TRABAJO FIN DE GRADO

Deducción y resolución de las ecuaciones de las olas del mar lineales.

Presentado por:
Paula Luna Velasco

Director:
Francisco Gancedo García

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático

Sevilla, Junio 2022

Índice general

Abstract

The main goal of this work is to prove the existence and uniqueness of solutions to the water waves equation in 2-D. We study the Euler equations in the case of an incompressive irrotational non-viscous fluid due to viscosity of water is closed to zero. We assume that the fluid only has rotation in the surface which gives the interface between water and air. This interface is moving with the velocity of the fluid and describes the dynamics of water waves.

In the first chapter we introduce the Euler and Navier-Stokes equations and some results related to the existence and non uniqueness of their solutions. We also mention different works providing global existence results and finite time singularity formation for the non lineal water waves system.

Next, we introduce some concepts of functional analysis which are needed in order to fully explain the target of this work. Among then it can be found basic concepts of distributions or the definition of fundamental operators such as the Hilbert and the Fourier transforms.

In the third chapter, we deal with a classic PDE problem: the wave equation. We asume certain regularity in order to find a candidate to be the solution. Once it is found, we prove that it is in fact the solution of the wave equation. It fits with the definition of a weak solution. We get the regularity of the solution depending on the regularity given by the initial values. Giving more regular initial data it is possible to find classical solutions.

In the last chapter, we start with a linealization of the water waves equation. We aim to give a stationary solution and perform a perturbation around it. We follow with the study of lineal water waves equation. To do that, we apply similar techniques which have been used to solve the wave equation in the previous chapter. Fourier techniques provide similarities between the wave equation and the lineal water wave system. It allows us to solve the lineal water waves analogously. At the end of the chapter, we study a situation in which the solution to the lineal water waves equation is unstable: fluid is on top of air.

Resumen

El principal propósito de este trabajo es probar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación lineal water waves en dos dimensiones. Estudiaremos la ecuación de Euler en el caso de un fluido incompresible, irrotacional y no viscoso, ya que la viscosidad del agua es prácticamente nula. Asumimos que el fluido solo tiene rotación en la superficie que proporciona la interfase entre el agua y el aire. La interfase se mueve con la velocidad del fluido y describe la dinámica de las olas del mar.

En el primer capítulo introducimos las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes y algunos resultados sobre la existencia y no unicidad de sus soluciones. También mencionaremos diferentes trabajos que proporcionan resultados de existencia global y la formación de singularidades en tiempo finito para la ecuación water waves no lineal.

Posteriormente, introduciremos algunos conceptos de análisis funcional que necesitaremos para explicar completamente el objetivo de este trabajo. Entre ellos pueden encontrarse conceptos básicos de teoría de distribuciones o la definición de operadores fundamentales como la transformada de Hilbert y la de Fourier.

En el tercer capítulo, trataremos un problema clásico de EDP: la ecuación de onda. Asumiremos cierta regularidad para poder encontrar un candidato a solución. Una vez lo encontremos, probaremos que es realmente la solución de la ecuación de ondas. Esta solución satisface la definición de solución débil. Obtenemos la regularidad de la solución en función de la regularidad de los datos iniciales. Dando más regularidad a los datos iniciales es posible encontrar una solución clásica.

En el último capítulo comenzaremos con la linealización de la ecuación water waves. Daremos una solución estacionaria y produciremos una perturbación en ella. Seguiremos con el estudio de la ecuación water waves lineal. Para ello, aplicaremos técnicas similares a las usadas para resolver la ecuación de ondas en el capítulo anterior. El análisis de Fourier nos da la similaridad entre la ecuación de ondas y la ecuación water waves lineal, lo que nos permite resolver estas últimas de manera análoga. Al final del capítulo estudiaremos una situación en la cual la solución de la ecuación de water waves lineal es inestable: el fluido se encuentra sobre el aire.

Capítulo 1

Introducción

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) son una de las ramas de las matemáticas cuyo estudio está en auge en este siglo. Sin embargo, no es hasta el siglo XX cuando se produce un gran avance en él, principalmente en las EDP elípticas y parabólicas no lineales, gracias al desarrollo que se experimenta en el cálculo. En el comienzo del siglo XXI, una de las líneas de investigación más activas son las EDP de carácter parabólico e hiperbólico no lineal, entre las que se encuentran las ecuaciones de la mecánica de fluidos: las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.

La mecánica de fluidos se encarga del estudio de la evolución de la dinámica de un fluido, que incluye materia en estado gaseoso, líquido y plasma, sometido a distintos factores como puede ser la temperatura o la gravedad. Pese a su importancia, el hecho de que las ecuaciones que describen dicho movimiento sean no lineales hace difícil su estudio.

En 1755, Leonard Euler escribió por primera vez las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido no viscoso. Setenta años después, Navier y Stokes, de manera independiente, introdujeron el término de la viscosidad en ellas. La existencia de soluciones globales para Navier-Stokes ha sido considerado uno de los siete problemas del milenio por el *Instituto Clay*.

Otro tema a destacar de la mecánica de fluidos es la inestabilidad hidrodinámica. En particular, trataremos la evolución de la superficie de separación de dos fluidos inmiscibles llamada interfase. Estas inestabilidades se producen al perturbar ligeramente situaciones de equilibrio y pueden producir singularidades en un tiempo finito, es decir, pierden la regularidad que tenían inicialmente.

En particular, en el caso de la ecuación que explica la formación de las olas del mar donde la interfase separa el agua y el aire, ecuación de water waves, veremos que produce singularidades en tiempo finito [7][8].

A continuación introduciremos las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes y haremos referencia a varios tipos de inestabilidades que se producen en ellas. Posteriormente, centraremos el estudio en las ecuaciones water waves mencionadas previamente.

Para la realización de esta introducción y la del capítulo 4 nos hemos basado en [11] [26].

1.1. Dinámica de un fluido incompresible.

Para estudiar un fluido incompresible (densidad constante) mediante las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes utilizaremos:

- El campo de velocidades $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ ($n = 2$ o 3) que determina la velocidad de cada partícula en un instante t y en la posición x.

- El campo de presiones $p = p(x,t)$ en el seno del fluido, es una fuerza de superficie ejercida por el fluido que rodea un volumen sobre este.

Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes se deducen a partir de la segunda ley de Newton, es decir, igualando la aceleración de las partículas a la suma de las fuerzas que actúan en ellas (variaciones espaciales de la presión, fuerzas de rozamiento -viscosidad- y posibles fuerzas externas). A estas ecuaciones añadimos la ley de conservación de la masa, es decir, el campo de velocidades ha de ser de divergencia nula. Luego el sistema queda:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1\leq j\leq n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\Delta u_i + f_i, \tag{A}$$

$$\operatorname{div} u := \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

donde ν es el coeficiente de viscosidad cinemática y $f = (f_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ una fuerza externa. El término de la izquierda en (A) es el correspondiente a la aceleración y es el que introduce la no linealidad en el sistema.

Si $\nu = 0$ se corresponde con las ecuaciones de Euler y si $\nu > 0$ con las de Navier-Stokes. La diferencia más importante entre ambas ecuaciones es que en las de Euler la energía se conserva mientras que en las de Navier-Stokes decrece.

En 1933, J. Leray probó la existencia local de soluciones regulares donde el tiempo de dicha existencia depende del dato inical dado [18]. Un año después, en 1934, introdujo la noción de solución débil, antes de que se desarrollaran la teoría de distribuciones (L. Schwatz, 1950) y los espacios de Sobolev (S. L. Sobolev, 1936), y probó la existencia de las mismas para la ecuación de Navier-Stokes [19]. Sin embargo, la unicidad de dichas soluciones no puede garantizarse [6][1][5].Anteriormente se probó la no unicidad de soluciones débiles para las ecuaciones de Euler [12].

Uno de los problemas más relevantes es el de la existencia de singularidades para las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes para $n = 3$. Dichas soluciones fueron conjeturadas por J. Leray como posible explicación de la turbulencia.

En 1933, Leray [18] y Wolibner [27] probaron que en dimensión dos ninguna de las ecuaciones presenta singularidades y que las soluciones son globales.

A continuación mencionaremos el tipo de singularidad de los torbellinos.

1.1.1. Torbellinos

El régimen turbulento se caracteriza por la aparición de remolinos, estructuras rotantes en el seno del campo vectorial, lo que sugiere la introducción del operador rotacional. En mecánica de fluidos, el rotacional del campo de velocidades se denomina vorticidad.

Por tanto, la vorticidad se define como $\omega = \nabla \times u$ y (A) puede reescribirse como

$$\omega_t + u \cdot \nabla\omega = (\nabla u)\omega + \nu\Delta\omega, \tag{B}$$

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot \omega = 0.$$

Se han producido numerosos avances en el estudio de la ecuación de Euler para $n = 2$ pese a que estos no son útiles para estudiar el caso $n = 3$. La ecuación en dimensión dos pasa a ser

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\omega = 0. \tag{C}$$

De la cual podemos deducir que las normas L^p de ω se conservan $1 \leq p \leq \infty$ y que las derivadas de la velocidad están acotadas por una doble exponencial, siendo esta cota superior la mejor (véase [17]).

1.2. Gotas y olas.

El caso de la formación y la posterior ruptura de las gotas de agua es un claro ejemplo de que un fluido puede generar una singularidad en tiempo finito. De manera matemática, tenemos un fluido que cambia la topología de su dominio, pasa de ser simplemente conexo a no conexo. Este fenómeno atrajo la atención de los científicos a principio del siglo XIX. Los experimentos llevados a cabo muestran que la viscosidad es determinante en la geometría de la ruptura de una gota de agua, en el caso muy viscoso se observan filamentos muy delgados que finalmente desaparecen al alcanzar el tamaño molecular.

Supongamos dos fluidos con distinta densidad (ρ) y viscosidad (ν) que ocupan todo el espacio, que están separados por una superficie y que dichos fluidos son inmiscibles. A continuación estudiaremos la evolución de la superficie de separación o interfase $\Sigma(t)$ con el tiempo. Matemáticamente, el problema se convierte en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes en los dominios interior y exterior a la interfase bajo condiciones de contorno sobre $\Sigma(t)$.

1.2.1. Condiciones en la interfase.

Las tracciones generadas por los fluidos separados por la interfase tienen valores distintos, y por tanto, crean una discontinuidad.

$$f^{(1)} - f^{(2)} = \left(\sigma^{(1)} - \sigma^{(2}\right) \cdot n,$$

donde $f^{(i)}$ es la tracción de cada fluido, que denominaremos (1) y (2), n el vector normal a la interfase apuntando hacia el fluido (1) y $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ representan las fuerzas por unidad de área que ejercen ambos fluidos sobre la interfase.

La discontinuidad de la tracción interfacial depende de las propiedades mecánicas de la interfase. En la situación más sencilla deriva de la tensión superficial, atracción que experimentan las moléculas de ambos fluidos. Dicha fuerza puede expresarse como

$$\gamma H n = \left(\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}\right) \cdot n, \tag{11}$$

donde H es la curvatura media de la superficie y γ el coeficiente de tensión superficial.

Imponemos dos condiciones más:

- El campo de velocidades ha de ser continuo:
$$u^{(1)} = u^{(2)} = u_{interfase}. \tag{12}$$
- Las moléculas de la interfase son fluidas:
$$V_N = u_{interfase} \cdot n, \tag{13}$$
donde V_N es la velocidad con la que se mueve la superficie.

Por tanto, el problema de evolución de una interfase fluida que delimita los fluidos (1) y (2) consiste en la resolución de

$$\rho_{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}+\left(u^{(i)}\cdot\nabla\right)u^{(i)}\right)=-\nabla p^{(i)}+\nu_i\Delta u^{(i)}+F,$$

$$\nabla\cdot u^{(i)}=0,\ \ i=1,2,$$

en cada fluido junto con las condiciones (11), (12) y (13).

En [15] se prueba que estas propiedades son equivalentes a tener una solución débil en todo el espacio para Navier-Stokes.

Las soluciones estacionarias son las correspondientes a $u^{(i)}=0$ y la superficie resultantes se denominan superficies capilares.

1.2.2. Resultados sobre las soluciones del problema de interfase.

Mencionaremos algunos de los resultados clásicos sobre el sistema considerado anteriormente, todos ellos acerca de un fluido rodeado por el vacío.

1. En 1977, V. A. Solonnikov [25] probó la existencia de soluciones cuando el dominio $\Omega(0)$ está inicialmente acotado. Las soluciones son válidas en un intervalo [0,T] suficientemente pequeño. El borde de $\Omega(t)$ conserva la regularidad que tenía inicialmente.

2. En 1981, Beale [3] [4] estableció que la estabilidad del estado de equilibro en el caso en el que $\Omega(0)$ es una capa infinita horizontal de fluido con un fondo rígido sometido a la gravedad en dirección vertical (mar infinito) es una interfase completamente horizontal.

En ambos casos el efecto regularizante de la viscosidad es determinante. Sin embargo el efecto de la viscosidad es irrelevante en la situación física que vamos a estudiar, la de las olas del mar, por lo que nos interesan resultados en los que $\nu=0$.

3. En 1997 [28] y 1999 [29], Sijue Wu demostró la existencia de soluciones locales al problema de Beale considerando un fluido no viscoso e irrotacional y para perturbaciones no necesariamente pequeñas de la superficie horizontal.

