

Universidad de Sevilla



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍAS EN EL PLANO  
DIGITAL

*Trabajo de Fin de Grado*

Autor:

José Luis López Carmona

Tutor:

Rafael Ayala Gómez

24 de junio 2022

# Índice general

<b>1. Espacios de Alexandroff.</b>	<b>7</b>
1.1. Preórdenes en A-espacios. . . . .	10
1.2. Conexión en A-espacios. . . . .	13
1.3. Adyacencia en A-espacios. . . . .	15
1.4. Aplicaciones continuas entre A-espacios. . . . .	17
<b>2. Adyacencias digitales y relaciones con la topología.</b>	<b>18</b>
2.1. Concepto de k-adyacencia. . . . .	18
2.2. Adyacencia en $\mathbb{Z}$ : La 2-adyacencia como espacio topológico. . . . .	20
2.3. Adyacencias en el plano entero: La 4-adyacencia y la 8-adyacencia. . . . .	21
2.3.1. Existencia de topología dada por la 4-adyacencia. . . . .	22
2.3.2. No existencia de topología con 8-adyacencia. . . . .	22
<b>3. Recta digital de Khalimsky.</b>	<b>25</b>
3.1. Preorden de especialización de la recta digital. . . . .	27
3.2. Obtención de la recta digital como cociente de la recta real. . . . .	28
3.3. Propiedades topológicas de la línea de Khalimsky . . . . .	30
<b>4. Plano digital de Khalimsky.</b>	<b>32</b>
4.1. Obtención de la topología del plano digital de Khalimsky. . . . .	32
4.2. Preorden de especialización del plano digital de Khalimsky. . . . .	35
4.3. Curvas sobre el plano digital. . . . .	37
4.4. Generalización de espacios en $\mathbb{Z}^n$ : Topología digital de Khalimsky en dimensión 3. . . . .	41
<b>5. Continuidad sobre espacios digitales de Khalimsky.</b>	<b>44</b>
5.1. Continuidad sobre la recta digital de Khalimsky. . . . .	44
5.2. Aplicaciones continuas con dominio $\mathbb{Z}^n$ . . . . .	47
5.3. El problema de la continuidad de Khalimsky. . . . .	49
<b>6. Topología de Marcus-Wyse.</b>	<b>56</b>
6.1. Conceptos básicos de la topología de Marcus-Wyse. . . . .	56
6.2. Preorden de especialización del plano digital de Marcus-Wyse. . . . .	59
6.3. La topología de Marcus-Wyse como producto topológico. . . . .	61
6.4. Topología de Marcus-Wyse como cociente de Khalimsky. . . . .	64
6.5. Limitaciones de Marcus-Wyse. . . . .	65

6.6. Teorema de Jordan para Marcus-Wyse. . . . .	67
<b>7. Topología de Šlapal.</b>	<b>69</b>
7.1. Cocientes sobre la topología de Šlapal, $w$ . . . . .	71
7.2. Operador clausura definido por Šlapal. . . . .	74
7.3. Teorema de la curva de Jordan para las topologías de Šlapal y el operador de clausura $r$ . . . . .	76
<b>A. Conceptos sobre topología general.</b>	<b>78</b>
A.1. Definiciones básicas de topología. . . . .	78
A.2. Bases . . . . .	79
A.3. Propiedades de Separación. . . . .	80
A.4. Conexión por caminos y conexión. . . . .	80
A.5. Conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	81
<b>B. Digrafos.</b>	<b>82</b>
B.1. Relaciones sobre grafos y grafos dirigidos. . . . .	83
B.2. Operaciones sobre relaciones. . . . .	84
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

## **Agradecimientos.**

Dar gracias a mi familia por su paciencia y ayuda prestada. Sobretudo a mi madre por saber escucharme de la mejor manera posible.

Dar gracias también a mi tutor Rafael Ayala Gómez, por su tiempo, dedicación y los momentos de risas entre conversaciones sobre música y matemáticas que hemos tenido en estos años. Ha sido y es mi padre matemático.

Y gracias a ella, por estar cuando nadie más estaba.

## Abstract.

In this work we present the basic properties of the Khalimsky topology on  $\mathbb{Z}^2$ . This topology is compared with the Marcus-Wyse topology, which corresponds to the 4-adjacency. Several kinds of continuities are studied and compared. Finally, we introduce the Šlapal's (pre)topology which have certain natural cycles as Jordan curves, and it's shown that both, Khalimsky and Marcus-Wyse topologies, are quotient of the Šlapal's topology.

## Introducción.

Un problema crucial en topología digital es dotar al plano digital  $\mathbb{Z}^2$  de una estructura adecuada para el estudio de las propiedades geométricas y topológicas de las imágenes digitales, y entre los criterios que suelen emplearse para determinar si una estructura es adecuada o no está el de comprobar si es posible obtener mediante ella un resultado análogo al Teorema de la curva de Jordan, que establece que toda curva cerrada simple en el plano euclídeo lo separa en dos componentes conexas<sup>1</sup>. Uno de los primeros de esta rama de la Topología, Rosenfeld, abordó este problema mediante la teoría de grafos, considerando las adyacencias naturales en el conjunto de píxeles de la pantalla, es decir, la 4-adyacencia y la 8-adyacencia, y observó que si se quería obtener un teorema de Jordan era necesario considerar una de esas adyacencias en una imagen digital y la otra en su complementario. (Véase [5])

En efecto, es fácil dar ejemplos de curvas de Jordan respecto a la 8-adyacencia cuyo complementario está formado por píxeles que se pueden conectar mediante la 8-adyacencia, es decir, es un conjunto 8-conexo.

Para solventar este inconveniente de las dos adyacencias, Khalimsky, Kopperman y Meyer proponen en [6] un método totalmente distinto de enfocar el problema, que consistió en definir sobre  $\mathbb{Z}^2$  (representación de la pantalla de un ordenador, en el que cada entero corresponde al centro de un píxel) una topología, llamada topología de Khalimsky, de manera que la propiedad de conexión asociada a ella permitiera una versión digital del Teorema de Jordan clásico, ya que en principio se dispondría de los métodos y herramientas de la Topología General. Y aunque consten en la literatura varias demostraciones de dicho teorema para la topología de Khalimsky, entre las que cabría citar [19] y [7] por su sencillez, en todas se imponen ciertas restricciones sobre las curvas para las que es válido, restricciones en cierta forma poco intuitivas, relacionadas con los ángulos que se forman al recorrer la curva.

---

<sup>1</sup>Ello no es de extrañar, teniendo en cuenta que este tipo de curvas representan el contorno de imágenes digitales

Otro inconveniente de la topología de Khalimsky es que no es homogénea, pues establece distintos tipos de entornos básicos de los puntos del plano en función de la paridad de sus coordenadas. Ello hace que no se conserve la topología de las imágenes digitales cuando se les aplican transformaciones geométricas sencillas, como puede ser una traslación. Es decir, la topología de Khalimsky no es compatible con la noción intuitiva de adyacencia en las imágenes digitales: puede ocurrir que tengamos una sucesión de píxeles adyacentes y que al aplicarle una transformación continua en el sentido de Khalimsky, deje de serlo. Por esta razón, algunos autores como Han (véase [24]) o Boxer (véase [8]) proponen conceptos de continuidad "mixto", es decir, que conserven la conexión en el sentido de Khalimsky y la digital que se percibe en la pantalla.

En este trabajo se presenta una breve introducción a estos problemas. Consta de 7 capítulos, el primero de los cuales está dedicado a exponer las propiedades topológicas elementales de los espacios de Alexandroff, o A-espacios. En el Capítulo 2 se tratan las adyacencias digitales habituales en  $\mathbb{Z}^2$ , la adyacencia en sentido topológico, y se trata el problema de la compatibilidad entre ambas. Los Capítulos 3 y 4 están dedicados al estudio de la recta y el plano de Khalimsky respectivamente añadiendo en este segundo una pequeña referencia a la generalización de espacios de Khalimsky en dimensiones superiores. Y en el quinto se aborda el problema de cómo dar una noción de continuidad sobre el plano de Khalimsky que sea compatible con la adyacencia digital con las transformaciones geométricas elementales de las imágenes digitales. En el Capítulo 6 se trata la topología de Marcus-Wyse, que tiene la propiedad de que su concepto de conexión es la 4-adyacencia. Por último, en el Capítulo 7 se da un breve resumen de las (pre)topologías definidas por Šlapal para tratar de eliminar las restricciones "no naturales" del Teorema de Jordan de Khalimsky, siendo las topologías de Khalimsky y Marcus-Wyse cocientes de dichas topologías.

Se recogen en un apéndice, aquellos conceptos de topología básicos y digrafos. Se dirige allí para cualquier duda que pueda surgir sobre ellos.

# Capítulo 1

## Espacios de Alexandroff.

El capítulo desarrollado a continuación nos da herramientas adecuadas para trabajar con espacios topológicos casidiscretos introducidos por Alexandroff en 1937.

Se da a continuación la definición de Espacio de Alexandroff y el concepto de entorno mínimo.

**Definición 1.0.1** (Espacio de Alexandroff). *Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es Alexandroff o **A-espacio**, si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Como consecuencia, todo punto admite un entorno abierto mínimo o de elementos mínimos, denotado por  $N(x)$  dado por,

$$N(x) = \cap \{N_x \in \mathcal{T}; x \in N_x\}.$$

También se notará por  $N^{\mathcal{T}}(x)$  si se necesita indicar la topología  $\mathcal{T}$ .

Se tiene por tanto que

$$N(x) \subseteq N_x, \forall N_x \in \mathcal{N}_X^{\mathcal{T}},$$

donde  $N_x$  son todos los entornos posibles de  $x$  en  $\mathcal{T}$ .

En estos espacios se tiene la siguiente caracterización.

**Proposición 1.0.2** (Caracterización para Espacios de Alexandroff). *Sea  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico. Se caracterizan los espacios de Alexandroff de la siguiente manera:*

$$(X, \mathcal{T}) \text{ es de Alexandroff, si y sólo si, existe } N(x) \in \mathcal{T}, \text{ para todo } x \in X$$

*Demostración.* Vamos a proceder por doble implicación

Supongamos  $N(x) \in \mathcal{T}, \forall x \in X$  y, sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  familia de abiertos de  $\mathcal{T}$ . Si demostramos que  $\cap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ , habremos probado que es Alexandroff, por la propia definición. Sea  $x_0 \in \cap_{i \in I} U_i$ , entonces,  $x_0 \in U_j \forall j \in I$ . Sabemos por hipótesis que  $N(x_0) \in \mathcal{T}$ , luego  $N(x_0) \subset U_j \forall j \in I$ . Como es para todo  $j$  de  $I$ , se tiene en particular  $x_0 \in N(x_0) \subset \cap_{i \in I} U_i$ . Así que  $(X, \mathcal{T})$  es de Alexandroff.

Recíprocamente, si  $(X, \mathcal{T})$  es Alexandroff, se obtiene inmediatamente por definición.  $\square$

**Corolario 1.0.3.** Sean  $x \in X$  y  $A \subset X$ , con  $X$  espacio de Alexandroff.

1.  $x \in cl(A)$  si y sólo si,  $N(x) \cap A \neq \emptyset$ .
2.  $x \in int(A)$  si y sólo si,  $N(x) \subset A$

Recordar que también se pueden caracterizar los A-espacio mediante una base dada.

**Proposición 1.0.4.** Dado un conjunto  $X$ .  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  es una base para una topología en  $X$ , si y sólo si, cumple que

1.  $X = \cup\{B; B \in \mathcal{B}\}$ , es decir,  $\mathcal{B}$  es un recubrimiento de  $X$ .
2. Dados  $U, V \in \mathcal{B}$  y  $x \in U \cap V$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subseteq U \cap V$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}$ .

Dicha topología se llama topología generada por  $\mathcal{B}$ , y se denota por  $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ . Aunque en muchas ocasiones se asumirá por el contexto con la notación  $\mathcal{T}$ .

**Proposición 1.0.5.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un A-espacio, el conjunto  $\mathcal{B} = \{N(x); x \in X\}$  es una base mínima para  $\mathcal{T}$ .

*Demostración.* Claramente  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ . Sea  $x \in X$ , y un entorno  $U$  de  $x$ . Por la proposición anterior tenemos que  $N(x) \subset U$ .

Consideremos una base cualquiera  $\mathcal{B}'$ . Veamos que es mínima, dado  $x \in X$ , tendremos que existe algún  $B'_x$  de la base tal que  $x \in N(x) \subseteq B'_x$ . Luego, deben ser el mismo entorno.  $\square$

Se puede probar que la base  $\mathcal{B}$  es única.

**Proposición 1.0.6.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un A-espacio. Entonces,  $\mathcal{B}$  es la única base mínima para la topología.

*Demostración.* Al ser  $N(x)$  entorno mínimo, para todo  $U \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in U$ , se tiene  $x \in N(x) \subseteq U$ . Sea otra base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{T}$ . Dado  $x \in X$ , existe  $N'(x) \in \mathcal{B}'$  tal que  $x \in N'(x) \subseteq N(x)$ . Por otro lado, por el razonamiento previo  $x \in N(x) \subseteq N'(x)$ . Entonces,  $N(x) = N'(x)$  para todo  $x \in X$ .  $\square$

**Ejemplo 1.0.7.**

1. Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ , siendo  $\mathcal{T}_e$  la topología euclídea. Éste no es un A-espacio pues la intersección de abiertos no tienen por qué ser abierto.
2. Tenemos que la familia de conjuntos de la forma  $[x, \infty)$  con  $x \in \mathbb{R}$  generan un A-espacio sobre  $\mathbb{R}$ .



3. Todo espacio topológico discreto es un  $A$ -espacio. Siendo  $\{x\}$  el entorno mínimo de  $X$ .

4. Todo espacio finito es un  $A$ -espacio.

5.  $\mathbb{R}$  con la topología punto incluido,  $\mathcal{T}_p = \{G \subseteq \mathbb{R}; p \in G\}$  es un  $A$ -espacio. Los entornos mínimos son en este caso  $N(p) = \{p\}$  y si  $q \notin p$ ,  $N(q) = \{p, q\}$ .

6. El espacio topológico de Sierpinski, es decir, la topología punto incluido con  $p = 0$ ,  $\mathcal{T}_S = \{\emptyset, 0, \{0, 1\}\}$ , es un  $A$ -espacio sobre  $X = \{0, 1\}$ .

Recordar que un espacio topológico es  $T_0$  si sus puntos son distinguibles (véase A.3.1).

Se pueden distinguir puntos por sus entornos mínimos. Para ello, se da el siguiente teorema.

**Teorema 1.0.8.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un  $A$ -espacio, son equivalentes:

1. Es  $T_0$ .
2.  $N(x) = N(y)$ , si y sólo si,  $x = y$ .

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$ . Si  $x \neq y$ .

Podemos suponer que existe  $W$  abierto tal que  $x \in W$ ,  $y \notin W$ . Luego,

$$N(x) \subseteq W, N(y) \not\subseteq W \text{ por tanto } N(x) \neq N(y).$$

Supongamos que dados  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  entonces,  $N(x) \neq N(y)$ . Si  $X$  no es  $T_0$ , y sean  $x, y \in X$  tal que todo abierto que contiene a  $x$  contiene a  $y$ , y viceversa. Entonces,  $N(x)$  es abierto y contiene a  $y$ , por lo tanto,  $N(y) \subseteq N(x)$  de esta forma se tiene que  $N(x) \subseteq N(y)$  y, así,  $N(x) = N(y)$ .

Por lo tanto, es  $T_0$ , existe  $x, y \in X$ ;  $x \neq y$ ;  $N(x) = N(y)$ .  $\square$

La topología relativa y el producto cartesiano funcionan de igual forma que para la topología clásica.

**Teorema 1.0.9.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios de Alexandroff;  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  sus respectivas bases mínimas. Entonces,

- i. Si  $X$  es un subespacio de  $Y$ , entonces  $U = \{V_i \cap X; V_i \in V\}$
- ii.  $X \times Y$  es un espacio de Alexandroff y su base mínima está dada por

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B}' = \{U_i \times V_i; U_i \in \mathcal{B}, V_i \in \mathcal{B}'\}.$$

*Demostración.* (i) Es consecuencia directa de tomar la base en la topología relativa a  $X$  sobre  $Y$ .

(ii) También es directo. Esta vez porque la base del producto de dos espacios topológicos es el producto de las bases. Es decir, ser espacio de Alexandroff sólo nos da una base mínima pero base para la topología.  $\square$

Se tiene también el siguiente resultado.

**Proposición 1.0.10** (Clausura en espacios de Alexandroff). *Si  $(X, \mathcal{T})$  es un A-espacio, y  $A \subset X$  se cumple que*

$$cl(A) = \bigcup_{x \in A} cl(x).$$

*De lo anterior se deduce que la colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.*

*Demostración.* Basta probar que  $cl(A) \subset \bigcup_{x \in A} \{x\}$ .

Sea  $y \in cl(A)$  entonces,  $U_y \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $x \in U_y \cap A$ . Entonces,  $U_x \subset U_y$  luego cualquier abierto que contenga a  $y$  contiene a  $x$ .  $\square$

## 1.1. Preórdenes en A-espacios.

A continuación se estudiará la relación existente entre los A-espacios y los conjuntos parcialmente ordenados.

Se da la siguiente definición.

**Definición 1.1.1** (Preorden asociado a un A-espacio). *Si  $(X, \mathcal{T})$  es un A-espacio,  $\mathcal{T}$  induce un preorden de especialización ( $\leq$ ), definido de la siguiente forma: dados  $x, y \in X$ ,*

$$x \leq_{\mathcal{T}} y, \text{ si y sólo si, } y \in N(x).$$

Nótese que,

$$y \in N(x), \text{ si y sólo si, } x \in cl(\{y\}).$$

**Nota 1.1.2.** *Es un preorden y no un orden parcial.*

*Tenemos que  $x \leq_{\mathcal{T}} x$ , luego es **reflexiva**. Y, si  $x \leq_{\mathcal{T}} y$  e  $y \leq_{\mathcal{T}} z$  entonces,  $x \leq_{\mathcal{T}} z$ ; por tanto también es **transitiva**. Pero  $x \leq_{\mathcal{T}} y$  no implica que  $y \leq_{\mathcal{T}} x$ , por ello no es **antisimétrica**.*

En general, la relación no es de orden parcial. Se tiene el siguiente resultado si lo fuera.

**Proposición 1.1.3.** *Si  $(X, \leq_{\mathcal{T}})$  es un conjunto parcialmente ordenado,  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_0$ .*

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ . Si  $x, y$  son comparables podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ . Es decir,  $y \in N(x)$ ; si  $x \in N(y)$ , tendríamos que  $y \leq_{\mathcal{T}} x$ , lo que implicaría que  $x = y$ , pues  $\leq_{\mathcal{T}}$  es antisimétrica y esto se contradice con ser preorden. Por lo que  $x \notin N(y)$ .

Si  $x, y$  no son comparables entonces  $N(y)$  es un entorno de  $y$  que no contiene a  $x$ , lo mismo ocurre con  $N(x)$ , es un entorno de  $x$  que no contiene a  $y$ .

Por lo tanto,  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_0$ .

[23], página 125

$\square$

En adelante, si no da lugar a confusión, al preorden de especialización se le llamará simplemente preorden.

Por otra parte, toda relación de preorden induce una topología.

**Proposición 1.1.4** (Preorden induce Topología). *Toda relación de orden parcial  $\leq_{\mathcal{T}}$  sobre  $X$  induce una topología,*

*Demostración.* Sea la base generada por:

$$\mathcal{B}_{\leq} = \{U(x); x \in X\},$$

donde  $U(x) = \{y \in X; x \leq y\}$  Primeramente probaremos que

$$\bigcup_{x \in X} U(x) = X.$$

Sea  $x_0 \in X$  entonces, como  $\leq$  es reflexiva,  $x_0 \in U(x_0)$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{x \in X} U(x) = X$ .

Ahora, sean  $x, x_1, x_2 \in X$ . Veamos que  $U(x) \subseteq U(x_1) \cap U(x_2)$ . Pero si  $y \in U(x)$ , entonces, si  $x_1 \leq x$  tenemos que  $x_1 \leq y$ , por lo tanto,  $y \in U(x_1)$ . De igual forma se prueba que  $y \in U(x_2)$ .

Por tanto,  $\mathcal{T}_{\leq}$  es la única topología de la cual  $\mathcal{B}_{\leq}$  es base.  $\square$

**Corolario 1.1.5.** *Sea  $(X, \leq)$  conjunto parcialmente ordenado y  $\mathcal{T}_{\leq}$  su topología inducida. Entonces,  $(X, \leq_{\mathcal{T}})$  es de Alexandroff.*

*Demostración.* Omitamos el caso trivial donde  $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset$ .

Supongamos  $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ , entonces el conjunto de  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una familia de abiertos de  $\mathcal{T}_{\leq}$  por el Teorema anterior.

Si ahora suponemos  $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ , podemos garantizar que  $U(x)$ , entonces  $\bigcap_{i \in I} U_i$  es vecindad de todos sus puntos, luego es abierto. Por tanto, es Alexandroff.  $\square$

Con la siguiente proposición se tiene el recíproco al Teorema 1.1.3. Se encuentra en [23], página 127.

**Proposición 1.1.6** (Topología  $T_0$  implica Preorden). *Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico  $T_0$  y  $\leq_{\mathcal{T}}$  una relación definida por  $x \leq_{\mathcal{T}} y$  si  $x \in cl(\{y\})$ . Entonces  $(X, \leq_{\mathcal{T}})$  es un conjunto parcialmente ordenado.*

Tras el breve estudio hecho para la relación entre A-espacios  $T_0$  y los conjuntos parcialmente ordenados, se puede dar el siguiente resultado que supone una correspondencia para los conjuntos parcialmente ordenados.

**Teorema 1.1.7.** *Sea  $(X, \mathcal{T})$  un A-espacio, y sea  $(\leq_{\mathcal{T}})$  preorden de especialización asociado a  $\mathcal{T}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre los  $T_0$  y los conjuntos parcialmente ordenados.*

*Demostración.* Veamos primero que es  $T_0$ . Sean  $x, y \in X$  dos puntos distintos. Como  $X$  es un conjunto parcialmente ordenado al estar en un preorden, se nos presentan tres casos:

1.  $x$  e  $y$  no están relacionados, entonces,  $x \notin N(y)$  e  $y \notin N(x)$ , con lo cual se verifica el axioma de separación  $T_0$ .
2. Que  $x \leq_{\mathcal{T}} y$  ó que  $y \leq_{\mathcal{T}} x$ . En el caso  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ , se tiene que  $y \in N(x)$  pero  $x \notin N(y)$ .

Recíprocamente supongamos que  $\mathcal{T}_{\leq}$  es  $T_0$ . Entonces veamos que  $\leq$  es parcialmente ordenado. Supongamos que  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , tenemos que llegar a la conclusión de que son iguales. Si  $x \neq y$  como  $\mathcal{T}_{\leq}$  es  $T_0$  existirían o bien un  $U \in \mathcal{T}_{\leq}$  con  $x \in U$  e  $y \notin U$  o un  $V \in \mathcal{T}_{\leq}$  con  $y \in V$  y  $x \notin V$ . Si estamos en el primer caso, como  $N(x) \subset U$ , entonces  $y \notin N(x)$  lo cual es una contradicción. (!!)

El segundo caso se tiene de forma análoga. □

**Proposición 1.1.8.** *Dado un conjunto  $(X, \leq)$  preordenado siempre se cumple que el orden de especialización asociado a la topología  $\leq_{\mathcal{T}}$  coincide con  $\leq$  (esto es  $\leq_{\mathcal{T}_{\leq}}$ ).*

*Demostración.* Si  $x, y \in X$  entonces,  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ , si y sólo si,  $x \in cl(\{y\}) = y$ , es decir, si y sólo si,  $y \leq x$ . □

**Ejemplo 1.1.9.** *En general, sin condiciones sobre la cardinalidad de  $X$  o sobre la topología, no se tiene la igual*

$$\mathcal{T}_{\leq} = \mathcal{T}.$$

*Un ejemplo es el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cofinita}})$ . Esta topología es  $T_1$ , entonces los conjuntos unitarios son cerrados, luego todo conjunto coincide con su clausura. Por lo anterior,*

$$x \leq_{\mathcal{T}} y \text{ si } x \in cl(\{y\}) = \{y\},$$

*que ocurre, si y sólo si,  $x = y$ . Por tanto,  $\mathcal{T}_{\leq}$  es la topología discreta.*

Entonces, si  $\mathcal{T}$  es A-espacio y tiene propiedades de separación, se puede saber mucho acerca del espacio.

Se verá a continuación que el axioma de separación "más interesante" para A-espacios es  $T_0$ , pues es el único que no discretiza el espacio. (Véase para axiomas de separación A.3.1)

**Proposición 1.1.10.** *Sea  $\mathcal{T}$  una topología de Alexandroff, entonces,*

1.  $\mathcal{T}$  es  $T_0$ , si y sólo si,  $\leq_{\mathcal{T}}$  es antisimétrica.
2.  $\mathcal{T}$  es  $T_1$ , si y sólo si,  $\mathcal{T}$  es la topología discreta.
3.  $\mathcal{T}$  es  $T_2$ , si y sólo si,  $\mathcal{T}$  es la topología discreta.

*Demostración.* [17], página 12. □

**Observación 1.1.11.** Véase que tenemos  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ , si y sólo si,  $x_2 \in N(x_1)$ , con  $\mathcal{T}$  topología asociada e,  $y_2 \in N(y_1)$  con  $\mathcal{T}'$  topología asociada. Podemos concluir que  $x_1 \leq_{\mathcal{T}} x_2$  y  $y_1 \leq_{\mathcal{T}'} y_2$ .

El orden de especialización dado sería también, según lo visto con anterioridad,

$$(x, y) \leq U \times V, \text{ si y sólo si, } (x, y) \in cl(U \times V) = cl(U) \times cl(V).$$

Entonces,  $x \leq U$ , e  $y \leq V$ .

Observar que coincide con tomar el orden de especialización en cada coordenada separadamente.

**Observación 1.1.12.** La base mínima del subespacio  $A$  no es necesariamente la base mínima del espacio grande intersecada con el total  $X$ . Por ejemplo:

Sea  $X = \{a, b, c\}$  con la topología  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$ . Se puede ver que  $\{\{b\}, \{c\}, X\}$  es un conjunto de entornos mínimos para  $X$ . Sea  $A = \{b, c\}$ . Entonces se observa que  $A \cap N(A) = \{\{b\}, \{c\}, A\}$  que no es un conjunto de entornos mínimos para  $A$ . Concluimos que el conjunto de entornos mínimos de  $A$ , que podría identificarse como una base de entornos mínimos, debe estar contenida en las intersecciones, pero no es igual en este caso.

## 1.2. Conexión en A-espacios.

En matemáticas, sobretodo cuando la cantidad de datos es muy grande, o las relaciones entre conjuntos es confusa, se suele recurrir a las estructuras tipo grafos.

En el contexto de A-espacios, cuando se induce un preorden, se usan grafos dirigidos con la idea de, mediante un grafo con flechas, poder comprender de forma simplificada las relaciones entre los puntos, los conjuntos,...

Se verá ahora cómo partiendo de preórdenes se pueden caracterizar los conjuntos conexos del A-espacio. Se podrá deducir un grafo dirigido del A-espacio y con él dar lo que se conocerá como el grafo de conexión del A-espacio.

El siguiente teorema resume rápidamente las propiedades de conexión para todo A-espacio.

**Teorema 1.2.1.** Sea  $X$  un A-espacio  $T_0$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $X$  es conexo por camino.
2.  $X$  es conexo.
3.  $X$  es conexo por cadena.
4. Para todo  $a, b \in X$ , existe  $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$  tal que  $a_0 = a$ ,  $a_{n+1} = b$  y  $N(a_j) \cap N(a_i) \neq \emptyset$  si  $|i - j| \leq 1$

5. Para todo  $a, b \in X$ , existe  $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$  tal que  $a_0 = a$ ,  $a_{n+1} = b$  y  $cl(N(a_j)) \cap cl(N(a_i)) \neq \emptyset$  si  $|i - j| \leq 1$
6. Para todo  $a, b \in X$ , existe  $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$  tal que  $a_0 = a$ ,  $a_{n+1} = b$  y  $\{cl(a_i)\} \cap \{cl(a_j)\} \neq \emptyset$  si  $|i - j| \leq 1$

*Demostración.* [23], página 11 □

En todo conjunto parcialmente ordenado se define  $\leq$  como la conexión asociada al grafo dirigido. Es decir, la siguiente definición.

**Definición 1.2.2.** Dado un preorden  $\leq$  sobre  $X$ , diremos que  $\leq$  es un preorden conexo si para todo par de puntos  $x, y \in X$  existe un camino de  $x$  a  $y$  con respecto a la siguiente relación:

$$E = \{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : y \leq x\}.$$

El siguiente resultado da esa relación que se decía al inicio de la sección. Se indica la relación entre conexión y preorden de un A-espacio.

**Teorema 1.2.3.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un A-espacio. Son equivalentes:

1.  $(X, \mathcal{T})$  es conexo.
2. La relación  $\leq_{\mathcal{T}}$  es un preorden conexo.

