



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

# ITERACIONES DE FUNCIONES RACIONALES SOBRE LA ESFERA DE RIEMANN

Trabajo de Fin de Grado realizado por:

JULIA MARTÍNEZ DE LA FUENTE

Tutor: JUAN CARLOS GARCÍA VÁZQUEZ

Profesor de la Universidad de Sevilla

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Conjuntos de Julia para polinomios</b>	<b>6</b>
1.1. Conjuntos de Julia. . . . .	6
1.2. Funciones cuadráticas. El conjunto de Mandelbrot. . . . .	21
<b>2. Funciones racionales</b>	<b>27</b>
2.1. El plano complejo ampliado. . . . .	27
2.2. Funciones racionales. . . . .	31
2.3. Condición de Lipschitz. . . . .	37
2.4. Conjugación. . . . .	44
2.5. Valencia. . . . .	48
2.6. Puntos fijos. . . . .	51
2.7. Puntos críticos. . . . .	52
2.8. Una topología para las funciones racionales. . . . .	59
<b>3. Los conjuntos de Julia y Fatou</b>	<b>61</b>
3.1. Los conjuntos de Julia y de Fatou. . . . .	61
3.2. Conjuntos completamente invariantes. . . . .	64
3.3. Familias normales y equicontinuidad. . . . .	71
<b>4. Propiedades de los conjuntos de Julia</b>	<b>75</b>
4.1. Puntos excepcionales. . . . .	75
4.2. Propiedades de los conjuntos de Julia. . . . .	78
4.3. Funciones racionales con conjuntos de Fatou vacíos. . . . .	85



# Abstract

The main aim of these notes is to provide some knowledge about Julia set of rational functions. For it, we study iterations of rational functions.

In Chapter 1, we consider polynomials functions. In this way, we will study how the structure of their Julia set is. We will also study how Mandelbrot and Julia sets of a quadratic function are connected.

In Chapter 2 we will provide a formal definition of rational functions and provide some important properties about them. We will study this properties in the complex sphere and prove various results involving concepts such as the Lipschitz condition, conjugacy and valency. These notions will be present throughout the remaining of these notes.

The formal definition of Julia and Fatou sets of a rational function will appear in Chapter 3. Moreover, we will prove important properties and theorems such as Theorem 3.3.5 and its consequences.

Finally, in Chapter 4, we will prove new consequences of Theorem 3.3.5 and talk about Property of Minimality of Julia set: it establishes that the Julia set is the smallest closed, completely invariant set with, at least, three points. At the end of this chapter, we will study an example about a rational function for which its Julia set is the complex sphere.

# Introducción

A lo largo de estas notas vamos a desarrollar el estudio de las iteraciones de funciones racionales. Empezaremos trabajando en el plano complejo con funciones polinómicas y, será más adelante cuando pasemos a trabajar sobre la esfera de Riemann. Nuestro objeto de estudio en todo momento va a ser el de los conjuntos de Julia aunque, para entenderlos mejor necesitaremos desarrollar previamente nuestra herramienta más potente: las funciones racionales y sus propiedades. Esto forma parte del ámbito de estudio de las Dinámicas Complejas y el nombre de estos conjuntos hacen honor al matemático francés Gaston Maurice Julia (1893-1978).

En el Capítulo 1 trataremos cuestiones relacionadas con las iteraciones de funciones polinómicas. Cómo éstas se comportan al iterarlas partiendo de puntos del plano complejo y qué estructura tendrán los conjuntos donde estos puntos se encuentren serán nuestras principales ocupaciones. Este caso, el de los polinomios, es muy interesante y, al contrario de lo que pudiera parecer, nada sencillo. Veremos que los polinomios son buenos ejemplos para ilustrar el comportamiento caótico de las sucesiones de funciones iteradas. Con solo algunas definiciones nuevas sobre la mesa y apoyándonos en la maquinaria de Análisis Complejo, seremos capaces de probar algunas propiedades importantes de los conjuntos de Julia para este tipo de funciones. Probaremos que los conjuntos de Julia de polinomios son cerrados y acotados. En la segunda sección relacionaremos el conjunto de Mandelbrot con los conjuntos de Julia de polinomios de segundo grado y terminaremos con algunas imágenes de ejemplos.

Después de estudiar el caso de los polinomios y antes de adentrarnos en el estudio de los conjuntos de Julia para funciones racionales en general, necesitamos el Capítulo 2, donde asentaremos nuestra base -topológica y analítica-. Necesitamos añadir el punto  $\infty$  a nuestro espacio de partida y de llegada. Para ello, empezaremos definiendo el plano complejo ampliado y estableceremos una biyección entre éste y la esfera unidad. Esta relación bi-unívoca entre ambas superficies dará pie a definir dos nuevas métricas -cordal y esférica- cuya influencia en las propiedades de las iteraciones de funciones racionales es directa. Es-

to lo veremos en la tercera sección dedicada a la condición de Lipschitz. Además, en este capítulo, definiremos las funciones racionales formalmente y encontraremos las herramientas más útiles para trabajar con ellas y desarrollar nuestra teoría como son las nociones de conjugación, de valencia y de puntos críticos.

En el Capítulo 3 ya estaremos en disposición de definir con total formalidad los conceptos de conjuntos de Julia y de Fatou para funciones racionales. Una vez asentada la noción de equicontinuidad, diremos que el conjunto de Fatou es el mayor abierto de  $\mathbb{C}_\infty$  donde la sucesión de iteradas es equicontinua y el conjunto de Julia será su complementario. Estudiaremos los conjuntos completamente invariantes y los caracterizaremos a través de cierta relación de equivalencia, además de deducir algunas propiedades de los mismos. En la tercera sección de este capítulo enunciaremos uno de los teoremas más relevantes en el estudio de los conjuntos de Julia de las funciones racionales, el Teorema 3.3.5. Con este teorema podremos afirmar que si una familia de funciones analíticas está definida de una región situada en la esfera de Riemann,  $D$  y toma valores en el plano complejo ampliado salvo tres puntos:  $0$ ,  $1$  y  $\infty$ , entonces dicha familia es normal en  $D$ . Terminaremos este capítulo dando dos variaciones de este importante resultado.

Finalmente, llegaremos al Capítulo 4, donde nos centraremos de nuevo en Julia y sus propiedades y exprimiremos las consecuencias del Teorema 3.3.5. Daremos las definiciones de puntos excepcionales y puntos predecesores. En la segunda sección llevaremos a cabo un estudio análogo al que hicimos en el primer capítulo pero esta vez, para funciones racionales. Daremos una caracterización de  $J(R)$  a través de una propiedad que llamaremos, Propiedad de Minimalidad de  $J$ , que dice que el conjunto de Julia de una función racional es el conjunto cerrado y completamente invariante más pequeño que contiene, al menos, tres puntos. Será en la última sección de este capítulo donde daremos un ejemplo de función racional cuyo conjunto de Julia es el total, hecho que no puede ocurrir en el caso de trabajar con polinomios.

Todo este camino lo recorreremos de la mano de los matemáticos británicos Kenneth Falconer y Alan Beardon. El Capítulo 1 de estas notas está basado en las dos primeras secciones del Capítulo 14 de [4]. Para los capítulos 2, 3 y 4 me he ayudado de los capítulos 2, 3 y 4 de [2].

# Capítulo 1

## Conjuntos de Julia para polinomios

Este capítulo está sacado del Capítulo 14 del libro *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Kenneth Falconer [4].

### 1.1. Conjuntos de Julia.

A lo largo de esta sección vamos a considerar

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \end{aligned}$$

un polinomio de grado  $n \geq 2$ , donde  $a_j \in \mathbb{C}$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Más adelante veremos que, haciendo pequeñas modificaciones, esta teoría sigue siendo cierta si  $f$  es una función racional definida en el plano complejo ampliado de la forma

$$f(z) = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios.

Denotaremos por  $f^k$  a la  $k$ -ésima composición de la función  $f$ ,  $f \circ \dots \circ f$ . Así,

$$f^k(z) = f(f(\dots(f(z))\dots))$$

es la  $k$ -ésima iteración de  $f$  en  $z$ .

Los conjuntos de Julia se pueden definir en términos del comportamiento de las iteraciones de  $f^k(z)$  para un  $k$  suficientemente grande.

**Definición 1.1.1.** Sea  $f$  un polinomio. El conjunto de Julia relleno de  $f$ , denotado por  $K(f)$ , es el conjunto de puntos del plano complejo donde la sucesión de iteraciones de  $f$  no tiende a infinito, esto es,

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\rightarrow \infty\}.$$

Así, definimos el conjunto de Julia de  $f$ , denotado por  $J(f)$ , como la frontera del conjunto de Julia relleno de  $f$ , esto es,

$$J(f) = \partial K(f).$$

De esta definición deducimos que  $z \in J(f)$  si existe un entorno  $V$  de  $z$  donde encontramos dos puntos  $u, v \in V$  tales que

$$f^k(u) \rightarrow \infty \text{ y } f^k(v) \not\rightarrow \infty.$$

Para simplificar la notación, escribiremos  $K$  y  $J$  en lugar de  $K(f)$  y  $J(f)$  respectivamente cuando la función esté clara.

Vamos a definir algunos conceptos para polinomios que en los capítulos siguientes generalizaremos para el caso de las funciones racionales:

**Definición 1.1.2.** Sean  $f$  un polinomio y  $w$  un punto de  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $w$  es un punto fijo de  $f$  si

$$f(w) = w.$$

En el caso en el que  $w$  satisfaga la igualdad

$$f^p(w) = w$$

para algún  $p \geq 1$ , decimos que  $w$  es un punto periódico de  $f$  de período  $p$ . Así,

$$w, f(w), \dots, f^p(w)$$

es una órbita de período  $p$ .

**Definición 1.1.3.** Sean  $f$  un polinomio y  $w \in \mathbb{C}$  un punto periódico de período  $p$  tal que la derivada de la  $p$ -ésima iteración de  $f$  evaluada en  $w$  es igual a  $\lambda$ ,

$$(f^p)'(w) = \lambda.$$

Decimos que  $w$  es un punto atractivo de  $f$  si  $0 \leq |\lambda| < 1$ . Así,  $w$  será un punto no atractivo de  $f$  si  $|\lambda| > 1$ .



El estudio de sucesiones  $\{f^k(z)\}_{k \geq 0}$  variando el punto inicial  $z$  entra dentro del campo de estudio de las dinámicas complejas.

El siguiente resultado nos va a ser de gran utilidad a la hora de determinar si una sucesión de iteradas converge a infinito, ayudándonos así a determinar qué puntos del plano complejo se quedan fuera del conjunto de Julia relleno.

**Lema 1.1.4.** *Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio de la forma*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

donde  $a_n \neq 0$  y  $n \geq 2$ . Entonces, existe un número  $r$  positivo tal que si  $|z| \geq r$ , entonces

$$|f(z)| \geq 2|z|.$$

En particular, si  $|f^m(z)| \geq r$  para algún  $m \geq 0$ , entonces

$$f^k(z) \rightarrow \infty$$

si  $k \rightarrow \infty$ . Por tanto, o bien  $f^k(z) \rightarrow \infty$  o bien el conjunto  $\{f^k(z): k = 0, 1, 2, \dots\}$  está acotado.

*Demostración.* Sea  $z$  un punto del plano complejo. Tomamos  $r > 0$  tal que si  $|z| \geq r$ , entonces

$$\frac{1}{2} |a_n| |z|^n \geq 2|z| \tag{1.1}$$

y, por tanto,

$$|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_1| |z| + |a_0| \leq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n.$$

Esta última desigualdad se verifica pues dividiendo por  $|z|^n$  a ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos

$$\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n} \leq \frac{1}{2} |a_n|,$$

pues,

$$\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n} \rightarrow 0$$

cuando  $|z| \rightarrow \infty$ , mientras que  $\frac{1}{2} |a_n| > 0$ .

Luego, si  $|z| \geq r$ , entonces

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |a_n| |z|^n - \left( |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_1| |z| + |a_0| \right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Esto es consecuencia de la desigualdad triangular, pues ésta nos asegura que:

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - \left(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo (1.1) en (1.2), llegamos a la expresión que buscábamos:

$$|f(z)| \geq |a_n||z|^n - \frac{1}{2}|a_n||z|^n = \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|.$$

Para probar la segunda parte de este Lema, razonamos por inducción: tenemos que si  $|f^m(z)| \geq r$  para algún  $m \geq 0$ , entonces

$$|f^{m+1}(z)| = |f(f^m(z))| \geq 2|f^m(z)| \geq 2r \geq r.$$

Supongamos que

$$|f^{m+k-1}(z)| \geq 2^{k-1}|f^m(z)|, \quad (1.3)$$

si  $|f^m(z)| \geq r$  para algún  $m \geq 0$ , donde  $k \geq 1$ . Veamos qué ocurre en la  $(m+k)$ -ésima iteración: si  $|f^m(z)| \geq r$  para algún  $m \geq 0$ , entonces

$$|f^{m+k}(z)| = |f(f^{m+k-1}(z))| \geq 2|f^{m+k-1}(z)| \geq 2^{1+k-1}|f^m(z)| = 2^k|f^m(z)| \geq 2^k r.$$

De este modo, concluimos que si  $|f^m(z)| \geq r$  para algún  $m \geq 0$ , entonces

$$f^k(z) \longrightarrow \infty$$

si  $k \rightarrow \infty$ .

□

El siguiente resultado recoge algunas observaciones sobre la estructura de los conjuntos  $J$  y  $K$  de un polinomio.

**Proposición 1.1.5.** *Sea  $f$  un polinomio. Entonces, el conjunto de Julia relleno,  $K(f)$ , y el conjunto de Julia,  $J(f)$ , son compactos no vacíos tales que*

$$J(f) \subset K(f).$$

*Además, el interior del conjunto de Julia es vacío.*

*Demostración.* En el Lema 1.1.4 hemos probado que existe  $r > 0$  tal que si  $|f^m(z)| \geq r$  para algún  $m > 0$  entonces  $f^k(z) \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, sabemos que

$$z \in K \iff f^k(z) \not\rightarrow \infty.$$

Deducimos así que  $K$  está contenido en la bola de radio  $r$  centrada en el origen. En particular,

$$J = \partial K \subset B(0, r).$$

Luego, tanto  $K$  como  $J$  están acotados.

Vamos a ver que  $J$  y  $K$  también son cerrados: sea  $z \in \mathbb{C} \setminus K$ . Entonces,

$$f^k(z) \longrightarrow \infty$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ , esto es, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f^k(z)| > r,$$

para todo  $k \geq m$ . Es un hecho conocido que la composición de polinomios da lugar a otro polinomio. Luego,  $f^m$ ,  $m \geq 0$ , es un polinomio y, por tanto,  $f^m$  es continua en  $z$ . Entonces, existe  $\rho > 0$  tal que

$$|f^m(w)| > r,$$

para todo  $w \in B(z, \rho)$ . Aplicando de nuevo el Lema 1.1.4 llegamos a que

$$f^k(w) \longrightarrow \infty$$

cuando  $k \rightarrow \infty$  y, por tanto,  $w \notin K$ . Deducimos así que el complementario de  $K$  es un conjunto abierto y, por tanto,  $K$  es cerrado.

Siguiendo el mismo razonamiento tenemos que el conjunto de Julia de  $f$ ,  $J(f)$ , también es cerrado pues su complementario

$$J^c = \overset{\circ}{K} \cup (\mathbb{C} \setminus K),$$

donde  $\overset{\circ}{K}$  denota el interior de  $K$ , es abierto (el interior de  $K$  es abierto por definición y el complementario de  $K$  acabamos de ver que también lo es).

Concluimos así que tanto  $K(f)$  como  $J(f)$  son conjuntos compactos pues son cerrados y acotados. Además,

$$J(f) = \partial K(f) \subset K(f).$$

Por otro lado, vamos a probar que el interior del conjunto de Julia de un polinomio es vacío, esto es, que

$$\overset{\circ}{J}(f) = \emptyset.$$

Para ello, el primer paso es comprobar que

$$J(f) \neq \emptyset.$$

La ecuación  $f(z) = z$  tiene, al menos, una solución,  $z_0$ . Entonces,  $z_0$  es un punto fijo de  $f$  y se verifica la igualdad:

$$f^k(z_0) = z_0,$$

para todo  $k$ . Luego  $z_0 \in K$  y  $K$  es no vacío.

Ahora, tomamos,  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus K$ . Entonces, existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que el punto situado sobre el segmento que une  $z_0$  y  $z_1$

$$\lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1,$$

pertenece a la frontera de  $K$ . Para determinar el valor de  $\lambda$  adecuado, escogemos

$$\lambda_0 = \inf_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\lambda: \lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1 \in K\}.$$

De este modo,

$$\lambda_0 z_0 + (1 - \lambda_0)z_1,$$

pertenece a la frontera de  $K$  y, por tanto, a  $J$ . Luego  $J(f) \neq \emptyset$ .

Finalmente, vamos a probar que el interior del conjunto de Julia sí es vacío. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que el interior del conjunto de Julia de  $f$  no es vacío, esto es,

$$\overset{\circ}{J}(f) \neq \emptyset.$$

Entonces, existe un abierto no vacío  $U \subset J$ . A su vez,  $U \subset K$ , luego, como  $K$  es cerrado,

$$U \subset \overset{\circ}{K}.$$

Pero la intersección del interior de  $K$  con el conjunto de Julia es vacía, luego, en particular,

$$U \cap J = \emptyset.$$

Hemos llegado a una contradicción pues partíamos de que  $\emptyset \neq U \subset J$ .

□

**Proposición 1.1.6.** Sean  $f$  un polinomio y  $J = J(f)$  su conjunto de Julia. Se verifica:

$$f^{-1}(J) = J = f(J).$$

*Demostración.* Estudiamos los dos casos por separado:

i).  $f(J) \subset J \subset f^{-1}(J)$ . Sea  $z \in J$ . Entonces,

$$f^k(z) \not\rightarrow \infty,$$

si  $k \rightarrow \infty$ . En particular, se verifica

$$f^k(f(z)) \not\rightarrow \infty$$

si  $k \rightarrow \infty$ . Como  $z \in J = \partial K$ , podemos encontrar una sucesión  $(w_n)$  tal que:

$$w_n \rightarrow z, \text{ si } n \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

y

$$f^k(w_n) \rightarrow \infty, \text{ si } k \rightarrow \infty, \text{ para todo } n. \quad (1.5)$$

Por (1.4), tenemos que  $f(w_n) \rightarrow f(z)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  pues  $f$  es una función continua y podemos considerar la sucesión  $\{f(w_n)\}_n$ ; y por (1.5) tenemos que  $f^k(f(w_n)) \rightarrow \infty$ , si  $k \rightarrow \infty$ . Luego,  $f(z) \in J(f)$ . Como este razonamiento es válido para cualquier  $z \in J(f)$ , concluimos que

$$f(J) \subset J$$

y, por tanto,

$$J \subset f^{-1}(f(J)) \subset f^{-1}(J).$$

ii).  $f^{-1}(J) \subset J \subset f(J)$ . Análogamente al caso anterior, tomamos  $z \in J$ . Entonces,  $f^k(z) \not\rightarrow \infty$  y existe una sucesión  $(w_n)$  tal que  $w_n \rightarrow z$ , si  $n \rightarrow \infty$  y, para todo  $n$ ,  $f^k(w_n) \rightarrow \infty$ , si  $k \rightarrow \infty$ .

Ahora bien, si  $f(z_0) = z$  para algún  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces existe una sucesión  $(v_n)$  tal que

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow z_0 \text{ si } n \rightarrow \infty \text{ y} \\ f(v_n) &= w_n. \end{aligned}$$

La última igualdad la tenemos pues  $f$  es una función continua que verifica:

$$f(v_n) \rightarrow f(z_0), \text{ si } n \rightarrow \infty;$$

$f(z_0) = z$  y  $w_n \rightarrow z$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, como  $f^k(z_0) = f^{k-1}(z)$  y  $f^{k-1}(z) \not\rightarrow \infty$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces

$$f^k(z_0) \not\rightarrow \infty,$$

si  $k \rightarrow \infty$ ; y como  $f^k(v_n) = f^{k-1}(w_n)$  y  $f^{k-1}(w_n) \rightarrow \infty$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces

$$f^k(v_n) \rightarrow \infty,$$

si  $k \rightarrow \infty$ . Por tanto  $z_0 \in J$ .

Hemos llegado a que, para todo  $z \in J$ ,

$$z_0 = f^{-1}(z) \in J.$$

Luego,  $f^{-1}(J) \subset J$  y finalmente,  $J = f(f^{-1}(J)) \subset f(J)$ .

□

**Proposición 1.1.7.** *Sea  $f$  un polinomio de grado mayor o igual que 2. Entonces,*

$$J(f^p) = J(f),$$

*para todo  $p$  entero positivo.*

*Demostración.* Por el Lema 1.1.4 de esta sección sabemos que, tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$f^k(z) \rightarrow \infty \iff (f^p)^k(z) = f^{pk}(z) \rightarrow \infty.$$

De este modo, tenemos que el conjunto complementario de  $K(f)$  coincide con el complementario de  $K(f^p)$ . Entonces,

$$K(f) = K(f^p).$$

En particular, también coinciden sus fronteras y podemos concluir que:

$$J(f) = J(f^p).$$

□

Para las siguientes definiciones vamos a considerar  $U$  un abierto del plano complejo y  $\mathcal{G} = \{g_k\}$  una familia de funciones analíticas, tales que

$$g_k: U \rightarrow \mathbb{C},$$

y  $k = 1, 2, \dots$ . Además, pondremos en práctica algunas nociones de Análisis Complejo que se estudian en la asignatura de Variable Compleja, como los conceptos relacionados con el estudio de la convergencia de funciones complejas.

**Definición 1.1.8.** Decimos que la familia de funciones  $\mathcal{G}$  es normal en  $U$  si toda sucesión de funciones de  $\mathcal{G}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos de  $U$  o bien a una función analítica acotada o bien a  $\infty$ .

**Definición 1.1.9.** La familia de funciones  $\mathcal{G}$  es normal en un punto  $w \in U$  si existe un abierto  $V$  tal que  $w \in V$  y  $\mathcal{G}$  es normal en  $V$ .

Del siguiente Teorema tan solo vamos a escribir el enunciado pues su demostración se sale de los límites de este trabajo. Sin embargo, su presencia va a ser fundamental a lo largo de este capítulo.

**Teorema 1.1.10.** (Teorema de Montel). Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $\{g_k\}$  una familia de funciones complejas analíticas sobre  $U$ . Si  $\{g_k\}$  no es una familia normal entonces, para todo  $w \in \mathbb{C}$  con, a lo más, una excepción, se verifica la igualdad:

$$g_k(z) = w,$$

para algún  $z \in U$  y algún  $k$ .

*Demostración.* Poner referencia. □

El Teorema 1.1.10 nos proporciona una caracterización directa de los conjuntos de Julia:

**Proposición 1.1.11.**

$$J(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la familia } \{f^k\} \text{ no es normal en } z \right\}. \quad (1.6)$$

*Demostración.* Sea  $z \in J$ . Entonces,  $f^k(z) \not\rightarrow \infty$  si  $k \rightarrow \infty$ ; y para todo  $V$  entorno de  $z$ , existe una sucesión  $(w_n) \subset V$  tal que

$$\begin{aligned} w_n &\longrightarrow z, \text{ si } n \rightarrow \infty, \text{ y} \\ f^k(w_n) &\longrightarrow \infty \text{ si } k \rightarrow \infty, \text{ para todo } n. \end{aligned}$$

Luego, ninguna subsucesión de  $\{f^k\}$  converge uniformemente en  $V$  y, por tanto, la familia  $\{f^k\}$  no es normal en  $z$ .

Veamos la otra contención: sea  $z \in \mathbb{C} \setminus J$ . Distinguimos dos casos:

- 1).  $z \in \overset{\circ}{K}$ . En este caso, si consideramos cualquier abierto  $V$  tal que  $V \subset \overset{\circ}{K}$  y  $z \in V$ , entonces  $f^k(w) \in K$ , para todo  $w \in V$  y para todo  $k$ . Así, aplicando el Teorema 1.1.10 deducimos que la familia  $\{f^k\}$  es normal en  $w$ .

II).  $z \in \mathbb{C} \setminus K$ . Si aplicamos el Lema 1.1.4 tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $|f^k(z)| > r$  para algún  $k$ . Luego,  $|f^k(w)| > r$ , para todo  $w \in V$ , donde  $V$  es un entorno de  $z$ . Así, por el lema mencionado anteriormente, concluimos que  $f^k(w) \rightarrow \infty$  uniformemente en  $V$  y, por tanto, la familia  $\{f^k\}$  es normal en  $w$ .

□

*Nota.* Es habitual a la hora de profundizar en el estudio de los conjuntos de Julia, encontrarnos la expresión dada en (1.6) como la propia definición de conjunto de Julia.

Nuestro objetivo a partir de este momento es probar que podemos caracterizar los conjuntos de Julia,  $J(f)$ , como la clausura de los puntos periódicos no atractivos de  $f$ . Antes de ello, presentaremos algunas propiedades interesantes de los conjuntos de Julia relacionadas con este tema.

**Lema 1.1.12.** Sean  $f$  un polinomio,  $w \in J(f)$  y  $U$  un entorno de  $w$ . Entonces, para cada  $j = 1, 2, \dots$ , el conjunto

$$W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$$

es o bien el plano complejo, o bien el plano complejo menos un único punto, que llamaremos punto excepcional. Además, tal punto es excepcional independientemente de  $w$  y  $U$  y no pertenece a  $J(f)$ .