4. La hipótesis de la irrotacionalidad fue eliminada por Christodoulou y Lindblad en una serie de trabajos [21] que finalizaron en 2004.

1.2.3. Inestabilidad y singularidades.

Una vez que hemos planteado el problema y sabemos de la existencia de soluciones, al menos para tiempos cortos, nos planteamos cómo evolucionan estas en tiempos más largos. Este estudio se lleva a cabo mediante perturbaciones del estado de equilibrio y viendo si dicho equilibrio se mantiene o no.

Actualmente sabemos que tanto en el caso de Navier-Stokes con frontera libre [9] como en el caso de water waves [7] se tienen singularidades.

1.2.4. Water Waves.

Un problema importante es el de las ondas que se forman en la superficie de un fluido. Esta situación describe el movimiento de las olas del mar en la superficie del océano bajo la acción de la gravedad, el cual estudiaremos, en el caso lineal, a lo largo de este trabajo para $n = 2$.

En su formulación más sencilla, consideramos el dominio ocupado por el fluido $-\infty < z < \eta(x, y, t)$, es decir suponemos que no tiene fondo. Consideramos un fluido irrotacional e incompresible e imponemos que no haya flujo de fluido.

El sistema a considerar para $u = \nabla\phi$ es

$$\begin{cases} \phi_t + \frac{1}{2}\left|\nabla\phi\right|^2 + g\eta(x,y,t) + \frac{\gamma}{\rho}H = \frac{p_0}{\rho} \text{ en } z = \eta(x,y,t), \\ \eta_t + (\eta_x, \eta_y, -1)\cdot\nabla\phi = 0. \end{cases}$$

Definición 1.2.5. *Una onda viajera con velocidad de propagación $c = (c_x, c_y)$ será una solución (η, ϕ) tal que*

$$\eta(x + c_x t, y + c_y t, t) = \eta(n, y, 0),$$
$$\phi(x + c_x t), y + c_y t, z, t) = \phi(x, y, z, 0).$$

Stokes, en el caso bidimensional (independencia de y y $c_y = 0$) y sin tensión superficial $\gamma = 0$, abordó la existencia de este tipo de ondas y calculó su forma en el caso de perturbaciones pequeñas de la superficie plana. También conjeturó la existencia de "ondas extremas" que desarrollan esquinas de apertura $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ en la cresta y son cóncavas en todo punto excepto en la cresta.

En 1920, Nekrasov [22] y Levi-Civita [20] dieron pruebas analíticas de la existencia de dichas ondas. Sin embargo no fue hasta 1982 cuando Amick-Fraenkel-Toland [2] y Plotnikov [23] demostraron, independientemente, la conjetura de Stokes.

La existencia de soluciones del sistema de manera local nos hace plantearnos si dichas soluciones pueden extenderse para todo tiempo. Las soluciones de tipo onda viajera se pueden prolongar en el tiempo, sin embargo, la interfase puede ser regular o tener alguna singularidad. Recientemente, se ha probado [16] que para un dato inicial pequeño, existen soluciones globales de la ecuación water waves.

Por otro lado, también se ha probado que se desarrollan singularidades en tiempo finito, como hemos mencionado anteriormente. Un tipo de estas, las denominadas "splash", consisten el colapso de dos partículas de la interfase en tiempo finito. Este colapso tiene la particularidad de que no se pierde la regularidad de la interfase [7],[8].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo definiremos varios conceptos que nos harán falta a lo largo del trabajo.

2.1. Clase de Schwartz.

Definición 2.1.1. *Llamamos clase de Schwartz $\mathcal{S}$ al espacio vectorial*

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| f^{l)}(x) \right| < \infty, \forall\ k, l \geq 0 \right\}.$$

Definición 2.1.2. *Definimos el espacio $\mathcal{S}'$ como el espacio de las distribuciones temperadas, i.e, cualquier funcional lineal continuo de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{C}$.*

2.2. Transformada de Fourier.

Definición 2.2.1. *Definimos la transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ como*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Definición 2.2.2. *Definimos la transformada inversa de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ como*

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Podemos extender la definición de transformada de Fourier para $f \in \mathcal{S}'$ como sigue:

Definición 2.2.3. *Sea $\wedge : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ la transformada de Fourier para las funciones de la clase de Schwartz y $f \in \mathcal{S}'$, definimos la transformada de Fourier del funcional f como sigue*

$$\left\langle \hat{f}, \varphi \right\rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

2.3. Transformada de Hilbert.

Definición 2.3.1. *Definimos la transformada de Hilbert de una función $f \in \mathcal{S}$ como*

$$H\{f\}(x) = \frac{1}{\pi} \; P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

siendo P.V. el valor principal de dicha integral, i.e, el valor que se le asocia a la integral impropia.

Podemos realizar la transformada de Fourier a la transformada de Hilbert [13], y obtenemos

$$\hat{H}\{f\}(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi f(\xi).$$

Proposición 2.3.2. *La transformada de Hilbert es una isometría de $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Para ello haremos uso de que la transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$.

$$||H(f)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||(H(f))^{\wedge}||_{L^2(\mathbb{R})} = ||-i \operatorname{sgn}(\cdot) f||_{L^2(\mathbb{R})} = ||f||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

$\square$

2.4. Espacios $H^s(\mathbb{R})$.

Definición 2.4.1. *Definimos el espacio $H^s(\mathbb{R})$ con $s \in \mathbb{R}$ como*

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \left(1 + |\xi|^2 \right)^s d\xi \; < +\infty \right\}.$$

En nuestro caso utilizaremos de manera más específica los espacios $H^1, H^{-1}, H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}, H^k$ y $H^{k+\frac{1}{2}}$ $k \geq 1$.

Veamos que si $f \in H^k$ entonces tenemos que $f^{k)} \in L^2(\mathbb{R})$. Para ello utilizaremos el hecho de que la transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
||f||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||f^{n)}||^2_{L^2(\mathbb{R})} &= ||\hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(f^{n)})^{\wedge}||^2_{L^2(\mathbb{R})} = ||\hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(2\pi i \cdot)^n \hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2n} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&\leq (2\pi)^{2k} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2 + \cdots + |\xi|^{2k} \right) \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&\leq (2\pi)^{2k} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2 \right)^k \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&\leq (2\pi)^{2k} ||f||^2_{H^k(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

De manera análoga tomando una constante $c \ll 1$ obtenemos la desigualdad contraria,

$$||f||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||f^{n)}||^2_{L^2(\mathbb{R})} \geq c\, ||f||^2_{H^k(\mathbb{R})}.$$

Luego tenemos la equivalencia de ambas normas.

Por otro lado, veamos la forma que tienen la dualidad entre los espacios que nos harán falta posteriormente.

- Tomamos $f \in H^{-1}(\mathbb{R})$ y $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H^1} &= \langle f, \hat{\check{\varphi}} \rangle_{H^{-1},H^1} = \left\langle \hat{f}, \check{\varphi} \right\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(-\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\hat{\varphi}(-\xi)d\xi \\ &\leq \left|\left| \frac{\hat{f}(\cdot)}{(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}} \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} \left|\left|(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}\hat{\varphi}(\cdot)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||f||_{H^{-1}(\mathbb{R})}\, ||\varphi||_{H^1(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

  Luego tenemos que está bien definida.

- Tomamos $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ y $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}} &= \langle f, \hat{\check{\varphi}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}} = \left\langle \hat{f}, \check{\varphi} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(-\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\hat{\varphi}(-\xi)d\xi \\ &\leq \left|\left| \frac{\hat{f}(\cdot)}{(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{4}}} \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} \left|\left|(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{4}}\hat{\varphi}(\cdot)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||f||_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}\, ||\varphi||_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.5. Derivada débil.

Definición 2.5.1. *Sean $T \in \mathcal{S}'$ y $\alpha \in \mathbb{N}^N$ multiíndice. Se denomina derivada débil o derivada en el sentido de las distribuciones a*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Veamos que en el las distribuciones tenemos la siguiente igualdad para una función $f(x,t) \in \mathcal{S}'$. Consideramos la transformada de Fourier en la variable x independiente de la variable temporal t.

$$(\partial_t f)^\wedge(\xi,t) = \partial_t \hat{f}(\xi,t). \tag{2.3}$$

Para ello, utilizaremos la definición de derivada débil vista anteriormente.

Sea $f \in \mathcal{S}'$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle (\partial_t f)^\wedge, \varphi \rangle = \langle \partial_t f, \hat{\varphi} \rangle = -\langle f, \partial_t \hat{\varphi} \rangle = -\langle f, (\partial_t \varphi)^\wedge \rangle = -\left\langle \hat{f}, \partial_t \varphi \right\rangle = \left\langle \partial_t \hat{f}, \varphi \right\rangle.$$

Donde podemos asegurar que $(\partial_t\varphi)^\wedge(\xi,t) = \partial_t\hat{\varphi}(\xi,t)$ puesto que φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y con suficiente decaimiento en el infinito, por tanto lo suficientemente regular para producir el siguiente cambio entre límite e integral.

$$\begin{aligned}(\partial_t\varphi)^\wedge(\xi,t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t\varphi(x,t)\ e^{-2\pi i\xi x}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x,t+h)-\varphi(x,t)}{h}\ e^{-2\pi i\xi x}dx \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\hat{\varphi}(\xi,t+h)-\hat{\varphi}(\xi,t)}{h} \\ &= \partial_t\hat{\varphi}(\xi,t).\end{aligned}$$

2.6. Media derivada.

Definición 2.6.1. *Definimos la media derivada de una función $f\in\mathcal{S}$ como*

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}f(x) = C\ \int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)-f(x+h)}{|h|^{\frac{1}{2}}}\frac{dh}{|h|},$$

donde C es una constante cuyo valor es

$$C = \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(z)}{|z|^{\frac{1}{2}}}\frac{dz}{|z|}\right)^{-1}.$$

La media derivada está bien definida pues tenemos que dicha integral es finita ya que:

- Si $h\gg 1$, $|h|^{-\frac{3}{2}}\in L^1(\mathbb{R})$ y $f\in\mathcal{S}$ decrece más rápido que cualquier polinomio, por tanto tenemos que en este caso la integral es finita.
- si $h\ll 1$, aplicando el teorema del valor medio (TVM) tenemos que

  $$|f(x)-f(x+h)|\leq ||f'||_\infty\,|h|.$$

  Luego nuestro integrando pasa a ser $|h|^{-\frac{1}{2}}$ que integra en un entorno de cero y por tanto también es finita.

Veamos la transformada de Fourier de $\Lambda^{\frac{1}{2}}f$, para ello utilizaremos el teorema de Fubini-Tonelli.

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}}f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}}\left(C\ \int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)-f(x+h)}{|h|^{\frac{1}{2}}}\frac{dh}{|h|}\right)e^{-2\pi i\xi x}d\xi = C\ \int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{f}(\xi)-\hat{f}(\xi)e^{-2\pi i\xi h}}{|h|^{\frac{1}{2}}}\frac{dh}{|h|}$$

$$= C\hat{f}(\xi)\ \int_{\mathbb{R}}\frac{1-e^{-2\pi i\xi h}}{|h|^{\frac{1}{2}}}\frac{dh}{|h|}.$$

Por definición tenemos que

$$e^{-2\pi i\xi h} = \cos(2\pi\xi h) - i\operatorname{sen}(2\pi\xi h).$$

Utilizando que el seno es impar en $\mathbb{R}$ y el coseno par, nos queda

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}} f)^\wedge(\xi) = C\hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(2\pi|\xi|\, h)}{|h|^{\frac{1}{2}}} \frac{dh}{|h|} = \left[z = 2\pi|\xi|\, h,\ dh = \frac{1}{2\pi|\xi|} dz \right]$$

$$= C\hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(z)}{|z|^{\frac{1}{2}}} |\xi|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{2\pi|\xi|} \frac{2\pi|\xi|}{|z|} = C\hat{f}(\xi)(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(z)}{|z|^{\frac{1}{2}}} \frac{dz}{|z|}.$$

Tenemos que dicha integral es finita puesto que

- Si $|z| \ll 1$, es finita puesto que $\cos(z) - 1 = o(z^2)$ y por tanto el integrando es $o(z^{\frac{1}{2}})$.
- Si $|z| \gg 1$ tenemos que $|1-\cos(z)| < 2$ y $|z|^{-\frac{3}{2}}$ integra.

Dado que posteriormente definiremos $\Lambda = H\partial_\alpha$ y tendremos que $\hat{\Lambda} = 2\pi|\xi|$ por propiedades de la transformada (pues $\hat{H} = -i \operatorname{sgn} \xi$ y $(\partial_\alpha)^\wedge = 2\pi i \xi$), veamos que ambas definiciones coinciden al tomar C como hemos definido en 2.6.1

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}} f)^\wedge(\xi) = C\hat{f}(\xi)(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(z)}{|z|^{\frac{1}{2}}} \frac{dz}{|z|} = (2\pi|\xi|)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi)$$

Lo que implica que

$$C = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(z)}{|z|^{\frac{1}{2}}} \frac{dz}{|z|} \right)^{-1},$$

que coincide con la definición dada.

Capítulo 3

Ecuación de onda

Este problema clásico en ecuaciones en derivadas parciales nos servirá como modelo para poder abordar en el siguiente capítulo las ecuaciones de las olas del mar bidimensionales, donde los núcleos no son explícitos.