*Demostración.* Supongamos que se cumple (2) pero no (1). Sean dos abiertos  $U$  y  $V$  disjuntos no vacíos t.q.  $U \cup V = X$ . Sea  $x \in U$  y  $y \in V$ . Por (2) existe un camino entre  $x$  e  $y$ . Tomamos  $x = x_1$  y  $y = x_n$ .

Como  $V$  es abierto y  $V^c = U$ , se tiene que  $U$  es cerrado. Dado que  $x \in U$  y por orden del camino  $x_i \leq_{\mathcal{T}} x$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ . Entonces, en cada paso nos encontramos que  $x_{i+1} \leq_{\mathcal{T}} x_i$  y como  $U$  es cerrado,  $x_{i+1} \in U$ . Finalmente, llegamos a que  $x_n = y \in U$ , lo cual es contradicción pues  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

(1)  $\implies$  (2) Sea  $x \in X$ . Tengamos en cuenta el siguiente conjunto:

$$C_x = \{z \in X; \exists \text{ camino de } z \text{ a } x\}.$$

Veamos que  $C_x$  es abierto y cerrado a la vez.

$C_x$  es abierto. Tomemos un punto  $w$ , veamos que el entorno mínimo de  $w$  está incluido en  $C_x$ . Cogiendo un punto del entorno de  $w$ ,  $q$ , siempre podemos coger por hipótesis un camino entre  $w$  y  $x$  y unirlo a otro camino entre  $w$  y  $q$  mediante  $w$ . Como  $q$  es arbitrario,  $C_x$  es abierto.

$C_x$  es cerrado. Tomemos un punto  $w$ , veamos ahora que  $cl(w) \subset C_x$ . De nuevo, tomando un punto que esté en la clausura de  $w$  se tiene el resultado.

Dado que  $(X, \mathcal{T})$  es conexo, los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el total y el vacío. Como todo punto está relacionado consigo mismo respecto a la relación de tener camino con otro, i.e., existe un camino entre un punto consigo mismo; tenemos que  $C_x \neq \emptyset$  pues está al menos  $x$ . Entonces  $C_x = X$ .

[17], página 17. □

Dado un preorden  $\leq_{\mathcal{T}}$  conexo, podemos dar un grafo dirigido.

**Definición 1.2.4** (Grafo asociado a  $\leq_{\mathcal{T}}$ ). Sea  $G_{\leq_{\mathcal{T}}}$ , el digrafo cuyo conjunto de vértices es  $X$  y las aristas dirigidas son los conjuntos  $\{(x, y)\}$  tal que  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ .

Este grafo tiene bucles pues  $\leq_{\mathcal{T}}$  es reflexiva. Además tendrá aristas que podrían ser eliminadas si se asumen por la transitividad de  $\leq_{\mathcal{T}}$  en el digrafo. Por ello, cuando se representa  $G_{\leq_{\mathcal{T}}}$  se da su diagrama de Hasse. (Véase B.1.5)

### 1.3. Adyacencia en A-espacios.

Todo espacio de Alexandroff tiene una estructura de adyacencia propia.

**Definición 1.3.1** (Adyacencia de un punto en un A-espacio). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un A-espacio. Para cada  $x \in X$  se define el **conjunto de adyacencia de  $x$**  como:

$$A(x) = (N(x) \cup cl(x)) - \{x\}.$$

Para un espacio topológico también se puede dar una noción de adyacencia dada por la propia topología. (Ver [14], página 8)

**Definición 1.3.2** ( $\mathcal{T}$ -Adyacencia). Dado  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, se define el conjunto de adyacencia asociado a la topología,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \{(x, y) \in X \times X; \text{ si } \{x, y\} \text{ es conexo en } \mathcal{T} \text{ con } x \neq y\}.$$

Se denotará por  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x)$  (ó  $A_{\mathcal{T}}$ ) al conjunto puntos adyacentes a  $x$  asociados a la topología  $\mathcal{T}$ . O simplemente  $\mathcal{A}$  (o  $A$ ) si se asume por el contexto la topología  $\mathcal{T}$ .

#### Ejemplo 1.3.3.

1. En  $\mathbb{R}$  con la topología discreta, la adyacencia viene dado por la unión de conjuntos unitarios al ser todos abiertos,  $A(x) = \{x\} - \{x\} = \emptyset$ .

2.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$  la topología punto incluido. Hay dos casos:  $p$  y cualquier otro punto. Para el primero es,  $A(p) = \{p\} \cup \mathbb{R} - \{p\} = \mathbb{R}$ , es decir,  $p$  es adyacente a todos los puntos de la recta real. Para  $q \neq p$ ,  $A(q) = \{p, q\} \cup \mathbb{R} - \{q\} = \mathbb{R}$ , que nos indica que mediante  $p$  se relacionan los distintos puntos entre sí también.

3.  $(\{0, 1\}, \mathcal{T}_S)$  es el espacio de Sierpinski.  $A(0) = \{0\} \cup \{0, 1\} - \{0\} = \{1\}$ , y,  $A(1) = \{0, 1\} \cup \{1\} - \{1\} = \{0\}$ . Es decir, los dos elementos unitarios posibles de la topología son adyacentes entre sí.

**Proposición 1.3.4.**  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  es una relación arreflexiva y simétrica.

*Demostración.* Como  $x \neq y$  entonces  $(x, x) \notin \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ , luego no es reflexiva. Y, es simétrica pues  $\{x, y\} = \{y, x\}$  entonces  $(x, y) \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  y  $(y, x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ .  $\square$

**Nota 1.3.5.** *Nótese que en general  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  no es transitiva.*

Sea  $(X, \mathcal{T})$ , con  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{T} = \{N_1, N_2, N_3, \emptyset\}$ , siendo  $N_1 = \{1\}$ ,  $N_2 = \{1, 2\}$  y  $N_3 = \{2, 3\}$ .

Es inmediato comprobar que 1 y 2 son adyacentes y,  $\{2, 3\}$  es conexo pero,  $\{1, 3\}$  no lo es.

La adyacencia  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  se puede considerar como un grafo cuando dos vértices,  $x$  e  $y$ , están unidos si  $x \in A_{\mathcal{T}}(y)$

**Definición 1.3.6** (Grafo asociado a la  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ ). *Sea  $G_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}}$  el grafo simple cuyo conjunto de vértices es  $X$  y las aristas son los conjuntos  $\{(x, y)\}$  en  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ . Es decir, el grafo tiene como vértices los puntos de  $X$  y existe una arista entre dos de ellos si  $\{x, y\}$  es conexo.*

Nótese que  $G_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}}$  es  $G_{\leq \mathcal{T}}$  (sin aplicar el diagrama de Hasse) tomando el grafo sin las direcciones dadas por el preorden ni los bucles propios de la reflexividad.

Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio finito, y dos puntos,  $x$  e  $y$  se unen por un arco en  $G_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}}$ ,  $C = xx_1x_2\dots x_ny$ , si y sólo si,  $C$  es  $\mathcal{T}$ -conexo pues todo conjunto finito induce un  $A$ -espacio. Es decir, un arco refleja un conjunto conexo.

**Nota 1.3.7.** *El grafo asociado a  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  también se denomina grafo de adyacencia.*

Se tiene en  $A$ -espacios el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.8.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  es un  $A$ -espacio, entonces,  $A(x) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x)$*

*Demostración.* Si  $y \in A(x) = N(x) \cup cl(x) - \{x\}$ , hay dos casos:

1. Si  $y \in N(x)$  quiere decir que la topología relativa al conjunto  $\{x, y\}$  no es la discreta. Entonces,  $\{x, y\}$  es conexo.
2. Si  $y \in cl(x)$ , entonces  $x \in N(y)$ , por lo que  $\{x, y\}$  es conexo.

En ambos casos,  $y \in A_{\mathcal{T}}(x)$ .

Recíprocamente, si  $y \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(x)$ , el espacio  $(\{x, y\}, \mathcal{T}_{\{x, y\}})$  es conexo. Luego tenemos que,

$$(N(y) \cap \{x, y\}) \cap (N(x) \cap \{x, y\}) \neq \emptyset.$$

Entonces, o bien  $x \in N(y)$ , que implica que  $y \in cl(x)$ , o bien  $y \in N(x)$ , y por tanto  $y \in N(x)$ .  $\square$



## 1.4. Aplicaciones continuas entre A-espacios.

En este apartado se comprobará que la continuidad entre A-espacios se puede caracterizar mediante  $\leq_{\mathcal{T}}$ . Por tanto, mediante aplicaciones entre grafos.

Es inmediato comprobar que dada una función  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  continua entre A-espacios, si y sólo si,

$$f(N^{\mathcal{T}}(x)) \subseteq N^{\mathcal{T}'}(f(x)),$$

o,

$$N^{\mathcal{T}}(x) \subseteq f^{-1}(N^{\mathcal{T}'}(f(x))),$$

donde  $N^{\mathcal{T}}(x)$  es el correspondiente entorno mínimo de  $x$  en el A-espacio sobre  $\mathcal{T}$ . Y de forma análoga,  $N^{\mathcal{T}'}(f(x))$  con el A-espacio sobre  $\mathcal{T}'$ .

Se tiene el siguiente resultado que expresa mediante la continuidad  $\leq_{\mathcal{T}}$  y  $\leq_{\mathcal{T}'}$ .

**Teorema 1.4.1.** *Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  A-espacios y,  $f : X \rightarrow Y$ . Entonces,  $f$  es continua, si y sólo si,  $f : (X, \leq_{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \leq_{\mathcal{T}'})$  es **isótona**, es decir, si  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ , entonces  $f(x) \leq_{\mathcal{T}'} f(y)$ .*

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$ ;  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ .

Al ser  $f$  continua, tenemos que  $N_{\mathcal{T}}(x) \subset f^{-1}(N_{\mathcal{T}'}(f(x)))$ . Por definición de  $\leq_{\mathcal{T}}$ ,  $y \in N_{\mathcal{T}}(x)$  y entonces,  $y \in f^{-1}(N_{\mathcal{T}'}(f(x)))$ , por continuidad, se tiene que  $f(y) \in N_{\mathcal{T}'}(f(x))$ . Y, por tanto,  $f(x) \leq_{\mathcal{T}'} f(y)$ .

Sea  $y \in N_{\mathcal{T}}(x)$ . Veamos  $f(y) \in N_{\mathcal{T}'}(f(x))$ . Pero si  $y \in N_{\mathcal{T}}(x)$  entonces,  $x \leq_{\mathcal{T}} y$ , luego por hipótesis,  $f(x) \leq_{\mathcal{T}'} f(y)$ . Es decir,  $f(y) \in N_{\mathcal{T}'}(f(x))$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Adyacencias digitales y relaciones con la topología.

### 2.1. Concepto de k-adyacencia.

En este capítulo se considerará un concepto de adyacencia digital, distinta a la topológica o a la de un A-espacio. Este nuevo concepto es el que se percibe intuitivamente en la pantalla de un ordenador.

La adyacencia es útil pues todos los procesos que encontramos en computación y visualizamos mediante la pantalla del ordenador, son discretos. Cada píxel que se ilumina o se oscurece en la pantalla está sobre una malla ordenada, rodeado de otros 8 píxeles, 2 horizontales y 2 verticales y, 4 formando las diagonales.

Se usará esta intuición para dar conceptos de adyacencia que ya fueron considerados y definidos formalmente para el plano y el espacio digital por Rosenfeld, (ver [3]) Posteriormente Han (ver [24]) dió una definición más general que incluye a la línea y al plano digital.

A continuación se comienza definiendo el siguiente operador.

**Definición 2.1.1** (Operador  $k(m, n)$ -adyacencia). *El operador  $k(m, n)$ -adyacencia sobre  $\mathbb{Z}^n$  con  $n \in \mathbb{N}$  como:*

$$k := k(m, n) = \sum_{i=n-m}^{n-1} 2^{n-i} C_i^m$$

con  $C_i^m = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ , y  $m \leq n$ ;  $m \in \mathbb{N}$ .

Este operador realmente cuenta el número de formas de las que podemos llegar desde el centro de un  $n$ -cubo de vértices y centro enteros, con la  $k$ -adyacencia a sus vértices y centros de las caras.

**Ejemplo 2.1.2.** *Un ejemplo de 2-cubo sería el conjunto  $X = V \cup C$ , con  $V = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$  los vértices y  $C = (1, 1)$ . Es decir, un  $n$ -cubo digital será*

un cubo tal que sus vértices estén equidistantes al centro y, tanto ellos como el centro tengan coordenadas enteras.

Una definición equivalente al operador de k-adyacencia es la siguiente.

**Definición 2.1.3** (Definición general de k-adyacencia). *Sean dos puntos distintos,  $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Y, sea  $1 \leq m \leq n$ . Diremos que  $p$  y  $q$  son  $k(m, n)$  -adyacentes o brevemente  $k$  -adyacente si*

1. hay al menos  $m$  índices  $i$  tal que  $|p_i - q_i| = 1$  y,
2. para el resto de índices  $j$  con  $|p_j - q_j| \neq 1$ , entonces,  $p_j = q_j$ .

Tras esta definición se puede decir, que la  $k$  -adyacencia es el número de adyacencias posibles según el  $m$  fijado. Véase el siguiente ejemplo para  $n = 2$ , el plano digital.

**Ejemplo 2.1.4.** *Fijamos  $n = 2$ , entonces,  $m \in \{1, 2\}$  y,  $p, q \in \mathbb{Z}^2$*

*Sea  $m = 1$ : Son los puntos del plano digital que difieren a lo más en una coordenada en una unidad, es decir, los puntos que fijados un  $p = (p_1, p_2)$  son de la forma:  $(p_1 \pm 1, p_2 \pm 1)$ , con sólo un cambio posible. Son:*

$$\{(p_1 + 1, p_2), (p_1 - 1, p_2), (p_1, p_2 + 1), (p_1, p_2 - 1)\}$$

*Hay 4 posibles y son precisamente los puntos que forma la 4-adyacencia.*

*Entonces,  $m = 1 \implies k = 4$ .*

*Sea  $m = 2$ : Ahora son los puntos que difieren en a los más 2 coordenadas. Tenemos pues los que difieren en una coordenada: el caso anterior. Y los que difieren en dos coordenadas estrictamente.*

*Estos últimos son precisamente los de la forma:*

$$\{(p_1 + 1, p_2 + 1), (p_1 - 1, p_2 - 1), (p_1 + 1, p_2 - 1), (p_1 - 1, p_2 + 1)\}$$

*De nuevo, hay 4 posibles y son precisamente los puntos que forman las diagonales, que junto a los anteriores nos dan la forma de 8-adyacencia.*

*Entonces,  $m = 2 \implies k = 8$ .*

El mismo ejemplo visto por el operador de adyacencia es el siguiente:

**Ejemplo 2.1.5.** *Fijamos la dimensión en  $n = 2$ . Entonces,  $m \in \{1, 2\}$ .*

*Si  $m = 1$ :  $k(1, 2) = \sum_{i=1}^1 2^{2-i} C_i^2$ , es decir, hay un solo sumando. Se tendría finalmente sustituyendo en  $C_i^2$ ,*

$$k(1, 2) = 2 \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 4.$$

*Si  $m = 2$ :  $k(2, 2) = \sum_{i=0}^1 2^{2-i} C_i^2$ , ahora hay dos sumandos. Se tendría sustituyendo en  $C_i^2$ , para cada  $i$ ,*

$$k(1, 2) = 2^2 \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} + 2^1 \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 4 + 4 = 8.$$

De toda  $k$ -adyacencia se puede generar un grafo asociado donde cada punto tiene  $k$  puntos adyacentes a él, en nuestro trabajo, sobre el espacio  $n$ -dimensional entero que corresponda.

A continuación se indican conceptos derivados de la  $k$ -adyacencia.

**Definición 2.1.6.** *Asociado a la  $k$ -adyacencia están los siguientes conceptos:*

1. *Dos puntos se dicen  **$k$ -adyacentes** si el grafo generado por la  $k$ -adyacencia los establece a ambos como adyacentes.*
2. *Un punto se dice  **$k$ -vecino** o  **$k$ -entorno** a otro si son vecinos vistos como unión de conjuntos de  $k$ -adyacencia.*
3. *Un conjunto es  **$k$ -conexo** o se rige por la  **$k$ -conexión**, si el conjunto es conexo en el grafo de  $k$ -adyacencia dado.*
4. *Un  **$k$ -camino** es un camino en el grafo de  $k$ -adyacencia. Es decir, una sucesión de puntos  $k$ -adyacentes.*
5. *Un  **$k$ -arco** es un arco en el grafo de  $k$ -adyacencia, es decir, una subsucesión de puntos  $k$ -adyacentes.*

Se define el siguiente concepto.

**Definición 2.1.7.** *En general, definimos el  $k$ -vecino (o  $k$ -entorno) digital de  $x_0 \in X$  con radio  $\epsilon \in \mathbb{N}$  a:*

$$N_k(x_0, \epsilon) := \{x \in X; l_k(x_0, x) \leq \epsilon\} \cup \{x_0\}$$

con  $l_k(x_0, x)$  la longitud del  $k$ -camino más corto entre  $x_0$  y  $x$ .

Si  $\epsilon = 1$ , se omite  $\epsilon$  de la notación.

## 2.2. Adyacencia en $\mathbb{Z}$ : La 2-adyacencia como espacio topológico.

Surge la pregunta de si es posible dar una topología sobre  $\mathbb{Z}$  de forma que los puntos se relacionen por la conexión.

Por ejemplo, en  $\mathbb{Z}$  la natural, en la que todo entero se 'conecta' con el de su izquierda y su derecha. Es decir, todo entero es 2-adyacente a sus vecinos en la recta entera, vista como grafo.

Se puede reformular la pregunta del siguiente modo: ¿existe una topología sobre  $\mathbb{Z}$  tal que induzca la 2-adyacencia como entorno mínimo? La respuesta es que sí.

Aclarar que, la topología inducida por la 2-adyacencia es la que tiene como base la que a cada  $n \in \mathbb{Z}$ , le asocia como abierto básico el conjunto  $\{n - 1, n, n + 1\}$ .

**Proposición 2.2.1.** *La topología inducida por la 2-adyacencia es la topología discreta sobre  $\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Notaremos a los vecinos 2-adyacentes de un entero  $x$  como  $N_2(x) = \{x - 1, x, x + 1\}$ .

Sea  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_d)$  la topología discreta sobre  $\mathbb{Z}$ . Basta observar que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{N_2(x); x \in \mathbb{Z}\},$$

es subbase para topología discreta. Luego, basta ver que  $\mathcal{T}_d$  es la menor topología que contiene a  $\mathcal{B}$ . Y, eso es casi inmediato por las características de  $\mathcal{B}$ .

1.  $N_2(x) \cap N_2(y) = \{x, y\}$  si  $x$  e  $y$  son consecutivo.
2.  $N_2(x) \cap N_2(y) = \{x + 1 \text{ o } y - 1\}$  si  $x$  e  $y$  son adyacentes a un punto en común.
3.  $N_2(x) \cap N_2(y) = \emptyset$  los otros casos.

□

Es importante destacar que la 2-adyacencia es la 2-conexión de los puntos de  $\mathbb{Z}$ . Esta 2-adyacencia coincide con la adyacencia de Kopperman de los intervalos digitales. Es la "natural" dada por los intervalos de enteros.

### 2.3. Adyacencias en el plano entero: La 4-adyacencia y la 8-adyacencia.

Será normal que a lo largo del trabajo se haga un abuso de notación y se tome como entorno o conjunto de vecindad al conjunto que nos da la adyacencia del punto. Aunque no tienen que ser lo mismo a priori. Confiamos que por el contexto se entienda a que se refiere en todo momento

Recordar que para dimensión 2 ya se hizo el cálculo de la adyacencia (de dos formas distintas) en los ejemplos 2.1.4 y 2.1.5.

**Observación 2.3.1.** *Si se mira la definición de los conjuntos de adyacencia, vemos que pueden considerarse inducidos los conjuntos de 4-adyacencia como el conjunto de puntos a distancia menor o igual a 1 del centro  $(i, j)$ ; y, los conjuntos de 8-adyacencia como el conjunto de puntos a distancia menor o igual a  $\sqrt{2}$  del centro  $(i, j)$ , representado en la figura 2.1.*

*Este hecho no será de gran relevancia a lo largo del trabajo pero resulta interesante ver que se pueden expresar mediante la distancia euclídea.*

En resumen, estos conceptos de distancia pueden relacionar la topología euclídea con las topologías digitales.

Se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.3.2.** *La familia  $\{N_4(i, j)\}_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2}$  con  $i + j$  es par es una base para una topología en  $\mathbb{Z}^2$ , y un conjunto  $C \subseteq \mathbb{Z}^2$  es conexo en ella, si y sólo si, es 4-conexo.*

Este hecho se observará más adelante en el capítulo de la topología de Marcus-Wyse.

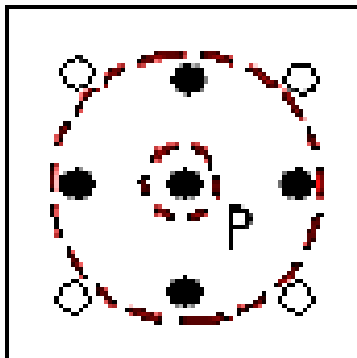


Figura 2.1: Representación del conjunto 4-adyacente como conjunto generado por distancia clásica euclídea.

### 2.3.1. Existencia de topología dada por la 4-adyacencia.

Al igual que con la 2-adyacencia, se plantea si existe una topología tal que sus entornos mínimos sean los 4-entornos para todos los puntos.

Si existe  $\mathcal{T}$  tal que sea la topología generada por la 4-adyacencia, entonces el entorno mínimo de un punto cualquiera,  $x$ , es el conjunto de 4-adyacencia,  $N_4(x)$ . Tomando, otro punto  $y$ , se tiene lo mismo. ¿Para dos puntos cualesquiera podemos dar unos entornos mínimos de forma que queden separados? La respuesta es no.

Si  $y \in N_4(x) \implies N_4(y) \cap N_4(x) = \{x, y\}$ .

Entonces,  $\mathcal{T}$  no es  $T_0$ . Luego, si  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T})$  es A-espacio, al no ser  $T_0$ , sus puntos no son distinguibles y carece de interés para el desarrollo del trabajo.

### 2.3.2. No existencia de topología con 8-adyacencia.

Encontrar una topología en la cual los conjuntos conexos fueran los 8-conexos se resolvió con una negación en el artículo *Connectivity and consecutivity in Digital Pictures* de Jean-Marc Chassery. (Véase [4])

Se dedica por ello, una subsección al siguiente Teorema que da rigor a lo anterior y tiene relevancia para el trabajo.

Aclarar que la 8-adyacencia produce sobre los conjuntos una conexión, la 8-conexión.

Se da la siguiente demostración de [7].

**Teorema 2.3.3.** *No existe ninguna topología  $\mathcal{T}$  sobre  $\mathbb{Z}^2$  tal que la conexión para dicha topología sea la 8-conexión.*

*Demostración.* Sea  $X = \{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}^2$  un conjunto tal que todos sus subconjuntos binarios fuesen 8-conexos. Entonces los puntos de  $X$  estarían situados en los vértices de una cuadrícula formando una esquina, véase la figura 2.2.

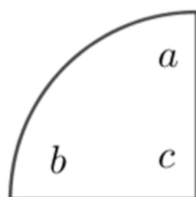


Figura 2.2: Representación la cuadrícula

Si  $\mathcal{T}|_X$  es la topología relativa sobre  $X$ ,  $(X, \mathcal{T}|_X)$  sería conexo, ya que es 8-conexo, y también lo serían sus subconjuntos binarios. Como consecuencia, es inmediato probar que:

1. En  $(X, \mathcal{T}|_X)$  puede haber, como máximo, un subconjunto unitario abierto. Pues si hubiese dos,  $\{a\}$  y  $\{b\}$ , por ejemplo,  $\{a, b\}$  no sería  $\mathcal{T}$ -conexo.
2. En  $(X, \mathcal{T}|_X)$  puede haber como máximo, un subconjunto binario abierto. Pues si  $\{a, b\}$  y  $\{b, c\}$ , por ejemplo lo fuesen,  $\{a\}$  y  $\{c\}$  serían abiertos en  $\{a, c\}$  y  $(\{a, c\}, \mathcal{T}|_{\{a, c\}})$  sería desconexo.
3. Si  $A$  es un subconjunto unitario de  $X$  abierto y  $B$  un conjunto binario abierto, entonces  $A \subset B$ .

Teniendo en cuenta estas observaciones, se deduce que existen cuatro tipos posibles de topologías sobre  $X$ :

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ .

$\mathcal{T}_2$  formada por  $\emptyset, X$  y un conjunto unitario,  $\{b\}$ , por ejemplo.

$\mathcal{T}_3$  formada por  $\emptyset, X$  y un conjunto binario,  $\{b, c\}$ , por ejemplo.

$\mathcal{T}_4$  formada por  $\emptyset, X$  y un conjunto unitario y un conjunto binario. Es decir, podría ser  $\{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$ .

Basta considerar que las cuatro topologías son las representadas mediante los diagramas de 2.3

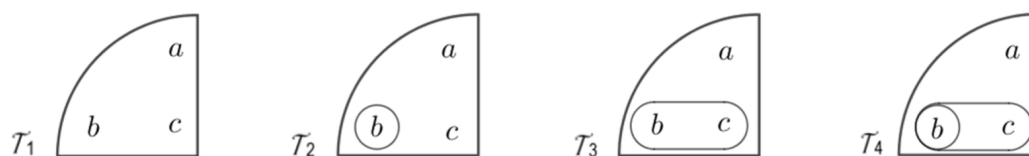


Figura 2.3: Representación de las 4 posibles topologías.

ya que en la demostración solo se usa que todas las parejas formadas con  $a, b$  y  $c$  son conjuntos 8-conexos.

Ahora si, consideremos  $Y = X \cup \{d\}$ , siendo  $d$  un punto 8-vecino de  $c$ , pero no de  $a$  ni de  $b$ ,  $\{a, d\}$  sería desconexo, por tanto existe  $U \in \mathcal{T}_Y$  tal que  $a \in U$  y  $d \in U$ . Como

$U \cap X \in \mathcal{T}_X$ , ha de ser  $X = U$ , es decir,  $X \in \mathcal{T}_Y$ . Pero puesto que  $b$  y  $d$  tampoco son 8-conexos, razonando de la misma manera se llega a que  $V = \{d\} \in \mathcal{T}_Y$ , luego  $\{c, d\}$  sería desconexo, lo que es una contradicción con que  $c$  y  $d$  son 8-vecinos.  $\square$



## Capítulo 3

# Recta digital de Khalimsky.

La topología de Khalimsky surgió con la idea de querer hallar resultados ciertos sobre los elementos digitales, es decir, los píxeles de una pantalla de ordenador o de cualquier dispositivo electrónico.

El razonamiento básico que se usará es el siguiente: Los píxeles son pequeñas bombillas las cuales emiten luz en un entorno de ellas. Entre píxel y píxel, si nos acercamos lo suficiente, hay una zona de penumbra donde no se localiza píxel alguno. La base que vamos a dar a continuación busca traducir matemáticamente esta situación. Los puntos impares serán los píxeles, y los puntos pares las sombras de penumbras.

**Definición 3.0.1.** Sobre  $\mathbb{Z}$  definimos la familia  $\mathcal{B}_K = \{B(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde

$$B(n) = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{n\} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (3.1)$$

**Proposición 3.0.2** ( $\mathcal{B}_K$  de la recta digital es base). *La familia  $\mathcal{B}_K$  es base para una topología  $\mathcal{T}_K$  sobre  $\mathbb{Z}$ , llamada topología de Khalimsky sobre  $\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Veamos que  $\mathcal{B}_K$  satisface las dos condiciones para ser base de una topología. Es evidente que  $\mathcal{B}_K$  es un recubrimiento de  $\mathbb{Z}$ . Por otra parte, si  $n \in B(p) \cap B(q)$ , con  $B(p) \neq B(q)$ , se pueden dar los siguientes casos:

Si  $p$  es par y  $q = p + 1$ : entonces  $n = q$ , y  $B(n) = B(p) \cap B(q)$ .

Si  $p$  es par y  $q = p + 2$ : en este caso,  $n = p + 1$ , y  $B(n) = B(p) \cap B(q)$ .

Los otros casos posibles son análogos y se resuelven de la misma forma. □

**Interpretación de la línea digital:** Los puntos pares, o puntos de penumbra, están relacionados con los impares, siendo éstos lo que generan el entorno de penumbra que trata de modelar la base. Véase la figura 3.1.

Cada punto par se relaciona con sus impares laterales.

$\mathcal{B}_K$  está efectivamente bien definida entonces e induce sobre  $\mathbb{Z}$  un A-espacio.

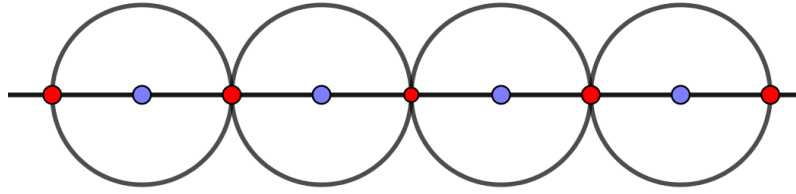


Figura 3.1: los puntos azules son los píxeles, y los rojos los puntos de penumbra.

