



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Superficies de Bézier en el Espacio de Lorentz-Minkowski.

Memoria realizada por Lucía Martínez García

Dirigido por:

Dr. Alfonso Carriazo Rubio

Dra. M. Carmen Márquez

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar qué cambios experimenta la geometría diferencial de las superficies de Bézier al ser introducidas en el espacio de Lorentz-Minkowski.

Específicamente se estudiarán resultados relacionados con el área de las superficies para poder tratar el Problema de Plateau-Bézier en estas condiciones. Para ello reuniremos una serie de condiciones sobre las redes de puntos que nos permitirán acotar las áreas de las superficies con un borde fijo.

Abstract

The main objective of this work is to study how changes the differential geometry of Bézier surfaces when they are studied in Lorentz-Minkowski space.

Results about the area of the surfaces will be studied specifically in order to deal with the Plateau-Bézier problem in this particular conditions. We will gather a number of conditions over the control points which will allow us to delimit the area value of prescribed border surfaces.

Índice general

Introducción.	7
1. Preliminares.	9
1.1. Superficies Regulares y Geometría Intrínseca.	9
1.2. Superficies de Bézier.	12
Polinomios de Bernstein.	12
Curvas de Bézier.	15
Superficies de Bézier.	19
2. Espacio de Lorentz-Minkowski.	23
2.1. Geometría del espacio \mathbb{E}_1^3	23
2.2. Geometría de superficies en el espacio \mathbb{E}_1^3	27
3. Superficies de Bézier en \mathbb{E}_1^3.	31
3.1. Geometría intrínseca de superficies de Bézier en \mathbb{E}_1^3	31
3.2. El Problema de Plateau-Bézier en \mathbb{E}_1^3	35
Superficies espaciales.	36
Superficies temporales.	40
3.3. Aplicaciones.	44
Ejemplo 1: Superficie espacial.	44
Ejemplo 2: Superficie temporal.	46
Bibliografía	47

Introducción.

Este trabajo está orientado a estudiar el problema de Plateau en el caso concreto de las superficies de Bézier introducidas en el espacio de Lorentz-Minkowski.

Se conoce como el *Problema de Plateau* a demostrar la existencia de una superficie minimal con una frontera dada, donde se define una superficie minimal como una superficie que minimiza localmente su área, lo cual conlleva a tener una curvatura media nula. También se denominan superficies minimales a las superficies que tienen área mínima de una familia de superficies que comparten borde. Este problema fue inicialmente planteado por Joseph-Louis Lagrange en 1760 y fue retomado por Joseph Plateau, quien consiguió resolverlo por medio de experimentos de pompas de jabón.



Figura 1: Ejemplo de solución al problema de Plateau con pompas.

En este trabajo hemos recogido resultados relacionados con el Problema de Plateau sobre superficies de Bézier trabajando con la geometría del espacio de Lorentz-Minkowski. Hemos conseguido, tanto cotas para las áreas que tendrán las superficies con un borde fijo, como condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las redes de puntos para llegar a formar una superficie minimal en el espacio.

El espacio de Lorentz-Minkowski, también llamado espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski, es una variedad lorentziana de cuatro dimensiones y curvatura nula, usada para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. Se distingue de \mathbb{R}^n principalmente por el uso de una métrica no definida positiva en sustitución al producto escalar euclídeo.

Debido a estas características en el espacio de Minkowski pueden distinguirse tres dimensiones espaciales ordinarias y una dimensión temporal adicional, de tal manera que todas juntas forman una 4-variedad y permite visualizar el tiempo junto al espacio. Físicamente, el espacio-tiempo de Minkowski puede emplearse como una aproximación local del espacio-tiempo en regiones razonablemente pequeñas y en presencia de materia, siempre que esta no llegue a gravitar por sí misma. Este hecho queda recogido en el Principio de Equivalencia.



Figura 2: Hermann Minkowski.

El motivo por el cuál centraremos los resultados en las superficies de Bézier es debido a las facilidades que presentan de cara al modelado matemático y a la aproximación de datos.

Las superficies de Bézier son aquellas superficies cuya parametrización está expresada como un producto tensorial de bases formadas por polinomios de Bernstein. Al estar construidas de esta forma presentan múltiples ventajas, ya que los polinomios de Bernstein, aparte de ser una base para el espacio de polinomios en \mathbb{R} , tienen propiedades que facilitan mucho la visualización gráfica de los puntos de control sobre el área de trabajo y la manipulación intuitiva de la superficie. Además, permiten aplicar transformaciones afines con mucha facilidad a base de aplicar esos cambios en puntos de control.

El trabajo está dividido en un capítulo de Preliminares, donde se recogen resultados básicos de geometría local de superficies en \mathbb{R}^3 y características de superficies de Bézier, un capítulo sobre el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski y su geometría y, finalmente, un último capítulo que recoge cotas sobre el área de las superficies una vez introducidas en el espacio y algunos ejemplos prácticos.

Por último, me gustaría presentar mi más sincero agradecimiento a mis tutores Alfonso Carriazo y M. Carmen Márquez, por haberme acompañado en este trabajo y haberme guiado durante todo el proceso.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo de preliminares se recogen todos los resultados que son necesarios en el estudio del problema planteado en este trabajo. Se introducirán conceptos básicos sobre geometría diferencial, específicamente geometría intrínseca de superficies en \mathbb{R}^3 , y sobre superficies de Bézier.

Si el lector estaba interesado en profundizar en el tema se recomiendan las lecturas de los libros [2] y [1].

1.1. Superficies Regulares y Geometría Intrínseca.

Comenzaremos con las superficies regulares en el espacio \mathbb{R}^3 y la geometría intrínseca asociada.

Definición 1.1.1. Se define una *Superficie parametrizada* (s.p.) en \mathbb{R}^3 como una aplicación $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde U es un abierto, tal que:

1. **Condición de diferenciabilidad:** \mathbf{x} es de clase \mathbb{C}^∞ ,

2. **Condición de regularidad (c.r.):**

Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, entonces,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$$

en todos los puntos de U .

Si, además, \mathbf{x} es inyectiva, se llamará *Superficie simple* (s.s.).

Notación 1.1.2. Se denotarán

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbb{X}_1 \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbb{X}_2.$$

Definición 1.1.3. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ dotado de la topología relativa. Se dice que M es una *superficie regular* (s.r.) de \mathbb{R}^3 si para cada $p \in M$ existen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tales que:

1. $\mathbf{x}(U) \subseteq M$ y es entorno abierto de p en M .
2. \mathbf{x} es homeomorfismo sobre su imagen, dotada esta de la topología euclídea relativa de \mathbb{R}^3 .
3. \mathbf{x} es una s.p.

Cualquier aplicación que verifique las condiciones anteriores se denomina *parametrización local* (p.l.) de M en p .

Una vez definida una superficie parametrizada pasaremos a estudiar los conceptos referentes al plano tangente a la superficie en un punto, al vector normal de la superficie y la geometría intrínseca de la misma.

Definición 1.1.4. Se llama *plano tangente* a \mathbf{x} en el punto $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ al plano que pasa por p y tiene como vector característico a $\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)$, es decir, al plano con ecuación

$$(X - p)(\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)) = 0.$$

Se llama *vector normal* a \mathbf{x} en p al vector

$$N(u_0, v_0) = \frac{\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)}{\|\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)\|} \equiv N(p).$$

Definición 1.1.5. Sea M una s.r. y $p \in M$. Se llama *plano tangente* a M en p , denotado $T_p M$, al plano tangente en p a cualquier s.s. de M .

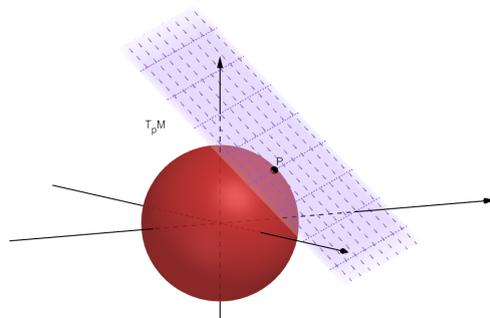


Figura 1.1: Plano tangente a un punto p de la esfera.

Proposición 1.1.6. Sean M una superficie regular, $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una p.l. de M entorno de p y $T_p M$ su plano tangente. Se tiene:

1. $\mathbb{X}_1(p), \mathbb{X}_2(p) \in T_p M$.
2. $u \in T_p M$ si y solo si $u = \lambda \mathbb{X}_1(p) + \mu \mathbb{X}_2(p)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

A partir de aquí se entenderá que estamos trabajando con una parametrización local $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie regular M .

Definición 1.1.7. Dada M una s.r. y \mathbf{x} una s.s. de esta, se llama *Primera Forma Fundamental* (P.F.F.) de la superficie \mathbf{x} en p a la aplicación

$$I_p : \begin{array}{l} T_p(\mathbf{x}) \times T_p(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle, \end{array}$$

siendo \langle, \rangle el producto escalar definido para \mathbb{R}^3 .

Definición 1.1.8. Se llaman *coeficientes métricos* de una p.l. de una s.r. a las funciones $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como $g_{ij} = \langle \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j \rangle$ $i, j = 1, 2$. Dependen de la \mathbf{x} tomada, y definen una matriz simétrica y definida positiva

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} g_{12} = g_{21}, \quad g_{ii} > 0, \quad i = 1, 2 \\ g = |G| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0, \end{array}$$

en cada punto de $\mathbf{x}(U)$.

Definición 1.1.9. Sea M una superficie regular y simple y sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de M . Se define el *área de una región* $\mathbf{x}(U)$ como

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \int_U \|\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2\| \, du \, dv = \int_U \sqrt{g} \, du \, dv.$$

Una vez que tenemos definidos los conceptos básicos sobre la geometría de superficies en \mathbb{R}^3 , vamos a estudiar el caso específico de las superficies de Bézier.

1.2. Superficies de Bézier.

En esta sección se recogerán todos los resultados básicos de las superficies de Bézier que las llevan a ser una gran herramienta. Si el lector está interesado en profundizar en el tema se recomienda la lectura del libro [1].

Polinomios de Bernstein.

Para hablar con propiedad de las superficies de Bézier es necesario comenzar con la definición de los polinomios de Bernstein. Estos serán los cimientos de la construcción tanto de las curvas como de las superficies de Bézier.

Definición 1.2.1. Dado un $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define un *polinomio de Bernstein de grado k* como

$$B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (1.2.1)$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Observación 1.2.2. Generalmente, los $B_k^n(x)$ sólo se definen para $x \in [0, 1]$, debido a que en ese intervalo es donde manifiestan las propiedades importantes.

