una ecuación de la forma  $Ax + By + \beta = 0$ . Esto es,  $\mathcal{H}$  contiene a todas las rectas paralelas a  $r$  y  $s$ .
2.  $r$  y  $s$  no son paralelas. En ese caso los puntos base son el infinito y un punto afín  $P = (x_0, y_0)$ . Las ecuaciones de ambas son  $r : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ ,  $s : A'(x - x_0) + B'(y - y_0) = 0$ , donde además para que sean distintas debemos tener

$$\begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  no ambos nulos, el sistema

$$\begin{pmatrix} A & A' \\ B & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

tiene solución: esto es, existen  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , no ambos nulos, tales que  $\lambda_1 A + \lambda_2 A' = \alpha$ ,  $\lambda_1 B + \lambda_2 B' = \beta$ . En ese caso el ciclo  $\mathfrak{C}_{\lambda_1, \lambda_2}$  del haz tiene ecuación  $(\lambda_1 A + \lambda_2 A')(x - x_0) + (\lambda_1 B + \lambda_2 B')(y - y_0) = 0$ : es decir,  $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$ . Por tanto el haz  $\mathcal{H}$  está formado por todas las rectas que pasan por  $P$ .

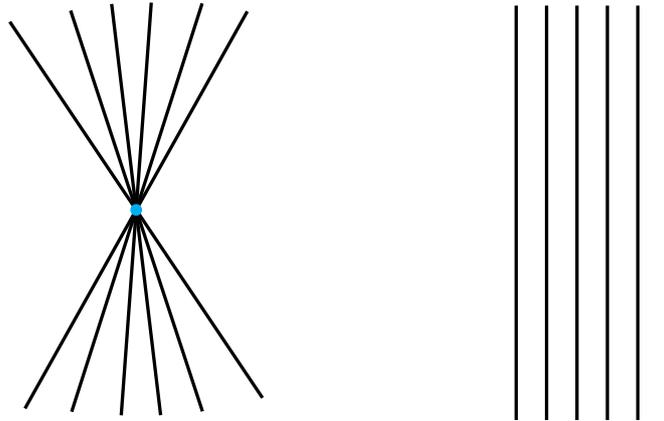


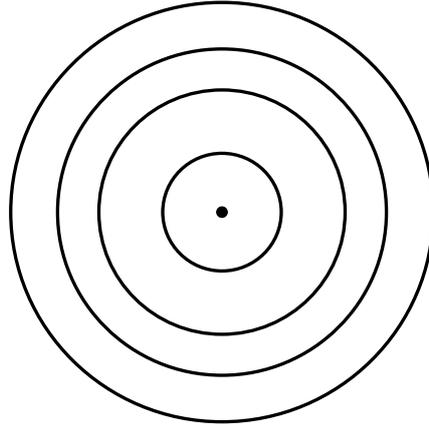
Figura 4.1. Haces generados por rectas

• Haces que no contienen rectas

Si  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$  no contiene rectas es porque  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  no tienen eje radical: pues de tenerlo este pertenece a  $\mathcal{H}$  (visto en la **observación 4.1**). Si no tienen eje radical es porque son concéntricas, de centro  $O = (x_0, y_0)$ . Suponiendo que las ecuaciones son  $\mathfrak{C}_1 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_1^2 = 0$ ,  $\mathfrak{C}_2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_2^2 = 0$ , con los radios posiblemente iguales a 0 o imaginarios, y  $r_1 \neq r_2$ , el haz contiene a todas las circunferencias con ecuaciones de la forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \frac{\lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0,$$

donde  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ . Por tanto toda circunferencia del haz está centrada en  $O$ . Sea  $\beta \in \mathbb{R}$  cualquiera. Tomando  $\lambda_1 = \beta - r_2^2$ ,  $\lambda_2 = r_1^2 - \beta$  tenemos que el ciclo  $\mathfrak{C}_{\lambda_1, \lambda_2}$  tiene ecuación  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \beta = 0$ : esto es, la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\sqrt{\beta}$  está en el haz para todo  $\beta$ . Así que el haz  $\mathcal{H}$  contiene exactamente a todas las circunferencias reales, imaginarias y colapsadas a un punto centradas en  $O$ .



**Figura 4.2.** Haz de circunferencias concéntricas

Por tanto, si un haz contiene al menos dos rectas es o bien un haz de rectas paralelas o bien un haz de rectas incidentes en un punto. Si no contiene rectas es un haz de circunferencias concéntricas. Así que el resto de haces tiene una única recta.

**Definición 4.3 (Haz excepcional).** Un haz de ciclos  $\mathcal{H}$  que sea de rectas paralelas, de rectas incidentes en un punto, o de circunferencias concéntricas se denomina haz excepcional o haz singular.

• **Haces que contienen una sola recta**

Si un haz  $\mathcal{H}$  contiene una única recta  $e$ , debe contener también una circunferencia  $\mathfrak{C}_1$ , de centro  $O_1$  y radio  $r_1$  (posiblemente 0 o imaginario). Entonces notemos que si una circunferencia  $\mathfrak{C}_2$  está en  $\mathcal{H}$  y no es concéntrica con  $\mathfrak{C}_1$  debemos tener que el eje radical de ambas también sea un ciclo del haz (por la **observación 4.1**). Pero como la única recta del haz es  $e$ , se tiene que  $e = e(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ . Esto es, todo par de circunferencias no concéntricas del haz tiene a  $e$  como eje radical. Recíprocamente, si  $g = 0$  es una ecuación de  $e$ , y  $f_1 = 0$  es la ecuación normal de  $\mathfrak{C}_1$ , sea  $\mathfrak{C}_2$  tal que  $e$  es el eje radical de  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ . En ese caso sabemos que, si  $f_2 = 0$  es la ecuación normal de  $\mathfrak{C}_2$ ,  $f_1 - f_2 = 0$  es una ecuación de  $e$ , por lo que es proporcional a  $g = 0$ , digamos que  $\lambda \neq 0$  es tal que  $f_1 - f_2 = \lambda g$ . Entonces  $f_2 = f_1 - \lambda g = 0$  es una combinación lineal no nula de ecuaciones de ciclos del haz, de donde concluimos que  $\mathfrak{C}_2 \in \mathcal{H}$ . Además  $\mathcal{H}$  no contiene a dos circunferencias concéntricas, pues entonces lo generarían, y sería un haz sin rectas según hemos visto. Por tanto, dada  $\mathfrak{C}_1 \in \mathcal{H}$ , una circunferencia  $\mathfrak{C}_2$  está en el haz si y solo si  $e = e(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ . Esto es, podemos describir los haces no excepcionales diciendo que son el conjunto de pares de circunferencias cuyo eje radical es una recta común. A veces, a la única recta del haz por abuso de lenguaje se le llamará "eje radical del haz", aunque en este caso debe quedar claro

que nos referimos al eje radical de cualquier par de circunferencias del haz.

Ahora, como se vio en la **proposición 2.2**, el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros. Sea  $\mathfrak{C}_1$  circunferencia fija de  $\mathcal{H}$ , de centro  $O_1$ . Entonces para cada  $\mathfrak{C}_2 \in \mathcal{H}$ , de centro  $O_2$ , se tiene que  $\overrightarrow{O_1O_2} \perp e$ : esto es, todo centro de una circunferencia del haz está en la recta perpendicular a  $e$  que pasa por  $O_1$ .

**Definición 4.4 (Recta de centros).** Dado un haz no excepcional  $\mathcal{H}$  que contiene a la recta  $e$ , se denomina recta (o línea) de centros del haz a la recta que contiene a todos los centros de todas las circunferencias de  $\mathcal{H}$ , que es perpendicular a  $e$ .

Además, no solo es que todo centro esté dentro de la recta de centros del haz, sino que todo punto de la recta de centros es centro de alguna circunferencia de  $\mathcal{H}$ .

**Proposición 4.2.** Sea  $\mathcal{H}$  un haz no excepcional, que contiene a la recta  $e$ . Si  $O$  es un punto de la línea de centros, existe una única circunferencia del haz  $\mathfrak{C}$  de centro  $O$ .

**Demostración.** La unicidad está clara, pues si existen dos circunferencias de centro  $O$  que son distintas, generan al haz y por tanto es un haz de circunferencias concéntricas, que no contiene rectas. Para ver la existencia, sea  $\mathfrak{C}_1 \in \mathcal{H}$ , de centro  $O_1$  y radio  $r_1$ , positivo, 0 o imaginario. Basta ver que existe una circunferencia  $\mathfrak{C}$ , de centro  $O \neq O_1$ , tal que  $e = e(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1)$ : pues por lo que hemos comentado antes esto implica que  $\mathfrak{C}$  está en el haz. Sea  $Q$  la intersección de  $e$  con la línea de centros (existe porque son perpendiculares). Sea  $r^2 = \|\overrightarrow{OO_1}\|^2 + 2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q} + r_1^2$ . Entonces, para cualquier  $P$  de  $e$ , se tiene que  $\overrightarrow{QP}$  es vector director de  $e$  (o el vector nulo), y por tanto es ortogonal a  $\overrightarrow{OO_1}$  al ser este vector director de la línea de centros. Sea  $\mathfrak{C}$  la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ . Entonces la potencia de  $P$  respecto de  $\mathfrak{C}$  es:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathfrak{C}}(P) &= \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2 = \|\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P}\|^2 - \underbrace{\|\overrightarrow{OO_1}\|^2 + 2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q} + r_1^2}_{-r^2} = \\ &= \|\overrightarrow{OO_1}\|^2 + 2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1P} + \|\overrightarrow{O_1P}\|^2 - \|\overrightarrow{OO_1}\|^2 - 2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q} - r_1^2. \end{aligned}$$

Ahora, como dijimos  $\overrightarrow{QP}$  es perpendicular a  $\overrightarrow{OO_1}$ . Por tanto se tiene:  $\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OO_1} \cdot (\overrightarrow{O_1Q} + \overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q}$ . Sustituyendo arriba tenemos que

$$\Pi_{\mathfrak{C}}(P) = \underbrace{2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1P}}_{2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q}} + \|\overrightarrow{O_1P}\|^2 - 2\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q} - r_1^2 = \|\overrightarrow{O_1P}\|^2 - r_1^2 = \Pi_{\mathfrak{C}_1}(P),$$

por definición de potencia. Es decir, que para todo  $P \in e$ , la potencia de  $P$  respecto de  $\mathfrak{C}$  es igual a la potencia respecto de  $\mathfrak{C}_1$ . Luego  $e = e(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1)$  y tenemos  $\mathfrak{C} \in \mathcal{H}$ . ■

Así que de los haces no excepcionales sabemos que contienen solo una recta  $e$ , que es eje radical común de todas las circunferencias del haz, y que además todos los centros están en una recta perpendicular a  $e$ . Hay tres posibilidades para los puntos base: que no haya puntos base, que haya uno o que haya dos (pues son los posibles cortes de una recta con una circunferencia).