**Proposición 3.0.3.** *El espacio topológico  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  es un  $A$ -espacio.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata de que cada punto admite un entorno básico finito. De hecho, los entornos mínimos  $N^{\mathcal{T}_K}(n)$  son :

$$N^{\mathcal{T}_K}(n) = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{n\} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (3.2)$$

□

**Proposición 3.0.4.**

(a) *En  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ , los puntos impares son abiertos y los puntos pares son cerrados.*

(b)

$$A_{\mathcal{T}_K}(n) = \begin{cases} \emptyset & , \text{ si } n \text{ es impar,} \\ \{n-1, n+1\} & , \text{ si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (3.3)$$

*Demostración.* (a) Si  $n$  es impar,  $N^{\mathcal{T}_K}(n) = \{n\}$ . Si  $n$  es par, entonces  $cl(\{n\}) = \{n\}$ , pues si  $|m-n| \geq 1$ , entonces  $N^{\mathcal{T}_K}(m) \cap \{n\} = \emptyset$ .

(b) En este espacio hay dos casos posibles, si  $n$  es impar:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{T}_K}(n) &= N^{\mathcal{T}_K}(n) \cup cl(\{n\}) - \{n\} \\ &= \{n\} - \{n\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Y el caso  $n$  par:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{T}_K}(n) &= N^{\mathcal{T}_K}(n) \cup cl(\{n\}) - \{x\} \\ &= \{n-1, n, n+1\} - \{n\} = \{n-1, n+1\}. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos,

$$A_{\mathcal{T}_K}(n) = \begin{cases} \emptyset & , \text{ si } n \text{ es impar,} \\ \{n-1, n+1\} & , \text{ si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (3.4)$$

□

Se puede decir entonces que los impares son '1-adyacentes', que quiere decir que solo son adyacentes consigo mismos. Y, por otra parte, los pares tienen dos elementos adyacentes.

**Definición 3.0.5** (Intervalos digitales). Si  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo, entonces  $I \cap \mathbb{Z}$  se llama intervalo digital.

Si  $I$  es acotado, usaremos las notaciones  $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ ,  $(a, b)_{\mathbb{Z}}$ ,  $[a, b)_{\mathbb{Z}}$  o  $(a, b]_{\mathbb{Z}}$ . Es decir, un intervalo digital finito estará constituido por un conjunto finito de enteros consecutivos.

### 3.1. Preorden de especialización de la recta digital.

Por ser  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  un A-espacio, tiene asociado un orden de especialización  $\leq_{\mathcal{T}_K}$ .

**Proposición 3.1.1.** La relación  $\leq_{\mathcal{T}_K}$  es una relación de orden parcial, y viene dada por  $m \leq_{\mathcal{T}_K} n$  si  $m = n$ , o bien  $m = 2k$  y  $n = m \pm 1$ .

*Demostración.* Por definición de  $\leq_{\mathcal{T}_K}$ ,  $m \leq_{\mathcal{T}_K} n$  si  $n \in N^{\mathcal{T}_K}(m)$ , es decir, si  $n = m$  o bien  $m = 2k$  y  $n = m \pm 1$ .  $\square$

**Observación 3.1.2.** El digrafo correspondiente a la relación  $\leq_{\mathcal{T}_K}$  es el que se indica en , y en él aparece el arco  $(m, n)$  si  $m \leq_{\mathcal{T}_K} n$ , es decir, si  $m$  es par y  $n = m \pm 1$ .

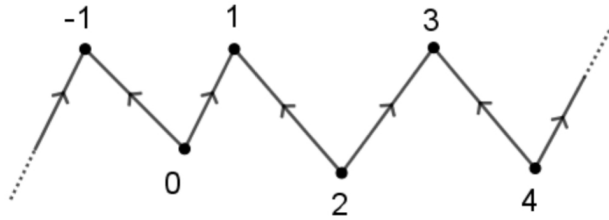


Figura 3.2: Digrafo que representa  $\leq_{\mathcal{T}_K}$

Es decir, de cada par salen dos flechas hacia los impares que están a su izquierda y a su derecha (los mayores que él respecto al orden  $\leq_{\mathcal{T}_K}$ ), y a cada impar llegan dos, procedentes de los pares que le preceden.

Este grafo permite interpretar la topología de Khalimsky del siguiente modo: los impares corresponden a los píxeles y los pares a las líneas "imaginarias" (o de penumbra) que separan dos píxeles, consecutivos. Los píxeles son cuadrados iluminados separados, aunque se perciben como cuadrados unidos, que comparten un lado vertical, y esos lados verticales se representan por los enteros pares, más flechas que parten de ellos en las dos direcciones: hacia los enteros asociados a los píxeles que los comparten.

**Proposición 3.1.3.** Sea  $\leq$  la relación de orden parcial dada por  $m \leq n$  si  $m = n$  ó  $m = 2k$  y  $n = m \pm 1$ . Entonces, la topología  $\mathcal{T}_{\leq}$  es  $\mathcal{T}_K$ .

*Demostración.* Consideramos la base de dicha topología, que es

$$\mathcal{B}_{\leq} = \{U(m)\}_{m \in \mathbb{Z}},$$

donde  $U(m) = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq m\}$  resulta que  $U(m) = \{m\}$  si  $m$  es impar, y  $U(m) = \{m-1, m, m+1\}$  si  $m$  es par. Es decir,  $\mathcal{B}_{\leq} = \mathcal{B}_K$   $\square$

Si sobre  $\mathbb{Z}$  se considera el orden  $\leq'$  opuesto a  $\leq$ , es decir, el dado por  $n \leq' m$  si  $m \leq n$  se obtiene un espacio topológico homeomorfo a  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ .

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $\leq'$  la relación de orden parcial sobre  $\mathbb{Z}$  dada por  $m \leq' n$  si  $n \leq m$ . Entonces, se tiene:*

(a) *La base de  $\mathcal{T}_{\leq'}$  es la familia  $\mathcal{B}_{\leq'} = \{B'(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde*

$$B'(n) = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (3.5)$$

(b) *Los espacios  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  y  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{\leq'})$  son homeomorfos.*

*Demostración.* (a) Por definición  $\mathcal{B}_{\leq'} = \{B'(n); n \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $B'(n) = \{m \in \mathbb{Z}; n \leq' m\} = \{m \in \mathbb{Z}; m \leq n\}$ . Por tanto,

$$B'(n) = \begin{cases} \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (3.6)$$

(b) La aplicación  $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{\leq'})$  dada por  $f(n) = n+1$  es biyectiva, y por tanto ella como su inversa son continuas, pues  $f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}_K}) = \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}_{\leq'}}$  y  $f^{-1}(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}_{\leq'}}) = \mathcal{N}_{f^{-1}(x)}^{\mathcal{T}_K}$   $\square$

**Observación 3.1.5.** *Nótese que  $\mathcal{T}_{\leq'}$  es la topología dual de  $\mathcal{T}_K$ , pues los cerrados de una son los abiertos de la otra. De hecho, la diferencia entre ambos es que los papeles de los pares e impares están intercambiados, y por eso  $\mathcal{T}_{\leq'}$  se llamará en ocasiones como topología de Khalimsky retardada, y se denota por  $\mathcal{T}_{K_r}$ .*

## 3.2. Obtención de la recta digital como cociente de la recta real.

La recta digital puede interpretarse como una discretización de la recta euclídea, obtenida identificando ciertos intervalos con números enteros.

La idea es considerar una función de redondeo de un número real por su parte entera, según que la parte decimal del número sea mayor o menor que  $\frac{1}{2}$ .

**Definición 3.2.1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  la aplicación dada por  $f([m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}]) = m$  si  $m$  es par y  $f((m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})) = m$  si  $m$  es impar.*

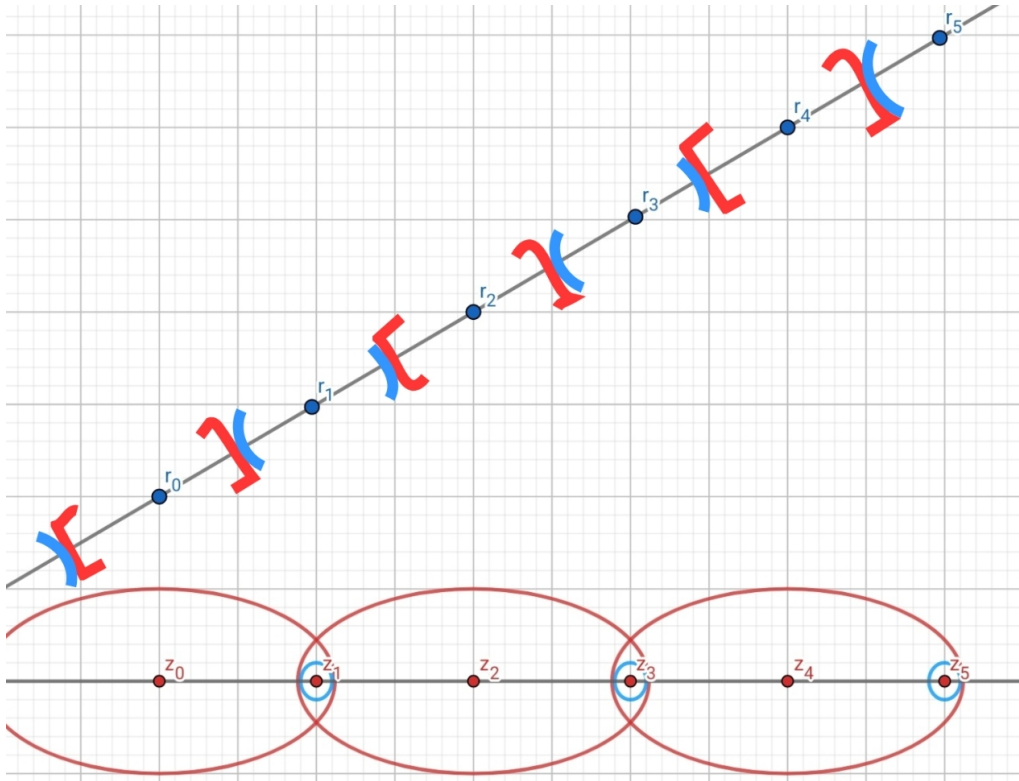


Figura 3.3: Cociente de la recta real sobre la recta entera a través de  $f$ . Los puntos enteros de la recta real notados por  $r_i$ , y los puntos de la recta entera notados por  $z_i$ , donde  $i$  dice el número entero correspondiente a la posición

Es decir,  $f$  es la aplicación representada en la siguiente figura, 3.3.

La familia de intervalos:

$$\left\{ \left[ m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right]; m \text{ es par} \right\} \cup \left\{ \left( m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right); m \text{ es impar} \right\} = f^{-1}(\mathbb{Z}),$$

es una partición de  $\mathbb{R}$ , y veremos que la recta digital se obtiene como un cociente de ella identificando al centro cada uno de ellos.

**Proposición 3.2.2.**  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  es una aplicación cociente.

*Demostración.* Veamos que  $f$  es continua, es decir, que si  $U \in \mathcal{T}_K$ , entonces  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_e$ . Para ello, basta suponer que  $U$  es un abierto básico de  $\mathcal{T}_K$ . Pero si  $U = \{x\}$  con  $n$  impar, entonces  $f^{-1}(U) = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ . Y si  $U = \{n - 1, n, n + 1\}$  con  $n$  par,  $f^{-1}(U) = (n - \frac{3}{2}, n + \frac{3}{2})$ .

Por otra parte, supongamos que  $f^{-1}(U)$  es abierto. Entonces  $f^{-1}(U)$  es unión disjunta de intervalos disjuntos de la forma  $(-\infty, a), (a, b)$  o  $(b, +\infty)$ , y  $U$  se podrá expresar como la unión de las imágenes de cada uno de ellos. Por tanto, bastará probar que  $f(-\infty, a) = U$ ,  $f(a, b) = V$  ó  $f(b, +\infty) = W$  son abiertos.

Si  $n$  es el mayor  $U = \{m \in \mathbb{Z}; m \leq n\}$  y ha de ser  $a = \frac{1}{2}$  y  $n$  impar, pues si  $n$  es par y  $a \leq \frac{1}{2}$  también se aplicarían sobre los puntos de  $(a, \frac{1}{2}]$ . Por tanto,  $U \in \mathcal{T}_K$ .

Del mismo, considerando el menor entero en  $(b, +\infty)$ , se probaría que  $W$  es abierto.

Para ver que  $V$  lo es, basta tener en cuenta que  $V = [n, m]$ , siendo  $n$  y  $m$  el menor y el mayor entero en  $(a, b)$ , respectivamente. Entonces,  $a = b = \frac{1}{2}$ , y  $n$  y  $m$  son impares, pues en caso contrario las imágenes de otros puntos de  $f^{-1}(U) - (a, b)$  estarían en  $V$ .  $\square$

### 3.3. Propiedades topológicas de la línea de Khalimsky

Entre las propiedades topológicas de  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  caben destacar las que se recogen en el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.1.** *El espacio  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  verifica las siguientes propiedades:*

1. Es  $T_0$  no es  $T_1$ .
2. Es conexo por caminos.

*Demostración.*

1. Para ver si es  $T_0$  veamos los casos posibles. Sean  $x$  e  $y$  pares distintos, entonces  $x \notin N_2(y)$  y  $y \notin N_2(x)$ . Si uno es impar, por ejemplo  $x$ , entonces  $x \notin N_2(y)$  e  $y \notin \{x\}$ . Y si ambos son impares los conjuntos unitarios solo son iguales si son el mismo punto. Y,  $T_1$  no es porque los impares no son cerrados.

2. Veamos que para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $[n, n+1]$  es conexo por caminos: si  $n$  es impar, la aplicación

$$f : ([0, 1], \mathcal{T}_e \rightarrow ([n, n+1], \mathcal{T}_K), \text{ dada por,} \quad (3.7)$$

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua, pues los abiertos básicos de  $n$  y  $n+1$  en  $([n, n+1], \mathcal{T}_K)$ , son, respectivamente,  $\{n\}$  y  $\{n, n+1\}$ , y  $f^{-1}(\{n\}) = [0, 1)$ , y  $f^{-1}(\{n, n+1\}) = [0, 1]$ .

Como consecuencia, los conjuntos de la forma  $[n, m]$  con  $n \leq m$  son conexos por caminos, pues se pueden expresar como unión de conjuntos conexos por caminos que se cortan:  $[n, m] = \bigcup\{[n, n+i]; 0 \leq i \leq m-n\}$ . Aplicando de nuevo esa propiedad, se tiene que  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  es conexo por caminos, pues  $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-n, n]$ .  $\square$

#### Observación 3.3.2.

1. La demostración del apartado 2 se obtiene también teniendo en cuenta que  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  es un cociente de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ .
2. Por ser  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  un  $A$ -espacio es localmente conexo por caminos.

Veamos el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.3.** *Un subconjunto  $C$  es conexo en  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ , si y sólo si, es un intervalo digital.*

*Demostración.* Si  $C$  es un intervalo digital, se demuestra que  $C$  es conexo igual que se demostró en el apartado 2 de la Proposición anterior.

Recíprocamente, supongamos que  $C \subseteq \mathbb{Z}$  es conexo pero que no es un intervalo. Entonces, existen  $n, m \in \mathbb{Z}$  y  $p \in \mathbb{Z} - C$  tal que  $n \leq p \leq m$ .

Si  $p$  es par, entonces  $(-\infty, p)$  y  $(p, +\infty)$  son abiertos en  $\mathcal{T}_K$ , y por tanto  $C$  se podría expresar como unión disjunta de dos abiertos,

$$C = ((-\infty, p) \cap C) \cup ((p, +\infty) \cap C).$$

Si  $p$  es impar, entonces  $(-\infty, p)$  y  $(p, +\infty)$  serían cerrados disjuntos en  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ , y se tendría una descomposición de  $C$  en los cerrados  $(-\infty, p) \cap C$  y  $(p, +\infty) \cap C$ .  $\square$

Es interesante ver que la línea digital es un COTS. Para ello, se verá primero la definición de espacio COTS. (Véase [14])

**Definición 3.3.4.** *Un espacio topológico se dice que es un **espacio ordenado conexo (COTS)** si es conexo y además satisface que: para cualesquiera  $x_1, x_2, x_3$  distintos de  $X$ ,  $\exists i$  t.q.  $x_j$  y  $x_k$  caen en distintas componentes de  $X - x_i$ , donde  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .*

*Dicho en palabras, dados dos puntos existe un tercero que los separa en componentes conexas distintas.*

Los espacios COTS tienen puntos que son característicos por separar el espacio si son eliminados del conjunto. Es decir, hay punto de la forma:  $x \in X$ , que se llaman puntos de corte si  $X - \{x\}$  tiene dos componentes. También, hay puntos llamados puntos extremos si  $X - \{x\}$  tiene una única componente. Y, normalmente las componentes de  $X - \{x\}$  se llaman partes de  $X - \{x\}$ .

Es interesante decir que los espacios COTS son naturalmente de dimensión 1. De hecho, en [14] se muestra en el apartado 3 Theorem 2, que un espacio  $X$  es COTS, si y sólo si, existe un orden lineal  $\leq$  sobre  $X$  tal que para cada  $x \in X$ ,  $(x, \infty)$  y  $(-\infty, x)$  son dos componentes de  $X - \{x\}$ .

Volviendo al mundo digital, los conjuntos COTS de la línea digital se ven representados en el siguiente dibujo, 3.4

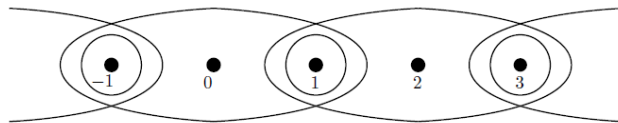


Figura 3.4: Representación conjuntos COTS en la línea digital.

Podríamos decir más sobre los espacios COTS y su relación con el mundo digital, pero se sale de los objetivos del trabajo.

# Capítulo 4

## Plano digital de Khalimsky.

Hoy en día, la topología de Khalimsky, introducida por Khalimsky, Kopperman y Meyer, es uno de los conceptos más importantes de la teoría llamada Topología Digital.

La topología sobre  $\mathbb{Z}^2$  tiene útiles aplicaciones, en particular el procesamiento de imágenes. Normalmente procesar imágenes euclídeas sobre un plano discreto de píxeles, requiere analogías para clasificar su comportamiento.

Entre esas analogías podríamos situar el Teorema de la Curva de la Jordan. Para obtener un Teorema de la Curva Digital de Jordan, la estructura de dos grafos se verá que debe usarse simultáneamente la 4-adyacencia y la 8-adyacencia. Lo cual trae muchas paradojas.

### 4.1. Obtención de la topología del plano digital de Khalimsky.

Habiendo visto la topología de la recta de Khalimsky, se puede dar el producto de dos líneas digitales.

**Definición 4.1.1.** *La topología del plano digital de Khalimsky se define como el producto topológico de dos copias de  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ , es decir,  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \times (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ .*

Por abuso de notación a la topología en el plano digital de Khalimsky y, a la topología en la línea digital se denotarán de igual manera como  $\mathcal{T}_K$ , salvo que haya que aclarar por el contexto, donde el plano se indicará como  $\mathcal{T}_K^2$ .

Se puede obtener los entornos mínimos para cada punto por el producto de dos entornos mínimos en la línea digital.

**Entornos mínimos:** Se tienen varios tipos de entornos mínimos, 4 en total. Se hará según la paridad de cada punto en la línea digital:

1. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  ambos impares, entonces,

$$N^{\mathcal{T}_K}(x, y) = \{(x, y)\}.$$



2. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  con  $x$  impar e  $y$  par, entonces,

$$N^{\mathcal{T}_K}(x, y) = \{(x, y - 1), (x, y), (x, y + 1)\},$$

denotado por  $V(x, y)$  pues sus puntos están en la misma vertical.

3. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  con  $x$  par e  $y$  impar, entonces,

$$N^{\mathcal{T}_K}(x, y) = \{(x - 1, y), (x, y), (x + 1, y)\},$$

denotado por  $H(x, y)$  pues sus puntos están en la misma horizontal.

4. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  ambos pares, entonces,

$$N^{\mathcal{T}_K}(x, y) =$$

$$\{(x-1, y-1), (x, y-1), (x+1, y-1), (x-1, y), (x, y), (x+1, y), (x-1, y+1), (x, y+1), (x+1, y+1)\}$$

denotado por  $N_8(x, y)$  ya que sus puntos son 8-adyacentes.

**Nota 4.1.2.** A los puntos con la misma paridad en sus dos coordenadas los llamaremos **puntos puros**, e indicaremos la paridad refiriéndonos a ellos como puntos puros impares o puntos puros pares, según sean sus dos coordenadas impares o pares respectivamente.

A los puntos que no sean puros los llamaremos **puntos mixtos**.

Se puede dar la siguiente definición.

**Definición 4.1.3** (Base del plano digital). Dado un punto  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , definimos la familia  $\mathcal{K}_K = \{K(x, y)\}_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2}$ , donde

$$K(x, y) = \begin{cases} N_8(x, y), & \text{si } x, y \text{ son pares,} \\ H(x, y), & \text{si } x \text{ es par e } y \text{ es impar,} \\ V(x, y), & \text{si } x \text{ es impar e } y \text{ es par,} \\ \{(x, y)\}, & \text{si } x, y \text{ son impares,} \end{cases} \quad (4.1)$$

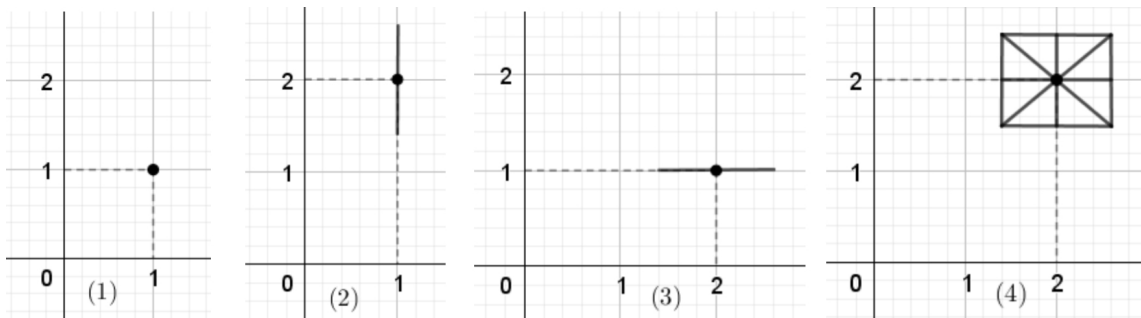


Figura 4.1: Representación de los entornos mínimos de Khalimsky. (1) Impar-Impar, (2) Impar-Par, (3) Par-Impar, (4) Par-Par

**Proposición 4.1.4.** La familia  $\mathcal{K}_K$  es base para una topología  $\mathcal{T}_K$  sobre  $\mathbb{Z}^2$ , llamada topología de Khalimsky (en el plano digital).

*Demostración.* Basta decir que  $K(x, y) = B(x) \times B(y)$  producto de elementos de la base para la línea digital. Entonces, es base por ser producto de bases.  $\square$

$(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  es A-espacio por ser producto de dos líneas digitales, es decir, por ser producto de dos A-espacios. Por la misma razón, dado que es producto de dos espacios  $T_0$ ,  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  es  $T_0$ .

**Interpretación:** De nuevo se puede dar una interpretación. Sobre el plano digital podemos tomar los puntos puros como los píxeles de una pantalla digital. Los puntos mixtos son los inmediatamente más cercanos en términos de distancia y por ello, representan las zonas de penumbra que generan la luz de cada píxel en la pantalla de un ordenador.

En este caso, los puntos puros pares contienen en sus entornos a los puntos puros impares, pudiendo decir que: los píxeles se relacionan entre ellos por las zonas de penumbra colindantes. De esta forma, cada punto mixto en el plano digital se relaciona con 4 puntos puros, 2 puros impares y 2 puros pares.

**Puntos abiertos:** Los únicos puntos abiertos serán los dados por el producto con dos coordenadas que, independientemente, en cada línea fueran puntos abiertos. Como los puntos abiertos en la línea digital eran los puntos impares tenemos que los puntos **abiertos** son los puntos puros impares.

**Clausura de cada punto en el plano digital de Khalimsky:** Como  $cl(x, y) = cl(x) \times cl(y)$ , podemos distinguir 2 tipos de clausura según la paridad de sus coordenadas.

1. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  un punto puro, entonces,

$$cl(x, y) = N_8(x, y).$$

2. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  un punto mixto, entonces,

$$cl(x, y) = N_4(x, y).$$

Los puntos puros pares son cerrados en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  pues su clausura coincide con su entorno mínimo.

Los puntos mixtos no son ni abiertos ni cerrados, por ello  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  no es  $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$ .

**Proposición 4.1.5.** *La adyacencia en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  viene dada por la siguiente familia: Dado  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,*

$$A_{\mathcal{T}_K}(x, y) = \begin{cases} N_8(x, y) - \{(x, y)\}, & \text{si } (x, y) \text{ es un punto puro,} \\ N_4(x, y) - \{(x, y)\}, & \text{si } (x, y) \text{ es un punto mixto,} \end{cases} \quad (4.2)$$

*Demostración.* Hay 4 casos posibles:

1. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  un punto puro impar, entonces,

$$A_{\mathcal{T}_K}(x, y) = \{(x, y)\} \cup N_8(x, y) - \{(x, y)\} = N_8(x, y) - \{(x, y)\}.$$

2. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  un punto puro par, entonces,

$$A_{\mathcal{T}_K}(x, y) = N_8(x, y) \cup N_8(x, y) - \{(x, y)\} = N_8(x, y) - \{(x, y)\}.$$

3. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  un punto mixto con  $x$  impar e  $y$  par, entonces,

$$A_{\mathcal{T}_K}(x, y) = V(x, y) \cup N_4(x, y) - \{(x, y)\} = N_4(x, y) - \{(x, y)\}.$$

4. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  un punto mixto con  $x$  par e  $y$  impar, entonces,

$$A_{\mathcal{T}_K}(x, y) = H(x, y) \cup N_4(x, y) - \{(x, y)\} = N_4(x, y) - \{(x, y)\}.$$

□

Entonces se concluye que en el plano digital de Khalimsky hay dos adyacencias: la 4-adyacencia dado por los puntos mixtos, y la 8-adyacencia dada por los puntos puros. Representado en la figura 4.2.

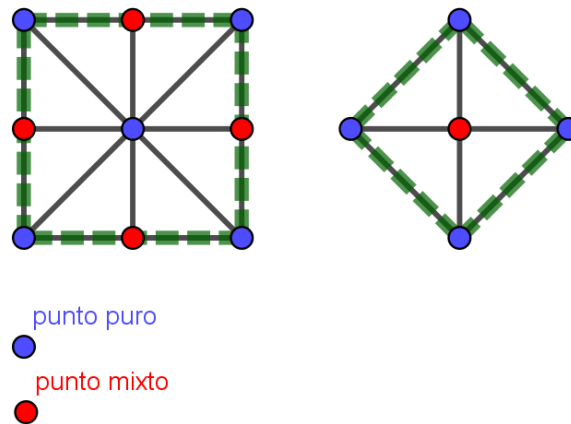


Figura 4.2: A izquierda el conjunto de 8-adyacencia y a derecha el conjunto de 4-adyacencia.

Se puede dar un grafo de adyacencia,  $G_{A_{\mathcal{T}_K}}$ , representado en la figura 4.3.

Dado el grafo de adyacencia podemos concluir además que la adyacencia de  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  no es la 8-adyacencia. Hecho que justifica el estudio de una posible topología con la 8-adyacencia como entorno mínimo de cada punto.

## 4.2. Preorden de especialización del plano digital de Khalimsky.

El plano digital de Khalimsky puede representarse mediante un grafo de conexión asociado a un orden de especialización como se hizo con la línea digital. Se toma

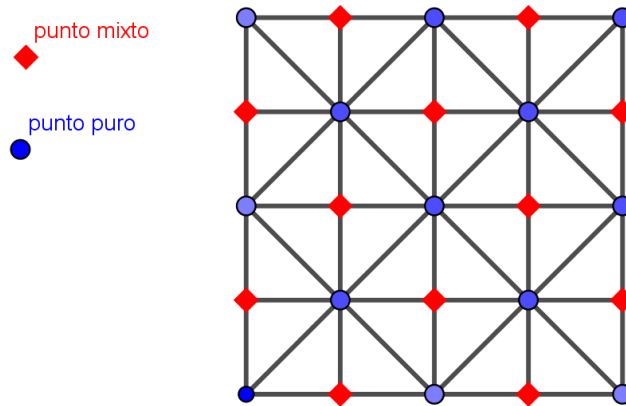


Figura 4.3: Se observa que los puntos mixtos no están conectados entre sí.

como orden de especialización el producto del orden de especialización,  $\leq_{\mathcal{T}_K}$  de la línea. (Véase 1.1.11)

Se puede dar un digrafo, asociado al orden de especialización, que se denotará por  $G_{\leq_{\mathcal{T}_K}}$  haciendo un abuso de notación con respecto a la nomenclatura del preorden dado en la línea digital. Dicho digrafo se representa en la figura 4.4.