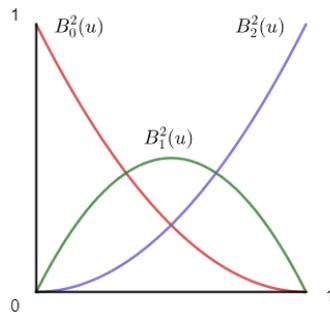


Figura 1.2: Polinomios de Bernstein para $n = 2$.

Veamos algunas propiedades que verifican los polinomios de Bernstein.

Proposición 1.2.3. Se verifican:

1. $B_k^n(x) \geq 0$, para todo x, n .
2. Cada $B_k^n(x)$ tiene un único máximo que se encuentra en $x = \frac{k}{n}$.
3. $\sum_{k=0}^n B_k^n(x) = 1$, para todo x .
4. $B_0^n(0) = 1$, $B_k^n(0) = 0$, para $1 \leq k \leq n$.
 $B_n^n(1) = 1$, $B_k^n(1) = 0$, para $1 \leq k \leq n$.
5. Recurrencia: Un polinomio de grado n puede definirse a partir de los polinomios de Bernstein de grado $n - 1$:

$$B_k^n(x) = (1 - x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n - 1.$$

6. Derivada:

$$[B_k^n(x)]' = n[B_{k-1}^{n-1}(x) - B_k^n(x)], \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Observación 1.2.4. De las propiedades que acabamos de enumerar podemos deducir las siguientes conclusiones:

- Las propiedades 1 y 3 demuestran que, para cada $x \in \mathbb{R}$, los B_k^n constituyen una partición de la unidad.
- Gracias a la propiedad de recurrencia, los polinomios de Bernstein son un gran recurso para la aproximación, ya que permiten añadir o eliminar puntos del cálculo fácilmente.

Teorema 1.2.5. El conjunto $\{B_k^n(x), 0 \leq k \leq n\}$ es una base para \mathbb{P}_n , el espacio de polinomios de grado menor o igual que n .

Además de estas propiedades, el siguiente lema técnico sobre cómo expresar un polinomio de Bernstein como una combinación lineal de polinomios de Bernstein de mayor grado será útil a lo largo de este trabajo.

Lema 1.2.6. Dado un polinomio de Bernstein $B_i^{n-k}(t)$, se tiene que:

$$B_i^{n-k}(t) = \sum_{l=0}^k \frac{\binom{n-i-l}{k-l} \binom{i+l}{l}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{k} B_{i+l}^n(t) = \binom{n-k}{i} \sum_{l=0}^k \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{i+l}} B_{i+l}^n(t) \quad (1.2.2)$$

para todo $n > 0$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n - k\}$.

Demostración: Comencemos demostrando la segunda igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k \frac{\binom{n-i-l}{k-l} \binom{i+1}{l}}{\binom{n}{k}} B_{i+l}^n(t) &= \binom{n-k}{i} \sum_{l=0}^k \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{k}} B_{i+l}^n(t) \\ \binom{n-k}{i} \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{i+l}} &= \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} \cdot \frac{(i+l)!(n-i-l)!}{n!} \\ &= \frac{(n-i-l)!}{(k-l)!(n-i-k)!} \cdot \frac{(i+l)!}{l!i!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\binom{n-i-l}{k-l} \binom{i+1}{l}}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

Por otro lado, demostremos que se da

$$B_i^{n-k}(t) = \binom{n-k}{i} \sum_{l=0}^k \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{k}} B_{i+l}^n(t)$$

Si aplicamos la definición de $B_i^{n-k}(t)$ y cancelamos los términos iguales, se tiene que

$$\begin{aligned} \binom{n-k}{i} t^i (1-t)^{n-k-i} &= \binom{n-k}{i} \sum_{l=0}^k \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{k}} B_{i+l}^n(t) \iff \\ t^i (1-t)^{n-k-i} &= \sum_{l=0}^k \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i+1} t^{i+l} (1-t)^{n-i-l} \iff \\ (1-t)^{-k} &= \sum_{l=0}^k \frac{k!(i+l)!(n-i-l)!n!}{l!(k-l)!n!(i+1)!(n-i-l)!} t^l (1-t)^{-l} \iff \\ (1-t)^{-k} &= (1-t)^{-k} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} t^l (1-t)^{k-l} \iff \\ (1-t)^{-k} &= (1-t)^{-k} \sum_{l=0}^k B_l^k(t) \end{aligned}$$

Como los polinomios de Bernstein son una partición de la unidad (Prop. 1.1.3 (3)), se tiene que $\sum_{l=0}^k B_l^k(t) = 1$ y, por tanto, obtenemos la igualdad. \square

Curvas de Bézier.

Las superficies de Bézier también pueden entenderse como una combinación de curvas de Bézier que interaccionan entre ellas. Por este motivo, muchas de las propiedades de las superficies de Bézier son extensiones de las propiedades de las curvas de Bézier.

Definición 1.2.7. Se denomina *curva de Bezier simple de grado n* a una curva polinomial expresada como combinación lineal de polinomios de Bernstein. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

donde a $P_k \in \mathbb{R}^n$ se denominan *puntos de control* de la curva y a la poligonal que une P_0, \dots, P_n *polígono de control de la curva*.

Ejemplo 1.1. Veamos un ejemplo de Curva de Bézier. Para $n = 3$ se tiene

$$\begin{aligned} C(t) &= P_0 B_0^3(t) + P_1 B_1^3(t) + P_2 B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t) = \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \end{aligned}$$

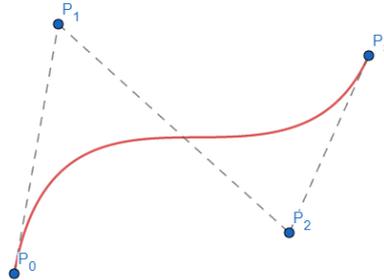


Figura 1.3: Curva $C(t)$.

A partir de este momento, solo se tratarán las curvas de Bézier con puntos de control $P_k \in \mathbb{R}^3$. Además, las trataremos siempre de forma paramétrica, donde se observa mejor el papel de los polinomios de Bernstein en ellas.

Proposición 1.2.8. Sea $C(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t)$, para $0 \leq t \leq 1$, una curva de Bézier con puntos de control $\{P_k\}_{k=0}^n$. La curva cumple las siguientes propiedades:

1. Interpola los puntos de control extremos:

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0, \\ C(1) &= P_n. \end{aligned}$$

2. Es tangente al polígono de control en los puntos extremos.

$$\begin{aligned} C'(0) &= n(P_1 - P_0), \\ C'(1) &= n(P_n - P_{n-1}). \end{aligned}$$

3. Cumple la siguiente expresión:

$$C'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} (P_{k+1} - P_k) B_k^{n-1}(t),$$

o también, llamando $P_k^{(1)} = n(P_{k+1} - P_k)$:

$$C'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k^{(1)} B_k^{n-1}(t),$$

con lo que se prueba que, a su vez, $C'(t)$ es otra curva de Bézier de grado $n-1$ con puntos de control $\{P_k^{(1)}\}_{k=0}^{n-1}$.

4. Tiene controlseudolocal:

Sea otra curva de Bézier $\bar{C}(t)$, con los mismos puntos de control que $C(t)$ excepto uno, pongamos el k -ésimo. Entonces, la máxima diferencia entre ambas curvas se encontrará en un entorno del parámetro $t = \frac{k}{n}$, que es donde alcanza el máximo los polinomios de Bernstein, e irá disminuyendo hasta $t = 0$ y $t = 1$ donde las curvas coincidirán.

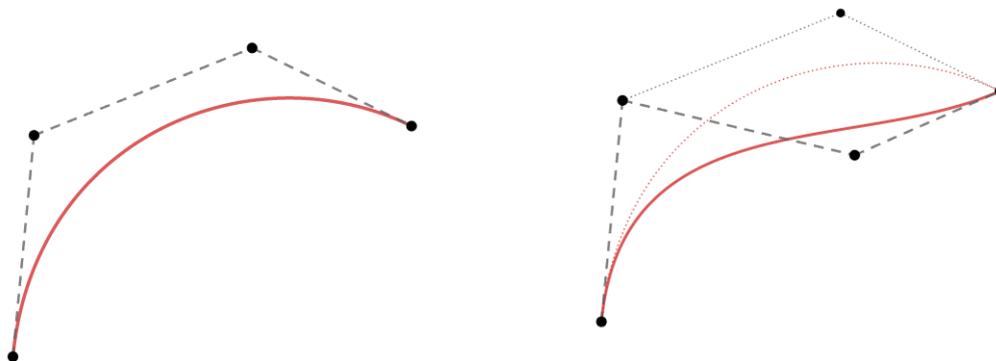


Figura 1.4: Transformación de la curva $C(t)$ al trasladar el punto P_2 .

5. Está restringida a la envolvente convexa:

La curva siempre es interior a la envolvente convexa de sus puntos de control, es decir, que es interior al polígono resultante de la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen al polígono de control de la curva.

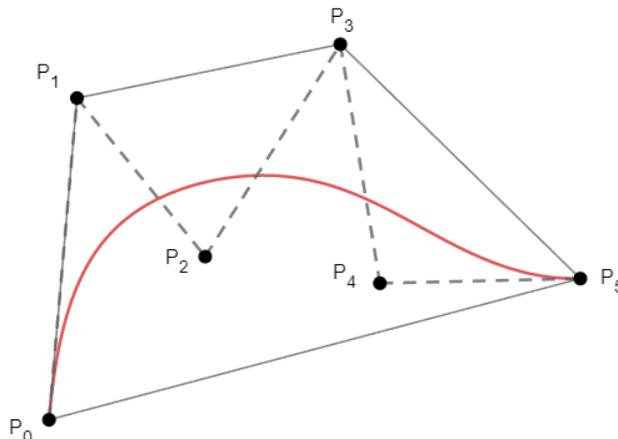


Figura 1.5: Se observa que la curva está contenida en el polígono formado por la envolvente convexa de los puntos de control.

6. Recurrencia:

Si $C_n(t)$ es una curva de Bézier de grado n con $\{P_k\}_{k=0}^n$ sus puntos de control, entonces se tiene que:

$$C_n(t) = (1-t)C_{n-1}^0(t) + tC_{n-1}^n(t),$$

donde $C_{n-1}^0(t)$ es una curva de Bézier de grado $n-1$ con puntos de control $\{P_k\}_{k=0}^{n-1}$ y $C_{n-1}^n(t)$ una curva de Bézier de grado $n-1$ con puntos de control $\{P_k\}_{k=1}^n$.

Esto significa que cada punto de la curva $C_n(t)$ de grado n es a su vez un punto de curvas de grado $n-1$ con puntos de control nuevos. Esto se conoce como *el Algoritmo de Casteljaou*.