1. Si hay dos puntos base,  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{P_1, P_2\}$ , el eje radical  $e$  es la recta que pasa por ellos. Si una circunferencia pasa por ellos dos, su centro está en la mediatriz  $M_{P_1, P_2} + \overrightarrow{P_1 P_2}^\perp$ , que es perpendicular a  $e$  y por tanto paralela a la línea de centros. Es decir, que el centro está en la línea de centros y en una recta paralela a ella, luego la mediatriz de  $P_1$  y  $P_2$  es la recta de centros. Si una circunferencia está en el haz pasa por  $P_1$  y por  $P_2$ , por definición de puntos base; recíprocamente si  $\mathfrak{C}_1$  está en el haz y  $\mathfrak{C}$  pasa por  $P_1$  y  $P_2$ , entonces su eje radical pasa por  $P_1$  y  $P_2$ , luego es  $e$ . Como  $e = e(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C})$ ,  $\mathfrak{C} \in \mathcal{H}$ . Por tanto el haz es el conjunto de ciclos que pasan por  $P_1$  y  $P_2$ , todas las circunferencias son reales porque pasan por dos puntos. A este tipo de haz se le denomina haz elíptico o haz de tipo intersecante.
2. Si hay un solo punto base,  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{P\}$ , no hay circunferencias imaginarias (todas las circunferencias pasan al menos por  $P$ ). Sea  $O_1$  un punto de la línea de centros que no está en  $e$ , y sea  $\mathfrak{C}_1$  la circunferencia del haz de centro  $O_1$ . Como  $O_1$  no es  $P$  (pues  $P \in e$ ), la circunferencia  $\mathfrak{C}_1$  debe ser real, digamos de radio  $r_1 > 0$ . Ahora, la circunferencia colapsada a  $P$  está en el haz, porque el eje radical de  $\{P\}$  (visto como circunferencia colapsada a un punto) y  $\mathfrak{C}_1$  es  $e$ , por la **observación 2.1**. Además, se tiene que toda circunferencia tangente a  $\mathfrak{C}_1$  en  $P$  pertenece al haz por tener eje radical  $e$ ; recíprocamente si  $\mathfrak{C}$  está en el haz debe cortar a  $\mathfrak{C}_1$  solo en  $P$  y por tanto son tangentes. Esto es, el haz es el conjunto de circunferencias tangentes entre sí (y tangentes con  $e$ ) en  $P$ , además del eje  $e$ . A este tipo de haz se le denomina haz parabólico o haz de tipo tangencial.
3. Si no hay puntos base, sea  $P$  el corte de la línea de centros con  $e$ . Sea  $\mathfrak{C}_1$  una circunferencia del haz cualquiera (real o no), de radio  $r_1$  y centro  $O_1$ , y sea  $O$  un punto de la línea de centros que no es  $P$ . Sea  $\mathfrak{C}$  la circunferencia del haz de centro  $O$ , de radio  $r$ . Como  $P$  está en el eje radical  $e$  tenemos que

$$\Pi_{\mathfrak{C}}(P) = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2 = \|\overrightarrow{O_1P}\|^2 - r_1^2 = \Pi_{\mathfrak{C}_1}(P),$$

luego  $r^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - \|\overrightarrow{O_1P}\|^2 + r_1^2$ . Si  $\mathfrak{C}_1$  es real, como no hay puntos base el eje  $e$  no corta a la circunferencia, así que  $\|\overrightarrow{O_1P}\|^2 - r_1^2 > 0$ . Si  $\mathfrak{C}_1$  es imaginaria o colapsada a un punto, la desigualdad está clara porque  $r_1^2 \leq 0$ . Entonces, si  $O$

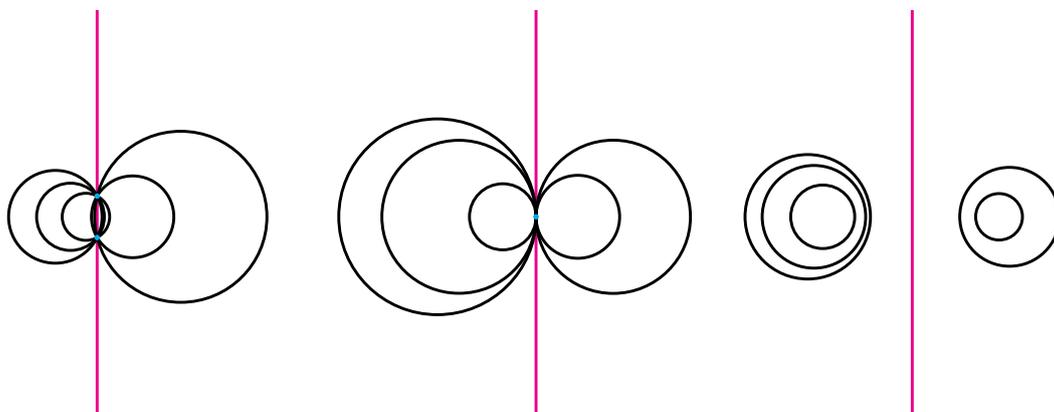
es uno de los puntos de la línea de centros tal que  $d(O, P) = \sqrt{\|\vec{O_1P}\|^2 - r_1^2}$ , por la igualdad anterior

$$r^2 = \|\vec{O_1P}\|^2 - r_1^2 - \|\vec{O_1P}\|^2 + r_1^2 = 0;$$

así que la circunferencia  $\mathfrak{C}$  es colapsada al punto  $O$ . Notemos que hay dos puntos distintos  $O', O'' \in e$  (equidistantes de  $P$ ) tales que  $d(O', P) = d(O'', P) = \sqrt{\|\vec{O_1P}\|^2 - r_1^2}$ , luego hay en  $\mathcal{H}$  dos circunferencias colapsadas a un punto. Si  $O$  está en el interior del segmento  $\overline{O'O''}$ , entonces el radio de la circunferencia correspondiente es

$$r^2 = \|\vec{OP}\|^2 - \|\vec{O_1P}\|^2 + r_1^2 < \|\vec{O'P}\|^2 - \|\vec{O_1P}\|^2 + r_1^2 = 0,$$

porque al estar  $O$  en el interior del segmento, está a menor distancia del punto medio  $P$  que los extremos. Por tanto, las circunferencias de centro en el interior de  $\overline{O'O''}$  son imaginarias: igualmente un cálculo similar muestra que las circunferencias del haz de centro en el exterior de  $\overline{O'O''}$  son reales. A  $O', O''$  se les denomina puntos límite del haz. A este tipo de haz se le llama haz hiperbólico o de tipo no intersecante.



**Figura 4.3.** Haces no excepcionales: elíptico, parabólico e hiperbólico

# 5 | Inversión

## 5.1 Definición de inversión

Vamos a estudiar la transformación fundamental en la que se basa este trabajo: la inversión.

**Definición 5.1 (Inversión).** Sea  $O \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  un punto afín cualquiera, y  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  un real no nulo. Se define la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$  como la aplicación  $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$  dada por  $\varphi(P) = P'$ , donde el punto  $P'$  es el único que verifica

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP}.$$

Es decir, que

$$\varphi(P) = O + \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP}.$$

A la circunferencia  $\mathfrak{C}$  de centro  $O$  y radio  $\sqrt{\alpha}$  (quizá imaginario) la llamamos circunferencia de inversión. A menudo nos referiremos a  $\varphi$  como la inversión respecto de la circunferencia  $\mathfrak{C}$ .

**Observación 5.1.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  y potencia  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Tenemos:

1.  $\varphi$  es involutiva en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$  (esto es,  $\varphi = \varphi^{-1}$ ). En efecto por la definición anterior, llamando  $P' = \varphi(P)$ , se tiene  $\|\overrightarrow{OP'}\| = \frac{|\alpha|}{\|\overrightarrow{OP}\|}$ , por lo que

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|^2}{\alpha} \overrightarrow{OP'} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP'}\|^2} \overrightarrow{OP'};$$

es decir,  $P = \varphi(P')$  y por tanto  $\varphi = \varphi^{-1}$ .

2. Si  $\alpha < 0$  no hay puntos fijos, pues para que  $\varphi(P) = P$  debemos tener que  $\overrightarrow{OP} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP}$ . Como  $P \neq O$  porque la inversión no está definida en el polo, sabemos que el vector  $\overrightarrow{OP}$  es no nulo y por tanto  $\alpha = \|\overrightarrow{OP}\|^2$ , lo que no se da si  $\alpha < 0$ .
3. Por el mismo razonamiento anterior, si  $\alpha > 0$  solo serán puntos fijos aquellos que estén a distancia  $\sqrt{\alpha}$  de  $O$ . Es decir, si  $\alpha = \|\overrightarrow{OP}\|^2$  entonces  $P$  es un punto doble para  $\varphi$ . Esto es, la circunferencia de inversión es una circunferencia de puntos fijos (en el caso  $\alpha > 0$ ).
4. Notemos que si la inversión tiene potencia  $\alpha$  negativa, entonces

$$\varphi(P) = O - \frac{|\alpha|}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP};$$

es decir, sería equivalente a aplicar una inversión respecto de la circunferencia real de centro  $O$  y radio  $\sqrt{|\alpha|}$ , seguida de una rotación de  $180^\circ$  alrededor de  $O$  (o bien una homotecia de razón  $-1$  y de centro  $O$ ).

5. Si  $O = (x_0, y_0)$ , podemos encontrar las ecuaciones cartesianas de la inversión:  $\varphi(x, y) = (x', y')$ , donde

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + \frac{\alpha}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (x - x_0); \\ y' &= y_0 + \frac{\alpha}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (y - y_0). \end{aligned}$$

En particular notemos que la inversión es una aplicación diferenciable en todo punto en que está definida, en el sentido de  $\mathbb{R}^2$ .

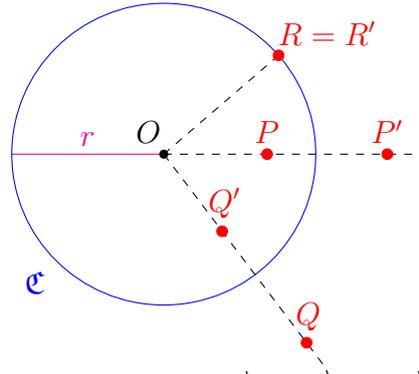
**Lema 5.1.** Sea  $\varphi$  inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Sean  $P$  y  $P'$  alineados con  $O$ . Entonces  $P' = \varphi(P)$  si y solo si  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \alpha$ .

**Demostración.** De la definición vemos que si  $P' = \varphi(P)$ , entonces multiplicando escalarmente por  $\overrightarrow{OP}$  tenemos  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \alpha$ .