Para ello lo estudiaremos desde el punto de vista del análisis de Fourier, suponiendo cierta regularidad en las soluciones y, posteriormente probaremos algunos resultados sobre dicha regularidad.

Nuestro propósito es resolver el siguiente sistema, que se corresponde con el problema de la ecuación de ondas deducido en [24], en función de las propiedades que presenten las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ \partial_t u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{P}$$

3.1. Estudio del sistema en Fourier

Para su resolución comenzaremos por ver cómo queda el problema en el lado de Fourier [14]. Para ello asumimos cierta regularidad en la solución, que será probada posteriormente en un teorema.

Por las propiedades de la transformada tenemos

$$(\partial_{xx}^2 u)^\wedge(\xi,t) = -4\pi^2 \left|\xi\right|^2 \hat{u}(\xi,t).$$

Hemos visto que $(\partial_t u)^\wedge(\xi,t) = \partial_t \hat{u}(\xi,t)$ en (2.3). Luego tenemos que

$$(\partial_{tt}^2 u)^\wedge(\xi,t) = (\partial_t(\partial_t u))^\wedge(\xi,t) = \partial_t(\partial_t u)^\wedge(\xi,t) = \partial_{tt}^2 \hat{u}(\xi,t).$$

Por tanto nuestro problema (P) pasa a ser una EDO de segundo orden que depende del parámetro ξ.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 \hat{u}(\xi,t) + 4\pi^2 \left|\xi\right|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \\ \partial_t \hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi). \end{cases} \tag{P'}$$

Procedemos a la resolución del sistema. Para ello observamos que los coeficientes de la EDO no dependen de t y por tanto podemos resolverla haciendo uso del polinomio característico asociado.

$$\partial_{tt}^2 \hat{u}(\xi,t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \ \to \ \lambda^2 + 4\pi^2 |\xi|^2 = 0 \ \to \ \lambda = \pm\sqrt{-4\pi^2 |\xi|^2} = \pm 2\pi i |\xi| \,.$$

Por tanto tenemos que la solución es del tipo

$$\hat{u}(\xi,t) = A\cos(2\pi |\xi| t) + B\,\mathrm{sen}\,(2\pi |\xi| t).$$

Imponemos las condiciones iniciales,

$$\hat{u}(\xi,0) = A = \hat{f}(\xi) \ \to \ \boxed{A = \hat{f}(\xi)},$$

$$\partial_t \hat{u}(\xi,t) = -2\pi |\xi| A\,\mathrm{sen}\,(2\pi |\xi| t) + 2\pi |\xi| B\cos(2\pi |\xi| t),$$

$$\partial_t \hat{u}(\xi,t) = 2\pi |\xi| B = \hat{g}(\xi) \ \to \ \boxed{B = \frac{\hat{g}(\xi)}{2\pi|\xi|}}.$$

Luego la solución queda

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(2\pi |\xi| t) + \hat{g}(\xi)\frac{\mathrm{sen}\,(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|}. \tag{3.1}$$

3.2. Espacio de soluciones

En esta sección veremos el espacio en el que se encuentra la solución en función de las condiciones iniciales. Para ello, definiremos en primer lugar lo que entendemos por solución de la ecuación de ondas.

Definición 3.2.1. *Diremos que u es solución (débil) del problema* (P) *en el intervalo* $[0,\tau]$ *si*

$$u \in \mathcal{C}([0,\tau], H^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-1}(\mathbb{R}))$$

y si satisface

$$\left\langle \partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} = 0, \ \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}), \ \forall t \in [0,\tau].$$

A continuación probaremos el primer resultado sobre la solución de (P).

Teorema 3.2.2. *Si $f \in H^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\tau > 0$, entonces $\exists!$ $u \in \mathcal{C}([0,\tau], H^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-1}(\mathbb{R}))$ que sea solución del problema* (P) *en el sentido de la definición 3.2.1.*

Demostración. En primer lugar veamos la existencia y posteriormente probaremos la unicidad.

- **EXISTENCIA**

De la expresión de la solución 3.1 obtenemos que $u(.,t) \in H^1(\mathbb{R})$ pues usando que la transformada de Fourier es una isometría tenemos

$$\begin{aligned} ||u||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R})}(t) &\leq ||\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})} + t||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq ||\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})} + \tau||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $\left|\frac{\mathrm{sen}\,(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right| = \left|\frac{\mathrm{sen}\,(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t} t\right| \leq t.$

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned}||\partial_x u||_{L^2(\mathbb{R})}(t) &= ||(\partial_x u)^\wedge||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||2\pi i \cdot \hat{u}(\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = \\ &= 2\pi||\cdot\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R})}(t) \leq 2\pi|| \cdot \hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.\end{aligned}$$

Donde tenemos que $\xi\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ gracias a que $f \in H^1(\mathbb{R})$, es decir $f, f' \in L^2(\mathbb{R})$.
Por tanto concluimos que $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0, \tau]$.
Por otro lado,

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) = -2\pi |\xi| \hat{f}(\xi) \operatorname{sen}(2\pi |\xi| t) + \hat{g}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t).$$

Veamos que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$

$$||\partial_t u(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\partial_t \hat{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \ 2\pi \ || \, |\cdot| \, \hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Nos queda ver que $\partial^2_{tt} u(\cdot, t) \in H^{-1}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0, \tau]$. Para ello usaremos que $\hat{u}$ es solución de (P').

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|(\partial^2_{tt} u)^\wedge(\xi, t)\right|^2}{1 + |\xi|^2} d\xi = 16\pi^4 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^4 \, |\hat{u}(\xi, t)|^2}{1 + |\xi|^2} d\xi \leq 16\pi^4 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^4 \, |\hat{u}(\xi, t)|^2}{|\xi|^2} d\xi$$

$$\leq 16\pi^4 \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 \, |\hat{u}(\xi, t)|^2 \leq 16\pi^4 |||\cdot| \, \hat{u}(\cdot, t)||||^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

- **CONTINUIDAD**

Para la continuidad respecto de t, usaremos una vez más el hecho de que la transformada de Fourier es una isometría en L^2.

Tenemos que $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t) + \hat{g}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$ es continua respecto de t ya que tanto el seno como el coseno lo son.

De manera análoga, $\partial_t \hat{u}(\xi, t) = -2\pi |\xi| \hat{f}(\xi) \operatorname{sen}(2\pi |\xi| t) + \hat{g}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t)$ también es continua respecto de t.

Veamos que $u(., t)$ es continua,

$$\begin{aligned}||u(\cdot, t_0) - u(\cdot, t)||^2_{H^1(\mathbb{R})} &= ||u(\cdot, t_0) - u(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\partial_x u(\cdot, t_0) - \partial_x u(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\hat{u}(\cdot, t_0) - \hat{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||(\partial_x u)^\wedge(\cdot, t_0) - (\partial_x u)^\wedge(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\hat{u}(\cdot, t_0) - \hat{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||2\pi i \cdot \hat{u}(\cdot, t_0) - 2\pi i \cdot \hat{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\hat{u}(\cdot, t_0) - \hat{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + 4\pi^2 ||\cdot\hat{u}(\cdot, t_0) - \cdot\hat{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Observemos que $\xi\hat{u}(\xi, t) \in L^2(\mathbb{R})$ y es continua respecto de t.

$$\xi\hat{u}(\xi, t) = \xi\hat{f}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t) + \xi \frac{\hat{g}(\xi)}{2\pi |\xi|} \operatorname{sen}(2\pi |\xi| t).$$

$$||\cdot\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \left|\left|\cdot\hat{f}\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\hat{g}||^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Pues tenemos que $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ por hipótesis y $\xi\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

La continuidad respecto de t se obtiene por construcción.

Por tanto, dado $t_0 \in [0,\tau]$, $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\tau]$ tal que $|t - t_0| < \delta$,

$$||u(\cdot,t_0) - u(\cdot,t)||^2_{H^1(\mathbb{R})} = ||\hat{u}(\cdot,t_0) - \hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + 4\pi^2||\cdot\hat{u}(\cdot,t_0) - \cdot\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq \left(\left|\left|\hat{f}\left[\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} + \left|\left|\hat{g}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi\,|\cdot|} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi\,|\cdot|}\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^2$$

$$+\,4\pi^2\left(\left|\left|(\cdot)\hat{f}\left[\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} + \left|\left|\hat{g}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi}\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^2$$

$$< \epsilon.$$

El seno y el coseno son uniformemente continuas respecto de t en $[0,\tau]$ pues es una función continua en un intervalo cerrado y acotado (th de Heine), es decir la continuidad no depende de ξ. De manera análoga tenemos la continuidad uniforme respecto de t de $\frac{\operatorname{sen}(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$.

Tomando en la definición de continuidad uniforme

- Para el primer término:

$$|\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}}, \qquad (*)$$
$$\left|\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi\,|\cdot|} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi\,|\cdot|}\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

- Para el segundo término:

$$|\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi\sqrt{2}||\cdot\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}},$$
$$\left|\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi}\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi\sqrt{2}||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

Con lo que queda probado que $u(.,t) \in \mathcal{C}^0([0,\tau], H^1(\mathbb{R}))$.

Ahora probemos que $\partial_t u(.,t)$ es continua respecto de t. Dado $t_0 \in [0,\tau]$, $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\tau]$ tal que $|t - t_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}||\partial_t u(\cdot,t_0) - \partial_t u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} &= ||(\partial_t u)^\wedge(\cdot,t_0) - (\partial_t u)^\wedge(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} = ||\partial_t\hat{u}(\cdot,t_0) - \partial_t\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= \Big(2\pi|||\cdot|\,\hat{f}\,(\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t))||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\hat{g}\,(\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t))||_{L^2(\mathbb{R})}\Big)^2\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Tomando en la definición de la continuidad uniforme del seno y del coseno

$$\begin{aligned} |\text{sen}\,(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \text{sen}\,(2\pi\,|\cdot|\,t)| &< \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi\sqrt{2}||\cdot\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}}, \\ \left|\frac{\cos\,(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi} - \frac{\cos\,(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi}\right| &< \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})}}. \end{aligned} \tag{**}$$

Por último nos queda ver que,

$$\left|\left|\partial^2_{tt}u(\cdot,t_0) - \partial^2_{tt}u(\cdot,t)\right|\right|^2_{H^{-1}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\partial^2_{tt}\hat{u}(\xi,t_0) - \partial^2_{tt}\hat{u}(\xi,t)\right|^2}{1+|\xi|^2} d\xi < \epsilon$$

Por ser $\hat{u}$ solución de (P') tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\partial^2_{tt}\hat{u}(\xi,t_0) - \partial^2_{tt}\hat{u}(\xi,t)\right|^2}{1+|\xi|^2} d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{16\pi^4\,|\xi|^4\,|\hat{u}(\xi,t_0) - \hat{u}(\xi,t)|^2}{1+|\xi|^2} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{16\pi^4\,|\xi|^4\,|\hat{u}(\xi,t_0) - \hat{u}(\xi,t)|^2}{|\xi|^2} d\xi \leq 16\pi^4 \int_{\mathbb{R}} |\xi\,[\hat{u}(\xi,t_0) - \hat{u}(\xi,t)]|^2\,d\xi \\ &\leq 16\pi^4||(\cdot)\,[\hat{u}(\cdot,t_0) - \hat{u}(\cdot,t)]||^2_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon \end{aligned}$$

Donde hemos usado de nuevo la continuidad uniforme del seno y coseno, puesto que hemos probado anteriormente la continuidad de $\xi\hat{u}$.

- Veamos que $u(x,t)$ satisface la definición de solución 3.2.1.

Es decir veamos que $\forall\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ y $\forall t \in [0,\tau]$

$$\left\langle \partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u, \varphi\right\rangle_{H^{-1},H^1} = 0.$$

Para ello utilizaremos la definición de la dualidad entre ambos espacios (2.1).

$$\left\langle \partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u, \varphi\right\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_{\mathbb{R}} (\partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u)^\wedge(\xi,t)\hat{\varphi}(-\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\partial^2_{tt}\hat{u} + 4\pi^2\,|\cdot|^2\,\hat{u})(\xi,t)\hat{\varphi}(-\xi)d\xi.$$

Dado que $\hat{u}$ es solución de (P') tenemos que

$$\left\langle \partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u, \varphi\right\rangle_{H^{-1},H^1} = 0.$$

Y por tanto u es solución débil de (P).

- **UNICIDAD**

Para la unicidad supongamos que existen $u^1(x,t)$ y $u^2(x,t)$ soluciones de (P).
Sea $v(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$, es solución de

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}v - \partial^2_{xx}v = 0, \\ v(x,0) = 0, \\ \partial_t v(x,0) = 0. \end{cases} \tag{P''}$$

Tenemos que si v es solución de (P"), $v \in \mathcal{C}([0,\tau], H^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-1}(\mathbb{R}))$. Luego tenemos la existencia de $\partial^2_{tt} v$ en el sentido de derivada débil.