Este trabajo no está orientado a la construcción de curvas de Bézier, pero debido a su importancia científica y a que es una parte fundamental y muy relacionada con ellas, vamos a profundizar un poco en el Algoritmo de Casteljaou antes de seguir.

Ejemplo 1.2. Algoritmo de Casteljaou para $n = 2$.

Sea $C(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$ una curva de Bézier simple de 2º grado. Operando, se puede expresar:

$$C(t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2],$$

donde $C_{n-1}^0(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ es, a su vez, una curva de Bézier de grado 1 con puntos de control $\{P_0, P_1\}$ y, análogamente, $C_{n-1}^n(t) = (1-t)P_1 + tP_2$ es, a su vez, una curva de Bézier de grado 1 con puntos de control $\{P_1, P_2\}$.

Si consideramos un parámetro fijo $t = \bar{t}$, el punto $C(\bar{t})$ se puede construir como

$$C(\bar{t}) = (1 - \bar{t})P_0^{(1)} + \bar{t}P_1^{(1)},$$

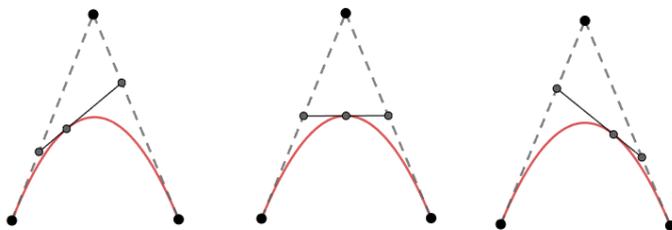
donde los nuevos puntos de control serían

$$P_0^{(1)} = (1 - \bar{t})P_0 + \bar{t}P_1,$$

$$P_1^{(1)} = (1 - \bar{t})P_1 + \bar{t}P_2.$$

De esta manera hemos conseguido construir un punto arbitrario de $C(t)$ usando curvas de Bézier de menor grado.

Figura 1.6: Construcción de los puntos $C(1/3)$, $C(1/2)$ y $C(2/3)$ mediante el Algoritmo de Casteljau.



Supongamos que tenemos dos curvas de Bézier simples con puntos de control $\{P_k\}_{k=0}^n$ y $\{Q_k\}_{k=0}^n$ respectivamente, de manera que $P_n = Q_0$, es decir, están "pegadas" por el extremo.

Para que esta nueva curva también sea una curva diferenciable debe cumplir dos condiciones. La primera la tenemos por construcción, $P_n = Q_0$, que implica que sea continua, y la segunda es que respete la "suavidad".

Definición 1.2.9. Dadas $C_1(t)$ y $C_2(t)$ dos curvas de Bézier simples con puntos de control $\{P_k\}_{k=0}^n$ y $\{Q_k\}_{k=0}^n$ respectivamente, se denomina *curva de Bézier compuesta* si cumple las siguientes condiciones:

1. Condición de continuidad:

$$P_n = Q_0.$$

2. Condición de suavidad: P_{n-1} , Q_0 y Q_1 deben estar alineados. De esta manera, los vectores tangentes a las dos curvas en el punto de unión son proporcionales y la curva creada es derivable en todos los puntos.

Las demás propiedades de las curvas de Bézier, como por ejemplo la interpolación y la recurrencia, se cumplen de manera local por ser $C_1(t)$ y $C_2(t)$ curvas de Bézier.

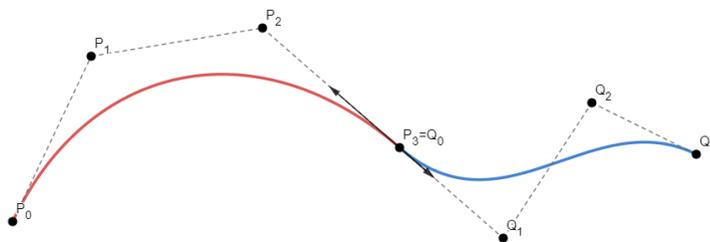


Figura 1.7: Los vectores tangentes deben ser paralelos para que no haya un cambio "brusco" de curva y se mantenga la suavidad.

Superficies de Bézier

Finalmente, podemos adentrarnos en los conceptos relacionados con las superficies de Bézier, que son las estructuras sobre las que vamos a trabajar a partir de ahora.

Definición 1.2.10. Sean $B_i^n(u)$ y $B_j^m(v)$ dos polinomios de Bernstein de grados n y m respectivamente. Se llama *Superficie de Bézier* a la superficie parametrizada

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

donde al conjunto de puntos $\{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ se le denomina *red de puntos de control* de la curva.

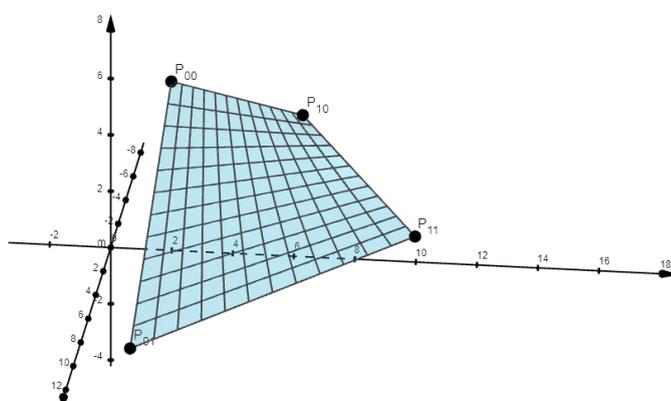


Figura 1.8: Superficie de Bézier definida por una red cuadrada de puntos para $n = 1$.

Observación 1.2.11. Las superficies de Bézier también pueden entenderse como el resultado de un producto tensorial de dos bases de polinomios de Bézier. Esto significa que, sean $\{B_i^n(u)\}$ y $\{B_j^m(v)\}$ dos bases de polinomios de Bernstein, $S(u, v)$

se puede expresar como combinación lineal de estas bases. En este contexto, a las bases se las denomina *parches*.

Como las superficies de Bézier son una extensión de las curvas de Bézier, sus propiedades se pueden resumir en las siguientes:

Proposición 1.2.12. Sea $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, una superficie de Bézier, se cumplen las siguientes características:

1. Interpolación de los vértices de la malla de control:

$$P(0, 0) = P_{00},$$

$$P(0, 1) = P_{0m},$$

$$P(1, 0) = P_{n0},$$

$$P(1, 1) = P_{nm}.$$

2. Restricción a la envolvente convexa:

Cualquier punto de la superficie es una combinación lineal convexa de los puntos de control P_{ij} .

3. Invarianza afín:

Cualquier transformación afín a $P(u, v)$ se puede conseguir a partir de aplicar dicha transformación a los puntos de control y construir la nueva superficie.

4. Curvas paramétricas:

Las curvas paramétricas de la superficie, es decir, para $v = \bar{v}$, se obtienen como

$$C(u) = P(u, \bar{v}) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(\bar{v}) \right] B_i^n(u),$$

siendo curvas de Bézier de grado n con puntos de control:

$$Q_i = \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(\bar{v}), \quad i = 0, \dots, n.$$

Se tiene de manera análoga para $u = \bar{u}$.

5. Control pseudocoidal:

La modificación de la red de puntos de control altera la forma de la superficie, al igual que lo hacía en el caso de las curvas.

Una última propiedad de las superficies que será muy útil son las expresiones de las derivadas parciales de la superficie.

Notación 1.2.13. A partir de este momento, se usará la siguiente notación:

$$\frac{\partial P(u, v)}{\partial u} = P_u(u, v), \quad \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = P_v(u, v).$$

Teorema 1.2.14. Sea $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$. Las derivadas parciales de la superficie se definen como

$$\begin{aligned} P_u(u, v) &= \sum_{j=0}^m \left[n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1,j} - P_{ij}) B_i^{n-1}(u) \right] B_j^m(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v), \end{aligned}$$

donde $P_{ij}^{(1,0)} = n(P_{i+1,j} - P_{ij})$. Análogamente, para $P_{ij}^{(0,1)} = m(P_{i,j+1} - P_{ij})$ se tiene

$$P_v(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} P_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v).$$

Capítulo 2

Espacio de Lorentz-Minkowski.

En este capítulo se recogen resultados relacionados con la geometría del espacio \mathbb{E}_1^3 . Si el lector está interesado en profundizar en el conocimiento de este espacio se le recomienda las lecturas de los libros [3] y [4].

2.1. Geometría del espacio \mathbb{E}_1^3 .

Para introducirnos en este espacio comenzaremos con la definición de su métrica particular, la cual es la que genera los cambios fundamentales que hay entre \mathbb{E}_1^3 y \mathbb{R}^3 .

Definición 2.1.1. Se define el espacio de *Lorentz-Minkowski* 3-dimensional como el espacio métrico $\mathbb{E}_1^3 = \langle \mathbb{R}^3, \langle, \rangle \rangle$, donde \langle, \rangle viene definida como

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3, \quad u, v \in \mathbb{E}_1^3$$

conocida como la *métrica de Minkowski*. Análogamente, se define la *norma de Minkowski* como

$$\|u\|^2 = |u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3|, \quad u \in \mathbb{E}_1^3.$$

Proposición 2.1.2. La métrica antes definida cumple las siguientes propiedades de linealidad. Sean $u, v, w \in \mathbb{E}_1^3$ y $a \in \mathbb{R}$, se tiene:

- $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle = \langle u, av \rangle$,
- $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle$,
- $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

La métrica nos permite clasificar los vectores según el signo de su producto escalar.

Definición 2.1.3. Dado $v \in \mathbb{E}_1^3$ un vector cualquiera, se denomina:

1. *Vector Espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ ó $v = 0$.

2. *Vector Temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$.
3. *Vector Luminoso* si $\langle v, v \rangle = 0$ para $v \neq 0$.

Llamaremos *causalidad* a la propiedad de un vector de ser de cualquiera de estos 3 tipos.