Para la otra implicación, como  $O$ ,  $P$  y  $P'$  están alineados, por proyección ortogonal se tiene

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}} \overrightarrow{OP} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP},$$

así que  $P' = \varphi(P)$ . ■



**Figura 5.1.** Inversión respecto de  $\mathfrak{C}$ :  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OR'} = r^2$

**Observación 5.2.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ , y sea  $\mathfrak{C}$  la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r = \sqrt{|\alpha|}$ . Entonces, en vista del lema anterior:

1. Si  $\alpha > 0$ ,  $P' = \varphi(P)$  si y solo si  $P$  y  $P'$  están alineados con  $O$  y  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2 = \alpha$ . En particular  $P$  es un punto fijo si y solo si  $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = r^2$ ; es decir, si y solo si  $P \in \mathfrak{C}$  (ya lo sabíamos por la **observación 5.1**).
2. Tomando módulo, si  $P' = \varphi(P)$ ,  $\|\overrightarrow{OP}\| < r$  si y solo si  $\|\overrightarrow{OP'}\| > r$ ; y viceversa. Es decir,  $P$  está en el interior de  $\mathfrak{C}$  si y solo si  $\varphi(P)$  está en el exterior, e igualmente  $P$  está en el exterior si y solo si  $\varphi(P)$  está en el interior de  $\mathfrak{C}$ .
3. Por lo anterior y la **observación 5.1**,  $\varphi$  es una biyección entre el exterior y el interior de  $\mathfrak{C}$  (salvo su centro), y deja a  $\mathfrak{C}$  fija.

## 5.2 Inversión en el plano inversivo

La definición anterior de inversión respecto de una circunferencia se extiende al plano inversivo  $\hat{\mathbb{A}}^2(\mathbb{R})$ :

**Definición 5.2 (Inversión en el plano inversivo).** Dada una inversión  $\varphi$  en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ , se extiende a una aplicación  $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{A}}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{\mathbb{A}}^2(\mathbb{R})$  definida por  $\hat{\varphi} = \varphi$  en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$ ,  $\varphi(O) = \infty$ ,  $\varphi(\infty) = O$ .

A partir de ahora, cuando hablemos de una inversión directamente la contemplaremos como esta inversión "extendida", y ya no diremos que no está definida sobre su polo, sino que lo manda al infinito. Notemos que la inversión extendida sigue siendo una involución.

### 5.3 Propiedades

El objetivo de esta sección es demostrar dos teoremas sobre la inversión. Para ello, dividimos en varias proposiciones los posibles casos.

**Proposición 5.1.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Entonces  $\varphi$  transforma cada recta que pasa por  $O$  en ella misma.

**Demostración.** Sea  $r$  una recta que pasa por  $O$ . Entonces si  $P$  está en  $r$  y no es  $O$ , por definición de inversión  $P' = \varphi(P)$  está alineado con  $O$  y con  $P$ , así que está en  $r$ . Por ser  $\varphi$  una involución, si  $P' = \varphi(P)$  está en  $r$ , su inverso  $\varphi(P') = P$  está alineado con  $O$  y con  $P'$ : es decir,  $P$  está en  $r$ . Por tanto  $P \in r \Leftrightarrow \varphi(P) \in r$ , así que  $r$  es una recta fija (pero no de puntos fijos) para  $\varphi$ . ■

**Proposición 5.2.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Sea  $\mathfrak{C}$  la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\sqrt{\alpha}$  (posiblemente imaginario). Sea  $\mathfrak{D}$  una circunferencia real que pasa por  $O$ . Entonces  $\varphi(\mathfrak{D}) = e(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$  el eje radical de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$ .

**Demostración.** Veamos la potencia de los inversos de los puntos de  $\mathfrak{D}$  respecto de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$ . Sea  $Q$  el centro de  $\mathfrak{D}$ , y sea  $r > 0$  el radio de  $\mathfrak{D}$ . Entonces, por definición de potencia, para todo  $P$  se tiene

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathfrak{C}}(P) &= \|\overrightarrow{OP}\|^2 - \alpha; \\ \Pi_{\mathfrak{D}}(P) &= \|\overrightarrow{QP}\|^2 - r^2.\end{aligned}$$

Sea  $P \in \mathfrak{D}$ ,  $P \neq O$ . Entonces

$$\varphi(P) = O + \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP},$$

por lo que su potencia respecto de  $\mathfrak{C}$  es

$$\Pi_{\mathfrak{C}}(\varphi(P)) = \|\overrightarrow{O\varphi(P)}\|^2 - \alpha = \left\| \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP} \right\|^2 - \alpha = \frac{\alpha^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} - \alpha.$$

Por otro lado, notemos que como  $O \in \mathfrak{D}$  y  $Q$  es el centro de  $\mathfrak{D}$ , entonces  $\|\overrightarrow{QO}\| = r$ . Luego

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathfrak{D}}(\varphi(P)) &= \|\overrightarrow{Q\varphi(P)}\|^2 - r^2 = \|\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{O\varphi(P)}\|^2 - r^2 = \\ &= \|\overrightarrow{OQ}\|^2 + 2\overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{O\varphi(P)} + \|\overrightarrow{O\varphi(P)}\|^2 - r^2 = 2\overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{O\varphi(P)} + \|\overrightarrow{O\varphi(P)}\|^2.\end{aligned}$$

Tenemos que  $O$  y  $P$  son dos puntos distintos de  $\mathfrak{D}$ , que tiene centro  $Q$ . Así que  $\|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = r$ , y el triángulo  $\triangle OPQ$  es isósceles. Por bilinealidad y simetría del producto escalar,

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{OQ}\|^2 + \|\overrightarrow{OP}\|^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP},$$

y por la observación de que el triángulo es isósceles concluimos que

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Ahora, usando la definición de inversión, por lo que hemos visto

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathfrak{D}}(\varphi(P)) &= 2\overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{O\varphi(P)} + \|\overrightarrow{O\varphi(P)}\|^2 = \\ &= -2\overrightarrow{OQ} \cdot \left( \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP} \right) + \left\| \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP} \right\|^2 = \\ &= -\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{\alpha^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} = \frac{\alpha^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} - \alpha, \end{aligned}$$

pues  $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ . Así que  $\Pi_{\mathfrak{C}}(\varphi(P)) = \Pi_{\mathfrak{D}}(\varphi(P))$  para todo  $P \in \mathfrak{D}$  distinto de  $O$ ; además  $\varphi(O) = \infty$ , luego  $\varphi(\mathfrak{D})$  está contenido en el eje radical de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$ .

Para ver la otra inclusión, si  $\varphi(P)$  está en el eje radical (y  $P \neq O$ ) entonces

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathfrak{C}}(\varphi(P)) &= \|\overrightarrow{O\varphi(P)}\|^2 - \alpha = \frac{\alpha^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} - \alpha, \\ \Pi_{\mathfrak{D}}(\varphi(P)) &= \|\overrightarrow{Q\varphi(P)}\|^2 - r^2 = \|\overrightarrow{OQ}\|^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \left( \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP} \right) + \frac{\alpha^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} - r^2 \end{aligned}$$

son iguales. Es decir,

$$\|\overrightarrow{OQ}\|^2 - \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} - r^2 = -\alpha.$$

Como  $\|\overrightarrow{OQ}\| = r$  porque  $O \in \mathfrak{D}$ , si  $\varphi(P)$  está en el eje radical entonces

$$-\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = -\alpha,$$

por lo que  $2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \|\overrightarrow{OP}\|^2$ . Por bilinealidad y simetría del producto escalar,

$$\|\overrightarrow{QP}\|^2 = \|\overrightarrow{OQ}\|^2 + \|\overrightarrow{OP}\|^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \|\overrightarrow{OQ}\|^2 = r^2;$$

esto es,  $\|\overrightarrow{QP}\|^2 = r^2$  y por tanto  $P \in \mathfrak{D}$ . Así que  $\varphi(\mathfrak{D}) = e(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ . ■

**Observación 5.3.** Notemos que en el caso anterior  $O \notin \varphi(\mathfrak{D})$ : pues  $O$  es el inverso de  $\infty \notin \mathfrak{D}$ .

**Proposición 5.3.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Sea  $\mathfrak{C}$  la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\sqrt{\alpha}$  (posiblemente imaginario). Sea  $r$  una recta que no pasa por  $O$ . Entonces la inversa de  $r$  es una circunferencia real  $\mathfrak{D}$  que pasa por  $O$ , y tal que  $r = e(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ .

**Demostración.** Primero,  $O \in \varphi(r)$  porque es el inverso de  $\infty \in r$ . Sea  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(r, \mathfrak{C})$  el haz de ciclos generado por  $r$  y por  $\mathfrak{C}$ . Es un haz no excepcional porque tiene una recta (luego no es de circunferencias concéntricas) y una circunferencia (luego no es de rectas). Sea  $\mathfrak{D}$  el único ciclo del haz que pasa por  $O$ , que no es  $\mathfrak{C}$  (porque  $O \notin \mathfrak{C}$  al ser su centro, y ser  $\alpha \neq 0$ ), ni  $r$  porque no pasa por  $O$ . Es una circunferencia real porque contiene al menos dos puntos ( $O$  y el inverso de cualquier otro punto de  $r$ ). Por la proposición anterior  $\varphi(\mathfrak{D}) = e(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = r$ , la única recta del haz de ciclos generado por  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathcal{H}$ . Como la inversión es involutiva  $\varphi(r) = \mathfrak{D}$ . ■

**Proposición 5.4.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Sea  $\mathfrak{D}$  una circunferencia real que no pasa por  $O$ . Entonces la inversa de  $\mathfrak{D}$  es otra circunferencia real que no pasa por  $O$ .

**Demostración.** Sea  $O_1$  el centro de  $\mathfrak{D}$ . Sea  $k = \Pi_{\mathfrak{D}}(O)$  la potencia del polo respecto de la circunferencia real  $\mathfrak{D}$ . Sea  $f$  la homotecia centrada en  $O$  de razón  $\frac{\alpha}{k}$ : es decir,  $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  definida por  $\overrightarrow{Of(P)} = \frac{\alpha}{k} \overrightarrow{OP}$ . Notemos que está bien definida, porque  $k \neq 0$  al ser  $O \notin \mathfrak{D}$  (y por tanto su potencia es no nula): además  $\alpha \neq 0$  así que la homotecia no es nula. Se tiene que por la homotecia  $f$ ,  $\mathfrak{D}$  va a una circunferencia  $f(\mathfrak{D})$  de centro  $f(O_1)$  (lo veremos después). Vamos a ver que  $f(\mathfrak{D}) = \varphi(\mathfrak{D})$ .