Tenemos entonces que v satisface 3.2.1, $\forall \varphi(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R})$, $\forall t \in [0,\tau]$.

$$\left\langle \partial^2_{tt} v - \partial^2_{xx} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} = 0. \tag{3.2}$$

Sea s tal que $0 \le s \le \tau$, definimos

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \int_t^s v(x,\sigma) d\sigma & 0 \le t \le s \\ 0 & s \le t \le \tau \end{cases}$$

Por construcción, $\varphi(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R})$ pues $\varphi(\cdot,t)$ y $\partial_x \varphi(\cdot,t)$ están en $L^2(\mathbb{R})$.

$$\partial_t \varphi(x,t) = \begin{cases} -v(x,t) & 0 \le t \le s \\ 0 & s \le t \le \tau \end{cases}$$

Luego $\varphi(x,t)$ definida así cumple 3.2,

$$\begin{aligned} \left\langle \partial^2_{tt} v - \partial^2_{xx} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} &= \left\langle \partial^2_{tt} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} - \left\langle \partial^2_{xx} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} \\ &= \left\langle \partial^2_{tt} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} + \left\langle \partial_x v, \partial_x \varphi \right\rangle_{L^2,L^2}. \end{aligned}$$

Integramos en la última igualdad entre $[0,s]$ y obtenemos

$$\int_0^s \left(\left\langle \partial^2_{tt} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} + \int_{\mathbb{R}} \partial_x v \ \partial_x \varphi dx \right) dt.$$

En la primera integral integramos por partes tomando $r = \varphi$ y $dl = \partial^2_{tt} v dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\langle \partial^2_{tt} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_t v \ \varphi|_0^s \right) dx - \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \partial_t v \ \partial_t \varphi \ dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_t v(x,s) \ \varphi(x,s) - \partial_t v(x,0) \ \varphi(x,0) \right) dx - \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \partial_t v \ \partial_t \varphi \ dx dt. \end{aligned}$$

Observamos que

$$v(x,0) = \partial_t v(x,0) = \varphi(x,s) = 0.$$

Por tanto,

$$\int_0^s \left\langle \partial^2_{tt} v, \varphi \right\rangle_{H^{-1},H^1} dt = -\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \partial_t v \ \partial_t \varphi dx dt.$$

Sustituyendo en la expresión inicial tenemos,

$$\begin{aligned} \int_0^s \left(-\int_{\mathbb{R}} \partial_t v \partial_t \varphi dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x v \partial_x \varphi dx \right) dt &= \left[\partial_t \varphi = -v, \quad \partial^2_{xt} \varphi = -\partial_x v \right] \\ = \int_0^s \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_t v \ v dx - \int_{\mathbb{R}} \partial^2_{xt} \varphi \partial_x \varphi dx \right) dt &= \int_0^s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(||v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) - ||\partial_x \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, utilizando la observación anterior una vez más obtenemos que

$$||v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) + ||\partial_x \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) = ||v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) + ||\partial_x \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) = 0.$$

Pero puesto que el sumando de la derecha es la suma de dos términos no negativos necesariamente,

$$||v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) = ||\partial_x \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) = 0.$$

Luego, $||v||_{L^2(\mathbb{R})}(s) = 0$ lo que implica que $v(x,s) = 0$, y esto a su vez que $u^1(x,s) = u^2(x,s)$.

Dado que s era arbitrario, tenemos la unicidad.

$\square$

Podemos generalizar el resultado anterior como sigue,

Teorema 3.2.3. *Si $f \in H^{k+1}(\mathbb{R})$ y $g \in H^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, $\tau > 0$, entonces existe una única $u(x,t)$ que es solución del problema* (P) *tal que $u \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k+1}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], H^k(\mathbb{R}))$*

Demostración. Procederemos en el mismo orden que en la prueba del teorema anterior.

- **EXISTENCIA**

Para ver que $u(x,t) \in H^{k+1}(\mathbb{R})$ basta ver que $u(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\partial_x^n u(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$ $1 \leq n \leq k+1$. Lo primero lo hemos probado anteriormente, veamos la segunda parte.

$$||\partial_x^n u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||(\partial_x^n u)^\wedge(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||(2\pi i \cdot)^n \hat{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)^n ||(\cdot)^n \hat{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Por construcción tenemos,

$$||(\cdot)^n \hat{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq ||(\cdot)^n \hat{f}(\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} + \left|\left|(\cdot)^{n-1} \hat{g}(\cdot)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \infty.$$

Ya que $\xi^n \hat{f}(\xi,t)$, $\xi^{n-1}\hat{g}(\xi,t) \in L^2(\mathbb{R})$ pues $f \in H^{k+1}(\mathbb{R})$, es decir $\partial_x^n f \in L^2(\mathbb{R})$ $\forall 1 \leq n \leq k+1$.

Para g de manera análoga.

Veamos ahora que $\partial_t u(\cdot,t) \in H^k(\mathbb{R})$, i.e $\partial_t u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\partial_x^n \partial_t u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$, $1 \leq n \leq k$, $\forall t \in [0,\tau]$. Como anteriormente, la primera parte se probó en el teorema anterior. Por razonamientos análogos a los de $u(x,t)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} ||\partial_x^n \partial_t u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} &= ||(\partial_x^n \partial_t u)^\wedge(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||(2\pi i \cdot)^n \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= (2\pi)^n \quad ||(\cdot)^n \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Luego concluimos que $u(x,t) \in H^{k+1}(\mathbb{R})$ y $\partial_t u(x,t) \in H^k(\mathbb{R})$.

- **CONTINUIDAD:**

Para ver la continuidad en t, usaremos una vez más que la transformada de Fourier es una isometría y la continuidad por construcción de la función $u(x,t)$ y de $\partial_t u(x,t)$.

$$
\begin{aligned}
||u(\cdot,t_0)-u(\cdot,t)||^2_{H^{k+1}(\mathbb{R})} &= ||u(\cdot,t_0)-u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k+1} ||\partial_x^n u(\cdot,t_0)-\partial_x^n u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\hat{u}(\cdot,t_0)-\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k+1} ||(\partial_x^n u)^\wedge(\cdot,t_0)-(\partial_x^n u)^\wedge(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\hat{u}(\cdot,t_0)-\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k+1} ||(2\pi i\cdot)^n\hat{u}(\cdot,t_0)-(2\pi i\cdot)^n\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||\hat{u}(\cdot,t_0)-\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2(k+1)} \sum_{n=1}^{k+1} ||(\cdot)^n\hat{u}(\cdot,t_0)-(\cdot)^n\hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Utilizando la expresión de $\hat{u}(\xi,t)$ veamos la continuidad. Dado $t_0 \in [0,\tau]$, $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\tau]$ tal que $|t-t_0| < \delta$,

$$
||u(\cdot,t_0)-u(\cdot,t)||^2_{H^{k+1}(\mathbb{R})} \leq M_1^2 + (2\pi)^{2(k+1)} \sum_{n=1}^{k+1} M_{2_n}^2 < \epsilon.
$$

Donde $M_1 = M_{11} + M_{12}$ y $M_{2_n} = M_{21_n} + M_{22_n}$ con

$$
M_{11} = \left|\left|\hat{f}\left[\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},
$$

$$
M_{12} = \left|\left|\hat{g}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi\,|\cdot|} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi\,|\cdot|}\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},
$$

$$
M_{21_n} = \left|\left|(\cdot)^n\hat{f}\left[\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},
$$

$$
M_{22_n} = \left|\left|(\cdot)^{n-1}\hat{g}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi}\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}.
$$

Para el primer término volvemos a tomar (*), mientras que para el segundo

$$
\begin{aligned}
|\cos(2\pi\,|\cdot|\,t_0) - \cos(2\pi\,|\cdot|\,t)| &< \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||(\cdot)^n\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{k+1}(2\pi)^{(k+1)}}, \\
\left|\frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t_0)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi\,|\cdot|\,t)}{2\pi}\right| &< \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||(\cdot)^{n-1}\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{k+1}(2\pi)^{(k+1)}}.
\end{aligned}
$$

Veamos ahora $\partial_t u$. Dado $t_0 \in [0,\tau]$, $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\tau]$ tal que $|t-t_0| < \delta$,

$$
\begin{aligned}
&||\partial_t u(\cdot,t_0) - \partial_t u(\cdot,t)||^2_{H^k(\mathbb{R})} = \\
&\quad = ||\partial_t u(\cdot,t_0) - \partial_t u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||\partial_x^n \partial_t u(\cdot,t_0) - \partial_x^n \partial_t u(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\quad = ||\partial_t \hat{u}(\cdot,t_0) - \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(\partial_x^n \partial_t u)^\wedge(\cdot,t_0) - (\partial_x^n \partial_t u)^\wedge(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\quad = ||\partial_t \hat{u}(\cdot,t_0) - \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(2\pi i\cdot)^n \partial_t \hat{u}(\cdot,t_0) - (2\pi i\cdot)^n \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\quad \leq ||\partial_t \hat{u}(\cdot,t_0) - \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} ||(\cdot)^n \partial_t \hat{u}(\cdot,t_0) - (\cdot)^n \partial_t \hat{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Utilizando la expresión de $\partial_t \hat{u}(\xi,t)$ tenemos

$$
||\partial_t u(\cdot,t_0) - \partial_t u(\cdot,t)||^2_{H^k(\mathbb{R})} \leq (2\pi N_{11} + N_{12})^2 + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} (2\pi N_{21_n} + N_{21_n})^2 < \epsilon.
$$

Con

$$
N_{11} = |||\cdot|\, \hat{f}\, [\mathrm{sen}\,(2\pi\, |\cdot|\, t_0) - \mathrm{sen}\,(2\pi\, |\cdot|\, t)]||_{L^2(\mathbb{R})},
$$

$$
N_{12} = ||\hat{g}\, [\cos\,(2\pi\, |\cdot|\, t_0) - \cos\,(2\pi\, |\cdot|\, t)]||_{L^2(\mathbb{R})},
$$

$$
N_{21_n} = ||(\cdot)^{n+1} \hat{f}\, [\mathrm{sen}\,(2\pi\, |\cdot|\, t_0) - \mathrm{sen}\,(2\pi\, |\cdot|\, t)]||_{L^2(\mathbb{R})},
$$

$$
N_{22_n} = ||(\cdot)^n \hat{g}\, [\cos\,(2\pi\, |\cdot|\, t_0) - \cos\,(2\pi\, |\cdot|\, t)]||_{L^2(\mathbb{R})}.
$$

Volviendo a tomar (**) para el primer término y para el segundo

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{sen}\,(2\pi\, |\cdot|\, t_0) - \mathrm{sen}\,(2\pi\, |\cdot|\, t)| &< \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi\sqrt{2}||(\cdot)^{n+1}\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{k}(2\pi)^k}, \\
|\cos\,(2\pi\, |\cdot|\, t_0) - \cos\,(2\pi\, |\cdot|\, t)| &< \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||(\cdot)^{n}\hat{g}||_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{k}(2\pi)^k}.
\end{aligned}
$$

- Veamos que $u(x,t)$ es solución.

Tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior luego $u \in \mathcal{C}([0,\tau], H^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-1}(\mathbb{R}))$ y u solución débil de (P). Además,en este caso veremos que $\partial^2_{tt} u \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k-1}(\mathbb{R}))$ ya que $\partial^2_{xx} u(\cdot,t) \in H^{k-1}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

$$
\left|\left|\partial^2_{tt} u(\cdot,t)\right|\right|^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|(\partial^2_{tt} u)^\wedge(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-1} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^2_{tt} \hat{u}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-1} d\xi
$$

Utilizamos que $\hat{u}$ es solución de (P') y por tanto tenemos,

$$\begin{aligned}||\partial_{tt}^2 u(\cdot,t)||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left|\partial_{tt}^2 \hat{u}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-1} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-1} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|(\partial_{xx}^2 u)^\wedge(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-1} d\xi \\ &= ||\partial_{xx}^2 u(\cdot,t)||^2_{H^{k-1}(\mathbb{R})} < \infty.\end{aligned}$$

Pues tenemos que $u(\cdot,t) \in H^{k+1}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

Por tanto, en este caso, tenemos que se da la igualdad en $H^{k-1}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

- **UNICIDAD:**

Gracias a la regularidad de $\partial_{tt}^2 u$, para probar la unicidad en este caso podemos utilizar la identidad de la energía asociada a este sistema que será probada una vez terminemos el teorema.

Para la unicidad supongamos que existen $u^1(x,t)$ y $u^2(x,t)$ soluciones de P.

Sea $v(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$, es solución de

$$(\text{P"}) \begin{cases} \partial_{tt}^2 v - \partial_{xx}^2 v = 0, \\ v(x,0) = 0, \\ \partial_t v(x,0) = 0. \end{cases}$$

De la identidad de la energía de la ecuación de ondas,

$$||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||g||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Obtenemos,

$$||\partial_t v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\partial_x v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad ||\partial_t v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||\partial_x v||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = 0,$$

$$\rightarrow \quad \partial_t v = \partial_x v = 0 \;\; e.c.t \quad \rightarrow \quad v = C \;\; e.c.t \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Pero $v(x,0) = 0$ e.c.t luego $v = 0$ e.c.t y por tanto, $u^1(x,t) = u^2(x,t)$ e.c.t.

Con lo que concluimos la prueba del teorema.

□

Lema 3.2.4. *Si $u(x,t) \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k+1}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], H^k(\mathbb{R}))$, $k \geq 1$ es solución del problema* (P), *se satisface la siguiente igualdad:*

$$||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||g||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{3.3}$$

que denominamos identidad de la energía.