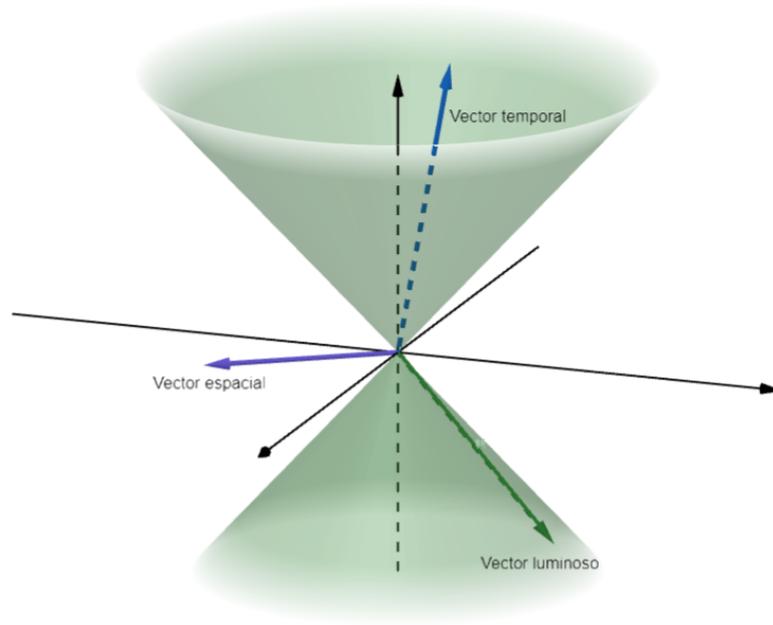


Figura 2.1: Cono de luz y división del espacio de Lorentz-Minkowski.

La causalidad genera una división visual en el espacio. Al conjunto formado por todos los vectores luminosos se le conoce como *cono de luz*, denotado por $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$, donde

$$\mathcal{C}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}$$

$$\mathcal{C}^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z < 0\}$$

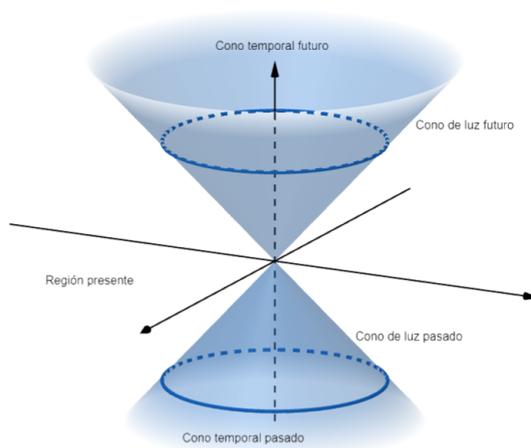
son sus dos componentes conexas, denominadas *cono de luz futuro* y *cono de luz pasado*, respectivamente. Además, también se define el *cono temporal* como el interior del cono, formado por dos componentes conexas

$$\mathcal{T}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z > 0\},$$

$$\mathcal{T}^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z < 0\},$$

denominadas *cono temporal pasado* y *cono temporal futuro*. Por último, se denomina *región futura* (resp. *región pasada*) a $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{T}^+$ ($\mathcal{C}^- \cup \mathcal{T}^-$) y *región presente*, denotada ε , al conjunto de vectores espaciales, concluyendo que

$$\mathbb{E}_1^3 = \varepsilon \cup \bar{\mathcal{C}},$$

Figura 2.2: División del espacio \mathbb{E}_1^3 .

siendo $\bar{\mathcal{C}}$ la clausura de \mathcal{C} .

Definición 2.1.4. Dado V un espacio vectorial con una métrica $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ asociada y dada \mathcal{B} una base ortonormal de V , se denomina *índice del espacio*, $\vartheta(g)$, al número de vectores temporales de la base.

Proposición 2.1.5. El índice del espacio no depende de la base escogida.

Demostración: Dada una base B del espacio (V, g) tal que $\vartheta_B(g) = v$, supongamos que tenemos otra base B' del espacio tal que genera un índice $\vartheta_{B'}(g) = v' < v$. Como ambas comparten dimensión, si tomásemos los subconjuntos $E_{B'} = \{\text{Vectores espaciales de } B'\}$ y $T_B = \{\text{Vectores temporales de } B\}$, se tendría que

$$U = E_{B'} \cap T_B \neq \emptyset,$$

ya que $n - v' + v > n$. Por tanto, existe $u \in U$ tal que $\langle u, u \rangle < 0$ y $\langle u, u \rangle > 0$. Contradicción. \square

Observación 2.1.6. Al haber demostrado que índice de un espacio no depende de la base escogida, se convierte en un método de clasificación de espacios muy recurrente. En este trabajo se usarán dos clases principales.

Definición 2.1.7. Sea (V, g) un espacio vectorial con métrica g asociada, se la denomina métrica:

1. *Riemanniana* si $\vartheta(g) = 0$,
2. *Lorentziana* si $\vartheta(g) = 1$.

Proposición 2.1.8. En la definición de $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ (Def. 2.1.1), la métrica \langle, \rangle es Lorentziana.

Demostración: Al ser $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, el conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortogonal de \mathbb{R}^3 . Veamos cuál es la causalidad de los vectores.

- El vector $e_1 = (1, 0, 0)$ es espacial:

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1 + 0 - 0 = 1 > 0,$$

- el vector $e_2 = (0, 1, 0)$ es espacial:

$$\langle e_2, e_2 \rangle = 0 + 1 - 0 = 1 > 0,$$

- el vector $e_3 = (0, 0, 1)$ es temporal:

$$\langle e_3, e_3 \rangle = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$$

Luego, como el índice no depende de la base escogida, $\vartheta(\langle, \rangle) = 1$ y, por tanto, es una métrica Lorentziana. \square

Definición 2.1.9. Dados $x, y \in \mathbb{E}_1^3$ se define el *Producto Vectorial Lorentziano* como

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Proposición 2.1.10. Para $x, y \in \mathbb{E}_1^3$, se tiene la siguiente igualdad.

$$-\|x \times y\| = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle$$

Demostración: Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$. Por definición de producto vectorial lorentziano y norma de Minkoski,

$$\begin{aligned} x \times y &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ \|x \times y\| &= \langle x \times y, x \times y \rangle = \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 - (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 \end{aligned}$$

Además, por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} &\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = \\ &= (-x_3^2 + x_2^2 + x_1^2)(-y_3^2 + y_2^2 + y_1^2) - (-x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1)^2 \end{aligned}$$

Al resolver los paréntesis se obtiene que

$$-\|x \times y\| = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle$$

con lo que concluimos la demostración. \square

2.2. Geometría de superficies en el espacio \mathbb{E}_1^3 .

Sea M una superficie regular parametrizada por $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una inmersión y sea $dx_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización del plano tangente a M en el punto p . Se define la siguiente métrica:

$$\mathbf{x}^*(\langle, \rangle_p)(u, v) = \langle d\mathbf{x}_p(u), d\mathbf{x}_p(v) \rangle \quad u, v \in T_pM.$$

Definición 2.2.1. Sean M una superficie en \mathbb{E}_1^3 y $\langle, \rangle|_M$ la métrica relativa a la superficie. Se dice que M es una superficie:

- *Temporal* si $\langle, \rangle|_M$ es Lorentziana.
- *Espacial* si $\langle, \rangle|_M$ es Riemmaniana.
- *Luminosa* si $\langle, \rangle|_M$ es degenerada, es decir, existe $v \in \mathbb{E}_1^3$ con $v \neq 0$ tal que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in \mathbb{E}_1^3$.

A las superficies espaciales o temporales se les denomina superficies *no degeneradas*.

Hay otra manera de clasificar la superficies de manera equivalente.

Definición 2.2.2. Sean M una superficie en \mathbb{E}_1^3 y $\mathbf{x}^*(\langle, \rangle_p)$ la métrica definida al inicio de la sección. Se dice que M es una superficie:

- *Temporal*, si para cualquier punto $p \in M$, el plano tangente $(T_pM, \mathbf{x}^*(\langle, \rangle_p))$ es temporal.
- *Espacial*, si para cualquier punto $p \in M$, el plano tangente $(T_pM, \mathbf{x}^*(\langle, \rangle_p))$ es espacial.
- *Luminoso*, si para cualquier punto $p \in M$, el plano tangente $(T_pM, \mathbf{x}^*(\langle, \rangle_p))$ es luminoso.

Veamos algunas nociones de ortogonalidad que nos serán útiles para algunas demostraciones.

Definición 2.2.3. Dado $W \subset \mathbb{E}_1^3$, se define el *complemento ortogonal* de W al conjunto

$$W^\perp = \{w \in \mathbb{E}_1^3, \langle v, w \rangle = 0, \text{ para todo } v \in W\}.$$

Proposición 2.2.4. Sea $(\mathbb{E}_1^3, \langle, \rangle)$ y dado $W \subset \mathbb{E}_1^3$. W es temporal si y solo si su complemento ortogonal, W^\perp , es espacial.

Demostración: Como el producto escalar lorentziano es no degenerado, es decir, que si $\langle w, v \rangle = 0$ para todo $w \in \mathbb{E}_1^3$ implica que $v = 0$, también lo es sobre W^\perp . Esto es equivalente a decir que $W \cap W^\perp = \{0\}$, por tanto, $\mathbb{E}_1^3 = W \oplus W^\perp$ y, en consecuencia

$$\vartheta(\langle, \rangle) = \vartheta(\langle, \rangle|_W) + \vartheta(\langle, \rangle|_{W^\perp}).$$

W es temporal si y solo si $\vartheta(\langle, \rangle|_W) = 1$ (Def 2.2.1), y como $\vartheta(\langle, \rangle) = 1$ por definición, se tiene que $\vartheta(\langle, \rangle|_{W^\perp}) = 0$ y por tanto W^\perp es espacial. La implicación recíproca se deduce de igual manera. \square

Proposición 2.2.5. Sean M una superficie y $p \in M$. Sea $N(p)$ el vector normal unitario a M en p . Se tiene que

1. M es temporal si y solo si $N(p)$ es espacial para todo $p \in M$.
2. M es espacial si y solo si $N(p)$ es temporal para todo $p \in M$.

Demostración: Veamos la primera implicación ya que la segunda es análoga.

Sea $p \in M$, M es temporal si para todo $u \in \text{gen}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \{u \in \mathbb{E}_1^3 \mid u = \lambda_1 \mathbb{X}_1(p) + \lambda_2 \mathbb{X}_2(p), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ es temporal (Def 2.2.2).

Como $\{N, \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\}$ es una base de \mathbb{E}_1^3 significa que $N(p) = (\text{gen}(\mathbb{X}_1(p), \mathbb{X}_2(p))^\perp)^\perp$ y, por tanto, al ser $\text{gen}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ temporal, aplicando la proposición anterior, se tiene que $N(p)$ es espacial.

De igual manera se obtiene el segundo resultado. \square

También nos serán útiles algunos resultados sobre geometría intrínseca de \mathbb{E}_1^3 .

