Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Estudios
Grado en Matemáticas

Problemas de optimización sobre selección de ofertas

Javier Iglesias Martinez

Tutor
Justo Puerto Albandoz
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa

Abstract

Nowadays, assortment planning is highly relevant due to plentiful advances in the logistics and technological sectors. The aim of this work is to formulate several optimization problems that will allow retailers to solve various operational issues with great influence on inventory management. In addition, the impact and importance of certain parameters will be analyzed through the design of several experiments and their subsequent computational resolution.

Resumen

En la actualidad, ante los notables avances tecnológicos en el sector logístico, la gestión del surtido goza de vital relevancia e interés. En este trabajo formularemos varios problemas de optimización que nos ayudarán a resolver diversas cuestiones operacionales de gran influencia en la gestión de inventario. Además, analizaremos la repercusión e importancia de ciertos parámetros mediante el diseño de varios experimentos y su posterior resolución computacional.

Índice

Índice de figuras

Introducción

Con el término *surtido de productos* nos referiremos al conjunto de artículos que un establecimiento comercial ofrece al consumidor en un período de tiempo concreto. La planificación de surtido es el proceso de seleccionar tipo y cantidad de productos para así determinar el nivel óptimo de inventario. Es un campo relativamente nuevo y de gran relevancia en el sector comercial. Una mala planificación de surtido implica el incremento de costes de mantenimiento debido al excesivo almacenamiento de productos no demandados y la pérdida de ventas por la falta de stock de productos muy solicitados.

El propósito de especificar un determinado subconjunto de productos es maximizar el beneficio total, considerando múltiples restricciones como espacio limitado disponible para exhibir productos, presupuesto previamente fijado o la desafiante tarea de satisfacer las cambiantes necesidades de los consumidores. Actualmente, gracias a los avances tecnológicos en el sector logístico, la oferta de productos disponibles en el mercado incrementa a mayor velocidad que las ventas realizadas. En consecuencia, la planificación de surtido juega un papel fundamental en la gestión de las ventas.

Generalmente, cada elemento del surtido tiene asociado un número o código de referencia para identificarlo de forma unívoca en el inventario. Estos artículos se dividen en grupos llamados *categorías*. Por ejemplo, en el sector tecnológico, una categoría podría ser accesorios de informática. Además, esta se subdivide en *subcategorías*, como ratones, teclados o discos duros. Luego cada vendedor deberá decidir qué fracción de espacio y presupuesto dedicar a cada categoría y subcategoría.

Durante la planificación de surtido se deberán tener en cuenta tres aspectos fundamentales: el número de categorías existentes (Ancho del surtido), la cantidad de códigos de referencia para cada categoría (Profundidad del surtido), y la cantidad de inventario para cada artículo. Además se ha de estimar la demanda para cada producto, y usando estas estimaciones, es necesario construir una función de beneficios y elegir el mejor surtido de productos para maximizar el beneficio bajo varias restricciones. Por tanto, la gestión del espacio disponible o los tipos de productos elegidos por el vendedor, se convierten en factores muy importante a considerar.

En el capítulo 1, revisaremos brevemente las principales corrientes sobre las cuales se construyen los modelo de planificación de surtido: variedad de productos, inventarios con múltiples productos, distribución espacial y percepción de la variedad.

En el capítulo 2, describiremos el concepto de sustitución entre productos y presentaremos tres modelos de demanda usados en problemas de optimización sobre selección de ofertas: logístico multinomial, exógeno y locacional.

En el capítulo 3, consideraremos el problema de optimización de surtido bajo sustitución de demanda impulsada por el consumidor sujeto a varias restricciones logísticas y analizaremos la influencia de ciertos parámetros en el beneficio total.

En el capítulo 4, desarrollaremos un modelo que nos ayude a fijar precios para líneas de productos con el fin de maximizar beneficios.

En el capítulo 5, fusionaremos aspectos estudiados en los capítulos previos con el fin de desarrollar un modelo de decisión que ayude a resolver cuestiones operacionales en líneas de productos.

En el capítulo 6, resolveremos un caso práctico donde adjudicaremos diversos precios a entradas de un espectáculo en función del ángulo de visión y distancia al escenario.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo repasaremos las principales corrientes sobre las cuales se construyen los modelos de planificación de surtido.

1.1. Variedad de productos

La selección y disponibilidad de productos goza de máxima importancia durante el proceso planificación de surtido, y es por ello que la búsqueda del equilibrio entre la amplitud del inventario y clientela ha sido foco de numerosos estudios. Las altas expectativas de los clientes y competencia entre las marcas incitan a los comerciantes a la adquisición de un gran número y variedad de productos. Quelch and Kenny [1] expusieron que entre 1985 y 1992, el número de productos en el mercado incrementaba un 16 % cada año, mientras que el espacio de almacenamiento solo se expandía un 1.5 %. Este fenómeno incitó a reflexionar sobre la importancia y beneficios de un rápido aumento de la variedad de artículos. Por ejemplo, muchos comerciantes adoptaron una estrategia más eficiente eliminando aquellos productos con escasa demanda (Kurt Salmon Associates 1993 [2]). Además, ante el gran incremento de la variedad, hay evidencias empíricas garantizando que la reducción de esta no implica pérdidas económicas. Desde el punto de vista operacional, un inventario amplio provoca menos demanda e inventario disponible para cada producto, generando un inventario pobre y estático que incrementa los costes de mantenimiento.

El principal modelo en este ámbito, propuesto por Hotelling (1929) [3], trata sobre la competición oligopolica entre empresas. En este modelo, los clientes son distribuidos uniformemente a lo largo de una avenida, representada por un segmento de línea de longitud l. Asimismo, las empresas eligen su posición y el precio de sus productos con la intención de maximizar beneficios.

Cada cliente tiene una idea preestablecida del precio que están dispuesto a gastarse, que depende en gran medida de la distancia física al producto y del precio que tiene este asociado. El objetivo prioritario es determinar el número de empresas, localización y precios que generen mayor conformidad entre los clientes.

Podemos distinguir dos formas elementales de diferenciación de productos. En un mercado diferenciado horizontalmente, existen productos con atributos dispares que dificultan su discriminación. En este caso, los productos se ordenan según las preferencias de los clientes. Un ejemplo típico serían camisetas de varios colores. En un mercado diferenciado verticalmente, los productos pueden ser ordenados según la calidad de sus materiales o funcionamiento. Generalmente, los productos de mayor calidad suelen ser los preferidos por los clientes.

Cabría destacar el problema de diseño de línea propuesto por Mussa and Rosen (1978) [5] y Moorthy (1984) [6]. En este, un vendedor monopolista elige un subconjunto de productos diferenciados verticalmente y los precios con el fin de satisfacer las necesidades de un público heterogéneo. Por ejemplo, en la categoría de automóviles podríamos juzgar el tamaño del motor como única característica principal. El problema consistiría en la elección del tamaño de motor a incluir en cada coche y la asignación de un precio al producto final.

1.2. Modelos de inventario con múltiples artículos

En la actualidad, la gestión de múltiples productos sometido a restricciones de espacio o presupuesto tienen una gran relevancia en la planificación de surtido. En este contexto, es frecuente recurrir a un modelo de demanda exógeno, que explicaremos con detalle en el próximo capítulo. En resumidas cuentas, la demanda total de un producto vendrá dada por la suma de su demanda inicial y la demanda resultante de la sustitución de otros productos.

A lo largo de estos últimos años, una gran cantidad de algoritmos y métodos heurísticos han sido implementados con el fin de resolver numerosos problemas de diversa índole. Generalmente, la consideración simultánea del efecto de sustitución, restricción de espacio y costes derivados de la logística influyen positivamente en las ganancias totales.

1.3. Modelos de distribución espacial

En algunos sectores comerciales, como el farmacéutico y juguetero, la cantidad de espacio dedicado a una determinada categoría de producto es un detalle trascendental en la planificación de surtido. Esta condición gana más relevancia para casos donde la demanda es suficientemente alta para almacenar una gran cantidad de inventario. Sin embargo, en librerías sería conveniente ofrecer una gran cantidad de diversos productos y solamente almacenar una pequeña cantidad de cada uno.

Corstjens and Doyle (1981) [8] propusieron un método para asignar el espacio óptimo a cada categoría. Tras una serie de experimentos, estimaron las ventas de un producto i como $\alpha_i s_i^{\beta_i} \prod_j s_j^{\delta_{ij}}$, donde s_i es el espacio dedicado al producto i, β_i su propia elasticidad espacial, esto es, la relación que existe entre el aumento de espacio dedicado a este producto y el número de ventas efectuadas, y δ_{ij} la elasticidad espacial cruzada, que se puede definir como la relación que existe entre el aumento de espacio dedicado al producto i y el número de ventas efectuadas de producto j. El proceso de estimación y optimización no puede ser aplicado a problemas con muchas variables, por lo que generalmente se trabaja con grupos en general en vez de con códigos de referencia.

1.4. Percepción de la variedad

Los modelos previamente mencionados suelen asumir que los clientes son plenamente conscientes de sus preferencias y de los productos ofrecidos. Por lo tanto, podríamos deducir que la posibilidad de elección entre un surtido amplio de productos podría ser beneficioso para los clientes. Sin embargo, los clientes son más influenciados por su propia percepción sobre la variedad que por la realmente existente. Esta percepción personal puede verse afectada por el espacio dedicado a cada categoría, la presencia o ausencia de su producto favorito o la propia distribución del surtido. Hoch et al (1999)[7] definieron una medida de disimilaridad entre pares de objetos como la cantidad de de atributos donde estos difieren. Demostraron que esta medida causa un impacto considerable en la percepción de la variedad. Además, van Herpen y Pieters (2002) [9] encontraron dos atributos que influye notablemente en la percepción de los clientes. Estos son la entropía (si los productos tienen el mismo color o son diferentes) y la disociación entre atributos (si el color y productos de cierta categoría esta incorrelados).

La percepción de variedad es de vital importancia para clientes que tratan de probar productos diferentes a los que previamente habían consumido. Generalmente, este tipo de clientes adoptan este comportamiento cuando tratan de elegir algún restaurante o cierta música. Factores intrapersonales (necesidad de estimulación), factores exteriores (cambios de precio, introducción de nuevos productos...) y la incertidumbre ante el futuro promueven este tipo de comportamientos.

Capítulo 2

Modelos de demanda

En esta sección revisaremos los principales modelos de demanda usados durante la organización del surtido. Por simplicidad, definiremos la siguiente notación basándonos en un único establecimiento con una única subcategoría de productos.

N Conjunto de productos en una subcategoría, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$,

S Conjunto de productos que conforman el surtido, $S \subset N$,

r_j Precio de venta del producto j,

c_j Coste de compra del producto j,

λ Media de clientes que visitan la tienda.