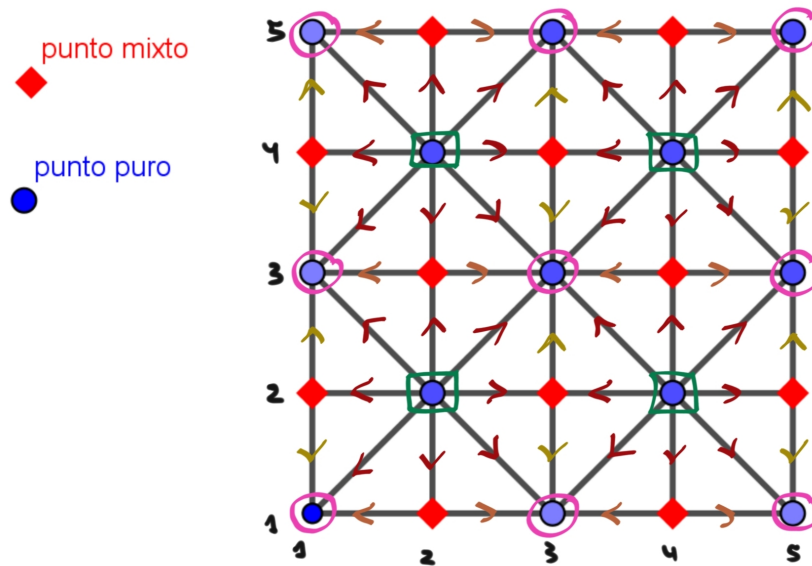


Figura 4.4: Digrafo  $G_{\leq_{\mathcal{T}_K}}$ .

Se observa como los puntos puros se distinguen no sólo por ser puros pares o puros impares, sino que también se distinguen en  $G_{\leq_{\mathcal{T}_K}}$ . De los puntos puros pares salen 8 flechas hacia los puntos que le son 8-adyacentes, 4 hacia los puntos mixtos y 4 hacia los puntos puros impares. Por otro lado, en los puntos puros impares entran

8 flechas desde los puntos que le son 8-adyacentes, 4 desde los puntos mixtos que le son 4-adyacentes y 4 desde los puntos puros pares.

Este digrafo indica además si un subconjunto finito  $S \subset \mathbb{Z}^2$  es conexo o no, basta comprobar si cada par de puntos de  $S$  se puede unir por un arco en  $G_{\leq \tau_K}$ .

### 4.3. Curvas sobre el plano digital.

**Definición 4.3.1.** Llamamos **camino digital** a una sucesión de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $G_{A_{\tau_K}}$  tal que  $x_0$  y  $x_n$  son adyacentes en  $G_{A_{\tau_K}}$  a un único punto y para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   $x_i$  es adyacente a dos puntos en  $G_{A_{\tau_K}}$ .

Llamamos **arco digital** a una subsucesión de puntos en un camino digital.

**Proposición 4.3.2** (Caracterización de arcos digitales).  $C$  es un arco digital con extremos  $x$  e  $y$ , si y sólo si,  $C$  es  $T_0$ ,  $|N^{\tau_K}(x)| = |N^{\tau_K}(y)| = 1$  y  $|N^{\tau_K}(w)| = 2$  para cualquier  $w \in C - \{x, y\}$ .

*Demostración.* [17], página 23. □

**Observación 4.3.3.** Por la definición se puede observar que en un arco digital al llegar a un punto mixto, la arista que sale de él hacia el siguiente punto no puede formar un ángulo de  $90^\circ$  con la arista que entra. Dicho en otros términos, los puntos mixtos no pueden ser vértices de una "L" si es precedido o continúa un camino "recto" en  $G_{A_{\tau_K}}$ .

Para ilustrar esta idea se presenta la figura 4.5.

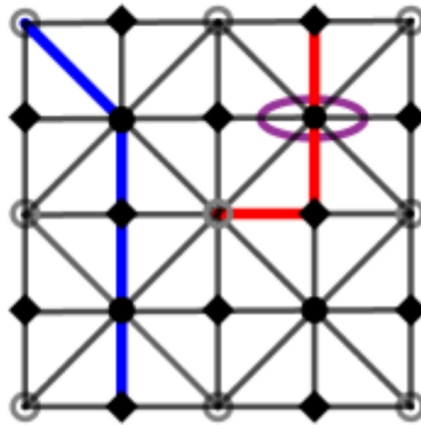


Figura 4.5: En azul un arco digital. Y, en rojo un ejemplo de arco no digital. Marcado en morado donde está el punto que no cumple la definición.

En la figura 4.5 se muestran dos arcos. El primero, en azul, es un arco digital ya que se puede comprobar que verifica la definición y la caracterización dada. Todo punto es adyacente únicamente a 2 del arco, a excepción de los extremos, que solo tienen un punto adyacente.

El segundo arco, en rojo, no es un arco digital. Si comprobamos la cantidad de puntos adyacente que tiene cada punto del arco, podemos comprobar que todos tienen únicamente 2 puntos adyacentes, salvo el punto rodeado en morado en la figura 4.5. Éste tiene 3 puntos adyacentes a él: el punto que es adyacente por la arista que le llega desde arriba, el punto que le sucede en el arco, y el punto que es 8-adyacente a él y sucede al anterior acabando el arco.

Dado que este punto es puro, su adyacencia en el grafo  $G_{A_{\tau_K}}$  es la 8-adyacencia, por ello, el arco no puede contener giros de  $90^\circ$ , ya que no cumple la condición de arco digital.

¿Por qué falla la definición en los giros de  $90^\circ$ ? La razón es que en los puntos mixtos se tiene la 4-adyacencia y en los puntos puros se tiene la 8-adyacencia. Esta dualidad dentro del grafo no implica necesariamente un problema respecto a la adyacencia total del plano digital de Khalimsky. Sin embargo, al tomar arcos y caminos digitales, ambas adyacencias no son del todo "compatibles", precisamente porque cada punto tiene un subconjunto de adyacencia particular, bien el dado por la 4-adyacencia o bien el dado por la 8-adyacencia.

Este hecho se muestra contradictorio en los arcos y caminos digitales pues impide que todos los puntos puedan tomar como sucesor a cualquier otro punto de sus vecinos adyacentes, ya que para ser arco digital hay que tener en cuenta la adyacencia también del punto que le precede y el punto que le sucederá.

Es decir, en el plano digital de Khalimsky no siempre hay libertad para dar arcos y caminos digitales. (Se pueden ver para más detalle de tales observaciones: [10], Theorem 2 y Theorem 3. y [13] para referencias referentes a la geometría digital)

**Definición 4.3.4.** Decimos que  $S$  es **curva cerrada simple digital** si es una sucesión de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $G_{A_{\tau_K}}$  tal que  $x_0 = x_n$  y para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   $x_i$  es adyacente a dos puntos en  $G_{A_{\tau_K}}$ .

**Nota 4.3.5.** Cada curva cerrada simple digital,  $C$ , tiene una  $k$ -adyacencia asociada propia en el plano digital de Khalimsky. Si todos los puntos de  $C$  son 4-adyacentes entre sí diremos que  $C$  es **4-conexa**. Si al menos dos puntos de  $C$  son 8-adyacentes, decimos que  $C$  es **8-conexa**.

**Teorema 4.3.6** (Caracterización de curvas cerradas simples digitales). *Un conjunto finito  $S$  es una curva cerrada simple digital, si y sólo si,*

1.  $|S| \geq 4$ ,
2.  $S$  es  $k$ -conexo,
3.  $|N^K(x) \cap S| = 2$  para todo punto  $x \in S$ ,

con  $k \in \{4, 8\}$ .

*Demostración.* Es trivial a partir de 4.3.2, tomando una curva cerrada como un camino digital cerrado.  $\square$

**Definición 4.3.7.** Diremos que  $C$  es una *curva de Jordan digital* en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$  si es una curva cerrada simple digital en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$ .

Como ejemplos de curvas de Jordan digitales se pueden ver los dados en la figura 4.6. En ella se representan el conjunto de puntos de adyacencia de los puntos mixtos a izquierda y a derecha el correspondiente a los puntos puros.

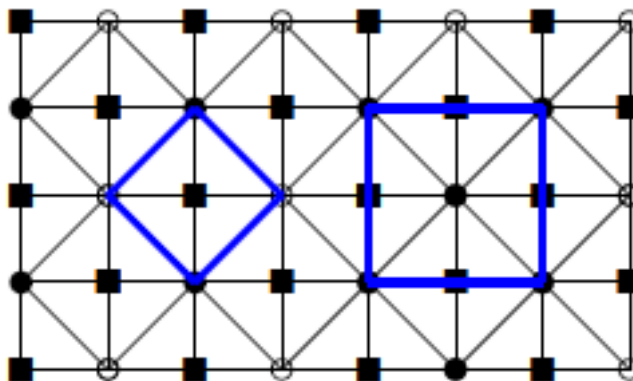


Figura 4.6: Conjuntos de adyacencia representados como curvas de Jordan.

**Observación 4.3.8.** Podemos ver cómo en las curvas cerradas simples digitales también se dan problemas en la elección de sus puntos.

Damos los ejemplos representados en la siguiente figura 4.7.

Se observan dos curvas cerradas simples digitales, en verde, que sí verifican la definición. Se comprueba como cada punto que forma la curva (en ambos casos) es adyacente en  $G_{A_{\mathcal{T}_K}}$  únicamente a 2 puntos.

Por otra parte, la curva cerrada simple en morado no es curva digital. De forma similar a la observación hecha con anterioridad, esta curva contiene un punto que es adyacente a otros 3 en  $G_{A_{\mathcal{T}_K}}$ .

De nuevo, podemos comprobar que falla la definición precisamente en el tipo de adyacencia que tiene cada punto en la curva. Si nos fijamos en la arista que entra por arriba en el punto rodeado, vemos que un punto mixto es vértice de una "L" tras suceder a una línea recta en la curva. Exactamente la observación que se hizo.

Pero podemos ver otra cualidad que hace que falle la definición de curva cerrada simple digital en este caso. Si nos fijamos en la arista que entra desde abajo del punto rodeado, podemos concluir que ciertos giros de  $45^\circ$  también están necesariamente prohibidos en las curvas digitales, ya que podríamos decir que un punto puro no puede ser sucedido por otro puro, lo que da un giro de  $45^\circ$ , si este segundo es sucedido después por un punto que gira  $90^\circ$ .

Podemos concluir, que al igual que con los arcos y caminos digitales, las curvas cerradas simples digitales no tienen libre elección para todos sus puntos. (Se pueden

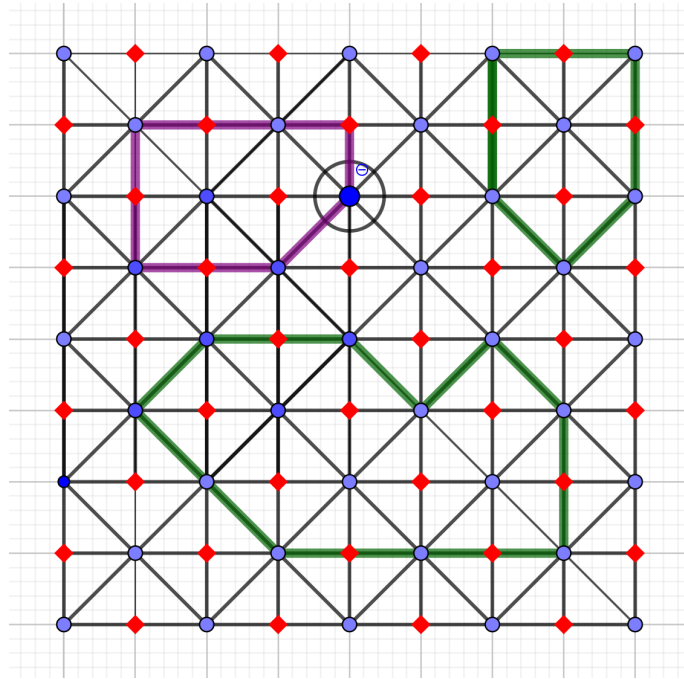


Figura 4.7

ver para más detalle de tales observaciones: [10], Theorem 2 y Theorem 3. y [13] para referencias referentes a la geometría digital)

### Teorema de Jordan.

El teorema clásico de la curva de Jordan establece que el complementario de una curva de Jordan en el plano Euclídeo,  $\mathbb{R}^2$ , tiene exactamente dos componentes conexas.

Efim Khalimsky intentó trasladar lo mismo al plano digital,  $\mathbb{Z}^2$ , con la topología producto de Khalimsky. En 1990, Khalimsky, Kopperman y Meyer publican el Teorema de Khalimsky. Hoy día conocemos resultados que dicen lo mismo cuyas pruebas son más breves.

**Proposición 4.3.9.** *Sea  $S$  una curva cerrada simple digital 4-conexa y  $x \in S$ .  $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 - S)$  tiene dos componentes 8-conexas, una de ellas yace en el interior de  $S$  y la otra en el exterior.*

*Demostración.* Primero, sean  $e$  e  $i$  puntos en el exterior y en el interior de  $S$ , respectivamente. Dado que no son 8-conectables en  $\mathbb{Z}^2 - S$  tenemos la existencia de las dos 8-componentes de  $\mathbb{Z}^2 - S$ .

Sea  $s \in S$ , entonces  $S - \{s\}$  es un 4-arco y  $\mathbb{Z}^2 - (S - \{x\})$  es 8-conexo. Ahora tomamos un arco que conecte  $e$  con  $i$ , este debe contener a  $s$  al no ser 8-conectables en  $\mathbb{Z}^2 - S$ . Al retirar  $s$  el arco se divide en dos componentes, una exterior (la que conecta con  $e$ ) y, una interior (la que conecta con  $i$ ).

Dado que  $s$  tiene 4-vecinos en  $\mathbb{Z}^2 - S$ , de forma que todo punto que conecte  $s$  con  $i$  o con  $e$  pasa por  $s$ . Así garantizamos que tanto el exterior como el interior de  $S$  son



8-conexos.  
[30], página 37. □

**Corolario 4.3.10.** *Cada punto de una curva cerrada simple digital 4-conexa es 4-adyacente a las dos componentes 8-conexas de su complementario.*

Estos dos resultados anteriores dan un gran primer esbozo sobre el teorema de la curva de Jordan digital. Tanto es así, que algunos autores lo consideran el propio teorema de Jordan.

Damos el Teorema de Jordan digital para el plano de Khalimsky. Se puede encontrar en [22], página 47.

**Teorema 4.3.11** (Teorema de la curva de Jordan para curvas digitales en khalimsky).

*Sea  $S$  una curva digital de Jordan  $i$ -conexa en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K)$ . Entonces  $\mathbb{Z}^2 - S$  tiene exactamente dos componentes  $j$ -conexas, con  $i, j \in \{4, 8\}$ ,  $i \neq j$ .*

*Una es acotada, el interior de  $S$  y, la otra es no acotada, el exterior de  $S$ .*

Hay resultados que garantizan también que si  $S$  es curva de Jordan, bajo ciertas condiciones de adyacencia, entonces  $S$  tiene exactamente un agujero, "topológicamente" hablando. [22], página 47, Proposición 3.9.

También se puede garantizar, bajo hipótesis de adyacencia, que el interior y el exterior de una curva de Jordan  $S$ , son conexos. [22], página 49, Proposición 3.10.

Y, de hecho, se puede asegurar que cada punto de una curva de Jordan  $S$  es adyacente al interior y al exterior de  $S$ . [22], página 49, Proposición 3.12.

## 4.4. Generalización de espacios en $\mathbb{Z}^n$ : Topología digital de Khalimsky en dimensión 3.

Se pueden generalizar los espacios digitales en dimensión  $n$ . Tomando los productos de  $n$  copias de la línea digital de Khalimsky.

En dimensión 3, se realiza igual que con el plano digital de Khalimsky, y se formarían los entornos mínimos de cada punto vía el producto cartesiano. Se toma el producto topológico  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K^2) \times (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ .

Hay 8 combinaciones posibles entre puntos pares (E) y puntos impares (O):

$$EEE, EEO, EOE, OEE, EOO, OEO, OOE, OOO$$

Se define de forma similar, por ejemplo,

$$EEE = E \times E \times E = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3; x, y, z \text{ son pares}\}.$$

Se tienen 3 adyacencias:

1.  $k(1, 3) = 2 \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 6 \implies$  6-adyacencia, representado de amarillo en la figura 4.8a.
2.  $k(2, 3) = \sum_{i=1}^2 2^{3-i} \cdot \frac{3!}{(n-i)! \cdot i!} = 18 \implies$  18-adyacencia, representado de rojo en la figura 4.8b.
3.  $k(3, 3) = \sum_{i=0}^2 2^{3-i} \cdot \frac{3!}{(n-i)! \cdot i!} = 26 \implies$  26-adyacencia, representado como la reunión de la 6-adyacencia y la 18-adyacencia en la figura 4.8b.

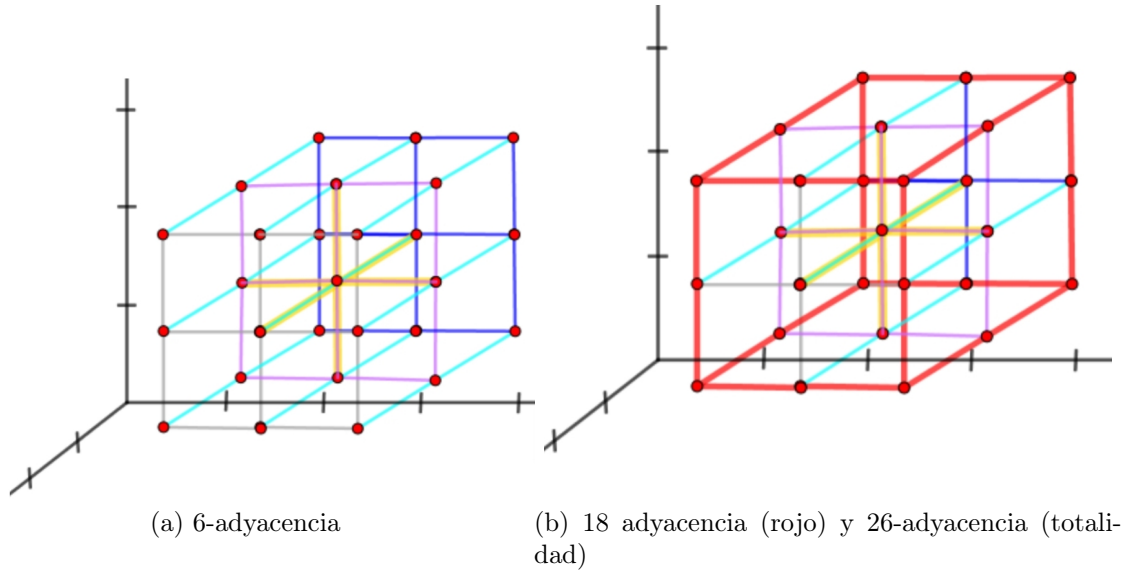


Figura 4.8: Conjuntos de adyacencia nuevas en  $\mathbb{Z}^3$ .

(a)  $N_6$  marcado en amarillo.

(b) Tanto el cubo rojo, que indica la 18-adyacencia ( $N_{18}$ ); como el  $N_6$  (en amarillo) formarían parte de  $N_{26}$ , siendo éste la reunión de ambos.

No obstante, las adyacencias que existían en dimensiones más bajas siguen estando como proyecciones. La 2-adyacencia de la línea, y la 4-adyacencia y la 8-adyacencia del plano.

Esta misma idea persiste en dimensiones superiores. De esta forma, en dimensión  $n$  estarán todas las adyacencias, desde las nuevas dadas por el operador de adyacencias hasta las de espacios inferiores.

Las  $k$ -adyacencias hasta ahora vistas están representadas en la figura 4.9.

Para mayor conocimiento véase [25].

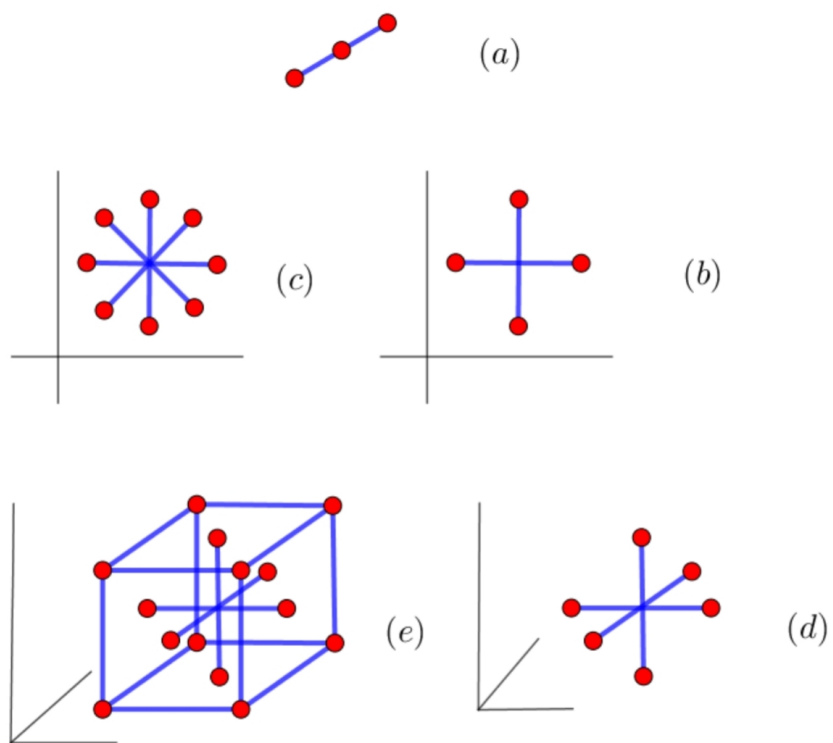


Figura 4.9: (a) Es la 2-adyacencia. (b) y (c) son la 4-adyacencia y la 8-adyacencia respectivamente. Y, (d) y (e) son la 6-adyacencia y 26-adyacencia respectivamente.

# Capítulo 5

## Continuidad sobre espacios digitales de Khalimsky.

La continuidad en espacios digitales en Khalimsky no sólo se limita a funciones continuas isótonas y continuas en A-espacios. (Véase continuidad en A-espacios)

### 5.1. Continuidad sobre la recta digital de Khalimsky.

Se verán funciones de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$  y se llegará a condiciones para funciones lipschitziana. (Se tomará como principal referencia [15])

Para el desarrollo se da la siguiente definición.

**Definición 5.1.1** (Relación paridad). *La relación binaria  $\alpha$  definida en  $\mathbb{Z}$  como:  $a\alpha b$  si  $a - b$  es par. Es decir, si  $a$  y  $b$  tienen la misma paridad.*

Es conveniente definir los objetos con los que se trabaja.

**Definición 5.1.2** (Definición de imagen digital). *En general, dada una  $k$ -adyacencia, y  $\mathbb{Z}$  el conjunto de enteros. Al par  $(X, k)$  con  $X \subset \mathbb{Z}^n$  se le llama imagen digital. Es decir, una imagen digital es un subconjunto (finito) de  $\mathbb{Z}^n$ , denotada por  $X$  o  $X_k$  si se quiere indicar la  $k$ -adyacencia.*

**Definición 5.1.3.** *Dados dos espacios métricos  $(X, d_X)$  y  $(Y, d_Y)$  donde  $d_X$  denota la métrica de  $X$  y  $d_Y$  la métrica de  $Y$ , una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice Lipschitz continua si existe una constante real  $K \geq 0$  tal que para todo  $x_1, x_2 \in X$ ,*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K(d_X(x_1, x_2)).$$

*A la constante  $K$  se le llama constante de Lipschitz o lipschitziana de  $f$ .*

*Si  $K = 1$  se denotará como **Lip-1**, y si  $K < 1$  se dirá contractiva.*

Se hará uso de la distancia inducida por la norma 1 o taxi:

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

o la distancia infinito o del máximo:

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Aclarar que en  $\mathbb{Z}$  con  $\mathcal{T}_K$ , ser Lip-1 implica la distancia del maximo. Esto se debe a los entornos mínimos de  $\mathcal{T}_K$  pueden ser referidos a esta distancia.

Recordar que al ser A-espacios,  $f(N^{\mathcal{T}_K}(x)) \subset N^{\mathcal{T}_K}(f(x))$  o equivalentemente.  $N^{\mathcal{T}_K}(x) \subset f^{-1}(N^{\mathcal{T}_K}(f(x)))$ .

Para aplicaciones de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$  se puede dar el siguiente resultado.

**Teorema 5.1.4** (Continuidad sobre la recta entera o digital). *Una aplicación  $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  es continua, si y sólo si,*

(1)  $f$  es Lip-1.

(2) Para todo  $x$  par, si  $f(x)$  no está relacionado por  $\alpha$  con  $x$ ,  $f(x \pm 1) = f(x)$ .

*Demostración.* Supongamos  $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  continua entre A-espacios.

(1) Si  $f$  no es Lip-1, entonces, existe un  $n$  tal que  $|f(n+1) - f(n)| \geq 2$ , y de forma que  $\{n, n+1\}$  sería conexo. Por ello,  $f(\{n, n+1\})$  habrían de diferenciar cada punto en más de dos unidades, no sería un conjunto conexo. Pero  $\{n, n+1\}$  si es conexo en Khalimsky. Lo cual no es posible siendo  $f$  continua.

(2) Supongamos que  $x$  es par y  $f(x)$  es impar. Entonces,  $U = f(\{x\})$  es abierto. Luego,  $V = f^{-1}(U)$  es abierto.

Al ser A-espacio, tenemos pues,  $N^{\mathcal{T}_K}(\{x\}) = \{x-1, x, x+1\} \subseteq V$ , es decir,

$$f(x) = f(x-1) \text{ y } f(x+1).$$

El argumento si la paridad es la contraria es similar.

Ahora veamos que si se cumple (1) y (2), es continua. Sea  $A = \{y-1, y, y+1\}$  donde  $y$  es par para algún elemento de la base. Hay que probar que  $f^{-1}(A)$  es abierto. Si  $x \in f^{-1}(A)$  es impar entonces  $\{x\}$  es un vecino de  $x$ .

Si  $x$  es par, o bien  $f(x)$  es impar, donde se tendría que  $f(x) = f(x-1)$  y  $f(x+1)$ . Además,  $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$  es vecino de  $x$ .

O, el otro caso,  $f(x)$  es par, donde  $f(x) = y$  y por ser Lip-1 se tiene que  $|f(x \pm 1) - y| \leq 1$  así que, de nuevo,  $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$  es vecino de  $x$ . Por ello, es continua.

[28]

□

**Corolario 5.1.5.** *Sea  $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ , entonces,*

1. Para todo  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = a \in \mathbb{Z}$  es continua,

2. Para todo  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = \pm x + C \in \mathbb{Z}$  es continua, donde  $C$  es una constante par.

*Demostración.*

(1) Se tiene trivialmente.

(2) De nuevo, comprobamos la caracterización del teorema: dados  $x, y \in \mathbb{Z}$  distintos con  $|x - y| \leq 1$ , aplicando  $f$ ,

$$|f(x) - f(y)| = |\pm x + C_1 - (\pm)y - C_2|$$

con  $C_1, C_2$  constantes pares. Renombramos  $C = C_1 - C_2$ . Por la desigualdad triangular se tiene,

$$|\pm x + C - (\pm)y| \leq |\pm x - (\pm)y| + |C|,$$

supongamos sin pérdida de generalidad que  $f(x) = x + C$  y  $f(y) = y$ . Como  $|x - y| \leq 1$ , tenemos,

$$|x + C - y - C| \leq |x - y| + |C| \leq 1 + 2k,$$

con  $k$  algún entero, y está multiplicada por dos pues viene de dos constantes pares ( $C = C_1 - C_2$ ).

Buscamos Lip-1,  $k = 0$  y  $|C| = 0$ . Si  $x \neq y$  la diferencia es par,  $x - (\pm)x - C$  es par. Como  $C$  es par, siempre se cumple.

Si no están relacionados por  $\alpha$ ,

$$|f(x \pm 1) - f(x)| = |\pm x \pm 1 + C - (\pm)1 - (\pm)x - C| = |x \pm 1 - x - (\pm)1| = 0,$$

□

**Proposición 5.1.6.** Sea  $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  función, entonces,  $f(x) = x + 1$  es discontinua.

*Demostración.* Si  $x$  es impar, entonces,  $x + 1$  es par. Tenemos,

$$f(N^{\mathcal{T}_K}(x)) = f(\{x\}) = \{x, x + 1, x + 2\} \subseteq N^{\mathcal{T}_K}(x + 1) = \{x, x + 1, x + 2\}$$

Si  $x$  es par, entonces,  $x + 1$  es impar. Luego,

$$\begin{aligned} f(N^{\mathcal{T}_K}(x)) &= f(\{x - 1, x, x + 1\}) = f(\{x - 1\}) \cup f(\{x\}) \cup f(\{x + 1\}) = \\ &= \{x - 1, x, x + 1\} \cup \{x + 1\} \cup \{x, x + 1, x + 2\} \not\subseteq N^{\mathcal{T}_K}(x + 1) = \{x + 1\}. \end{aligned}$$

Como falla para los  $x$  pares,  $f$  no puede ser continua. Contradicción. □

## 5.2. Aplicaciones continuas con dominio $\mathbb{Z}^n$ .

El siguiente resultado es una versión más corta del resultado dado por otros autores como [28], página 39.