□ Sea  $P \in \mathfrak{D}$ , y sea  $Q$  la segunda intersección de la recta  $OP$  con la circunferencia  $\mathfrak{D}$  (si la recta  $OP$  no es tangente, por la **proposición 1.2** la intersección con  $\mathfrak{D}$  son dos puntos distintos; si la recta es tangente, se toma  $Q = P$ ). Entonces por potencia  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = k$ . Sean  $P' = f(Q)$ ,  $Q' = f(P)$ . Por definición de homotecia

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{\alpha}{k} \overrightarrow{OQ}.$$

Multiplicando escalarmente por  $\overrightarrow{OP}$  tenemos que

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \frac{\alpha}{k} \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}_k = \alpha.$$

Ahora,  $O, P, Q$  están alineados, y por definición de homotecia también están alineados con  $P'$  y  $Q'$ . Por el **lema 5.1** tenemos que  $P$  y  $P'$  son inversos por  $\varphi$  (e igual con  $Q$  y  $Q'$ ). Así que  $f(\mathfrak{D}) \subseteq \varphi(\mathfrak{D})$ .

$\square$  Sea  $P \in \mathfrak{D}$ , y sea  $Q$  como antes. De nuevo por potencia  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = k$ . Sea  $P'$  el inverso de  $P$ , vamos a ver que  $P' = f(Q)$ . Por definición de inversión

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP};$$

como  $O, P, Q, P'$  están alineados por proyección ortogonal  $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}} \overrightarrow{OP}$ , luego

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP} = \frac{\alpha}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}} \overrightarrow{OQ} = \frac{\alpha}{k} \overrightarrow{OQ}$$

(todo está bien definido porque como  $P \in \mathfrak{D}, P \neq O$ ). Esto es,  $P' = f(Q)$ ; igualmente se ve que  $Q' = f(P)$  y por tanto  $f(\mathfrak{D}) \supseteq \varphi(\mathfrak{D})$ .

Faltaría ver que la imagen por una homotecia de una circunferencia  $\mathfrak{C}$  es otra circunferencia de centro el homotético del de  $\mathfrak{C}$ . Esto es, sea  $\mathfrak{C}$  una circunferencia real de centro  $Q$ , y  $f$  una homotecia de centro  $O$  y razón  $m \neq 0$ . Entonces  $f(\mathfrak{C})$  es una circunferencia de centro  $f(Q)$  y radio  $|m|r$ : en efecto, si  $P \in \mathfrak{C}$ , tenemos  $\overline{QP} = r$ . Para todo  $P$  de  $\mathfrak{C}$ ,

$$\|\overline{f(Q)f(P)}\| = \|\overline{Of(P)} - \overline{Of(Q)}\| = \|m\overrightarrow{OP} - m\overrightarrow{OQ}\| = |m| \|\overrightarrow{QP}\| = |m|r.$$

Luego la homotética de  $\mathfrak{C}$  está contenida en una circunferencia, y se verifica que es de hecho la circunferencia completa porque podemos razonar igual con la homotecia inversa, de razón  $1/m$ .  $\blacksquare$

**Corolario 5.1.** Sea  $\varphi$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Sea  $\mathfrak{D}$  una circunferencia real, de centro  $A$  y radio  $r$ , que no pasa por  $O$ . Entonces la circunferencia inversa de  $\mathfrak{D}$  es la circunferencia de centro  $C$  y radio  $\rho$ , con

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\alpha}{OA^2 - r^2} \overrightarrow{OA}; \quad \rho = \frac{|\alpha|r}{|OA^2 - r^2|}.$$

**Demostración.** Según vimos antes, la circunferencia inversa de  $\mathfrak{D}$  es su homotética a través de la homotecia de centro  $O$  y razón  $\frac{\alpha}{k}$ , donde  $k = \Pi_{\mathfrak{D}}(O)$ . También vimos que dicha circunferencia homotética tenía centro el homotético de  $A$ , y radio

el resultante de multiplicar el radio de  $\mathfrak{D}$  por el valor absoluto de la razón de homotecia. Como  $\mathfrak{D}$  es la circunferencia de centro  $A$  y radio  $r$ , se tiene que  $k = \overline{OA}^2 - r^2$  por definición de potencia, así que la razón de homotecia es

$$\frac{\alpha}{\overline{OA}^2 - r^2},$$

de donde se sigue la expresión de  $C$  y  $\rho$ . ■

Por tanto, en base a las proposiciones anteriores tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.** La inversión, considerada como aplicación en el plano inversivo  $\hat{\mathbb{A}}^2(\mathbb{R})$ , manda ciclos en ciclos. En concreto manda ciclos que pasan por el polo en rectas, y ciclos que no pasan por el polo en circunferencias.

Además de este importante resultado, tenemos otro sobre la conformidad de la inversión.

**Definición 5.3 (Aplicación conforme).** Sean  $U, V$  abiertos no vacíos de  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ . Sea  $f : U \rightarrow V$  diferenciable; decimos que  $f$  es conforme en  $P \in U$  si conserva los ángulos en  $P$ . Esto es, si  $\alpha$  y  $\beta$  son curvas diferenciables con  $\alpha(t_0) = \beta(t_1) = P$ , entonces el ángulo entre  $\alpha'(t_0)$  y  $\beta'(t_1)$  coincide con el ángulo entre  $(f \circ \alpha)'(t_0)$  y  $(f \circ \beta)'(t_1)$ .

Para ver que una aplicación es conforme, se puede usar la definición 3.9.1 de [HP10]: en las condiciones anteriores, si  $J_f(P)$  es la matriz jacobiana de  $f$  en cada  $P$  de  $U$ , entonces  $f$  es conforme si y solo si existe  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, que no se anula en ningún punto, tal que para todos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  y para todo  $P \in U$  se tiene

$$(J_f(P) \cdot \mathbf{u}) \cdot (J_f(P) \cdot \mathbf{v}) = \lambda(P)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Podemos demostrar ahora uno de los principales resultados sobre la inversión: que es conforme.

**Teorema 5.2.** Sea  $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$  la inversión de polo  $O$  y potencia  $\alpha$ . Entonces  $\varphi$  es conforme en todo  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$ .

**Demostración.** Para ver que  $\varphi$  es conforme podemos tomar un sistema de referencia, usar las ecuaciones cartesianas de  $\varphi$  como en la **observación 5.1**, y usar la caracterización mencionada anteriormente. Es decir, basta ver que para cada par de vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  y para cada  $P$  se tiene

$$(J_\varphi(P) \cdot \mathbf{u}) \cdot (J_\varphi(P) \cdot \mathbf{v}) = \lambda(P)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

para una cierta  $\lambda$  diferenciable que no se anula. Pero por definición de producto escalar esto es equivalente a ver que

$$\mathbf{u}^t (J_\varphi(P))^t (J_\varphi(P)) \mathbf{v} = \lambda(P) \mathbf{u}^t \mathbf{v};$$

luego si vemos que existe  $\lambda$  diferenciable, que no se anula tal que en cada  $P$  se tiene  $(J_\varphi(P))^t (J_\varphi(P)) = \lambda(P) \cdot I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, hemos terminado: pues en ese caso

$$\mathbf{u}^t (J_\varphi(P))^t (J_\varphi(P)) \mathbf{v} = \lambda(P) \mathbf{u}^t I \mathbf{v} = \lambda(P) \mathbf{u}^t \mathbf{v},$$

luego  $\varphi$  sería conforme. Por tanto, es suficiente ver que  $(J_\varphi(P))^t (J_\varphi(P))$  es un múltiplo de la matriz identidad por una función diferenciable que no se anula. Veámoslo.

Consideramos un sistema de referencia, tal que el polo es  $O = (x_0, y_0)$ . Entonces, según vimos en la **observación 5.1**, las ecuaciones de  $\varphi$  son  $\varphi(x, y) = (x', y')$ , donde

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + \frac{\alpha}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (x - x_0), \\ y' &= y_0 + \frac{\alpha}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (y - y_0), \end{aligned}$$

para todo  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ . Llamando  $X = x - x_0$ ,  $Y = y - y_0$ , podemos abreviar un poco la expresión de  $\varphi$ :

$$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = \left( x_0 + \frac{\alpha}{X^2 + Y^2} X, y_0 + \frac{\alpha}{X^2 + Y^2} Y \right),$$

notemos que como  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  se tiene  $X^2 + Y^2 \neq 0$ . Derivando obtenemos la matriz jacobiana de  $\varphi$ ,  $J_\varphi(P) = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_P$ :

$$J_\varphi(P) = \begin{pmatrix} \alpha \frac{Y^2 - X^2}{(X^2 + Y^2)^2} & -2\alpha \frac{XY}{(X^2 + Y^2)^2} \\ -2\alpha \frac{XY}{(X^2 + Y^2)^2} & \alpha \frac{X^2 - Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{(X^2 + Y^2)^2} \begin{pmatrix} Y^2 - X^2 & -2XY \\ -2XY & X^2 - Y^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} (J_\varphi(P))^t (J_\varphi(P)) &= \frac{\alpha^2}{(X^2 + Y^2)^4} \begin{pmatrix} Y^2 - X^2 & -2XY \\ -2XY & X^2 - Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^2 - X^2 & -2XY \\ -2XY & X^2 - Y^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(X^2 + Y^2)^4} \begin{pmatrix} X^4 - 2X^2Y^2 + Y^4 + 4X^2Y^2 & 0 \\ 0 & X^4 - 2X^2Y^2 + Y^4 + 4X^2Y^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(X^2 + Y^2)^4} (X^2 + Y^2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha^2}{(X^2 + Y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si definimos  $\lambda : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\lambda(x, y) = \frac{\alpha^2}{(X^4 + Y^2)^2} = \frac{\alpha^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^2},$$

se tiene que  $\lambda$  es diferenciable y no se anula al ser  $\alpha \neq 0$  por definición de inversión. Según hemos visto antes, como  $(J_\varphi(P))^t(J_\varphi(P)) = \lambda(P)I$ ,  $\varphi$  es conforme, que es lo que queríamos ver. ■

**Observación 5.4.** Notemos que el convenio que tomamos al definir los ángulos de rectas en el infinito al principio del capítulo 3, ahora que sabemos que la inversión es conforme, tienen sentido y con dicho convenio se siguen conservando los ángulos en el infinito. En efecto, si dos rectas  $r$  y  $s$  son secantes, definimos el ángulo en el infinito como el mismo ángulo que forman en su intersección afín  $P$ : pues por la inversión  $\varphi$  de polo  $P$  y potencia 1, el infinito y  $P$  se intercambian, y  $r$  y  $s$  se quedan fijas, así que el ángulo que forman en  $P$  es el ángulo que forman en  $\varphi(\infty)$ . Para que  $\varphi$  sea conforme en infinito también debemos tomar el convenio como lo hemos tomado. Igualmente, si dos rectas  $r$  y  $s$  son paralelas tomando una inversión  $\varphi$  de centro  $O \notin r \cup s$  y de potencia 1,  $r$  y  $s$  se transforman en dos circunferencias que se cortan únicamente en  $\varphi(\infty) = O$  (pues  $r$  y  $s$  solo se cortan en  $\infty$ ), así que son tangentes en  $O$ . Para que la inversión siga siendo conforme en el infinito debemos definir  $r$  y  $s$  como tangentes en  $\infty$ . Así que podemos decir que la inversión es conforme en todo el plano inversivo.