2.1. Sustitución de productos

Durante el proceso de compra, los clientes frecuentemente se enfrentan a la profunda decepción de descubrir que su producto favorito no se encuentra disponible. Ante esta situación, el cliente utiliza otros productos de características similares para tratar de *sustituir* su preferencia inicial.

Vamos a diferenciar dos formas de sustituir: en estático (*assortment-based substitution*), el cliente debe sustituir cuando su preferencia no pertenece al surtido elegido por la tienda, o en dinámico (*stockout-based substitution*), si su preferencia se encuentra *fuera de stock* durante el proceso de compra.

Las posibles formas de sustituir pueden clasificarse en tres grupos:

1. El cliente compra rutinariamente un producto de consumo habitual hasta que un día está fuera de stock y lo sustituye con otro. Esto es un ejemplo de sustitución en estático.

2. El cliente, influenciado por la publicidad o experiencia previa, desea un producto específico que no se encuentra en el surtido de la tienda que ha visitado. Esto es un ejemplo de sustitución en dinámico.

3. El cliente, al no disponer de su preferencia, trata de elegir un producto del surtido de la tienda y plantea su compra si no desea marcharse sin adquirir ningún producto.

Analicemos detalladamente las posibles alternativas que tienen los clientes al descubrir que su producto favorito no se encuentra en el surtido de la tienda. Puede a) sustituir con uno de los productos disponibles de la misma marca (diferente tamaño o precio) , b) sustituir con uno de los productos disponibles de otra marca, c) regresar más tarde a por el producto deseado, d) decidir que comprará en otra tienda, e) decidir que no comprará nada. A la hora de sustituir, el tipo de producto y necesidades personales gozan de gran relevancia. Gruen y Corsten (2003) [10] examinaron las variadas decisiones tomadas por 71.000 clientes repartidos en 20 países, para concluir que aproximadamente el 26 % sustituían con un producto de diferente marca, el 19 % sustituían con un producto de la misma marca, el 15 % retrasaban la compra, el 31 % se marchaba a otras tiendas y el 9 % rechazaba la compra de otro producto.

2.2. Modelo Logístico Multinomial

El modelo logístico multinomial (MNL) se sustenta en el concepto de utilidad (medida de satisfacción de un consumidor al obtener cierto producto). Usaremos el producto 0 para representar la opción de no compra. Cada cliente que visita la tienda asocia a cada opción $j \in S \cup \{0\}$ su respectiva utilidad U_j. Esta se descompone en dos partes, la componente determinista (u_j) y la componente aleatoria (ε_j).

$$U_j = u_j + \varepsilon_j$$

La componente aleatoria es modelada como una variable aleatoria Gumbel que viene caracterizada por la distribución

$$Pr\{X \leq \varepsilon\} = \exp(-\exp(-(\varepsilon/\mu + \gamma))),$$

donde γ es la constante de Euler (0.57722). Su media es cero , y su varianza $\mu^2\pi^2/6$. Un valor elevado de μ implica un mayor grado de heterogeneidad entre los clientes. Para cada observación, los valores de ε_j son independientes. Por lo tanto, aunque para cada cliente el valor esperado de la utilidad sea el mismo, el valor para cada observación podrá ser diferente. Este será consecuencia de la heterogeneidad de las preferencias entre los clientes o de las apreciaciones personales individuales no observables.

Cada individuo elige el producto que proporcione mayor utilidad del conjunto de las opciones disponibles. En consecuencia, la probabilidad de que un individuo elija el producto j del conjunto $S \cup 0$ es

$$P_j(S) = \Pr\left\{U_j = \max_{k \in S \cup \{0\}} (U_k)\right\}.$$

Se puede probar que esta expresión también se puede escribir de la siguiente manera:

$$Pr\{X \leq \varepsilon\} = \frac{e^{u_j/\mu}}{\sum\limits_{k \in S \cup \{0\}} e^{u_k/\mu}}$$

De esta forma, el modelo MNL es un candidato ideal para modelar comportamiento de elección de los clientes en estudios analíticos en diferentes sectores de la sociedad.

Sin embargo, este tipo de modelo en su forma más simple es incapaz de capturar cierto matiz durante el proceso de sustitución. La utilidad de la opción de no compra con respecto la utilidad de los restante productos en S, determina el ratio de sustitución. Consideremos el siguiente ejemplo, donde $S = \{1, 2\}$, $\mu = 1$, y $u_0 = u_1 = u_2$. La probabilidad de elegir la opción i viene dada por

$$\exp(u_i)/(\exp(u_0) + \exp(u_1) + \exp(u_i)) = 1/3 \quad \forall i = 0, 1, 2.$$

Por lo tanto $2/3$ de los clientes estarían interesados en realizar una compra en la categoría. Si el segundo producto no está disponible, la probabilidad de que el cliente eliga el primer producto vendrá dada por

$$\exp(u_1)/(\exp(u_0) + \exp(u_1)) = 1/2 \quad \forall i = 0, 1, 2.$$

Es decir, la mitad de los clientes sustituirá su producto favorito mientras que la otra mitad se marchará sin adquirir ningún producto. En este ejemplo, la probabilidad de que el cliente compre algún producto es de $2/3$ y el ratio de sustitución es $1/2$. Podemos controlar el ratio de sustitución variando el valor de u_0, pero esto influiría en la probabilidad de compra. Por lo tanto, no es posible determinar dos categorías con la misma probabilidad de compra con diferentes ratios de sustitución.

2.3. Modelo de Demanda Exógeno

Los modelos de demanda exógenos especifican directamente la demanda de cada producto y el comportamiento del cliente cuando su producto favorito no está disponible. Este tipo de modelo es el más usado en la gestión de inventario de productos sustituibles. Para modelizar el comportamiento de los clientes vamos a suponer que :

(S1) Cada cliente elige su preferencia de un conjunto N. Este conjunto representa el total de productos de una determinada categoría de productos ($N = \{1,2,\ldots,n\}$). A este conjunto añadiremos el producto 0, para representar la opción de rechazo a comprar algún artículo. Denotaremos por p_j a la probabilidad de que un cliente elija el producto j, siendo p_0 la probabilidad de no elegir ninguno. En consecuencia, se cumple que $\sum_{j \in N \cup \{0\}} p_j = 1$.

(S2) Si el producto favorito no se encuentra disponible, con probabilidad δ el cliente elige un segundo producto y con probabilidad (1-δ) elige no comprar ningún producto. Denotaremos a la probabilidad de sustituir el producto k con el producto j por α_{kj}.

Cuando el producto sustituto no está disponible, los clientes repiten el proceso: deciden si sustituir o no y qué producto elegir. Tras sustituir k veces, el cliente se encontrará en el k-ésimo *nivel de sustitución*. Las probabilidades $(1 - \delta)$ y α_{kj} pueden mantenerse para cada intento o variar en cada nivel.

Si conocemos la media de clientes que visitan el establecimiento durante un periodo de tiempo concreto, gracias a (S1) podríamos estimar la demanda media para cada producto j, siendo esta $d_j = \lambda p_j$. La demanda total de la categoría sería $\sum_{j \in N} d_j = \lambda(1 - p_0)$.

Las probabilidades α_{kj} vienen dadas por una matriz de probabilidades que puede variar según el tipo de sustitución del problema que estemos estudiando.

Consideremos una categoría de producto con 4 artículos. Algunos ejemplos serían:

Matriz de distribución equitativa

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} \\ \frac{\delta}{n-1} & 0 & \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} \\ \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} & 0 & \frac{\delta}{n-1} \\ \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de proximidad

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \delta/2 & 0 & \delta/2 & 0 \\ 0 & \delta/2 & 0 & \delta/2 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de división en subgrupos

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de sustitución proporcional

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta d_2/\lambda(1-p_0)-d_1 & \delta d_3/\lambda(1-p_0)-d_1 & \delta d_4/\lambda(1-p_0)-d_1 \\ \delta d_1/\lambda(1-p_0)-d_2 & 0 & \delta d_3/\lambda(1-p_0)-d_2 & \delta d_4/\lambda(1-p_0)-d_2 \\ \delta d_1/\lambda(1-p_0)-d_3 & \delta d_2/\lambda(1-p_0)-d_3 & 0 & \delta d_4/\lambda(1-p_0)-d_3 \\ \delta d_1/\lambda(1-p_0)-d_4 & \delta d_2/\lambda(1-p_0)-d_4 & \delta d_3/\lambda(1-p_0)-d_4 & 0 \end{pmatrix}$$

El parámetro δ nos permite diferenciar categorías de productos con baja o alta tendencia de substitución. La matriz de distribución equitativa asume que la probabilidad de sustitución está distribuida equitativamente entre los productos disponibles. La matriz de proximidad destaca la importancia de la distribución espacial del surtido y únicamente permite sustitución entre productos vecinos. Por ejemplo, si en un supermercado el cliente no puede encontrar caballa en conserva, podría conformarse con melva en conserva pero no con mejillones en escabeche, que generalmente se encuentran más alejados a los filetes de caballa que los filetes de melva. La matriz de división en subgrupos permite únicamente sustituir dentro de cada subgrupo. Por ejemplo, los clientes podrían considerar la cerveza sin alcohol y la cerveza con alcohol en diferentes subgrupos y no sustituir entre ellos.

La matriz de sustitución proporcional considera que la sustitución es influenciada por la demanda de cada producto. La expresión de cada α_{kj} vendrá dada por:

$$\alpha_{kj} = \delta \frac{d_j}{\sum\limits_{l \in N \setminus \{k\}} d_l}$$

Supongamos que un establecimiento elige un surtido S que no considera todos los productos N. La probabilidad de sustituir el producto k con cualquier otro del surtido, viene dada por $\sum_{j \in S} \alpha_{kj} = \delta \sum_{j \in S} d_j / \sum_{l \in N \setminus \{k\}} d_l$, manifestando que si un cliente no puede encontrar su producto favorito en la tienda, es más propenso a sustituir si aumenta el conjunto de posibles sustitutos.

Con el fin de agilizar el proceso de sustitución, asumiremos lo siguiente:

(S3) Supongamos ahora que el cliente ha alcanzado el número máximo de intentos para sustituir. Entonces se efectuará la venta si el producto sustituto está disponible, o se perderá en caso contrario.

Limitar el número de intentos de sustitución no es una idea descabellada. Smith y Agrawal (2000) [4] expusieron que el aumento de la variedad de productos implicaba una menor relevancia del número de intentos, ya que la probabilidad de encontrar un artículo deseado por el cliente durante el segundo intento era cercana a 1.