**Proposición 5.2.1.** *Una función  $f : (\mathbb{Z}^n, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  continua es Lip-1,  $n \geq 1$ , con respecto a la distancia del máximo.*

*Demostración.* Por inducción sobre la dimensión  $n$ . Para  $n = 1$ , se tiene por un resultado anterior visto en la sección previa. Supongamos que es cierto para  $n - 1$ , veámoslo para  $n$ . Sea  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  continua, y sea  $x_0 \in \mathbb{Z}^{n-1}$ ,  $x_n \in \mathbb{Z}$  y  $x = (x_0, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Sin pérdida de generalidad, haciendo un cambio de variable a un  $x$  par<sup>1</sup>, supongamos que  $f(x) = 0$ . Hay dos casos posibles:

Caso 1:  $x_n$  es impar, entonces,  $f(x + (0, \dots, 0, 1)) = 0$  y, por hipótesis

$$f(x + (1, \dots, 1, 1)) \leq 1.$$

Caso 2:  $x_n$  es par, entonces,  $f(x + (1, \dots, 1, 0)) = 1$ , y, por hipótesis

$$f(x + (1, \dots, 1, 1)) = 1.$$

Sea como sea,  $f$  crece a lo más en 1, si tomamos el mismo procedimiento en cada coordenada. Se puede concluir que  $f$  es Lip-1.

[29], Proposition 3.2. □

**Definición 5.2.2** (Función separadamente continua). *Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios topológicos. Sea  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , se dice que  $f$  es separadamente continua si para cualquier  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$  se tiene que,*

$$y \rightarrow f(x_0, y), y \in Y,$$

$$x \rightarrow f(x, y_0), x \in X$$

*son funciones continuas.*

Se puede dar el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.3.** *Sea  $f : (\mathbb{Z}^n, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  es continua, si y sólo si,  $f$  es separadamente continua.*

*Demostración.* Si  $f$  fuera continua se tiene claro que es separadamente continua.

Recíprocamente, sea  $f$  separadamente continua. Queremos ver que la imagen inversa del conjunto  $A = \{y - 1, y, y + 1\}$ , con  $y$  par, es abierta.

Sea  $x \in f^{-1}(A)$ . Entonces,  $N^{\mathcal{T}_K}(x) \subset f^{-1}(A)$ .

$$N^{\mathcal{T}_K}(x) = \begin{cases} |x_i - z_i| \leq 1, z \in \mathbb{Z}^n; & \text{si } x_i \text{ es par,} \\ x_i = z_i, z \in \mathbb{Z}^n; & \text{si } x_i \text{ es impar} \end{cases} \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Se justifica con mayor detalle en los comentarios previos a la Proposition 3.2. en [29]

Supongamos que hay  $s$  índices para los cuales  $|x_i - z_i| = 1$ . Podemos ir aproximando  $x$  a  $z$  con el siguiente algoritmo:

$$x^{j+1} = x^j + (0, 0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0), \quad j = \{0, \dots, s-1\}$$

estando  $\pm 1$  en la posición  $j$ -ésima.

Cuando se alcanza  $x^{j+1}$  estamos a una unidad más cerca de  $z$ . Entonces, podemos concluir que para  $k = s-2$ , a lo más difieren en 1, es decir,  $|x^{s-1} - z| \leq 1$ . De hecho, como hay exactamente  $s$  coordenadas donde difieren en 1, es una igualdad.

Ahora bien, si  $f(x)$  es impar. Por el teorema de la continuidad sobre la recta digital, concluimos que  $f(x^{j+1}) = f(x^j)$ . En particular,  $f(x) = f(z)$  y  $z \in f^{-1}(A)$ .

Por otra parte, si  $f(x)$  es par, entonces  $f(x^{j+1}) = f(x^j) \pm 1$  para algún  $j$ . Pero  $f(x^{j+1})$  es impar y debe ser constante para el resto de  $j$ . Por ello,  $f(z) \in A$  y  $z \in f^{-1}$ .

[28], página 40. □

Se da una versión del Teorema del Valor Medio adaptado a espacios digitales.

**Teorema 5.2.4** (Teorema del Valor Medio). *Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{Z}$  dos funciones continuas con  $I = [a, b]_{\mathbb{Z}}$  intervalo discreto. Supongamos que existen  $s, t \in I$  con  $f(s) \geq g(s)$  y  $f(t) \leq g(t)$ . Entonces, existe un punto  $p \in I \cap [s, t]_{\mathbb{Z}}$  tal que  $f(p) = g(p)$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $s \leq t$  sin pérdida de generalidad.

Vamos a dividir  $\mathbb{Z}$  en dos partes:

$$M = \{x \in \mathbb{Z}, f(x) \geq g(x)\} \cap [s, t]_{\mathbb{Z}},$$

$$N = \{x \in \mathbb{Z}, f(x) \leq g(x)\} \cap [s, t]_{\mathbb{Z}}.$$

Observar que tanto  $m$  como  $M$  son distintos del vacío pues contienen al menos a  $t$  y a  $s$ , respectivamente. También,  $m \cap M = \{x \in \mathbb{Z}, f(x) = g(x)\}$ .

Si  $p = s \implies M = \{s\} \subseteq N$ ;  $f(s) = g(s)$ . Y, si  $p = t \implies N = \{t\} \subseteq M$ ;  $f(t) = g(t)$ . Ambos casos darían fin al resultado.

Si  $p \neq s, t$  podemos decir que  $s+1 \leq p \leq t-1$ . Y, entonces,

$$f(p) \geq f(s+1) \rightarrow p \in M \implies f(p) \geq g(p),$$

$$f(p) \leq f(t-1) \rightarrow p \in N \implies f(p) \leq g(p).$$

Como  $f, g$  son continuas, tienen que ser Lip-1 por la caracterización.

Sólo hay dos casos donde  $f(p) \neq g(p)$ :  $f(p) = g(p) + 1$  y  $f(p+1) = g(p+1) - 1$ .

Si  $p \not\alpha f(p) \implies g(p) + 1 = f(p+1) = f(p) = g(p+1) - 1$ , donde  $\not\alpha$  denota la negación de la relación  $\alpha$ .  $\implies g(p) + 2 = g(p+1)$  Contradicción.

Si  $p \alpha f(p)$  entonces no queda otra que  $p \not\alpha g(p) \implies g(p+1) = g(p)$  ambos pares, es decir,  $g(p) \pm 2 = g(p+1)$  Contradicción. Por tanto,  $f(p) = g(p)$ .

[28], página 41. □



### 5.3. El problema de la continuidad de Khalimsky.

En esta sección se tratará de generalizar el concepto de continuidad en espacios digitales. Se encontrarán serias dificultades. Tratando de conseguir una definición que sea versátil y eficaz para aplicaciones de  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ , se concluirá que la continuidad tal y como se tendría en espacios euclídeos, la continuidad "natural", no es posible. Para cualquier consulta véase [28], capítulo 4.

Se notará  $\mathcal{T}_K^n$  como el producto topológico de  $n$  copias de  $\mathcal{T}_K$ .

**Definición 5.3.1.** Para dos espacios  $(X, \mathcal{T}_K^{n_0})$  y  $(Y, \mathcal{T}_K^{n_1})$ , una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice **Khalimsky continua** para cada punto  $x \in X$ , si  $f$  es continua para cada punto  $x$  con el producto topológico de Khalimsky.

En la definición anterior no se ha tenido en cuenta la  $k$ -adyacencia con la que trabajan los espacios digitales. Se tiene la siguiente.

**Definición 5.3.2.** Sean  $k_0, k_1$  dos adyacencia;  $n_0, n_1$  dos dimensiones.

Sean  $(X, k_0)$  y  $(Y, k_1)$  dos espacios topológicos discretos en  $\mathbb{Z}^{n_0}$  y  $\mathbb{Z}^{n_1}$  (respectivamente) con  $\mathcal{T}_K$ .

Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **digitalmente  $(k_0, k_1)$ -continua**, si y sólo si, para todo  $x_0 \in X, \epsilon \in \mathbb{N}$  y  $N_{k_1}^{\mathcal{T}_K^{n_1}}(f(x_0), \epsilon) \subseteq Y$ , hay un  $\delta \in \mathbb{N}$  tal que  $N_{k_0}^{\mathcal{T}_K^{n_0}}(x_0, \delta) \subseteq X$ , satisface

$$f(N_{k_0}^{\mathcal{T}_K^{n_0}}(x_0, \delta)) \subseteq N_{k_1}^{\mathcal{T}_K^{n_1}}(f(x_0), \epsilon).$$

Previamente decir que la continuidad vista mediante la adyacencia no es igual que vista por abiertos, o vista por la topología relativa. Es un hecho que se ha procurado dejar patente durante el trabajo.

Para ilustrar esa diferencia damos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.3.3.** Sea  $X = \{x_0 = (2, 1), x_1 = (1, 2), x_2 = (0, 3)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$  e  $Y = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ .

Vamos a tomar sobre  $X$  la 8-adyacencia. Observar que los tres puntos están unidos por una arista que representa la conexión del conjunto  $\{x_0, x_1, x_2\}$ .

$Y$ , vamos a tomar sobre  $Y$  la 2-adyacencia, entonces, tenemos que  $Y$  es conexo también. Pero ojo,  $X$  es 8-conexo e  $Y$  es 2-conexo, es decir, hay que trabajar con ellos como grafos de conexión.

Los entornos de  $X$  e  $Y$  son los entornos resultantes de cortar los conjuntos de 8-adyacencia y 2-adyacencia (respectivamente) de cada punto.

$$N_8(X) = N_8(x_2) \cap N_8(x_1) \cap N_8(x_0) = \{x_2, (2, 0), (1, 3), x_1, (1, 1), (2, 2), x_0\},$$

representado en la figura 5.1a.

$$N_2(Y) = N_2(1) \cap N_2(2) \cap N_2(3) = \{1, 2, 3\} = Y.$$

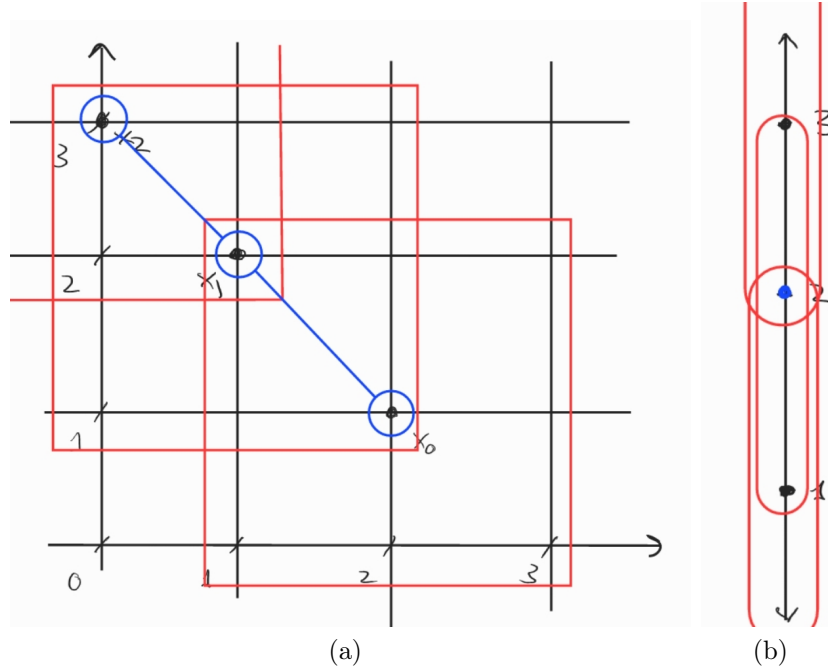


Figura 5.1: (a) En rojo los 8-entornos y en azul señalada la relación de 8-adyacencia que une a los puntos. (b) En rojo los 2-entornos.

Ahora, tomemos los entornos mínimos de Khalimsky de  $X$  e  $Y$  (visto cada uno en su topología).

$$N^{\mathcal{T}_K^2}(X) = \{(-1, 0), x_2, (1, 3), x_1, (1, 1), x_0, (3, 1)\}, \quad N^{\mathcal{T}_K^1}(Y) = \{1, 2, 3\} = Y,$$

representados en la figura 5.2a.

Comprobemos que no son los mismos conjuntos:

$$N_8(X) \cap N^{\mathcal{T}_K^2}(X) = \{x_2, x_1, x_0, (1, 3), (1, 1)\} \implies N_8(x) \neq N^{\mathcal{T}_K^2}(X).$$

y,

$$N_2(Y) \cap N^{\mathcal{T}_K^1}(Y) = \{1, 2, 3\} \implies N_2(y) = N^{\mathcal{T}_K^1}(Y).$$

En conclusión, **no** podemos decir en general que la continuidad es igual vista como entornos mínimos de Khalimsky que como conjuntos de adyacencia.

Como los entornos mínimos no son iguales, ahí yacerá la principal diferencia al aplicar la continuidad. Entonces, veamos donde falla específicamente.

Vamos a tomar los conjuntos  $X$  e  $Y$  del ejemplo anterior. Y aplicamos la siguiente función,

$$\begin{aligned} f &: (X, \mathcal{T}_K^2) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_K^1) \\ f(x_1) &= f(x_2) = 1, \quad f(x_0) = 3. \end{aligned}$$

Observar que como aplicación Khalimsky continua si preserva los entornos mínimos, es decir, es continua con la topología relativa de cada conjunto, pues,

$$f(N(x_i) \cap X) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

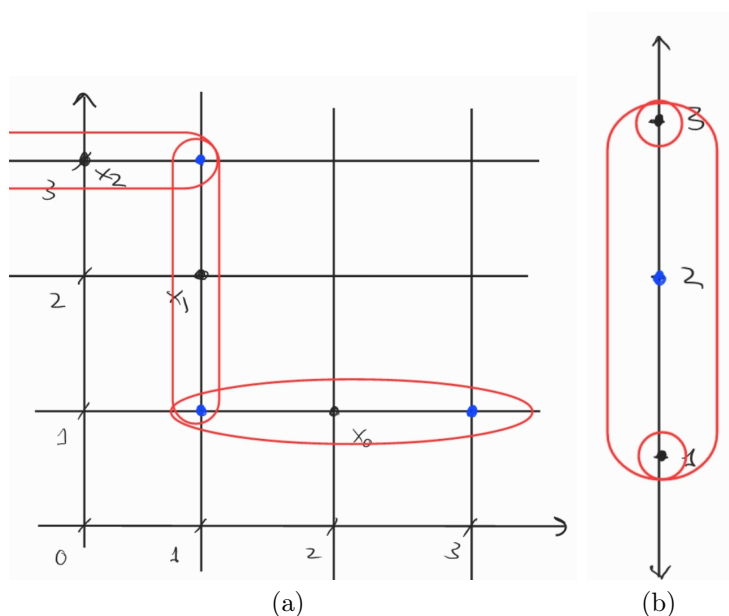


Figura 5.2: (a) En rojo los entornos mínimos del plano de Khalimsky. (b) En rojo los entornos mínimos de la recta de Khalimsky.

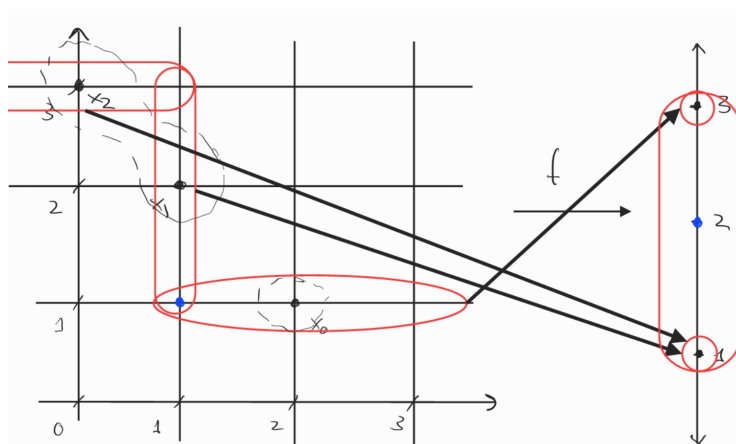


Figura 5.3: En rojo los entornos de Khalimsky según la paridad del punto. E, indicadas con flechas la función  $f$ .

luego,  $f(x_i) = 1$  si  $i = 1, 2$  y  $f(x_i) = 3$  si  $i = 0$ .

Se observa en la figura 5.3 como los entornos mínimos sobre la recta están contenidos en el entorno mínimo del par 2.

Observemos que como aplicación de  $(X, 8) \rightarrow (Y, 2)$ ,  $f$  no es continua. Se puede ver en la figura 5.4 como la 2-adyacencia no se cumple precisamente en el punto pintado en azul. Es decir, no se preserva la 8-adyacencia sobre la 2-adyacencia.

Para evitar este tipo de problemas de no preservación de las adyacencias se recurre a un concepto más específico de continuidad, que tenga en cuenta la situación geométrica de los puntos.

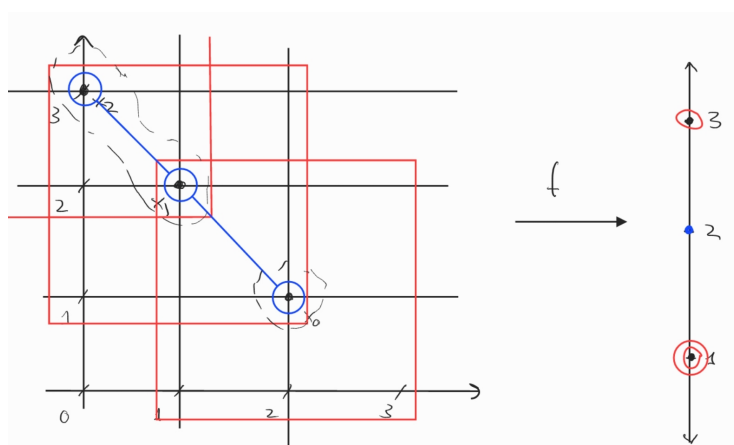


Figura 5.4: En rojo los entornos de Khalimsky según la paridad del punto. Y, indicadas con flechas la función  $f$ .

**Definición 5.3.4.** Sean  $X_{n_0, k_0}$  e  $Y_{n_1, k_1}$  dos espacios topológicos con  $k_i$ -adyacencias con  $i = 0, 1$  y  $x \in X$ . Diremos que una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es **Khalimsky digitalmente**  $(k_0, k_1)$ -continua, notada  $KD(k_0, k_1)$ , sobre el punto  $x$  si

- (1)  $f$  es Khalimsky continua sobre  $x$  y,
- (2)  $f$  es digitalmente  $(k_0, k_1)$ -continua sobre  $x \in X$ .

En resumen, diremos que  $f$  es  $KD(k_0, k_1)$  si es Khalimsky continua y a la vez respeta la transformación de la adyacencia de un espacio a la adyacencia del otro.

En el siguiente ejemplo se estudia como las condiciones (1) y (2) no son excluyentes ni incluyentes. Un ejemplo de satisfacer (1) y no (2) sería el ejemplo visto anteriormente. El siguiente muestra como puede ser (2) y no (1).

**Ejemplo 5.3.5.** Sean  $X_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ ,  $X_2 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (2, 2)\}$ , y  $X_3 = \{(3, 2), (3, 1)\}$ . Y, sea  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ .

Sea  $f : X_{2,4} \rightarrow Y_{1,2}$  tal que  $f(X_1) = \{0\}$ ,  $f(X_2) = \{1\}$ , y  $f(X_3) = \{2\}$ .

Vemos como para el punto  $x = (2, 2)$  se cumple (2), en la figura 5.5 pero no se puede cumplir (1), en la figura 5.6. La razón es que  $X \subset N_{\mathbb{T}_k^2}(x)$  pero  $f(X) \not\subset \{1\}$ .

Estas definiciones son insuficientes para dar un concepto de continuidad versátil porque necesitan de la adyacencia propia de los espacios digitales para su funcionamiento. Por ello, se dan los siguientes conceptos.

**Definición 5.3.6** ( $k$ -vecindad topológica de  $x_0$ ). Si  $N_k(x_0, \epsilon)$  es una  $k$ -vecindad topológica de  $x_0$  en  $(X, \mathcal{T}_X^n)$  se denotará por  $N_k^*(x_0, \epsilon)$ , y se llamará  $k$ -vecindad topológica de  $x_0$  con radio  $\epsilon \in \mathbb{N}$ .

Observar que siempre se puede definir con una formulación que lo restrinja a la topología de  $X$ . De este modo:

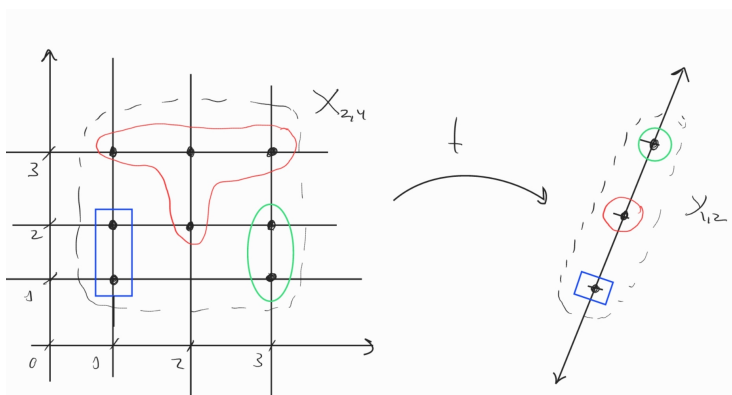


Figura 5.5: Asociados por color y forma.

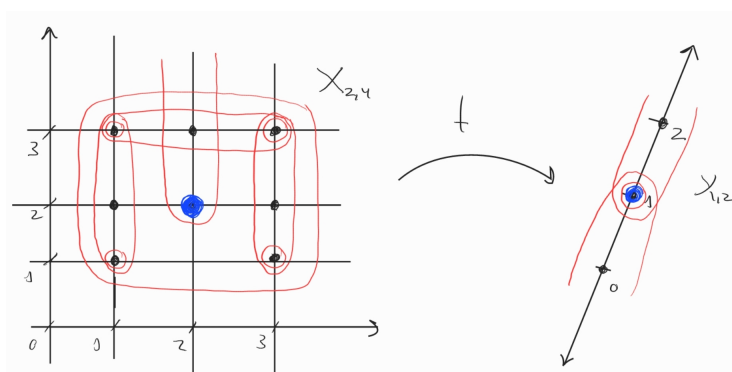


Figura 5.6: Entornos por cada punto de  $X$  frente a los entornos de  $Y$ . Marcado en azul el punto  $x$ .

$$N_k^*(x_0, \epsilon) = N_k(x_0, \epsilon) \cap N^{T_k^n}(x_0) \cap X.$$

Claro está, la definición dada dice que se da  $N_k^*$  si  $N_k$  es vecindad topológica. Esto puede darse si  $N_k^*$  es el vacío o no existe incluso.

**Ejemplo 5.3.7.** Sea el espacio  $X_{\mathbb{Z}}^2$  definido por el conjunto  $\{x_i; i \in [0, 7]_{\mathbb{Z}}\}$ . Veamos los  $N_8^*$  con  $x_0 = (2, 2)$ :

$$N_8^*(x_0, 1) = \{x_i; i \in [0, 4]_{\mathbb{Z}}\}, N_8^*(x_0, 2) = \{x_i; i \in [0, 5]_{\mathbb{Z}}\},$$

$$N_8^*(x_0, 3) = X - \{(1, 5)\}, N_8^*(x_0, 4) = X.$$

Y se comprueba que no hay más posibles.

**Definición 5.3.8.** Para dos espacios  $X_{k_0, n_0}$  y  $Y_{k_1, n_1}$ , una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice  $(k_0, k_1)$ -continua en un punto  $x \in X$  si para cualquier  $N_{k_1}^*(x_0, \epsilon) \subset Y$ , hay un  $N_{k_0}^*(x, \delta) \subset X$  tal que

$$f(N_{k_0}^*(x, \delta) \subset N_{k_1}^*(f(x), \epsilon) \text{ para algún } \epsilon \in \mathbb{N}.$$

La  $(k_0, k_1)$ -continuidad es "útil" para desarrollar teoría de homotopía en espacios digitales. Con ella se genera el concepto de  $(k_0, k_1)$ -homotopía y variantes de la misma, que escapan del objetivo de este trabajo. (Véase si se desea [9] [8])

Con la siguiente definición se concluye la lista de conceptos sobre la continuidad digital.

**Definición 5.3.9.** Sean  $X_{n_0, k_0}$  e  $Y_{n_1, k_1}$  dos espacios topológicos, una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice **Khalimsky- $(k_0, k_1)$ -continua**, notada  $K-(k_0, k_1)$ , sobre el punto  $x$ , si

- (1)  $f$  es Khalimsky continua en el punto  $x$ ,  $y$ ,
- (2)  $f$  es  $(k_0, k_1)$ -continua sobre  $x \in X$ .

En resumen, diremos que  $f$  es  $K-(k_0, k_1)$  si es Khalimsky continua y a la vez respeta la transformación de la adyacencia de un espacio a la adyacencia del otro.

Entonces, ser  $KD-(k_0, k_1)$  y ser  $K-(k_0, k_1)$  está relacionado. Se puede ver que no es una relación suficiente y necesaria. (Véase [28], página 56 y 57)

Tenemos el siguiente teorema que no demostraremos, pero da dicha relación. Carece de interés técnico y es de una longitud considerable. Se puede encontrar en [28], página 58.

**Teorema 5.3.10** ( $K-(k_0, k_1)$  implica  $KD-(k_0, k_1)$ ). Sean  $X_{n_0, k_0}$  e  $Y_{n_1, k_1}$  dos espacios topológicos con  $n_i = \{1, 2, 3\}$ , y, una aplicación  $f : X \rightarrow Y$ . Entonces,  $K-(k_0, k_1)$  continuidad de  $f$  implica  $KD-(k_0, k_1)$  continuidad de  $f$ .

**Observación 5.3.11.** Es importante recalcar que funciones "naturales" como la traslación de un objeto no funcionan con estas definiciones, pues depende de la  $k$ -adyacencia y de los entornos mínimos de cada punto.

Véase la figura 5.7, donde estamos tomando la función continua

$$\tau_C : (\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K^2) \rightarrow (\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_K^2) : \tau_C(x, y) = (x - 1, y),$$

trasladando el conjunto

$$C = \{(2, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 3)\}.$$

Se puede observar como en la parte de la figura izquierda es curva digital, de Jordan de hecho. Y a la derecha son cuatro puntos desconexos.

Si se considera la 8-adyacencia sin tomar la topología de Khalimsky ambas parten son curvas (digitales).

Se pueden dar más resultados. En este trabajo basta con haber expuesto los problemas que derivan detrás de la idea de continuidad en espacios digitales, según queramos entornos, adyacencia o continuidad mediante distancias.

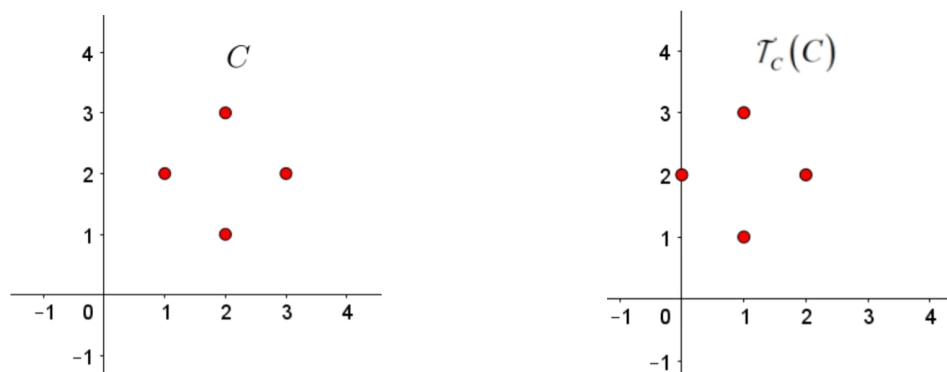


Figura 5.7: Ejemplo de Traslación incompatible con la continuidad.

Por último, respecto a este conflicto, se concluye con una tabla para ver cómo se relacionan los conceptos se han ido definiendo entre sí.

Leeremos que  $X$  implica  $Y$ , con  $X$  las entradas por filas e  $Y$  las entradas por columnas.

$X/Y$	Khal. cont.	KD- $(k_0, k_1)$	$(k_0, k_1)$ -cont.	K- $(k_0, k_1)$
Khalimsky continuidad	Si	No	No	No
KD- $(k_0, k_1)$	Si	Si	No	No
$(k_0, k_1)$ -continuidad	No	No	Si	No
K- $(k_0, k_1)$	Si	Si	Si	Si

Se observa como el último concepto es el más general pues se relaciona con todos. No obstante, la continuidad digital está limitada y sigue en vías de estudio.

### Referencia a las Funciones Semi-Lipschitzianas.

Se ha dado al principio del capítulo la definición de función Lipschitziana. A veces, no es suficiente con tener controlado el aumento de una función según sus elementos. Por ello, se recurre al concepto de Semi-Lipschitzianas.

Es posible desarrollar toda una teoría de continuidad con estas funciones y es posible además adaptarla a ideas digitales. Como se escapa del objetivo del trabajo, basta con decir que existe y referenciarla, [11].

## Capítulo 6

# Topología de Marcus-Wyse.

En este capítulo se estudiará la topología de Marcus-Wyse sobre  $\mathbb{Z}^2$  introducida en 1970 en el artículo [2].

En esta nueva topología, el concepto tanto de conexión como de adyacencia cambia. Por ello, algunos autores han optado por desarrollar las teorías matemáticas en esta nueva topología y no en Khalimsky. Lo cierto es que respecto a literatura matemática se tiene en gran cantidad por ambas partes.