Demostración. Dado que la regularidad en u coincide con la del teorema anterior, tenemos que $\partial_{tt}^2 u \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k-1}(\mathbb{R}))$ puesto que se ha probado previamente. Por tanto, las siguientes igualdades tienen sentido pues sabemos que $\partial_{tt}^2 u \in H^{k-1}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

Sea $s \in [0, \tau]$. Probar (3.3) es equivalente a ver que

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \frac{d}{dt}\left(||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t)\right) dt \\
&\quad = ||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) - ||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) \\
&\quad = ||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) - ||g||^2_{L^2(\mathbb{R})} - ||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})} = 0.
\end{aligned}$$

Dado que s es arbitrario quedaría probada la igualdad. Veamos

$$\frac{d}{dt}\left(||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t)\right) = 2\int_{\mathbb{R}} \partial^2_{tt} u \ \partial_t u dx + 2\int_{\mathbb{R}} \partial^2_{tx} u \ \partial_x u dx.$$

Integrando en la segunda integral por partes en x obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t)\right) = 2\int_{\mathbb{R}} \partial^2_{tt} u \ \partial_t u dx - 2\int_{\mathbb{R}} \partial^2_{xx} u \ \partial_t u dx \\
&\quad = 2\int_{\mathbb{R}} \partial_t u \ (\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u) dx = 0.
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos la prueba del lema.

$\square$

Capítulo 4

Ecuaciones olas del mar

En este capítulo vamos a resolver las ecuaciones water waves lineales que es un caso particular de las ecuaciones de Euler y Navier Stokes (A), con $\nu = 0$ puesto que el agua es poco viscosa.

Para su resolución procederemos en primer lugar a la linealización y posteriormente haremos un estudio similar al de la ecuación de onda.

4.1. Linealización ecuación water waves

Para el estudio de las ecuaciones de las olas del mar asumiremos las siguientes propiedades:

1. El agua es poco viscosa luego cumple las ecuaciones de Euler
$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = \nabla p - (0, g),$$
donde $u(x,t)$ es la velocidad, $p(x,t)$ la presión y $(0,g)$ la fuerza ejercida por la gravedad.

2. El agua es incompresible y por tanto el vector velocidad es de divergencia nula.
$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

3. Condiciones de contorno en la frontera libre, i.e, la interfase entre el aire y el agua se mueve con el fluido y la presión es igual a la atmosférica en toda la superficie.

4. Consideramos que el agua se mueve en dos dimensiones y que la interfase entre agua y aire se modela con una curva.

5. Consideramos olas en un océano de profundidad infinita.

6. Consideramos que el fluido es irrotacional, solo se produce rotación en la ola, es decir,
$$\omega = \nabla \times u = 0,$$
donde ω es la vorticidad, rotacional del campo de velocidades.

7. Consideramos que la interfase es periódica o definida en toda la recta real con decaimiento en el infinito.

Parametrizamos la frontera del dominio que ocupa el fluido, $\Omega(t)$, como

$$\partial\Omega = \{z(\alpha,t) = (z_1(\alpha,t), z_2(\alpha,t)),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Procedemos a la linealización de las ecuaciones que describen las olas, que se deducen en [10]

$$\begin{cases} \partial_t z(\alpha,t) = BR(z,\omega)(\alpha,t) + c(\alpha,t)\partial_\alpha z(\alpha,t), \\ \partial_t \omega(\alpha,t) = -2\partial_\alpha z(\alpha,t)\partial_t BR(z,\omega)(\alpha,t) - \partial_\alpha\left(\dfrac{|\omega|^2}{4\,|\partial_\alpha z|^2}\right)(\alpha,t) + \partial_\alpha(c(\alpha,t)\omega(\alpha,t)) \\ \qquad + 2c(\alpha,t)\partial_\alpha z(\alpha,t)\partial_\alpha BR(z,\omega)(\alpha,t) - 2g\partial_\alpha z_2(\alpha,t), \\ z_0 = z(\alpha,0), \\ \omega_0 = \omega(\alpha,0). \end{cases} \tag{E}$$

donde tenemos que ω es la vorticidad en la ola y

$$BR(z,\omega)(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{(z_1(\alpha,t)-z_1(\beta,t), z_2(\alpha,t)-z_2(\beta,t))^{\perp}}{|(z_1(\alpha,t)-z_1(\beta,t), z_2(\alpha,t)-z_2(\beta,t)|^2}\omega(\beta,t)d\beta.$$

La solución es independiente de la parametrización elegida por lo que podemos suponer $c = 0$ y por tanto las ecuaciones quedan como sigue:

$$\begin{cases} \partial_t z(\alpha,t) = BR(z,\omega)(\alpha,t), & (1) \\ \partial_t \omega(\alpha,t) = -2\partial_\alpha z(\alpha,t)\partial_t BR(z,\omega)(\alpha,t) - \partial_\alpha\left(\frac{|\omega|^2}{4|\partial_\alpha z|^2}\right)(\alpha,t) - 2g\partial_\alpha z_2(\alpha,t), & (2) \\ z_0 = z(\alpha,0), \\ \omega_0 = \omega(\alpha,0). \end{cases} \tag{E'}$$

Comprobamos fácilmente que $z(\alpha,t) = (\alpha,0)$ y $\omega(\alpha,t) = 0$ $\forall t$ es solución estacionaria de dicho sistema.

$$0 = \partial_t z(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{(\alpha-\beta,0)^{\perp}}{|(\alpha-\beta,0)|^2}\omega(\beta,t)d\beta = 0,$$

$$0 = \partial_t\omega(\alpha,t) = -2\partial_\alpha z(\alpha,t)\partial_t BR(z,\omega)(\alpha,t) - \partial_\alpha\left(\frac{|\omega|^2}{4\,|\partial_\alpha z|^2}\right)(\alpha,t) - 2g\partial_\alpha z_2(\alpha,t) = 0.$$

Para linealizar las ecuaciones, realizamos una pequeña perturbación en la solución anterior.

Sea $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} z(\alpha,t) &= (\alpha + \epsilon f_1(\alpha,t), \epsilon f_2(\alpha,t)), \\ \omega(\alpha,t) &= \epsilon w(\alpha,t). \end{aligned}$$

Veamos cómo quedan (1) y (2).

En (1) tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t z(\alpha,t) &= \partial_t\left[(\alpha + \epsilon f_1(\alpha,t), \epsilon f_2(\alpha,t))\right] \\ &= (\epsilon\partial_t f_1(\alpha,t), \epsilon\partial_t f_2(\alpha,t)), \end{aligned}$$

$$BR(z,\omega)(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{(\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)),\epsilon(f_2(\alpha,t)-f_2(\beta,t)))^{\perp}}{|(\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)),\epsilon(f_2(\alpha,t)-f_2(\beta,t)))|^2}\epsilon w(\beta,t)d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{(-\epsilon(f_2(\alpha,t)-f_2(\beta,t)),\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)))}{(\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)))^2+\epsilon^2((f_2(\alpha,t)-f_2(\beta,t)))^2}\epsilon w(\beta,t)d\beta.$$

El término ϵ^2 lo consideramos despreciable y por tanto, igualando ambas expresiones obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{-\epsilon^2 w(\beta,t)(f_2(\alpha,t)-f_2(\beta,t))}{(\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)))^2}d\beta = \epsilon\partial_t f_1(\alpha,t).$$

Usando de nuevo que $\epsilon^2 \sim 0$ obtenemos,

$$\partial_t f_1(\alpha,t) = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t))}{(\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)))^2}\epsilon w(\beta,t)d\beta = \\
&= \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon w(\beta,t)}{\alpha-\beta+\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t))}d\beta = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon w(\beta,t)}{\alpha-\beta}\frac{1}{1+\epsilon\frac{f_1(\alpha,t)-f_1(\alpha,t)}{\alpha-\beta}}d\beta = \\
&= \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon w(\beta,t)}{\alpha-\beta}\left(1-\frac{\epsilon(f_1(\alpha,t)-f_1(\beta,t)}{\alpha-\beta}+\frac{\epsilon^2(f_1(\alpha,t)-f_1(\beta,t)^2}{(\alpha-\beta)^2}-\dots\right)d\beta = \\
&= \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\epsilon w(\beta,t)}{\alpha-\beta}-\frac{\epsilon^2 w(\beta,t)(f_1(\alpha,t)-f_1(\beta,t))}{(\alpha-\beta)^2}\right)d\beta = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon w(\beta,t)}{\alpha-\beta}d\beta.
\end{aligned}$$

Donde hemos vuelto a usar que $\epsilon^n \sim 0 \ \forall n \geq 2$, y por tanto,

$$\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{w(\beta,t)}{\alpha-\beta}d\beta = \partial_t f_2(\alpha,t).$$

Usando la definición de la transformada de Hilbert 2.3.1 tenemos que

$$\partial_t f_2(\alpha,t) = \frac{1}{2}H\{w\}(\alpha,t).$$

En (2) tenemos,

$$\partial_t\omega(\alpha,t) = \epsilon\partial_t w(\alpha,t),$$

$$\partial_\alpha z(\alpha,t) = (1+\epsilon\partial_\alpha f_1(\alpha,t),\epsilon\partial_\alpha f_2(\alpha,t)),$$

$$\partial_t BR(z,\omega)(\alpha,t) = \partial_t\left(\partial_t z(\alpha,t)\right) = (\epsilon\partial^2_{tt}f_1(\alpha,t),\epsilon\partial^2_{tt}f_2(\alpha,t)) = (0,\epsilon\partial^2_{tt}f_2(\alpha,t)),$$

$$\partial_\alpha\left(\frac{|\omega|^2}{4|\partial_\alpha z|^2}\right)(\alpha,t) = \partial_\alpha\left(\frac{\epsilon^2|w(\alpha,t)|}{4|\partial_\alpha z|^2}\right)(\alpha,t) = 0,$$

$$-2g\partial_\alpha z_2(\alpha,t) = -2g\epsilon\partial_\alpha f_2(\alpha,t).$$

Luego

$$\begin{aligned}\partial_t\omega(\alpha,t) &= -2\partial_\alpha z(\alpha,t)\partial_t BR(z,\omega)(\alpha,t) - \partial_\alpha\left(\frac{|\omega|^2}{4\,|\partial_\alpha z|^2}\right)(\alpha,t) - 2g\partial_\alpha z_2(\alpha,t)\\ &= -2\epsilon^2\partial_\alpha f_2(\alpha,t)\partial^2_{tt}f_2(\alpha,t) - 2g\epsilon\partial_\alpha f_2(\alpha,t)\\ &= -2g\epsilon\partial_\alpha f_2(\alpha,t).\end{aligned}$$

Por tanto, igualando,

$$\partial_t w(\alpha,t) = -2g\partial_\alpha f_2(\alpha,t).$$

Tenemos que las nuevas ecuaciones no dependen de la función f_1 luego podemos suponer $f_1 = 0$. Es decir, estudiaremos la perturbación en las ecuaciones originales del siguiente modo:

Sea $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} z(\alpha,t) &= (\alpha,\epsilon f(\alpha,t)),\\ \omega(\alpha,t) &= \epsilon w(\alpha,t),\end{aligned}$$

donde hemos renombrado f_2 como f únicamente. Por tanto, las ecuaciones a estudiar quedan:

$$\begin{cases}\partial_t f(\alpha,t) = \frac{1}{2}H\{w\}(\alpha,t),\\ \partial_t w(\alpha,t) = -2g\partial_\alpha f(\alpha,t),\\ f(\alpha,0) = f_0(\alpha),\\ w(\alpha,0) = w_0(\alpha).\end{cases}\tag{L}$$

4.2. Resolución del sistema

Procedemos de manera análoga a la ecuación de ondas.

Observamos el sistema (L) en Fourier tomando como condiciones iniciales $f(\alpha,0) = f_0(\alpha)$ y $w(\alpha,0) = w_0(\alpha)$.

Por propiedades de la transformada tenemos,

$$(\partial_\alpha f)^\wedge(\xi,t) = 2\pi\xi i\hat{f}(\xi,t).$$

Por lo visto en los preliminares, 2.3.1,

$$\hat{H}\,\{w\}\,(\xi,t) = -i\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}(\xi,t).$$

Por último, por 2.3, tenemos $(\partial_t f)^\wedge(\xi,t) = \partial_t\hat{f}(\xi,t)$.

Luego nuestro sistema pasa a ser,

$$\begin{cases}\partial_t\hat{f}(\xi,t) = \frac{1}{2}\left[-i\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}(\xi,t)\right],\\ \partial_t\hat{w}(\xi,t) = -4\pi i g\xi\hat{f}(\xi,t),\\ \hat{f}(\xi,0) = \hat{f}_0(\xi),\\ \hat{w}(\xi,0) = \hat{w}_0(\xi).\end{cases}\tag{L'}$$

Para proceder a la resolución, derivamos respecto de la variable t la función $\partial_t \hat{f}$,

$$\partial^2_{tt}\hat{f}(\xi,t) = \frac{-i}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\partial_t\hat{w}(\xi,t).$$

Utilizando que $\partial_t\hat{w}(\xi,t) = -4\pi i g\xi\hat{f}(\xi,t)$ tenemos que

$$\partial^2_{tt}\hat{f}(\xi,t) = -2\pi g\,|\xi|\,\hat{f}(\xi,t),$$

$$\boxed{\partial^2_{tt}\hat{f}(\xi,t) + 2\pi g\,|\xi|\,\hat{f}(\xi,t) = 0}. \tag{4.1}$$

Una vez más utilizaremos el método del polinomio característico para resolver la EDO de segundo orden puesto que los coeficientes no dependen de t.