*Demostración.* Tenemos que probar cuatro cosas:

$$\text{I). } W = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \begin{cases} \mathbb{C}. \\ \mathbb{C} \setminus \{v\}. \end{cases}$$

II).  $v \notin J$ .

III).  $v$  es independiente de  $w \in J(f)$ .

IV).  $v$  es independiente del entorno de  $w$ ,  $U$ .

En primer lugar, sea  $w \in J(f)$ . Sabemos por la Proposición 1.1.11 que, en este caso, la familia de funciones  $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$  no es normal en  $w$ . Luego, aplicando el Teorema 1.1.10, deducimos I).

Para continuar tomamos  $v \in \mathbb{C} \setminus W$ . Tenemos que  $f(W) \subset W$ , pues:

$$W = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U),$$



para cada  $j = 1, 2, \dots$ . Así,

$$\begin{aligned} f(W) &= f\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)\right) = f(f^j(U) \cup f^{j+1}(U) \cup \dots) = \\ &= f^{j+1}(U) \cup f^{j+2}(U) \cup \dots = \bigcup_{k=j+1}^{\infty} f^k(U) \subset W, \end{aligned}$$

para cada  $j = 1, 2, \dots$ . Como hemos tomado  $v \in \mathbb{C} \setminus W$ , tenemos que si existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = v$ , entonces  $f(z) \notin W$ . Acabamos de ver que  $f(W) \subset W$ , luego  $f(z) \notin f(W)$  y, por tanto,  $z \notin W$ . Por 1), sabemos que  $\mathbb{C} \setminus W$  tiene, a lo más, un punto y, como  $v \in \mathbb{C} \setminus W$ , entonces  $z = v$ .

Tenemos pues que  $f$  es un polinomio de grado  $n$  tal que la única solución de la ecuación  $f(z) - v = 0$  es  $z = v$ , donde estamos considerando  $z$  como una variable. Por tanto,

$$f(z) - v = c(z - v)^n,$$

para alguna constante  $c \in \mathbb{C}$ .

Si tomamos  $z$  suficientemente cerca de  $v$  entonces,

$$f^k(z) - v \rightarrow 0,$$

si  $k \rightarrow \infty$ . Además, podemos encontrar un entorno de  $v$  suficientemente pequeño donde la convergencia de la sucesión anterior es uniforme. Por tanto, la familia de funciones  $\{f^k\}$  es normal en  $v$  y podemos concluir así que  $v \notin J$ . Con esto hemos probado II).

Finalmente, hemos visto que  $v$  únicamente depende de  $f$ , luego, también se verifican III). y IV).

□

El siguiente resultado tiene gran importancia práctica pues constituye la base de muchas imágenes de los conjuntos de Julia hechas a ordenador.

**Corolario 1.1.13.** *Sea  $f$  un polinomio:*

- a). *Para todo  $z \in \mathbb{C}$  con, a lo más, una excepción se verifica: si  $U$  es un abierto de  $\mathbb{C}$  tal que  $U \cap J(f) \neq \emptyset$ , entonces existen infinitos valores de  $k \in \mathbb{N}$  tales que la intersección*

$$f^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset.$$

b). Sea  $z \in J(f)$ . Se verifica la igualdad:

$$J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}.$$

Esto es,  $J(f)$  es la clausura del conjunto  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ .

*Demostración.* a). Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un abierto tal que  $U \cap J \neq \emptyset$ . Entonces,  $U$  es entorno de algún punto de  $J$  y verifica el Lema 1.1.12. Éste nos asegura que

$$\bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$$

es el plano complejo  $\mathbb{C}$  salvo, a lo más, un punto. Luego, si  $z$  no es el punto excepcional del que hablábamos en el Lema 1.1.12, entonces para cada  $j = 1, 2, \dots$

$$z \in \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U).$$

Por tanto,  $z \in f^k(U)$  para infinitos valores de  $k$ ; y, para todos ellos,  $f^{-k} \cap U \neq \emptyset$ .

b). Si  $z \in J(f)$ , entonces aplicamos la Proposición 1.1.6 para deducir que

$$f^{-k}(z) \in J,$$

para todo  $k$ . Luego,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset J(f).$$

En la Proposición 1.1.5 hemos probado que  $J(f)$  es un conjunto cerrado, por tanto,

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset J(f).$$

Veamos ahora la otra contención: sean  $z \in J(f)$  y  $U$  un abierto tal que  $U \cap J \neq \emptyset$ . Entonces, por el apartado anterior, tenemos que

$$f^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$$

para infinitos valores de  $k$ . Por tanto,

$$J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}.$$

□

**Proposición 1.1.14.** *Sea  $f$  un polinomio. Entonces,  $J(f)$  es un conjunto perfecto (cerrado y sin puntos aislados) y, por tanto, no numerable.*

*Demostración.* Sean  $v \in J(f)$  y  $U \subset \mathbb{C}$  un entorno de  $v$ . Vamos a probar que la intersección  $(U \setminus \{v\}) \cap J$  no es vacía. Para ello, distinguimos tres casos:

- i). El punto  $v$  no es un punto fijo ni periódico de  $f$ . Aplicando el apartado b). del Corolario 1.1.13 y la Proposición 1.1.6 tenemos que  $U$  contiene un punto de  $f^{-k}(v) \subset J$  para algún  $k \geq 1$  y, este punto, debe ser distinto de  $v$ , pues  $v$  no es un punto fijo ni periódico de  $f$ . Por tanto,  $U \setminus \{v\}$  contiene algún punto de  $J$ .
- ii). El punto  $v$  es un punto fijo de  $f$ , esto es,  $f(v) = v$ . Si la ecuación

$$f(z) = v$$

tuviera como única solución  $z = v$  entonces, razonando como en la prueba del Lema 1.1.12, llegaríamos a que  $v \notin J(f)$ . Hemos llegado a una contradicción pues  $v \in J(f)$ . Por tanto, existe  $w \in \mathbb{C} \setminus \{v\}$  tal que  $f(w) = v$ . Aplicando de nuevo el apartado b). del Corolario 1.1.13, tenemos que  $U$  contiene un punto  $u$  que pertenece a

$$f^{-k}(w) = f^{-k-1}(v)$$

para algún  $k \geq 1$ . La Proposición 1.1.6 nos asegura que cualquier punto de ese tipo, pertenece también a  $J(f)$ . Además,  $u$  es distinto de  $v$  pues

$$f^k(v) = v \neq w = f^k(u).$$

Por tanto,  $U \setminus \{v\}$  contiene algún punto de  $J(f)$ .

- iii). El punto  $v$  es un punto periódico de  $f$  de período  $p > 1$ , esto es,  $f^p(v) = v$  para algún  $p > 1$ . La Proposición 1.1.7 nos asegura que  $J(f) = J(f^p)$  para todo  $p \geq 1$ . Luego, aplicando el apartado anterior de esta demostración a la función  $f^p$ , concluimos que  $U \setminus \{v\}$  también contiene puntos de  $J(f^p) = J(f)$ .

Luego, dado un punto  $v \in J(f)$ , cualquier entorno  $U$  de  $v$  contiene algún punto de  $J(f)$  distinto de  $v$ , esto es,  $J(f)$  no tiene puntos aislados. Además, hemos visto en la Proposición 1.1.5 que  $J(f)$  es un conjunto cerrado. Concluimos así que  $J(f)$  es un conjunto perfecto. Finalmente, sabemos por Topología que todo conjunto perfecto es no numerable.  $\square$

Con el siguiente resultado vamos a probar el que ha sido nuestro objetivo durante las últimas páginas:

**Teorema 1.1.15.** *Sea  $f$  un polinomio. El conjunto de Julia de  $f$  es la clausura de los puntos periódicos no atractivos de  $f$ .*

*Demostración.* Sea  $w \in \mathbb{C}$  un punto no atractivo periódico de  $f$  de período  $p$ . Entonces,

$$f^p(w) = w \quad \text{y} \quad |(f^p)'(w)| > 1.$$

Llamamos  $g = f^p$ . Así,  $w$  es un punto fijo no atractivo de  $g$ . Consideramos la familia de funciones  $\{g^k\}$  y razonamos por reducción al absurdo: supongamos que  $\{g^k\}$  es normal en  $w$ . Entonces,  $w$  tiene un entorno  $V$  donde cualquier subsucesión  $\{g^{k_i}\}$  de funciones de  $\{g^k\}$  converge uniformemente en compactos a una función analítica acotada,  $g_0$ . No puede converger a infinito pues  $g^k(w) = w$  para todo  $k \geq 1$ . Aplicando el Teorema de Weierstrass estudiado en la asignatura Variable Compleja, sabemos que la sucesión de las derivadas de  $\{g^{k_i}\}$  converge uniformemente en los compactos de  $V$  a la derivada de  $g_0$ , esto es, para todo  $z \in V$ ,

$$\left(g^{k_i}(z)\right)' \longrightarrow g_0'(z),$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ . Sin embargo, la Regla de la Cadena nos asegura que

$$\left|\left(g^{k_i}(w)\right)'(w)\right| = \left|(g'(w))^{k_i}\right| \longrightarrow \infty,$$

cuando  $k_i \rightarrow \infty$ , pues  $w$  es un punto fijo no atractivo de  $g$  y  $|g'(w)| > 1$ . Esto contradice el hecho de que  $g_0'(w)$  sea una función analítica acotada. Por tanto, la familia de funciones  $\{g^k\}$  no es normal en  $w$ . Aplicando la Proposición 1.1.11 tenemos que,

$$w \in J(g) = J(f^p).$$

Además, la Proposición 1.1.7 nos asegura que  $J(f) = J(f^p)$ , para todo  $p \geq 1$ . Luego,  $w \in J(f)$ .

Tenemos pues que todo punto  $w \in \mathbb{C}$  periódico no atractivo de  $f$  pertenece a  $J(f)$ , esto es, el conjunto de puntos del plano complejo que son periódicos y no atractivos de  $f$  está contenido en  $J(f)$ . Como  $J(f)$  es un conjunto cerrado entonces, la clausura del conjunto de puntos periódicos no atractivos de  $f$  también está contenida en  $J(f)$ .

Por otro lado, consideramos el conjunto

$$E = \{w \in J(f) : \text{existe } v \neq w \text{ con } f(v) = w \text{ y } f'(v) \neq 0\}$$

y tomamos un punto  $w \in E$ . Entonces, existe  $V \subset \mathbb{C}$  entorno de  $w$  donde podemos encontrar una función analítica  $f^{-1}: V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$  tal que

$$f^{-1}(w) = v \neq w$$

(simplemente escogemos valores de  $f^{-1}(z)$  de manera continua). Ahora, definimos una familia de funciones analíticas definidas sobre  $V$ ,  $\{h_k\}$ , donde

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$$

y  $V$  es un entorno de  $w$  suficientemente pequeño de modo que  $f^{-1}(z) - z \neq 0$  para todo  $z \in V$ . Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un abierto tal que  $w \in U$  y  $U \subset V$ . Así,  $U$  es un entorno de  $w$  contenido en  $V$ . Como  $w \in J(f)$ , la familia  $\{f^k\}$  no es normal en  $U$ . Entonces, la familia de funciones  $\{h_k\}$  tampoco es normal en  $U$ . Así, aplicando el Teorema 1.1.10, sabemos que para todo  $w \in \mathbb{C}$  salvo, a lo más, un punto, existen  $z \in U$  y  $k \geq 1$  tales que  $h_k(z) = w$ . En particular, sabemos que la función  $h_k(z)$  toma o bien el valor 0 o bien el valor 1 para algún valor de  $z \in U$  y  $k \geq 1$ . En el primer caso,  $h_k(z) = 0$  para algún  $z \in U$  y algún  $k \geq 1$  se verifica:

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z} = 0.$$

Despejando en la igualdad anterior obtenemos que  $f^k(z) = z$ , esto es,  $z$  es un punto periódico de  $f$ .

En el segundo caso,  $h_k(z) = 1$  para algún  $z \in U$  y  $k \geq 1$ , tenemos que:

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z} = 1.$$

Despejando adecuadamente llegamos a que:  $f^k(z) = f^{-1}(z)$ . Luego,  $f^{k+1}(z) = z$  y también así  $z$  es un punto periódico de  $f$ . En cualquiera de los dos casos  $z$  es un punto periódico de  $f$ . Por tanto,  $U$  contiene un punto periódico de  $f$  y  $w$  está en la clausura de los puntos periódicos no atractivos de  $f$ , para todo  $w \in E$ .

Como  $f$  es un polinomio,  $E$  contiene todos los puntos de  $J(f)$  salvo un número finito de puntos. Sabemos por la Proposición 1.1.14 que  $J(f)$  no contiene puntos aislados. Entonces,  $J(f) \subset \overline{E}$  y  $\overline{E}$  está contenido en la clausura del conjunto de puntos periódicos no atractivos de  $f$ .

□

## 1.2. Funciones cuadráticas. El conjunto de Mandelbrot.

En esta sección nos dedicaremos a estudiar los conjuntos de Julia de polinomios cuadráticos. Aunque no será hasta la sección 4 del Capítulo 2 cuando definiremos formalmente el concepto de conjugación, se verifica que todos los polinomios de grado 2 son conjugados de algún polinomio de esta forma:

$$f_c(z) = z^2 + c, \quad (1.7)$$

donde  $c \in \mathbb{C}$  es una constante. Por ahora, podemos decir que dos polinomios de grado dos,  $f$  y  $g$ , son conjugados si existe una aplicación lineal  $h$  de la forma

$$h(z) = \alpha z + \beta,$$

donde  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\beta \in \mathbb{C}$ , tal que

$$g = h^{-1}fh,$$

donde  $h^{-1}fh = h^{-1} \circ f \circ h$ . De este modo, si consideramos la composición  $h^{-1}f_c h$ , tenemos que

$$(h^{-1}f_c h)(z) = h^{-1}(f_c(h(z))) = \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}$$

y, escogiendo valores adecuados de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c$  podemos escribir todos los polinomios cuadráticos. Luego, estudiando los polinomios de la forma (1.7) estamos realmente haciendo un estudio general.

Debemos tener en cuenta que la función inversa de  $f_c^{-1}(z)$  es de la forma:

$$f_c^{-1}(z) = \pm (z - c)^{\frac{1}{2}},$$

esto es, dado un  $z$ ,  $f_c^{-1}(z)$  nos devuelve dos valores, salvo que  $z = c$ . Llamamos ramas de  $f_c^{-1}(z)$  a cada uno de los posibles valores de  $f^{-1}(z)$ , para todo  $z \neq c$ . Por tanto, si  $U$  es un abierto tal que  $c \notin U$ , entonces  $f_c^{-1}(U)$  consta de dos partes. La función dada por  $f_c$  establece una biyección entre cada una de ellas y  $U$  de manera regular (en el sentido de diferenciabilidad).

**Definición 1.2.1.** *Definimos el conjunto de Mandelbrot como el conjunto de parámetros  $c$  donde el conjunto de Julia de la función dada por  $f_c$  es conexo, esto es,*

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo} \}.$$

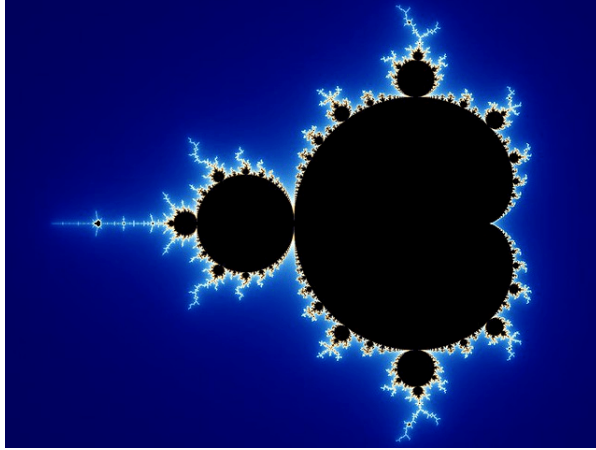


Figura 1.1: Conjunto de Mandelbrot.

En los siguientes resultados veremos que el conjunto de Mandelbrot nos proporciona información relevante acerca de la estructura de los conjuntos de Julia de polinomios cuadráticos. A lo largo de esta sección diremos que una *loop* es una curva regular (i.e. diferenciable), cerrada y simple (sin autointersecciones) definida en el plano complejo. Si  $\gamma$  es una *loop*, entonces nos referiremos a la componente conexa acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  como el interior de  $\gamma$  y a la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  como el exterior de  $\gamma$ .

**Lema 1.2.2.** Sean  $C$  una *loop* y  $c \in \mathbb{C}$ .

- a). Si  $c \in \mathbb{C}$  está en el interior de  $C$ , entonces  $f_c^{-1}(C)$  es una *loop*. Además,  $f_c$  establece una relación entre el interior de  $f_c^{-1}(C)$  y el interior de  $C$ ; y entre el exterior de  $f_c^{-1}(C)$  y el exterior de  $C$ .
- b). Si  $c \in \mathbb{C}$  pertenece al exterior de  $C$  entonces  $f_c^{-1}(C)$  contiene dos *loop* disjuntas tales que ninguna de ellas está contenida en la otra. Además,  $f_c$  transforma el interior de cada *loop*  $f_c^{-1}(C)$  en el interior de  $C$  y el exterior de ambas curvas en el exterior de  $C$ .

*Demostración.* Para cada  $c \in \mathbb{C}$  consideramos el polinomio de segundo grado:  $f_c(z) = z^2 + c$ . De esta forma, tenemos que:

$$f_c^{-1}(z) = \pm(z - c)^{\frac{1}{2}}$$

es su función inversa y

$$(f_c^{-1})'(z) = \pm \frac{1}{2}(z - c)^{-\frac{1}{2}}$$

su derivada. Ésta última está bien definida y es distinta de cero para todo  $z \neq c$ . Por tanto, si  $c \notin C$  y elegimos una de las dos ramas de  $f_c^{-1}$ , el conjunto  $f_c^{-1}(C)$  es localmente una curva regular.

Supongamos que  $c \notin C$ . Tomamos un punto inicial  $w \in C$  y consideramos los dos valores correspondientes de  $f_c^{-1}(w)$ :  $z_0$  y  $-z_0$ . Cada una de las ramas de  $f_c^{-1}(z)$  define una función continua y, si variamos  $z$  dentro de  $C$  de manera continua, las pre-imágenes correspondientes en cada una de las ramas también variarían de manera continua, trazando, a su vez dos, dos curvas que conforman la “imagen inversa” de  $C$ , que denotaremos por  $C^+$  y  $C^-$ . Éstas curvas son simétricas respecto al origen, esto es, se verifica:

$$u \in C^+ \iff -u \in C^-.$$

Cuando  $z$  recorre la curva completa,  $C$ , y vuelve al punto inicial,  $w$ , las curvas que conforman la imagen inversa de  $C$ ,  $C^+$  y  $C^-$  vuelven también a los puntos de partida:  $z_0$  y  $-z_0$ . Distinguiamos dos casos:

- a). La imagen inversa de  $C$  dada por la curva  $C^+$  tiene como punto inicial  $z_0$  y como punto final  $-z_0$  (y  $C^-$  lo contrario). De esta manera, si unimos ambas curvas obtenemos que  $f_c^{-1}(C)$  está compuesta por una única *loop*. Como  $f_c$  es una función continua que transforma  $f_c^{-1}(C)$  en  $C$  (y no más puntos), entonces el polinomio  $f_c$  transforma el interior y el exterior de  $f_c^{-1}(C)$  en el interior y exterior de  $C$  respectivamente. Además, como las curvas  $C^+$  y  $C^-$  con simétricas respecto al origen entonces, el origen, debe estar en el interior de  $f_c^{-1}(C)$  y, por tanto,  $c = f_c^{-1}(0)$  está en el interior de la curva  $C$ .
- b). La imagen inversa de  $C$  dada por la curva  $C^+$  empieza y termina en el punto  $z_0$  y  $C^-$  en  $-z_0$ . En este caso,  $C^+$  y  $C^-$  son dos *loops* disjuntas y simétricas respecto del origen. Entonces,  $f_c$  transforma el interior y el exterior de  $C^+$  y  $C^-$  en el interior y exterior de  $C$  respectivamente. A diferencia del caso anterior, ahora el origen no puede estar en ninguna de las curvas  $C^+$  ni  $C^-$  ni en sus interiores pues, en ese caso, el origen estaría dentro de las dos. Luego,  $c = f_c^{-1}(0)$  está en el exterior de  $C$ .

□

Siguiendo la notación del lema anterior, si  $c \in C$  entonces  $f_c^{-1}(C)$  es una curva regular y cerrada con un único punto de autointersección.

El siguiente teorema es conocido como el Teorema Fundamental del conjunto de Mandelbrot. Éste da una caracterización del conjunto de Mandelbrot,  $M$  a partir de las iteraciones de  $f_c$ :



**Teorema 1.2.3.** (Teorema Fundamental de Conjunto de Mandelbrot). Sea  $c \in \mathbb{C}$ . El conjunto de Julia  $J(f_c)$  es conexo si la sucesión dada por las iteraciones de  $f$ ,  $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^\infty$ , está acotada y es totalmente desconexo en otro caso. Entonces:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\} \quad (1.8)$$

$$= \left\{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k=1}^\infty \text{ está acotado}\right\} \quad (1.9)$$

$$= \left\{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \text{ si } k \rightarrow \infty\right\}. \quad (1.10)$$

*Demostración.* En primer lugar, veamos que 1.9 y 1.10 definen el mismo conjunto. Por el Lema 1.1.4 sabemos que

$$f_c^k \not\rightarrow \infty \iff \left\{f_c^k(0)\right\}_{k=1}^\infty \text{ está acotada.}$$

Luego, las definiciones 1.9 y 1.10 son equivalentes.

En segundo lugar, vamos a probar que los conjuntos 1.8 y 1.9 son iguales por doble contención.

$\square$  Empezamos viendo que si la sucesión dada por  $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^\infty$  está acotada entonces  $J(f_c)$  es conexo:

Sea  $C$  un círculo suficientemente grande tal que: todos los puntos de  $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^\infty$  estén en el interior de  $C$  y verifiquen:

$$f_c^k \rightarrow \infty,$$

si  $k \rightarrow \infty$  y  $f_c^{-1}(C)$  esté en el interior de  $C$ . Vamos a probar que la sucesión de *loops* dada por  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k=0}^\infty$  está contenida en  $J(f_c)$ . Como  $c = f_c(0)$  está en el interior de  $C$  entonces, aplicando el Lema 1.2.2,  $f_c^{-1}(C)$  es una *loop* contenida en el interior de  $C$ . Además, como  $f_c(c) = f_c^2(0)$  entonces  $c$  está en el interior de  $f_c^{-1}(C)$ .

De nuevo, aplicamos el Lema 1.2.2 y obtenemos que  $f_c^{-2}(C)$  es una *loop* contenida en el interior de  $f_c^{-1}(C)$ , donde  $c$  está en el interior de  $f_c^{-2}(C)$ . Si repetimos el proceso obtenemos que  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k=0}^\infty$  es una sucesión de *loops* encajadas, esto es, tenemos una sucesión de *loops* donde cada una está contenida en el interior de la *loop* anterior.

Sea  $K$  el conjunto cerrado de puntos tales que están sobre las *loops*  $f_c^{-k}(C)$  o en su interior, para todo  $k$ . Si  $z \in K$ , entonces  $f_c^k(z)$  se encuentra en el interior de  $C$ , para todo  $k$ . Por otro lado, si  $z \notin K$ , entonces  $z$  está en el exterior de  $f_c^{-k}(C)$  para algún  $k$ . En ese caso,  $f_c^k(z)$  está en el exterior de  $C$  y  $f_c^k \rightarrow \infty$ , si  $k \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $K$  es el conjunto relleno de  $f_c$ . Pero  $K$  es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos simplemente conexos (conjuntos conexos cuyo complementario en  $\mathbb{C}_\infty$  es conexo). Sabemos

que la intersección de conjuntos simplemente conexos es simplemente conexa. Luego  $K$  es un conjunto simplemente conexo y, por tanto, su frontera es conexa. Finalmente,

$$J(f_c) = \partial K$$

es un conjunto conexo.

□ En este caso, vamos a probar que si la sucesión dada por  $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$  no está acotada entonces  $J(f_c)$  no es conexo:

Razonamos análogamente al caso anterior. Sea  $C$  un círculo suficientemente grande tal que:  $f_c^{-1}(C)$  esté en el interior de  $C$ , todos los puntos de  $C$  verifican  $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ , si  $k \rightarrow \infty$  y ningún  $f_c^k(0)$  está sobre  $C$ . Sea  $p$  el menor entero tal que  $f_c^p(0)$  está en el exterior de  $C$ . Como en el caso anterior, consideramos la sucesión de *loops* dada por  $\{f_c^{-k}(C)\}$ , donde la  $k$ -ésima *loop* está contenida en el interior de la *loop*  $(k-1)$ . Sin embargo, el argumento del caso anterior no funciona cuando llegamos a la *loop*  $f_c^{1-p}(C)$ , pues  $c = f(0)$  está fuera de la *loop*  $f_c^{1-p}(C)$ . En este caso, aplicamos el segundo apartado del Lema 1.2.2. Tenemos así que  $f_c^{-p}(C)$  está compuesto por dos *loops* disjuntas que se encuentran en el interior de  $f_c^{1-p}(C)$ , donde  $f_c$  transforma el interior de esas *loops* en el interior de  $f_c^{1-p}(C)$ . Así, el conjunto de Julia de  $f_c$  se encuentra en el interior de esas *loops* pues, los puntos del exterior verifican la condición:

$$f_c^k(z) \rightarrow \infty, \text{ si } k \rightarrow \infty.$$

Sabemos por la proposición 1.1.6 que el conjunto de Julia de un polinomio es invariante por la inversa del polinomio, esto es,  $J(f_c) = f_c^{-1}(J(f_c))$ . Entonces,  $J(f_c)$  está contenido en ambas *loops* y, por tanto,  $J(f_c)$  no es conexo.