Conforme se detallan propiedades y resultados de ésta se verán las diferencias con  $\mathcal{T}_K$ . Además, podremos dar también un Teorema de Jordan para esta topología.

Veamos pues, otra interpretación de la pantalla digital, la dada por la Topología de Marcus-Wyse, que denotaremos por M-W a partir de ahora.

### 6.1. Conceptos básicos de la topología de Marcus-Wyse.

**Definición 6.1.1** (Base para la topología de Marcus-Wyse en  $\mathbb{Z}^2$ ). *Dado un punto  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  definimos la familia  $\mathcal{B}_{MW} = \{M(x, y)\}_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2}$ , donde*

$$M(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{si } x + y \text{ es impar,} \\ \{(x, y), (x - 1, y), (x + 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1)\}, & \text{si } x + y \text{ es par} \end{cases}$$

**Proposición 6.1.2.** *La familia  $\mathcal{B}_{MW}$  es base para una topología  $\mathcal{T}_{MW}$  sobre  $\mathbb{Z}^2$ , llamada topología de Marcus-Wyse (M-W) sobre  $\mathbb{Z}^2$ .*

*Demostración.* Demostraremos que:

1. Para todo  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , existe  $M \in MW; (x, y) \in M$
2. Si  $(x, y) \in M_1 \cap M_2$  con  $M_1, M_2 \in MW$  entonces, existe  $M_3 \in MW; (x, y) \in M_3 \subset M_1 \cap M_2$ .



1) Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  entonces tomamos  $M = M(x, y)$   
 Así,  $M \in MW$  y  $(x, y) \in M$ .

2) Sean  $M_1, M_2 \in MW$  y  $(x, y) \in M_1 \cap M_2$ .  
 Supondremos  $M_1 \neq M_2$ . Sean  $M_1 = M(x_1, y_1)$  y  $M_2 = M(x_2, y_2)$ .  
 Hay tres casos posibles:

2.1) Si  $x_1 + y_1$  y  $x_2 + y_2$  son impares, entonces,

$$M_1 = \{(x_1, y_1)\} \text{ y } M_2 = \{(x_2, y_2)\}, \text{ por tanto, } M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

2.2) Si  $x_1 + y_1$  es impar y  $x_2 + y_2$  es par, aquí hay dos subcasos:

$$M_1 = \{(x_1, y_1)\} \text{ y } M_2 = \{(x_2, y_2), (x_2, y_2 \pm 1), (x_2 \pm 1, y_2)\}$$

2.2.1) Si  $(x_2, y_2)$  es 4-vecino de  $(x_1, y_1)$ , entonces  $M_3 = M_1 \cap M_2 = \{(x_1, y_1)\}$

2.2.2) Si no es 4-vecino no se cortan en ningún punto.

2.3) Si  $x_1 + y_1, x_2 + y_2$  son pares, y,  $M_1$  y  $M_2$  se cortan en algún punto, entonces, se llega a que la intersección es uno de los puntos del conjunto:

$$\{(x_1 \pm 1, y_1), (x_1, y_1 \pm 1), (x_2, y_2 \pm 1), (x_2 \pm 1, y_2)\}$$

de donde se obtiene el resultado.

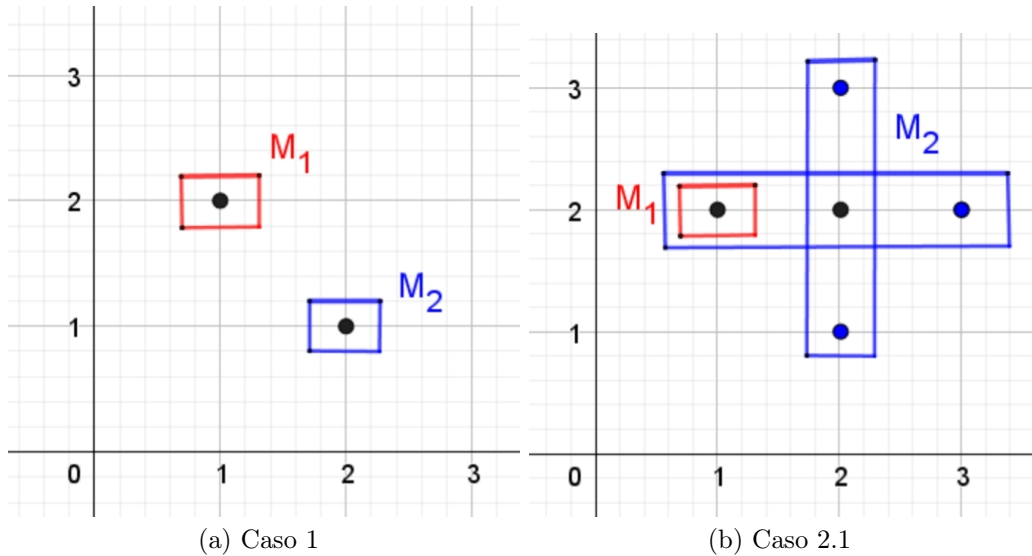


Figura 6.1: Casos posibles (I).

Los distintos casos ilustrados en 6.1 y 6.2. □

**Nota 6.1.3.** A partir de ahora por abuso de lenguaje a partir de ahora. Cuando la suma de coordenadas de un punto en el plano sea par (impar), se dirá que su entorno es par (impar) o, simplemente entorno par (impar).

Se dirá también que los puntos que generan entornos pares (impares) son pares (impares), refiriéndose así a que la suma de sus coordenadas en el plano entero es par (impar).

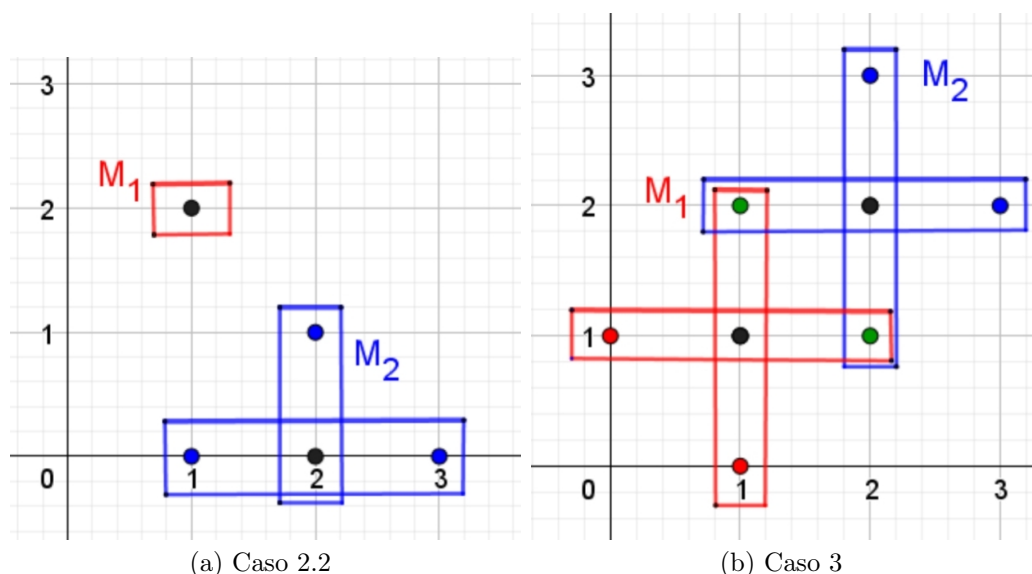


Figura 6.2: Casos posibles (II).

(d) Los puntos en verde son los punto de la intersección.

**Proposición 6.1.4.** *El espacio topológico  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$  es un  $A$ -espacio.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del hecho que cada punto admite un entorno básico finito. Los entornos mínimos se corresponden a los elementos de la base  $\mathcal{B}_{MW}$ .  $\square$

**Proposición 6.1.5.**

(a) *En  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$ , los puntos impares son abiertos y los puntos pares son cerrados.*

(b)  *$(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$  es  $T_{\frac{1}{2}}$ .*

(c)  *$(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$  es  $T_0$ .*

*Demostración.*

(a) Sea  $p = (x, y)$  un punto impar. Entonces, el entorno de  $p$  en  $\mathcal{T}_{MW}$  dado por la base es  $\{p\}$ , Y su clausura es  $cl(p) = \{(x, y), M(x \pm 1, y), M(x, y \pm 1)\}$ . Dado que no coincide con  $M(x, y)$ , no puede ser cerrado. Pero si es abierto pues es entorno de sí mismo.

Por otro lado si  $p$  es un punto par. Se tiene que no es abierto pues no es entorno de sí mismo. Pero la clausura en este caso si coincide con  $M(x, y)$ , por tanto es cerrado pero no abierto en  $\mathcal{T}_{MW}$ .

(b) Por (a) tenemos que todo punto es abierto o cerrado, entonces,  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$  es  $T_{\frac{1}{2}}$ .

(c)  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$  es  $T_0$  pues la clausura de puntos distintos es distinta para todos los puntos.  $\square$

Se puede dar el siguiente resultado.

**Proposición 6.1.6.** *La adyacencia,  $A_{\mathcal{T}_{MW}}$ , en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$  viene dada por la 4-adyacencia.*

*Demostración.* Hay dos casos, según los puntos sean pares o impares:

1. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  par, entonces,

$$A_{\mathcal{T}_{MW}}(x, y) = N_4(x, y) \cup N_4(x, y) - \{(x, y)\} = N_4(x, y) - \{(x, y)\}.$$

2. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  impar, entonces,

$$A_{\mathcal{T}_{MW}}(x, y) = \{(x, y)\} \cup N_4(x, y) - \{(x, y)\} = N_4(x, y) - \{(x, y)\}.$$

□

Se puede dar un grafo,  $G_{A_{\mathcal{T}_{MW}}}$ , asociado a la adyacencia del plano digital de M-W. Se representa en la figura 6.3.

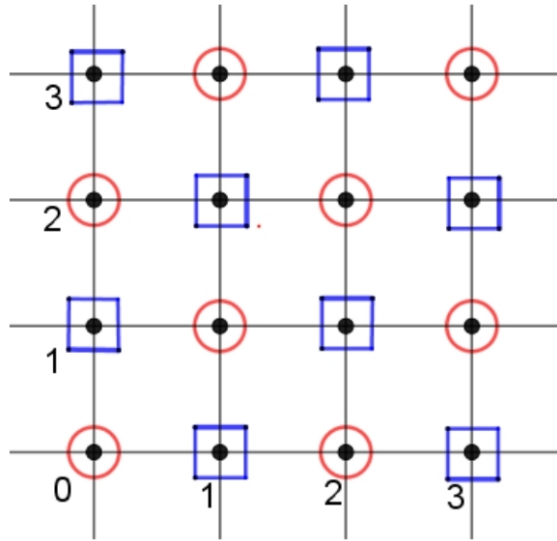


Figura 6.3: Los cuadrados son puntos abiertos (impares) y, los círculos son los puntos cerrados (pares).

Observar que la 4-adyacencia es la adyacencia de  $\mathcal{T}_{MW}$ , pero  $N_4(x, y)$  no es entorno mínimo para todos los puntos  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  en  $\mathcal{T}_{MW}$ .

Decir también que se puede intercambiar la asociación hecha respecto a los entornos mínimos en  $\mathcal{B}_{MW}$  de los pares por los impares, se obtiene una topología homeomorfa.

## 6.2. Preorden de especialización del plano digital de Marcus-Wyse.

En M-W, se tiene un preorden como en Khalimsky. Definido del siguiente modo:

**Definición 6.2.1** (Preorden para  $\mathcal{T}_{MW}$ ). *Sea el preorden  $\leq_{\mathcal{T}_{MW}}$ , decimos que  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} y$  si cumplen que  $y \in N_4(x)$ .*

Puede parecer artificial la definición pero se justifica con el siguiente resultado.

**Proposición 6.2.2.**  $\leq_{\mathcal{T}_{MW}}$  es un preorden.

*Demostración.* Afirmamos no sólo que  $\leq_{\mathcal{T}_{MW}}$  es un preorden, sino que además, vamos a demostrar la razón por la que se usan los entornos  $N_4(x)$  y no  $N^{\mathcal{T}_{MW}}(x)$ .

Decimos que  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} y$ , si y sólo si,  $y \in N^{\mathcal{T}_{MW}}(x)$  en  $\mathcal{T}_{MW}$ . Veamos que es preorden:

**Reflexiva.** Si  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} x$  entonces,  $x \in N^{\mathcal{T}_{MW}}(x)$ , que es inmediato. Hasta aquí no hay restricciones en los entornos mínimos, valen tanto pares como impares.

**Transitiva.** Sea  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} y$  e  $y \leq_{\mathcal{T}_{MW}} z$ .

Primeramente observemos que si  $N^{\mathcal{T}_{MW}}(x) = \{x\}$  se tendría que,  $x = y$ , análogo con  $y$  y  $z$ . Sabiendo eso, podemos suponer que  $x$  es par o ser reduciría al caso donde los 3 puntos son iguales.

Tomando esa consideración,  $y \in N^{\mathcal{T}_{MW}}(x) = N_4(x)$ , pero entonces, quitando el caso trivial  $x = y$ ,  $y$  es impar. Entonces,  $z \in N^{\mathcal{T}_{MW}}(y) = \{y\}$  que implica que  $y = z$ .

En conclusión,  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} y$ , si y sólo si,  $y \in N_4(x)$ .

Faltaría ver que no es **antisimétrica**. Para ello, basta comprobar que si  $y \in N_4(x)$  se tiene inmediato, quitando el caso trivial,  $x = y$ , que  $N^{\mathcal{T}_{MW}}(y) = \{y\}$  y  $x \notin \{y\}$ .  $\square$

Con esta definición de preorden, se puede, usando la caracterización que vimos en los A-espacios, dar un concepto de conexión propio del espacio. Es más, se puede dar los conjuntos conexos del mismo e inducir un digrafo de conexión.

El preorden de especialización según sus casos es:

1. Sea un punto  $p = (x, y)$  par. Dado  $q = (x', y')$ , hay dos opciones factibles según el preorden de especialización:

1.1. Si  $q \leq_{MW} p$  si  $q \in cl(p)$ , entonces,  $q = p$ .

1.2. Si  $p \leq_{MW} q$  si  $p \in cl(q)$ , entonces, no queda otra que  $q$  sea alguno de los puntos impares de la forma  $(x \pm 1, y)$  o  $(x, y \pm 1)$ . Sea como sea, en el grafo de especialización (digrafo de conexión), las flechas saldrían de  $p$  para entrar en  $q$ .

Conclusión, de cada  $p$  par salen 4 flechas.

2. Sea  $p = (x, y)$  impar. Dado  $q = (x', y')$ , hay dos opciones factibles según el preorden de especialización

2.1. Si  $q \leq_{MW} p$  si  $q \in cl(p)$ , entonces,  $q$  es de la forma  $(x \pm 1, y)$  o  $(x, y \pm 1)$ . Puntos desde los que salen las flechas hacia  $p$ .

2.2. Si  $p \leq_{MW} q$  si  $p \in cl(q)$ , entonces,  $p = q$ .

En conclusión se tiene que de cada punto  $p$  impar, entran 4 flechas.

Con esta información se puede dar su digrafo de conexión,  $G_{\leq \mathcal{T}_{MW}}$ , representado en la figura 6.4.

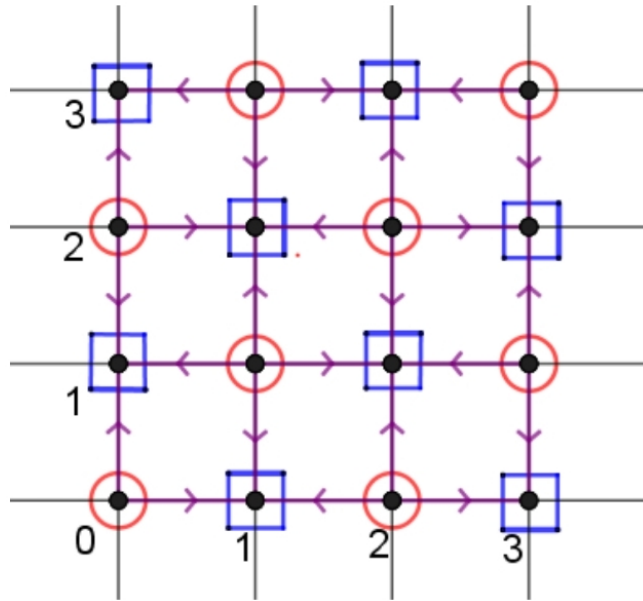


Figura 6.4: Digrafo de conexión de  $\mathcal{T}_{MW}$  inducido por la relación de preorden  $\leq_{\mathcal{T}_{MW}}$ .

De nuevo, al igual que con Khalimsky, que los conjuntos conexos en  $\mathcal{T}_{MW}$  se pueden obtener comprobando si cada par de puntos del conjunto es conexo en  $G_{\leq \mathcal{T}_{MW}}$ . Es decir el siguiente resultado.

**Proposición 6.2.3** (4-adyacencia como criterio de conexión). *Sean  $x$  e  $y$  dos puntos distintos en el plano entero con la topología  $\mathcal{T}_{MW}$ . Se tiene que,*

$$\{x, y\} \text{ es conexo, si y sólo si, } x \text{ e } y \text{ son 4-adyacentes}$$

*Demostración.* Es inmediato comprobar el resultado. Por los razonamientos previos, sabemos que  $\{x, y\}$  es conexo, si y sólo si,  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} y$  o  $y \leq_{\mathcal{T}_{MW}} x$ , que esto es, si y sólo si, alguno está en el entorno mínimo del otro.

Hay dos tipos de entornos, los unitarios (impares) y los 4-adyacentes (pares). Como  $x$  e  $y$  son distintos, sólo queda el entorno par.

Entonces,  $x \leq_{\mathcal{T}_{MW}} y$  o  $y \leq_{\mathcal{T}_{MW}} x$ , si y sólo si,  $x$  e  $y$  son 4-adyacentes. □

### 6.3. La topología de Marcus-Wyse como producto topológico.

Se plantea a continuación si M-W puede verse como producto topológico.

En M-W, los puntos impares marcados en azul en la figura 6.4, son aquellos sobre los que inciden los 4-entornos de los pares. Pero pueden ser resultado de dos sumas

distintas, 'par+par' e 'impar+impar'. Entonces, podemos distinguir dos tipos de puntos pares. De igual modo podría hacerse con los puntos pares marcados en rojo en la figura 6.4.

Este hecho aporta ciertas pistas sobre la estructura que hay tras M-W. En particular, se verá que no puede obtenerse como producto topológico de dos topologías.

Se plantean los siguientes casos:

(1) Si M-W fuera producto topológico de  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \times (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  coincidiría con Khalimsky en el plano digital.

(2) Supongamos que M-W viene del producto de  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$  con  $\mathbb{Z}$  y la 2-adyacencia como topología. Y supongamos el grafo de adyacencia dado por el producto de las adyacencia tomado de forma "natural". Se tendría la figura 6.5a.

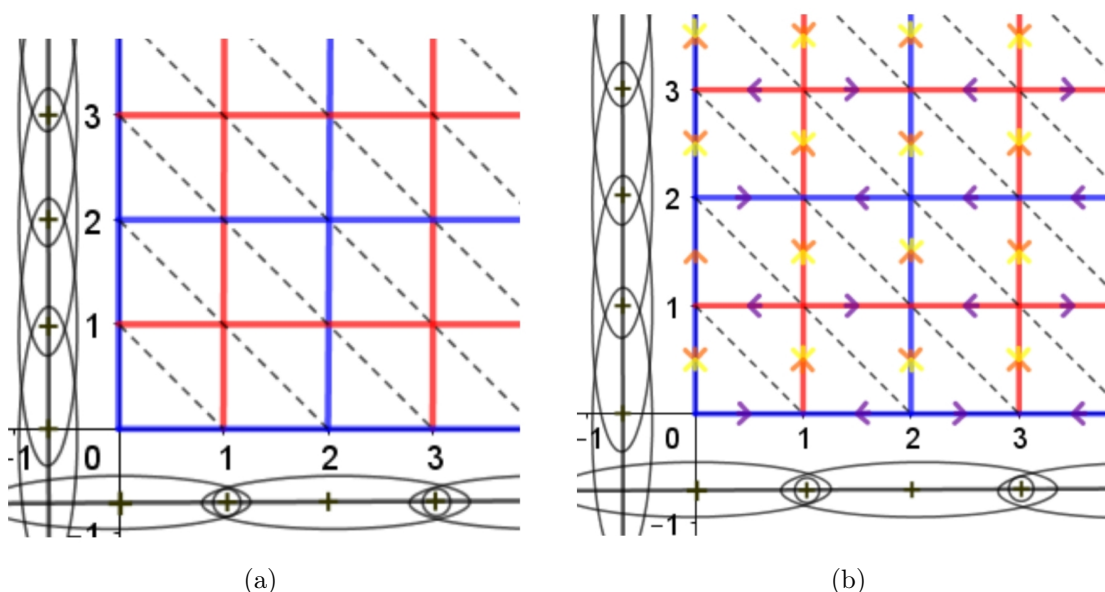


Figura 6.5: (a) Producto topológico de la recta de Khalimsky con la recta de la 2-adyacencia. (b) Indicadas las flechas inducidas por el preorden "natural".

Observar en la figura 6.5a que las diagonales marcadas con líneas discontinuas vienen dadas por parte del producto con la 2-adyacencia. Con ello basta para concluir que no es la topología de M-W. Pues M-W no tiene diagonales en su grafo de adyacencia.

Pero más aún, tomemos el preorden de la línea digital y el para la 2-adyacencia el preorden:  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $x \leq y$  y  $y \leq x$ , es decir, de todo conjunto 2-adyacente salen y entran dos flechas hacia los puntos a la izquierda y a la derecha del centro. Se toma el digrado asociado representado en la figura 6.5b.

Se observa como en el digrafo se confunde las direcciones indicadas por las flechas.

En conclusión, M-W no se puede dar por producto dadas las incoherencias con el preorden, que además, no concuerdan con el dado por M-W.

(3) Podría surgir la pregunta de si existe una topología sobre la línea tal que hecho el producto con otra: Khalimsky, la 2-adyacencia o ella misma; resultase M-W.

Se toma la topología de M-W y se proyecta sobre las rectas horizontales y sobre las rectas verticales. Se obtienen las figuras 6.6a y 6.6b.

Se observa que las rectas verticales que pasan por  $(0, \textit{impar})$  se rigen por Khalimsky y, las que pasan por  $(0, \textit{par})$  se rigen por Khalismky retardada. De igual forma, las rectas horizontales que pasan por  $(\textit{impar}, 0)$  se rigen por  $\mathcal{T}_K$  y, las que pasan por  $(\textit{par}, 0)$  se rigen por  $\mathcal{T}_{K_r}$ .

Luego los puntos, según sea su origen, son distinguibles en dos tipos: los que aparecen en un tipo de recta o en otro.

Se puede concluir también que no existe esa topología tal que el producto nos diera M-W. No en el sentido "natural", pues aparecen entrecruzadas dos bases topológicas: una en los impares y otra en los pares. De otro modo en las proyecciones habria que verse que en las distintas rectas se da la misma topología.

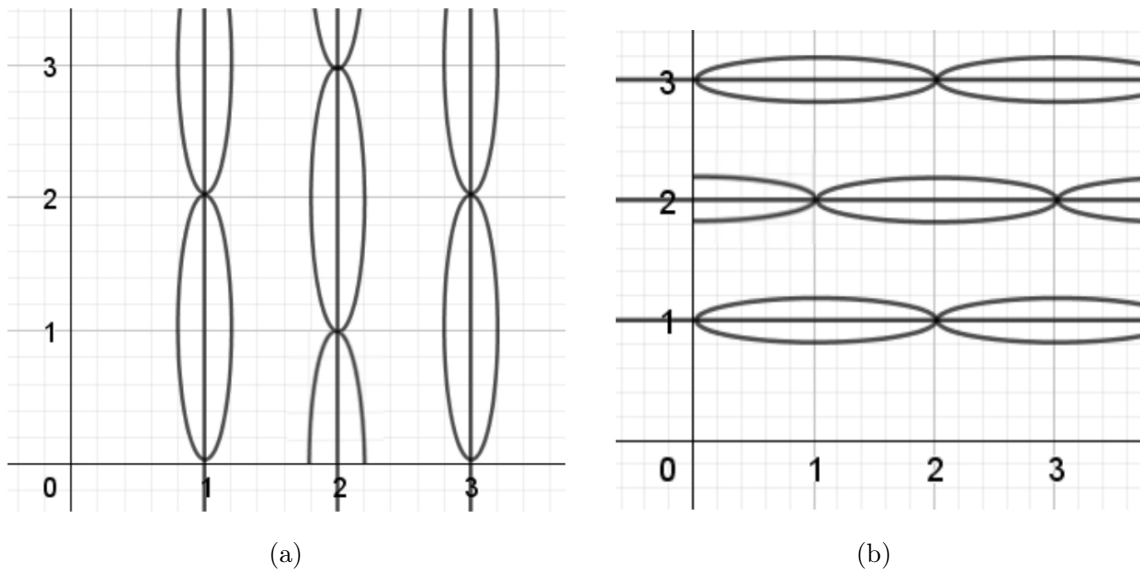


Figura 6.6: (a) Proyección vertical. (b) Proyección horizontal.

### 6.3.0.1. Marcus-Wyse como digrafos relacionados.

Se ha concluido que M-W no se puede obtener como un producto topológico. La idea de esta subsección es desprendernos de la topología por un momento y trabajar sólo con grafos y digrafos.

Tras ver las proyecciones verticales y horizontales de M-W sobre el plano. Podemos tomar cada 'línea' de enteros, bien vertical o bien horizontal, y se puede considerar como un digrado con direcciones las dadas por el preorden heredado por las líneas digitales bien con  $\mathcal{T}_K$  o bien con  $\mathcal{T}_{K_r}$ .

Se puede pues, asociar las cadenas verticales con las horizontales. Y por las relaciones incluidas en el apéndice de digrafos, considerando la unión de los grafos, se concluye que generan un (di)grafo que recubre el plano entero. De hecho, por como obtuvimos las líneas, es M-W.

Proceso representado en la figura 6.7.

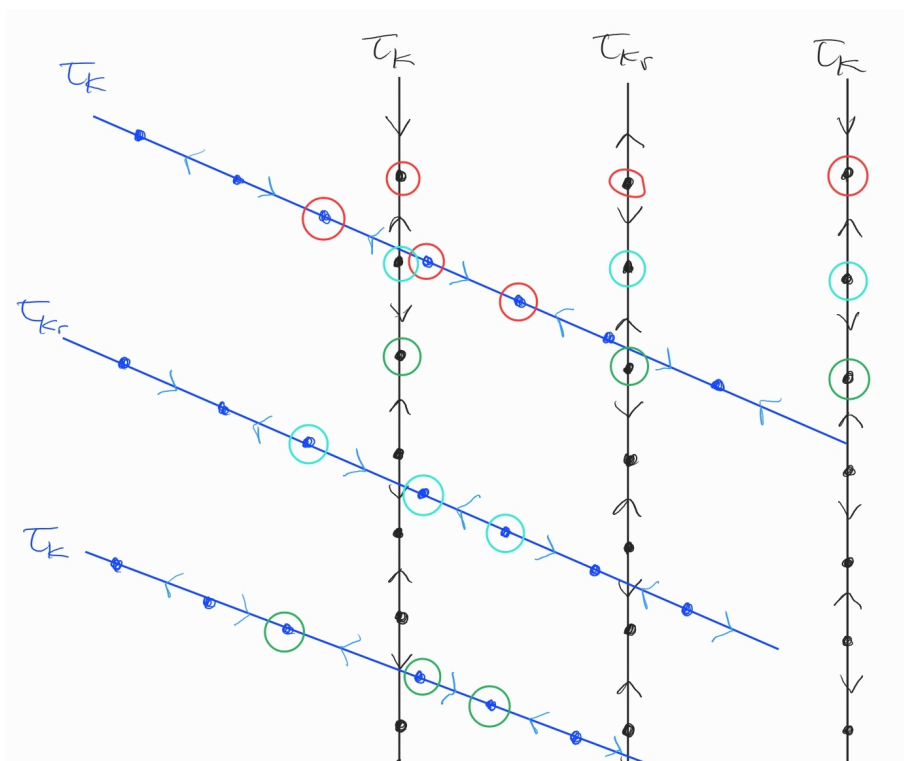


Figura 6.7: Unión de los grafos lineales verticales con los horizontales. Se unen por los puntos rodeados del mismo color, de esa forma se identifican los vértices.

## 6.4. Topología de Marcus-Wyse como cociente de Khalimsky.

Los entornos de 4-adyacencia del plano digital de Khalimsky se pueden ver en M-W de manera que la 4-adyacencia es el entorno mínimo para M-W cuando  $x + y$  es par. Por ello, M-W es un subespacio de Khalimsky.

De hecho, es homeomorfo al subespacio de Khalimsky dado por los puntos puros. La función  $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  dada por

$$\varphi(x, y) = (x - y + 1, x + y + 1) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Más aún, se puede hacer un cociente del plano digital de Khalimsky sobre M-W.

Para ello, el siguiente resultado.