Por tanto tenemos, $r^2 + 2\pi g\,|\xi| = 0 \;\rightarrow\; r = \pm\sqrt{-2\pi g\,|\xi|}$.

A continuación distinguiremos dos casos.

Caso A: $g < 0 \;\rightarrow\; r = \pm\sqrt{-2\pi g\,|\xi|}$.

Tenemos que en este caso nuestra solución tiene la siguiente estructura

$$\hat{f}(\xi,t) = A\cosh\,(\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t) + B\,\mathrm{senh}\,(\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t).$$

Derivamos respecto de t,

$$\partial_t\hat{f}(\xi,t) = A\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{senh}\,(\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t) + B\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\cosh\,(\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t).$$

Imponemos las condiciones iniciales de (L')

$$\hat{f}(\xi,0) = A\cosh 0 + B\,\mathrm{senh}\,0 = A = \hat{f}_0 \;\rightarrow\; \boxed{A = \hat{f}_0},$$

$$\partial_t\hat{f}(\xi,0) = A\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{senh}\,0 + B\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\cosh 0 = B\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-i}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}_0 \;\rightarrow\; \boxed{B = \frac{-i}{2\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}_0}.$$

Luego nos queda

$$\hat{f}(\xi,t) = \hat{f}_0\cosh\,(\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t) - \frac{i}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}_0\frac{\mathrm{senh}\,(\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t)}{\sqrt{2\pi\,|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\hat{w}(\xi,t) = -2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{f}_0\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{senh}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t) + \hat{w}_0\cosh\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t). \tag{4.2}$$

Veamos ahora el segundo caso.

Caso B: $g > 0 \;\rightarrow\; r = \pm i\sqrt{2\pi g\,|\xi|}$.

Ahora nuestra solución tiene la siguiente forma

$$\hat{f}(\xi,t) = A\cos\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t).$$

Derivamos respecto de t,

$$\partial_t \hat{f}(\xi,t) = -A\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t) + B\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}} \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t).$$

Imponemos las condiciones iniciales de (L') una vez más.

$$\hat{f}(\xi,0) = A\cos 0 + B \operatorname{sen} 0 = A = \hat{f}_0 \ \rightarrow \ \boxed{A = \hat{f}_0},$$

$$\partial_t \hat{f}(\xi,0) = -A\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 0 + B\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}} \cos 0 = B\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-i}{2} \operatorname{sgn}(\xi)\hat{w}_0 \ \rightarrow \ \boxed{B = \frac{-i}{2\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sgn}(\xi)\hat{w}_0}.$$

Por tanto,

$$\hat{f}(\xi,t) = \hat{f}_0 \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t) - \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(\xi)\hat{w}_0 \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t)}{\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.3}$$

$$\hat{w}(\xi,t) = -2i \operatorname{sgn}(\xi)\hat{f}_0\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t) + \hat{w}_0 \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t). \tag{4.4}$$

Tenemos que el caso B es el caso de las olas del mar puesto que la gravedad positiva equivale a el aire se encuentre sobre el fluido [10].

4.3. Estudio de las soluciones

De manera análoga a las ecuación de onda vamos a probar resultados sobre los espacios de soluciones teniendo en cuenta el de los datos iniciales.

En primer lugar, deduciremos la energía asociada a este sistema. Para ello introducimos el concepto de media derivada 2.6 junto al operador Λ.

Recordemos (L),

$$\begin{cases} \partial_t f(\alpha,t) = \frac{1}{2}H\{w\}(\alpha,t), \\ \partial_t w(\alpha,t) = -2g\partial_\alpha f(\alpha,t), \\ f(\alpha,0) = f_0(\alpha), \\ w(\alpha,0) = w_0(\alpha). \end{cases}$$

Una vez pasamos al lado de Fourier obtenemos la ecuación

$$\partial_{tt}^2 \hat{f}(\xi,t) + 2\pi g\,|\xi|\,\hat{f}(\xi,t) = 0.$$

Si deshacemos, teniendo en cuenta que $\hat{H}\left\{\partial_\alpha f\right\}(\xi,t) = 2\pi\,|\xi|\,\hat{f}(\xi,t)$ obtenemos

$$\partial_{tt}^2 f + gH\partial_\alpha f = 0.$$

Definimos el operador $\Lambda = H\partial_\alpha$ y llegamos a

$$\partial_{tt}^2 f = -g\Lambda f. \tag{4.5}$$

Definimos la energía como

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|\partial_t f(\alpha,t)|^2 + g|\Lambda^{\frac{1}{2}} f(\alpha,t)|^2)d\alpha.$$

El primer término del integrando corresponde a la energía cinética mientras que el segundo a la energía potencial.

Antes de probar el primer resultado sobre water waves, definiremos lo que entendemos por solución del sistema (L).

Definición 4.3.1. *Diremos que f es solución (débil) del problema* (L) *en el intervalo* $[0,\tau]$ *si*

$$f \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) \ \cap \ \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \ \cap \ \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$$

y si satisface

$$\left\langle \partial^2_{tt} f + g\Lambda f, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} = 0, \ \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}), \ \forall t \in [0,\tau].$$

Teorema 4.3.2. *Si $f_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ y $w_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $\tau > 0$, $\exists!\ f \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) \ \cap \ \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \ \cap$ $\mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$ y $\exists!\ w \in \mathcal{C}([0,\tau], L^2(\mathbb{R}))$ que es solución del problema* (L) *en el sentido de la definición 4.3.1.*

Demostración. De manera análoga a la ecuación de onda, probaremos en primer lugar la existencia y luego la unicidad.

- **EXISTENCIA**

Veamos que $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$ (4.3).

$$\begin{aligned} ||f||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}(t) &= ||f||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\Lambda^{\frac{1}{2}} f||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||\hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||(\Lambda^{\frac{1}{2}} f)^\wedge||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) \\ &= ||\hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + 2\pi|||\cdot|^{\frac{1}{2}}\, \hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) \ < \ \infty. \end{aligned}$$

Pues tenemos que $\hat{f}$ y $|\xi|^{\frac{1}{2}}\, \hat{f}$ pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$ ya que

$$||\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}(t) \leq ||\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + t\ ||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} \leq ||\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \tau\ ||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} \ < \infty,$$

donde hemos usado que

$$\left| \frac{\text{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t)}{\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}} \right| = \left| \frac{\text{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t)}{\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t} t \right| \leq t.$$

Por otro lado,

$$|||\cdot|^{\frac{1}{2}}\, \hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}(t) \leq |||\cdot|^{\frac{1}{2}}\, \hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi g}}||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} \ < \ \infty.$$

Pues $|\xi|^{\frac{1}{2}}\, \hat{f}_0 \in L^2(\mathbb{R})$ porque $f_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

Por tanto, $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$. Veamos ahora que $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

$$||\partial_t f||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||(\partial_t f)^\wedge||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||\partial_t \hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}(t) \leq \sqrt{2\pi g}|||\cdot|^{\frac{1}{2}}\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Queda comprobar que $\partial^2_{tt} f(\cdot, t) \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0, \tau]$. Para ello usaremos que $\hat{f}$ es solución de (4.1).

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|(\partial^2_{tt} f)^\wedge(\xi, t)\right|^2}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi = 4\pi^2 g^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2 \, |\hat{f}(\xi,t)|^2}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi \leq 4\pi^2 g^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2 \, |\hat{f}(\xi,t)|^2}{|\xi|} d\xi$$

$$\leq 4\pi^2 g^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi| \, |\hat{f}(\xi,t)|^2 \leq 4\pi^2 g^2 ||(\cdot)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Veamos ahora que $w(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0, \tau]$ (4.4).

$$||w(.,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\hat{w}(.,t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2|||\cdot|^{\frac{1}{2}}\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

- **CONTINUIDAD:**

Estudiemos la continuidad.

$$\hat{f}(\xi,t) = \hat{f}_0 \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t) - \tfrac{i}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}_0 \tfrac{\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}|\xi|^{\frac{1}{2}} t)}{\sqrt{2\pi g}|\xi|^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\partial_t \hat{f}(\xi,t) = -\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t) - \tfrac{i}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\hat{w}_0 \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\,t).$$

Luego tenemos que ambas son continuas respecto de t puesto que el seno y el coseno lo son.
Por tanto, veamos que f lo es. Sea $t_0 \in [0,\tau]$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in [0, \tau]$ tal que $|t - t_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} ||f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} &= ||f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\Lambda^{\frac{1}{2}} f(\alpha,t) - \Lambda^{\frac{1}{2}} f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||(\Lambda^{\frac{1}{2}} f)^\wedge(\cdot,t) - (\Lambda^{\frac{1}{2}} f)^\wedge(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\pi|||\cdot|^{\frac{1}{2}}\hat{f}(\cdot,t) - |\cdot|^{\frac{1}{2}}\hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Utilizando la expresión de f,

$$||f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq A_1^2 + 2\pi A_2^2 < \epsilon.$$

Donde tenemos que $A_1 = A_{11} + A_{12}$ y $A_2 = A_{21} + A_{22}$ con

$$A_{11} = \left|\left|\hat{f}_0 \left[\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$A_{12} = \left|\left| \hat{w_0} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)}{2\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)}{2\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}} \right] \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$A_{21} = \left|\left| |\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0 \left[\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0) \right] \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$A_{22} = \left|\left| \hat{w_0} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)}{2\sqrt{2\pi g}} - \hat{w_0}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)}{2\sqrt{2\pi g}} \right] \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Al igual que en el caso de la ecuación de onda tenemos que el seno, el coseno y $\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}|\cdot|^{\frac{1}{2}}t)}{2\sqrt{2\pi g}|\cdot|^{\frac{1}{2}}}$ son uniformemente continuos en $[0,\tau]$ y por tanto la continuidad no depende de ξ.
Luego tenemos la continuidad de f tomando la definición de continuidad uniforme como sigue:

- En A_1,

$$\left| \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0) \right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}, \qquad (\star)$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)}{2\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)}{2\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}} \right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

- En A_2,

$$\left| \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0) \right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}|||\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}},$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)}{2\sqrt{2\pi g}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)}{2\sqrt{2\pi g}} \right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

Luego tenemos la continuidad de $f(\alpha,t)$ $\forall t \in [0,\tau]$. Veamos ahora la de $\partial_t f(\alpha,t)$.

$$\begin{aligned} ||\partial_t f(\cdot,t) - \partial_t f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} &= ||(\partial_t f)^\wedge(\cdot,t) - (\partial_t f)^\wedge(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\partial_t \hat{f}(\cdot,t) - \partial_t \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Utilizando ahora la expresión de $\partial_t f$, sea $t_0 \in [0,\tau]$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\tau]$ tal que $|t - t_0| < \delta$, entonces

$$||\partial_t f(\cdot,t) - \partial_t f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\sqrt{2\pi g} B_{11} + \frac{1}{2} B_{12} \right)^2 < \epsilon.$$

Donde tenemos que

$$B_{11} = \left|\left| |\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0 \left[\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0) \right] \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$B_{12} = \left|\left|\hat{w}_0 \left[\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \hat{w}_0 \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Tomando ahora

$$\left|\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi g}||\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}, \quad (\star\star)$$

$$\left|\frac{\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)}{2\sqrt{2\pi g}} - \frac{\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)}{2\sqrt{2\pi g}}\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

Ahora veamos la continuidad de $\partial_{tt}^2 f$,

$$\left|\left|\partial_{tt}^2 f(\cdot, t_0) - \partial_{tt}^2 f(\cdot, t)\right|\right|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\partial_{tt}^2 \hat{f}(\xi, t_0) - \partial_{tt}^2 \hat{f}(\xi, t)\right|^2}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi < \epsilon.$$

Dado que $\hat{f}$ es solución de (4.1) tenemos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\partial_{tt}^2 \hat{f}(\xi, t_0) - \partial_{tt}^2 \hat{f}(\xi, t)\right|^2}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{4\pi^2 g^2 |\xi|^2 \left|\hat{f}(\xi, t_0) - \hat{f}(\xi, t)\right|^2}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{4\pi^2 g^2 |\xi|^2 \left|\hat{f}(\xi, t_0) - \hat{f}(\xi, t)\right|^2}{|\xi|} d\xi \leq 4\pi^2 g^2 \left|\left|(\cdot)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{f}(\cdot, t_0) - \hat{f}(\cdot, t)\right]^2\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon.\end{aligned}$$

Donde procedemos de manera análoga a la continuidad respecto de t en todos los casos anteriores, pues ya tenemos la de $\hat{f}$.

Por último, veamos la continuidad de $w(\alpha, t)$. Sea $t_0 \in [0, \tau]$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in [0, \tau]$ tal que $|t - t_0| < \delta$, entonces

$$||w(\cdot, t) - w(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} = ||\hat{w}(\cdot, t) - \hat{w}(\cdot, t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(2\sqrt{2\pi g} B_{11} + B_{12}\right)^2 < \epsilon.$$

Esta vez tomamos

$$\left|\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\sqrt{2}\sqrt{2\pi g}||\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}, \quad (\star\star\star)$$

$$\left|\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}||\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

- Veamos que f cumple la definición 4.3.1 y por tanto es solución del problema.