Definición 2.2.6. Sea M una superficie regular en \mathbb{E}_1^3 y dada una parametrización de M

$$\begin{aligned} \phi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)). \end{aligned}$$

Para cada plano tangente de M se define la *Primera Forma Fundamental* como

$$I = \langle d\phi, d\phi \rangle = Edu^2 + 2F du dv + Gdv^2,$$

con los coeficientes métricos

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle, \quad F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle, \quad G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle.$$

Notación 2.2.7. Hemos aplicado un cambio de notación de los coeficientes métricos a modo de distinción entre el caso euclídeo y el caso de \mathbb{E}_1^3 . Por tanto, para superficies $M \subset \mathbb{R}^3$, usaremos la notación

$$g_{ij} = \langle \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j \rangle, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

y para las superficies $M' \in \mathbb{E}_1^3$, usaremos la notación de la definición anterior.

Teniendo en cuenta la definición del vector normal a la superficie, se obtiene como consecuencia el siguiente lema.

Lema 2.2.8. Sea M una superficie parametrizada por $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$ y $N(p)$ el vector normal a la superficie en un punto $p \in M$. Sean E , F y G los coeficientes diferenciales de la 1ª Forma Fundamental de M . Entonces se tiene que:

1. M es temporal si y solo si $\det I = EG - F^2 < 0$.
2. M es espacial si y solo si $\det I = EG - F^2 > 0$.

Demostración: La demostración del lema se obtiene de manera trivial teniendo en cuenta que el vector normal se define como $N(p) = \frac{\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)}{\|\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)\|}$ y aplicando la Proposición 2.1.10 a la Proposición 2.2.5. \square

Capítulo 3

Superficies de Bézier en \mathbb{E}_1^3 .

Una vez hemos recogido todo el conocimiento necesario, ya podemos adentrarnos en el objetivo principal de este trabajo, el Problema de Plateau en el espacio de Lorentz-Minkowski. En este capítulo se estudiarán nuevas cotas para las áreas de las superficies.

Para un mejor conocimiento se recomiendan la lectura del libro [5] y, especialmente, el artículo [6], sobre el que se basa este trabajo.

3.1. Geometría intrínseca de superficies de Bézier en \mathbb{E}_1^3 .

En esta sección estudiaremos cómo responden las superficies de Bézier al ser introducidas en el espacio 3-dimensional de Lorentz-Minkowski. Para ello comenzaremos estudiando los coeficientes E , F y G de la 1ª Forma Fundamental definidos en el Capítulo 2.

Comenzaremos con un resultado técnico.

Teorema 3.1.1. Sean $R(u, v)$ y $S(u, v)$ dos superficies en \mathbb{R}^3 definidas como

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v),$$
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v),$$

donde $\{a_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}, \{b_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m} \in \mathbb{R}^3$. Entonces, el producto escalar de ambas superficies se define como

$$\langle R(u, v), S(u, v) \rangle = \sum_{i=0}^{n+n} \sum_{j=0}^{m+m} \left(\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{i-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l}}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \langle a_{kl}, b_{(i-k), (j-l)} \rangle \right) B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v), \quad (3.1.1)$$

para $0 \leq k$, $i - k \leq n$ y $0 \leq l$, $j - l \leq m$.

La demostración de este teorema no aporta ninguna técnica relevante, ya que consiste en utilizar los resultados anteriores para desarrollar la expresión. Por tanto, no se recoge en este trabajo.

Con este teorema ya somos capaces de calcular los coeficientes de P.F.F.

Teorema 3.1.2. Sea M una superficie de Bézier en \mathbb{E}_1^3 definida como $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$, donde $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ son sus puntos de control. Entonces se obtienen las siguientes expresiones de los coeficientes métricos. Siendo

$$c_E = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{j-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l}}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \right. \\ \left. [((n-k)x_{kl}^{(1,0)} + kx_{k-1,l}^{(1,0)})[(n-i+k)x_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (i-k)x_{(i-k-1),(j-l)}^{(1,0)}] \right. \\ \left. + [(n-k)y_{kl}^{(1,0)} + ky_{k-1,l}^{(1,0)}][(n-i+k)y_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (i-k)y_{(i-k-1),(j-l)}^{(1,0)}] \right. \\ \left. - [(n-k)z_{kl}^{(1,0)} + kz_{k-1,l}^{(1,0)}][(n-i+k)z_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (i-k)z_{(i-k-1),(j-l)}^{(1,0)}] \right], \quad (3.1.2)$$

$$c_G = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{j-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l}}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \right. \\ \left. [((m-l)x_{kl}^{(1,0)} + lx_{k,l-1}^{(1,0)})[(m-j+l)x_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (j-l)x_{(i-k),(j-l-1)}^{(1,0)}] \right. \\ \left. + [(m-l)y_{kl}^{(1,0)} + ly_{k,l-1}^{(1,0)}][(m-j+l)y_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (j-l)y_{(i-k),(j-l-1)}^{(1,0)}] \right. \\ \left. - [(m-l)z_{kl}^{(1,0)} + lz_{k,l-1}^{(1,0)}][(m-j+l)z_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (j-l)z_{(i-k),(j-l-1)}^{(1,0)}] \right], \quad (3.1.3)$$

$$c_F = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{j-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l}}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \right. \\ \left. [((n-k)x_{kl}^{(1,0)} + kx_{k-1,l}^{(1,0)})[(m-j+l)x_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (j-l)x_{(i-k),(j-l-1)}^{(1,0)}] \right. \\ \left. + [(n-k)y_{kl}^{(1,0)} + ky_{k-1,l}^{(1,0)}][(m-j+l)y_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (j-l)y_{(i-k),(j-l-1)}^{(1,0)}] \right. \\ \left. - [(n-k)z_{kl}^{(1,0)} + kz_{k-1,l}^{(1,0)}][(m-j+l)z_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (j-l)z_{(i-k),(j-l-1)}^{(1,0)}] \right], \quad (3.1.4)$$

los coeficientes quedarían como

$$E = c_E B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v), \quad G = c_G B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v), \quad F = c_F B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v).$$

Demostración: Por definición,

$$E = \langle P_u(u, v), P_u(u, v) \rangle, \\ F = \langle P_u(u, v), P_v(u, v) \rangle, \\ G = \langle P_v(u, v), P_v(u, v) \rangle,$$

donde \langle, \rangle es el producto escalar definido para \mathbb{E}_1^3 . Comencemos por calcular las derivadas parciales de ambas superficies. Sea $P(u, v)$, una superficie de Bézier cualquiera, aplicando el Teorema 1.2.14 se tiene:

$$P_u(u, v) = \sum_{j=0}^m \left[n \sum_{i=0}^{n-1} P_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) \right] B_j^m(v).$$

Si usamos el Lema 1.2.6 en $B_i^{n-1}(u)$:

$$\begin{aligned} B_i^{n-1}(u) &= \binom{n-1}{i} \sum_{l=0}^1 \frac{\binom{k}{l}}{\binom{n}{i+l}} B_{i+l}^n(u) = \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{\binom{n}{i}} B_i^n(u) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1}^n(u) \right) = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!i!} \left[\frac{(n-i)!i!}{n(n-1)!} B_i^n(u) + \frac{(n-i-1)!(i+1)!}{n(n-1)!} B_{i+1}^n(u) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[(n-i) B_i^n(u) + (i+1) B_{i+1}^n(u) \right], \end{aligned}$$

uniendo ambos resultados:

$$\begin{aligned} P_u(u, v) &= \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} (n-i) B_i^n(u) B_j^m(v) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} (i+1) B_{i+1}^n(u) B_j^m(v) \right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} (n-i) B_i^n(u) B_j^m(v) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{(i-1),j}^{(1,0)} i B_i^n(u) B_j^m(v) \right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left((n-i) P_{ij}^{(1,0)} + i P_{(i-1),j}^{(1,0)} \right) B_i^n(u) B_j^m(v) \right]. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene

$$P_v(u, v) = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left((m-j) P_{ij}^{(0,1)} + j P_{i,(j-1)}^{(0,1)} \right) B_i^n(u) B_j^m(v) \right].$$

Estas expresiones siguen siendo superficies de Bézier en \mathbb{E}_1^3 con puntos de control $\{(n-i)P_{ij}^{(1,0)} + iP_{(i-1),j}^{(1,0)}\}_{i,j=0}^{n,m}$ y $\{(m-j)P_{ij}^{(0,1)} + jP_{i,(j-1)}^{(0,1)}\}_{i,j=0}^{n,m}$ respectivamente. Por lo tanto, podemos expresarlas parametrizadas de la siguiente manera:

$$P_u(u, v) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(n-i)x_{ij}^{(1,0)} + ix_{i-1,j}^{(1,0)}] B_i^n(u) B_j^m(v), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(n-i)y_{ij}^{(1,0)} + iy_{i-1,j}^{(1,0)}] B_i^n(u) B_j^m(v), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(n-i)z_{ij}^{(1,0)} + iz_{i-1,j}^{(1,0)}] B_i^n(u) B_j^m(v) \right),$$

$$P_v(u, v) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(m-j)x_{ij}^{(0,1)} + jx_{i,j-1}^{(0,1)}] B_i^n(u) B_j^m(v), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(m-j)y_{ij}^{(0,1)} + jy_{i,j-1}^{(0,1)}] B_i^n(u) B_j^m(v), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(m-j)z_{ij}^{(0,1)} + jz_{i,j-1}^{(0,1)}] B_i^n(u) B_j^m(v) \right),$$

donde (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) denotan las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 de los puntos P_{ij} . Una vez definidas las derivadas parciales de las superficies podemos calcular los coeficientes de la P.F.F.

$$E = \langle P_u, P_u \rangle = \\ = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(m-j)x_{ij}^{(0,1)} + jx_{i,j-1}^{(0,1)}] B_i^n(u) B_j^m(v) \right)^2 \\ + \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(m-j)y_{ij}^{(0,1)} + jy_{i,j-1}^{(0,1)}] B_i^n(u) B_j^m(v) \right)^2 \\ - \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(m-j)z_{ij}^{(0,1)} + jz_{i,j-1}^{(0,1)}] B_i^n(u) B_j^m(v) \right)^2.$$

Si aplicamos la definición de producto de superficies de Bézier (Teorema 3.1.1) obtenemos los coeficientes

$$x_E = \left(\frac{\binom{n}{k} \binom{n}{i-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l} [(n-k)x_{kl}^{(1,0)} + kx_{k-1,l}^{(1,0)}] [(n-i+k)x_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (i-k)x_{(i-k-1),(j-l)}^{(1,0)}]}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \right), \\ y_E = \left(\frac{\binom{n}{k} \binom{n}{i-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l} [(n-k)y_{kl}^{(1,0)} + ky_{k-1,l}^{(1,0)}] [(n-i+k)y_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (i-k)y_{(i-k-1),(j-l)}^{(1,0)}]}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \right), \\ z_E = \left(\frac{\binom{n}{k} \binom{n}{i-k} \binom{m}{l} \binom{m}{j-l} [(n-k)z_{kl}^{(1,0)} + kz_{k-1,l}^{(1,0)}] [(n-i+k)z_{(i-k),(j-l)}^{(1,0)} + (i-k)z_{(i-k-1),(j-l)}^{(1,0)}]}{\binom{2n}{i} \binom{2m}{j}} \right),$$

lo que nos deja la expresión:

$$E = \langle P_u, P_u \rangle = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j [x_E B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v) + y_E B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v) - z_E B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v)]$$

y simplificando los coeficientes se obtiene la expresión final

$$E = c_E B_i^{2n}(u) B_j^{2m}(v),$$

para $k \geq 0, i - k \leq n$ y $0 \leq l, j - l \leq m$.