2.4. Modelo Locacional

Tal y como vimos en el capítulo 1, el modelo locacional fue originalmente desarrollado por Hotelling para estudiar los precios y localización de ciertos monopolios. Extendiendo este trabajo, Lancaster (1966) [16] propuso una variante para modelizar el comportamiento de elección de los clientes. En este modelo, los productos son vistos como una colección de sus características o atributos, y cada producto puede ser representado como un vector en este espacio de características, cuyas componentes indican la presencia de cada atributo en el producto. Por ejemplo, las características de un coche podrían incluir el tamaño del motor, el consumo de gasolina y su eficiencia. Cada individuo es representado por un punto en el espacio de características, que representa la combinación deseada.

Supongamos que existen m características de un producto. Denotemos por z_j la localización del producto j. Consideremos que el producto ideal del cliente viene representado por $y \in R^m$. La utilidad del producto j para el cliente vendrá dada por

$$U_j = k - r_j - g(y, z_j)$$

donde k es una constante positiva, r_j es el precio del producto j, y $g : R^m \to R$ es una distancia, representando la diferencia de utilidad entre el producto j y el ideal. De esta forma, el cliente elige aquella variante que le proporcione mayor utilidad.

Capítulo 3

Optimización de surtido bajo sustitución de demanda impulsada por el consumidor

Para sobrevivir en un ambiente competitivo y establecer una sólida posición en el mercado, los comerciantes deben ser capaces de gestionar aspectos operativos eficazmente mientras proporcionan un servicio adecuado al cliente. El incremento de la variedad de productos genera satisfacción entre los clientes, pero tiene un impacto negativo en los recursos financieros. En consecuencia, para optimizar la organización del surtido es fundamental entender las necesidades y expectativas de los consumidores.

Tal y como vimos en el capítulo 2, con frecuencia se manifiesta la tendencia de los clientes a comprar un producto de otro tamaño, color o marca si su elección preferida no se encuentra disponible, antes que abandonar el establecimiento con «las manos vacías». Este comportamiento ocasiona que la demanda de los restantes productos aumenten, afectando así a la cantidad óptima de producto a encargar y a las decisiones de planificación del surtido. Por tanto, la maximización de las ganancias bajo la existencia de estas cuestiones operacionales es un problema desafiante.

La selección del surtido y proveedor, sustitución de demanda y administración del inventario son conceptos extensamente estudiados. Tradicionalmente, estos problemas han sido tratados separadamente, aunque recientemente se ha resaltado la conveniencia de abordarlos conjuntamente.

En este capítulo, apoyándonos en al artículo [11], vamos a construir una herramienta que nos ayude a determinar el surtido óptimo de productos, considerando selección de proveedores, decisiones en la gestión de inventario bajo restricciones de espacio para almacenar productos y permitiendo sustitución de productos, tanto en estático como en dinámico. La herramienta que vamos a proponer optimiza estas interconectadas decisiones con el propósito de maximizar el beneficio esperado, bajo parámetros de coste y demanda que han de ser estimados por el comerciante. En concreto, vamos a introducir un modelo de programación lineal entera mixta con el fin de determinar qué tipo y cantidad óptima de productos que deben ser encargados a los proveedores.

3.1. Planteamiento del problema

Desde el punto de vista táctico, consideraremos un único ciclo de inventario, es decir, únicamente se realizará un encargo de productos sin posibilidad de reponer existencias. Esto desencadena la siguiente secuencia de eventos. Primero, los proveedores exponen los productos que pueden suministrar indicando la cota máxima de producción que pueden ofrecer. Seguidamente, el comerciante deberá elegir qué productos ofrecer a los clientes. Para determinar la cantidad óptima a encargar, es fundamental considerar la reacción del cliente ante el surtido elegido, los costes derivados de encargos y la limitada capacidad disponible.

Un factor influyente a tener en cuenta es la aleatoriedad de la demanda. Esta será modelada por una representación conjunta de la demanda de cada uno de los productos de la categoría, describiendo una colección de posibles escenarios con probabilidades dadas. Esta distribución se puede obtener considerando la demanda global para una categoría dada y dividiéndola con la ayuda de las estimaciones de la cuota de mercado de cada producto . El surtido y los proveedores serán seleccionados para maximizar el beneficio esperado sobre el conjunto de posibles escenarios.

Para representar la sustitución de demanda utilizaremos un modelo exógeno relativamente simple que capture el comportamiento general de los clientes. Consideraremos sustitución dinámica, por lo que si un producto no está disponible, este podrá ser sustituido por otro con cierta probabilidad.

Consideraremos una única categoría de productos formada por un conjunto de artículos, que denotaremos por P y un conjunto de proveedores ofreciendo estos productos, que denotaremos por S. Consideraremos varios niveles de sustitución, siendo M el último nivel. Denotaremos por B al número de escenarios de demanda, con β_b representando la probabilidad de que se dé el escenario b, cumpliendo $\sum_{b=1}^{B} \beta_b = 1$. Veamos la formulación del problema:

Parámetros

w_{ik} Proporción de clientes cuya preferencia es el producto i que sustituyen el producto i con el producto k.

w_i^l Proporción de clientes cuya preferencia es el producto i que rechazan sustituir el producto i con otro producto.

c_i Coste unitario de compra y transporte del producto i.

ssc_j Costes por elegir al proveedor j.

oc_j Costes de logística derivados de la elección del proveedor j.

d_{ib} Demanda del producto i bajo el escenario b.

OQ_i Cota superior de encargo del producto i.

SS_i Cantidad máxima de espacio disponible para producto j.

a_{ij} 1, si el producto i puede ser provisto por el proveedor j; 0, caso contrario.

h_i Coste unitario de almacenamiento de producto i.

pq_i Coste unitario derivado de recibir producto i de mala calidad.

q_i Probabilidad de recibir producto i de mala calidad.

s_{mi} Coste de penalización por usar producto i en el nivel m de sustitución.

s^l_{mi} Coste de penalización por pérdida en el nivel m de sustitución de cliente cuya preferencia inicial era el producto i.

$z0_i$ Inventario inicial de producto i.

Variables

$z1_{ib}$ Inventario final de producto i bajo el escenario de demanda b.

x_i Cantidad de producto i encargado.

y_i 1, si el producto i es encargado; 0, caso contrario.

o_j 1, si encargamos productos al proveedor j; 0, caso contrario.

$x0_{ib}$ Demanda prioritaria de producto i bajo el escenario de demanda b.

xs_{mikb} Cantidad de producto i usada para satisfacer m-ésima sustitución del producto k bajo el escenario de demanda b.

xl_{mkb} Ventas perdidas en el m-ésimo nivel sustitución bajo el escenario de demanda b de clientes cuya preferencia inicial era el producto k .

Modelo

Max $\quad \text{TP} = \text{TR - TCO - TCSS - TCP - TCI - TCPQ - TCS - TCL} \quad (1)$

sujeto a:

$$\text{TR} = \sum_{i\in P}\sum_{b=1}^{B} p_i\beta_b(z0_i + x_i - z1_{ib}) \tag{2}$$

$$\text{TCO} = \sum_{j\in S} oc_j o_j \tag{3}$$

$$\text{TCSS} = \sum_{j\in S} ssc_j o_j \tag{4}$$

$$o_j \geq a_{ij}y_i \qquad \forall i\in P, \forall j\in S \tag{5}$$

$$\text{TCP} = \sum_{i\in P} c_i x_i \tag{6}$$

$$\text{TCI} = \sum_{b=1}^{B}\sum_{i\in P}\frac{(z0_i + x_i + z1_{ib})\beta_b}{2}h_i \tag{7}$$

$$\text{TCPQ} = \sum_{i\in P} pq_i q_i x_i \tag{8}$$

$$\text{TCS} = \sum_{b=1}^{B}\sum_{m=1}^{M}\sum_{i\in P}\sum_{k\in P} s_{mi}\beta_b xs_{mikb} \tag{9}$$

$$\text{TCL} = \sum_{b=1}^{B}\sum_{m=1}^{M}\sum_{i\in P} s^l_{mi}\beta_b xl_{mib} \tag{10}$$

$$x0_{ib} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k\in P} xs_{mkib} + \sum_{m=1}^{M} xl_{mib} = d_{ib} \qquad \forall i\in P,\ \forall b = 1,\dots,B \tag{11}$$

$$x0_{ib} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k\in P} xs_{mikb} + z1_{ib} = z0_i + x_i \qquad \forall i\in P,\ \forall b = 1,\dots,B \tag{12}$$

$$xs_{1ikb} \leq (d_{kb} - x0_{kb})w_{ki} \qquad \forall i,\ k\in P\setminus\{i\},\ \forall b = 1,\dots,B \tag{13}$$

$$xl_{1kb} \leq (d_{kb} - x0_{kb})w^l_k \qquad \forall i,\ k\in P\setminus\{i\},\ \forall b = 1,\dots,B \tag{14}$$

$$xs_{2ikb} \leq (d_{kb} - x0_{kb} - xl_{1kb} - \textstyle\sum_{r\in P} xs_{1rkb})\textstyle\sum_{r\in P} w_{kr}w_{ri}$$

$$\forall i,\ k\in P\setminus\{i\},\ \forall b = 1,\dots,B \tag{15}$$

$$xl_{2kb} \leq (d_{kb} - x0_{kb} - xl_{1kb} - \textstyle\sum_{r \in P} xs_{1rkb}) \sum_{r \in P} w_{kr} w_r^l$$
$$\forall i,\ k \in P \setminus \{i\},\ \forall b = 1, \ldots, B \tag{16}$$

$$z0_i + x_i \leq SS_i \qquad \forall i \in P \tag{17}$$

$$0 \leq x_i \leq OQ_i y_i \qquad \forall i \in P \tag{18}$$

$$y_i, o_j \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in P,\ \forall j \in S \tag{19}$$

$$z1_{ib}, x0_{ib}, xs_{mikb}, xl_{mkb} \geq 0 \qquad \forall i \in P,\ \forall b = 1, \ldots, B,\ \forall m = 1, \ldots, M \tag{20}$$