Si seguimos aplicando el segundo apartado del Lema 1.2.2 llegamos a que  $J(f_c)$  es un conjunto tipo Cantor, contenido en pares de *loops* disjuntas dentro de otras *loops*. Luego,  $J(f_c)$  es totalmente desconexo.

□

En la siguiente imagen, encontramos algunos ejemplos de conjuntos de Julia asociados a distintos valores de  $c$  situados en el conjunto de Mandelbrot.

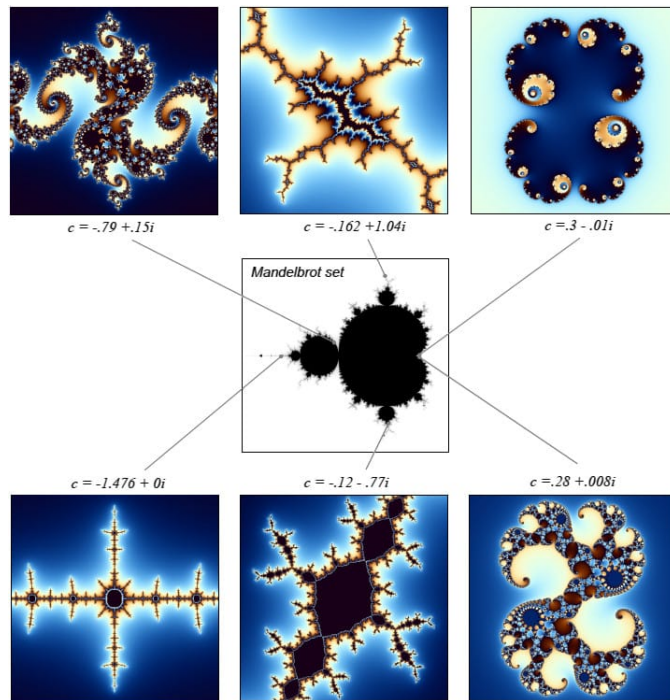


Figura 1.2: Conjuntos de Julia.

## Capítulo 2

# Funciones racionales

Las notas de este capítulo están sacadas del Capítulo 2 de [2].

### 2.1. El plano complejo ampliado.

Comenzamos esta sección definiendo la noción de plano complejo ampliado. Llamamos plano complejo ampliado o extendido a la unión del plano complejo  $\mathbb{C}$  con un único punto simbólico que denotamos  $\infty$ :

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Éste es un espacio topológico y podemos determinar su topología describiendo una base de entornos para cada punto. Para ello, distinguimos dos casos: si  $z \in \mathbb{C}$ , una base de entornos de  $z$  son los discos abiertos

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\},$$

donde  $r > 0$ . Para el punto  $\infty$ , una base de entornos son los conjuntos de la forma

$$\{|z| > r\} \cup \{\infty\},$$

donde  $r > 0$ . Esta topología induce la topología euclídea sobre  $\mathbb{C}$ .

La aritmética de  $\mathbb{C}$  se extiende a  $\mathbb{C}_\infty$  de la siguiente forma:  $a + \infty = \infty + a = \infty$  para todo  $a \in \mathbb{C}$ ; mientras que  $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$  para todo  $b \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ . Sin embargo,  $\infty - \infty$  y  $0 \cdot \infty$  no están definidos. También escribimos  $\frac{a}{0} = \infty$  para todo  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\frac{b}{\infty} = 0$  para todo  $b \in \mathbb{C}$ .

El siguiente paso es identificar  $\mathbb{C}$  con el plano horizontal

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Consideramos la esfera unidad centrada en el origen

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

y establecemos una biyección de la siguiente forma: para cada  $z = x + iy$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$ , ponemos

$$\Pi(z) = \Pi(x + iy) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1).$$

Además, para el punto  $\infty$ , ponemos

$$\Pi(\infty) = (0, 0, 1).$$

Geoméricamente, la explicación es la siguiente: dado un número complejo  $z = x + iy$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$ , lo identificamos con el punto  $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ . A continuación, trazamos la recta que pasa por ambos puntos:  $(0, 0, 1)$  y  $(x, y, 0)$ . Ésta recta corta a  $S^2$  en un único punto (distinto del punto  $(0, 0, 1)$ ):

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1),$$

precisamente, la imagen de  $z$  por  $\Pi$ . A la esfera  $S^2$  que está en biyección con  $\mathbb{C}_\infty$  la llamamos esfera compleja o de Riemann.

Ahora, usamos la biyección dada por  $\Pi$  definida de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $S^2$  para definir una distancia sobre  $\mathbb{C}_\infty$  alternativa a la euclídea: la distancia cordal, que denotaremos por la letra  $\sigma$ . Ésta se define del siguiente modo:

$$\sigma(z, w) = |\Pi(z) - \Pi(w)| = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}$$

y

$$\sigma(z, \infty) = |\Pi(z) - \Pi(\infty)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \sigma(z, w) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}},$$

donde  $z$  y  $w$  son puntos de  $\mathbb{C}$ . La distancia cordal entre los puntos  $\Pi(z)$  y  $\Pi(w)$  es, en realidad, la longitud (euclídea) del segmento que une ambos puntos. Además, la distancia cordal define una topología sobre  $\mathbb{C}_\infty$  que coincide con la que hemos descrito al comienzo de la sección. Esta métrica nos permite hablar, incluso, de distancia al infinito. Veamos algunas de sus propiedades más relevantes:

**Teorema 2.1.1.** *La distancia cordal satisface las siguientes propiedades:*

- I).  $\sigma(z, w) \leq 2$ , para todo  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ .
- II).  $\sigma(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}) = \sigma(z, w)$ , para todo  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ .

*Demostración.* i). La demostración de esta desigualdad es trivial, pues 2 es la mayor distancia euclídea entre dos puntos situados sobre la superficie de la esfera unidad.

ii). Sea  $z$  un punto de plano complejo  $\mathbb{C}$ . Distinguiamos tres casos: si  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  usamos la definición de distancia cordal para puntos del plano complejo:

$$\sigma\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \frac{2\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z}\right|^2} \sqrt{1 + \left|\frac{1}{w}\right|^2}} = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}.$$

Si  $w = 0$ , entonces

$$\sigma\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{0}\right) = \sigma\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z}\right|^2}} = \frac{2|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = \sigma(z, 0).$$

Por último, si  $w = \infty$ , entonces

$$\sigma\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\infty}\right) = \sigma\left(\frac{1}{z}, 0\right) = \frac{2\left|\frac{1}{z}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z}\right|^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} = \sigma(z, \infty).$$

□

Podemos entender la aplicación dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

como una aplicación definida de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , donde  $\frac{1}{0} = \infty$  y  $\frac{1}{\infty} = 0$ . Esta aplicación quedaría entonces definida sobre la esfera de Riemann y es, en realidad, una isometría para la distancia cordal (preserva  $\sigma$ -distancias), pues

$$\sigma\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \sigma(z, w)$$

para todo  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ .

Cualquier rotación  $\varphi$  sobre la esfera de Riemann  $S^2$  induce una aplicación sobre  $\mathbb{C}_\infty$  del siguiente modo:

$$\Pi^{-1} \circ \varphi \circ \Pi: \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

que podemos visualizar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}_\infty & \longrightarrow & \mathbb{C}_\infty \\
\Pi \downarrow & & \uparrow \Pi^{-1} \\
S^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^2
\end{array}$$

Esto es, dada una rotación de  $S^2$  obtenemos una aplicación definida de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Podemos considerar otra métrica alternativa, aunque equivalente, a la distancia cordal, sobre  $\mathbb{C}_\infty$ : la distancia esférica, que denotamos por  $\sigma_0$ . La distancia esférica entre dos elementos de  $\mathbb{C}_\infty$  se define como la longitud euclídea del camino más corto que une  $\Pi(z)$  con  $\Pi(w)$  sobre  $S^2$ , esto es, la menor longitud de la geodésica que une ambos puntos.

Si los segmentos que unen el origen con  $\Pi(z)$  y  $\Pi(w)$  respectivamente forman un ángulo  $\theta \in [0, \pi]$  en el origen, entonces

$$\sigma_0(z, w) = \frac{2\pi\theta}{2\pi} = \theta. \quad (2.1)$$

En este caso, la distancia cordal es

$$\sigma(z, w) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.2)$$

Podemos calcularla fácilmente pues calcular tal distancia es análogo a hallar la distancia en el plano cartesiano del punto  $(1, 0)$  al punto  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , donde  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Con esto, podemos relacionar ambas distancias, cordal y esférica. Sustituyendo (2.1) en (2.2) obtenemos:

$$\sigma(z, w) = 2 \sin\left(\frac{\sigma_0(z, w)}{2}\right).$$

Además, partiendo de la desigualdad trigonométrica:

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.3)$$

llegamos a una desigualdad que nos será de utilidad más adelante:

**Teorema 2.1.2.** *Las distancias cordal y esférica satisfacen la siguiente relación:*

$$\frac{2}{\pi}\sigma_0(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq \sigma_0(z, w), \quad (2.4)$$

para todo  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ .

*Demostración.* Sean  $z$  y  $w$  dos puntos de  $\mathbb{C}_\infty$ . Como  $0 \leq \sigma_0(z, w) \leq \pi$ , tenemos que

$$0 \leq \frac{\sigma_0(z, w)}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sustituyendo esto en (2.3) obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{2}{\pi} \frac{\sigma_0(z, w)}{2} \leq \sin\left(\frac{\sigma_0(z, w)}{2}\right) \leq \frac{\sigma_0(z, w)}{2}. \quad (2.5)$$

Como

$$2 \sin\left(\frac{\sigma_0(z, w)}{2}\right) = \sigma(z, w),$$

podemos sustituir esta relación en (2.5) y multiplicar todo por 2 para finalmente obtener:

$$\frac{2}{\pi} \sigma_0(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq \sigma_0(z, w).$$

□

Una consecuencia directa del Teorema 2.1.2 es que las distancias cordal y esférica son equivalentes sobre  $\mathbb{C}_\infty$ .

Terminamos esta sección con una definición:

**Definición 2.1.3.** *Longitud esférica.*

Sea  $\gamma$  una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . Llamamos longitud esférica de  $\gamma$  a la integral

$$\int_a^b \frac{2}{1 + |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt. \quad (2.6)$$

## 2.2. Funciones racionales.

En esta sección vamos a aclarar algunas generalidades sobre las funciones racionales que serán fundamentales para el desarrollo del trabajo. Nuestro objetivo es poder trabajar con ellas en  $\mathbb{C}_\infty$ , tratando al  $\infty$  como un punto más del dominio y del rango.

Una función racional es una función de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios no nulos, pues si  $P = 0$  o  $Q = 0$ , entonces  $R$  sería la función constante 0 y  $\infty$  respectivamente. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $P$  y  $Q$  son polinomios primos entre sí pues, en otro caso, podríamos eliminar los factores comunes y considerar  $R$  ya despejada. Si  $Q(z) = 0$  para algún valor de  $z$  y  $P$  no es el polinomio constante cero, entonces diremos que

$$R(z) = \infty.$$



Por otro lado, definimos  $R(\infty)$  como el límite de  $R(z)$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , esto es,

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z).$$

Así, las funciones racionales son funciones definidas de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

**Definición 2.2.1.** Sea  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  una función racional. Llamamos grado de  $R$  al máximo de los grados de los polinomios  $P$  y  $Q$ , esto es,

$$gr(R) = \max\{gr(P), gr(Q)\}.$$

Si  $R(z) = a$ , donde  $a \in \mathbb{C}_\infty$  es una constante diremos que el grado de  $R$  es cero.

Vamos a hablar del comportamiento de  $R$  en el punto  $\infty$ . Para ello, consideramos la función:

$$S(z) = R\left(\frac{1}{z}\right)$$

que está bien definida en un entorno perforado del origen y es una función racional. Además,

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow 0} R\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} S(z) = S(0).$$

Luego, si  $R(\infty) = 0, \infty$  decimos que el orden del cero o del polo de  $R$  en el infinito es el orden del cero o del polo de  $S$  en el origen.

Hagamos un estudio general. Sea  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  una función racional, donde

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0,$$

$$Q(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$$

son dos polinomios de grado  $n$  y  $m$  respectivamente. Entonces,

$$R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}.$$

Observamos que cualquier  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  satisface:

$$S(z) = R\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{a_n}{z^n} + \dots + \frac{a_1}{z} + a_0}{\frac{b_m}{z^m} + \dots + \frac{b_1}{z} + b_0} = z^{m-n} \frac{a_n + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n}{b_m + \dots + b_1 z^{m-1} + b_0 z^m},$$

donde  $a_n b_m \neq 0$ . Distinguiamos tres casos:

1. Si  $m > n$ , entonces  $R(\infty) = 0$  y  $R$  presenta un cero de orden  $m - n$  en  $\infty$ , pues  $S(z) = R\left(\frac{1}{z}\right)$  presenta un cero del mismo orden en el origen.

2. Si  $m = n$ , entonces  $R(\infty) = \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ . En este caso el punto  $\infty$  no es ni un polo ni un cero de  $R$ .
3. Si  $m < n$ , entonces  $R(\infty) = \infty$  y  $R$  presenta en  $\infty$  un polo de orden  $n - m$ , pues  $S$  presenta un polo del mismo orden en el origen.

Observamos que, en los tres casos estudiados anteriormente, el número de ceros y el número de polos de  $R$  (contando multiplicidades) en  $\mathbb{C}_\infty$  es igual a

$$\max\{n, m\}.$$

Veamos: sabemos que  $R$  tiene  $n$  ceros y  $m$  polos en  $\mathbb{C}$ , contando multiplicidades. Si  $m > n$ , entonces  $\max\{n, m\} = m$ , y se verifica que  $R$  tiene, contando multiplicidades,  $m$  polos en  $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$  y como  $R$  tiene un cero de orden  $m - n$  en  $\infty$ , entonces  $R$  también tiene  $n + (m - n) = m$  ceros en  $\mathbb{C}_\infty$ . Si  $m < n$  razonamos de manera análoga: en este caso,  $\max\{n, m\} = n$  y  $R$  tiene, contando multiplicidades,  $n$  polos en  $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$ ;  $m$  ceros en  $\mathbb{C}$  y  $n - m$  ceros en  $\infty$ . Por tanto  $R$  tiene  $n$  polos y  $m + (n - m) = n$  ceros en  $\mathbb{C}_\infty$ . El caso en el que  $m = n$  es trivial pues  $R$  tiene  $n = m = \max\{n, m\}$  ceros y polos en  $\mathbb{C}$ .

Además,

$$\max\{n, m\} = \text{gr}(R);$$

luego, el grado de una función racional nos determina el número de ceros y polos, contando multiplicidades, de la misma.

Más aún. Sea  $a \in \mathbb{C}$  una constante. La función dada por

$$R(z) - a$$

también es una función racional, que comparte los mismos polos que  $R$ , pues, si  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , entonces

$$R(z) - a = \frac{P(z)}{Q(z)} - a = \frac{P(z) - aQ(z)}{Q(z)}.$$

Los polos de  $R(z) - a$  se corresponden con los ceros de su denominador y, como los denominadores de  $R(z)$  y  $R(z) - a$  coinciden, también coinciden sus ceros. Además, el grado de ambas funciones coincide,

$$\text{gr}(R(z)) = \text{gr}(R(z) - a)$$

y, por tanto, también lo hace el número de ceros. Sin embargo, en este caso no comparten los mismos ceros. Los ceros de  $R(z) - a$  son las soluciones de la ecuación  $R(z) = a$ , contando multiplicidades. Hemos demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $R$  una función racional de orden  $p$ . Entonces,  $R$  tiene exactamente  $p$  ceros y  $p$  polos en  $\mathbb{C}_\infty$ , contando multiplicidades. Además, toda ecuación de la forma  $R(z) = a$ ,  $a \in \mathbb{C}_\infty$  tiene exactamente  $p$  soluciones, contando multiplicidades.*

Luego, si  $R: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una función racional de grado u orden  $p$  entonces cada punto  $z \in \mathbb{C}_\infty$  tiene exactamente  $p$  preimágenes, contando multiplicidades. A cada punto  $w \in \mathbb{C}_\infty$  le corresponden  $p$  puntos,  $z_1, \dots, z_p$ , no necesariamente distintos, tales que  $R(z_k) = w$ ,  $k \in \{1, \dots, p\}$ .

Como el rango y el dominio de  $R$  es todo el plano complejo ampliado, podemos hablar de sucesiones de funciones iteradas,  $(R^n)$ . Éstas sucesiones serán de la forma:

$$R^0 = \text{Id}, R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R \circ R \circ R \dots,$$

donde Id es la función identidad definida en  $\mathbb{C}_\infty$ . Además,

$$\text{gr}(R^n) = \text{gr}(R)^n.$$

Esto es una consecuencia del siguiente teorema:

**Teorema 2.2.3.** *Sean  $R$  y  $S$  dos funciones racionales. Entonces,*

$$\text{gr}(R \circ S) = \text{gr}(R) \text{gr}(S).$$

*Demostración.* Sean  $R$  y  $S$  dos funciones racionales de grado  $r$  y  $s$  respectivamente. Tomamos  $w \in \mathbb{C}$  tal que la función  $S(z) - w$  tenga  $s$  ceros simples en  $\mathbb{C}$ , o lo que es lo mismo, que  $S^{-1}\{w\}$  sean  $s$  puntos distintos; y tal que  $R^{-1}\{\zeta_k\}$  sean  $r$  puntos distintos para cada  $k = 1, \dots, s$ . Esto es, tomamos  $w \in \mathbb{C}$  tal que

$$S^{-1}\{w\} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\} \subset \mathbb{C}$$

sean  $s$  puntos distintos y, para todo  $k = 1, \dots, s$ ,

$$R^{-1}\{\zeta_k\} = \{\eta_{kj} : 1 \leq j \leq r\} \subset \mathbb{C}$$

sean  $r$  puntos distintos. De este modo,

$$(R \circ S)^{-1}\{w\} = \{\eta_{kj} : 1 \leq k \leq s, 1 \leq j \leq r\} \subset \mathbb{C}$$

consta de  $sr$  puntos. Hemos probado que el número de soluciones de  $(R \circ S)(z) = w$  para esta elección de  $w$  es  $sr$ . Podemos concluir así que el grado de la composición  $R \circ S$  es:

$$\text{gr}(R \circ S) = sr = \text{gr}(R) \text{gr}(S),$$

como queríamos probar.

Si la función  $S(z) - w$  tiene algún cero de multiplicidad mayor que uno en algún punto  $z$ , entonces la derivada de  $S$  en  $z$ , que es una función racional, también se anula en  $z$ . Pero los ceros de  $S'$  son tantos como el grado de  $S'$ , esto es, un número finito. Luego,  $S'$  se anula en una cantidad finita de puntos y, por tanto,  $S$  solo puede tener una cantidad finita de ceros con multiplicidad mayor que uno. El resto serán ceros simples. De este modo, siempre podemos conseguir  $w$  tal que  $S^{-1}\{w\}$  sea el conjunto de puntos donde  $S'$  no se anule. Podemos razonar de manera análoga que podemos evitar los puntos  $\eta_{k,j}$  tales que  $R'$  se anule. De este modo, la cantidad de puntos que debemos evitar es finita. Podemos concluir así que la existencia de  $w$  está garantizada. □

Vamos a definir los conceptos de función holomorfa, meromorfa y analítica que vamos a utilizar en este trabajo. De aquí en adelante, consideraremos  $D \subset \mathbb{C}$  una región del plano complejo, esto es, abierto y conexo.

**Definición 2.2.4.** *Una función  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $D$  si es derivable en cada punto de  $D$ .*

**Definición 2.2.5.** *Una función  $f: D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es meromorfa en  $D$  si, para cada punto de  $D$ , existe un entorno del mismo donde alguna de las funciones  $f$  o  $\frac{1}{f}$  sea holomorfa.*

Los polos de  $f$  son, precisamente, aquellos puntos  $w \in \mathbb{C}_\infty$  donde  $f(w) = \infty$  y, existe un entorno de  $w$  donde la función  $\frac{1}{f(z)}$  es holomorfa, considerando  $\frac{1}{f(w)} = 0$ .

**Definición 2.2.6.** *(Definición alternativa a 2.2.5). Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una función. De manera alternativa, decimos que  $f$  es meromorfa en  $D$  si es holomorfa en  $D$  salvo, a lo más, en una colección aislada de puntos donde  $f$  presenta polos.*

Se deduce de esta definición que las funciones racionales son meromorfas en el plano complejo,  $\mathbb{C}$ .

*Nota.* Sean  $f: D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una función y  $w \in D$  tal que  $f(w) = \infty$ . Observamos que  $f$  es continua en  $w$ , esto es,  $f$  es continua en un polo; y  $f$  es holomorfa en un entorno reducido de  $w$ . Veamos: la función  $\frac{1}{f(z)}$  está definida como 0 cuando  $z = w$ . Esta función es continua en  $w$  según la métrica euclídea, pues

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{1}{f(z)} = 0 = \frac{1}{f}(w);$$

y según la métrica cordal, pues se verifica que la función dada por  $z \mapsto \frac{1}{z}$  es una  $\sigma$ -isometría. Entonces,

$$\sigma(f(z), f(w)) = \sigma\left(\frac{1}{f(z)}, \frac{1}{f(w)}\right) = \sigma\left(\frac{1}{f(z)}, 0\right) \longrightarrow 0$$

cuando  $z \rightarrow w$ . Deducimos así que las funciones racionales son continuas en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$  si son vistas como funciones definidas de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . Pero es que también son continuas en  $\infty$ , pues

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z).$$

Luego, cualquier función racional  $R: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una aplicación continua sobre  $\mathbb{C}_\infty$ .

Para las definiciones siguientes consideraremos  $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$  una región del plano complejo ampliado. Decimos que una función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  está definida en un entorno del punto  $\infty$  si está definida en algún conjunto de la forma:

$$\{|z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

**Definición 2.2.7.** *Función holomorfa y meromorfa en  $\infty$ .*

Sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una función. Decimos que  $f$  es holomorfa en el infinito si  $f(\frac{1}{z})$  es holomorfa en un entorno del origen. Decimos que  $f$  es meromorfa en el infinito si  $f(\frac{1}{z})$  es meromorfa en un entorno del origen.

Una función racional  $R$  siempre puede considerarse definida en un entorno de  $\infty$ . Ésta será holomorfa o meromorfa en el  $\infty$ , dependiendo los grados que tengan los polinomios del numerador y del denominador de  $R$ .

**Definición 2.2.8.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  regiones de  $\mathbb{C}_\infty$ . Diremos que la función  $f: D_1 \rightarrow D_2$  es analítica en  $D_1$  si es holomorfa o meromorfa en cada punto de  $D_1$ .*

**Ejemplo 2.2.9.** *Los polinomios de la forma  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ , donde  $a_n \neq 0$  y  $n > 0$  satisfacen la igualdad  $P(\infty) = \infty$ . Además, son funciones analíticas en  $\mathbb{C}_\infty$  pues son analíticas en  $\mathbb{C}$  y meromorfas en el punto  $\infty$ . Esto último se verifica pues la función*

$$\frac{1}{P\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^n}{a_n + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n}$$

*se define como cero en el origen y es holomorfa en un entorno del mismo. Además,  $\infty$  es un punto fijo de cualquier polinomio no constante.*

Terminamos la sección afirmando que toda función racional  $R$  es analítica en  $\mathbb{C}_\infty$ . Veamos: si  $R: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una función racional, entonces para cualquier punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , alguna de las funciones  $R$  o  $\frac{1}{R}$  es holomorfa en un entorno de  $z_0$ . Luego,  $R$  es meromorfa en  $z_0$ . Además,  $R$  también es meromorfa en  $\infty$ , pues en un entorno del origen,  $f(\frac{1}{z})$  o  $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$  son holomorfas. Luego,  $f(\frac{1}{z})$  es meromorfa en un entorno del origen. Además, estudiamos en la asignatura Funciones de una Variable Compleja que si  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una función analítica, entonces  $f$  es una función racional.

### 2.3. Condición de Lipschitz.

Toda función continua de un espacio métrico compacto en otro espacio métrico es uniformemente continua. Esto es un resultado de topología. Esto es, si  $f: (X, d) \rightarrow (X_1, d_1)$  es continua y  $(X, d)$  es compacto, entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } d(x, y) < \delta \text{ entonces } d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Como las funciones racionales  $R: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  son continuas, entonces son uniformemente continuas respecto de las distancias cordal y esférica. En el siguiente teorema se demuestra algo más: no solo son uniformemente continuas, son funciones lipschitzianas.

**Teorema 2.3.1.** *Toda función racional  $R$  satisface una condición de Lipschitz del tipo*

$$\sigma_0(R(z), R(w)) \leq M\sigma_0(z, w) \tag{2.7}$$

sobre la esfera de Riemann. Esto es, existe una constante  $M > 0$  tal que para todo  $z, w \in \mathbb{C}_\infty$  se verifica la desigualdad (2.7).