**Observación 5.5.** Se podía haber demostrado la conformidad de la inversión para ciclos sin usar geometría diferencial: para una forma de hacerlo ver [Pam19]. Sin embargo lo que hemos demostrado es más general, pues la inversión no solo conserva los ángulos entre ciclos sino entre todo par de curvas regulares.

## 6 | Aplicaciones de la inversión

En este trabajo nos centraremos principalmente en dos aplicaciones de la geometría inversiva, aunque como se mencionó en la introducción hay muchísimas más. Para ver algunas de ellas ver por ejemplo [Sch79] o [Pam19].

### 6.1 Teorema de Ptolomeo

El teorema de Ptolomeo es un importante resultado en geometría clásica, que caracteriza a los cuadriláteros cíclicos (los que se pueden inscribir en una circunferencia). Si bien originalmente se probó usando métodos elementales, podemos usar geometría inversiva para obtener una demostración alternativa.

**Proposición 6.1 (Relaciones métricas).** Sea  $\mathfrak{C}$  una circunferencia real de centro  $O$  y radio  $r > 0$ . Entonces, si  $\varphi$  es la inversión respecto de  $\mathfrak{C}$ , y  $P, Q$  son puntos distintos de  $O$ , se tiene

$$\|\overrightarrow{P'Q'}\| = r^2 \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{OP}\| \|\overrightarrow{OQ}\|},$$

donde  $P' = \varphi(P), Q' = \varphi(Q)$ .

**Demostración.** Lo vamos a ver usando propiedades de la inversión. La recta que pasa por  $O, P, P'$  invierte sobre ella misma, e igual con la que pasa por  $O, Q, Q'$ . Por definición de inversión,  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = r^2$ , y como  $O, P, P'$  y  $O, Q, Q'$  están alineados se tiene que

$$\frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|} = \frac{\|\overrightarrow{OQ'}\|}{\|\overrightarrow{OP'}\|}.$$

Así que los triángulos  $\triangle OPQ$  y  $\triangle OQ'P'$  son semejantes (comparten el ángulo  $\widehat{OPQ} = \widehat{OQ'P'}$  porque las rectas que forman el ángulo son fijas para la inversión, y un par de lados son proporcionales). Por tanto

$$\frac{\|\overrightarrow{P'Q'}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\|\overrightarrow{OP'}\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|} = \frac{\|\overrightarrow{OP}\| \|\overrightarrow{OP'}\|}{\|\overrightarrow{OP}\| \|\overrightarrow{OQ}\|} = \frac{r^2}{\|\overrightarrow{OP}\| \|\overrightarrow{OQ}\|},$$

de donde se deduce lo que queríamos ver. ■

**Observación 6.1.** Lo anterior es cierto también en la inversión respecto de una circunferencia imaginaria, salvo que hay que poner valor absoluto en el  $r^2$ . Se obtiene directamente teniendo en cuenta que la inversión respecto de una circunferencia imaginaria  $\mathfrak{C}$  de radio  $r < 0$  es la inversión respecto de una circunferencia real de radio  $|r|$  seguida de una simetría central en  $O$ .

**Teorema 6.1 (Ptolomeo).** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo. Entonces se verifica la desigualdad entre lados y diagonales

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD},$$

con igualdad si y solo si el cuadrilátero es cíclico (es decir, si existe una circunferencia que pasa por todos los vértices).

**Demostración.** Sea  $\mathfrak{C}$  una circunferencia real centrada en  $B$ , y de radio  $r > 0$  arbitrario. Consideramos la inversión  $\varphi$  respecto de  $\mathfrak{C}$ . Dicha  $\varphi$  envía la circunferencia  $\mathfrak{D}$  que pasa por  $A, B, C$  en la recta  $s$  que pasa por  $A'$  y  $C'$ . Por la desigualdad triangular se tiene

$$\overline{A'C'} \leq \overline{A'D'} + \overline{D'C'};$$

es decir, por la proposición anterior

$$r^2 \frac{\overline{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC}} \leq r^2 \frac{\overline{AD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BD}} + r^2 \frac{\overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}.$$

Multiplicando por  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD}$  y dividiendo por  $r^2$  se tiene que

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \leq \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Además por la desigualdad triangular, la igualdad se da si y solo si  $A', C'$  y  $D'$  están alineados: es decir, si y solo si  $D'$  está en la recta  $s$ . Como  $s = \varphi(\mathfrak{D})$ , la igualdad se da si y solo si  $D \in \mathfrak{D}$ : es decir, si y solo si el cuadrilátero es cíclico. ■

## 6.2 Problemas de Apolonio

Los problemas de Apolonio tratan de averiguar las circunferencias simultáneamente tangentes a tres dadas. Es conveniente, como originalmente lo hizo Apolonio de Perga en su tratado sobre las tangencias, extender un poco el problema y estudiar las circunferencias tangentes a tres objetos, donde los objetos pueden ser circunferencias, rectas o puntos. Así, diremos que un problema de Apolonio es de tipo  $(a, b, c)$ , donde  $a + b + c = 3$ , si tenemos  $a$  circunferencias,  $b$  rectas y  $c$  puntos. Por ejemplo, el problema original es de tipo  $(3, 0, 0)$  (circunferencias tangentes a 3 circunferencias dadas). Usaremos la inversión (y ocasionalmente los haces de ciclos) para buscar las soluciones de algunos tipos de problemas. No es un objetivo de este trabajo clasificar los problemas de Apolonio en su totalidad, ya que es tedioso (de hecho, hay 49 posibles posiciones relativas de tres circunferencias de radios distintos, y si incluimos la posibilidad de que los radios coincidan hay muchas más). Sin embargo, se busca enseñar de qué forma podemos resolver cualquier tipo de problema de Apolonio. Para una clasificación completa ver, por ejemplo, [Mui95].

### 6.2.1 Problema de tipo $(0,0,3)$

En este caso, buscamos las circunferencias que pasan por 3 puntos distintos. Como vimos en el capítulo 1 no hay solución si están alineados, y hay una única solución si están en posición general.

### 6.2.2 Problema de tipo $(0,3,0)$

En este caso buscamos las circunferencias que son tangentes a 3 rectas  $r, s, t$  a la vez. Si las tres son paralelas no hay solución. Si  $r$  y  $s$  son paralelas, y  $t$  es secante con ambas, hay dos soluciones. Si son secantes en un mismo punto no hay solución, y si se cortan dos a dos hay 4 soluciones distintas (ver por ejemplo [Pam21c]).

### 6.2.3 Problema de tipo $(0,1,2)$

En este caso buscamos las circunferencias que pasan por dos puntos  $A$  y  $B$ , y son tangentes a una recta dada  $r$ . Si  $A$  y  $B$  están en un mismo semiplano (considerando

la división en dos semiplanos de  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  que hace la recta  $r$ ), no están en la recta  $r$ , y  $AB$  no es paralelo a  $r$ , hay dos soluciones distintas, que se pueden hallar, por ejemplo, teniendo en cuenta que si  $P$  es la intersección de la recta  $AB$  con  $r$ ,  $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , donde  $T$  son los puntos de tangencia de las circunferencias solución con la recta  $r$  (por potencia). Si  $A$  y  $B$  están en un mismo semiplano, no están en la recta  $r$  y  $AB$  es paralelo a  $r$  hay una única solución, que es tangente a  $r$  en la intersección con la mediatriz de  $\overline{AB}$ . Si  $A$  y  $B$  están en un mismo semiplano y uno de ellos, por ejemplo  $A$ , está en la recta  $r$ , hay una solución, tangente a  $r$  en  $A$  y que pasa por  $B$  (única porque la solución debe pertenecer al haz parabólico de tangentes a  $r$  en  $A$ , y por tanto hay una única circunferencia que pasa por  $B$ ). Si  $A$  y  $B$  están ambos en  $r$  o en distintos semiplanos no hay solución.

#### 6.2.4 Problema de tipo (1,0,2)

Buscamos circunferencias tangentes a otra circunferencia  $\mathfrak{C}$  y que pasen por dos puntos dados  $A$  y  $B$ . Podemos reducir este caso al anterior mediante una inversión respecto de una circunferencia centrada en algún punto de  $\mathfrak{C}$ , que transforma a  $\mathfrak{C}$  en una recta  $r$ , y  $A$  y  $B$  en dos puntos  $A'$  y  $B'$ , teniendo por tanto el caso (0,1,2) anterior que sí sabemos cuando tiene solución. Resolviendo el problema asociado a  $\{r, A', B'\}$  e invirtiendo de nuevo tenemos las soluciones del problema original.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: suponemos que  $A$  y  $B$  están en el exterior de  $\mathfrak{C}$  (es decir, tienen potencia positiva), y que su mediatriz no pasa por  $O$  el centro de  $\mathfrak{C}$ . Sea  $\mathcal{H}$  el haz elíptico de puntos base  $A$  y  $B$ . Entonces existe un único punto  $C$  que es el "centro radical" de  $\mathfrak{C}$  y  $\mathcal{H}$ , en el siguiente sentido:  $\Pi_{\mathfrak{C}}(C) = \Pi_{\mathfrak{C}'}(C)$  para todo  $\mathfrak{C}'$  de  $\mathcal{H}$ . En efecto, tomando dos circunferencias  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  cualesquiera de  $\mathcal{H}$ , el centro radical  $C$  de  $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  es un cierto punto  $C$ , ya que la recta de centros del haz es la mediatriz de  $\overline{AB}$ , que no pasa por  $O$  y por tanto los centros están en posición general. Ahora, dada  $\mathfrak{C}'$  cualquiera del haz,  $\Pi_{\mathfrak{C}}(C) = \Pi_{\mathfrak{C}_1}(C) = \Pi_{\mathfrak{C}_2}(C) = \Pi_{\mathfrak{C}'}(C)$  porque al estar  $C$  en el eje radical del haz la potencia respecto de cualquier par de circunferencias es constante. Entonces, las rectas tangentes a  $\mathfrak{C}$  que pasan por  $C$  cortan a  $\mathfrak{C}$  en los dos puntos de tangencia de las dos soluciones del problema,  $T$  y  $T'$ , ya que  $\Pi_{\mathfrak{C}}(C) = \Pi_{\mathfrak{D}}(C) = \overline{CT}^2$ , donde  $\mathfrak{D}$  es la circunferencia del haz que pasa por  $T$ . Por tanto  $\mathfrak{D}$  es tangente a la recta  $CT$  en  $T$  y es tangente por tanto a  $\mathfrak{C}$  en  $T$  (el razonamiento con  $T'$  es análogo). Otros casos se pueden convertir a este mediante una inversión apropiada: por ejemplo, si  $A$  y  $B$  son interiores, tomando la inversión respecto de  $\mathfrak{C}$  los hacemos exteriores (si

el caso no admite dos soluciones siempre se puede resolver pasando al tipo  $(0,1,2)$ .