La función objetivo TP definida en (1) maximiza el beneficio esperado. En esta ecuación, el término TR indica el ingreso total esperado, TCO indica el coste esperado de encargo, TCSS indica el coste esperado de selección de proveedores, TCP indica el coste esperado de compra, TCI indica el coste esperado de almacenamiento, TCPQ indica el coste esperado derivado de recibir productos de mala calidad, TCS indica el coste esperado de sustitución y TCL indica el coste esperado por ventas perdidas. El ingreso total esperado es formulado en la ecuación (2) y el coste esperado de encargo en la ecuación (3). Las ecuaciones (4) y (5) proporcionan la formulación del coste esperado de selección de proveedores, con la selección de un proveedor implicando al menos un encargo. El coste esperado de compra es formulado en la ecuación (6) y el coste esperado de almacenamiento en la ecuación (7), donde el inventario esperado es calculado como la media del inventario inicial y final para todos los escenarios posibles de demanda. La ecuación (8) representa el coste esperado derivado de recibir productos de mala calidad. La ecuación (9) representa el coste esperado de sustitución y la ecuación (10) el coste esperado por ventas perdidas. La demanda de un producto es la suma de la demanda prioritaria satisfecha en primera instancia y de la cantidad de otros productos usados para sustituirlo. Esto es representado en la ecuación (11). La ecuación (12) asegura que para cada producto, el inventario inicial junto a la cantidad encargada de producto, debe ser igual a suma de la cantidad de la demanda prioritaria satisfecha en primera instancia, de la cantidad de producto usada para sustituir a otros productos y del inventario final. El comportamiento de sustitución es descrito en las ecuaciones (13)-(16) con la ayuda de la matriz de sustitución W. La cantidad de producto i usado para sustituir al producto k y la cantidad de ventas perdidas de producto i, no puede ser mayor que una cierta proporción de la demanda restante tras satisfacer la demanda prioritaria junto a la demanda sustituida o perdida del producto k. Estas desigualdades pueden obtenerse para cada nivel de sustitución, pero debido a la complejidad creciente en cada nivel, únicamente se mostraran las dos primeras. La ecuación (17) refleja la limitación de espacio disponible, la

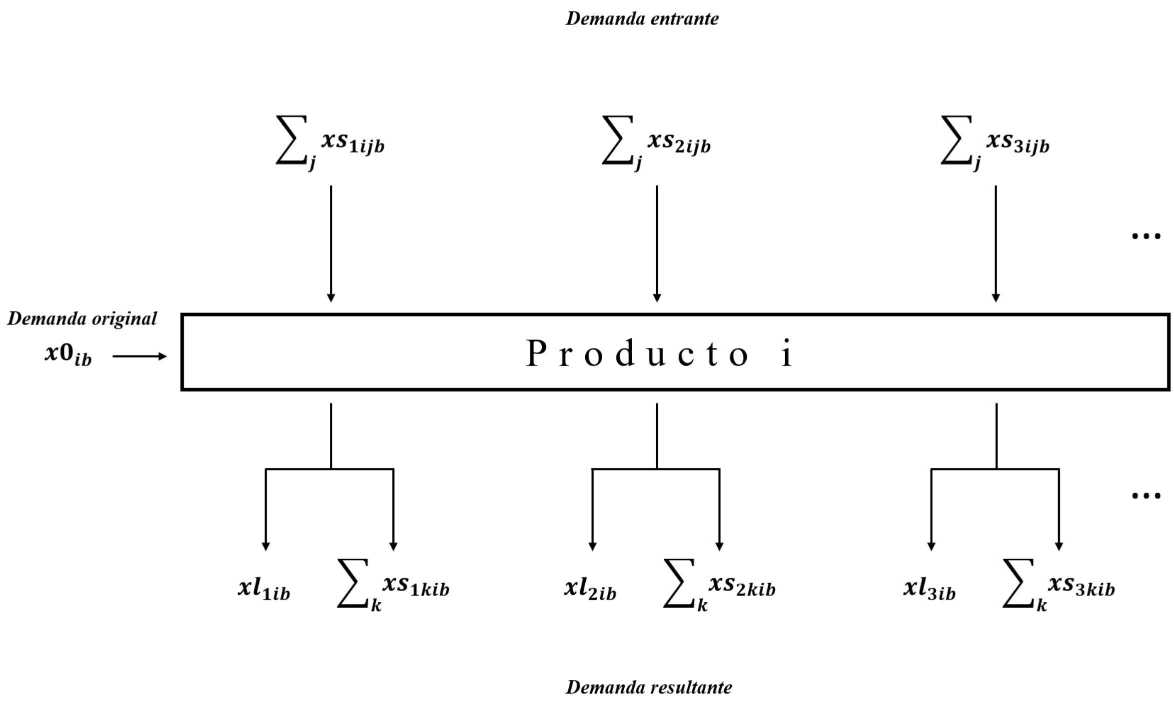

Figura 3.1: Representación general de la demanda.

ecuación (18) representa la cota máxima de producción de los proveedores y las ecuaciones (19) y (20) indican la naturaleza de las variables.

La función objetivo considera varios tipos de costes. El comerciante decidirá cuales de estos considerar según sus circunstancias y necesidades. El coste de selección de proveedores es un parámetro de control que previene la colaboración con un gran número de proveedores. Asimismo, el coste de sustitución puede ser interpretado como otro parámetro de control que representa el impacto negativo en la confianza del cliente que puede reflejarse en pérdidas de ventas en un futuro próximo. Sin embargo, determinar con precisión la incidencia de la decepción del cliente sobre las ventas es una tarea compleja. Es por ello que en nuestro modelo incluimos leves penalizaciones por cada sustitución o pérdida de venta. Desde un punto de vista estratégico, el comerciante deberá conocer las necesidades de sus clientes, ya que las altas expectaciones se traducirán en costes altos de sustitución. Estos costes también dependen de la categoría de productos que consideremos. Por ejemplo, al ser los consumidores más reacios a sustituir productos de higiene personal, el parámetro de coste de sustitución deberá tomar un valor más alto para esta categoría.

La figura 3.1 representa el fenómeno de sustitución. Para cada producto i y escenario de demanda b hay 3 conjuntos de arcos describiendo las diversas formas de demanda: (i) Demanda prioritaria del producto i, $x0_{ib}$, (ii) demanda entrante derivada de la sustitución de otros productos para cada nivel m ($\sum_{i\in P} xs_{mijb}$) y (iii) Demanda saliente hacia otros producto para sustituir al producto i ($\sum_{k\in P} xs_{mkib}$) y demanda perdida del producto en cada nivel de sustitución m (xl_{mib}).

3.2. Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar el funcionamiento de nuestro modelo, proporcionaremos un ejemplo con tres productos/marcas: P1, P2 y P3; y dos proveedores: S1 y S2, donde S1 ofrece el producto P2 y S2 ofrece los productos P1 y P3. Los inventarios iniciales serán 0. Consideraremos $m = 2$ niveles de sustitución, con matriz de sustitución dada en Tabla 3.2. La información en esta tabla muestra que para los clientes con producto favorito P1, 10 % seleccionan al producto P2 como segunda opción, 20 % seleccionan el producto P3 y el 70 % se marchan sin comprar nada si el producto P1 no se encuentra disponible.

Los valores de los parámetros de productos se proporcionan en la Tabla 3.3 y los parámetros de proveedores se proporcionan en la Tabla 3.4. Para este ejemplo, consideremos un único escenario de demanda que ocurre con probabilidad 1.

Asumiremos que los costes de penalización por sustitución vienen dados por

$$s_{mi} = \theta \cdot m \cdot mg_i,$$

donde m representa el nivel de sustitución, mg_j la diferencia entre el precio de venta y el coste de compra del producto y $\theta > 0$ es un parámetro que depende de la categoría de productos que estemos considerando y de las expectaciones de los clientes. De manera similar vamos a definir los costes de penalización por pérdida de clientes. La expresión vendrá dada por

$$s^l_{mi} = \beta \cdot mg_i,$$

donde $\beta = \text{máx}\{2\theta; 1\}$ con el fin de garantizar que la penalización por pérdida de venta es equiparable al último nivel de sustitución.

Para resolver el problema hemos utilizado el software de programación matemática AMPL usando el solver CPLEX 20.1.0.0. El surtido óptimo proporcionado por el modelo lo conforman 3800 unidades de producto P1 y 7000 unidades de producto P2. Únicamente se trabajará con el proveedor S2, y el 30 % de la demanda del producto P2 es perdida, mientras que el 70 % sustituida.

Podemos encontrar el código usado para resolver este problema en el Apéndice A.

i-esima preferencia	i+1-esima preferencia			
Parámetro	P1	P2	P3	Pérdida
P1	-	0.1	0.2	0.7
P2	0.2	-	0.5	0.3
P3	0.1	0.5	-	0.4

Tabla 3.2: Matriz de sustitución

Parámetro	P1	P2	P3
c	10	8	6
d	3000	4000	5000
OQ	12000	10000	20000
SS	10000	12000	9000
h	0.7	0.5	0.4
pq	4	3	2
q	0.05	0.10	0.09
p	19	14	12

Tabla 3.3: Parámetros de productos

Parámetro	S1	S2
oc	40	45
ssc	35000	50000

Tabla 3.4: Parámetros de proveedores

3.3. Estudio computacional

En nuestro experimento computacional generaremos instancias con 10 productos y 5 proveedores. Asumiremos 2 niveles de sustitución, ya que como vimos en la sección 2.3, la cantidad de elementos sustituidos en niveles altos tiende a ser muy baja.

La matriz de proveedores A, común en todos los experimentos viene dada en la tabla 3.5. Asumiremos que cada producto está asociado a una marca concreta y por lo tanto no puede ser provisto por más de un proveedor, pero un proveedor puede proveer más de un producto/marca.

Los parámetros son generados siguiendo la tabla 3.6. Para realizar el estudio, generamos 100 muestras según las distribuciones provistas. El promedio de los valores sobre estos 100 conjuntos de datos serán expuestos en las siguientes secciones.

Proveedor	Producto									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Tabla 3.5: Matriz de proveedores

Parámetro	Distribución
w_{ik}	Distribución uniforme, con $\sum_{k \in P} w_{ik} = 1$ y $0 \leq w_{ik} \leq 1, \forall i, k \in P$
c_i	Distribución uniforme, con $5 \leq c_i \leq 10, \forall i \in P$
oc_j	Distribución uniforme, con $30 \leq oc_j \leq 50, \forall j \in S$
ssc_j	Distribución uniforme, con $25000 \leq ssc_j \leq 40000, \forall j \in S$
d_i	$d_i = 70000 * \alpha_i$, donde α_i sigue una distribución uniforme, con $0 \leq d_i \leq 1, \forall i \in P$, y $\sum_i \alpha_i = 1$ (asumimos que la demanda total es 70000)
OQ_i	Distribución uniforme, con $4000 \leq OQ_i \leq 34000, \forall i \in P$
SS_i	Distribución uniforme, con $8000 \leq SS_i \leq 40000, \forall i \in P$
h_i	Distribución uniforme, con $0.3 \leq h_i \leq 1, \forall i \in P$
pq_i	Distribución uniforme, con $2 \leq pq_i \leq 4, \forall i \in P$
q_i	Distribución uniforme, con $0 \leq q_i \leq 0.15, \forall i \in P$
p_i	$p_i = c_i + mg_i$, donde mg_i sigue una distribución normal con media 6 y desviación típica 2, $\forall i \in P$. (mg_i puede ser considerado como el margen del producto i)

Tabla 3.6: Parámetros

3.3.1. Importancia de los costes de penalización por sustitución

La tabla 3.7 presenta el beneficio total y costes operacionales según varía el coste del parámetro θ de penalización por sustitución.