*Demostración.* La clave está en acotar el siguiente cociente:

$$\frac{|R'(z)|(1+|z|^2)}{1+|R(z)|^2}. \tag{2.8}$$

Supongamos que existe  $M > 0$  tal que (2.8) está acotado superiormente por  $M$ . Sean  $z$  y  $w$  dos puntos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$  y  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  la curva cuya imagen por  $\Pi$  nos da la distancia esférica entre  $z$  y  $w$  en la esfera de Riemann. Aplicando la definición de longitud esférica tenemos que:

$$\sigma_0(z, w) = \int_\gamma \frac{1}{1+|s|^2} |ds| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1+|\gamma(t)|^2} dt.$$

De este modo,  $R \circ \gamma$  es una curva que une  $R(z)$  con  $R(w)$  y, por tanto, como la distancia esférica es la menor longitud esférica entre dos puntos, tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_0(R(z), R(w)) &\leq \int_{R \circ \gamma} \frac{1}{1 + |s|^2} |ds| = \int_a^b \frac{|R'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|}{1 + |R(\gamma(t))|^2} dt = \\ &= \int_a^b \frac{|R'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|}{1 + |R(\gamma(t))|^2} \frac{1 + |\gamma(t)|^2}{1 + |\gamma(t)|^2} dt \\ &\leq M \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2} dt = M \sigma_0(z, w),\end{aligned}$$

pues habíamos supuesto que el cociente dado por (2.8) estaba acotado superiormente por  $M$ . Con esto habríamos probado el Teorema.

Ahora bien, tenemos que probar que, efectivamente, (2.8) está acotado en un entorno de cada polo de  $R$  y en un entorno del infinito (pues en el resto de puntos de la esfera de Riemann la función  $R$  es continua).

Supongamos que  $R$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z_0$ . Entonces, podemos escribir

$$R(z) = (z - z_0)^{-m} g(z),$$

donde  $g$  es una función no nula y holomorfa en un entorno de  $z_0$ . Además,

$$R'(z) = \frac{g'(z)(z - z_0)^m - mg(z)(z - z_0)^{m-1}}{(z - z_0)^{2m}}.$$

Sustituyendo esto en (2.8), obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{|R'(z)| (1 + |z|^2)}{1 + |R(z)|^2} &= \frac{\left| \frac{g'(z)(z - z_0)^m - mg(z)(z - z_0)^{m-1}}{(z - z_0)^{2m}} \right| (1 + |z|^2)}{1 + \left| \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \right|^2} = \\ &= \frac{|z - z_0|^{m-1} |g'(z)(z - z_0) - mg(z)| (1 + |z|^2)}{|z - z_0|^{2m} + |g(z)|^2},\end{aligned}$$

que está acotado en un entorno de  $z_0$ .

Estudiamos también qué ocurre en un entorno de  $\infty$ . Como  $R$  es una función racional, podemos escribir  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios de grado  $n$  y  $m$  respectivamente. Distinguiamos tres casos:

1).  $n > m$ , esto es,  $R$  tiene un polo de orden  $n - m$  en  $\infty$ . Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}R(z) &= z^k h(z), \\ R'(z) &= kz^{k-1} h(z) + z^k h'(z),\end{aligned}$$

donde  $k = n - m$  y  $h$  es una función holomorfa y no nula en un entorno de  $\infty$ . Sustituyendo esto en (2.8) obtenemos:

$$\frac{|kz^{k-1}h(z) + z^k h'(z)| (1 + |z|^2)}{1 + |z|^{2k} |h(z)|^2}. \quad (2.9)$$

De este modo, tenemos que en un entorno de  $\infty$ , el orden que domina en (2.9) es  $2k$  tanto en el numerador como en el denominador. Luego, este cociente está bien definido y es distinto de cero en un entorno de  $\infty$ . Por tanto, el cociente dado en (2.9) está acotado en un entorno de  $\infty$ .

II).  $n = m$ , esto es,  $R$  está bien definida y es distinta de cero en  $\infty$ . En este caso,

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$$

y, el cociente dado por (2.8) sería de la forma:

$$\frac{\left| \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)} \right| (1 + |z|^2)}{1 + \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right|^2}. \quad (2.10)$$

Podemos escribir  $P$  y  $Q$  como  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  y  $Q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$ . Sustituyendo esto en (2.10) y despejando adecuadamente, llegamos a que el grado del numerador es, a lo más,  $2n$  y el denominador es  $2n$ . Por tanto, en un entorno de  $\infty$ , (2.10) está acotado.

III).  $n < m$ , esto es,  $R$  tiene un cero de orden  $m - n$  en  $\infty$ . Análogamente al caso anterior, acotaremos el cociente (2.8) razonando sobre los grados de los polinomios  $P$  y  $Q$ .

Tenemos que  $P'$  y  $Q'$  tienen grados  $n - 1$  y  $m - 1$  respectivamente. Entonces, al sustituir en  $R'$  tenemos que  $P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)$  es un polinomio de, a lo más, grado  $m + n - 1$ . De esta forma, en el cociente

$$\frac{|P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)| (1 + |z|^2)}{|Q(z)|^2 + |P(z)|^2} \quad (2.11)$$

el grado del numerador es, a lo más,  $m + n + 1$  y el grado del denominador es  $2m$ . Como  $m > n$ , entonces  $m \geq n + 1$  y se verifica que  $2m \geq m + n + 1$ . Es decir, el grado del numerador en (2.11) es menor o igual que el grado del denominador. Podemos concluir así que el cociente dado en (2.11) también está acotado en un entorno de  $\infty$ .



Finalmente, el cociente dado por (2.8) está acotado para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$  y para toda función racional  $R$ , como queríamos probar. □

El siguiente resultado trata de afinar la cota propuesta en el Teorema 2.3.1 para el caso donde la función racional sea una transformación de Möbius:

**Teorema 2.3.2.** *La transformación de Möbius dada por:*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

*satisface la condición de Lipschitz*

$$\sigma_0(g(z), g(w)) \leq \|g\|^2 \sigma_0(z, w),$$

donde  $\|g\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2$ .

*Demostración.* Sea  $g$  la transformación de Möbius del enunciado. Basándonos en la prueba del Teorema 2.3.1, tenemos que probar que para todo  $z$ ,

$$\frac{|g'(z)| (1 + |z|^2)}{1 + |g(z)|^2} \leq \|g\|^2. \quad (2.12)$$

Observamos que

$$g'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2},$$

pues  $ad - bc = 1$ . Sustituyendo esto en (2.12) llegamos a que tenemos que probar la siguiente desigualdad:

$$\frac{1 + |z|^2}{|az + b|^2 + |cz + d|^2} \leq \|g\|^2.$$

Llamamos  $\phi(g, z)$  a la parte izquierda de la desigualdad anterior,

$$\phi(g, z) = \frac{1 + |z|^2}{|az + b|^2 + |cz + d|^2}.$$

Para obtener la función inversa de  $g$ , escribimos:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \iff czw + dw = az + b \iff z = \frac{-dw + b}{cw + a}.$$

Así,

$$g^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Además,  $\phi(g, z)$  representa el incremento infinitesimal del cambio de escala de  $g$  en  $z$  con la métrica esférica. Luego, satisface la Regla de la Cadena:

$$\phi(g, z) \phi(g^{-1}, g(z)) = 1 \quad (2.13)$$

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores complejos obtenemos las cotas:

$$|az + b|^2 \leq (|a|^2 + |b|^2) (1 + |z|^2)$$

y

$$|cz + d|^2 \leq (|c|^2 + |d|^2) (1 + |z|^2).$$

Entonces,

$$\phi(g, z) = \frac{1 + |z|^2}{|az + b|^2 + |cz + d|^2} \geq \frac{1 + |z|^2}{1 + |z|^2 (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)} = \frac{1}{\|g\|^2}.$$

Sustituyendo esto en (2.13) obtenemos que

$$\phi(g^{-1}, g(z)) \leq \|g\|^2.$$

Esta desigualdad se verifica para  $g$ , luego, reemplazando  $g$  por  $g^{-1}$  y usando la igualdad dada por  $\|g\|^2 = \|g^{-1}\|^2$  llegamos a

$$\phi(g, g^{-1}(z)) \leq \|g\|^2$$

y, por tanto, tenemos que para todo  $w \in \mathbb{C}_\infty$  se verifica

$$\phi(g, w) \leq \|g\|^2.$$

□

Del Teorema 2.3.2 deducimos que si las normas  $\|g\|$  están acotadas para una familia de transformaciones de Möbius  $\mathcal{G}$ , entonces tenemos una desigualdad de Lipschitz uniforme para toda la familia.

**Teorema 2.3.3.** Sean  $m$  una constante positiva y  $g$  una transformación de Möbius que satisfice:

$$\sigma(g(0), g(1)) \geq m, \sigma(g(1), g(\infty)) \geq m \text{ y } \sigma(g(\infty), g(0)) \geq m. \quad (2.14)$$

Entonces,

$$\sigma(g(z), g(w)) \leq \frac{\pi}{m^3} \sigma(z, w).$$

*Demostración.* Supongamos que  $g$ , dada por  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $ad - bc = 1$  es una transformación de Möbius que satisface (2.14). Entonces,

$$\sigma(g(0), g(1)) \sigma(g(1), g(\infty)) \sigma(g(\infty), g(0)) \geq m^3. \quad (2.15)$$

Si evaluamos la parte izquierda de la desigualdad (2.15), obtenemos:

$$(|a|^2 + |c|^2) (|b|^2 + |d|^2) (|a + b|^2 + |c + d|^2) \leq \frac{1}{m^3}, \quad (2.16)$$

pues,

$$\sigma(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}$$

es la distancia cordal entre dos puntos  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Como hemos tomado  $a, b, c$  y  $d$  tales que  $1 = ad - bc = d(a + b) - b(c + d)$ , entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz llegamos a:

$$1 \leq (|b|^2 + |d|^2) (|a + b|^2 + |c + d|^2).$$

Sustituyendo esto en (2.16) deducimos que:

$$|a|^2 + |c|^2 \leq \frac{1}{m^3}.$$

Partiendo de la condición  $ad - bc = 1$  y razonando de manera análoga, deducimos también que

$$|b|^2 + |d|^2 \leq \frac{1}{m^3}.$$

Por tanto,

$$\|g\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \leq \frac{2}{m^3}.$$

Finalmente, hemos visto en el Teorema 2.1.2 que las distancias cordal y esférica satisfacen la desigualdad:

$$\frac{2}{\pi} \sigma_0(z, w) \leq \sigma(z, w)$$

y, el Teorema 2.3.2 nos asegura que:

$$\sigma_0(g(z), g(w)) \leq \|g\|^2 \sigma_0(z, w).$$

Con esto, podemos concluir que

$$\sigma(g(z), g(w)) \leq \frac{\pi}{m^3} \sigma(z, w).$$

□

Antes de enunciar el siguiente resultado, es necesario que definamos algunos conceptos:

**Definición 2.3.4.** Sea  $\gamma$  una curva cerrada sobre la esfera de Riemann. Llamamos componentes complementarias de  $\gamma$  a cada una de las regiones que componen  $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma^*$ , donde  $\gamma^*$  denota el recorrido de  $\gamma$ ; y llamamos complemento de  $\gamma$  a la unión de todas ellas. Se verifica que las componentes complementarias de  $\gamma$  son disjuntas dos a dos.

Si  $\gamma$  está contenida en el interior de un hemisferio de la esfera entonces una y solo una de las componentes complementarias de  $\gamma$  contiene una hemiesfera. Denotaremos a esta componente como  $E(\gamma)$  y la llamaremos exterior de  $\gamma$ . Nos referiremos al resto de componentes complementarias de  $\gamma$  como sus componentes interiores.

**Teorema 2.3.5.** Sea  $R$  una función racional. Existe un número positivo  $\delta$  tal que si  $\gamma$  es una curva cerrada de  $\sigma_0$ -diámetro menor que  $\delta$ , entonces la imagen por  $R$  de una componente interior de  $\gamma$  no corta al exterior de la imagen de  $\gamma$  por  $R$ . Esto es, si  $\Omega$  es una componente interior de  $\gamma$  entonces  $R(\Omega)$  no corta a  $E(R(\gamma))$ .

*Demostración.* Supongamos que  $R$  no es una constante. A lo largo de la prueba utilizaremos el término diámetro de un conjunto para referirnos al  $\sigma_0$ -diámetro del mismo.

Sea  $\Omega$  una componente interior de  $\gamma$ . Entonces, el diámetro de  $\Omega$  está acotado por el de  $\gamma$ . Tomando la constante  $M$  del Teorema 2.3.1 llegamos a la desigualdad

$$\text{diam}(R(\Omega)) \leq M \text{diam}(\gamma).$$

Ahora, tomamos  $\delta$  tal que

$$M\delta < \pi.$$

De este modo, como  $\gamma$  es una curva cerrada de diámetro menor que  $\delta$ , entonces el diámetro de  $R(\Omega)$  es menor que  $M\delta$  y, por tanto, menor que  $\pi$ . Luego,  $R(\Omega)$  no contiene ninguna hemiesfera y, por tanto,  $R(\Omega)$  no contiene a  $E(R(\gamma))$ .

Para continuar, damos por conocido el siguiente resultado que probaremos al final de la demostración: dada una función racional  $R$  y una región de la esfera compleja  $W$  se verifica:

$$\partial(R(\Omega)) \subset R(\partial W). \tag{2.17}$$

Aplicando esto a  $\Omega$  obtenemos la cadena de contenciones

$$\partial(R(\Omega)) \subset R(\partial\Omega) \subset R(\gamma),$$

pues  $\partial\Omega \subset \gamma$ . Con esto y teniendo en cuenta que

$$E(R(\gamma)) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \gamma^*,$$

deducimos que el exterior de  $R(\gamma)$ , y la frontera de  $R(\Omega)$  son disjuntos. Así tenemos que, o bien la intersección

$$E(R(\gamma)) \cap R(\Omega) = \emptyset,$$

o bien

$$E(R(\gamma)) \subset R(\Omega).$$

Este caso no puede ocurrir pues  $R(\Omega)$  no contiene al exterior de  $R(\gamma)$ . Por tanto,

$$E(R(\gamma)) \cap R(\Omega) = \emptyset.$$

Por último, solo nos queda probar (2.17). Para ello, observamos que dado un punto  $\zeta$  de la frontera de  $R(W)$ , existe una sucesión  $(z_n)$ , donde  $z_n \in W$  tal que

$$R(z_n) \rightarrow \zeta$$

si  $n \rightarrow \infty$ . Más aún, podemos suponer que existen una sucesión  $(z_n)$ , donde  $z_n \in W$  y  $z \in \overline{W}$  tales que

$$z_n \rightarrow z$$

si  $n \rightarrow \infty$  y  $R(z) = \zeta$ . Además,  $z$  pertenece a la frontera de  $W$  pues si no,  $z$  pertenecería a  $W$  y  $\zeta$  a  $R(W)$ . Esto no puede ocurrir pues la intersección

$$\partial R(W) \cap R(W) = \emptyset,$$

dado que  $\zeta \in \partial R(W)$  y  $R(W)$  es abierto.

□

## 2.4. Conjugación.

En esta sección generalizaremos la noción de conjugación que vimos en la segunda sección del Capítulo 1. Las transformaciones de Möbius o aplicaciones bilineales son las aplicaciones racionales de grado 1:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Éstas forman un grupo con la composición pues tanto composición de transformaciones de Möbius como la inversa de una transformación de Möbius da lugar a otra aplicación bilineal. Además, toda transformación de Möbius es una biyección continua de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . Luego, las transformaciones de Möbius forman el grupo de homeomorfismos analíticos de  $\mathbb{C}_\infty$  en sí mismo. Todo esto lo hemos probado en la asignatura de Variable Compleja.

**Definición 2.4.1.** Decimos que dos funciones racionales  $R$  y  $S$  son conjugadas si existe una transformación de Möbius  $g$  tal que

$$S = gRg^{-1},$$

donde  $gRg^{-1} = g \circ R \circ g^{-1}$ .

Si  $R$  y  $S$  son conjugadas se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{S} & \mathbb{C}_\infty \\ \uparrow g & & \uparrow g \\ \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}_\infty \end{array}$$

Es claro que la conjugación define una relación de equivalencia en el conjunto de funciones racionales:

1. Esta relación es reflexiva pues  $R = \text{Id} R \text{Id}^{-1} = \text{Id} R \text{Id}$ , donde  $\text{Id}$  es la función identidad.
2. También es simétrica pues si existe una transformación bilineal  $g$  tal que  $S = gRg^{-1}$ , entonces multiplicando a ambos lados de la igualdad por  $g$  y  $g^{-1}$  adecuadamente obtenemos:  $R = g^{-1}Sg = hSh^{-1}$ , donde  $h = g^{-1}$ .
3. Por último, la conjugación es transitiva: sean  $R$ ,  $S$  y  $T$  tres funciones racionales. Si  $R$  es conjugada de  $S$  y  $S$  es conjugada de  $T$ , entonces existen  $g$ ,  $g^{-1}$ ,  $h$  y  $h^{-1}$  transformaciones de Möbius tales que

$$S = gRg^{-1}, \tag{2.18}$$

$$T = hSh^{-1}. \tag{2.19}$$

Sustituyendo (2.18) en (2.19) obtenemos:

$$T = hgRg^{-1}h^{-1} = qRq^{-1},$$

donde  $q = h \circ g$  es una transformación de Möbius.

Además, cada clase de equivalencia se llama clase de conjugación de funciones racionales.

Desde un punto de vista cualitativo, únicamente nos interesan aquellas propiedades o funciones que se mantienen invariantes por conjugación. Entre ellas, la más importante es la función grado:

**Proposición 2.4.2.** *Si  $R$  y  $S$  son conjugadas entonces*

$$\text{gr}(R) = \text{gr}(S).$$

*Demostración.* Este resultado es una consecuencia directa del Teorema 2.2.3, que afirmaba que

$$\text{gr}(R \circ S) = \text{gr}(R) \text{gr}(S).$$

De este modo, si  $R$  y  $S$  son conjugadas,

$$\text{gr}(R) \text{gr}(S) = \text{gr}(R \circ S) = \text{gr}(R \circ g \circ R \circ g^{-1}) = \text{gr}(R)^2.$$

Despejando en la expresión anterior obtenemos la igualdad

$$\text{gr}(R) = \text{gr}(S).$$

□

Otra propiedad importante de la conjugación es que respeta las iteraciones:

**Proposición 2.4.3.** *Si  $S = gRg^{-1}$ , entonces*

$$S^n = gR^n g^{-1}. \quad (2.20)$$

*Demostración.* Lo vemos por inducción: sean  $R$  y  $S$  dos funciones racionales conjugadas. Entonces, existe una transformación de Möbius  $g$  tal que  $S = gRg^{-1}$ . Supongamos que

$$S^n = gR^n g^{-1}$$

y veamos que la iteración  $(n + 1)$ -ésima verifica la igualdad:

$$S^{n+1} = S^n S = gR^n g^{-1} gRg^{-1} = gR^{n+1} g^{-1}.$$

□

Este resultado nos dice que podemos trasladar los problemas relativos a iteraciones de  $R$  a problemas relativos a iteraciones de  $S$ .

Otra propiedad importante de la conjugación es que respeta los puntos fijos.

**Proposición 2.4.4.** *Sean  $R$  y  $S$  aplicaciones racionales conjugadas. Entonces,  $g(z)$  es un punto fijo de  $S$  si y solo si  $z$  es un punto fijo de  $R$ , donde  $g$  es una transformación bilineal tal que  $S = gRg^{-1}$ .*

*Demostración.* Sea  $z$  un punto fijo de  $R$ . Entonces,  $R(z) = z$ . Si evaluamos  $S$  en  $g(z)$  obtenemos:

$$S(g(z)) = gRg^{-1}(g(z)) = gR(z) = g(z).$$

Recíprocamente, si  $g(z)$  es un punto fijo de  $S$ , entonces  $S(g(z)) = g(z)$ . Si evaluamos  $R$  en  $z$  obtenemos:

$$R(z) = g^{-1}Sg(z) = g^{-1}g(z) = z.$$

□

Para ilustrar el uso de la conjugación, vamos a caracterizar los polinomios dentro de la clase de aplicaciones racionales conjugadas. Sabemos que una función racional no constante  $R$  es un polinomio si y solo si  $R^{-1}\{\infty\} = \infty$ . Esto es, si  $R$  tiene un polo en  $\infty$  y no tiene polos en  $\mathbb{C}$ . Más generalmente, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.5.** *Sea  $R$  una función racional no constante.  $R$  es conjugada de un polinomio si y solo si existe  $w \in \mathbb{C}_\infty$  tal que  $R^{-1}\{w\} = \{w\}$ .*

*Demostración.* Sea  $R$  una función racional. Supongamos que existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que

$$R^{-1}\{w\} = \{w\}.$$

Vamos a probar que, en este caso,  $R$  es conjugada de un polinomio. Para ello, consideramos una transformación de Möbius  $g$  tal que  $g(w) = \infty$  y consideramos la función racional conjugada de  $R$  dada por  $S = gRg^{-1}$ . Tenemos que  $S$  satisface

$$S^{-1}\{\infty\} = (gRg^{-1})^{-1}\{\infty\} = (gR^{-1}g^{-1})\{\infty\} = (gR^{-1})(w) = g(w) = \{\infty\}$$

y, por tanto,  $S$  es un polinomio.

Por otro lado, supongamos que  $R$  es conjugada de un polinomio  $P$ . Entonces, existe una transformación de Möbius  $g$  tal que

$$P = g^{-1}Rg \iff R = gPg^{-1}.$$

Tomamos  $w \in \mathbb{C}_\infty$  tal que  $g(w) = \infty$ . Este  $w$  existe pues las aplicaciones bilineales establecen una biyección sobre  $\mathbb{C}_\infty$ . Así, tenemos que  $R^{-1}\{w\} = \{w\}$ , pues

$$R^{-1}\{w\} = (gPg^{-1})^{-1}\{w\} = (gP)^{-1}\{\infty\} = g^{-1}\{\infty\} = \{w\}.$$

□



## 2.5. Valencia.

Sea  $f$  una función no constante y holomorfa en un entorno de  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Sabemos que en un entorno de  $z_0$ ,  $f$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

donde los coeficientes  $a_j$  son números complejos,  $a_k \neq 0$  y  $k$  es un número entero positivo que está unívocamente determinado por la condición de que el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^k}$$

exista, sea finito y no nulo. Así, llamamos valencia u orden de  $f$  en el punto  $z_0$  al único  $k$  que verifica lo anterior y lo denotamos por  $v_f(z_0)$ . En realidad, la valencia de  $f$  en el punto  $z_0$  es el orden del cero que presenta la función

$$f(z) - a_0$$

en el punto  $z_0$ .

**Teorema 2.5.1.** (*Regla de la cadena para la valencia*). Sean  $z_0$  un punto de  $\mathbb{C}$ ,  $g$  una función holomorfa y no constante en un entorno de  $z_0$  y  $f$  una función holomorfa y no constante en un entorno de  $g(z_0)$ . Entonces,

$$v_{f \circ g}(z_0) = v_f(g(z_0)) v_g(z_0),$$

donde  $z_0$ ,  $g(z_0)$  y  $f(g(z_0))$  son tres números complejos.

*Demostración.* Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Hemos estudiado en la asignatura de Funciones de una Variable Compleja que los ceros de una función holomorfa son aislados. Por tanto, si  $g$  es una función no constante y holomorfa en  $z_0$ , entonces los ceros de la función

$$g(z) - g(z_0)$$

son aislados. Luego, existe un entorno perforado,  $N$ , de  $z_0$  donde

$$g(z) \neq g(z_0).$$

Sobre este entorno tenemos que

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{(z - z_0)^{kq}} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{(g(z) - g(z_0))^q} \left( \frac{g(z) - g(z_0)}{(z - z_0)^k} \right)^q, \quad (2.21)$$

donde  $q = v_f(g(z_0))$  y  $k = v_g(z_0)$ . Si el límite cuando  $z \rightarrow z_0$  de la expresión anterior existe, es finito y no nulo entonces se verifica la igualdad:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{(z - z_0)^{kq}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{(g(z) - g(z_0))^q} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g(z) - g(z_0))^q}{((z - z_0)^q)^k}.$$

Podemos concluir así que se verifica la igualdad:

$$v_{f \circ g}(z_0) = v_g(f(z_0)) v_f(z_0).$$

□

**Proposición 2.5.2.** *Una función  $f$  es inyectiva en un entorno de  $z_0$  si y solo si  $v_f(z_0) = 1$ .*

*Demostración.* Es conocido que si  $U$  y  $V$  son dos abierto del plano complejo y  $f: U \rightarrow V$  es una función holomorfa e inyectiva, entonces  $f'(z) \neq 0$ , para todo  $z \in U$ . Podemos encontrar una prueba de este resultado en [6, p. 206-207]. Con ello, tenemos que  $v_f(z_0) \neq 1$ .

Recíprocamente, si  $v_f(z_0) \neq 1$ , entonces  $f'(z_0) \neq 0$ . De este modo, deducimos que  $f$  tiene inversa en un entorno de  $z_0$  y, por tanto, concluimos que  $f$  es inyectiva en un entorno de  $z_0$ .