Para ello utilizaremos la dualidad vista en 2.2. Sea $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_{tt}^2 f + g\Lambda f, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_{tt}^2 f + g\Lambda f\right)^{\wedge} (\xi, t)\hat{\varphi}(-\xi) d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_{tt}^2 \hat{f} + 2\pi g\,|\cdot|\,\hat{f})(\xi, t)\hat{\varphi}(-\xi) d\alpha.\end{aligned}$$

Dado que $\hat{f}$ es solución de (4.1), tenemos que

$$\left\langle \partial_{tt}^2 f + g\Lambda f, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Luego f es solución de (L).

- **UNICIDAD**

Supongamos que existen dos soluciones distintas del problema (L), (f_1, w_1) y (f_2, w_2). Sean $F = f_1 - f_2$ y $W = w_1 - w_2$ tenemos que es solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} \partial_t F(\alpha, t) = \frac{1}{2} H\{W\}(\alpha, t), \\ \partial_t W(\alpha, t) = -2g\partial_\alpha F(\alpha, t), \\ F(\alpha, 0) = 0, \\ W(\alpha, 0) = 0. \end{cases} \tag{L”}$$

Dado que F es solución de (L”), entonces $F \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$. Por tanto, tenemos que se satisface 4.5 en el sentido débil, i.e $\forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ y $\forall t \in [0,\tau]$,

$$\left\langle \partial_{tt}^2 F, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} + \left\langle g\Lambda F, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} = 0. \tag{4.6}$$

Definimos la siguiente función φ de manera análoga al caso de la ecuación de ondas. Sea s tal que $0 \leq s \leq \tau$, definimos

$$\varphi(\alpha, t) = \begin{cases} \int_t^s F(\alpha, \sigma) d\sigma & 0 \leq t \leq s \\ 0 & s \leq t \leq \tau \end{cases}$$

Por construcción, $\varphi(\alpha, t) \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$ y tenemos

$$\partial_t \varphi(\alpha, t) = \begin{cases} -F(\alpha, t) & 0 \leq t \leq s \\ 0 & s \leq t \leq \tau \end{cases}$$

Observamos que $F(x, 0) = \varphi(x, s) = 0$ e integramos en $[0, s]$ en (4.6).

$$\int_0^s \left(\left\langle \partial_{tt}^2 F, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} + \left\langle g\Lambda F, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} \right) dt.$$

Realizamos una integración por partes en el primer término, tomando como $u = \varphi$ y como $dv = \partial_{tt}^2 F$.

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\langle \partial_{tt}^2 F, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi \partial_t F|_0^s - \int_0^s \partial_t \varphi \partial_t F dt \right) d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(x, s)\partial_t F(x, s) - \varphi(x, 0)\partial_t F(x, 0) - \int_0^s \partial_t \varphi \partial_t F dt \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Gracias a la observación anterior tenemos que $\varphi(x, s) = 0$ y a que $W(\alpha, 0) = 0$ tenemos que $\partial_t F(\alpha, 0) = \frac{1}{2} H\{W\}(\alpha, 0) = 0$. Luego se anulan los dos primeros sumandos y por tanto

$$\int_0^s \left\langle \partial_{tt}^2 F, \varphi \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} dt = -\int_{\mathbb{R}} \int_0^s \partial_t \varphi \partial_t F \; d\alpha \; dt.$$

Volviendo a la expresión inicial tenemos,

$$\int_0^s \left(-\int_{\mathbb{R}} \partial_t F \partial_t \varphi d\alpha + g \langle \Lambda F, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} \right) dt = [\partial_t \varphi = -F]$$

$$= \int_0^s \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_t F \; F d\alpha - g \langle \Lambda \partial_t \varphi, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} \right) dt = \int_0^s \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_t F \; F d\alpha - g \int_{\mathbb{R}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \partial_t \varphi \; \Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi d\alpha \right) dt$$

$$= \int_0^s \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(||F||^2_{L^2(\mathbb{R})} - g ||\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})} \right) dt = \frac{1}{2} \left(||F||^2_{L^2(\mathbb{R})} - g ||\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})} \right) \Big|_0^s = 0.$$

De donde concluimos, junto con la observación anterior, que

$$||F||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) + g ||\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) = ||F||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) + g ||\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) = 0.$$

Dado que la izquierda de la igualdad son dos sumandos no negativos, necesariamente tenemos que

$$||F||^2_{L^2(\mathbb{R})}(s) = g ||\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})}(0) = 0.$$

De donde deducimos que $||F||_{L^2(\mathbb{R})}(s) = 0$ y por tanto $F(\alpha, s) = 0$. Luego concluimos que $f_1(\alpha, s) = f_2(\alpha, s)$.

Puesto que s es arbitrario tenemos que $f_1(\alpha, t) = f_2(\alpha, t)$.

Para concluir la unicidad resta ver que $w_1(\alpha, t) = w_2(\alpha, t)$. Del sistema (L") obtenemos que

$$\partial_t W(\alpha, t) = -2g \partial_\alpha F(\alpha, t) = 0.$$

Es decir, $W(\alpha, t)$ no depende del tiempo, $W(\alpha, t) = \psi(\alpha)$.

Sin embargo tenemos que $W(\alpha, 0) = 0$ luego $W(\alpha, t) = 0$ y concluimos que $w_1(\alpha, t) = w_2(\alpha, t)$.

Por tanto la solución es única. □

A continuación generalizaremos el teorema como hicimos para la ecuación de la onda.

Teorema 4.3.3. *Si* $f_0 \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ *y* $w_0 \in H^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, $\tau > 0$, $\exists! f \in \mathcal{C}([0, \tau], H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0, \tau], H^k(\mathbb{R}))$ *y* $\exists! w \in \mathcal{C}([0, \tau], H^k(\mathbb{R}))$ *solución del problema* (L).

Demostración. Probaremos la existencia y posteriormente la unicidad.

- **EXISTENCIA**

Supongamos que la solución viene dada por (4.3) y (4.4). Veamos que tienen la regularidad apropiada.

En primer lugar veamos que $f \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0, \tau]$.

$$\begin{aligned}
||f(\cdot,t)||^2_{H^{k+\frac{1}{2}}} &= ||f(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||\partial_\alpha^n f(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\partial_\alpha^k \Lambda^{\frac{1}{2}} f(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(\partial_\alpha^n f)^\wedge(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||(\partial_\alpha^k \Lambda^{\frac{1}{2}} f)^\cdot(\xi,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(2\pi i \cdot)^n \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k+1} |||\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||\hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} ||(\cdot)^n \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k+1} |||\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \ < \ \infty.
\end{aligned}$$

Tenemos que $\hat{f}$ pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$ pues lo hemos probado previamente. Veamos que el resto de términos también.

$$||(\cdot)^n \hat{f}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq ||(\cdot)^n \hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi g}} ||(\cdot)^n \hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} \ < \ \infty.$$

$$|||\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \hat{f}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq |||\cdot|^{k+\frac{1}{2}} \hat{f}_0(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi g}} |||\cdot|^{k} \hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} \ < \ \infty.$$

Dado que $f_0 \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, en particular tenemos que $\partial_\alpha^n f_0 \in L^2(\mathbb{R})$ $1 \leq n \leq k$ y $\partial_\alpha^k \Lambda^{\frac{1}{2}} f_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\infty > ||\partial_\alpha^n f_0||_{L^2(\mathbb{R})} = ||(2\pi i \cdot)^n \hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)^n ||(\cdot)^n \hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

$$\infty > ||\partial_\alpha^k \Lambda^{\frac{1}{2}} f_0||_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)^{k+\frac{1}{2}} ||(\cdot)^{k+\frac{1}{2}} \hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De manera análoga probamos que $\xi^n \hat{w}_0 \in L^2(\mathbb{R})$ y por tanto podemos concluir que $f \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

A continuación probaremos que $\partial_t f \in H^k(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

$$\begin{aligned}
||\partial_t f(\cdot,t)||^2_{H^k(\mathbb{R})} &= ||\partial_t f(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||\partial_\alpha^n \partial_t f(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||(\partial_t f)^\wedge(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(\partial_\alpha^n \partial_t f)^\wedge(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\partial_t \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(2\pi i \cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||\partial_t \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} ||(\cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Hemos probado anteriormente que $\partial_t \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, queda ver que cada término del sumatorio también.

$$||(\cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi g} |||\cdot|^{n+\frac{1}{2}} \hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} ||(\cdot)^n \hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})} \ < \ \infty.$$

Pues por hipótesis $f_0 \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ y $w_0 \in H^k(\mathbb{R})$ y razonando de manera análoga a f obtenemos el resultado.

Veamos que $w(\cdot,t) \in H^k(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,\tau]$.

$$\begin{aligned}
||w(\cdot,t)||^2_{H^k(\mathbb{R})} &= ||w(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||\partial_\alpha^n w(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\hat{w}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} (2\pi)^{2n} ||(\cdot)^n \hat{w}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\le ||\hat{w}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} ||(\cdot)^n \hat{w}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Pues tenemos que $\hat{w} \in L^2(\mathbb{R})$ como hemos visto previamente, y por un razonamiento análogo al de $\xi^n \hat{f}$ tenemos que $\xi^n \hat{w} \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall t \in [0,\tau]$.

- **CONTINUIDAD:**

Veamos ahora la continuidad de f en t. Sea $t_0 \in [0,\tau]$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\tau]$ tal que $|t - t_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
&||f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)||^2_{H^{k+\frac{1}{2}}} = \\
&= ||f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||\partial_\alpha^n f(\cdot,t) - \partial_\alpha^n f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\partial_\alpha^k \Lambda^{\frac{1}{2}} f(\cdot,t) - \partial_\alpha^k \Lambda^{\frac{1}{2}} f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(2\pi i \cdot)^n [\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)]||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\quad + (2\pi)^{2k+1} |||\cdot|^{k+\frac{1}{2}} [\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)]||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\le ||\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} ||(\cdot)^n [\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)]||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\quad + (2\pi)^{2k+1} |||\cdot|^{k+\frac{1}{2}} [\hat{f}(\cdot,t) - \hat{f}(\cdot,t_0)]||^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Utilizando la expresión de $\hat{f}$ tenemos,

$$||f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)||^2_{H^{k+\frac{1}{2}}} \le I_1^2 + (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} I_{2_n}^2 + (2\pi)^{2k+1} I_3^2 < \epsilon.$$

donde tenemos que $I_1 = I_{11} + I_{12}$, $I_{2_n} = I_{21_n} + I_{22_n}$ y $I_3 = I_{31} + I_{32}$ con

$$I_{11} = \left|\left| \hat{f}_0 \left[\cos\left(\sqrt{2\pi g}\, |\cdot|^{\frac{1}{2}}\, t\right) - \cos\left(\sqrt{2\pi g}\, |\cdot|^{\frac{1}{2}}\, t_0\right) \right] \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$I_{12} = \left|\left| \hat{w}_0 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\, |\cdot|^{\frac{1}{2}}\, t\right)}{2\sqrt{2\pi g}\, |\cdot|^{\frac{1}{2}}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\, |\cdot|^{\frac{1}{2}}\, t_0\right)}{2\sqrt{2\pi g}\, |\cdot|^{\frac{1}{2}}} \right] \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$I_{21_n} = \left|\left|(\cdot)^n \hat{f}_0 \left[\cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right) - \cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$I_{22_n} = \left|\left|(\cdot)^{n-\frac{1}{2}} \hat{w}_0 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right)}{2\sqrt{2\pi g}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)}{2\sqrt{2\pi g}}\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$I_{31} = \left|\left||\cdot|^{k+\frac{1}{2}}\, \hat{f}_0 \left[\cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right) - \cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$I_{32} = \left|\left||\cdot|^{k}\, \hat{w}_0 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right)}{2\sqrt{2\pi g}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)}{2\sqrt{2\pi g}}\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Tomando en la definición de continuidad de seno y coseno

- Para I_1 usamos $(\star)$.
- Para I_{2_n},

$$\left|\cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right) - \cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4(2\pi)^k\sqrt{k}||(\cdot)^n\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}},$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right)}{2\sqrt{2\pi g}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)}{2\sqrt{2\pi g}}\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4(2\pi)^k\sqrt{k}||(\cdot)^{n-\frac{1}{2}}\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

- Para I_3,

$$\left|\cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right) - \cos\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4(2\pi)^{k+\frac{1}{2}}||(\cdot)^{k+\frac{1}{2}}\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}},$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t\right)}{2\sqrt{2\pi g}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0\right)}{2\sqrt{2\pi g}}\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4(2\pi)^{k+\frac{1}{2}}||(\cdot)^{k}\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
&||\partial_t f(\cdot,t) - \partial_t f(\cdot,t_0)||^2_{H^{k+\frac{1}{2}}} = \\
&= ||\partial_t f(\cdot,t) - \partial_t f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||\partial_\alpha^n \partial_t f(\cdot,t) - \partial_\alpha^n \partial_t f(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||\partial_t \hat{f}(\cdot,t) - \partial_t \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^{k} ||(2\pi i\cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t) - (2\pi i\cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||\partial_t \hat{f}(\cdot,t) - \partial_t \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \ (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{k} ||(\cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t) - (\cdot)^n \partial_t \hat{f}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Utilizando la expresión de $\partial_t \hat{f}$ obtenemos,

$$||\partial_t f(\cdot,t)-\partial_t f(\cdot,t_0)||^2_{H^{k+\frac{1}{2}}} \leq \left(\sqrt{2\pi g}J_{11}+\frac{1}{2}J_{12}\right)^2+(2\pi)^{2k}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{2\pi g}J_{21_n}+\frac{1}{2}J_{22_n}\right)^2<\epsilon.$$