De manera similar se obtienen las expresiones de G y F usando $P_u(u, v)$ y $P_v(u, v)$. \square

Una vez tenemos los coeficientes métricos calculados, podemos establecer una condición necesaria para la causalidad de las superficies de Bézier.

Teorema 3.1.3. Sea $P(u, v)$ una superficie de Bézier en \mathbb{E}_1^3 . Para $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, se verifica:

1. Si $F^2 - EG > 0$ entonces $P(u, v)$ es una superficie temporal,
2. si $F^2 - EG < 0$ entonces $P(u, v)$ es una superficie espacial.

donde E, F y G son los coeficientes de la P.F.F.

La demostración de este teorema se tiene dado que, por construcción de E, F y G según el teorema anterior, es un caso particular del Lema 2.2.8, ya probada.

3.2. El Problema de Plateau-Bézier en \mathbb{E}_1^3 .

En esta sección se recogen resultados relacionados con acotaciones del área de las superficies que han sido adaptados a las superficies de Bézier y al espacio \mathbb{E}_1^3 con el objetivo de dar respuesta al problema de Plateau-Bézier.

A partir de este momento vamos a trabajar con una superficie de Bézier en \mathbb{E}_1^3

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

con $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ su red de puntos de control.

Teorema 3.2.1. Sea $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ una red de puntos de control y sea $P(u, v)$ su superficie de Bézier asociada.

Entonces, el área de la superficie en \mathbb{E}_1^3 es

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \int_R \sqrt{|EG - F^2|} du dv, \quad (3.2.1)$$

donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$ y E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental de P .

Demostración: Para una superficie regular y simple M , la definición de área de la región es

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \int_U \|\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2\| \, du \, dv$$

siendo $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de M .

Además, aplicando la Proposición 2.1.10 resulta la siguiente expresión

$$\|\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2\|^2 = |EG - F^2|.$$

Por tanto, si aplicamos la definición al caso de una superficie de Bézier espacial $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ con $(u, v) \in R = [0, 1] \times [0, 1]$ se obtiene la expresión final

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \int_R \sqrt{|EG - F^2|} \, du \, dv,$$

que depende de la red de puntos de control. □

Con este teorema podremos sacar condiciones necesarias y suficientes de área mínima para las superficies de Bézier espaciales y temporales.

Superficies espaciales.

A partir de este punto solo se trabajará con superficies de tipo espacial, las cuales verifican $F^2 - EG < 0$.

Observación 3.2.2. Al estar trabajando con superficies de Bézier espaciales, se tiene que

$$EG - F^2 > 0 \Rightarrow EG > F^2 > 0$$

con lo que obtenemos la condición de que $|E + F| \neq 0$ y, por tanto, $|E + F|$ es diferenciable para cualquier \mathcal{P} que defina la superficie dada.

Lema 3.2.3. Para cualquier \mathcal{P} red de puntos de control, se tiene que

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{2} \int_R |E + G| \, du \, dv$$

Demostración: Las superficies espaciales cumplen que $F^2 - EG < 0$ (Lema 2.2.8). Entonces, se tiene

$$|EG - F^2| = EG - F^2 \leq EG$$

Además, también se puede comprobar $EG < \frac{(E+G)^2}{2}$

$$(E + G)^2 = E^2 + G^2 + 2EG > 2EG,$$

y por tanto $\frac{(E+G)^2}{2} > EG$. Luego, uniendo ambos casos.

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \int_R \sqrt{|EG - F^2|} \, du \, dv \leq \int_R \sqrt{EG} \, du \, dv \leq \int_R \frac{|E + G|}{2} \, du \, dv,$$

obteniendo la cota buscada. \square

Aunque hemos encontrado una cota para el funcional área, computacionalmente es bastante complejo de calcular. Por ello, vamos a introducir otro funcional que será más sencillo de trabajar.

Definición 3.2.4. Se define el *Funcional de Dirichlet* como

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \int_R (\|P_u\|^2 + \|P_v\|^2) \, du \, dv. \quad (3.2.2)$$

Proposición 3.2.5. En estas condiciones, el área de la superficie puede acotarse por el Funcional de Dirichlet:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{D}(\mathcal{P}). \quad (3.2.3)$$

Demostración: Aplicando la Definición 2.2.6 a la definición del funcional de Dirichlet, resulta

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \int_R (\|\mathbb{X}_1\| + \|\mathbb{X}_2\|) \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_R (|E| + |G|) \, du \, dv.$$

Teniendo en cuenta que las superficies espaciales verifican que $EG > 0$ entonces $|E + G| = |E| + |G|$ y por tanto

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{D}(\mathcal{P}),$$

obteniendo así el resultado. \square

El siguiente resultado es una condición necesaria y suficiente para que una red de puntos de control sea un extremo del funcional de Dirichlet.

Teorema 3.2.6. Condición para superficies espaciales.

Sea una red de puntos de control $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ de una superficie de Bézier espacial $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$. Se tiene que \mathcal{P} es un extremo para el funcional de Dirichlet si y solo si

$$0 = \frac{n^2}{2(2n-1)(2m+1)} \binom{n-1}{i} \binom{m}{j} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} A_{n,i}^k \frac{\binom{m}{l}}{\binom{2m}{j+l}} P_{kl}^{(1,0)} + \frac{m^2}{2(2m-1)(2n+1)} \binom{n}{i} \binom{m-1}{j} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i+k}} A_{m,j}^l P_{kl}^{(0,1)}, \quad (3.2.4)$$

para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $k \in \{1, \dots, m-1\}$ donde

$$A_{n,i}^k = \frac{ni - nk - i}{(n-i)(2n-1-i-k)} \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{i+k-1}}$$

y $P_{kl}^{(1,0)} = n(P_{k+1,l} - P_{kl})$, $P_{kl}^{(0,1)} = m(P_{k,l+1} - P_{kl})$.

Demostración:

Sea $\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \int_R (\|P_u\|^2 + \|P_v\|^2) du dv$ el funcional de Dirichlet y sean $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ las coordenadas de los puntos de la red de control. Para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $j \in \{1, \dots, m-1\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}} &= \frac{1}{2} \int_R \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \langle P_u, P_u \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \langle P_v, P_v \rangle \right) du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_R \left(2 \left\langle \frac{\partial P_u}{\partial x_{ij}}, P_u \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial P_v}{\partial x_{ij}}, P_v \right\rangle \right) du dv = \\ &= \int_R \left(\left\langle \frac{\partial P_u}{\partial x_{ij}}, P_u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial P_v}{\partial x_{ij}}, P_v \right\rangle \right) du dv. \end{aligned}$$

Si estudiamos las derivadas parciales, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_u}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \frac{\partial}{\partial u} P(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} P(u, v) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u} B_i^n(u) B_j^m(v) e^1 = n [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^n(u)] B_j^m(v) e^1, \end{aligned}$$

donde $e^1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. De manera análoga, se obtiene

$$\frac{\partial P_v}{\partial x_{ij}} = m B_i^n(u) [B_{j-1}^{m-1}(v) - B_j^m(v)] e^1.$$

Por tanto, la derivada del funcional quedaría:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}} &= \int_R \left(n [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^n(u)] B_j^m(v) \langle e^1, P_u \rangle \right. \\ &\quad \left. + m B_i^n(u) [B_{j-1}^{m-1}(v) - B_j^m(v)] \langle e^1, P_v \rangle \right), \end{aligned}$$

por lo que, aplicando las expresiones de las derivadas parciales de las superficies de Bézier (Teorema 1.2.14) y agrupando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}} &= \int_R \left(n [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^n(u)] B_j^m(v) \langle e^1, n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m P_{kl}^{(1,0)} B_k^{n-1}(u) B_l^m(v) \rangle \right. \\ &\quad \left. + m B_i^n(u) [B_{j-1}^{m-1}(v) - B_j^m(v)] \langle e^1, \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} P_{kl}^{(0,1)} B_k^n(u) B_l^{m-1}(v) \rangle \right) du dv. \end{aligned}$$

Lo único que depende de u y v son los polinomios de Bernstein luego aplicando que $\int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1}$ junto a su definición se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{D}(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}} &= \frac{n^2}{2(2n-2)m} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} \frac{\binom{m}{l} \binom{m}{j}}{\binom{2m}{j+l}} \left(\frac{\binom{n-1}{i-1} \binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{i+k-1}} - \frac{\binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{i+k}} \right) \langle e^1, P_{kl}^{(1,0)} \rangle \\
&\quad + \frac{m^2}{2(2m-2)n} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{i}}{\binom{2n}{i+k}} \left(\frac{\binom{m-1}{j-1} \binom{m-1}{l}}{\binom{2m-2}{j+l-1}} - \frac{\binom{m-1}{j} \binom{m-1}{l}}{\binom{2m-2}{j+l}} \right) \langle e^1, P_{kl}^{(0,1)} \rangle = \\
&= \frac{n^2}{2(2n-2)m} \binom{n-1}{i} \binom{m}{j} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} A_{ni}^k \frac{\binom{m}{l}}{\binom{2m}{j+l}} \langle e^1, P_{kl}^{(1,0)} \rangle \\
&\quad + \frac{m^2}{2(2m-2)n} \binom{n}{i} \binom{m-1}{j} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} A_{mj}^l \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i+k}} \langle e^1, P_{kl}^{(0,1)} \rangle,
\end{aligned}$$

quedando demostrado. De manera análoga se obtienen las expresiones para y_{ij} y z_{ij} con e^2 y e^3 . \square

Corolario 3.2.7. Sea $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ una red de puntos de control cuadrada, es decir, $n = m$, para $P(u, v)$. Se tiene que $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ es un extremo del funcional de Dirichlet con borde fijo si y solo si

$$0 = \sum_{k,l=0}^{n-1,n} \frac{\binom{n}{l}}{\binom{2n}{j+l}} C_{ni}^k P_{kl}^{(1,0)} + \sum_{k,l=0}^{n,n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i+k}} C_{nj}^l P_{kl}^{(0,1)} \quad (3.2.5)$$

para $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ and $C_{ni}^k = \frac{(n-i)i-nk}{i+k} \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{i+k}}$.