En la tabla 3.8, el porcentaje medio de demanda satisfecha en primera instancia es representado bajo la columna %ds, el porcentaje medio de ventas perdidas bajo la columna %ls y el porcentaje medio de productos sustituidos bajo la columna %subs. Esta tabla muestra como estos valores cambian según varía el parámetro θ.

Tal y como podemos apreciar en la imagen 3.2, la variación de este parámetro afecta significativamente al beneficio total obtenido. En la imagen 3.3 podemos observar que al aumentar el valor de θ se prioriza cubrir la demanda en primera instancia para así evitar costes derivados de la sustitución, dependientes de θ.

θ	TP	TR	TCO	TCSS	TCP	TCI	TCPQ	TCS	TCL
0	240421.40	951931.22	195.18	157460.94	507736.87	21884.30	15021.97	0	9210.52
0.1	228831.39	951134.93	194.12	156572.22	511242.87	22059.17	15137.75	10069.60	7027.77
0.2	219920.67	949121.81	193.68	156172.32	513955.56	22190.36	15184.35	15836.68	5668.16
0.3	213035.45	94574852	193.59	156112.66	516438.84	22312.59	15265.26	17781.92	4608.17
0.4	207729.31	942654.29	193.55	156066.20	517652.9	22377.73	15327.19	19238.12	4069.25
0.5	203311.91	939955.31	193.39	156041.01	518363.20	22404.31	15386.62	20490.67	3764.16
0.6	198675.70	938460.03	193.88	156515.24	518772.43	22441.13	15423.36	22165.94	4272.31
0.7	194404.73	937418.84	194.30	156840.27	518948.79	22468.07	15434.31	24280.50	4847.84
0.8	190355.33	936719.83	195.06	157484.27	519091.98	22475.86	15463.77	26252.20	5401.34
0.9	186445.50	936365.41	195.48	157807.73	519082.65	22477.76	15486.59	28848.96	6020.72
1	182607.84	936364.12	196.02	158265.90	519179.96	22481.59	15494.35	31546.33	6592.10

Tabla 3.7: Costes según varía θ

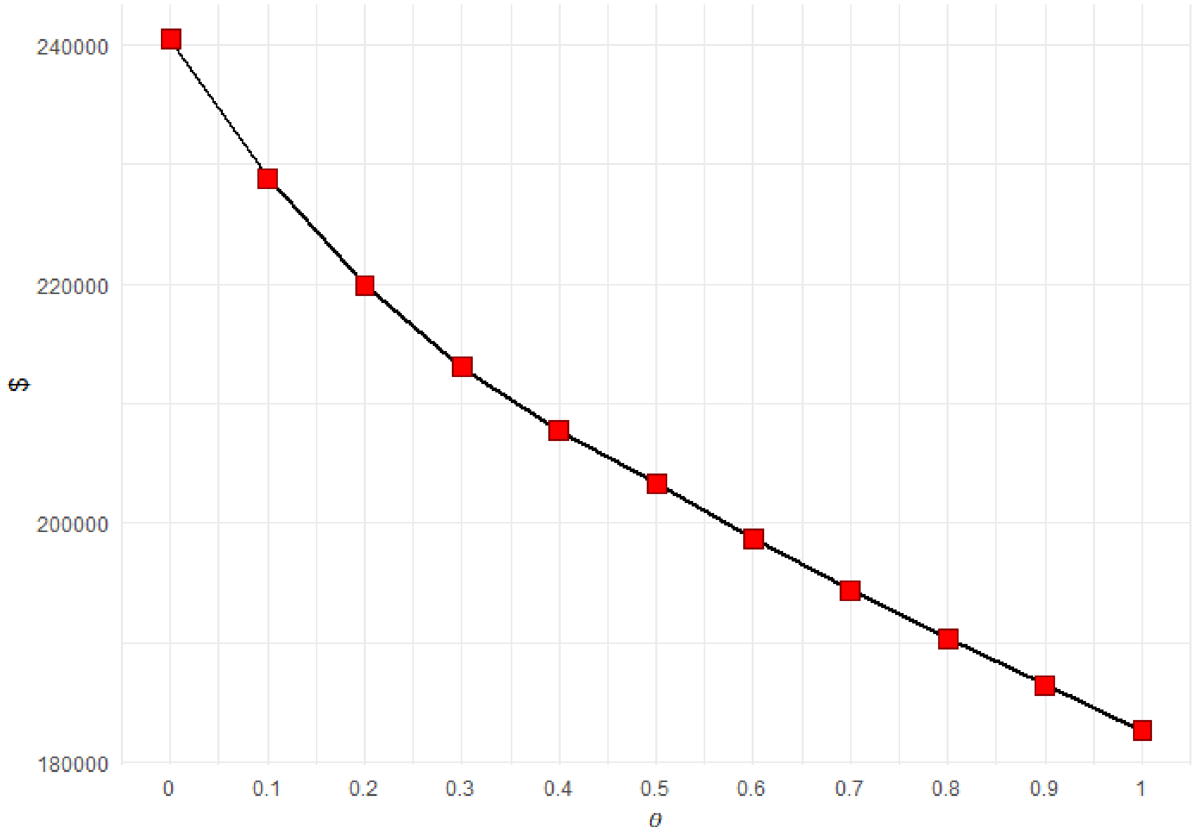

Figura 3.2: Cambio en el beneficio según θ aumenta

3.3.2. Importancia del comportamiento de sustitución

Vamos a comparar la solución de dos modelos, el original y este mismo sin considerar el efecto de sustitución. En la tabla 3.9, el beneficio del modelo original se encuentra debajo de la columna [TP], el beneficio del modelo que no considera sustitución se encuentra debajo de la columna [TP sin cs], la diferencia entre estos valores se encuentra en la columna [Dif] y el

θ	&ds	%ls	%subs
0	66.39	2.87	30.72
0.1	74.34	2.23	23.41
0.2	79.75	1.78	18.46
0.3	84.71	1.39	13.88
0.4	87.49	1.17	11.32
0.5	89.25	1.02	9.71
0.6	90.27	0.93	8.79
0.7	90.85	0.88	8.25
0.8	91.31	0.84	7.83
0.9	91.53	0.82	7.64
1	91.66	0.80	7.53

Tabla 3.8: Efecto del parámetro θ en la sustitución

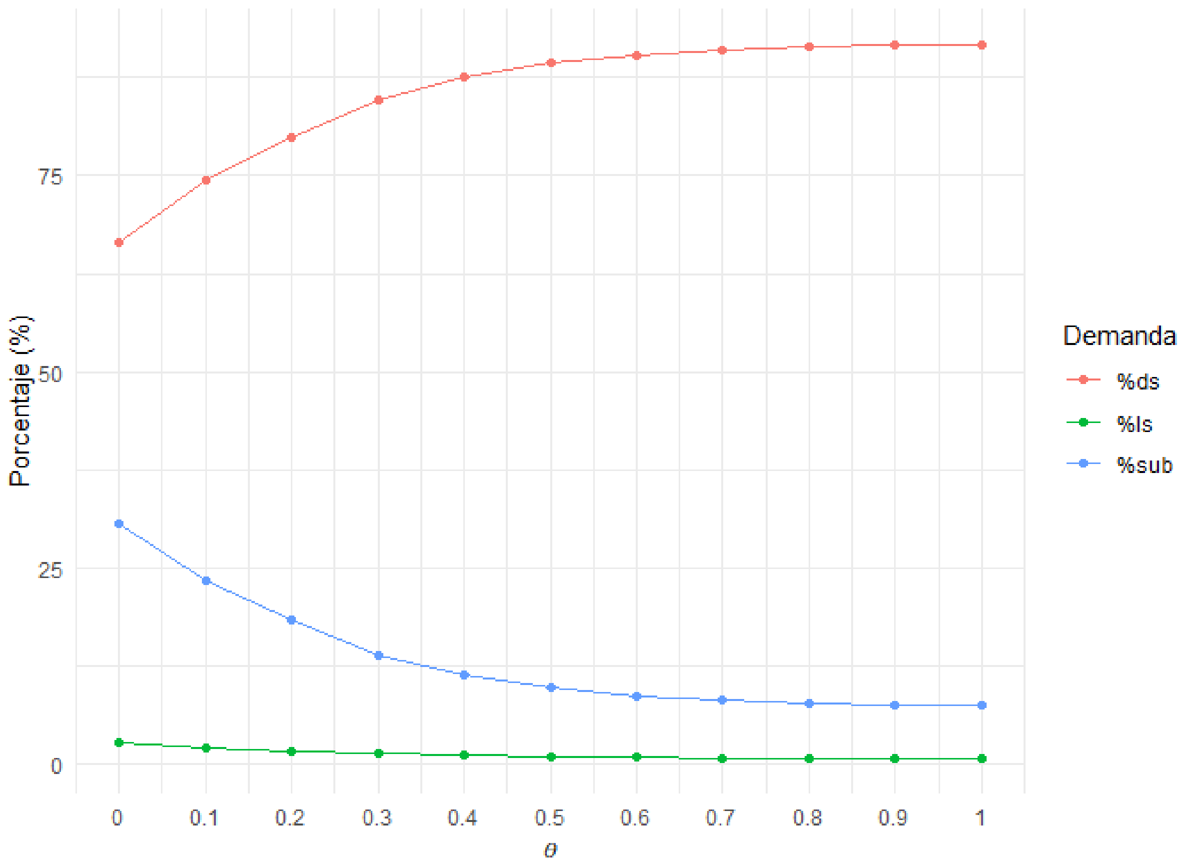

Figura 3.3: Efecto del parámetro θ en la sustitución

porcentaje de diferencia respecto al beneficio total del modelo original vienen dados bajo la columna [% Diff], donde [%Diff] $= 100 * ([TP] - [TP \text{ sin cs}])/[TP]$. Los resultados muestran que un mayor valor en el coste de penalización por sustitución, incrementa las pérdidas si no consideramos el efecto de sustitución. Esto se puede ver en la figura 3.4.