Donde tenemos que

$$J_{11}=\left|\left||\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)-|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,\hat{f}_0\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$J_{12}=\left|\left|\hat{w_0}\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)-\hat{w_0}\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$J_{21_n}=\left|\left|(\cdot)^{n+\frac{1}{2}}\hat{f}_0\left[\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)-\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$J_{22_n}=\left|\left|(\cdot)^n\hat{w_0}\left[\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)-\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right]\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Una vez más, tenemos

- Para el primer término tomamos ($\star\star$).
- Para el segundo,

$$\left|\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)-\mathrm{sen}\,(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right|<\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}(2\pi)^k\sqrt{k}\sqrt{2\pi g}||(\cdot)^{n+\frac{1}{2}}\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}},$$
$$\left|\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t)-\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right|<\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}(2\pi)^k\sqrt{k}||(\cdot)^n\hat{w_0}||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

Ahora veamos la continuidad de w.

$$\begin{aligned}
&||w(\cdot,t)-w(\cdot,t_0)||^2_{H^k(\mathbb{R})}=\\
&\quad=||w(\cdot,t)-w(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}+\sum_{n=1}^{k}||\partial^n_\alpha w(\cdot,t)-\partial^n_\alpha w(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\quad=||\hat{w}(\cdot,t)-\hat{w}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}+\sum_{n=1}^{k}||(2\pi i\cdot)^n[\hat{w}(\cdot,t)-\hat{w}(\cdot,t_0)]||^2_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leq||\hat{w}(\cdot,t)-\hat{w}(\cdot,t_0)||^2_{L^2(\mathbb{R})}+(2\pi)^{2k}\sum_{n=1}^{k}||(\cdot)^n[\hat{w}(\cdot,t)-\hat{w}(\cdot,t_0)]||^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Utilizando la expresión de w.

$$||w(\cdot,t)-w(\cdot,t_0)||^2_{H^k(\mathbb{R})}\leq\left(2\sqrt{2\pi g}J_{11}+J_{12}\right)^2+(2\pi)^{2k}\sum_{n=1}^{k}\left(2\sqrt{2\pi g}J_{21_n}+J_{22_n}\right)^2 \;<\; \epsilon.$$

Donde tomamos,

- Para el primer término usamos $(\star\star\star)$.
- Para el segundo,

$$\left|\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \operatorname{sen}(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\sqrt{2}\sqrt{2\pi g}(2\pi)^k\sqrt{k}||(\cdot)^{n+\frac{1}{2}}\hat{f}_0||_{L^2(\mathbb{R})}},$$

$$\left|\cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t) - \cos(\sqrt{2\pi g}\,|\cdot|^{\frac{1}{2}}\,t_0)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}(2\pi)^k\sqrt{k}||(\cdot)^n\hat{w}_0||_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

- Veamos que $f(x,t)$ es solución.

Dado que se cumple las hipótesis del teorema anterior, tenemos que $f \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$ $\cap\ \mathcal{C}^1([0,\tau], L^2(\mathbb{R}))\ \cap\ \mathcal{C}^2([0,\tau], H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$ y es solución débil. Además, en este caso veremos que $\partial^2_{tt} f \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$.

$$||\partial^2_{tt} f(\cdot,t)||^2_{H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|(\partial^2_{tt} f)^\wedge(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-\frac{1}{2}} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^2_{tt}\hat{f}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-\frac{1}{2}} d\xi$$

Utilizamos que $\hat{f}$ es solución de (4.1) y por tanto tenemos,

$$\begin{aligned}
||\partial^2_{tt} f(\cdot,t)||^2_{H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^2_{tt}\hat{f}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-\frac{1}{2}} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|2\pi g\,|\xi|\,\hat{f}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-\frac{1}{2}} d\xi \\
&\le 4\pi^2 g^2 \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right) \left|\hat{f}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k-\frac{1}{2}} d\xi \\
&= 4\pi^2 g^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi,t)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k+\frac{1}{2}} d\xi \\
&= 4\pi^2 g^2\, ||f(\cdot,t)||^2_{H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Pues tenemos que $f(\cdot,t) \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})\ \forall t \in [0,\tau]$. Por tanto, en este caso, tenemos que se da la igualdad en $H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})\ \forall t \in [0,\tau]$.

- **UNICIDAD**

Gracias a la regularidad de $\partial^2_{tt} f$, para probar la unicidad en este caso podemos utilizar la identidad de la energía asociada a este sistema.

Supongamos que existen dos soluciones distintas del problema (L), (f_1, w_1) y (f_2, w_2). Sean $F = f_1 - f_2$ y $W = w_1 - w_2$ tenemos que es solución del siguiente sistema.

$$(\text{L"})\begin{cases} \partial_t F(\alpha,t) = \frac{1}{2} H\{W\}(\alpha,t), \\ \partial_t W(\alpha,t) = -2g\partial_\alpha F(\alpha,t), \\ F(\alpha,0) = 0, \\ W(\alpha,0) = 0. \end{cases}$$

Por construcción tenemos que $E(t) = cte\ \forall t \in [0,\tau]$, lo probaremos una vez terminemos el teorema. Luego veamos $E(0)$.

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|\partial_t F(\alpha,0)|^2 + g|\Lambda^{\frac{1}{2}} F(\alpha,0)|^2) d\alpha = 0.$$

Por tanto obtenemos que $E(t) = 0$ $\forall t \in [0,\tau]$, i.e,

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|\partial_t F|^2 + g|\Lambda^{\frac{1}{2}} F|^2) d\alpha = 0, &\rightarrow\ ||\partial_t F||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) + ||\Lambda^{\frac{1}{2}} F||^2_{L^2(\mathbb{R})}(t) = 0, \\ &\rightarrow\ ||\partial_t F||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = ||\Lambda^{\frac{1}{2}} F||_{L^2(\mathbb{R})}(t) = 0. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$||\partial_t F(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \ \rightarrow\ \partial_t F(\alpha,t) = 0 \ \rightarrow\ F(\alpha,t) = \varphi(\alpha).$$

Pero como $F(\alpha,0) = \varphi(\alpha) = 0$, concluimos que $F(\alpha,t) = 0$ y, por consiguiente, $f_1 = f_2$.

Por otro lado,

$$\partial_t W(\alpha,t) = -2g\partial_\alpha F(\alpha,t) = 0 \ \rightarrow\ W(\alpha,t) = \psi(\alpha).$$

Análogamente, $W(\alpha,0) = \psi(\alpha) = 0$. Concluimos que $W(\alpha,t) = 0$ y, por tanto, $w_1 = w_2$.

Con lo que concluimos la prueba del teorema. □

Lema 4.3.4. *Si $f \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,\tau], H^k(\mathbb{R}))$, $k \geq 1$, solución de* (L) *y la energía definida como*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|\partial_t f|^2 + g|\Lambda^{\frac{1}{2}} f|^2) d\alpha$$

se conserva a lo largo del tiempo

Demostración. Dado que f tiene la regularidad del teorema anterior, $\partial_{tt} f \in \mathcal{C}([0,\tau], H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$, pues se ha probado previamente. Por tanto, tienen sentido las siguientes igualdades.

Para probar el lema, veamos que la derivada respecto de t es cero.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|\partial_t f|^2 + g|\Lambda^{\frac{1}{2}} f|^2) d\alpha &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_t f\ \partial^2_{tt} f + g\Lambda^{\frac{1}{2}} f\ \Lambda^{\frac{1}{2}} \partial_t f) d\alpha \\ = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t f(-g\Lambda f) + g\Lambda f\ \partial_t f) d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Luego concluimos que $E(t) = cte$ $\forall t$. □

4.4. Inestabilidad de la solución para fluido sobre aire.

Recordemos que en el caso A, i.e, $g < 0$, obtenemos la siguiente solución para el sistema (L').

$$\hat{f}(\xi,t) = \hat{f}_0 \cosh(\sqrt{2\pi|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t) - \frac{i}{2}\operatorname{sgn}(\xi)\hat{w}_0 \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{2\pi|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}\, t)}{\sqrt{2\pi|g|}\,|\xi|^{\frac{1}{2}}}.$$

Esta solución es inestable puesto que para $T > 0$ pequeño y $|\xi|$ grande, tenemos que la solución presenta un crecimiento exponencial gracias al término del $\cosh$ y senh, aunque los datos iniciales $\hat{f}_0(\xi)$ y $\hat{w}_0(\xi)$ estén en el espacio de Schwartz, es decir, son funciones que decrecen más rápido que cualquier polinomio como hemos visto en 2.1.1. Luego concluimos que f es inestable en este caso, i.e, el problema está mal propuesto.

La explicación física de que $g < 0$ es que consideramos el caso en el que el agua ($\rho = 1$) se encuentra sobre el aire ($\rho = 0$), siendo ρ la densidad del medio ($\rho_{aire} - \rho_{agua} = -1$).

En el caso B, $g > 0$ habíamos considerado la situación inversa, el aire sobre el agua, en cuyo caso obtenemos que $\rho_{agua} - \rho_{aire} = 1$.

Por lo que la ecuación original de $\partial_t \hat{w}$ es

$$\partial_t w = -2g(\rho_{agua} - \rho_{aire})\partial_\alpha f.$$

Que coincide con la que hemos estudiado en ambos casos.

Bibliografía

[1] D. Albritton, E. Brué, M. Colombo. Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations. Annals of Math, Pages 415-455 from Volume 196 (2022), Issue 1.

[2] C. J. Amick, L. E. Fraenkel y J. F. Toland. On the Stokes conjecture for the wave of extreme form. Acta Math. 148 (1982), 193–214.

[3] J.T. Beale. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface. Communications on Pure and Applied Mathematics, 34 (1981) 3, 359–392.

[4] J.T. Beale. Large-time regularity of viscous surface waves. Arch. Rational Mech. Anal., 84 (1984) 4, 307–352.

[5] T. Buckmaster, V. Vicol. Convex integration constructions in hydrodynamics. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 58 (2021), no. 1, 1–44. 35Q35

[6] T. Buckmaster, V. Vicol. Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation. Ann. of Math. (2) 189 (2019), no. 1, 101–144.

[7] A. Castro, D. Córdoba, C. Fefferman, F. Gancedo, J. Gómez-Serrano. Finite time singularities for the free boundary incompressible Euler equations. Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 3, 1061–1134

[8] A. Castro, D. Córdoba, C. L. Fefferman, F. Gancedo y J. Gómez- Serrano. Splash singularity for water waves. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 109 (2012), 733–738.

[9] A. Castro, D. Córdoba, C. Fefferman,F. Gancedo, J. Gómez-Serrano. Splash singularities for the free boundary Navier-Stokes equations. Ann. PDE 5 (2019), no. 1, Paper No. 12, 117 pp.

[10] A. Córdoba, D. Córdoba, F. Gancedo. Interface evolution: water waves in 2-D. Adv. Math. 223 (2010), no. 1, 120–173.

[11] D. Córdoba, M.A. Fontelos Y J.L. Rodrigo. Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas. La Gaceta de la RSME, VOL 8.3 (2005), 565-595.

[12] C. De Lellis, Székelyhidi, Jr. László. High dimensionality and h-principle in PDE. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 54 (2017), no. 2, 247–282.

[13] J. Duoandikoetxea. Fourier Analysis. American Mathematical Society, 2001.

[14] G. B. Folland. Introduction to Partial Differential Equations, Second Edition. Princeton University Press (1995), Chapter 5, 159-190.

[15] F. Gancedo, E. García-Juárez. Global regularity of 2D density patches for inhomogeneous Navier-Stokes. Arch. Ration. Mech. Anal. 229 (2018), no. 1, 339–360.

[16] A. D. Ionescu, F. Pusateri. Recent advances on the global regularity for irrotational water waves. Philos. Trans. Roy. Soc. A 376 (2018), no. 2111, 20170089, 28 pp.

[17] A. Kiselev, V. Šverák. Small scale creation for solutions of the incompressible two-dimensional Euler equation. Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 3, 1205–1220.

[18] J. Leray. Étude de divereses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math Pures Appl. 12 (1933) 1–82.

[19] J. Leray. Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63 (1934) 193–248.

[20] T. Levi-Civita. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. Math. Ann. 93 (1925), 264–314.

[21] H. Lindblad. Well-posedness for the motion of an incompressible liquid with free surface boundary. Annals of Math. 162 (2005) 1.

[22] A. I. Nekrasov. Točnaya teoriya voln ustanovivšegocya vida na poverhnosti tyaželoǐ židkosti. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1951.

[23] P. I. Plotnikov. Justification of the Stokes conjecture in the theory of surface waves. Dinamika Sploshn. Sredy 57 (1982), 41–76.

[24] E. M. Stein, R. Shakarchi. Fourier analysis. An introduction. Princeton Lectures in Analysis. 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[25] V. A. Solonnikov. Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface. Math. USSR Izvestija, 11 (1977) 6, 1323–1358.

[26] A. Viruel. Mirando hacia el futuro. La Gaceta de la RSME, VOL 15 (2012), NÚM 4, 751-763.

[27] W. Wolibner. Un théorème d'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. Math. Zeit., 37 (1933) 698–726.

[28] S. Wu. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D. Invent. Math. 130 (1997) 1, 39–72.

[29] S. Wu. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D. J. Amer. Math. Soc. 12 (1999) no. 2, 445–495.