**Proposición 6.4.1** (M-W como cociente de Khalimsky).

Sea la función  $\rho : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  dada por:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} (2k, 2l), & \text{si } (x, y) = (2k, 2l), \\ (2k, 2l + 2), & \text{si } (x, y) = (2k, 2l + 1), \\ (2k + 2, 2l), & \text{si } (x, y) = (2k + 1, 2l), \\ (2k + 1, 2l + 1), & \text{si } (x, y) = (2k + 1, 2l + 1) \end{cases} \quad (6.1)$$

Aplicando  $\rho$  sobre  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  con Khalimsky, obtenemos la topología de M-W.



*Demostración.* Se reduce a dos casos posibles:

1.  $(x, y)$  con misma paridad:  $\rho(x, y) = (x, y)$ . Si  $(x, y)$  eran ambos impares, el entorno base de Khalimsky era él mismo,  $(x, y)$ . Y, si eran pares, el entorno era el conjunto de 8-adyacencia. Sea como fuere,  $x + y$  es par, entonces, en M-W corresponde a la 4-adyacencia.

2.  $(x, y)$  con distinta paridad:  $\rho(x, y) = (x, y + 1)$  ó  $(x + 1, y)$ . Que sumando las coordenadas queda  $x + y + 1$  es impar.

Falta ver la continuidad de  $\rho$ . Manda entornos en entornos por tanto, es continua. Y es sobreyectiva pues todo elemento de M-W proviene de un  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  para Khalimsky.

[25]

□

## 6.5. Limitaciones de Marcus-Wyse.

Ejemplo tomado de [22], ejemplo 2.3. concretamente.

Se representa en la siguiente figura 6.8.

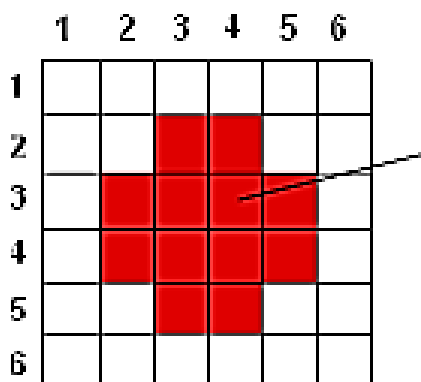


Figura 6.8: Imagen obtenida de [22]

A la imagen digital se le llamará  $S$  tal y como aparece en la fuente. Se le asocia su representación en el plano digital y se dará su interior, clausura y su frontera en  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$ .

Para la digitalización simplemente a cada cuadrado de color rojo se le asocia sus coordenadas en  $\mathbb{Z}^2$ , representado en la figura 6.9a.

Tomando la definición de interior de un conjunto, se tiene que  $S$  es el representado en la figura 6.9a, y el interior de  $S$ , es el representado en la figura, 6.9b. Damos su clausura en la figura 6.10.

Sabiendo que,  $Fr(S) = cl(S) - int(S)$ , se tiene la frontera en la figura 6.11a.

La frontera obtenida no corresponde con la idea "intuitiva" de frontera, que sería la ilustrada en la figura 6.11b.

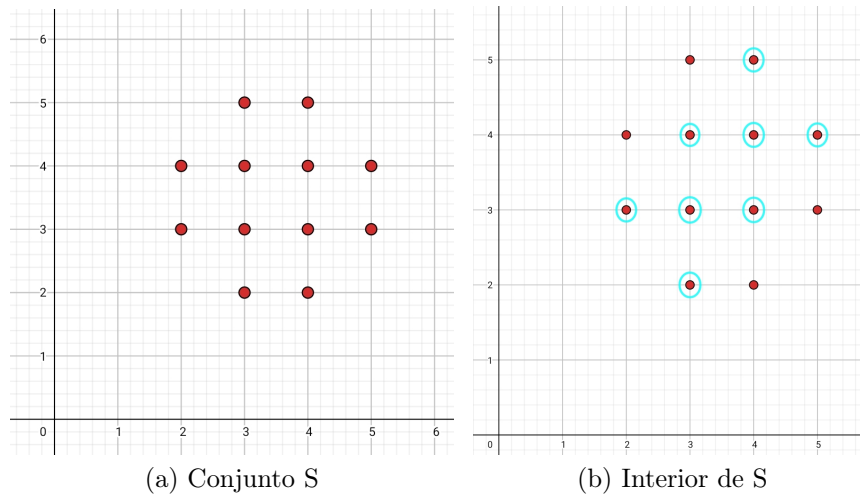


Figura 6.9: (a) Traducción al plano digital (M-W) de  $S$ . (b) En círculos azules marcado el interior de  $S$ .

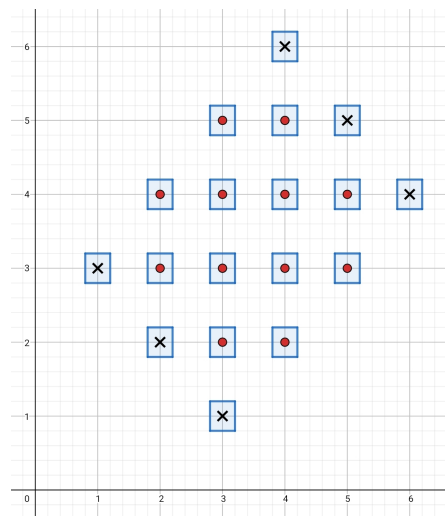


Figura 6.10: Representamos con X los puntos que se añaden para la clausura.

El concepto de frontera en el plano digital de M-W, no es "coherente" con la intuición. De ese 'fallo', se deduce que debe actualizarse el concepto de frontera para M-W, o usar otra topología que sí se adapte a la intuición y uso del concepto clásico, cosa que resulta realmente complejo.

Se podría definir el siguiente concepto, tomado de [22], página 27.

**Definición 6.5.1** (Frontera digital). *La frontera de  $S$  es el conjunto de puntos de  $S$  que tienen 4-vecinos en  $cl(S)$ .*

Se comprueba que usando esta definición en el conjunto  $S$  representado en la figura 6.9a, su frontera digital es la representada en la figura 6.11b.

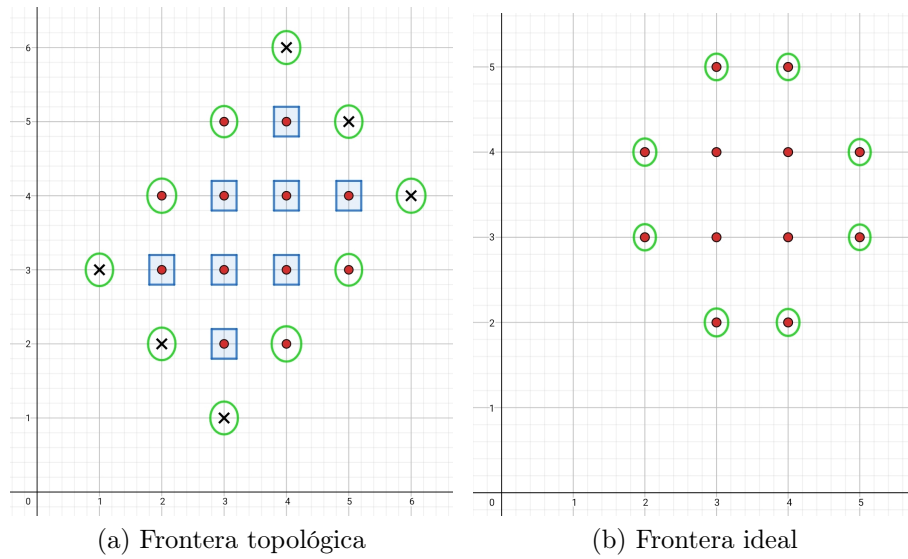


Figura 6.11: (a) Con X los puntos añadidos para la frontera y, los puntos en círculos verdes son la frontera. (b) Frontera ideal en el plano digital.

## 6.6. Teorema de Jordan para Marcus-Wyse.

Una vez vista la topología de Marcus-Wyse, se puede también, al igual que con Khalimsky, dar resultados sobre las curvas de Jordan digitales.

Los conceptos visto sobre arcos, caminos y curvas digitales en el capítulo de Khalimsky se traducen de forma "natural" a  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$ . Basta adaptar cada concepto al grafo de adyacencia de  $\mathcal{T}_{MW}$ .

Se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 6.6.1** (Teorema de la curva de Jordan digital para la topología  $\mathcal{T}_{MW}$ ). *Sea  $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_{MW})$ . Entonces, el complementario de toda curva estricta de Jordan de M-W, tiene exactamente dos componentes conexas.*

*Demostración.* En el teorema usaremos que la topología de M-W en  $\mathbb{Z}^2$  es homeomorfa al subespacio de todos los puntos puros en el plano digital, i.e., el plano de Khalimsky.

Aunque lo daremos por cierto luego aclararemos la idea que hay detrás.

Sea  $\phi : X \rightarrow Y$  definido por  $\phi(x) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ .  $\phi(X)$  es el conjunto de todos los puntos puros de  $Y$ . Equipado con la topología tenemos que son homeomorfos  $X$  y  $Y$ .

De hecho, la imagen de cualquier curva digital de Jordan (Khalimsky)  $J$  en  $X$  es una curva digital de Jordan en  $Y$ . Además,  $Y - \phi(J)$  tiene exactamente 2 componentes conexas. Con este teorema se busca demostrar que  $\phi(X) - \phi(J)$  también tiene exactamente 2 componentes conexas.

Esta claro que tiene al menos 2 por el homeomorfismo. La clave está entonces en demostrar que tiene exactamente 2.

Supongamos  $a, a' \in A \cap \phi(X)$ , y consideramos un arco digital de la forma

$$\{a = a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(s)=a'}\}$$

contenido en  $Y - \phi(J)$ .

Vamos a probar que este arco digital puede ser reemplazado por unos construidos con sólo puntos puros. Asumamos que  $a^{(j)}$  es un punto mixto.

Entonces, su predecesor y su sucesor son puntos puros. Podemos asumir unos puntos concretos y después sólo trasladarlos en el plano. Consideremos pues,  $a^{(j-1)} = (0, 0)$ ,  $a^{(j)} = (0, 1)$ , y  $a^{(j+1)} = (0, 2)$ . Para probar el resultado tendríamos que probar que se reemplazar por un punto puro cercano,  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$ , de otro modo  $\phi(J)$  no sería conexo.

Para ello, supongamos que  $(-1, 1), (1, 1) \in \phi(J)$ . Entonces,  $(-1, 1)$  sería adyacente a  $(1, 1)$ , y por hipótesis, éste tiene exactamente dos adyacentes en  $\phi(J)$ .

Sin embargo, ninguno de los posibles adyacentes puede ser  $(-1, 1)$ , ninguno pertenece a  $\phi(J)$ . Y, en toda curva de Jordan, si hay punto intermedio debe de estar en la curva. Esto es una contradicción.

Entonces, sólo puede estar  $(-1, 1)$  o  $(1, 1)$  en  $\phi(J)$ .

Este procedimiento se puede realizar de forma recursiva, finitamente. Al final del proceso tendríamos que todos los puntos mixtos se han intercambiado con puntos puros. Tal y como queríamos demostrar.

[10], página 9. □

## Capítulo 7

# Topología de Šlapal.

La topología de Šlapal es una innovación sobre las topologías digitales. Con ella su autor buscaba subsanar los "fallos" en curvas de Jordan digitales para Khalimsky y eliminar las limitaciones estudiadas para la topología de Marcus-Wyse.

En este capítulo se aspira principalmente a cumplir dos objetivos:

Primero, se verá como mediante la topología de Šlapal, se puede lograr llegar a las otras topologías de referencia vía cocientes.

Y, segundo, se introducirá de forma muy breve los espacios de clausura. Y se dará un Teorema de la curva de Jordan para un operador de clausura específico.

No obstante, este capítulo no busca profundizar ni en la Topología de Šlapal ni en sus resultados.

Se definen primero las estructuras de grafos de las que se hará uso.

**Definición 7.0.1.** Sea  $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ . Un grafo sobre  $\mathbb{Z}^2$  es llamado:

(a) Grafo cuadrado de tipo  $n$  si dado dos puntos  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$  son adyacentes sii una de las siguientes condiciones se da,

$$(1) |y_1 - y_2| = 1 \text{ y } x_1 = x_2 = nk \text{ para algún } k \in \mathbb{Z},$$

$$(2) |x_1 - x_2| = 1 \text{ y } y_1 = y_2 = nl \text{ para algún } l \in \mathbb{Z}.$$

(b) Grafo diagonal de tipo  $n$  si dado dos puntos  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$  son adyacentes sii una de las siguientes condiciones se da,

$$(1) y_1 - y_2 = x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ y } x_1 - nk = y_1 - nl \text{ para algún } k, l \in \mathbb{Z},$$

$$(2) y_1 - y_2 = x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ y } x_1 - nk = nl - y_1 \text{ para algún } k, l \in \mathbb{Z}.$$

(c) Un grafo cuadrado-diagonal de tipo  $n$  si dado dos puntos  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$  es unión de los tipos anteriores.

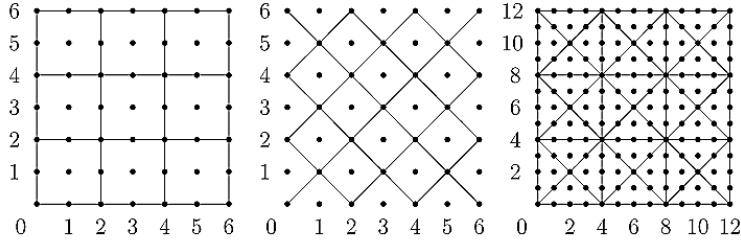


Figura 7.1: 1. Porción del grafo cuadrado. 2. Porción del grafo diagonal. 3. Porción del grafo cuadrado-diagonal.

**Nota 7.0.2.** Sea  $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . Notamos,

$$H_2(z) = \{(x-1, y), (x+1, y)\},$$

$$V_2(z) = \{(x, y-1), (x, y+1)\},$$

$$D_4(z) = H_2(z) \cup \{(x-1, y-1), (x+1, y-1)\},$$

$$U_4(z) = H_2(z) \cup \{(x-1, y+1), (x+1, y+1)\},$$

$$L_4(z) = V_2(z) \cup \{(x-1, y-1), (x-1, y+1)\},$$

$$R_4(z) = V_2(z) \cup \{(x+1, y-1), (x+1, y+1)\},$$

$$A_4(z) = H_2(z) \cup V_2(z),$$

$$A_8(z) = H_2(z) \cup L_4(z) \cup R_4(z) = V_2(z) \cup D_4(z) \cup U_4(z),$$

y podemos notar también,

$$A'_4(z) = A_8(z) - A_4(z).$$

El número del subíndice indica el tipo de adyacencia del conjunto como se hizo anteriormente. Ahora se da la base para la Topología de Šlapal.

**Definición 7.0.3.** Sea  $w$  la topología  $T_{\frac{1}{2}}$  de Alexandroff sobre  $\mathbb{Z}^2$  definida por la siguiente familia:

Dado  $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$w(z) = \begin{cases} \{z\} \cup A_8(z) & \text{si } x = 4k, y = 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup A'_4(z) & \text{si } x = 2 + 4k, y = 2 + 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup D_4(z) & \text{si } x = 2 + 4k, y = 1 + 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup U_4(z) & \text{si } x = 2 + 4k, y = 3 + 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup L_4(z) & \text{si } x = 1 + 4k, y = 2 + 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup R_4(z) & \text{si } x = 3 + 4k, y = 2 + 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup H_2(z) & \text{si } x = 2 + 4k, y = 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} \cup V_2(z) & \text{si } x = 4k, y = 2 + 4l, k, l \in \mathbb{Z}, \\ \{z\} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.1)$$

Se puede definir lo que el autor (Šlapal) denomina grafo de conexión aunque, según el desarrollo de este trabajo, se identifica con el grafo de adyacencia para la topología de Šlapal, y en este caso, se tiene que es la superposición del grafo cuadrado, el grafo diagonal y el grafo cuadrado-diagonal anteriormente definidos. Representado en la figura 7.2, y con él marcados los puntos abiertos y cerrados.

**Nota 7.0.4.** *En este capítulo por referencia al autor se denominará a los grafos de adyacencia como grafos de conexión.*

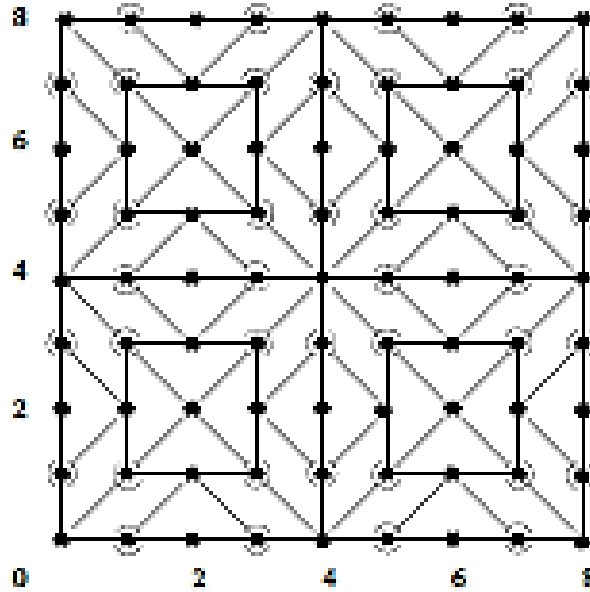


Figura 7.2: Una porción del grafo de conexión de  $w$ . Los puntos cerrados están rodeados y los abiertos no.

Con esta topología, se pueden dar resultados más 'generales' sin problemas de restricciones. Como los dados en sus trabajos: [16], [18].

## 7.1. Cocientes sobre la topología de Šlapal, $w$ .

Una de los temas más interesantes es la relación entre las tres topologías que llevamos vistas. Se verá a continuación como mediante  $w$  se llega a las topologías digitales de Khalimsky en el plano y Marcus-Wyse.

Sea  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  una aplicación sobreyectiva, dada por la siguiente definición: Para todo  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} (2k, 2l), & \text{si } (x, y) = (4k, 4l), \\ (2k, 2l + 1), & \text{si } (x, y) = A_4(4k, 4l + 2), \\ (2k + 1, 2l), & \text{si } (x, y) = A_4(4k + 2, 4l), \\ (2k + 1, 2l + 1), & \text{si } (x, y) = A'_4(4k + 2, 4l + 2) \end{cases} \quad (7.2)$$

donde  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

Entonces, se enuncia el siguiente resultado.

**Teorema 7.1.1.** *La topología de Khalimsky coincide con la topología cociente de  $w$  generada por la  $f$  anterior.*

*Demostración.* Ilustramos el cociente en la figura 7.3. Tras ello, el resultado queda como mera observación de dicha imagen. Para más detalle, [20] página 169.

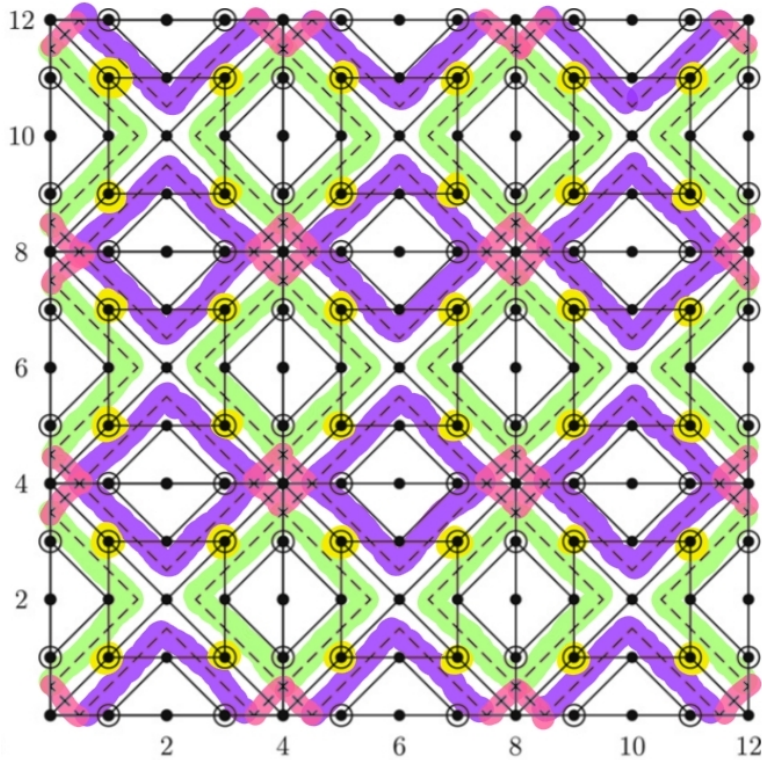


Figura 7.3: En rosa primera parte de  $f$ . En verde segunda parte de  $f$ . En morado tercera parte de  $f$ . Y, en amarillo la cuarta parte de  $f$ .

□

Sea  $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  una aplicación sobreyectiva, dada por la siguiente definición:  
Para todo  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$g(x, y) = \begin{cases} (k + l, l - k), & \text{si } (x, y) \in A_8(4k, 4l), k, l \in \mathbb{Z}^2, \\ (k + l + 1, l - k), & \text{si } (x, y) = (4k + 2, 4l + 2), k, l \in \mathbb{Z}^2 \\ & \text{con } k + l \text{ impar, o} \\ & (x, y) \in A_{12}(4k + 2, 4l + 2), k, l \in \mathbb{Z}^2 \\ & \text{con } k + l \text{ par} \end{cases} \quad (7.3)$$

donde  $A_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x = k \text{ y } |y - l| \leq 3 \text{ o } y = l \text{ y } |x - k| \leq 3\}$ .

Se tiene el siguiente teorema.



**Teorema 7.1.2.** *La topología de Marcus-Wyse coincide con la topología cociente de  $w$  generada por la  $g$  anterior.*

*Demostración.* Ilustramos el cociente en la figura 7.4. Tras ello dejamos la deducción del resultado. Para más conocimiento [20], página 170.

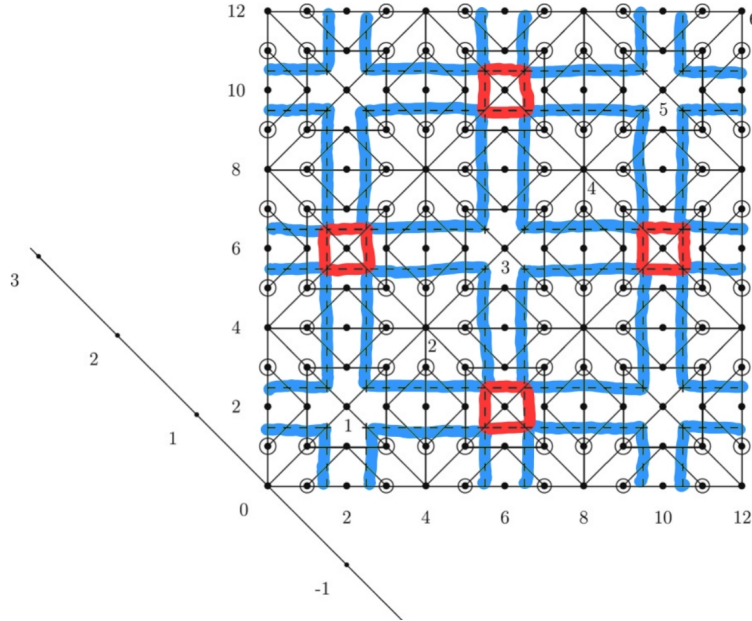


Figura 7.4: Los contornos azules son la primera parte de  $g$  y los rojos son la segunda parte de  $g$ .

□

Se puede definir una topología adicional.

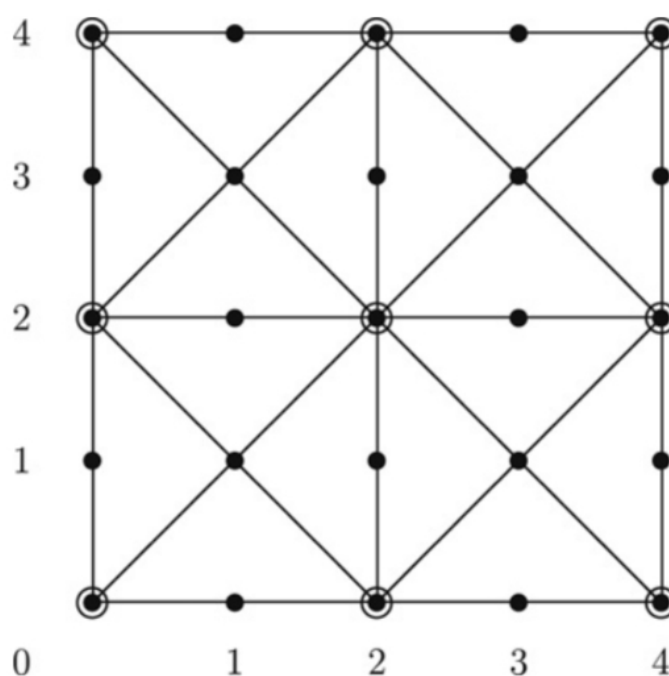
**Definición 7.1.3.** *Damos la siguiente  $T_{\frac{1}{2}}$ -topología,  $v$ , mediante la familia:*  
 Para todo  $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$v(z) = \begin{cases} H_2(\mathbb{Z}) & \text{si } x \text{ es impar e } y \text{ es par,} \\ V_2(\mathbb{Z}) & \text{si } x \text{ es par e } y \text{ es impar,} \\ A'_2(\mathbb{Z}) & \text{si } x, y \text{ son impares,} \\ \{z\} & \text{si } x, y \text{ son pares} \end{cases} \quad (7.4)$$

Una porción del grafo de adyacencia de  $v$  es la figura 7.5

Sea  $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  una aplicación sobreyectiva, dada por la siguiente definición:  
 Para todo  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$h(x, y) = \begin{cases} (2k, 2l), & \text{si } (x, y) = A_8(4k, 4l), \\ (2k, 2l + 1), & \text{si } (x, y) = A_4(4k, 4l + 2), \\ (2k + 1, 2l), & \text{si } (x, y) = A_4(4k + 2, 4l), \\ (2k + 1, 2l + 1), & \text{si } (x, y) = (4k + 2, 4l + 2) \end{cases} \quad (7.5)$$

Figura 7.5: Grafo de conexión de la topología  $v$ .

donde  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

Y, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 7.1.4.** *La topología  $v$  coincide con la topología cociente de  $w$  generada por la  $h$  anterior.*

*Demostración.* Ilustramos el cociente en la figura 7.6. Tras ello, el resultado se deduce como mera observación de dicha imagen. Para mayor consulta [20], página 171.

□

## 7.2. Operador clausura definido por Šlapal.

Un operador de clausura,  $\varphi$ , sobre un conjunto  $X$  es una aplicación tal que  $\varphi : X \rightarrow X$  verifica:

- i.  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ ,
- ii.  $A \subseteq \varphi(A)$  para cualquier  $A \subseteq X$ ,
- iii.  $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$  para cualesquiera  $A, B \subseteq X$ ,

Si además, se verifica

- iv.  $\varphi\varphi A = \varphi A$  para cualesquiera  $A \subseteq X$ .

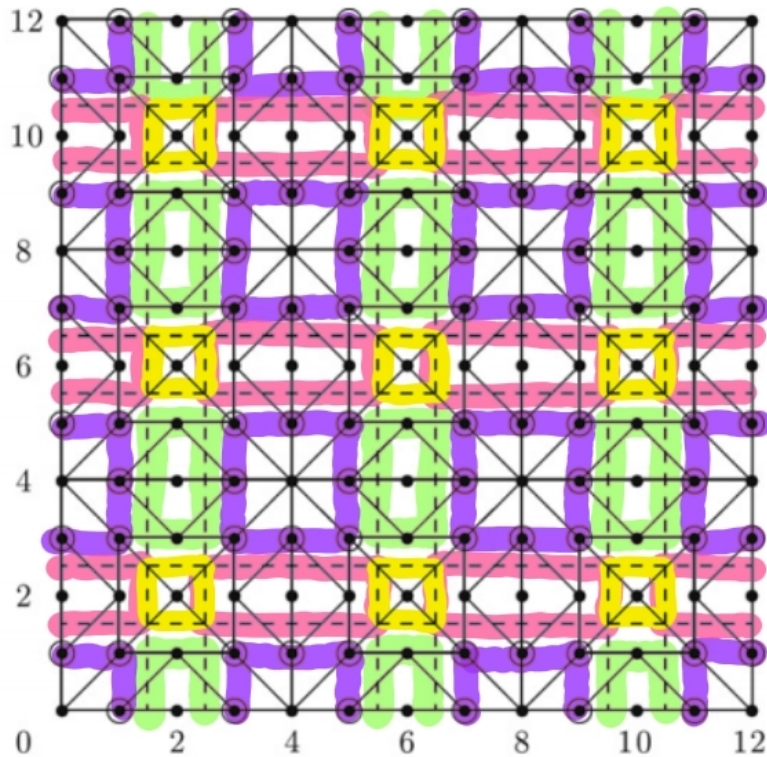


Figura 7.6: En morado primera parte de  $h$ . En rosa segunda parte de  $h$ . En verde tercera parte de  $h$ . Y, en amarillo la cuarta parte de  $h$ .

entonces se dice que tenemos el operador clausura clásico, la clausura de Kuratowski o, en contextos topológicos donde no haya ambigüedad, clausura simplemente.