□

Partiendo del resultado anterior, la regla de la cadena nos dice que la valencia se preserva por pre-aplicación o post-aplicación de una función inyectiva. Explícitamente, si  $f \circ g$  está definida en un entorno de  $z$  y  $g$  es inyectiva en un entorno de  $z$  o si  $h \circ f$  está definida en un entorno de  $z$  y  $h$  inyectiva en un entorno de  $f(z)$ , entonces se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} v_{f \circ g}(z) &= v_f(g(z)), \\ v_{h \circ f}(z) &= v_f(z). \end{aligned}$$

Hasta ahora solo hemos hablado de valencia de una función  $f$  en puntos de  $\mathbb{C}$ , pero estas reglas nos van a permitir extender las definiciones de valencia  $v_f(z_0)$  a los casos en los que  $z_0 = \infty$  o  $f(z_0) = \infty$  o, incluso, a ambos casos a la vez,  $f(\infty) = \infty$ .

Consideramos dos transformaciones de Möbius,  $g$  y  $h$ , que lleven  $z_0$  y  $f(z_0)$  a puntos de  $\mathbb{C}$  respectivamente. En el caso en que alguno de los dos,  $z_0$  o  $f(z_0)$  sea  $\infty$  definimos la valencia de  $f$  en  $z_0$  como sigue:

$$v_f(z_0) = v_F(g(z_0)), \tag{2.22}$$

donde  $F = h \circ f \circ g^{-1}$ . Esta definición es consistente y no depende de las transformaciones de Möbius escogidas, pues como hemos tomado  $g$  y  $h$  tales que

$$\begin{aligned} g(z_0) &\in \mathbb{C}, \\ F(g(z_0)) &= (h \circ f)(z_0) = h(f(z_0)) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

y, aplicando la Regla de la Cadena para la valencia, 2.5.1, tenemos que:

$$\begin{aligned} v_F(g(z_0)) &= v_{h \circ f \circ g^{-1}}(g(z_0)) = \\ &= v_{h \circ f}(g^{-1}(g(z_0))) v_{g^{-1}}(g(z_0)) = \\ &= v_h(f(g^{-1}(g(z_0)))) v_f(g^{-1}(g(z_0))) v_{g^{-1}}(g(z_0)) = \\ &= v_h(f(z_0)) v_f(z_0) v_{g^{-1}}(g(z_0)) = \\ &= v_f(z_0). \end{aligned}$$

pues  $v_h(f(z_0)) = 1 = v_{g^{-1}}(g(z_0))$  dado que ambas funciones,  $g$  y  $h$ , son inyectivas. Podemos hablar así de valencia de forma general en todo el plano complejo ampliado.

**Teorema 2.5.3.** *Si  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en el punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces*

$$v_f(z_0) = k.$$

*Demostración.* Supongamos que  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Hemos estudiado en la asignatura de Funciones de una Variable Compleja que, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \neq 0. \quad (2.23)$$

Queremos hallar la valencia de  $f$  en el punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , donde  $f(z_0) = \infty$ . Para ello, vamos a aplicar la fórmula (2.22), considerando las transformaciones de Möbius  $g$  y  $h$  dadas por:

$$\begin{aligned} g(z) &= z, \\ h(z) &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Así,

$$v_f(z_0) = v_F(g(z_0)) = v_F(z_0),$$

donde

$$F(z) = (h \circ f \circ g^{-1})(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Luego,

$$v_f(z_0) = v_F(z_0) = v_{\frac{1}{f}}(z_0).$$

Además, aplicando la definición de valencia para  $v_{\frac{1}{f}}(z_0)$  y (2.23) llegamos a que el siguiente límite existe, es finito y no nulo:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}}{(z - z_0)^k} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} = \frac{1}{a} \neq 0,$$

donde hemos considerado  $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ . De este modo, tenemos que  $v_{\frac{1}{f}}(z_0) = k$  y, por tanto,

$$v_f(z_0) = k,$$

como queríamos probar. □

## 2.6. Puntos fijos.

Sea  $R$  una función racional no constante de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios primos entre sí. La localización de los puntos fijos de  $R$  es trivial. En primer lugar,  $R$  fija a  $\infty$  si y solo si

$$\text{gr}(P) > \text{gr}(Q).$$

Si  $\zeta \in \mathbb{C}$  es un número complejo fijado por  $R$ , entonces  $Q(\zeta) \neq 0$  y, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$P(\zeta) = \zeta Q(\zeta). \tag{2.24}$$

Recíprocamente, si se cumple la ecuación dada por (2.24) y, además,  $Q(\zeta) \neq 0$ , entonces  $\zeta$  es un punto fijo de  $R$ . Por tanto, los puntos fijos de  $R$  que pertenecen a  $\mathbb{C}$  son las soluciones de la ecuación:

$$P(z) - zQ(z) = 0. \tag{2.25}$$

Observamos que la ecuación dada por (2.25) no tiene por qué tener soluciones en  $\mathbb{C}$ , pues la parte izquierda de la igualdad puede ser un polinomio constante no nulo. Por ejemplo, la función dada por:

$$R(z) = z + \frac{1}{z}$$

no tiene puntos fijos en  $\mathbb{C}$  y

$$P(z) - zQ(z) = z^2 + 1 - z^2 = 1.$$

Si  $\zeta \in \mathbb{C}$  es un punto fijo de una aplicación analítica  $f$ , entonces diremos que  $f$  tiene exactamente  $k$  puntos fijos en  $\zeta$  si y solo si la ecuación  $f(z) - z$  tiene un cero de orden  $k$  en  $\zeta$ . Así, por ejemplo, la función dada por:

$$f(z) = z + z^3$$

tiene 3 puntos fijos en  $\zeta = 0$ . Sin embargo,  $v_{z+z^3}(\zeta) = 1$ . Por otro lado, la aplicación

$$f(z) = z^3$$

tiene 1 punto fijo en el origen y  $v_{z^3}(0) = 3$ , pues  $f(z) - z = z^3 - z = z(z^2 - 1)$ .

La noción de punto fijo y su multiplicidad se puede generalizar para el caso de  $\infty$ . Podemos consultar los resultados necesarios para ello y su definición en la sexta sección del Capítulo 2 de [2].

## 2.7. Puntos críticos.

Comenzamos esta sección con una definición:

**Definición 2.7.1.** *Sea  $R$  una aplicación racional. Decimos que un punto  $z$  es un punto crítico de  $R$  si  $R$  no es inyectiva en ningún entorno de  $z$ .*

Si  $R$  no es una función constante, entonces los puntos críticos de  $R$  son aquellos puntos donde la valencia de  $R$  es mayor que uno y, en ese caso, la derivada de  $R$  se anula en  $z$ . Luego,  $z \in \mathbb{C}_\infty$  satisface

$$v_R(z) > 1 \text{ y } R'(z) = 0$$

si es un punto crítico de  $R$ .

**Definición 2.7.2.** *Sea  $R$  una función racional. Decimos que un punto  $w \in \mathbb{C}_\infty$  es un valor crítico para  $R$  si es la imagen de algún punto crítico de  $R$ , esto es, si*

$$w = R(z)$$

para algún punto crítico  $z$  de  $R$ .

Sea  $R$  una función racional de grado  $d$ . Si  $w$  no es un valor crítico de  $R$ , entonces  $R^{-1}\{w\}$  consta, precisamente, de  $d$  puntos distintos, digamos  $z_1, \dots, z_d$ . Como ninguno de los  $z_j$  son puntos críticos de  $R$ , existen  $N$  un entorno de  $w$  y  $N_1, \dots, N_d$  entornos de  $z_1, \dots, z_d$

respectivamente donde  $R$  establece una biyección de  $N_j$  en  $N$ , para cada  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Luego, para cada  $j \in \{1, \dots, d\}$ , la restricción de  $R$  a  $N_j$  tiene inversa

$$R_j^{-1}: N \rightarrow N_j.$$

Llamamos ramas de  $R^{-1}$  en  $w$  a cada una de las funciones anteriores.

Ahora bien, sabemos que  $R$  es inyectiva en un entorno de cualquier punto de  $\mathbb{C}$  donde la derivada de  $R$ ,  $R'$ , no tenga cero ni polo alguno. Luego, salvo en una cantidad finita de puntos,  $v_R(z) = 1$ . Por tanto,

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} (v_R(z) - 1) < \infty.$$

Esta suma nos da una medida del número de raíces múltiples de  $R$  y de las dificultades para definir  $R^{-1}$ . El siguiente teorema nos proporciona una fórmula que usaremos más adelante:

**Teorema 2.7.3.** (*Teorema de Riemann-Hurwitz*). *Sea  $R$  una función racional no constante. Se verifica:*

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} (v_R(z) - 1) = 2gr(R) - 2. \quad (2.26)$$

*Nota.* Aunque, *a priori*, el sumatorio de la expresión (2.26) es infinito, realmente las sumas que estamos considerando son una cantidad finita pues, únicamente son positivos aquellos sumandos definidos sobre puntos críticos, que hemos visto que son una cantidad finita. En el resto de puntos de  $\mathbb{C}_\infty$ ,

$$v_R(z) - 1 = 0.$$

De este modo, la fórmula dada en el teorema anterior nos proporciona una estimación del número de puntos críticos de  $R$ .

Para un polinomio  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  de grado  $n > 0$ , tenemos que

$$v_P(\infty) = gr(P).$$

Luego, en este caso, la fórmula dada en (2.26) nos da una estimación del número de puntos críticos de  $P$  en  $\mathbb{C}$ .

Este comentario da pie al siguiente corolario:

**Corolario 2.7.4.** *Sea  $R$  una función racional de grado  $d > 0$ . Entonces,  $R$  tiene, a lo más,  $2d - 2$  puntos críticos en  $\mathbb{C}_\infty$ . Además, si  $R$  es un polinomio, entonces  $R$  tiene, a lo más,  $d - 1$  puntos críticos en  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Hemos visto en la nota anterior que el sumatorio dado en (2.26) sólo cuenta con los términos asociados a puntos críticos. El Teorema 2.7.3 nos asegura que esta suma es igual a  $2d - 2$ , donde  $d$  es el grado de  $R$ . Teniendo en cuenta que la valencia solo toma valores naturales y, la valencia de los puntos críticos es mayor o igual que dos,  $2d - 2$  nos proporciona una cota superior del número de puntos críticos de  $R$ .

Si  $R = P$  es un polinomio de grado  $d > 0$ , entonces  $v_P(\infty) = \text{gr}(P) = d$ . Luego, despejando esto en la fórmula dada en (2.26) obtenemos

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} (v_P(z) - 1) = 2d - 2 - (d - 1) = d - 1.$$

□

Estas estimaciones juegan un papel fundamental en la teoría de iteraciones de funciones. Por lo general, asignaremos una multiplicidad a cada punto crítico  $z$ , justo el valor  $v_R(z) - 1$ . Bajo este convenio, una aplicación racional de grado  $d$  tiene exactamente  $2d - 2$  puntos críticos. Veamos la prueba del Teorema 2.7.3:

*Demostración.* Prueba del Teorema 2.7.3 (de Riemann-Hurwitz):

Antes de empezar la prueba de este teorema, observamos que ambos lados de la igualdad (2.26) son invariantes por conjugación pues, tanto la valencia como el grado de una función respetan la conjugación. De modo que, basta probar la fórmula para cualquier aplicación conjugada de  $R$ .

Sean  $R$  una función racional de grado  $d$  y  $\zeta$  un punto tal que  $\zeta$  no sea un punto fijo ni crítico de  $R$ , esto es,

$$\begin{aligned} R(\zeta) &\neq \zeta, \\ v_R(\zeta) &= 1 \end{aligned}$$

y tal que la ecuación dada por

$$R(z) = \zeta$$

tenga  $d$  soluciones distintas. Consideramos la transformación de Möbius  $g$  tal que

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \infty, \\ (g \circ R)(\zeta) &= g(R(\zeta)) = 1; \end{aligned}$$

y llamamos  $S$  a la función dada por

$$S = gRg^{-1}.$$

Entonces, las funciones  $R$  y  $S$  son conjugadas. De este modo,  $S$  satisface las siguientes propiedades:

1.  $S(\infty) = 1$ , pues

$$S(\infty) = (gRg^{-1})(\infty) = g(R(g^{-1}(\infty))) = g(R(\infty)) = 1.$$

2.  $S$  tiene  $d$  polos simples en  $\mathbb{C}$ ,  $z_1, \dots, z_d$ . Como  $R$  y  $S$  son conjugadas, podemos aplicar el Teorema 2.4.2 y deducir que los grados de ambas funciones coinciden,

$$\text{gr}(S) = \text{gr}(R) = d.$$

Además, el Teorema 2.2.2 nos asegura que el grado de una función racional es igual al número de polos en  $\mathbb{C}_\infty$  de la misma. Deducimos así que  $S$  tiene  $d$  polos (contando multiplicidades) en  $\mathbb{C}_\infty$ . En este caso, todos los polos de  $S$  están en  $\mathbb{C}$  pues,  $S(\infty) = 1$ .

Solo nos queda probar que los  $d$  polos de  $S$  son simples. Sabemos que  $z$  es un polo de  $S$  si satisface la igualdad

$$S(z) = \infty. \tag{2.27}$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$gRg^{-1}(z) = \infty \iff R(g^{-1}(z)) = g^{-1}(\infty) = \zeta.$$

Partíamos de la siguiente hipótesis:  $R(z) = \zeta$  tiene  $d$  soluciones distintas, para todo  $z$ . En particular, para  $z = g^{-1}(z)$ . Por tanto, la ecuación (2.27) tiene  $d$  soluciones distintas y, podemos concluir así que  $S$  tiene  $d$  polos distintos en  $\mathbb{C}$ , esto es,  $S$  tiene  $d$  polos simples en  $\mathbb{C}$ .

3.  $v_S(\infty) = 1$ , pues aplicando El Teorema 2.5.1 obtenemos:

$$v_S(\infty) = v_{gRg^{-1}}(\infty) = v_{gR}(g^{-1}(\infty))v_{g^{-1}}(\infty) = v_g(R(\zeta))v_R(\zeta)v_{g^{-1}}(\infty).$$

En la sección 5 de este capítulo vimos que una función es inyectiva en entorno de un punto si y solo si su valencia en ese punto es igual a 1 (Teorema 2.5.2). Como las transformaciones de Möbius son transformaciones biyectivas de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , en particular, son inyectivas en cualquier entorno de cualquier punto  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Luego,

$$v_g(z) = 1 = v_{g^{-1}}(z),$$

para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . En particular, para  $z = R(\zeta)$  y  $z = \infty$ . Como hemos tomado  $\zeta$  tal que  $v_R(\zeta) = 1$ , concluimos que

$$v_S(\infty) = v_g(R(\zeta))v_R(\zeta)v_{g^{-1}}(\infty) = v_R(\zeta) = 1.$$



Si renombramos a  $S$  por  $R$  tenemos que:  $R(\infty) = 1$ ,  $R$  tiene  $d$  polos simples en  $\mathbb{C}$ ,  $z_1, \dots, z_d$ ; y  $v_R(\infty) = 1$ . Estas condiciones aseguran que la valencia de  $R$  en el infinito y en cada uno de los  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, d$  es 1, pues, del Teorema 2.5.3 deducimos que la valencia de una función en un polo coincide con el orden del polo. En este caso, como los polos son todos simples, todos tienen orden 1. De este modo, tenemos que el sumatorio que estamos considerando se puede restringir a los puntos de  $\mathbb{C}$ :

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} (v_R(z) - 1) = \sum_{z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_d\}} (v_R(z) - 1).$$

Para tales  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_d\}$ ,  $R(z)$  pertenece a  $\mathbb{C}$  y, por ello, el valor de la derecha es exactamente igual al número de ceros de  $R'(z)$  (podemos comprobar esto fácilmente escribiendo el desarrollo en serie de Taylor de  $R$  en los ceros de  $R'$ ).

Ahora, escribimos

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios primos entre sí. Entonces, la derivada de  $R$  será de la forma,

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}. \quad (2.28)$$

Esta también es una expresión reducida de la función racional  $R'$ , es decir, los polinomios  $P'Q - PQ'$  y  $Q^2$  son coprimos. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que los polinomios

$$P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) \text{ y } Q^2(z)$$

tienen algún cero en común. Entonces, tal cero debe ser uno de los  $z_j$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Esto es, para algún  $j \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$Q^2(z_j) = 0 \implies Q(z_j) = 0$$

y

$$P'(z_j)Q(z_j) - P(z_j)Q'(z_j) = 0.$$

Como  $Q(z_j) = 0$ , despejando en la igualdad anterior, tenemos que:

$$P(z_j)Q'(z_j) = 0.$$

Como hemos supuesto que  $P$  y  $Q$  no tienen ceros comunes, entonces  $P(z_j) \neq 0$  y, por tanto,  $Q'(z_j) = 0$ . En ese caso,  $z_j$  sería un cero de multiplicidad, al menos, 2 de  $Q$ . Hemos llegado a una contradicción pues los ceros de  $Q$  son simples. Por tanto, la expresión de  $R'$  dada por (2.28) está reducida.

Tenemos que el número de ceros de  $R'$  coincide con el número de ceros de la función

$$P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z).$$

Esto es lo mismo que hallar el número de ceros de la expresión polinómica dada por:

$$Q(z)^2R'(z). \quad (2.29)$$

Vamos a hallar el número de ceros de (2.29). Para ello, estudiamos cuál es el orden de crecimiento en el  $\infty$  de cada uno de los factores. Tenemos que  $R$  tiene  $d$  polos simples en  $\mathbb{C}$ . Esto implica que  $Q$  tiene  $d$  ceros simples en  $\mathbb{C}$ . Entonces,

$$\text{gr}(Q) = d \text{ y } \text{gr}(Q^2) = 2d.$$

Luego,

$$\frac{Q(z)^2}{z^{2d}}$$

tiene límite finito y no nulo cuando  $z \rightarrow \infty$ . Por tanto, el orden de crecimiento de  $Q(z)^2$  en el infinito es igual a  $2d$ .

Por otro lado, como  $v_R(\infty) = 1$ , entonces  $R$  es inyectiva en un entorno del infinito y, por tanto,  $R\left(\frac{1}{z}\right)$  es inyectiva en un entorno del origen. Entonces, en un entorno del origen, podemos escribir:

$$R\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + Az + \dots,$$

donde  $A \neq 0$ . Si derivamos en la expresión anterior obtenemos

$$-\frac{1}{z^2}R'\left(\frac{1}{z}\right) = A + \dots$$

Reemplazando  $\frac{1}{z}$  por  $z$  llegamos a una expresión de la forma:

$$-z^2R'(z) = A + \dots$$

Luego, si  $z$  tiende a  $\infty$ ,  $z^2R'(z)$  tiene límite finito y no nulo. Por tanto, el orden de crecimiento de  $R'$  en el infinito es  $-2$ . De este modo, el grado de  $Q(z)^2R'(z)$  es  $2d - 2$  como queríamos probar. □

Terminamos la sección con un resultado que localiza los valores críticos de  $R^n$  en términos de los puntos críticos de  $R$ .

**Teorema 2.7.5.** *Sea  $C$  el conjunto de puntos críticos de una función racional  $R$ . Entonces, el conjunto de puntos críticos de la iterada  $R^n$  es*

$$R(C) \cup \dots \cup R^n(C).$$

*Demostración.* Este resultado es consecuencia del Teorema 2.5.1. Sean  $R$  una función racional y  $C$  el conjunto de puntos críticos de  $R$ . Supongamos que  $z$  es un punto que pertenece a la unión

$$R(C) \cup \dots \cup R^n(C).$$

Luego, puedo construir una sucesión

$$z_0, z_1 = R(z_0), \dots, z = z_n = R(z_{n-1}),$$

donde alguno de los  $z_j$  pertenece a  $C$ . Supongamos que  $z \in R(C)$ . Entonces, existe  $z_{n-1} \in C$  tal que

$$z = z_n = R(z_{n-1}).$$

A su vez, existe  $z_{n-2} \in R^{-1}\{z_{n-1}\}$  tal que

$$z_{n-1} = R(z_{n-2}),$$

y seguimos así hasta formar una sucesión

$$(z_j)_{j=0}^n.$$

Si  $z \in R^k(C)$  para cualquier  $k \in \{1, \dots, n\}$  razonamos de la misma forma hasta llegar a una sucesión como la anterior.

Con esto, aplicamos el Teorema 2.5.1 y deducimos que

$$v_{R^n}(z_0) = v_R(R^{n-1}(z_0)) v_R(R^{n-2}(z_0)) \cdot \dots \cdot v_R(z_0) = v_R(z_{n-1}) v_R(z_{n-2}) \cdot \dots \cdot v_R(z_0) > 1,$$

pues existe algún  $z_j \in C$ . De este modo, tenemos que  $R^n(z) = R^n(R^n(z_0)) = (R^n \circ R^n)(z_0)$ . Luego, aplicando nuevamente el Teorema 2.5.1 llegamos a que

$$v_{R^n}(z) = v_{R^n \circ R^n}(z_0) = v_{R^n}(R^n(z_0)) v_{R^n}(z_0) > 1,$$

pues  $v_{R^n}(z_0) > 1$ .

Recíprocamente, si  $z$  es un valor crítico de  $R^n$ , entonces existe una sucesión como la de antes tal que la valencia de  $R^n$  en  $z_0$  es mayor que uno. Como se verifica:

$$v_{R^n}(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} v_R(z_j) > 1,$$

entonces algún  $z_j$  satisface

$$v_R(z_j) > 1.$$

Por tanto,  $z_j \in C$ .

□

## 2.8. Una topología para las funciones racionales.

Sean  $\mathcal{C}$  la clase de funciones continuas definidas de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$  y  $\mathcal{R}$  la subclase de las funciones racionales. La métrica

$$\rho(R, S) = \sup\{\sigma_0(R(z), S(z)) : z \in \mathbb{C}_\infty\}$$

sobre  $\mathcal{C}$  es la métrica de la convergencia uniforme sobre  $\mathbb{C}_\infty$ . Como las distancias cordal y esférica solo difieren en una constante acotada, podríamos usar sin problemas la métrica cordal.

**Teorema 2.8.1.** *La aplicación grado definida como*

$$gr: \mathcal{R} \longrightarrow \{0, 1, \dots\}$$

*es continua. En particular, si la sucesión de funciones racionales  $R_n$  converge uniformemente a  $R$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , entonces  $R$  es una función racional y, para  $n$  suficientemente grande, se verifica la igualdad:*

$$gr(R) = gr(R_n).$$

*Demostración.* La prueba de este teorema consiste en utilizar técnicas de Variable Compleja elementales, de modo que vamos a hacer un esquema de la prueba desarrollando las ideas más importantes:

En primer lugar, la convergencia uniforme de  $R_n$  a  $R$  nos garantiza que  $R$  es analítica en la esfera de Riemann y, por tanto,  $R$  es una función racional. Como la aplicación dada por

$$gr: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es una aplicación definida entre espacios métricos, basta trabajar con sucesiones. Supongamos que  $R_n$  converge uniformemente a  $R$  en la esfera de Riemann. Queremos probar que, para  $n$  suficientemente grande,

$$gr(R_n) = gr(R).$$

Si  $R$  es una función constante, esta igualdad es trivial. De manera que, suponemos que

$$\text{gr}(R) \geq 1.$$

Supongamos que  $R(\infty) \neq 0$ . En otro caso, consideraríamos como  $R$  y  $R_n$  a las funciones  $\frac{1}{R}$  y  $\frac{1}{R_n}$ . De este modo,  $R$  tiene todos sus ceros en  $\mathbb{C}$ . Ahora, consideramos pequeños discos, disjuntos  $D_j$  tales que  $z_j \in D_j$  para cada  $z_j$  cero de  $R$  y  $D_j$  no contiene ningún polo de  $R$ . Sea  $K$  el conjunto complementario de la unión de dichos discos  $D_j$ . Así, tenemos que para  $n$  suficientemente grande,  $R_n$  se acerca uniformemente a  $R$  y, por tanto,  $R_n$  no tiene polos en  $D_j$ . El Teorema de Rouché estudiado en la asignatura de Variable Compleja nos asegura que  $R_n$  y  $R$  tienen el mismo número de ceros en cada  $D_j$ . Finalmente,  $R$  está acotada en  $K$ , por tanto, para  $n$  suficientemente grande, también lo está  $R_n$ . Luego, a partir de  $n$  suficientemente grande,  $R_n$  y  $R$  tienen el mismo número de ceros y, por tanto, el mismo grado.

□

## Capítulo 3

# Los conjuntos de Julia y Fatou

Las notas de este capítulo están sacadas del Capítulo 3 de [2].

### 3.1. Los conjuntos de Julia y de Fatou.

Aunque debemos asumir que el lector está familiarizado con las ideas básicas de espacios métricos (por ejemplo, continuidad uniforme y compacidad), la definición de continuidad sirve para motivar la crucial noción de equicontinuidad: una función  $f$  definida de un espacio métrico  $(X, d)$  en un espacio métrico  $(X_1, d_1)$  es continua en el punto  $x_0$  en  $X$  si para todo  $\varepsilon$  positivo, existe  $\delta$  positivo tal que para todo  $x$  se verifica:

$$\text{si } d(x_0, x) < \delta \text{ entonces } d_1(f(x_0), f(x)) < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Es claro que  $\delta$  depende de  $f$ ,  $x_0$  y  $\varepsilon$ , pero si conseguimos encontrar un valor de  $\delta$  tal que (3.1) se verifique para todo  $x$  perteneciente a  $X$  y para todo  $f$  en alguna familia  $\mathcal{F}$  de funciones definidas de  $X$  en  $Y$ , decimos que la familia  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $x_0$ . Observamos que la definición de equicontinuidad de una familia de funciones  $\mathcal{F}$  en un punto  $x_0$  es la expresión “formal” de la idea de “preservar la proximidad”. De hecho, esto implica que toda función  $f$  de  $\mathcal{F}$  transforma una bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $\delta$  en una bola de radio, a lo más,  $\varepsilon$ . La definición formal de este concepto es el siguiente:

**Definición 3.1.1.** Sean  $(X, d)$  y  $(X_1, d_1)$  dos espacios métricos,  $\mathcal{F}$  una familia de funciones definidas de  $(X, d)$  en  $(X_1, d_1)$  y  $x_0$  un punto de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $x_0$  si para todo  $\varepsilon$  positivo, existe  $\delta$  positivo tal que para todo  $x \in X$  y para todo  $f \in \mathcal{F}$  se verifica:

$$\text{si } d(x_0, x) < \delta \text{ entonces } d_1(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Decimos que la familia  $\mathcal{F}$  es equicontinua en un conjunto  $X_0 \subset X$  si  $\mathcal{F}$  es equicontinua en todo punto de  $X_0$ .