θ	[TP]	[TP sin cs]	[Dif]	[%Dif]
0	240421.40	240421.40	0	0
0.1	228831.39	218959.27	9872.12	4.31
0.2	219920.67	204213.58	15707.09	7.14
0.3	213035.45	187598.04	25437.41	11.94
0.4	207729.31	175541.94	32187.37	15.49
0.5	203311.91	157207.62	46104.29	22.68
0.6	198675.70	139925.71	58749.99	29.57
0.7	194404.73	122338.49	72066.24	37.07
0.8	190355.33	104587.76	85767.57	45.06
0.9	186445.50	77229.83	109215.67	58.58
1	182607.84	68531.01	114076.83	62.47

Tabla 3.9: Comparación de beneficios

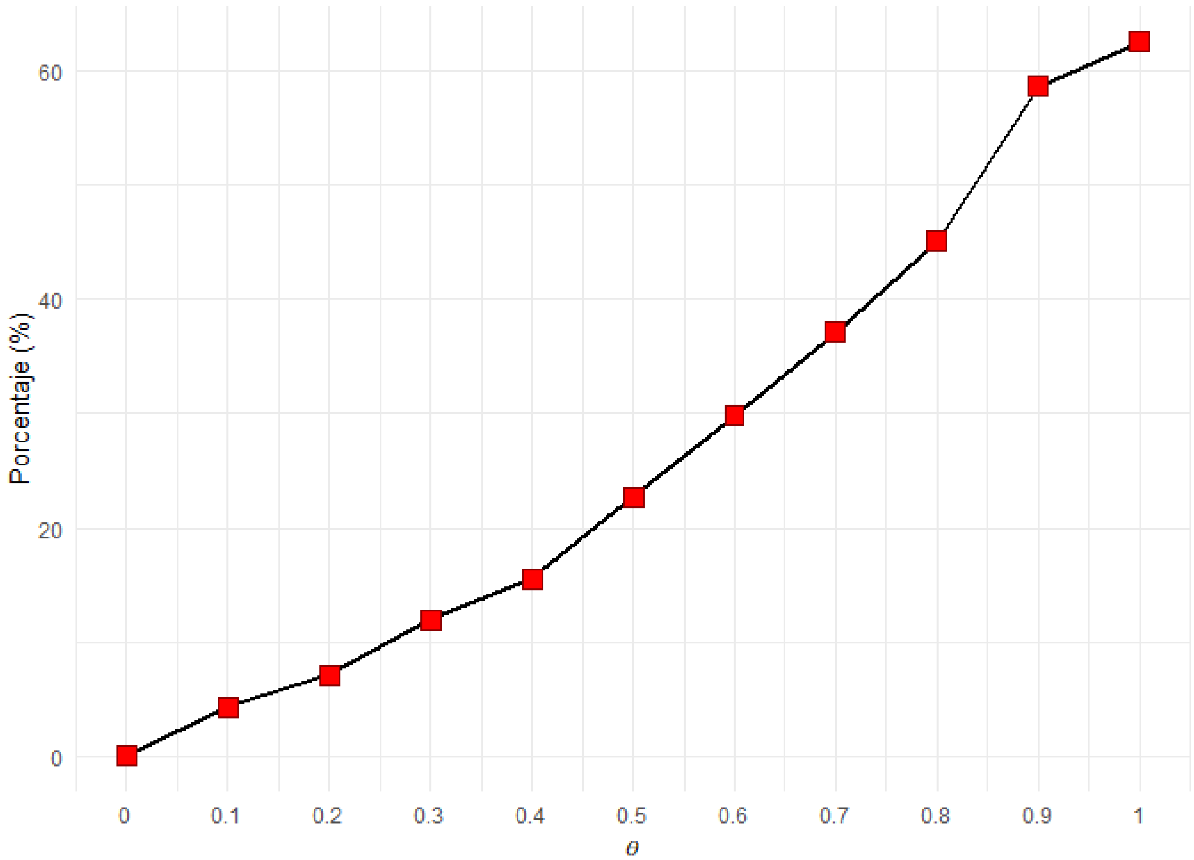

Figura 3.4: Porcentaje de pérdidas derivadas de no considerar el efecto de sustitución.

Capítulo 4

Fijación de precios para líneas de productos

Durante la celebración de la copa Mundial de la FIFA en Sudáfrica surgieron una serie de cuestiones interesantes desde un punto de vista analítico. El comité de organización debía determinar, por adelantado, los precios de todos los partidos para cada uno de los cuatro tipos de asientos disponibles. En este ejemplo, los diferentes tipos disponibles definen una línea de productos, donde los diferentes productos ofrecen el mismo servicio básico, pero difieren en cualidades y características como ángulo de visión o comodidad de asiento. La capacidad de cada producto es limitada y no puede ser ajustada en breves periodos de tiempo para adaptarse a una demanda incierta. Además, los precios deberán fijarse durante el periodo de venta, es decir, serán estáticos. La tarea del vendedor es determinar los precios específicos de cada producto con el fin de maximizar el beneficio total.

Planteamientos similares al anterior suelen ser frecuentes en varios ámbitos cotidianos. Por ejemplo, una compañía de cruceros necesita fijar los precios para cada viaje basándose en la calidad de cada camarote. También, teatros y conciertos emplean precios estáticos.

Aunque usar precios estáticos evita que el vendedor sea capaz de adaptarse a la incertidumbre de la demanda, existen una serie de razones que lo hace recomendable. En el ejemplo del crucero, los clientes pueden percibir como injusto que se le asignen precios diferentes por el mismo tipo de tour y de camarote. Además, este planteamiento evita procesos más complejos que implicaría el uso de mecanismos más sofisticados.

En este capítulo, apoyándonos en al artículo [12], vamos a introducir un modelo de programación lineal entera mixta con el fin de fijar precios para una línea de productos.

4.1. Planteamiento del problema

Consideraremos un único vendedor que ofrece un determinado servicio, donde los productos ofertados se diferencian por atributos distintivos o bien por explotación de sus cualidades intrínsecas. En el ejemplo de fijación de precios para los partidos, aspectos como la comodidad del asiento y el ángulo de visión son ejemplos de ambas formas de distinción, respectivamente.

Los precios han de ser seleccionados a partir de un conjunto predefinido de valores que denominaremos puntos de precio. Según las preferencias de cada cliente, estos determinarán para cada producto cierto precio de reserva, que será el valor más alto que estarán dispuestos a pagar por adquirirlo. Por lo tanto, el cliente únicamente considerará la compra de los productos disponibles de manera que el precio elegido por el vendedor no sea mayor que el correspondiente precio de reserva elegido por el cliente. De entre todos los productos, el cliente escogerá aquel que maximice su surplus, i.e, la diferencia entre su precio de reserva y el precio elegido por el vendedor.

Al inicio del período de ventas, el vendedor deberán determinar los puntos de precios r_j para los J productos disponibles (j=1,. . . ,J) que maximicen el beneficio derivado de vender estos productos a I clientes, que van llegando a lo largo del periodo. El proceso de venta se desarrolla de la siguiente manera:

- Cada producto j tiene una capacidad inicial de c_{0j} que se va reduciendo cada vez que una unidad es vendida a un cliente i. La capacidad restante tras la llegada del cliente i es denotada por c_{ij}. Por lo tanto diremos que el producto j está disponible para el cliente i si $c_{i-1j} > 0$.

- El vendedor deberá elegir un precio r_j para cada producto j de entre un conjunto predefinido de precios discreto r_{jn} $(n = 1, \ldots, N_j)$, i.e $r_j \in \{r_{j1}, \ldots, r_{jN_j}\}$. Los productos son ordenados de mayor a menor según la percepción general del vendedor sobre su valor de mercado. En el ejemplo de la fijación de precios para las entradas de la copa Mundial de la FIFA, los asientos VIP serán considerados como productos *premium* y se les asignará el índice $j = 1$, mientras que a la categoría más barata se le asignará el índice $j = 4$. Por lo tanto tendremos que $r_j \geq r_j + 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, J - 1\}$.

- Los I clientes irán apareciendo de forma secuencial según su representación numérica, y solo podrán elegir entre los productos disponible en el momento de su llegada. El precio de reserva del cliente i para el producto j será denotado por v_{ij}. En general, los precios de reserva v_{ij} de un cliente i no es necesario que decrezcan de manera monótona desde el producto $j = 1$ hasta el producto J. Por ejemplo, algunos clientes tienen un presupuesto limitado, y por tanto, pueden tener precios de reserva similares para categorías baratas y caras.

- Cada cliente i selecciona como máximo un producto disponible j', aquel que proporcione el mayor surplus positivo (v_{ij} - r_j) cumpliendo:

$$v_{ij'} - r_{j'} = \max_{j \in \{1,\dots,J\}} \{v_{ij} - r_j | (c_{i-1j} > 0 \wedge v_{ij} - r_j \geq 0)\} \quad \forall i \in \{1,\dots,I\}$$

Esta ecuación define la *regla del máximo surplus*, que deriva del comportamiento racional de los consumidores, y considera la restricción de participación (PC: $v_{ij'} - r_{j'} \geq 0$) y la restricción de compatibilidad (IC: $v_{ij'} - r_{j'} = \max_{j \in \{1,\dots,J\}}\{v_{ij} - r_j\}$). En el caso que PC no se cumpla para ningún producto disponible, el cliente i se marcha sin comprar nada. Planteemos ahora el modelo:

Índices

$i = 1,\dots,I$ Índices de los clientes.

$j,k = 1,\dots,J$ Índices de los productos.

$n,m = 1,\dots,N_j$ Índices de los puntos de precio.

Parámetros

r_{jn} n-ésimo punto de precio del producto j.

c_{0j} Capacidad inicial del producto j.

v_{ij} Precio de reserva del cliente i para el producto j.

s_{ijn} Surplus modificado del cliente i para el producto j en el precio r_{jn}; $s_{ijn} = 1 + (v_{ij}$ - $r_{jn})$, si $(v_{ij}$ - $r_{jn}) \geq 0$, en caso contrario 0.

Variables de decisión

x_{ijn} 1, si el cliente i elige el producto j en el punto de precio r_{jn}, 0 en caso contrario.

k_{ij} 1, si el producto j está disponible para el cliente i, 0 en caso contrario.

π_{jn} 1, si el producto j se ofrece al precio r_{jn}, 0 en caso contrario.

c_{ij} Cantidad restante del producto j tras el paso del cliente i.