### 6.2.5 Problema de tipo $(0,2,1)$

Buscamos circunferencias tangentes a dos rectas  $r, s$  y que pasen por un punto dado  $A$ . Si  $A$  no es  $r \cap s$  podemos reducir al caso  $(0,1,2)$  tomando  $B$  el simétrico de  $A$  respecto de la bisectriz del ángulo entre las rectas  $r$  y  $s$ , y hallando las circunferencias que pasen por  $A, B$  y sean tangentes a  $r$  (hay dos bisectrices, perpendiculares entre sí, pero una de ellas no da solución porque  $A$  y  $B$  no están en el mismo semiplano, salvo que  $A$  esté en una de las rectas). Si  $A$  es la intersección de  $r$  y  $s$  no hay solución.

### 6.2.6 Problema de tipo $(1,1,1)$

Buscamos las circunferencias tangentes a otra dada  $\mathfrak{C}$ , a una recta  $s$  y que pasen por un punto  $A$ . Supongamos primero que  $A$  no está ni en  $\mathfrak{C}$  ni en  $s$ . Sea  $\mathfrak{D}$  una circunferencia cualquiera centrada en  $A$ . Entonces, la inversión respecto de  $\mathfrak{D}$  lleva  $A$  al infinito,  $\mathfrak{C}$  a otra circunferencia  $\mathfrak{C}'$  y  $s$  a una circunferencia  $\mathfrak{D}$ . Por tanto, las circunferencias tangentes a  $\mathfrak{C}, s$  y que pasan por  $A$  invierten en rectas tangentes a  $\mathfrak{C}'$  y  $\mathfrak{D}$ . Convertimos por tanto el problema en hallar las rectas tangentes a dos circunferencias, que puede tener 0, 1, 2 o 4 soluciones, dependiendo de si las circunferencias son interiores (0), tangentes interiores (1), tangentes exteriores o secantes (2) o exteriores (4); las inversas de estas rectas serán las soluciones del problema original.

Si el punto  $A$  está en  $\mathfrak{C}$ , sea  $t$  la recta tangente a  $\mathfrak{C}$  en  $A$ . Entonces las soluciones al problema original son las tangentes a  $s, t$  que pasan por  $A$ , que es de tipo  $(0,2,1)$ . Si el punto  $A$  está en  $s$ , y  $r$  es el radio de  $\mathfrak{C}$ , las circunferencias tangentes a  $\mathfrak{C}$  que son tangentes a  $s$  en  $A$  tienen centro en la perpendicular a  $s$  en  $A$ . Hallamos los dos puntos de dicha perpendicular que están a distancia  $r$  de  $A$ , y averiguamos los centros de las circunferencias que pasan por  $O$ , por dichos puntos de la perpendicular en  $A$ , y que tienen centro en dicha perpendicular. Entonces, como son centros de circunferencias que pasan por el centro de  $\mathfrak{C}$ , y están a distancia  $r$  de  $A$  en la perpendicular a  $s$  por  $A$ , las circunferencias de esos mismos centros y radios dilatados o contraídos por  $r$  (según corresponda) son las soluciones. Dependiendo de las configuraciones pueden haber 0, 1, 2, 3 o 4 soluciones (e incluso infinitas en el caso trivial en el que  $r$  y  $\mathfrak{C}$  son tangentes en  $A$ ).

## 6.2.7 Problema de tipo (2,0,1)

Buscamos las circunferencias tangentes a dos dadas  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$ , que pasen por un punto  $A$ . Este caso se puede reducir al anterior mediante una inversión respecto de una circunferencia centrada en algún punto de  $\mathfrak{C}_1$ , que la transforma en una recta;  $\mathfrak{C}_2$  se transforma en otra circunferencia y tenemos un problema de tipo (1,1,1). Otra opción es directamente invertir respecto de una circunferencia centrada en  $A$ , que transforma el problema en uno de tangencias de rectas: en general, las circunferencias invertirán en otras dos circunferencias  $\mathfrak{C}'_1, \mathfrak{C}'_2$ , y las soluciones del problema (2,0,1) se corresponderán con rectas tangentes a  $\mathfrak{C}'_1$  y  $\mathfrak{C}'_2$ . Existen, igual que antes, casos excepcionales: por ejemplo, si las dos circunferencias son tangentes en  $A$ , hay infinitas soluciones que conforman el haz parabólico  $\mathcal{H}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ ; otro caso sería que las circunferencias sean interiores y  $A$  sea interior a ambas (no hay solución).

## 6.2.8 Problema de tipo (3,0,0)

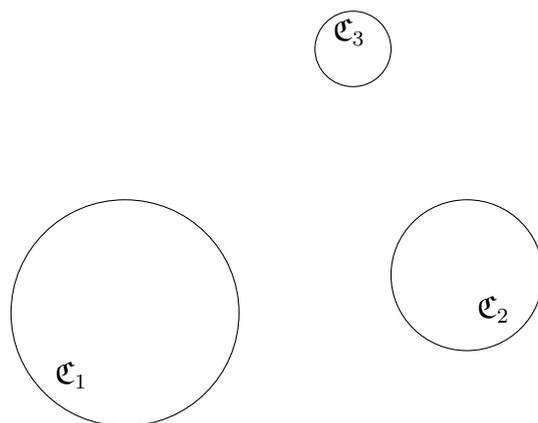
Estos problemas son los problemas de Apolonio originales: buscar las circunferencias tangentes a tres dadas  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ . Sean  $O_1, O_2, O_3$  los centros y  $r_1 \geq r_2 \geq r_3 > 0$  los radios, respectivamente. A cada solución le asociamos la notación  $(***)$ , donde los  $*$  son  $+$  o  $-$ . Cada posición indica si la solución es interior ( $-$ ) o exterior ( $+$ ) con la circunferencia correspondiente (en casos excepcionales puede ocurrir que haya varias soluciones que tengan la misma notación). Por ejemplo,  $(+ - -)$  indica que dicha solución es la exterior con  $\mathfrak{C}_1$  e interior con  $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ . La forma de resolverlos en general es la siguiente:

1. Se reemplaza la circunferencia más pequeña ( $\mathfrak{C}_3$ ) con su centro.
2. Se reemplazan  $\mathfrak{C}_1$  y  $\mathfrak{C}_2$  con circunferencias de igual centro, pero de radios  $r_1 \pm r_3$  y  $r_2 \pm r_3$  respectivamente (es decir, se dilatan o se contraen las circunferencias  $r_3$  unidades). Llamamos a estas circunferencias  $\tilde{\mathfrak{C}}_1$  y  $\tilde{\mathfrak{C}}_2$ .
3. Para cada caso, se hallan los centros de las circunferencias que pasen por  $O_3$  y sean tangentes a  $\tilde{\mathfrak{C}}_1$  y  $\tilde{\mathfrak{C}}_2$  (problema (2,0,1)). De todos ellos hay dos centros de las soluciones que buscamos.

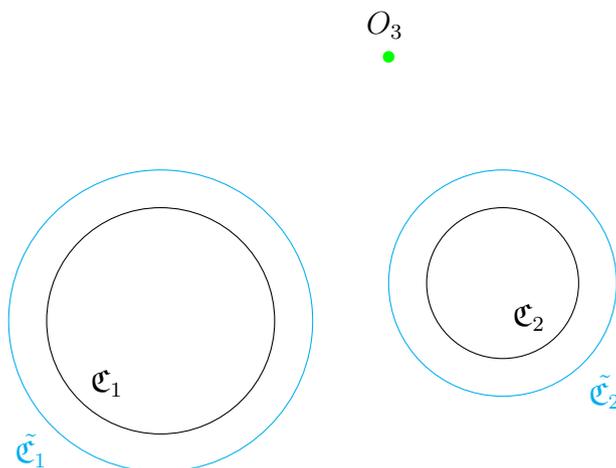
Concretamente, si por ejemplo elegimos  $\tilde{\mathfrak{C}}_1$  de radio  $r_1 + r_3$  y  $\tilde{\mathfrak{C}}_2$  de radio  $r_2 - r_3$ , los centros de las circunferencias que son soluciones del problema (3,0,0) son los centros de las circunferencias  $(+ - -)$  y  $(- + +)$ . Dependiendo de las posiciones relativas de las circunferencias, de los centros y de los radios, pueden haber como mucho 8

soluciones (salvo algún caso muy excepcional en el que haya infinitas, por ejemplo tres circunferencias de un haz parabólico).

### 6.3 Ejemplos de problemas de Apolonio



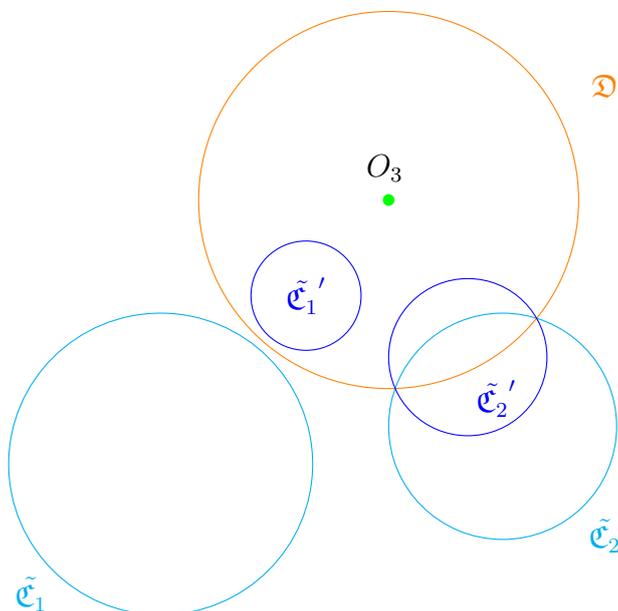
Supongamos que tenemos un problema de Apolonio como el de arriba. Entonces, podemos colapsar  $\mathcal{C}_3$  a un punto, y considerar las circunferencias  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_2$  dilatadas y contraídas por el radio  $r_3$ . Por ejemplo, aumentamos el radio en  $\mathcal{C}_1$  y en  $\mathcal{C}_2$ . Tenemos entonces el problema auxiliar siguiente:



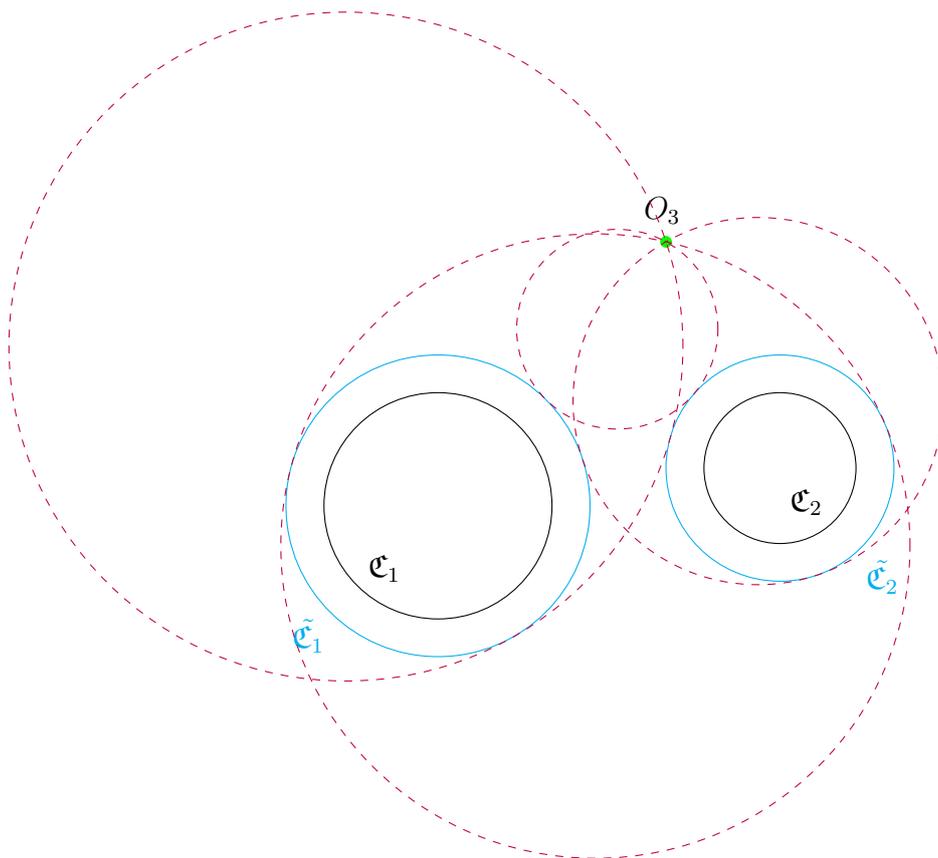
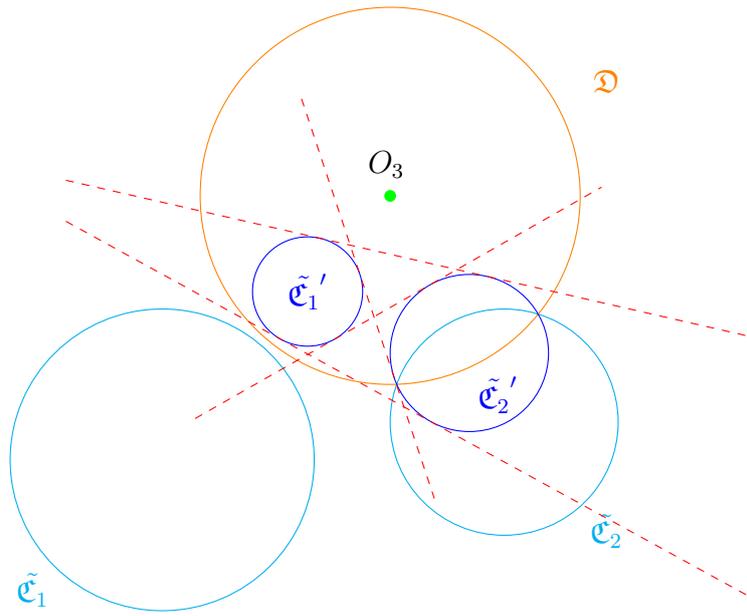
Ahora, buscamos las circunferencias tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_2$  que pasen por  $O_3$ . Para calcularlas podemos invertir respecto de un punto de alguna de ellas y resolver un

## 52 LA INVERSIÓN RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

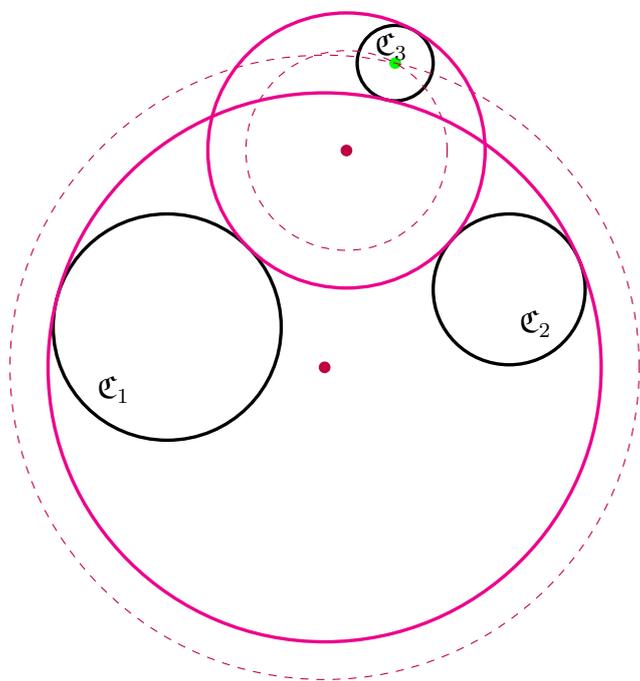
problema de tipo (1,1,1); o también podemos invertir respecto de una circunferencia centrada en  $O_3$  (que llamamos  $\mathfrak{D}$ ), y así buscar las rectas tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}_1', \tilde{\mathcal{C}}_2'$  (que pasan por el infinito, el inverso de  $O_3$ ). Sus inversos serán las circunferencias que busquemos. Hacemos por tanto la inversión:



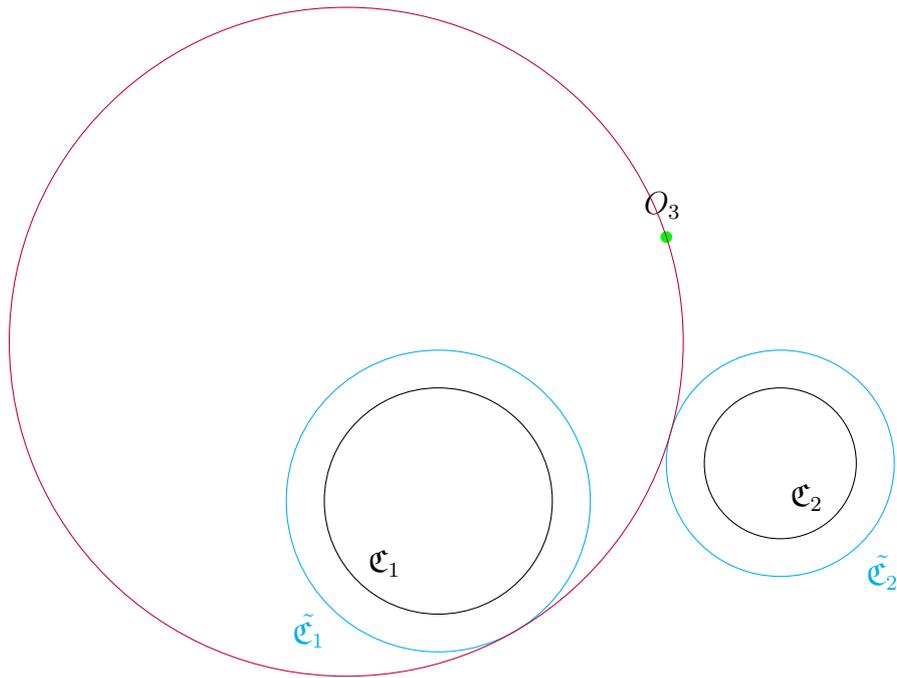
Hallamos las rectas tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}_1'$  y a  $\tilde{\mathcal{C}}_2'$ , que se puede hacer por ejemplo mediante dilatación y contracción. Esas rectas las volvemos a invertir respecto de  $\mathfrak{D}$ , y tenemos cuatro circunferencias tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_2$ :



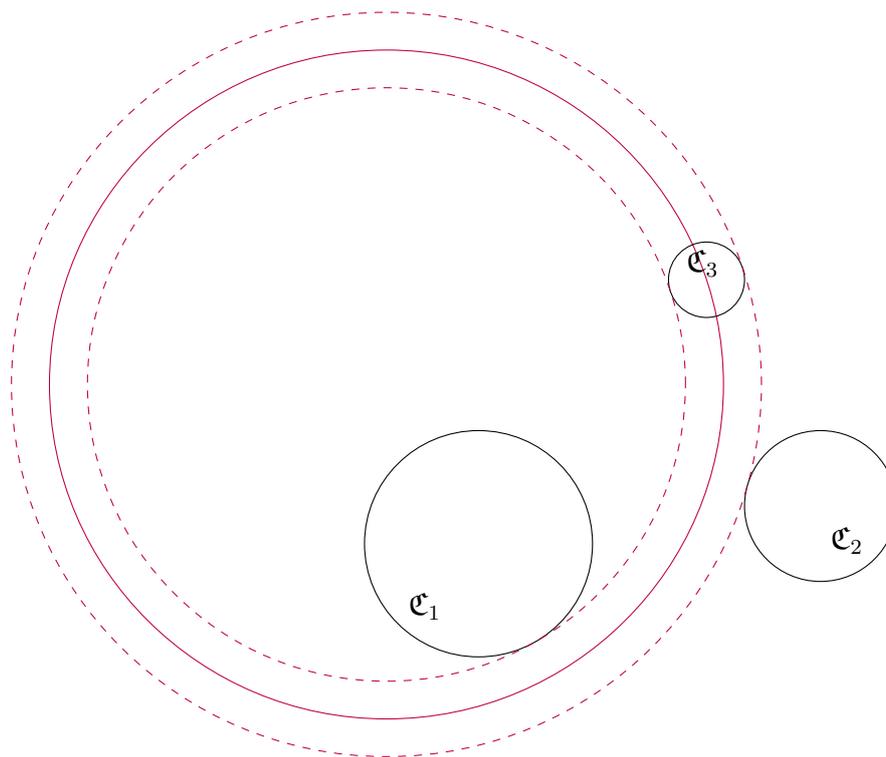
Tenemos por tanto las cuatro circunferencias tangentes a  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_2$  que pasan por  $O_3$  (hemos resuelto el problema  $(2,0,1)$  asociado). Estas no son soluciones originales, sino que dos de ellas son concéntricas con soluciones originales. Dependiendo de si son interiores o exteriores, la solución tendrá radio dilatado por  $r_3$ , o contraído por  $r_3$ . En concreto, las dos soluciones son:



donde se han dejado las circunferencias sin dilatar/contrair como referencia. Notemos que las otras dos circunferencias que habían salido de resolver el problema  $(2,0,1)$  no corresponden con ninguna solución del problema original: por ejemplo,