Ejemplo 3.1. Veamos un ejemplo de una red de puntos $\mathcal{Q} = \{Q_{ij}\}_{i,j=0}^{2,2}$ cuadrada. Si aplicamos el corolario anterior, se queda la siguiente condición sobre la red :

$$Q_{11} = \frac{1}{8}(3Q_{00} - Q_{01} + 3Q_{02} - Q_{10} - Q_{12} + 3Q_{20} - Q_{21} + 3Q_{22}).$$

De esta manera, se puede observar que, para obtener una superficie mínima con el borde fijo, la condición de mínimo recae sobre el punto Q_{11} , que es el único punto interior de la superficie.

Para una red cuadrada $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{3,3}$, se obtienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{1}{78}(48P_{00} - 22P_{01} + 24P_{02} - 22P_{10} + 15P_{13} + 24P_{20} - 4P_{23} + 15P_{31} - 4P_{32} + 4P_{33}), \\
P_{12} &= \frac{1}{78}(24P_{01} - 22P_{02} + 48P_{03} + 15P_{10} - 22P_{13} - 4P_{20} + 24P_{23} + 4P_{30} - 4P_{31} + 15P_{32}), \\
P_{21} &= \frac{1}{78}(15P_{01} - 4P_{02} + 4P_{03} + 24P_{10} - 4P_{13} - 22P_{20} + 15P_{23} + 48P_{30} - 22P_{31} + 24P_{32}), \\
P_{22} &= \frac{1}{78}(4P_{00} - 4P_{01} + 15P_{02} - 4P_{10} + 24P_{13} + 15P_{20} - 22P_{23} + 24P_{31} - 22P_{32} + 48P_{33}),
\end{aligned}$$

donde, de igual manera, se puede observar que la condición de mínimo recae sobre los puntos interiores de la red.

Superficies temporales.

En el caso de las superficies temporales, recordamos que cumplen la condición de que $F^2 - EG > 0$, por lo que, para cualquier red de puntos de control \mathcal{P} , se tiene que el área es

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \int_R \sqrt{F^2 - EG} \, du \, dv.$$

Además, las superficies temporales podrán separarse en dos clases distintas. Teniendo en cuenta que $F^2 - EG > 0$, se tienen:

- Tipo 1: Las superficies que cumplen que $|EG| < F^2$,
- Tipo 2: Las superficies que cumplen que $|EG| > F^2$.

Proposición 3.2.8. Para \mathcal{P} una red de puntos de control de una superficie de Bézier temporal, se definen las funciones

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \sqrt{2} \int_R |F| \, du \, dv,$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \int_R |E - G| \, du \, dv.$$

Así, el área de la superficie queda acotada de la siguiente manera.

- Si la superficie es de tipo 1, entonces:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{F}(\mathcal{P}),$$

- Si la superficie es de tipo 2, entonces:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq 2\mathcal{D}(\mathcal{P}).$$

Demostración:

- Superficies de Tipo 1:

Como $|F| \neq 0$ y además se verifica $|EG| < F^2$, se tiene que es diferenciable. Por lo tanto \mathcal{F} está bien definida. Además, si $|EG| < F^2$, entonces $F^2 - EG \leq F^2 + |EG| \leq 2F^2$ y por tanto $\sqrt{F^2 - EG} \leq \sqrt{2}|F|$.

Uniendo todo esto se tiene que:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \int_R \sqrt{F^2 - EG} \, du \, dv \leq \int_R \sqrt{2}|F| \, du \, dv = \sqrt{2} \int_R |F| \, du \, dv = \mathcal{F}(\mathcal{P})$$

■ Superficies de Tipo 2:

En este caso $F^2 - EG \leq (|E| + |G|)^2$ y por tanto $\sqrt{F^2 - EG} \leq |E| + |G|$.

Podemos asumir que $E, G \neq 0$ ya que si lo fuesen llevaría a que $F = 0$, lo cuál no ocurre con superficies temporales. Por tanto, tenemos que $|E| + |G|$ es diferenciable. Además, se verifica que

$$|EG| = -EG \Rightarrow |E| + |G| = |E - G|$$

Finalmente, se obtiene la expresión buscada,

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \int_R \sqrt{F^2 - EG} \, du \, dv \leq \int_R \sqrt{|E| + |G|} \, du \, dv = \int_R \sqrt{|E - G|} \, du \, dv,$$

quedando demostrada la proposición. \square

De igual manera que en las superficies espaciales, el funcional área sigue siendo muy complejo de calcular computacionalmente, por tanto, al definir el nuevo funcional $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ podemos encontrar nuevas cotas más sencillas.

Teorema 3.2.9. Condición de extremo para superficies de tipo 1.

Una red de puntos de control $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ de una superficie temporal en \mathbb{E}_1^3 del tipo 1 es un extremo de la función $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ con borde fijo si y solo si

$$0 = \binom{n-1}{i} \binom{m}{j} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} \frac{ni - nk}{(n-i)(i+k)} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{i+k}} \frac{\binom{m-1}{l}}{\binom{2m-1}{j+l}} P_{kl}^{(0,1)} \\ + \binom{n}{i} \binom{m-1}{j} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} \frac{mj - ml}{(m-j)(j+l)} \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{2n-1}{i+k}} \frac{\binom{m}{l}}{\binom{2m-1}{j+l}} P_{kl}^{(1,0)},$$

para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

Demostración:

Dada una superficie temporal de Bézier $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ se tiene que, en el espacio \mathbb{E}_1^3 , el coeficiente F está definido como $F = \langle P_u, \rangle P_v$.

Estudiemos las derivadas parciales de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ sabiendo que $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \sqrt{2} \int_R |F| \, du \, dv$.

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}} = \sqrt{2} \int_R \frac{\partial}{\partial x_{ij}} |\langle P_u, P_v \rangle| \, du \, dv = \sqrt{2} \int_R \left| \left\langle \frac{\partial P_u}{\partial x_{ij}}, P_v \right\rangle + \left\langle \frac{\partial P_v}{\partial x_{ij}}, P_u \right\rangle \right| \, du \, dv \\ = \sqrt{2} \int_R |n(B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)) B_j^m(v) \langle e_1, P_v \rangle \\ + m(B_{j-1}^{m-1}(v) - B_j^{m-1}(v)) B_i^n(u) \langle e_1, P_u \rangle| \, du \, dv \\ = \sqrt{2} (B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)) B_j^m(v) \left\langle e_1, m \sum_{k,l=0}^{n,m-1} B_k^n(u) B_l^{m-1}(v) P_{kl}^{(0,1)} \right\rangle \\ + m (B_{j-1}^{m-1}(v) - B_j^{m-1}(v)) B_i^n(u) \left\langle e_1, n \sum_{k,l=0}^{n-1,m} B_k^{n-1}(u) B_l^m(v) P_{kl}^{(1,0)} \right\rangle \Big| \, du \, dv,$$

donde $e_1 = (1, 0, 0)$ y las derivadas parciales de la superficie están demostradas del Teorema 1.2.14. Como $\int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}} &= \sqrt{2} \, n \, m \left| \frac{1}{2n} \frac{1}{2m} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} \frac{\binom{m}{j} \binom{m-1}{l}}{\binom{2m-1}{j+l}} \left(\frac{\binom{n-1}{i-1} \binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{i+k-1}} - \frac{\binom{n-1}{i} \binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{i+k}} \right) \langle e_1, P_{kl}^{(0,1)} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n} \frac{1}{2m} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} \frac{\binom{n}{i} \binom{n-1}{k}}{\binom{2n-1}{i+k}} \left(\frac{\binom{m-1}{j-1} \binom{m}{l}}{\binom{2m-1}{j+l-1}} - \frac{\binom{m-1}{j} \binom{m}{l}}{\binom{2m-1}{j+l}} \right) \langle e_1, P_{kl}^{(1,0)} \rangle \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{4} \binom{m}{j} \binom{n-1}{i} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} \frac{ni - nk}{(n-i)(i+k)} \frac{\binom{n}{k} \binom{m-1}{l}}{\binom{2n-1}{i+k} \binom{2m-1}{j+l}} \langle e_1, P_{kl}^{(0,1)} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{4} \binom{n}{i} \binom{m-1}{j} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} \frac{mj - ml}{(m-j)(j+l)} \frac{\binom{m}{l} \binom{n-1}{k}}{\binom{2m-1}{j+l} \binom{2n-1}{i+k}} \langle e_1, P_{kl}^{(1,0)} \rangle \right|. \end{aligned}$$

Esta expresión se puede tener de manera análoga para $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{P})}{\partial y_{ij}}$ y $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{P})}{\partial z_{ij}}$ cambiando e_1 por $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ respectivamente. Finalmente, como los extremos del funcional $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ cumplen que las derivadas parciales son nulas, se obtiene el resultado. \square

Corolario 3.2.10. Sea $\mathcal{P}_{i,j=0}^{n,n}$ una red de control cuadrada de una superficie temporal en \mathbb{E}_1^3 de tipo 1. Entonces \mathcal{P} es un extremo del funcional $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ con un borde fijo si y solo si

$$0 = \sum_{k,l=0}^{n,n-1} \frac{\binom{n}{k} \binom{n-1}{l}}{\binom{2n-1}{i+k} \binom{2n-1}{j+l}} \frac{ni - nk}{i+k} P_{kl}^{(0,1)} + \sum_{k,l=0}^{n-1,n} \frac{\binom{n}{l} \binom{n-1}{k}}{\binom{2n-1}{j+l} \binom{2n-1}{i+k}} \frac{nj - nl}{j+l} P_{kl}^{(1,0)}$$

para $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Ejemplo 3.2. Para $n = m = 2$, haciendo los cálculos y simplificando, se obtiene la siguiente condición sobre la red de control:

$$0 = -P_{00} + P_{02} + P_{20} - P_{22}.$$

Hay resultados análogos para las superficies temporales de tipo 2:

Teorema 3.2.11. Condición de extremo para superficies de tipo 2.