Modelo

$$\textbf{Máx} \qquad \text{TR(x,k,}\pi\text{,c)} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N_j} x_{ijn} r_{jn} \tag{1}$$

$$\textbf{sujeto a:} \qquad \sum_{n=1}^{N_j} \pi_{jn} \qquad \forall j \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N_j} r_{jn}\pi_{jn} \geq \sum_{n=1}^{N_{j+1}} r_{j+1n}\pi_{j+1n} \qquad \forall j = 1, \ldots, (J-1) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N_j} x_{ijn} \leq 1 \qquad \forall i \tag{4}$$

$$c_{ij} = c_{i-1j} - \sum_{n=1}^{N_j} x_{ijn} \qquad \forall i, j \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{N_j} x_{ijn} \leq k_{ij} \qquad \forall i, j \tag{6}$$

$$\frac{c_{i-1j}}{c_{0j}} \leq k_{ij} \qquad \forall i, j \tag{7}$$

$$k_{ij} \leq c_{i-1j} \qquad \forall i, j \tag{8}$$

$$x_{ijn} \leq s_{ijn}\pi_{jn} \qquad \forall i, j, n \tag{9}$$

$$s_{ijn}(k_{ij} + \pi_{jn} - 1) \leq \sum_{k=1}^{J}\sum_{m=1}^{N_k} s_{ikm}x_{ikm} \qquad \forall i, j, n \tag{10}$$

$$c_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \tag{11}$$

$$x_{ijn}, k_{ij}, \pi_{jn} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j, n \tag{12}$$

La función objetivo (1) maximiza el beneficio total considerando las decisiones de compra de los clientes. En el caso que decidan adquirir el producto en el punto de precio r_{jn}, i.e $x_{ijn} = 1$, el correspondiente beneficio es añadido a la función objetivo.

La restricción (2) asegura que para cada producto se elige únicamente un punto de precio. La restricción (3) asegura que los productos son ordenados de mayor a menor según la percepción general del vendedor sobre su valor de mercado.

Por la restricción (4), cada cliente puede comprar como máximo un producto. La restricción (5) indica que la capacidad de cada producto se reduce en una unidad cada vez que se realiza una compra.

Las restricciones restantes son necesarias para representar el proceso de elección durante la compra. Según la restricción (6), solo se puede efectuar la compra de productos disponibles. Además, según la restricción (7), la variable k_{ij} es forzada a ser 1 si el producto j está disponible para el cliente i, o en caso contrario a 0 por la restricción (8). La restricción (9) representa el PC: la compra de cierto producto a cierto punto de precio es posible si el surplus modificado del cliente es estrictamente positivo. La restricción (10) obliga al cliente a comprar si al menos un surplus es no negativo y existe disponibilidad del producto en un cierto punto de precio, i.e $k_{ij} = 1$ y $\pi_{jn} = 1$. Además, la restricción (10) asegura el cumplimiento del IC: los clientes compran el producto que les proporcionen un mayor surplus.

Este modelo se caracteriza por un gran número de variables binarias. Además de considerar las $\sum_{j=1}^{J} N_j$ variables π_{jn} que representan los posibles puntos de precios de los productos, modelizar las preferencias del cliente requiere la definición adicional de $I \cdot (\sum_{j=1}^{J} N_j) + I \cdot J$ variables x_{ijn} y k_{ij} . En consecuencia, considerando un escenario con $I = 717, J = 80$ y $N_1 = \cdots = N_8 = 80$, obtenemos un total de 465256 variables binarias.

Sin embargo, asumiendo cierta condición poco restrictiva, este número de variables binarias puede ser reducido drásticamente. Asumiremos que, para cada cliente i, los precios de reserva v_{ij} verifican que no existe ninguna combinación de productos $j \neq k$ con $v_{ij} - r_{jn} = v_{ik} - r_{km}$, para cualesquiera puntos de precio r_{jn} y r_{km}. En resumen, para todas las posibles combinaciones de productos y precios de puntos, el surplus toma valores diferentes. Por lo tanto, también obtendremos diferentes valores s_{ijn} y s_{ikm} para todos los productos y puntos de precio que cumplan $v_{ij} - r_{jn} \geq 0$ y $v_{ik} - r_{km} \geq 0$. Entonces en la restricción (12) podemos reemplazar $x_{ijn} \in \{0, 1\}$ por $x_{ijn} \geq 0$. Si no existe disponibilidad de producto j para el cliente i, obtenemos que $k_{ij} = 0$ por la restricción (8) y por lo tanto todos los valores de x_{ijn}, obligados por la restricción (6), toman valor 0 . Gracias a la restricción (9), lo mismo ocurre para x_{ijn} cuando el punto de precio r_{jn} no es elegido para el producto j ($\pi_{jn} = 0$) o el correspondiente surplus modificado es $s_{ijn} = 0$ ($v_{ij} - r_{jn} < 0$). Entre todos los productos j y los puntos de precio r_{jn} con $k_{ij} = 1, \pi_{jn} = 1$, y $s_{ijn} > 0$, existe un único producto k que alcanza el valor máximo de s_{ikm} para cada cliente i. Ya que la suma de las variables x_{ijn} para un cliente i ser como máximo 1 según la restricción (4), fijando el valor $x_{ikm} = 1$ es la única posibilidad factible para conseguir un valor no más pequeño que s_{ikm} en el lado derecho de la restricción (10). Con esta modificación, en el escenario previamente considerado, únicamente existirían un total de 6376 variables binarias.

4.2. Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar nuestro modelo consideraremos un ejemplo con $J = 2$ productos. Para ambos productos, consideraremos una capacidad inicial de $c_{01} = c_{02} = 2$ y $N_1 = N_2 = 20$ puntos de precio idénticos $r_{jn} \in \{0, 5, \ldots, 95\}$. Además, $I = 5$ clientes llegan con precios de reserva v_{i1} y v_{i2}, presentes en la tabla 4.2.

i	$j = 1$ $(r_1 = r_{1,16} = 75)$					$j = 2$ $(r_2 = r_{1,12} = 55)$				
	v_{i1}	PC	IC	c_{i1}	$v_{i1} - r_1$	v_{i2}	PC	IC	c_{i2}	$v_{i1} - r_2$
1	72	×	-	2	-3	69	✓	✓	1	14
2	66	×	-	2	-9	0	×	-	1	-55
3	81	✓	✓	1	6	57	✓	×	1	2
4	92	✓	✓	0	17	61	✓	×	1	6
5	55	×	-	0	-20	55	✓	✓	0	0

Tabla 4.2: Listado de alumnos

Esta tabla nos ayuda a representar el proceso de compra para los precios de reserva $r1 = 75$ y $r2 = 55$. Específicamente, elegir estos puntos maximiza el beneficio total, que resulta ser $2{\cdot}75 + 2{\cdot}55 = 260$. Esto lo podemos confirmar tras la resolución del modelo en AMPL con el solver CPLEX, cuyo código podemos encontrar en el Apéndice A.

4.3. Procedimiento de ramificación y poda

El número de posibles combinaciones para encontrar la solución del modelo crece exponencialmente con el número de productos. En general, el esfuerzo computacional para determinar todas las soluciones factibles y conseguir la correspondiente función objetivo es $\mathcal{O}(\prod_{j=1}^{J} N_j \cdot I \cdot J)$. Para $\prod_{j=1}^{J} N_j$ combinaciones de puntos de precio, I decisiones clientes deben ser evaluadas para J productos. Queremos examinar si el espacio de la función objetivo contiene alguna estructura que nos ayude a buscar la solución óptima de manera eficiente. Para ello nos apoyaremos en el ejemplo de la sección 4.2.

La figura 4.1 muestra el valor de la función objetivo para las posibles combinaciones entre los diferentes puntos de precio, con $r_{1n} = \{70, 75, \ldots, 95\}$ y $r_{2n} = \{50, 55, \ldots, 70\}$. El máximo global correspondiente a los puntos $r_1 = 75$ y $r_2 = 55$ es remarcado en negrita, y la casilla correspondiente está sombreada, al igual que la de los tres óptimos locales colindantes. Al tener la función objetivo varios óptimos locales, podemos asegurar que no es cóncava. Un algoritmo ascendente podría quedarse atascado en algún óptimo local, y en consecuencia, para determinar la solución óptima deberíamos examinar todas las combinaciones factibles. Por lo tanto, presentaremos un procedimiento de ramificación y poda que trate de reducir el esfuerzo computacional para encontrar la solución óptima.

$j = 2: r_{1n}$

$j = 2: r_{2n}$	70	75	80	85	90	95
50	240	175	180	185	190	100
55	250	**260**	190	195	200	110
60	200	210	220	145	150	120
65	205	215	225	150	155	65
70	140	150	160	85	90	0

Figura 4.1: Valor de la función objetivo en varios puntos de precio

4.3.1. Cotas superiores

En primera instancia, sería interesante realizar cierto preprocesamiento para aprovechar la restricción de precios monótonamente decrecientes. La idea básica consiste en modificar los precios de reserva v_{ij} según van llegando los clientes $i = 1, \ldots, I$.

Consideremos un cliente i con un precio de reserva v_{ik} para un producto $k > 1$, mayor que el precio de reserva v_{ij} para un producto $j < k$. Si observamos la restricción (3) y (10) del modelo 4.1, el cliente no comprará el producto j, ya que al ser $v_{ij} < v_{ik}$ y $r_j \geq r_k$, el surplus $v_{ij} - r_j$ del producto j será menor que el surplus $v_{ik} - r_k$ del producto k. En consecuencia, los precios de reserva de los clientes i para todos los productos $1 \leq j < k$ con $v_{ij} < v_{ik}$ y $k = 2, \ldots, J$ pueden ser inicialmente fijados como cero (Líneas 4-6 en 4.2).