Si la familia  $\mathcal{F}$  es equicontinua en subconjuntos  $D_\alpha$  de  $X$ , entonces  $\mathcal{F}$  es equicontinua en la unión de ellos,  $\cup D_\alpha$ . Si tomamos la colección de elementos  $\{D_\alpha\}$  como la clase de todos los subconjuntos abiertos de  $X$  en los que la familia de funciones  $\mathcal{F}$  es equicontinua llegamos al siguiente principio general:

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones definidas de  $(X, d)$  en  $(X_1, d_1)$ . Entonces, existe un abierto maximal de  $X$  donde  $\mathcal{F}$  es equicontinua. En particular, si  $f$  está definida de  $(X, d)$  en sí mismo entonces hay un abierto maximal de  $X$  donde la familia de iteradas  $\{f^n\}$  es equicontinua.*

*Demostración.* Siguiendo el razonamiento del comentario anterior, tomamos la colección de todos los abiertos  $\{D_\alpha\}$  donde la familia de funciones  $\mathcal{F}$  es equicontinua. De este modo, la unión  $\cup D_\alpha$  es un abierto,  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $D$  y es claro que  $D$  es el mayor abierto posible donde  $\mathcal{F}$  es equicontinua, pues si  $G$  es un abierto donde  $\mathcal{F}$  es equicontinua, entonces  $G \subset D$ . Finalmente,  $D$  es el abierto maximal que buscamos. □

Este resultado nos proporciona (por fin) una definición formal de los conjuntos de Julia y Fatou de funciones racionales  $R$ . La notación ha sido escogida en honor a los impulsores de esta teoría:

**Definición 3.1.3.** *Sea  $R$  una función racional no constante. El conjunto de Fatou de  $R$ ,  $F(R)$ , es el abierto maximal contenido en  $\mathbb{C}_\infty$  donde la familia de funciones  $\{R^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es equicontinua. El conjunto de Julia de  $R$ ,  $J(R)$ , es su complementario en  $\mathbb{C}_\infty$ , esto es,*

$$J(R) = \mathbb{C}_\infty \setminus F(R).$$

Aunque es habitual el uso del término “conjunto de Julia” en la teoría de Dinámicas Complejas, el uso del término “conjunto de Fatou” no empezó a utilizarse hasta el año 1984. Antes de esa fecha, era habitual referirse a tal conjunto como el *conjunto estable* o el *conjunto de normalidad*.

A partir de aquí, denotaremos por  $F$  y por  $J$  a los conjuntos de Fatou y Julia de una función racional  $R$  respectivamente siempre y cuando no haya lugar a confusión. Sabemos por definición que  $F$  es abierto y, como consecuencia,  $J$  es compacto.

Terminamos la sección con dos simples, pero importantes, propiedades de  $F$  y  $J$ . El Teorema 2.3.1 nos asegura que una función racional y, en particular, una transformación

de Möbius y su inversa satisfacen la condición de Lipschitz respecto de la distancia esférica (y cordal) en  $\mathbb{C}_\infty$ . Por tanto, si conjugamos  $R$  con una transformación de Möbius, la equicontinuidad se transmite de manera natural y tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.1.4.** *Sea  $R$  una función racional no constante,  $g$  una transformación de Möbius y  $S = g \circ R \circ g^{-1} = gRg^{-1}$ . Entonces,  $F(S) = g(F(R))$  y  $J(S) = g(J(R))$ .*

*Demostración.* Sea  $R$  una función racional no constante. Sabemos que  $F(R)$  es el abierto maximal contenido en  $\mathbb{C}_\infty$  donde la familia de funciones  $\{R^n\}$  es equicontinua. Consideramos  $g$  una transformación de Möbius. El Teorema 2.3.1 nos asegura que existe una constante  $M > 0$  tal que  $g$  satisface la condición de Lipschitz. Tomamos un punto  $z_0 \in F(R)$ . De este modo, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$  y para todo  $k$ , se verifica

$$\sigma\left(R^k(z_0), R^k(z)\right) < \frac{\varepsilon}{M},$$

siempre que  $\sigma(z_0, z) < \delta$ . Por tanto, si  $\sigma(z_0, z) < \delta$ ,

$$\sigma\left(gR^k(z_0), gR^k(z)\right) \leq M\sigma\left(R^k(z_0), R^k(z)\right) < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Consideramos ahora la inversa de  $g$ ,  $g^{-1}$ , y su constante de Lipschitz asociada,  $M' > 0$ . Si escribimos  $z_0 = g^{-1}(w_0)$ , esto es,  $w_0 = g(z_0)$ ; y  $z = g^{-1}(w)$ , tenemos que si  $\sigma(w_0, w) < \frac{\delta}{M'}$ , entonces

$$\sigma(z_0, z) = \sigma(g^{-1}(w_0), g^{-1}(w)) < \delta.$$

Aplicando (3.2) tenemos que

$$\sigma\left(gR^k g^{-1}(w_0), gR^k g^{-1}(w)\right) = \sigma\left(gR^k(z_0), gR^k(z)\right) < \varepsilon$$

siempre que  $\sigma(w_0, w) < \frac{\delta}{M'}$ . Acabamos de probar que  $g(z_0) \in F(R)$ . De este modo, concluimos que  $g(F(R)) \subset F(S)$ . La prueba de que  $g^{-1}(F(S)) \subset F(R)$  se razona de manera análoga. Podemos concluir así que

$$F(S) = g(F(R)).$$

Además, tenemos que

$$z \in J(S) \iff z \in F(S)^c \iff z \in g(F(R))^c \iff z \in g(F(R)^c) \iff z \in g(J(R)).$$

Deducimos así que también se da la igualdad:  $J(S) = g(J(R))$ . □



Un argumento similar nos lleva al siguiente resultado:

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $R$  una función racional no constante. Entonces, para todo  $p$  entero positivo se verifica:  $F(R^p) = F(R)$  y  $J(R^p) = J(R)$ .*

*Demostración.* Vamos a empezar probando que  $F(R) \subset F(R^p)$ :

Sea  $S = R^p$ . Definimos las familias de funciones  $\mathcal{F}' = \{S^n : n \geq 1\}$  y  $\mathcal{F} = \{R^n : n \geq 1\}$ . Así,  $\mathcal{F}'$  está contenida en  $\mathcal{F}$  y, en particular,  $\mathcal{F}'$  es equicontinua donde  $\mathcal{F}$  lo es. Tenemos así que:

$$F(R) \subset F(S).$$

Veamos la otra implicación: partimos de que cada  $R^k$  satisface la condición de Lipschitz. Entonces, la familia de funciones dada por:

$$\mathcal{F}_k = \{R^k S^n : n \geq 0\}$$

es equicontinua donde lo es  $\mathcal{F}'$ . En particular, cada  $\mathcal{F}_k$  es equicontinua en  $F(S)$ . Por tanto, la unión finita de familias de funciones  $\mathcal{F}_0 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{p-1}$  también es equicontinua en  $F(S)$ . Además,

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=0}^{p-1} \mathcal{F}_j &= \{S^n : n \geq 0\} \cup \{RS^n : n \geq 0\} \cup \dots \cup \{R^{p-1}S^n : n \geq 0\} = \\ &= \{R^{np} : n \geq 0\} \cup \{R^{np+1} : n \geq 0\} \cup \dots \cup \{R^{np+p-1} : n \geq 0\} = \\ &= \{1, R^p, R^{2p}, \dots\} \cup \{R, R^{p+1}, R^{2p+1}, \dots\} \cup \dots \cup \{R^{p-1}, R^{2p-1}, R^{3p-1}, \dots\} = \\ &= \{R^n : n \geq 0\}, \end{aligned}$$

pues  $S = R^p$ . Tenemos que:  $\bigcup_{j=0}^{p-1} \mathcal{F}_j = \{R^n : n \geq 0\}$  es equicontinua en  $F(S)$  y  $\mathcal{F} = \{R^n : n \geq 1\}$  está contenida en  $\{R^n : n \geq 0\}$  entonces,  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $F(S)$  y, finalmente,  $F(S) = F(R)$ .

Además,

$$J(R) = \mathbb{C}_\infty \setminus F(R) = \mathbb{C}_\infty \setminus F(S) = J(S).$$

□

### 3.2. Conjuntos completamente invariantes.

En esta sección vamos a discutir las consecuencias de que un conjunto sea invariante al aplicarle una cierta función. Para ello, empezamos distinguiendo tres tipos de invarianza:

**Definición 3.2.1.** Sean  $g : X \rightarrow X$  una función definida de  $X$  en sí mismo y  $E$  un subconjunto de  $X$ . Se dice que  $E$  es:

I). Invariante hacia delante si se verifica:  $g(E) = E$ .

II). Invariante hacia atrás si satisface:  $g^{-1}(E) = E$ .

III). Completamente invariante si se dan las igualdades:  $g(E) = E = g^{-1}(E)$ .

Si  $g$  es sobreyectiva, esto es,  $g(X) = X$  entonces los conceptos de invarianza hacia atrás y completa coinciden pues:  $E = g(g^{-1}(E))$  por ser  $g$  sobreyectiva y  $g^{-1}(E) = E$  por ser  $E$  invariante hacia atrás; y así tenemos que:

$$E = g(g^{-1}(E)) = g(E).$$

La condición de que  $g$  sea sobreyectiva es crucial a la hora de que ambos conceptos, invarianza completa y hacia atrás, coincidan. Por ejemplo,  $\mathbb{C}$  es invariante hacia atrás pero no completamente invariante bajo la aplicación dada por:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z. \end{aligned}$$

Nuestro principal objetivo son las funciones racionales. Estas transforman  $\mathbb{C}_\infty$  en sí mismo, esto es, todas las transformaciones racionales son sobreyectivas sobre  $\mathbb{C}_\infty$  y, por tanto, ambos conceptos coinciden. Ilustramos estas ideas en el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.2.** Sea  $R$  una función racional de grado, al menos, dos y  $E$  un conjunto finito completamente invariante bajo  $R$ . Entonces,  $E$  tiene, a lo más, dos elementos.

*Demostración.* Supongamos que  $E$  tiene  $k$  elementos. Tenemos por hipótesis que  $E$  es un conjunto finito y completamente invariante bajo  $R$ , esto es, se verifica la igualdad:  $R(E) = E$ . Deducimos así que  $R$  debe actuar como una permutación sobre  $E$ . En ese caso, existe un número natural  $q$  tal que  $R^q$  es la identidad en  $E$ .

Ahora, supongamos que  $R^q$  es una función racional de grado  $d$ . Tenemos así que, para todo  $w$  en  $E$ , la ecuación  $R^q(z) - w = 0$  tiene  $d$  soluciones. Como  $R^q$  es la identidad, realmente, tenemos que  $z = w$  es un cero de multiplicidad  $d$ . Aplicando la fórmula dada en el Teorema 2.7.3 a  $R^q$  llegamos a la desigualdad:

$$k(d - 1) \leq 2d - 2.$$

Como  $d \geq 2$  por hipótesis, despejamos adecuadamente la expresión anterior y obtenemos que  $k \leq 2$ , es decir,  $E$  tiene, a lo más, 2 elementos.

□

Es conveniente reunir varias propiedades generales, pero elementales, de los conjuntos completamente invariantes. Para ello, supondremos que  $g: X \rightarrow X$  es sobreyectiva. Así podremos intercambiar los conceptos de invarianza hacia atrás y completa.

En primer lugar veamos que la completa invarianza es invariante por conjugación. Sea  $E$  un conjunto completamente invariante bajo  $g$  y  $h: X \rightarrow X$  una aplicación biyectiva. Entonces,  $h(E)$  es completamente invariante bajo  $h \circ g \circ h^{-1} = hgh^{-1}$ .

Ahora, aplicamos la construcción habitual que se utiliza para generar, por ejemplo, subgrupos, subespacios y topologías. El operador  $g^{-1}$  conmuta con la intersección, esto es, dada una colección de conjuntos  $\{E_\alpha\}$ ,

$$g^{-1} \left( \bigcap E_\alpha \right) = \bigcap g^{-1}(E_\alpha).$$

Tenemos así que la intersección de una familia de conjuntos completamente invariantes bajo una aplicación sobreyectiva es completamente invariante bajo la misma aplicación. Esto quiere decir que, dado un conjunto  $E_0$ , llamamos  $E$  a la intersección de todos los conjuntos completamente invariantes que contienen a  $E_0$ . Entonces,  $E$  es el conjunto completamente invariante más pequeño que contiene a  $E_0$ . En este caso, decimos que  $E_0$  genera a  $E$ .

Introducimos ahora una relación de equivalencia que nos facilitará la discusión acerca de los conjuntos completamente invariantes. Sean  $x, y \in X$ , definimos la relación  $\sim$  sobre  $X$  como:

$$x \sim y \text{ si y solo si existen } n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tales que } g^n(x) = g^m(y).$$

Es fácil ver que esta relación es de equivalencia pues es reflexiva, simétrica y transitiva. Veamos esta última: si  $x \sim y$  y  $y \sim z$  entonces existen  $n, m, p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que:

$$g^n(x) = g^m(y) \text{ y } g^p(y) = g^q(z).$$

Si componemos con  $g^p$  en la primera igualdad y con  $g^m$  en la segunda, obtenemos:

$$g^{n+p}(x) = g^{m+p}(y) = g^{m+q}(z).$$

Hemos encontrado así dos números  $n+p, m+q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que  $g^{n+p}(x) = g^{m+q}(z)$  y, por tanto,  $x \sim z$ .

**Definición 3.2.3.** Llamamos órbita de  $x$  a la clase de equivalencia dada por la relación anterior que contiene a  $x$  y la denotaremos por  $[x]$ .

El siguiente teorema nos ayudará a identificar la órbita de  $x$ :

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $g: X \rightarrow X$ . Entonces,  $[x]$  es el conjunto completamente invariante generado por el conjunto unitario  $\{x\}$ .*

*Demostración.* En esta prueba denotaremos por  $\langle x \rangle$  al conjunto completamente invariante generado (bajo  $g$ ) por  $\{x\}$ . Cuando terminemos la prueba, pasaremos a usar  $[x]$  en su lugar.

En primer lugar, tomamos un elemento de la órbita de  $x$ ,  $y \in [x]$ . Entonces, existen  $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que  $g^m(y) = g^n(x)$ . Despejando adecuadamente, obtenemos:

$$y \in g^{-m}g^n(\{x\}) \subset g^{-m}g^n(\langle x \rangle) = \langle x \rangle.$$

La última igualdad la tenemos pues  $\langle x \rangle$  es completamente invariante (bajo  $g$ ). Deducimos así que  $[x] \subset \langle x \rangle$ .

Ahora, solo falta demostrar que el conjunto  $[x]$  es completamente invariante (bajo  $g$ ). Con ello, tendremos que  $\langle x \rangle$  es el conjunto completamente invariante más pequeño que contiene a  $x$

Si probamos que el conjunto  $[x]$  es completamente invariante (bajo  $g$ ), tendremos, por un lado que  $\langle x \rangle$  es el conjunto completamente invariante más pequeño que contiene a  $x$  y, por otro lado, que  $[x]$  es un conjunto completamente invariante que también contiene a  $x$ . Entonces,  $\langle x \rangle \subset [x]$  y, así completamos la igualdad:  $\langle x \rangle = [x]$ . Veamos pues que  $[x]$  es completamente invariante: partimos de que  $y \sim g(y)$  pues  $g^0(y) = g^1(y)$ . Entonces,  $x \sim y$  si y solo si  $x \sim g(y)$ . Esto es equivalente a decir que:

$$y \in [x] \text{ si y solo si } g(y) \in [x].$$

Esto nos muestra que  $y \in [x]$  si y solo si  $g^{-1}([x])$ . Finalmente,  $[x]$  es completamente invariante. □

Una consecuencia directa del Teorema 3.2.4 es que un conjunto  $E$  es completamente invariante si y solo si se puede escribir como unión de clases de equivalencias  $[x]$ . En ese caso, su complementario,  $E^c$  también se puede escribir como unión de ciertas clases de equivalencias y, por tanto, también es un conjunto completamente invariante. Esto nos sugiere que debemos estudiar qué ocurre con los operadores de conjuntos complementario, interior, frontera y clausura:

**Teorema 3.2.5.** *Sean  $g: X \rightarrow X$  una aplicación abierta y continua definida en un espacio topológico y  $E$  un conjunto completamente invariante (bajo  $g$ ). Entonces, su complementario*

en  $X$ ,  $X \setminus E$ ; su interior,  $E^0$ ; su frontera,  $\partial E$  y su clausura  $\overline{E}$  son completamente invariantes (bajo  $g$ ).

*Demostración.* Ya hemos visto que  $X \setminus E$  es completamente invariante (bajo  $g$ ). Veamos qué ocurre con el interior de  $E$ : como  $E^0 \subset X$  es abierto y  $g$  es una aplicación continua en  $X$ , entonces,  $g^{-1}(E^0) \subset g^{-1}(E)$  es abierto. Como  $E$  es completamente invariante entonces,  $g^{-1}(E) = E$ . Tenemos así que  $g^{-1}(E^0)$  es un abierto de  $E$  y  $g^{-1}(E^0) \subset E^0$ .

Análogamente, tenemos que  $E$  es completamente invariante  $g(E) = E$  y  $g$  es una aplicación abierta. Entonces,

$$g(E^0) \subset g(E) = E.$$

Deducimos así que  $g(E^0)$  es un abierto de  $E$  y  $g(E^0) \subset E^0$ . Si componemos con  $g^{-1}$  llegamos a:

$$E^0 \subset g^{-1}(g(E^0)) \subset g^{-1}(E^0).$$

Finalmente,  $g^{-1}(E^0) = E^0$  y concluimos que  $E^0$  es completamente invariante (bajo  $g$ ).

Ya tenemos que la completa invarianza de  $E$  implica la de  $X \setminus E$  y  $E^0$ . Aplicando argumentos topológicos se puede probar, en este caso, la frontera y la clausura de  $E$  también son conjuntos completamente invariantes bajo  $g$ . □

Vamos a probar ahora que la división de la esfera en los conjuntos de Julia y Fatou es completamente invariante, un resultado fundamental.

**Teorema 3.2.6.** *Sea  $R$  una función racional. Entonces, los conjuntos de Julia y Fatou de  $R$ ,  $F$  y  $J$  son completamente invariantes bajo  $R$ .*

*Demostración.* Sabemos por el Teorema 3.2.5 que, si  $F$  es completamente invariante bajo  $R$  entonces  $J$  también lo es. Por otro lado, como  $R$  es una aplicación racional, es sobreyectiva en  $\mathbb{C}_\infty$  y, un conjunto  $E$  es completamente invariante (bajo  $R$ ) si y solo es invariante hacia atrás (bajo  $R$ ). Luego, para demostrar este resultado nos reducimos al caso en el que  $F$  es invariante hacia atrás, esto es,  $R^{-1}(F) = F$ . Lo vemos por doble contención:

En primer lugar, vamos a probar que  $R^{-1}(F) \subset F$ . Para ello, tomamos un punto  $z_0$  que esté en  $R^{-1}(F)$  y llamamos  $w_0$  a su imagen por  $R$ ,  $w_0 = R(z_0)$ . Entonces,  $w_0 \in F$ . Como  $F$  es el abierto maximal de  $\mathbb{C}_\infty$  donde la familia de funciones iteradas  $\{R^n\}$  es equicontinua y  $w_0 \in F$ , se verifica que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $\sigma(w, w_0) < \delta$  entonces  $\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) < \varepsilon$ , para todo  $n$ . Como  $R$  es una función continua en  $\mathbb{C}_\infty$ , existe  $\rho > 0$

tal que si  $\sigma(z, z_0) < \rho$  entonces  $\sigma(R(z), R(z_0)) < \delta$ . Aplicando lo anterior tenemos que, entonces,

$$\sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon.$$

Con esto hemos probado que la familia de funciones  $\mathcal{F}_1 = \{R^{n+1} : n \geq 1\}$  es equicontinua en  $z_0$ . Entonces,  $\{R\} \cup \mathcal{F}_1 = \{R^n : n \geq 1\}$  también es equicontinua en  $z_0$ , pues lo es  $\mathcal{F}_1$  y  $R$  es continua en  $\mathbb{C}_\infty$ . Tenemos así que la familia de funciones  $\{R^n : n \geq 1\}$  es equicontinua en  $z_0$  y, por tanto, en  $R^{-1}(F)$ . Como  $R^{-1}(F)$  es abierto, deducimos que  $R^{-1}(F) \subset F$ .

Veamos ahora la otra contención: sea  $z_0$  un punto de  $F$  y  $w_0$  su imagen por  $R$ ,  $w_0 = R(z_0)$ . Como  $z_0$  pertenece a  $F$ , dado cualquier número positivo  $\varepsilon$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $n$  se verifica:

$$\text{si } \sigma(z, z_0) < \delta \text{ entonces } \sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon.$$

El conjunto de los  $z$  que satisfacen la condición de  $\sigma(z, z_0) < \delta$  es un entorno abierto,  $N$  de  $z_0$ . Luego,  $R(N)$  es un entorno abierto de  $w_0$ . Si tomamos  $w$  en  $R(N)$  entonces, tenemos que  $w = R(z)$  para algún  $z \in N$  y

$$\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) = \sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon.$$

Por tanto, si  $w_0$  pertenece a  $F$ , entonces  $F \subset R^{-1}(F)$ . Finalmente,  $F = R^{-1}(F)$  y, podemos concluir que tanto  $F$  como  $J$  son conjuntos completamente invariantes bajo  $R$ .  $\square$

**Teorema 3.2.7.** *Sea  $P$  un polinomio de grado, al menos, 2. Entonces,  $\infty$  está en  $F(P)$  y la componente  $F_\infty$  de  $F$  que contiene al punto del infinito es completamente invariante bajo  $P$ .*

*Demostración.* Sea  $W \subset \mathbb{C}_\infty$  un entorno de  $\infty$  donde  $P^n$  converge uniformemente a  $\infty$ . Entonces, se verifica que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  entero tal que, si  $z$  y  $w$  están en  $W$  y  $n \geq N$ , entonces

$$\sigma(P^n(z), P^n(w)) \leq \sigma(P^n(z), \infty) + \sigma(\infty, P^n(w)) < \varepsilon.$$

Luego, la familia de iteradas  $\{P^n\}$  es equicontinua en  $W$  y  $\infty$  está en  $F(P)$ .

Para ver que  $F_\infty$  es completamente invariante bajo  $P$ , observamos que:

- i).  $\infty \in P(F_\infty)$  pues  $\infty \in F_\infty$  y  $P(\infty) = \infty$ .
- ii).  $P(F_\infty) \subset F$  pues hemos visto en el Teorema 3.2.6 que  $F$  es completamente invariante.

III).  $P(F_\infty)$  es conexo pues  $F_\infty$  es conexo y la función  $P$  es continua en  $\mathbb{C}$ .

Por tanto,  $P$  transforma  $F_\infty$  en sí mismo. Tomando  $P^{-1}$  llegamos a que  $F_\infty \subset P^{-1}(F_\infty)$ .

Supongamos ahora que  $z$  pertenece a  $P^{-1}(F_\infty)$ . Aplicando nuevamente el Teorema 3.2.6 tenemos que  $z$  pertenece a alguna componente conexa  $F_1$  de  $F$  y, razonando como antes, deducimos que  $P$  transforma  $F_1$  en  $F_\infty$ . Entonces,  $P(F_1) \subset F_\infty$ .

En realidad, en la expresión anterior se da la igualdad, pues, si  $P(F_1)$  no fuese igual a  $F_\infty$ , entonces existiría un punto  $\zeta$  perteneciente a la frontera de  $F_1$  tal que  $P(\zeta) \in F_\infty$ . Esto no puede ocurrir pues, en ese caso,  $\zeta$  pertenecería a  $J(P)$  y, hemos probado en el Teorema 3.2.6 que  $J$  es un conjunto completamente invariante. Deducimos entonces que  $P(F_1) = F_\infty$ . Por tanto,  $F_1$  contiene algún punto  $w$  tal que  $P(w) = \infty$ . Pero entonces,  $w = \infty$ ,  $F_1 = F_\infty$ ,  $z \in F_\infty$ . Luego,  $P^{-1}(F_\infty) \subset F_\infty$ .

Finalmente,  $F$  es completamente invariante bajo  $P$ .