Sea $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ una red de puntos de control para una superficie temporal de tipo 2 en \mathbb{E}_1^3 . Entonces $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ es un extremo del funcional de Dirichlet con borde fijo si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{n^2}{2(2n-1)(2m+1)} \binom{n-1}{i} \binom{m}{j} \sum_{k,l=0}^{n-1,m} A_{n,i}^k \frac{\binom{m}{l}}{\binom{2m}{j+l}} P_{kl}^{(1,0)} \\ &\quad - \frac{m^2}{2(2m-1)(2n+1)} \binom{n}{i} \binom{m-1}{j} \sum_{k,l=0}^{n,m-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i+k}} A_{m,j}^l P_{kl}^{(0,1)}, \end{aligned}$$

para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $j \in \{1, \dots, m-1\}$ donde

$$A_{n,i}^k = \frac{ni - nk - i}{(n-i)(2n-1-i-k)} \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{i+k-1}}.$$

Demostración: Teniendo en cuenta que si la superficie es temporal de tipo 2 entonces se verifican las condiciones

$$|EG| > F^2,$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq 2\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \int_R |E - G| \, du \, dv,$$

la prueba del teorema siendo equivalente a la del Teorema 3.2.6. \square

Para el caso de las redes de puntos cuadradas se obtienen las siguientes condiciones.

Corolario 3.2.12. Dada $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,n}$ una red de puntos de control cuadrada de una superficie temporal de tipo dos, se tiene que es un extremo del funcional de Dirichlet si y solo si

$$0 = \sum_{k,l=0}^{n-1,n} \frac{\binom{n}{l}}{\binom{2n}{j+l}} C_{ni}^k P_{kl}^{(1,0)} - \sum_{k,l=0}^{n,n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{i+k}} C_{nj}^l P_{kl}^{(0,1)},$$

para $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ y $C_{ni}^k = \frac{(n-i)i-nk}{i+k} \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{2n-2}{i+k}}$.

Ejemplo 3.3. Para una red de puntos $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ con $n = m = 2$, se obtiene la siguiente condición:

$$0 = -P_{01} + P_{10} + P_{12} - P_{21}.$$

3.3. Aplicaciones.

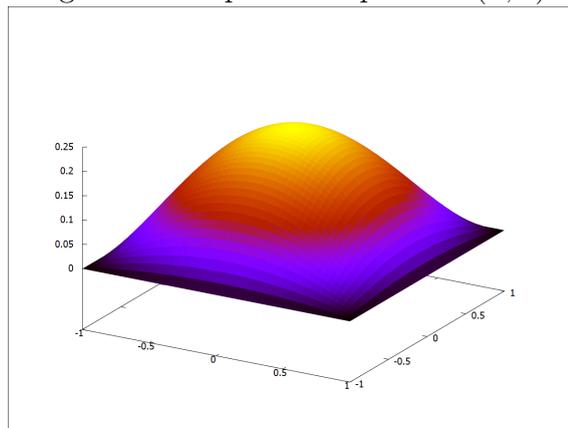
Una vez tenemos reunidos todos estos resultados merece la pena ponerlos en práctica en ejemplos concretos. Veamos algunos interesantes.

Ejemplo 1: Superficie espacial.

Sea una superficie de Bézier $P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ con una red de puntos de control $\mathcal{P}\{P_{ij}\}_{i,j=0}^{2,2}$ formada por los siguientes puntos

$$\begin{array}{lll} P_{00} = (-1, 1, 0) & P_{01} = (-1, 0, 0) & P_{02} = (-1, 1, 0), \\ P_{10} = (0, -1, 0) & P_{11} = (0, 0, 1) & P_{12} = (0, 1, 0), \\ P_{20} = (1, -1, 0) & P_{21} = (1, 0, 0) & P_{22} = (1, 1, 0). \end{array}$$

Figura 3.1: Superficie espacial $P(u, v)$.



Si calculamos los coeficientes de la P.F.F. se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} E &= (-64u^2 + 64u - 16)v^4 + (128u^2 - 128u + 32)v^3 + (-64u^2 + 64u - 16)v^2 + 4 \\ F &= (-64u^3 + 96u^2 - 32u)v^3 + (96u^3 - 144u^2 + 48u)v^2 + (-32u^3 + 48u^2 - 16u)v \\ G &= (-64u^4 + 128u^3 - 64u^2)v^2 + (64u^4 - 128u^3 + 64u^2)v - 16u^4 + 32u^3 - 16u^2 + 4, \end{aligned}$$

de manera que, si $0 < u, v < 1$, $F^2 - EG < 0$ y, por tanto, es efectivamente una superficie espacial. Estudiemos el funcional de Dirichlet de esta red de puntos.

Si $\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \int_R (\|P_u\|^2 + \|P_v\|^2) du dv$, se obtiene que, en esta superficie, el funcional tiene valor $\mathcal{D}(\mathcal{P}) = 3,82$. Aplicando la Proposición 3.2.5, resulta

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq 3,82.$$

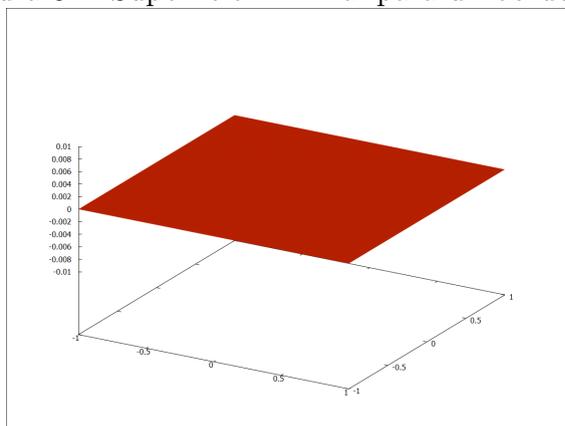
Por otro lado, en el Ejemplo 3.1, aplicando el Corolario 3.2.7 vimos que la expresión que deberían de cumplir los puntos de una red cuadrada para $n = m = 2$ sería

$$P_{11} = \frac{1}{8}(3P_{00} - P_{01} + 3P_{02} - P_{10} - P_{12} + 3P_{20} - P_{21} + 3P_{22}).$$

Aplicando los cálculos a nuestra red de puntos, resulta que $P_{11} = (0, 0, 0)$ y, por tanto, nos dice que $P(u, v)$ no es la superficie que tenga un área extremo del funcional de Dirichlet.

Tomemos ahora una nueva superficie de Bézier $P'(u, v)$, con una red de puntos \mathcal{P}' formada por los mismos puntos de $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$ pero tomando $P'_{11} = (0, 0, 0)$ en vez de P_{11} . Esta superficie es, de hecho, el plano $z = 0$ y, según nuestra condición, es un extremo del funcional de Dirichlet.

Figura 3.2: Superficie minimal para un borde fijo.



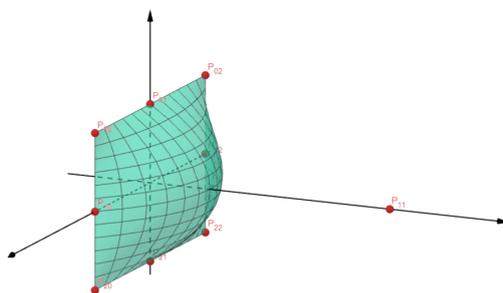
Si aplicamos los mismos cálculos, se obtiene que $E = G = 4$ y $F = 0$, por tanto, aplicando el Teorema 3.2.1, se obtiene que $\mathcal{A}(\mathcal{P}') = 4 > \mathcal{A}(\mathcal{P})$. Podemos concluir que \mathcal{P}' es un máximo, cuando, en el caso euclídeo \mathbb{R}^3 , es una superficie minimal.

Ejemplo 2: Superficie temporal.

Sea una superficie de Bézier $Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m Q_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ con una red de puntos de control $\mathcal{Q}\{Q_{ij}\}_{i,j=0}^{2,2}$ formada por los siguientes puntos

$$\begin{aligned} Q_{00} &= (1, 0, 1) & Q_{01} &= (0, 0, 1) & Q_{02} &= (-1, 0, 1), \\ Q_{10} &= (1, 0, 0) & Q_{11} &= (0, 1, 0) & Q_{12} &= (-1, 0, 0), \\ Q_{20} &= (1, 0, -1) & Q_{21} &= (0, 0, -1) & Q_{22} &= (-1, 0, -1). \end{aligned}$$

Figura 3.3: Superficie temporal de tipo 2 $Q(u, v)$.



Calculando los coeficientes de la P.F.F. se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} E &= (64u^2 - 64u + 16)v^4 + (-128u^2 + 128u - 32)v^3 + (64u^2 - 64 + 16)v^2 - 4 \\ G &= (64u^4 - 128u^3 + 64u^2)v^2 + (-64u^4 + 128u^3 - 64u^2)v + 16u^4 - 32u^3 + 16u^2 + 4 \\ F &= (64u^3 - 96u^2 + 32u)v^3 + (-96u^3 + 144u^2 - 48u)v^2 + (32u^3 - 48u^2 + 16)v, \end{aligned}$$

tal que si $0 < u, v < 1$, entonces $F^2 - EG > 0$ y, por tanto, la superficie es temporal. Además, $F^2 < |EG|$, luego es una superficie temporal de tipo 2. Recordemos que estas superficies verifican que $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq 2\mathcal{D}(\mathcal{P})$ (Prop. 3.2.8) y que el funcional de Dirichlet en este caso vale $\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \int_R |E - G| du dv$. Luego se tiene que

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \leq 2\mathcal{D}(\mathcal{P}) = 8.$$

Si aplicamos la condición de extremo para superficie de tipo 2 (Corolario 3.2.12) a la red de puntos \mathcal{Q} resulta

$$0 = -Q_{01} + Q_{10} + Q_{12} - Q_{21},$$

y, por tanto, podemos concluir que es un extremo para el funcional de Dirichlet. Sin embargo, si tomásemos las redes de puntos \mathcal{Q}' o \mathcal{Q}'' , que sustituyen en la red \mathcal{Q} el punto Q_{11} por $Q'_{11} = (0, \frac{3}{2}, 0)$ o $Q''_{11} = (0, 2, 0)$ respectivamente, el funcional de Dirichlet sigue teniendo valor 4.

Con este ejemplo hemos visto que no tenemos un único extremo y por tanto no hemos podido dar solución al Problema de Plateau.

Bibliografía

- [1] J. M. Cordero. Valle José Cortes Parejo. *Curvas y Superficies para Modelado Geométrico*. RA-MA S.A., 2002.
- [2] M.P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Madrid. Alianza. 1994
- [3] M. A. Javaloyes Victoria, M. Sanchez Caja. *In introduction to Lorentzian geometry and its applications*.Rima.2010.
- [4] R. López. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*.**7** (2014),44-107.
- [5] J. Monterde. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. *Computer Aided Geometric Design*. **21** (2004), 117-136.
- [6] H. Ugail, M.C. Márquez, A. Yilmaz. On Bézier surfaces in three-dimensional Minkowski space. *Computers and Mathematics with Application*. **62** (2011), 2899-2912.