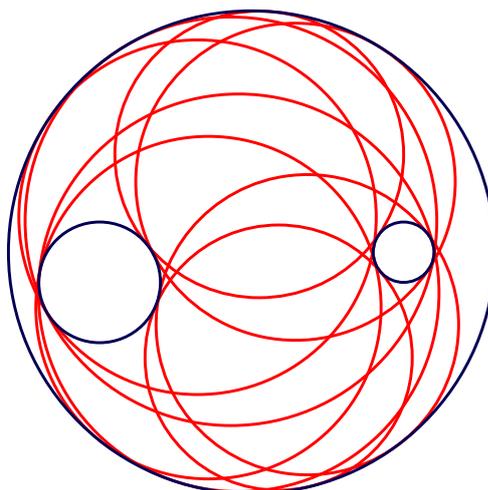
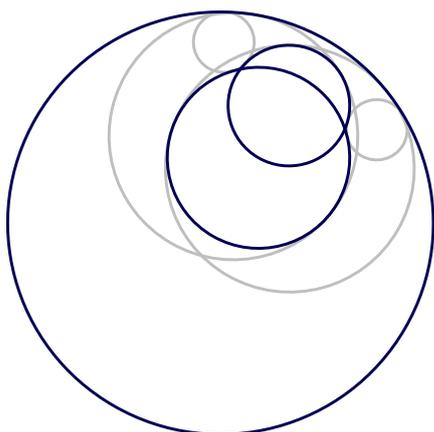
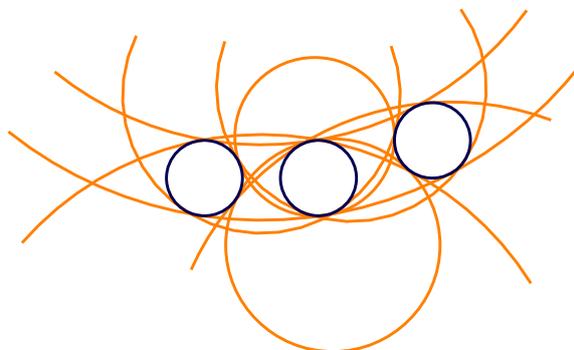
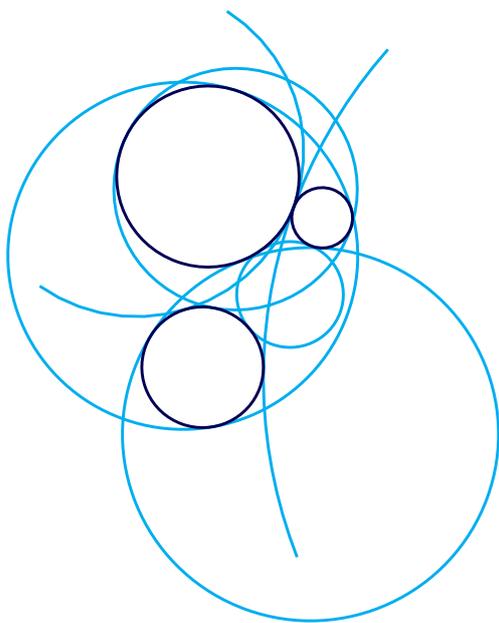


no da ninguna solución del problema original al dilatar o contraer el radio en  $r_1$  unidades:

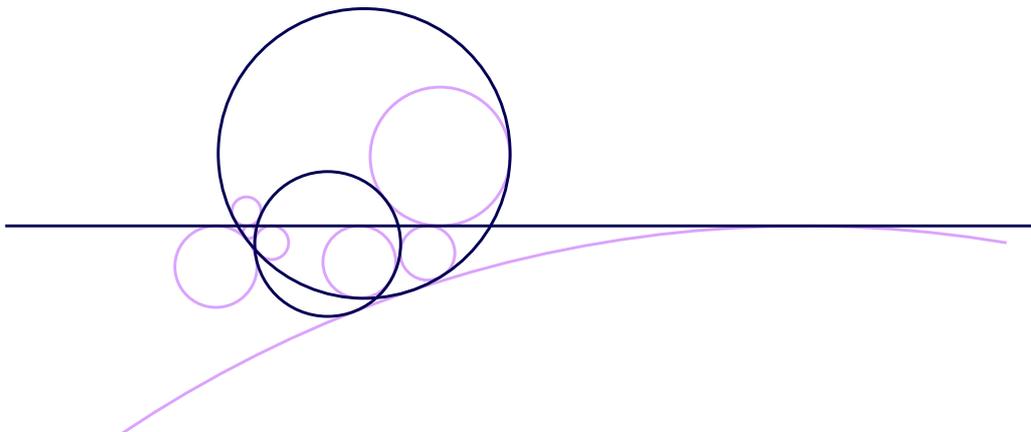
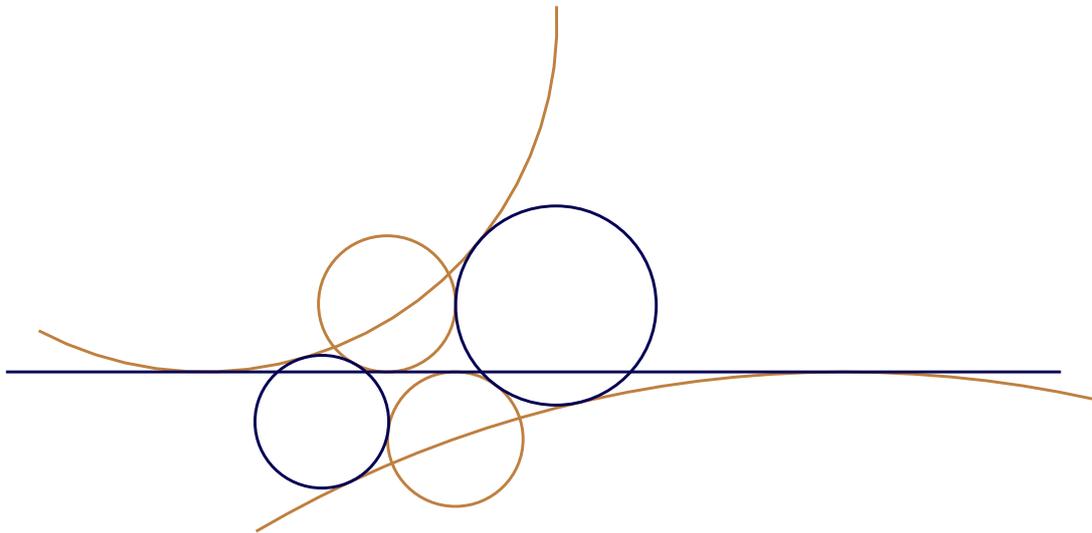
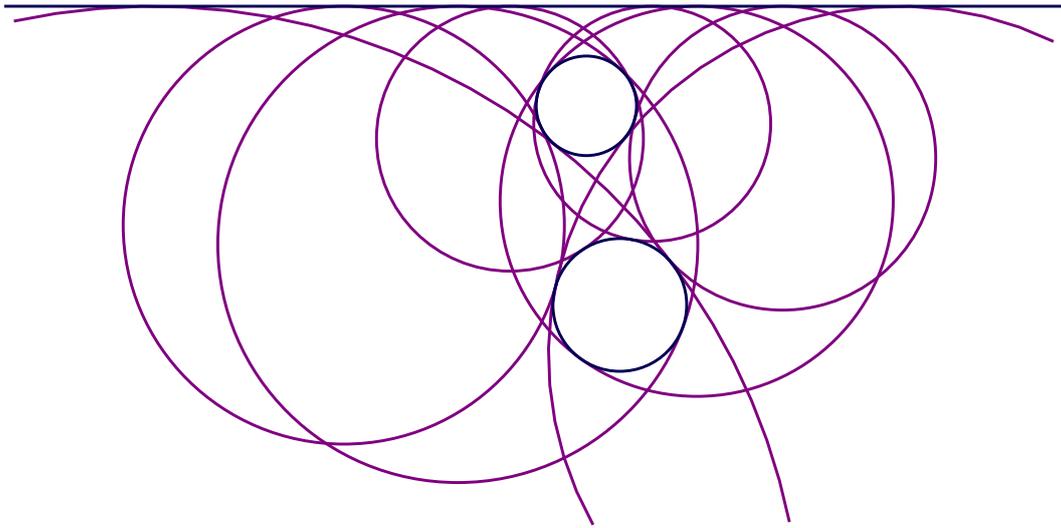


Esto es, como se dijo en el apartado de resolución de problemas de tipo  $(3,0,0)$ , de cada posible problema  $(2,0,1)$  asociado de colapsar  $\mathcal{C}_3$  a un punto y cambiar los radios de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  por  $r_1 \pm r_3$ ,  $r_2 \pm r_3$ , hay como mucho dos soluciones válidas del problema original, que nos dan las ocho posibles. En concreto, las soluciones de este problema son, tras hacer el mismo procedimiento considerando  $r_1 - r_3$  y  $r_2 + r_3$ ;  $r_1 + r_3$  y  $r_2 - r_3$ ;  $r_1 - r_3$  y  $r_2 - r_3$ :





También podemos resolver otros problemas de Apolonio "generalizados", como por ejemplo problemas  $(2,1,0)$ : a través de una inversión respecto de una circunferencia que no esté centrada en ningún punto de los ciclos dados en el problema, los tres ciclos invierten sobre 3 circunferencias. Se resuelve el problema  $(3,0,0)$  asociado y volviendo a invertir tenemos las soluciones del problema  $(2,1,0)$  original. Algunos ejemplos:





# Bibliografía

- [Ber09] Marcel Berger. *Geometry I*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [Cox61] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Introduction to geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1961.
- [Cox68] HSM Coxeter. The problem of apollonius. *The American Mathematical Monthly*, 75(1):5–15, 1968.
- [GR04] David Gisch and Jason M Ribando. Apollonius’ problem: A study of solutions and their connections. *American Journal of Undergraduate Research*, 3(1):15–25, 2004.
- [HP10] María de los Ángeles Hernández Cifre and José Antonio Pastor González. *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*, volume 47. Editorial CSIC-CSIC Press, 2010.
- [Joh13] Roger A Johnson. *Advanced euclidean geometry*. Courier Corporation, 2013.
- [Kun07] Paul Kunkel. The tangency problem of apollonius: three looks. *BSHM Bulletin*, 22(1):34–46, 2007.
- [Moi63] Edwin E Moise. *Elementary geometry from an advanced viewpoint*. Addison-Wesley Publishing Company, 1963.
- [Mui95] R. F. Muirhead. On the number and nature of the solutions of the apollonian contact problem. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 14:135–147, 1895.
- [Pam19] Paris Pamfilos. Inversion. <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Inversion.pdf>, 2019.

- [Pam21a] Paris Pamfilos. Apollonius problem. <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/ApolloniusProblem.pdf>, 2021.
- [Pam21b] Paris Pamfilos. Pencils of circles or coaxal circles. <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/CirclePencils.pdf>, 2021.
- [Pam21c] Paris Pamfilos. Tritangent circles. <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Tritangent.pdf>, 2021.
- [SCE70] Virgil Snyder, Arthur B Coble, and Arnold Emch. *Selected topics in algebraic geometry*, volume 189. American Mathematical Soc., 1970.
- [Sch79] Hans Schwerdtfeger. *Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-euclidean Geometry*. Courier Corporation, 1979.