**Definición 7.2.1.** Definimos la clausura de Alexandroff sobre  $\mathbb{Z}^2$  como el operador dado del siguiente modo:

Para todo  $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$r(z) = \begin{cases} A_4(z) & \text{si } x \text{ e } y \text{ son impares} \\ A_8(z) & \text{si } (x, y) = (4k + 2l, 2l + 2), k, l \in \mathbb{Z} \\ \{z\} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.6)$$

El operador clausura  $r$  no es topología pues se producen problemas en las contenciones de los abiertos. Es  $T_0$  pero no es  $T_{\frac{1}{2}}$ .

Una porción del grafo de conexión del operador  $r$  se muestra en la figura 7.7.

Se puede definir una relación mediante la clausura que en este caso **no** nos da un preorden. Además,  $(\mathbb{Z}^2, r)$  forma un espacio pretopológico, este tipo de espacio se conoce también como espacio de clausura o de Čech.

De hecho, el espacio de clausura que definimos  $(\mathbb{Z}^2, r)$  puede sustituir a la topología de Khalimsky en el tratamiento de imágenes digitales con muy buenos resultados.

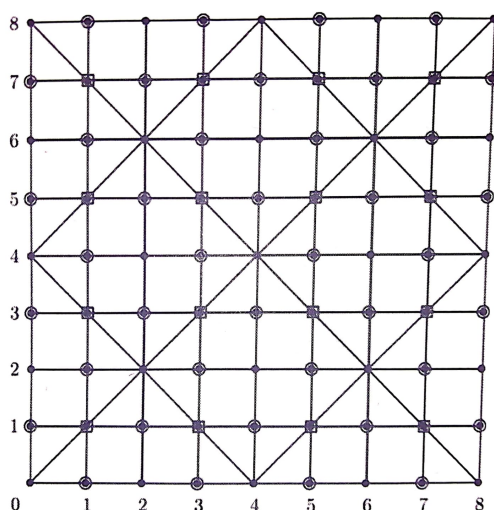


Figura 7.7: Una porción del grafo de conexión de  $r$

Sea la aplicación sobreyectiva  $d : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  definida por:

Para todo  $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$d(x, y) = \begin{cases} (2k + 2l + 1, 2l - 2k + 1) & \text{si } (x, y) = A_4(4k, 4l + 2), k, l \in \mathbb{Z} \\ (2k + 2l + 1, 2l - 2k - 1) & \text{si } (x, y) = A_4(4k + 2, 4l), k, l \in \mathbb{Z} \\ \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) & \text{si } x, y \text{ son impares} \\ (4k + 2l, 2l) & \text{o } (x, y) = (4k + 2l, 2l), k, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (7.7)$$

Y, se tiene el siguiente resultado que viene en [20], página 173.

**Teorema 7.2.2.** *El operador clausura  $r$  coincide con el operador cociente de clausura de  $w$  generado por  $d$ .*

La topología de Šlapal sigue en ámbito de estudio, y para solventar los problemas de las topologías digitales clásicas (Khalimsky y Marcus-Wyse), hay que deshacerse de propiedades valiosas, y entrar en otros espacios, por ejemplo, los espacios pretopológicos aquí mencionados.

### 7.3. Teorema de la curva de Jordan para las topologías de Šlapal y el operador de clausura $r$ .

Los conceptos de arcos, caminos y curvas digitales se traducen de forma "natural" a las topologías Šlapal y a su operador de clausura. Basta conocer sus grafos de conexión.

Se pueden definir Teoremas de Jordan, tanto para las topologías  $w, v$  como para  $r$ .

El teorema de Jordan para la topología  $w$ , mostrado a continuación, viene completamente desarrollado en [18], Theorem 11.

### 7.3. TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN PARA LAS TOPOLOGÍAS DE ŠLAPAL Y EL OPERADOR

**Teorema 7.3.1** (Teorema de la curva de Jordan para la topología  $w$ ). *Cualquier curva en el grafo cuadrado-diagonal de tipo 4 es una curva de Jordan en  $(\mathbb{Z}^2, w)$ .*

El teorema de Jordan dado para la topología  $v$  se puede encontrar en [21], Theorem 7.

**Teorema 7.3.2** (Teorema de la curva de Jordan para la topología  $v$ ). *Sea  $D$  una curva cerrada simple en  $(\mathbb{Z}^2, v)$  tal que para todo par diferente de puntos  $z_1, z_2 \in D$  con ambas coordenadas pares satisfaciendo  $A_4(z_1) \cap A_4(z_2) \subseteq D$ . Entonces,  $D$  es una curva de Jordan en  $(\mathbb{Z}^2, v)$ .*

Se da a continuación el teorema de la curva de Jordan para  $r$ , se puede encontrar en [20] página 174.

**Teorema 7.3.3** (Teorema de la curva de Jordan para el operador  $r$ ). *Sea  $D$  una curva simple cerrada del plano entero con el operador clausura  $r$  tal que para cada punto  $(x, y) \in D$  con  $x$  e  $y$  impares,  $A_4(x, y) \cap D = \{(x, y)\}$ . Entonces  $D$  es curva de Jordan en  $(\mathbb{Z}^2, r)$ .*

Se podría concluir entonces que las topologías de Šlapal, o el operador  $r$ , son insuficientes para solucionar los problemas que tenían las anteriores topologías digitales, pues son restrictivos para el Teorema de Jordan, requieren de curvas concretas. Quizás sí suavizan dichos problemas, pero no aportan una solución definitiva. (Para más referencias: [18] y [27].)

# Apéndice A

## Conceptos sobre topología general.

Damos una recopilación de conceptos básicos de topología.

Mostramos varias referencias bibliográficas: [12] y [1].

### A.1. Definiciones básicas de topología.

**Definición A.1.1** (Espacio topológico). *Un espacio topológico es un conjunto  $X$ , junto con una colección de subconjuntos  $\mathcal{T}$  de  $X$ , llamados  $\mathcal{T}$ -abiertos o simplemente abiertos de  $\mathcal{T}$  tales que:*

1. *El conjunto vacío y  $X$  son ambos conjuntos abiertos.*
2. *La intersección de cualquier familia finita de abiertos es abierto.*
3. *La unión de cualquier colección de abiertos es abierto.*

*Notamos el espacio topológico como  $(X, \mathcal{T})$ , o simplemente  $X$ .*

*Llamamos  $\mathcal{T}$ -cerrado o simplemente cerrado de  $\mathcal{T}$ , cuyo complemento  $X - C$  es abierto.*

**Observación A.1.2.** *De la definición se deduce que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada y que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.*

**Definición A.1.3** (Concepto de interior y clausura). *Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y, sea  $A$  un subconjunto de  $X$ . Definimos el interior de  $A$  como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en  $A$ , se denotado como  $\text{int}(A)$ .*

*Definimos a la clausura de  $A$  como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ , y lo denotamos por  $\text{cl}(A)$ .*

**Definición A.1.4** (Topología relativa a un subconjunto). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y, sea  $A \subseteq X$ . La topología relativa al subconjunto  $A$  se define como la topología formada por las intersecciones de los abiertos de  $(X, \mathcal{T})$  con  $A$ . Se denotará por  $(A, \mathcal{T}_A)$  ó  $(A, \mathcal{T}|_A)$ .

**Definición A.1.5** (Entorno). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, y  $x \in X$ , se dice que  $N^{\mathcal{T}}$  ó  $N$  es entorno de  $x$  si existe un abierto  $O \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in O \subseteq N$ .

**Definición A.1.6** (Topología Producto). Sean  $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$  espacios topológicos, se llama topología producto a una topología construida sobre el producto cartesiano de esos espacios topológicos.

El espacio resultante lo notaremos como,  $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n)$ .

**Definición A.1.7** (Función continua y homeomorfismo). Sean  $(X, \mathcal{T}_1)$  e  $(Y, \mathcal{T}_2)$  dos espacios topológicos y, sea  $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$  una función. Decimos que  $f$  es una función continua si  $f^{-1}(U)$  es un abierto en  $(X, \mathcal{T}_1)$  siempre que  $U$  sea un abierto en  $(Y, \mathcal{T}_2)$ .

Si  $f$  es biyección y, tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son ambas funciones continuas, decimos entonces que  $(X, \mathcal{T}_1)$  e  $(Y, \mathcal{T}_2)$  son homeomorfos, y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  las llamamos homeomorfismos.

## A.2. Bases

**Definición A.2.1** (Base de una topología). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Si  $\mathcal{B}$  es una colección de subconjuntos de  $X$ , llamamos  $\mathcal{B}$  base para  $\mathcal{T}$  si los conjuntos en  $\mathcal{T}$  son uniones de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Definición A.2.2** (Subbase de una topología). Una colección  $S$  de subconjuntos de  $X$  es llamada subbase para la topología de  $X$  si el conjunto  $\mathfrak{B}$  de intersecciones finitas de elementos de  $S$  es una base para la topología de  $(X, \mathcal{T})$ .

**Proposición A.2.3** (Caracterización de una Base). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Una familia  $\mathcal{B}$  de conjuntos abiertos en  $X$  es base de  $\mathcal{T}$ , si y sólo si, para cualquier conjunto abierto  $U$  y cualquier elemento  $x \in U$  existe  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in A \subseteq U$ .

**Definición A.2.4** (Base para una topología). Dado un conjunto  $X$ , una familia  $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$ , es base para una topología si verifica que:

1.  $\bigcup_{i \in I} B_i = X$ . (Es recubrimiento)
2. Dados  $B_i, B_j \in \mathcal{B}$  y, sea  $x \in B_i \cap B_j$ , existe  $B$  en  $\mathcal{B}$  con  $x \in B \subseteq B_i \cap B_j$ . Esto es,  $B_i \cap B_j$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}$  para todo par  $B_i, B_j$  de  $\mathcal{B}$ .

**Proposición A.2.5** (Base del producto). Sean  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y sean  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$  y  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}$  bases de los espacios respectivamente. Entonces,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'} = \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \times \mathcal{B}_{\mathcal{T}'}$$

**Definición A.2.6** (Base minimal). Decimos que  $\mathcal{B}$  es una base es minimal si no está contenida en ninguna de las otras posibles bases del espacio topológico.

### A.3. Propiedades de Separación.

**Definición A.3.1** (Espacios  $T_0, T_1, T_2$ ). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico.

1. Decimos que es  $T_0$  si dados dos puntos distintos cualesquiera  $x$  e  $y$  en  $X$ , o bien existe un entorno  $U_x$  de  $x$  de forma que  $y \notin U_x$  o bien existe un entorno  $U_y$  de  $y$  de forma que  $x \notin U_y$ .
2. Decimos que es  $T_1$  si para cada pareja de elementos distintos  $x, y$  de  $X$  existe un abierto que contiene a  $x$  y no a  $y$ , otro conjunto abierto que contiene a  $y$  y no a  $x$ .
3. Decimos que es  $T_2$  si dados  $x$  e  $y$  cualesquiera existen abiertos de  $x$  e  $y$ ,  $U_x$  y  $V_y$  respectivamente, tal que  $U_x \cap V_y = \emptyset$ .

**Proposición A.3.2.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico.

1. Si  $X$  es  $T_2$  entonces es  $T_1$ .
2. Si  $X$  es  $T_1$  entonces es  $T_0$ .

**Definición A.3.3** (Espacios  $T_{1/2}$ ). Se dice que  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_{1/2}$  si cada punto de  $X$  es cerrado o abierto.

**Proposición A.3.4** (Caracterización espacios  $T_0$ ). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico  $T_0$ , y dos puntos  $x, y \in X$  tal que  $x \neq y$ , entonces,  $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ .

**Proposición A.3.5** (Caracterización espacios  $T_1$ ). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, se tiene,

1. El espacio  $X$  es  $T_1$ , si y sólo si, sus subconjuntos unitarios son cerrados.
2. Todos los subconjuntos de un espacio topológico finito  $T_1$  son abiertos.

**Proposición A.3.6** (Propiedades de los espacios  $T_2$ ). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, si es un espacio  $T_2$  las sucesiones convergentes convergen a un único punto.

### A.4. Conexión por caminos y conexión.

**Definición A.4.1** (Camino entre dos puntos). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, un camino entre dos puntos,  $x, y \in X$ , es una aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .

**Definición A.4.2.** Se dice que un espacio topológico es conexo por caminos si para cualesquiera dos puntos existe un camino entre ellos.



**Definición A.4.3** (Espacio Topológico Conexo). *Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es conexo si no es la unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. En otro caso, se le dice desconexo.*

Se tiene que un espacio topológico es conexo, si y sólo si, sus únicos subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son  $\emptyset$  y  $X$ .

**Definición A.4.4.** *Las componentes conexas de  $X$  son los subespacios conexos máximos, es decir, son los mayores subespacios conexos que están en  $X$ .*

**Lema A.4.5.** *Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Si  $A, B$  son subconjuntos conexos y  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces  $A \cup B$  es conexo.*

**Proposición A.4.6** (Conexo por caminos implica Conexo). *Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico conexo por caminos entonces es conexo.*

**Proposición A.4.7.** *Sean  $(X, \mathcal{T}_1)$  e  $(Y, \mathcal{T}_2)$  dos espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $X$  es conexo por caminos (conexo), entonces  $f(X)$  es un subespacio conexo por caminos (conexo) de  $Y$ .*

## A.5. Conjuntos parcialmente ordenados

**Definición A.5.1** (Orden parcial y orden total). *Un **orden parcial** sobre un conjunto  $X$  es un relación binaria  $R$  de forma que sea reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es decir, para todo  $a, b, c \in X$  se tiene que:*

1.  $aRa$  (Propiedad reflexiva)
2. Si  $aRb$  y  $bRa$ , entonces  $a = b$  (Propiedad de antisimetría)
3. Si  $aRb$  y  $bRc$ , entonces  $aRc$  (Propiedad de transitividad)

Se suele denotar la relación  $R$  con el símbolo  $\leq$ .

Con  $\leq$  no tiene porqué poder compararse todos los elementos entre sí. Si es posible esta comparación los elementos se dice que el orden es **total**.

**Definición A.5.2** (Conjunto preordenado). *Un conjunto preordenado es un conjunto  $X$  dotado de una relación binaria  $R$  que es reflexiva y transitiva.*

# Apéndice B

## Digrafos.

Principal referencia: [26]

**Definición B.0.1** (Grafo). *Un grafo sobre un conjunto  $V$  se dice a todo grafo no dirigido sin bucles cuyo conjunto de vértices sea  $V$ .*

*Dicho de modo más representativo, un grafo está dado por el par  $(V, E)$  donde  $E \subseteq \{\{x, y\}; x, y, \in A, x \neq y\}$  es el conjunto de aristas.*

*A veces las aristas se notarán con la yuxtaposición de los vértices,  $xy$ ; o, con el intervalo  $(x, y)$  si no se da a confusión con otras notaciones.*

**Definición B.0.2** (Grafo simple). *Diremos que un grafo es simple si sus vértices no tienen bucles, es decir, si para ningún vértice existe una arista que lo une consigo mismo.*

**Definición B.0.3** (Adyacencia en grafos). *Si existe  $xy \in E$ , entonces los vértices  $x$  e  $y$  se dicen adyacentes.*

*Denotaremos el conjunto de vértices adyacentes a un  $x$  fijado como  $E(x)$ .*

**Definición B.0.4** (Caminos y arcos en grafos). *Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un **camino** entre dos vértices  $x$  e  $y$  es una sucesión  $x_1x_2\dots x_n$ , donde  $x = x_1$ ,  $y = x_n$  y  $x_i$  y  $x_{i+1}$  son adyacentes. Si  $x_1$  y  $x_n$  son adyacentes, entonces el camino es cerrado y se llama **ciclo**.*

*Un **arco** ente  $x_1$  y  $x_n$  será una subsucesión de  $x_1x_2\dots x_n$  sin repetición de vértices.*

**Definición B.0.5** (Grafo conexo). *Diremos que un grafo es conexo si cualesquiera dos vértices de  $G$  existe un arco que los une.*

El grafo total  $G$  será conexo en el caso donde el subgrafo conexo máximo sea el propio  $G$ .

**Definición B.0.6** (Cadenas y cadenas cerradas.). *Una **cadena** es sucesión de aristas y conexiones que recorren un grafo.*

*Una **cadena cerrada** es una cadena que inicia y termina en un punto.*

*Lo que diferencia una cadena de un camino es que si se pueden repetir vértices y aristas.*

## B.1. Relaciones sobre grafos y grafos dirigidos.

**Definición B.1.1** (Relación). Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos. Una relación  $R$  de  $A$  y  $B$  es el subconjunto de  $A \times B$ .

Si  $R \subseteq A \times B$  y  $(a, b) \in R$ , diremos que  $a$  es relativo a  $b$  vía o por  $R$ , denotado por  $aRb$ .

Si  $B = A$ , diremos que  $R$  es una relación sobre  $A$ .

**Lema B.1.2.** Sean las relaciones  $R$  y  $S$  dadas sobre los conjuntos  $A$  y  $B$ , y sean  $A_1$  y  $A_2$  subconjuntos de  $A$ . Entonces,

(a) Si  $A_1 \subseteq A_2$ , entonces  $R(A_1) \subseteq R(A_2)$ .

(b)  $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$ .

(c)  $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$ .

(d) Si  $R(a) = S(a)$  para todo  $a$  en  $A$ , entonces  $R = S$ .

**Definición B.1.3** (Grafo dirigido). Un grafo dirigido o digrafo es una relación binaria,  $R$  sobre un conjunto  $V$ . Se usa la notación  $G = (V, E)$ , donde  $E$  es el conjunto de los pares  $(v, w) \in R$ . Los elementos de  $E$  se suelen llamar aristas dirigidas o arcos y se representan por una flecha con origen  $v$  y extremo  $w$ .

Si el grafo es dirigido, la arista  $xy$ , entre dos vértices  $x$  e  $y$ , representa la "flecha" que señala del vértice  $x$  al vértice  $y$ . Eso no quiere decir que exista necesariamente la arista que va del vértice  $y$  al  $x$ , que sería  $yx$ .

De este modo, los grafos no dirigidos son casos particulares de los grafos dirigidos, donde sí existe la arista  $xy$  entonces existe la arista en la dirección contraria,  $yx$ .

1. Si la relación binaria resulta ser **reflexiva**, aparece un bucle alrededor de cada vértice. Usualmente, no se representa para simplificar.

2. Si es **simétrica**, como aparecen las aristas dirigidas  $vw$  y  $wv$  se sustituyen por un segmento sin flechas.

3. Si es **transitiva**. Supongamos 3 vértices,  $a, b, c$ , entonces, si existen las aristas  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ , debe existir  $(c, a)$ . Esto se reduce a que entre cualesquiera 3 vértices existe un ciclo que los relaciona a los 3.

4. Si es **antisimétrica**: entre dos vértices solo puede aparecer un arista dirigida entre ellos.

Por tanto, un grafo dirigido correspondiente a una relación de orden parcial tendría las siguientes características:

1. Aparecen bucles.

2. Dados tres vértices distintos,  $x, y, z$ , si aparecen las aristas  $xy$  e  $yz$  tiene que aparecer la arista  $xz$ .

Para simplificar las representaciones sobre los grafos dirigidos se usa el concepto de diagrama de Hasse. Para ello, en primer lugar se considera la relación "seguir a".

**Definición B.1.4** (Relación "seguir a"). *Dados dos elementos  $x$  e  $y$  de un conjunto parcialmente ordenado  $S$  se dice que " $y$  sigue a  $x$ " si  $x \leq y$ , y no hay elemento de  $S$  entre  $x$  e  $y$ .*

**Definición B.1.5** (Diagrama de Hasse). *El diagrama de Hasse  $H_G$  de un (di)grafo  $G = (V, E)$  se obtiene del siguiente modo:*

1. *Eliminando todos sus bucles.*
2. *Se considera la arista  $vw$ , si y sólo si,  $w$  sigue a  $v$ .*

*Es decir, se eliminan todas las aristas que se deducen de la propiedad transitiva y reflexiva.*

**Ejemplo B.1.6.** *Tomemos el conjunto de divisores de 60,  $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$  y consideremos el orden parcial "ser divisor de". Entonces, el diagrama de Hasse, B.1a*

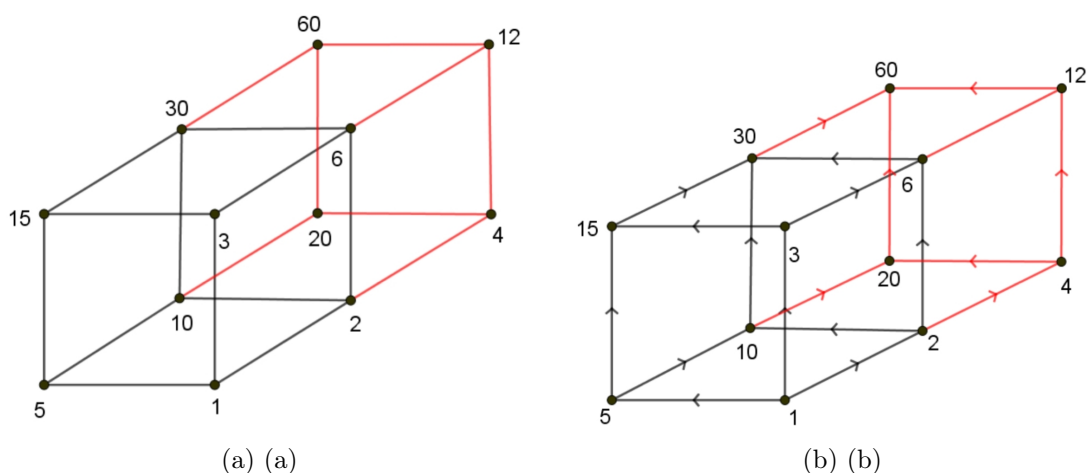


Figura B.1: (a) Diagrama de Hasse para  $D_{60}$  como la reunión de vértices y aristas en negro y rojo. (b) Orden (parcial) indicado con flechas.

*Podemos indicar con flechas la dirección del orden parcial tal y como se muestra en B.1b.*

*Se indica en color rojo el Diagrama de Hasse para los divisores de 30 por si pudiese resultar de interés.*

## B.2. Operaciones sobre relaciones.

En el conjunto de relaciones binarias podemos considerar diversas operaciones conjuntistas que pueden expresarse en términos de sus digrafos correspondientes.

Algunas a destacar son:

La **intersección** de dos relaciones se define como el conjunto de pares que verifican la relación  $R$  y  $S$ . La **unión**, se puede ver como el conjunto de pares que verifican  $R$  o  $S$ . La **relación inversa** es la siguiente relación:

$$bR^{-1}a \text{ si y sólo si } aRb.$$

**Ejemplo B.2.1.** Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{a, b, c\}$ .  
 Sea  $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}$  y  $S = \{(1, b), (2, c), (3, c), (4, b)\}$ .  
 Entonces,  $R \cap S = \{(1, b), (2, c)\}$ ,  $R \cup S = R \cup \{(3, c), (4, b)\}$  y  $S^{-1} = \{(b, 1), (c, 2), (c, 3), (b, 4)\}$ .  
 Ilustrados en las figuras, B.2 y B.3.

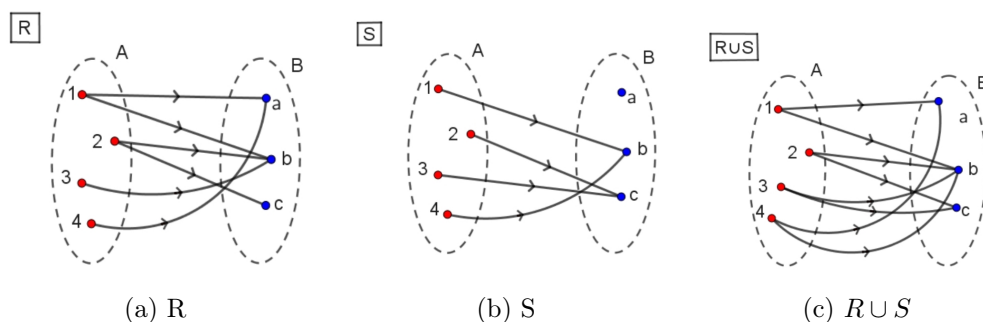


Figura B.2: Digrafos asociados (I).

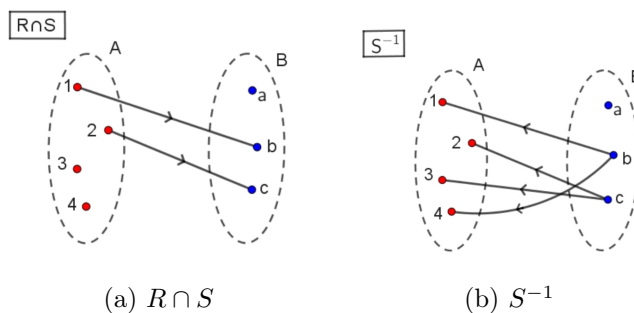


Figura B.3: Digrafos asociados (II).

# Bibliografía

- [1] S. Lipschutz, “Teoría y problemas de topología general”, inf. téc., 1970.
- [2] D. Marcus y C. S. U. P. S. Group, “5712”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 77, n.º 10, págs. 1119-1119, 1970, ISSN: 00029890, 19300972. dirección: <http://www.jstor.org/stable/2316121> (visitado 22-06-2022).
- [3] A. Rosenfeld, “Adjacency in digital pictures”, *Information and Control*, vol. 26, n.º 1, págs. 24-33, 1974.
- [4] J.-M. Chassery, “Connectivity and consecutivity in digital pictures”, *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 9, n.º 3, págs. 294-300, 1979, ISSN: 0146-664X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0146-664X\(79\)90043-1](https://doi.org/10.1016/0146-664X(79)90043-1). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0146664X79900431>.
- [5] A. Rosenfeld, “Digital topology”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 86, n.º 8, págs. 621-630, 1979.
- [6] E. Khalimsky, R. Kopperman y P. R. Meyer, “Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets”, *Topology and its Applications*, vol. 36, n.º 1, págs. 1-17, 1990.
- [7] L. Latecki, “Topological connectedness and 8-connectedness in digital pictures”, *CVGIP: Image Understanding*, vol. 57, n.º 2, págs. 261-262, 1993.
- [8] L. Boxer, “Digitally continuous functions”, *Pattern Recognition Letters*, vol. 15, n.º 8, págs. 833-839, 1994.
- [9] ———, “A classical construction for the digital fundamental group”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 10, n.º 1, págs. 51-62, 1999.
- [10] C. O. Kiselman, “Digital Jordan curve theorems”, en *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Springer, 2000, págs. 46-56.
- [11] S. Romaguera y M. Sanchis, “Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces”, *Journal of approximation theory*, vol. 103, n.º 2, págs. 292-301, 2000.
- [12] G. N. Rubiano, *Topología general*. Univ. Nacional de Colombia, 2000.
- [13] C. O. Kiselman, “Digital geometry and mathematical morphology”, *Lecture Notes, Uppsala University, Department of Mathematics*, 2002.
- [14] R. Kopperman, “Topological digital topology”, en *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Springer, 2003, págs. 1-15.
- [15] E. Melin, *Connectedness and continuity in digital spaces with the Khalimsky topology*, 2003.
- [16] J. Šlapal, “A digital analogue of the Jordan curve theorem”, *Discrete applied mathematics*, vol. 139, n.º 1-3, págs. 231-251, 2004.

- [17] M. A. Cárdenas, “El teorema de la curva de Jordan para el plano digital”, Tesis doct., Universidad de los Andes, 2005.
- [18] J. Šlapal, “Digital Jordan curves”, *Topology and its Applications*, vol. 153, n.º 17, págs. 3255-3264, 2006.
- [19] E. Bouassida, “The Jordan curve theorem in the Khalimsky plane”, *Applied General Topology*, vol. 9, n.º 2, págs. 253-262, 2008.
- [20] J. Šlapal, “A quotient-universal digital topology”, *Theoretical computer science*, vol. 405, n.º 1-2, págs. 164-175, 2008.
- [21] ———, “Jordan Curve Theorems with Respect to Certain Pretopologies on  $\mathbb{Z}^2$ ”, en *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Springer, 2009, págs. 252-262.
- [22] J. Kamlofsky, “Topología digital: base para la vision artificial”, Tesis doct., Tesis de grado. Facultad de Tecnología Informática. UAI. Buenos Aires, 2011.
- [23] E. A. Acevedo, “Propiedades Topológicas de la línea Khalimsky”, *Tecnociencia*, vol. 14, n.º 1, págs. 119-137, 2012.
- [24] S. Lee y S.-E. Han, “Comparison of continuities in digital topology”, *Honam Mathematical Journal*, vol. 34, n.º 3, págs. 451-465, 2012.
- [25] K. G. Hegazy, “Topological Properties For Digital Spaces”, 2014. dirección: <http://hdl.handle.net/20.500.12358/21379>.
- [26] B. Kolman, R. Busby y S. C. Ross, *Discrete Mathematical Structures*. Pearson Higher Ed, 2014.
- [27] J. Šlapal, “Alexandroff pretopologies for structuring the digital plane”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 216, págs. 323-334, 2017.
- [28] A. Kurien y M. Samuel, “Continuity in Digital Spaces with the Khalimsky Topology”, 2018.
- [29] S. P. Missier y K. A. Mohammed, “Certain Investigation on Digital Continuity”, *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, vol. 9, n.º 5, págs. 425-431, 2018.
- [30] F. Cocolletzi Adame, *Topología Digital y Análisis de Imágenes Binarias*. 2019, 61–63 (Prop.5.1.3.)-por ahora.