□

El siguiente resultado nos será de gran utilidad más adelante:

**Teorema 3.2.8.** *Sean  $X$  un espacio topológico con un número finito de componentes,  $X_1, \dots, X_n$ . Sea  $f: X \rightarrow X$  una aplicación continua y sobreyectiva. Supongamos que  $X$  es un espacio topológico con un número finito de componentes  $X_j$ . Entonces, existe  $m$  natural tal que, para todo  $j = 1, \dots, n$ ,  $X_j$  es completamente invariante bajo  $f^m$ .*

*Demostración.* Tenemos que, para cada  $j = 1, \dots, n$ ,  $X_j$  es una componente conexa de  $X$ . Como  $f$  es una función continua entonces,  $f(X_j)$  es conexo para todo  $j$ . Así,  $f$  induce una aplicación  $\tau$  definida en  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $\tau(i) = j$ , donde  $f(X_i) \subset X_j$ . Como  $f$  es sobreyectiva, también lo es  $\tau$  y, por tanto,  $\tau$  define una permutación de los elementos de  $\{1, \dots, n\}$ . Podemos hablar del orden de  $\tau$ . Éste es finito,  $m \in \mathbb{N}$ . Así, para todo  $j = 1, \dots, n$

$$f^m(X_j) = X_j.$$

Como  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  son disjuntos dos a dos, al aplicar  $f^{-m}$  en la igualdad anterior obtenemos:

$$X_j = f^{-m}(X_j)$$

y, finalmente, hemos llegado a que cada  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  es completamente invariante bajo  $f^m$ .

□

### 3.3. Familias normales y equicontinuidad.

Hemos definido los conjuntos de Julia y Fatou en términos de equicontinuidad de la familia  $\{R^n\}$ . Sin embargo, el concepto de equicontinuidad está íntimamente relacionado con el concepto de familias normales de funciones analíticas. Una vez que hayamos entendido esta relación, podremos enfrentarnos a los resultados más poderosos sobre familias normales de funciones analíticas y obtener más información acerca de los conjuntos de Julia y Fatou. Este es el objetivo de esta sección.

Para ello, empezaremos definiendo algunos conceptos clave sobre familias normales:

**Definición 3.3.1.** Sean  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones definidas entre los espacios topológicos  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$ ; y  $f$  una función. Decimos que  $\{f_n\}$  converge localmente uniformemente sobre  $X_1$  a  $f$  si para todo  $x \in X_1$  existe un entorno  $V_x$  tal que  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ . En este caso, tenemos que la convergencia es uniforme en cada conjunto compacto de  $X_1$ .

**Definición 3.3.2.** Una familia de funciones  $\mathcal{F}$  definidas entre dos espacios topológicos  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  es normal en  $X_1$  si cada sucesión infinita de funciones de  $\mathcal{F}$  contiene una subsucesión que converge localmente uniformemente en  $X_1$ .

Recordamos que el límite de la subsucesión convergente de la definición anterior no tiene por qué pertenecer a  $\mathcal{F}$ .

Por otro lado, aunque hemos definido los conceptos anteriores de manera general para espacios métricos, sólo nos ocupamos del caso en que los espacios sean regiones de la esfera de Riemann con la distancia cordal (o esférica). Enunciamos ahora el teorema de Arzelà-Ascoli:

**Teorema 3.3.3.** (Teorema de Arzelà-Ascoli). Sean  $D$  una región de la esfera compleja y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones continuas definidas de  $D$  en la esfera compleja. Entonces,  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $D$  si y solo si  $\mathcal{F}$  es una familia normal en  $D$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema no la vemos en este trabajo, pero la podemos encontrar en [1, p. 222].

□

Una ilustración del uso del concepto de normalidad en lugar del de equicontinuidad es el teorema de Vitali: partiendo de la prolongación analítica podemos obtener información acerca del límite  $f$  de una sucesión  $\{f_n\}$  sobre una región  $D$  conociendo únicamente  $f$  en una pequeña parte de  $D$ :



**Teorema 3.3.4.** (*Teorema de Vitali*). Supongamos que la familia de funciones analíticas  $\{f_1, f_2, \dots\}$  es normal en una región  $D$  de la esfera de Riemann y que  $(f_n)$  converge puntualmente a alguna función  $f$  en algún abierto no vacío  $W \subset D$ . Entonces,  $f$  se extiende a una función analítica  $F$  en  $D$  y  $f_n \rightarrow F$  localmente uniformemente sobre  $D$ .

*Demostración.* Podemos encontrar la prueba de este teorema en [3, p. 219]. □

Pasamos a estudiar condiciones que nos garanticen la normalidad de una familia de funciones analíticas. Una consecuencia elemental del teorema de la Fórmula Integral de Cauchy (que hemos estudiado en la asignatura de Funciones de Una Variable Compleja) es que si  $f$  es una función holomorfa que satisface la condición  $|f| \leq M$  en una región  $D \subset \mathbb{C}$ , entonces  $|f'|$  está acotada en cada compacto  $K \subset D$ , donde el límite superior depende de  $M$ ,  $K$  y  $D$  pero no de  $f$ . Esto implica que si  $\mathcal{F}$  es una familia de funciones holomorfas y uniformemente acotadas en  $D$ , entonces  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $D$  y, por tanto, gracias al Teorema 3.3.3,  $\mathcal{F}$  es normal en  $D$ . Es posible obtener una variedad de generalizaciones leves de este resultado sin mucho esfuerzo, pero no nos harán falta. En su lugar, veremos directamente uno de los resultados más importantes sobre normalidad: el siguiente resultado es completamente esencial para el estudio de las iteraciones de funciones racionales. Sin embargo, podemos omitir su prueba sin perjudicar la comprensión del texto.

**Teorema 3.3.5.** Sean  $D$  una región de la esfera compleja  $\mathbb{C}_\infty$  y  $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Entonces, la familia  $\mathcal{F}$  compuesta por todas las funciones analíticas definidas en  $f: D \rightarrow \Omega$  es normal en  $D$ .

*Demostración.* Podemos encontrar la prueba de este teorema en [3, p. 57]. □

La hipótesis del Teorema 3.3.5 es que ninguna función de  $\mathcal{F}$  puede tomar los valores 0, 1 y  $\infty$  en ningún punto de  $D$ . Vamos a ver cómo podemos utilizar el Teorema 3.3.5 para originar dos variaciones del mismo tema. En primer lugar, supondremos que ninguna función  $f \in \mathcal{F}$  puede tomar tres valores que ahora dependen de  $f$ . Necesitamos además que los tres valores estén uniformemente separados en la esfera. El resultado del que hablamos es el siguiente:

**Teorema 3.3.6.** Sean  $\mathcal{F}$  una familia de funciones analíticas en una región  $D$  de la esfera compleja. Supongamos que existen una constante  $m$  positiva y que, para toda función  $f$  de  $\mathcal{F}$ , tres puntos distintos  $a_f, b_f$  y  $c_f$  en  $\mathbb{C}_\infty$  tales que:

- a). Si  $f \in \mathcal{F}$  entonces  $f$  no toma los valores  $a_f, b_f$  y  $c_f$  en  $D$ .

b).  $\min\{\sigma(a_f, b_f), \sigma(b_f, c_f), \sigma(c_f, a_f)\} \geq m$ .

Entonces,  $\mathcal{F}$  es normal en  $D$ .

*Demostración.* Para cada función  $f$  de  $\mathcal{F}$ , definimos la transformación de Möbius  $g_f$  tal que:

$$\begin{aligned} g_f(0) &= a_f, \\ g_f(1) &= b_f, \\ g_f(\infty) &= c_f. \end{aligned}$$

Como  $f$  satisface b). estamos en las hipótesis del Teorema 2.3.3. Por tanto, la familia de funciones  $\{g_f : f \in \mathcal{F}\}$  satisface la condición uniforme de Lipschitz sobre  $\mathbb{C}_\infty$  y, se verifica,

$$\sigma(g_f(z), g_f(w)) \leq M\sigma(z, w),$$

donde  $M$  no depende de  $f$ .

Ahora, consideramos  $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus \{0, 1, \infty\}$  y  $\Omega_f = \mathbb{C}_\infty \setminus \{a_f, b_f, c_f\}$  y definimos  $h_f = g_f^{-1}f$ . Así,  $f : D \rightarrow \Omega_f$  es la composición  $f_f h_f$  de las funciones  $h_f : D \rightarrow \Omega$  y  $g_f : \Omega \rightarrow \Omega_f$ . Aplicando aquí el Teorema 3.3.5, tenemos que la familia de funciones  $\{h_f\}$  es normal en  $D$  y, por tanto, equicontinua en  $D$ .

Finalmente,

$$\mathcal{F} = \{g_f h_f : f \in \mathcal{F}\}.$$

Vemos así que la equicontinuidad de la familia de funciones  $\mathcal{F}$  se hereda de la equicontinuidad de la familia de funciones  $\{h_f\}$  y la condición uniforme de Lipschitz de  $\{g_f\}$ . Con esto hemos visto que, partiendo del Teorema 3.3.5 se prueba el Teorema 3.3.6. □

Es fácil ver que el Teorema 3.3.5 es un caso particular del Teorema 3.3.6, tomando  $a_f = 0$ ,  $b_f = 1$  y  $c_f = \infty$  para cada  $f \in \mathcal{F}$ . También tenemos otra variación del Teorema 3.3.5 que vamos a necesitar:

**Teorema 3.3.7.** Sean  $D$  una región,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$  tres funciones holomorfas en  $D$  tales que la clausura de  $\varphi_j(D)$  son disjuntas dos a dos. Ahora, tomamos  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$  tales que: para todo  $z$  en  $D$  y  $f$  en  $\mathcal{F}$ , se verifica:

$$f(z) \neq \varphi_j(z), \quad j = 1, 2, 3.$$

Entonces,  $\mathcal{F}$  es una familia normal en  $D$ .

*Demostración.* Para cada  $w \in D$ , definimos la transformación de Möbius  $g_w$  tal que:

$$\begin{aligned}g_w(0) &= \varphi_1(w), \\g_w(1) &= \varphi_2(w), \\g_w(\infty) &= \varphi_3(w).\end{aligned}$$

Razonamos como en la prueba del Teorema 3.3.6 y aplicamos el Teorema 223 para concluir que la familia de funciones  $\{g_w : w \in D\}$  satisface la condición uniforme de Lipschitz sobre la esfera con una constante que llamamos  $M$ .

Ahora, supongamos que  $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$  y para cada  $\alpha$  definimos la función:

$$F_\alpha(w) = g_w^{-1} f_\alpha(w) = \frac{(f_\alpha(w) - \varphi_1(w))(\varphi_2(w) - \varphi_3(w))}{(f_\alpha(w) - \varphi_3(w))(\varphi_2(w) - \varphi_1(w))}$$

con las convenciones habituales cuando alguno de esos puntos coincide con el  $\infty$ .

Claramente, cada  $F_\alpha$  es holomorfa en  $D$  y no toma los valores 0, 1 ni  $\infty$  en  $D$ . Por tanto, aplicando el Teorema 3.3.5, la familia de funciones dada por  $\{F_\alpha\}$  es normal en  $D$ .

Ahora, consideramos una sucesión  $(f_n)$  de funciones de  $\mathcal{F}$ . Sea  $(F_n)$  la sucesión de funciones correspondientes definidas como anteriormente. Como la familia  $\mathcal{F}$  es normal en  $D$ , y la sucesión  $(F_n)$  es una sucesión de funciones de  $D$ , existe una subsucesión de funciones holomorfas en  $D$  de  $(F_n)$  que converge uniformemente en los compactos de  $D$ . Para tal subsucesión se satisfacen las desigualdades:

$$\sigma(f_n(w), g_w F(w)) = \sigma(g_w F_n(w), g_w F(w)) \leq M \sigma(F_n(w), F(w)).$$

Con esto vemos que el último término de la desigualdad anterior converge a cero uniformemente en compactos de  $D$  entonces. Podemos concluir así que la familia original  $\mathcal{F}$  es normal en  $D$ .

□

## Capítulo 4

# Propiedades de los conjuntos de Julia

Este capítulo está dedicado a desarrollar los conceptos básicos y fácilmente accesibles sobre el conjunto de Julia de funciones racionales. Otras propiedades del conjunto de Julia aparecerán a lo largo del texto. Las notas de este capítulo están basadas en el Capítulo 4 de [2].

### 4.1. Puntos excepcionales.

Empezamos explotando las consecuencias del Teorema 3.3.5. Dada una aplicación racional  $R$ , introducimos en el capítulo anterior la relación de equivalencia dada por  $\sim$ . La clase de equivalencia dada por tal relación la denotábamos como  $[z]$  y era el conjunto completamente invariante más pequeño que contenía al elemento  $z$ . Es fácil ver que  $[z]$  sólo es finito en circunstancias especiales. Damos la siguiente definición:

**Definición 4.1.1.** *Sean  $R$  una función racional. Decimos que un punto  $z$  es excepcional para  $R$  si  $[z]$  es finito. Denotamos por  $E(R)$  al conjunto de puntos excepcionales de  $R$ .*

Primero, justificamos la terminología mostrando que estos puntos son realmente excepcionales.

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $R$  una aplicación racional de grado, al menos, 2. Entonces,  $R$  tiene, a lo más, dos puntos excepcionales. Si  $E$  tiene un único punto,  $E(R) = \{\zeta\}$ , entonces  $R$  es conjugada de un polinomio y  $\zeta$  es conjugado con  $\infty$ . Si  $E(R)$  está formado por dos puntos distintos,  $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ , entonces  $R$  es conjugada con la aplicación que transforma  $z \mapsto z^d$  y hace corresponder  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  con  $0$  y  $\infty$  respectivamente.*

*Demostración.* Es claro que  $E(R)$  es completamente invariante bajo  $R$ . Luego, aplicando el Teorema 3.2.2, sabemos que  $R$  tiene, a lo más, dos puntos excepcionales. De aquí deducimos que, después de hacer la conjugación adecuada, nos quedan cuatro posibilidades:

1.  $E(R) = \emptyset$ .
2.  $E(R) = \{\infty\} = [\infty]$ . Aplicando el Teorema 2.4.5 tendríamos que  $R$  es un polinomio.
3.  $E(R) = \{0, \infty\}$ ,  $[0] = \{0\}$ ,  $\{\infty\} = \infty$ . Análogamente al caso anterior, aplicamos el Teorema 2.4.5 para deducir que  $R$  es un polinomio de la forma:  $R(z) = az^d$ , para algún entero no negativo  $d$ .
4.  $E(R) = \{0, \infty\} = [0] = [\infty]$ . Entonces,  $R(0) = \infty$ ,  $R(\infty) = 0$  y  $R$  tiene todos sus ceros y polos en  $\{0, \infty\}$ . Luego,  $R$  es una función racional de la forma:  $R(z) = az^d$ , donde  $d$  es un entero negativo.

En todos los casos, los puntos excepcionales pertenecen a  $F(R)$ . □

Observamos que el argumento empleado en la prueba del Teorema 4.1.2 nos muestra que, en el sentido habitual, la mayoría de las funciones racionales no tienen puntos excepcionales.

**Corolario 4.1.3.** *Si  $R$  es una aplicación racional de grado, al menos, dos, entonces los puntos excepcionales de  $R$  están en  $F(R)$ .*

*Demostración.* Este corolario es consecuencia de los teoremas: 4.1.2, 3.1.5 y 3.2.7. □

Veamos ahora otra caracterización de los puntos excepcionales. ¿A partir de qué puntos puedo llegar a  $z$  iterando  $R$ ?:

**Definición 4.1.4.** *Sea  $z$  un punto de  $\mathbb{C}_\infty$ . Llamamos conjunto de predecesores de  $z$  al conjunto:*

$$O^-(z) = \{w: R^n(w) = z, \text{ para algún } n\} = \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(\{z\}).$$

*A los puntos de  $O^-(z)$  los llamamos predecesores de  $z$ .*

Como  $O^-(z) \subset [z]$ , si  $z$  es un punto excepcional de  $R$ , entonces su conjunto de predecesores es finito. El siguiente teorema nos probará el recíproco:

**Teorema 4.1.5.** *Dado un punto  $z \in \mathbb{C}_\infty$ , el conjunto de predecesores de  $z$  es finito si y solo si  $z$  es un punto excepcional.*

*Demostración.* En primer lugar, supongamos que  $z$  es un punto excepcional. Esto es, la órbita de  $z$ ,  $[z]$ , es finita. Recordamos que  $y$  pertenece a la órbita de  $z$  si existen  $n$  y  $m$  enteros no negativos tales que  $R^n(z) = R^m(y)$ . Despejando obtenemos:

$$z = R^{m-n}(y) = R^k(y),$$

donde  $k$  es un entero. Luego,

$$[z] = \left\{ y: \text{ existe } k \text{ entero tal que } R^k(y) = z \right\}$$

y, como  $O^-(z) = \{w: \text{ existe } n \geq 0 \text{ tal que } R^n(w) = z\}$ , podemos afirmar que  $O^-(z) \subset [z]$ .

Ahora, supongamos que el conjunto de predecesores de  $z$  es finito. Definimos los siguientes conjuntos no vacíos para  $n$  mayor o igual que cero:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} R^{-m}(\{z\}).$$

Se verifica que  $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$  y

$$[z] \supset O^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$$

Como  $O^-(z)$  es finito, cada  $B_n$  también lo es. Luego, existe  $m$  entero no negativo tal que  $B_m = B_{m+1}$ . Entonces, para algún entero  $m$ ,  $R^{-1}(B_m) = B_m$  y, por tanto,  $B_m$  es completamente invariante. Entonces,  $B_m$  contiene alguna clase de equivalencia  $[w]$ . Este conjunto es finito y está contenido en  $[z]$ . Luego, podemos deducir que esa clase de equivalencia,  $[w]$ , es en realidad,  $[z]$ . Tenemos así que si  $O^-(z)$  es finito,  $[z]$  también. De hecho, acabamos de probar que  $[z] \subset O^-(z)$  y así, bajo las hipótesis de el teorema,  $[z] = O^-(z)$ . □

Una aplicación de este resultado es el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.6.** *Dada una función racional  $R$ . Si existe  $k$  natural tal que la  $k$ -ésima iteración de  $R$ ,  $R^k$ , es conjugada de un polinomio entonces  $R^2$  también es conjugada de un polinomio.*

*Demostración.* Supongamos que existe algún  $k$  natural tal que  $R^k$  está conjugada con un polinomio. Entonces, el Teorema 2.4.5 nos asegura que existe un punto  $w \in \mathbb{C}_\infty$  tal que

$$R^{-k}(\{w\}) = \{w\}.$$

Tenemos así que el conjunto de predecesores de  $w$  es finito. Aplicando el Teorema 4.1.5 deducimos que  $w$  es un punto excepcional de  $R$ . Ahora bien,  $R$  no tiene por qué ser conjugada de un polinomio. Sin embargo, el Teorema 4.1.2 nos asegura que, en estas condiciones,  $R^2$  está conjugada con un polinomio. □

## 4.2. Propiedades de los conjuntos de Julia.

En esta sección, continuaremos explotando el potencial del Teorema 3.3.5 a medida que vayamos adentrándonos en la estructura del conjunto de Julia. No hemos considerado aún si el conjunto de Julia puede ser no vacío y resolver esta cuestión es nuestro primer objetivo. El caso en el que la función racional  $R$  tenga grado 1 es trivial y resulta de poco interés pero, en todos los demás casos, el conjunto de Julia no es vacío.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $R$  una función racional de grado, al menos, 2. Entonces,  $J(R)$  es infinito.*

*Demostración.* En primer lugar, vamos a ver que, si  $R$  es una función racional de grado mayor o igual que dos, entonces su conjunto de Julia es no vacío. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que  $J(R)$  es el conjunto vacío. Entonces, la familia de funciones  $\{R^n\}$  es normal en toda la esfera compleja,  $\mathbb{C}_\infty$ . Aplicando el Teorema 2.8.1 sabemos que existe una subsucesión de  $R^n$  donde cada aplicación tiene el mismo grado que  $R$ . Pero,  $gr(R^n) = [gr(R)]^n$ . Luego,  $R$  tiene grado uno. Hemos llegado a una contradicción pues partíamos de que el grado de  $R$  era, al menos, dos.

Tenemos pues que  $J$  contiene algún elemento  $\zeta$ . Por otro lado, sabemos por el Teorema 3.2.6 que  $J$  es un conjunto completamente invariante. Como consecuencia del Teorema 3.2.4, deducimos que  $J$  se puede escribir como unión de ciertas clases de equivalencias. Luego, si  $J$  es finito entonces  $\zeta$  sería un punto excepcional. Esto no puede ocurrir pues en el Corolario 4.1.3 vimos que los puntos excepcionales de  $R$  pertenecen a su conjunto de Fatou. Por tanto,  $J(R)$  es infinito. □

Es claro del Teorema 3.3.5 que el número entero tres juega un papel fundamental y vuelve a aparecer para sernos útil en el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $R$  una función racional con grado, al menos, dos. Supongamos que  $E$  es un conjunto cerrado y completamente invariante de la esfera compleja. Entonces  $E$  satisface una y solo una de las siguientes condiciones:*

- 1).  *$E$  tiene, a lo más, dos elementos y se verifica:  $E \subset E(R) \subset F(R)$ .*
- II).  *$E$  es infinito y se verifica:  $E \supset J(R)$ .*

*Demostración.* Vimos en el Teorema 3.2.2 que o bien  $E$  tiene, a lo más, dos puntos o bien  $E$  es infinito. Si  $E$  es finito, entonces todos los puntos de  $E$  son excepcionales y, por el

Teorema 4.1.2 y el Corolario 4.1.3, tenemos la cadena de contenciones:

$$E \subset E(R) \subset F(R),$$

completando así el primero caso.

Supongamos ahora que  $E$  es infinito. Como  $E$  es un conjunto completamente invariante, sabemos por el Teorema 3.2.5 que también lo es su complementario  $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus E$ . Por tanto, cada iteración  $R^n$  es una transformación de  $\Omega$  en sí mismo. Aplicando el Teorema 3.3.6 a la familia de funciones  $\{R^n\}$  sobre  $\Omega$ , elegimos los puntos correspondientes  $a_f$ ,  $b_f$  y  $c_f$  como puntos dados de  $E$ . Esto nos muestra que  $\{R^n\}$  es normal en  $\Omega$  y, por tanto,  $\Omega \subset F$ . Luego,  $J$  está contenido en  $E$  y concluimos el segundo caso. □

Resulta habitual y conveniente expresar la conclusión del Teorema 4.2.2 de la siguiente forma:  $J$  es el conjunto cerrado y completamente invariante más pequeño que contiene, al menos, tres puntos. Nos referiremos a esta propiedad como la Propiedad de Minimalidad de  $J$ . La prueba del Teorema 4.2.2 puede resultarnos sorprendentemente corta en vista a los interesantes corolarios que de él se deducen. Por supuesto, esto no es más que un reflejo de la potencia del Teorema 3.3.5.

En primer lugar, el plano complejo extendido  $\mathbb{C}_\infty$  se puede escribir como la unión disjunta del interior del conjunto de Julia, su frontera y el conjunto de Fatou de una función racional  $R$ , algo que representamos así:

$$\mathbb{C}_\infty = J^0 \sqcup \partial J \sqcup F.$$

Sabemos que el conjunto de Fatou de una función racional es completamente invariante y, por el Teorema 3.2.5 sabemos que también lo son  $J$ , su frontera y su interior. Si  $F$  no es vacío entonces la unión de  $F$  con la frontera de  $J$ ,  $F \cup \partial J$  es un conjunto infinito, cerrado y completamente invariante. Luego, por la propiedad de minimalidad de  $J$ ,

$$J \subset F \cup \partial J.$$

De esta forma,  $J \subset \partial J$  y obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $J$  el conjunto de Julia de una función racional. Entonces o bien  $J = \mathbb{C}_\infty$  bien  $J$  tiene interior vacío.*

*Demostración.* Hemos probado en el comentario previo al enunciado de este teorema que si el conjunto de Fatou de una función racional  $R$  no es vacío, entonces  $J \subset \partial J$ . Luego, si  $J \neq \mathbb{C}_\infty$  entonces el interior de  $J$  es vacío. Veamos el otro caso:  $J = \mathbb{C}_\infty$ .



Llamamos conjunto derivado de  $J$ , notado  $J_0$ , al conjunto de los puntos de acumulación de  $J$ . De este modo,  $J_0 \subset J$ , pues  $J$  es cerrado.

Si  $J_0$  es un subconjunto infinito, cerrado y completamente invariante, entonces la Propiedad de Minimalidad de  $J$  nos asegura que  $J \subset J_0$ . Por tanto,  $J = J_0$  y, concluimos que  $J$  no tiene puntos aislados. Nos falta probar que, efectivamente,  $J_0$  es un conjunto infinito y completamente invariante:

Sabemos por el Teorema 4.2.1 que, si  $R$  es una función racional de grado mayor o igual que dos, entonces su conjunto de Julia,  $J$ , es infinito. Además,  $J_0$  es no vacío y, como  $J_0$  es el conjunto derivado, es cerrado. Como  $R$  es una función continua de grado finito, es claro que  $R(J_0) \subset J_0$ . Luego,  $J_0 \subset R^{-1}(J_0)$ . Además, como  $R$  es una aplicación abierta, es fácil ver que  $R^{-1}(J_0) \subset J_0$ . Por tanto,  $J_0$  es un conjunto completamente invariante. Aplicando el Teorema 4.2.2 concluimos que  $J_0$  es infinito y concluimos la demostración de este resultado.  $\square$

Como  $J$  no tiene puntos aislados entonces es no numerable, esto es,  $J$  es un conjunto perfecto. Esto es una consecuencia del Teorema de Categorías de Baire. Podemos acudir a [5, p. 97] para encontrar este teorema y su demostración. Con ello habremos probado el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.4.** *Sea  $R$  una función racional de grado, al menos, dos. Entonces,  $J$  es un conjunto perfecto y, por tanto, no numerable.*

Continuamos estudiando las consecuencias del Teorema 3.3.5. Los siguientes resultados aseguran que la sucesión de iteraciones de  $R$  expanden cada vez más los entornos de cada punto de  $J$ . Dado un abierto  $W$  que corta a  $J$ , el siguiente resultado describe cómo se extienden las imágenes de  $R^n(W)$  recubriendo la esfera. Para ello, recordamos el Teorema 4.1.2 que afirmaba que el conjunto de puntos excepcionales  $E(R)$  tiene, a lo más, dos elementos.

**Teorema 4.2.5.** *Sean  $R$  una función racional de grado, al menos, dos y  $W$  un abierto no vacío tal que  $W \cap J \neq \emptyset$ . Entonces:*

- i).  $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W) \supset \mathbb{C}_{\infty} \setminus E(R)$ ; y
- ii).  $R^n(W) \supset J$  a partir de  $n$  suficientemente grande.

*Demostración.* Sean  $W_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W)$  y  $K = \mathbb{C}_{\infty} \setminus W_0$ . Si  $K$  contuviera tres puntos distintos  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  y  $\zeta_3$ , podríamos aplicar el Teorema 3.3.6 a la familia de funciones  $\{R^n\}$  sobre  $W$ , donde  $a_f$ ,  $b_f$  y  $c_f$  se corresponden con los respectivos  $\zeta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , y deducir así que la familia de funciones dada por  $\{R^n\}$  es normal en  $W$ . Entonces,  $W$  estaría contenido

en  $F$ . Esto no puede ocurrir pues  $W \cap J \neq \emptyset$  y  $J \cap F = \emptyset$ . Luego,  $W_0$  contiene a todos los puntos de la esfera compleja salvo, a los más, dos excepciones.

Ahora, consideramos un punto  $z$  que no sea excepcional para  $R$ . Entonces, por el Teorema 4.1.3 deducimos que el conjunto de predecesores de  $z$  es infinito. Además,  $O^-(z) \cap W_0 \neq \emptyset$ . Luego, existen un punto  $w$  y dos enteros no negativos  $p$  y  $q$  tales que  $R^p(w) = z$  y  $w \in R^q(W)$ . Así,  $z$  pertenece a  $R^{p+q}(W)$  y concluimos I).

Para probar II), tomamos tres abiertos  $W_1, W_2$  y  $W_3$  tales que la distancia cordal entre ellos sea positiva y la intersección de cada uno de ellos con  $J$  no sea vacía. En primer lugar, Vamos a probar que para cada  $j = 1, 2, 3$ , alguna imagen de  $W_j$  por alguna iteración de  $R$  recubre algún  $W_k$ , donde  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Esto es, para cada  $j$ , existen enteros no negativos  $k$  y  $n$  tales que:

$$R^n(W_j) \supset W_k. \quad (4.1)$$

Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que no se da la afirmación anterior. Entonces, existe algún  $j$  tal que  $R^n(W_j)$  no recubre a ninguno de los abiertos  $W_1, W_2$  y  $W_3$ . Aplicando el Teorema 3.3.6 tendríamos que la familia de funciones  $\{R^n\}$  es normal en  $W_j$ . Esto no puede ocurrir pues la intersección de  $W_j$  con  $J$  es no vacía para cada  $j = 1, 2, 3$ .

Acabamos de probar que para cada  $j \in \{1, 2, 3\}$ , existen  $k$  y  $n$  tales que  $R^n(W_j) \supset W_k$ . Denotamos el  $k$  anterior por  $\pi(j)$ . Entonces,  $\pi$  es una aplicación definida del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  en sí mismo. Esto es,  $\pi$  es una permutación del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  y su orden es finito. Luego, alguna iteración de  $\pi$  tiene algún punto fijo. En otras palabras, para algún  $j$  y algún  $n$ , se verifica:

$$R^n(W_j) \supset W_j.$$

Ahora, definimos  $S = R^n$ . Entonces,  $S(W_j) \supset W_j$  y la sucesión de conjuntos dada por  $S^m(W_j)$  crece conforme lo hace  $m$ . Aplicando I). a  $S$  y  $W_j$ , encontramos que los conjuntos  $S^m(W_j)$  forman un recubrimiento abierto creciente del conjunto compacto  $J$ . Luego, alguno de ellos recubre  $J$ . Claramente, podemos escoger todos los  $W_k$  estén en  $W$ . En ese caso, existe algún  $n$  tal que:

$$J \subset R^n(W_j) \subset R^n(W).$$

Además, para todo  $n$  se verifica:

$$J = R(J) \subset R^{n+1}(W).$$

Razonando por inducción concluiríamos II).

□

Los siguientes tres resultados nos muestran cómo el conjunto de Julia se obtiene a partir del límite o la clausura de algún conjunto numerable. Un punto  $\zeta$  se dice punto periódico de  $R$  si es un punto fijo de alguna iteración de  $R$ ,  $R^n$ . Es claro que la cantidad de puntos periódicos de  $R$  es numerable.

**Teorema 4.2.6.** *Supongamos que  $R$  es una función racional de grado, al menos, dos. Entonces,  $J$  está contenido en la clausura del conjunto de puntos periódicos de  $R$ .*

Este resultado implica que  $R$  tiene infinitos puntos periódicos.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{N}$  un abierto tal que  $\mathcal{N} \cap J \neq \emptyset$ . Vamos a probar que  $\mathcal{N}$  contiene algún punto periódico de  $R$ . Tomamos un punto  $w$  de la intersección  $\mathcal{N} \cap J$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que éste no es un punto crítico de  $R^2$  pues si no, podríamos tomar otro punto de un entorno de  $J$  que no lo fuera. Como el grado de  $R$  es mayor o igual que dos y  $w$  no es un punto crítico de  $R^2$  entonces, en  $R^{-2}\{w\}$  hay, al menos, cuatro puntos distintos. Consideramos los puntos  $w_1, w_2$  y  $w_3$ , distintos de  $w$  y construimos los entornos  $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  y  $\mathcal{N}_3$  de  $w, w_1, w_2$  y  $w_3$  respectivamente, tales que sus clausuras sean disjuntas dos a dos,  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$  y  $R^2$  sea un homeomorfismo de cada  $\mathcal{N}_j$  en  $\mathcal{N}_0$  para  $j = 1, 2, 3$ .

Sea  $S_j: \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}_j$  la inversa de  $R^2: \mathcal{N}_j \rightarrow \mathcal{N}_0$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Si para todo  $z$  de  $\mathcal{N}_0$ , todo  $j = 1, 2, 3$  y todo  $n \geq 1$  tenemos que:

$$R^n(z) \neq S_j(z),$$

entonces, por el Teorema 3.3.7 tendríamos que la familia de funciones  $\{R^n\}$  es normal en  $\mathcal{N}_0$ . Esto no ocurre pues  $\mathcal{N}_0 \cap J \neq \emptyset$ . Por tanto, existe algún punto  $z$  en  $\mathcal{N}_0$ , algún  $j$  en  $\{1, 2, 3\}$  y algún  $n \geq 1$  tal que  $R^n(z) = S_j(z)$ . Tenemos así que

$$R^{2+n}(z) = R^2 S_j(z) = z.$$

Finalmente,  $z$  es un punto periódico en  $\mathcal{N}$  como queríamos probar. □

Consideramos ahora la relación entre  $J$  y la órbita  $[z]$  de un punto que no sea excepcional para  $R$ . Como la clausura de  $[z]$ ,  $\overline{[z]}$  es cerrado y completamente invariante, la Propiedad de Minimalidad de  $J$  establece que si  $z$  no es un punto excepcional, entonces  $J \subset \overline{[z]}$ . Si  $z$  pertenece a  $J$ , entonces no es excepcional. Luego,  $[z]$  y también  $\overline{[z]}$  están contenidos en  $J$ . Por tanto, si  $z$  pertenece a  $J$ , entonces  $J = \overline{[z]}$ . De hecho, podemos intercambiar  $\overline{[z]}$  por el conjunto más pequeño  $O^-(z)$  y probar el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.7.** *Sea  $R$  una función racional de grado, al menos, dos.*

I). Si  $z$  no es un punto excepcional para  $R$ , entonces  $J$  está contenido en la clausura de  $O^-(z)$ .

II). Si  $z$  pertenece a  $J$ , entonces  $J$  es la clausura de  $O^-(z)$ .

Esto nos muestra que, dado un punto no excepcional  $z$ , su conjunto de predecesores,  $O^-(z)$ , es un conjunto numerable que se acumula en cada punto de  $J$ .

*Demostración.* Prueba del Teorema 4.2.7.

Sean  $z$  un punto no excepcional para  $R$  y  $W$  un abierto no vacío de  $\mathbb{C}_\infty$  tal que  $W \cap J \neq \emptyset$ . Como la intersección de  $W$  con  $J$  no es vacía, podemos aplicar el Teorema 4.2.5 para deducir que  $z$  pertenece a  $R^n(W)$  para algún  $n$ . Entonces, el conjunto de predecesores de  $z$ , satisface:

$$O^-(z) \cap W \neq \emptyset,$$

probando así I).

Si  $z$  pertenece a  $J$ , entonces el conjunto cerrado y completamente invariante  $J$  contiene la clausura del conjunto de predecesores de  $z$ . Aplicando I). podemos concluir II). □

Si  $z$  pertenece a  $F$  y no es un punto excepcional, entonces la clausura de  $O^-(z)$  contiene estrictamente a  $J$ . En lugar de estudiar todo el conjunto de predecesores de  $z$ , también podemos estudiar la  $n$ -ésima imagen inversa de  $R$ ,  $R^{-n}(z)$  (ésta contiene, a lo más,  $d^n$  puntos) y preguntarnos cuándo (en algún sentido) esos puntos convergen a  $J$ . La misma pregunta nos podemos hacer para el conjunto  $E$  en lugar del conjunto unitario  $\{z\}$  que respondemos probando el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.8.** Sean  $R$  una función racional de grado, al menos, dos y  $E$  un conjunto compacto de la esfera compleja que satisface la siguiente propiedad: para todo  $z \in F(R)$ , la sucesión dada por  $\{R^n : n \geq 1\}$  no se acumula en ningún punto de  $E$ . Entonces, para todo abierto  $U$  que contenga a  $J(R)$  tenemos que, a partir de  $n$  suficientemente grande,

$$R^{-n}(E) \subset U.$$

Si la conclusión del teorema se verifica entonces decimos que  $R^{-n}(E)$  converge a  $J$  y escribimos  $R^{-n}(E) \rightarrow J$ . Ejemplos de estos conjuntos  $E$  son fáciles de encontrar: por ejemplo, si  $F_0$  es una componente conexa del conjunto de Fatou que contiene un punto fijo atractivo  $\zeta$ , entonces existe un conjunto compacto de  $F_0 \setminus \{\zeta\}$  que satisface tal propiedad.

*Demostración.* Prueba del Teorema 4.2.8.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que, bajo las hipótesis del teorema, no existe ningún abierto  $U$  tal que  $J \subset U$  y que a partir de un  $n$  suficientemente grande,  $R^{-n}(E) \subset U$ . Entonces, existen un abierto  $U$  que contiene a  $J$  y, para ciertos  $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$ , una sucesión de puntos  $z_n$  en  $R^{-n}(E) \setminus U$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión anterior converge a un punto  $w$  tal que  $w \notin U$  pues  $U$  es abierto y  $\{z_n\} \not\subset U$ . Pero  $J \subset U$ . Luego,  $w$  pertenece a  $F$ .

Sea  $\varepsilon$  positivo. Como  $w \in F$ , la familia de funciones  $\{R^n\}$  es equicontinua en algún entorno de  $w$ . Luego, existe  $\delta$  positivo tal que para todo  $n$ , se verifica: si  $\sigma(z, w) < \delta$ , entonces

$$\sigma(R^n(z), R^n(w)) < \varepsilon.$$

Por tanto, a partir de  $n$  suficientemente grande, tenemos que

$$\sigma(R^n(z_n), R^n(w)) < \varepsilon$$

y, como  $R^n(z_n)$  pertenece a  $E$  llegamos a que la sucesión  $R^n(w)$  tiene un punto de acumulación en  $E$ , esto es, se acumula en  $E$ . Hemos llegado así a una contradicción pues partíamos de la hipótesis de que la familia de funciones dada por  $\{R^n: n \geq 1\}$  no tenía puntos de acumulación en  $E$ .

Finalmente, existe un abierto  $U$  tal que  $J \subset U$  y  $R^{-n}(E) \subset U$  a partir de  $n$  suficientemente grande. □

Terminamos esta sección con la siguiente generalización del Teorema 3.1.5:

**Teorema 4.2.9.** *Sean  $R$  y  $S$  don funciones racionales de grado, al menos, dos. Si  $R$  y  $S$  conmutan, entonces  $J(R) = J(S)$ .*

*Demostración.* Dado un conjunto  $E$ , escribimos  $\text{diam}[E]$  para referirnos al diámetro de  $E$  respecto de la métrica cordal,  $\sigma$ . Sabemos por el Teorema 2.3.1 que existe un número positivo  $M$  tal que, para todo  $z$  y  $w$  pertenecientes a  $\mathbb{C}_\infty$ ,

$$\sigma(S(z), S(w)) \leq M\sigma(z, w).$$

Tomamos un punto  $w$  de  $F(R)$ . Entonces, la familia de funciones dada por  $\{R^n\}$  es equicontinua en  $w$ . Luego, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $n$ ,

$$\text{diam}[R^n(D(w, \delta))] < \frac{\varepsilon}{M},$$

donde  $D(w, \delta)$  es el disco de centro  $w$  y radio  $\delta$  para la distancia  $\sigma$ . Como  $R$  y  $S$  conmutan, deducimos que:

$$\text{diam} [R^n S(D(w, \delta))] = \text{diam} [SR^n(D(w, \delta))] \leq M \text{diam} [R^n(D(w, \delta))] < \varepsilon.$$

Luego, la familia de funciones  $\{R^n\}$  es normal en el conjunto abierto  $S(D(w, \delta))$ . En particular,  $S(w)$  pertenece a  $F(R)$ . Esto prueba que  $S$  y, por tanto, cada  $S^n$  transforma  $F(R)$  en sí mismo y, por simetría,

$$F(R) = F(S).$$

□

### 4.3. Funciones racionales con conjuntos de Fatou vacíos.

Nuestro objetivo de esta sección es mostrar que el conjunto de Julia de la función racional dada por:

$$z \mapsto \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)} \quad (4.2)$$

es la esfera compleja completa. Este ejemplo (el primero de este tipo) fue dado por el matemático francés Samuel Lattès en 1918.

También vamos a hacer algunas observaciones generales sobre otras funciones racionales con esta propiedad.

Sean  $\lambda$  y  $\mu$  dos números complejos tales que no son múltiplos reales el uno del otro, y sea  $\Lambda$  el retículo correspondiente, esto es,

$$\Lambda = \{m\lambda + n\mu : n, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.3)$$

Un paralelogramo período para  $\Lambda$  es un paralelogramo cerrado de la forma:

$$\Omega = \{z + s\lambda + t\mu : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Sea  $f$  una función no constante. Se dice que  $f$  es una función elíptica para  $\Lambda$  si es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y si cada punto  $w$  de  $\Lambda$  es un período de  $f$ ; esto es, si para todo  $z \in \mathbb{C}$  y todo  $w \in \Lambda$ ,

$$f(z + w) = f(z).$$

Es claro que cualquier función de este tipo transforma  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}_\infty$  y, como  $f(\mathbb{C}) = f(\Omega)$ , tenemos que  $f(\mathbb{C})$  es un compacto de  $\mathbb{C}_\infty$ . Además, sabemos por el Teorema de la Aplicación Abierta (estudiado en Variable Compleja) que  $f(\mathbb{C})$  es un abierto de  $\mathbb{C}_\infty$ . Por tanto,

$$f(\Omega) = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_\infty.$$

Nuestro argumento se basa en las propiedades de las funciones elípticas de Weierstrass. Éstas son funciones de la forma:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum^* \left[ \frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

donde  $\sum^*$  denota el sumatorio de los elementos no nulos  $w$  de  $\Lambda$ . Solo daremos los pasos principales de la demostración. La función dada por  $\wp$  y sus derivadas satisfacen ciertas identidades algebraicas, entre ellas, la fórmula de la adición:

$$\wp(2z) = R(\wp(z)), \quad (4.4)$$

donde  $R$  es la función racional dada por

$$R(z) = \frac{z^4 + g_2 \frac{z^2}{2} + 2g_3 z + \left(\frac{g_2}{4}\right)^2}{4z^3 - g_2 z - g_3}, \quad (4.5)$$

donde  $g_2$  y  $g_3$  son cantidades conocidas definidas en términos del retículo  $\Lambda$ . Notamos que la fórmula dada en (4.4) es análoga a la fórmula del ángulo doble de trigonometría elemental.

Ahora, sean  $D$  un disco en  $\mathbb{C}$  y  $U = \wp^{-1}(D)$ . Definimos  $\varphi(z) = 2z$ . Como  $U$  es abierto y  $\varphi^n(U)$  es el conjunto  $U$  expandido por un factor  $2^n$ , tenemos que a partir de  $n$  suficientemente grande,  $\varphi^n(U)$  contiene un paralelogramo período  $\Omega$  de  $\wp$ . Con esto y con (4.4) obtenemos que, para tales  $n$ ,

$$R^n(D) = R^n(\wp(U)) = \wp(2^n U) = \mathbb{C}_\infty. \quad (4.6)$$

En términos generales, esto implica que las funciones  $R^n$  expanden cualquier disco pequeño  $D$  en toda la esfera. Es claro que, como  $D$  es arbitrario, (4.6) implica que la familia de funciones  $\{R^n\}$  no es equicontinua en ningún abierto de la esfera compleja. Luego,  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$ .

Este argumento nos proporciona una familia de funciones racionales cuyos conjuntos de Julia son la esfera compleja completa. De hecho, siempre se cumple que:

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0, \quad (4.7)$$

y, cualquier par  $(g_2, g_3)$  verificando lo anterior se obtiene mediante algún retículo. Con esto, podemos construir  $\Lambda$  tal que  $g_2 = 4$  y  $g_3 = 0$ . Entonces, la función  $R$  dada por (4.5) es la función dada por (4.2).

Podemos encontrar otros aspectos dinámicos interesantes sobre este ejemplo que brevemente discutiremos. Para cada entero positivo  $k$ , denotamos por  $2^{-k}\Lambda$  al conjunto

$$2^{-k}\Lambda = \left\{ \frac{w}{2^k} : w \in \Lambda \right\}.$$

Observamos que si  $z$  pertenece a  $2^{-k}\Lambda$ , entonces existe  $w \in \Lambda$  tal que

$$z = \frac{w}{2^k} \iff 2^k z = w.$$

Por tanto, aplicando nuevamente la fórmula dada en (4.4), obtenemos

$$R^k(\wp(z)) = \wp(2^k z) = \infty.$$

Esto nos muestra que el conjunto de predecesores de  $\infty$  bajo  $R$ , es

$$\wp\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k}\Lambda\right).$$

Como  $\cup_k 2^{-k}\Lambda$  es denso en  $\mathbb{C}$ , su imagen por  $\wp$  es densa en  $\mathbb{C}_\infty$ . Aplicando el Teorema 4.2.7, concluimos de nuevo que  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$ .

A continuación, la fórmula dada por (4.4) nos muestra que si  $m = 2^k - 1$ , entonces

$$R^k\left(\wp\left(\frac{w}{m}\right)\right) = \wp\left(2^k \frac{w}{m}\right) = \wp\left(w + \frac{w}{m}\right) = \wp\left(\frac{w}{m}\right).$$

Luego, los puntos  $\wp\left(\frac{w}{m}\right)$  son puntos periódicos de  $R$ . Al considerar todo  $w$  y todo  $k$ , vemos que el conjunto de puntos periódicos de  $R$  es denso en  $\mathbb{C}_\infty$ . Aunque no estamos en condiciones de afirmar que, a partir de la afirmación anterior,  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$ , resulta intuitivo que sí debería darse la igualdad.

Se puede probar que  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$  considerando los puntos críticos de  $R$ . En general, un punto crítico  $z$  de una función racional  $R$  se dice pre-periódico si no es un punto periódico pero existe  $n$  tal que  $R^n(z)$  es periódico para  $R$ . La demostración del siguiente teorema la podemos encontrar en el Capítulo 9 de [2].

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $R$  una función racional. Si todo punto crítico de  $R$  es pre-periódico entonces*

$$J = \mathbb{C}_\infty.$$

El Teorema 4.3.1 nos permite crear otros ejemplos de funciones racionales cuyos conjuntos de Julia son la esfera completa, por ejemplo, la función racional de grado dos dada por:

$$R(z) = \frac{(z-2)^2}{z^2}$$

tiene  $2 \cdot 2 - 2 = 2$  puntos críticos:  $z = 0$  y  $z = 2$ . Como además, aplicando  $R$  obtenemos:

$$2 \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1,$$



esto es, ambos puntos críticos, 2 y 0 son pre-periódicos entonces, por el Teorema 4.3.1 concluimos que  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$ . Es fácil ver que  $R$  está conjugada con la aplicación dada por:

$$z \mapsto 1 - \frac{2}{z^2}.$$

Terminamos esta sección con una caracterización de las funciones racionales cuyo conjunto de Julia es la esfera completa:

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $R$  una función racional. Entonces,  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$  si y solo si existe algún punto  $z$  tal que su órbita  $\{R^n(z) : n \geq 1\}$  es densa en la esfera compleja.*

*Demostración.* En primer lugar, sea  $\{B_n : n \geq 1\}$  una base numerable de la topología sobre  $\mathbb{C}_\infty$ . Esto es, dado un abierto de  $\mathbb{C}_\infty$  podemos escribirlo como unión de elementos de  $B_n$ . A continuación, sea  $D$  el conjunto formado por los  $z$  tales que su órbita  $O^+(z) = [z]$  es densa en la esfera compleja. Esto es,  $z$  pertenece a  $D$  si y solo si para todo  $k$ , existe  $n$  tal que  $R^n(z) \in B_k$ . Entonces,

$$D = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} R^{-n}(B_k).$$

Supongamos ahora que  $D = \emptyset$ . Escribimos  $A_k = \mathbb{C}_\infty \setminus B_k$  y

$$E_k = \bigcap_{n > 1} R^{-n}(A_k).$$

Entonces, como  $D = \emptyset$ , tenemos que

$$\mathbb{C}_\infty = \bigcup_{k \geq 1} E_k.$$

Como consecuencia del Teorema de Baire [5, p. 97], tenemos que  $\mathbb{C}_\infty$  no se puede escribir como unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Por tanto, para algún  $k$ , la clausura de  $E_k$  tiene interior no vacío,  $W$ . Además,  $E_k$  es cerrado. Luego, existe un abierto no vacío  $W$  dentro de  $E_k$ . Esto es: para todo  $n$ ,  $R^n(W) \subset A_k$ . Por tanto, en  $W$  las funciones  $R^n$  no toman valores en  $B_k$ . Entonces,  $W \subset F(R)$ . Esto muestra que, si  $J(R) = \mathbb{C}_\infty$ , entonces  $D \neq \emptyset$ . Luego, existe algún punto  $z$  cuya órbita sea densa en la esfera compleja.

Ahora, supongamos que  $J$  no es la esfera compleja completa, esto es,  $F(R) \neq \emptyset$ ; y existe algún punto  $z$  tal que su órbita  $O^+(z)$  sea densa en la esfera compleja. En primer lugar,  $z$  no pertenece a  $J$  pues si no,  $O^+(z) \subset J$  y  $O^+(z)$  no sería densa en la esfera. Luego,  $z$  pertenece a alguna componente conexa  $\Omega$  de  $F(R)$ . Consideramos las componentes de  $F(R)$ :

$$\Omega, R(\Omega), R^2(\Omega), \dots$$

Como  $O^+(z)$  es densa en la esfera, existe  $N$  tal que  $R^N(\Omega) \cap \Omega \neq \emptyset$ . De hecho,  $R^N(\Omega) = \Omega$  y, podemos asumir que  $N$  es el mínimo número entero que verifica tal propiedad. Además, si  $\Omega_1$  es una componente conexa de  $F(R)$  entonces, para algún  $n$ ,  $R^n(z) \in \Omega_1$  y, por tanto,  $R^n(\Omega) = \Omega_1$ . Deducimos así que:

$$F(R) = \Omega \cup R(\Omega) \cup \dots \cup R^{N-1}(\Omega),$$

donde los  $R^j(\Omega)$ ,  $j \in \{1, \dots, \mathbb{N}\}$  son disjuntos dos a dos. Entonces,  $\Omega$  es un conjunto completamente invariante bajo  $R^N$  y, el conjunto  $\{R^{kN} : k \geq 1\}$  es denso en  $\Omega$ . En el Capítulo 7 de [2] aparecen las herramientas para concluir hemos llegado a una contradicción.

Finalmente, bajo las hipótesis del teorema:

$J(R) = \mathbb{C}_\infty \iff \exists z$ : la órbita dada por  $\{R^n(z) : n \geq 1\}$  es densa en la esfera compleja.

□

# Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [2] Alan F Beardon. *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2000.
- [3] Chi-Tai Chuang. *Normal Families of Meromorphic Functions*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993.
- [4] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2014.
- [5] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [6] Elias M. Stein y Rami Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.