Sin embargo, deberíamos considerar la sustitución dinámica a lo largo del proceso. Si ocurre que el producto k no está disponible para el cliente i, compraría el producto $j < k$ aunque el (no negativo) surplus del producto j sea menor que el surplus del producto k. Para tener esto en cuenta, definiremos capacidades alternativas c'_{ik} con $c'_{0k} = c_{0k}$ para todos los productos k. Empezando con el cliente $i = 1$, la capacidad c'_{ik} será reducida una unidad para todos los productos cuyos precios de reserva cumplan que $v_{ij} > 0$ (Líneas 7-9 en 4.2). Esto refleja el hecho de que el cliente comprará estos productos según el precio que se le adjudiquen. A partir de ahora, los precios de reserva serán denotados por v'_{ij}.

```
for  i = 1, ..., I
do  for  k = 2, ..., J
    do  if  c'_ik > 0
        then  for  j = 1, ..., (k - 1)
              do  if  (v_ij < v_ik)
                  then  v_ij = 0
    for  j = 1, ..., J
    do  if  v_ij > 0
        then  c'_ij := c'_{i-1j} - 1
```

Figura 4.2: Código del preprocesamiento

La idea para una primera cota, que denominaremos $CS.PE$, consiste en la relajación de la restricción (4) del modelo 4.1, permitiendo así a los clientes comprar múltiples productos. En este caso, no sería necesario considerar sustitución dinámica entre productos ya que los clientes comprarán los productos que proporcionen un surplus positivo. Definiremos los *beneficios específicos* (a_{jn}) para cada punto de precio r_{jn}, con $n = 1, \dots, N_j$, como $a_{jn} = r_{jn} \cdot \text{mín}\{c_{0j}, |B_{jn}|\}$, con $B_{jn} = \{i | v'_{ij} \geq r_{jn}\}$. En este contexto, B_{jn} concreta el conjunto de clientes que para cada producto j cumplen la restricción de participación PC ($v_{ij'} - r_{j'} \geq 0$) en el punto de precio r_{jn}. Una cota superior del máximo beneficio obtenido vendrá dada por:

$$CS.PE = \sum_{j=1}^{J} \max_{n \in \{1,\dots,N_j\}} \{a_{jn}\}$$

Si $\sum_{j=1}^{J} c_{0j} > I$, entonces la suma del cardinal de los conjuntos B_{jn} que determinan el valor de CS.PE puede exceder al número de clientes I. En este caso una variante del problema de la mochila (KP) podría ayudarnos:

$$\textbf{Máx} \qquad \text{TR(x,k,}\pi\text{,c)} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=1}^{N_j} a_{jn} \pi_{jn} \tag{1}$$

$$\textbf{sujeto a:} \quad \sum_{n=1}^{N_j} \pi_{jn} = 1 \qquad \forall j \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N_j} r_{jn} \pi_{jn} \geq \sum_{n=1}^{N_{j+1}} r_{j+1,n} \pi_{j+1,n} \qquad \forall j = 1, \dots, (J-1) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N_j}|B_{jn}|\pi_{jn} \leq I \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{N_j}|B_{jn}|\pi_{jn} \leq c_{0j} \qquad \forall j \tag{5}$$

$$0 \leq \pi_{jn} \leq 1 \qquad \forall j, n \tag{6}$$

Este problema trata de elegir un único punto de precio (2) tal que los correspondientes precios decrezcan monótonamente (3), la suma de los valores $|B_{jn}|$ no supere a I (4), se respete la capacidad inicial (5) y se maximice el el valor CS.PE (1). Resolviendo este problema, obtenemos la cota superior CS.KP.

Finalmente, vamos a proponer otra cota superior CS.TP basándonos en un problema de transporte (TP), donde en vez de minimizar costes, maximizaremos el beneficio total. En este caso, relajaremos la restricción (3) del modelo del modelo 4.1. Para definir el problema, introduciremos arcos desde todo nodo proveedor, representados por los productos j hacia todo nodo de demanda, representados por los clientes i. El costo de cada arco será $r_j^i = \text{máx}_{n\in 1,\ldots,N_j}\{r_{jn}|r_{jn} \leq v'_{ij}\}$ para todo i, j. Si la restricción PC ($v'_{ij} < r_{jn}$) para el cliente i y el producto j no es satisfecha por ningún n, r_j^i tomará el valor 0. El problema queda así:

$$\begin{array}{lll}
\textbf{Máx} & \text{TP(y)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} r_j^i y_{ij} & (1)\\
\textbf{sujeto a:} & \displaystyle\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j & (2)\\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \leq c_{0j} \qquad \forall j & (3)\\
 & 0 \leq y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i, j & (4)
\end{array}$$

El valor de la función objetivo TP(y) representa el máximo beneficio que puede obtenerse al vender los productos con los precios específicos de cada cliente. La restricción (2) asegura que cada cliente compra como máximo 1 producto. La restricción (3) limita la venta total de cada producto al inventario inicial disponible.

4.3.2. Ramificación y cota

Para describir el proceso de ramificación consideraremos los productos en la secuencia $j = 1, \ldots, J$. Cada valor de j representa un nivel del árbol de enumeración con sus respectivos N_j puntos de precio, que representan nodos potenciales a ser ramificados. Sin embargo, respetando la monotonía de los precios, en cada nivel únicamente podemos considerar aquellos puntos de precio que no sean mayores que los del nivel predecesor. La figura 4.3 ilustra un árbol de enumeración con $J = 2$ productos y $N_1 = N_2 = 3$ puntos de precio, asumiendo que son idénticos para ambos productos. En la rama discontinua, el punto de precio r_{12} ha sido elegido para el nivel $j = 1$. En consecuencia, únicamente pueden considerarse los puntos de precio r_{22} y r_{21} en el nivel $j = 2$.

Una primera búsqueda en profundidad se aplica para encontrar rápidamente posibles soluciones y mantener un número bajo de nodos. Para cada nivel j, las decisiones de ramificación en los niveles anteriores $k = 1, \ldots, j-1$, pueden ser simplemente denotados por $n(k)$. En nuestro ejemplo, obtendríamos $n(1) = 2$ y $n(2) = 1$.

Para guiar la búsqueda, definiremos la cota superior $CS.PE_{jn}$ como sigue:

$$CS.PE = \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,n(k)} + a_{jn} + \sum_{l=j+1}^{J} \max_{m \in B_l}\{a_{lm}\} \quad \text{con } B_l = \{m | r_{lm} \leq r_{jn}\}$$

Adicionalmente, aplicamos acotaciones para reducir el tamaño del árbol de enumeración. Usando LB para denotar el valor de la función objetivo de la solución incumbente (mejor solución obtenida hasta el momento), un punto de precio n en un nivel j el árbol no necesitará ser ramificado si $CS.PE_{jn} \leq LB$.

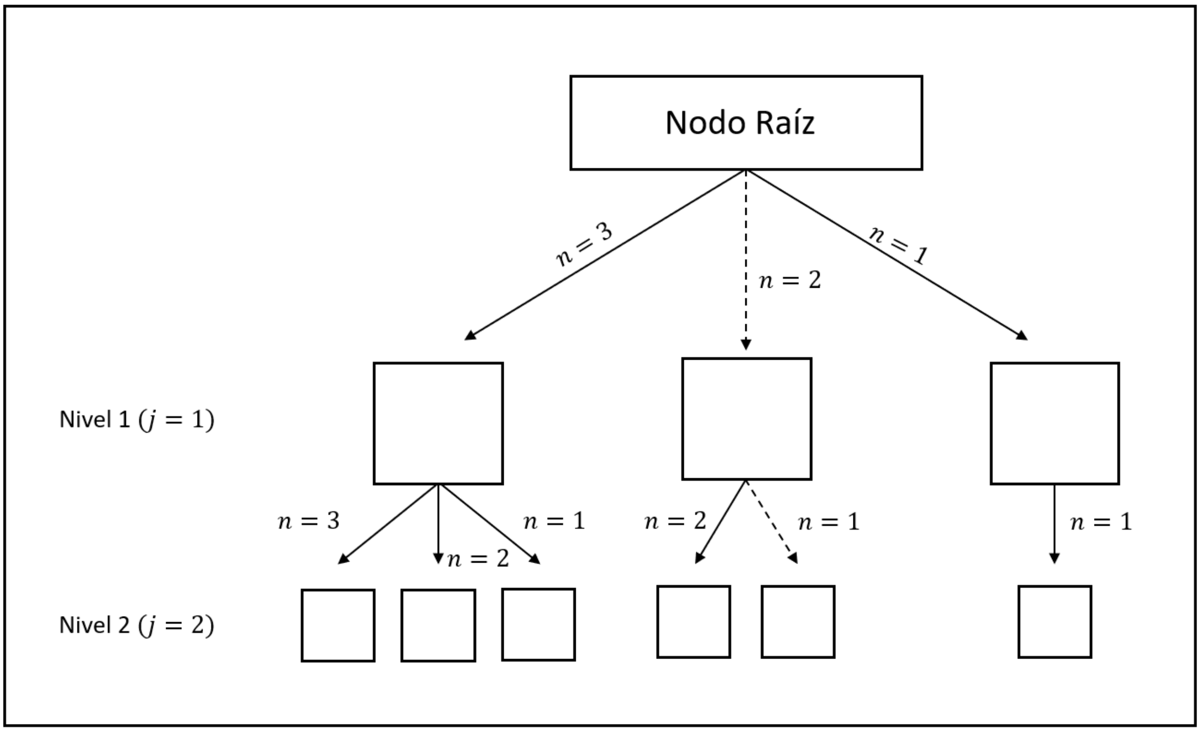

Figura 4.3: Árbol de decisión

Capítulo 5

Planificación conjunta en líneas de productos

En este capítulo, apoyándonos en el artículo [13], fusionaremos aspectos estudiados en los dos capítulos previos con el fin de desarrollar un modelo de decisión que ayude a resolver cuestiones operacionales en líneas de productos.

5.1. Planteamiento del problema

El modelo que propondremos ayudará a elegir el precio y la cantidad de artículos pertenecientes a una línea de productos considerando limitaciones de espacio y presupuesto. Cada vez que producto es encargado, se asumirán costes derivados de trámites logísticos y no existirá posibilidad de reposición durante el período de venta.

Todos los clientes que llegan a la tienda, disponen de una valoración personal preconcebida sobre cada tipo de producto, y elegirán el producto que proporcione la máxima diferencia entre su precio de reserva y el precio elegido por el vendedor. Por simplicidad, asumiremos que cada cliente podrá adquirir como máximo una única unidad de producto. Denominaremos por *período* al tiempo transcurrido entre la llegada de un cliente y la llegada del siguiente.

Durante el proceso distinguiremos varias etapas. Al inicio de la temporada de venta, varios proveedores ofrecen un conjunto de diversos productos. Después, el comerciante determinará el tipo, cantidad y precio de cada producto con el fin de maximizar sus beneficios durante el periodo de venta. Durante este proceso de decisión, el vendedor deberá también considerar el comportamiento general de los clientes junto a costes de compra y de almacenamiento tras la realización del pedido.

Cada artículo del conjunto de productos disponibles será denotado por j $(j = 1, \dots, J)$, el coste de inventario por h_j, el coste de compra por c_j y el coste de pedido por o_j. Un período de tiempo será denotado por t_i, y representará el tiempo transcurrido entre la llegada del cliente

$i-1$ y el cliente i, siendo $t_0 = 0$. Además, asumiremos sin pérdida de generalidad, que la duración de la temporada de venta es 1, y por tanto $\sum_{i=1}^{I} t_i = 1$. En consecuencia, el coste de inventario de producto j durante el periodo i viene dado por $t_i h_j$ para cada unidad de producto j que está disponible durante el periodo i.

La cantidad encargada de cada producto j será denotada por Q_j. El vendedor elegirá para cada producto j, un precio P_j de un conjunto discreto predefinido de puntos de precio con N elementos. Hay I clientes que llegan a la tienda. El inventario del producto j tras el paso del cliente i es denotado por I_{ij}. Si el cliente i elige el producto j, el inventario del producto es reducido en una unidad. Por tanto, $Q_j = I_{0j}$ y el producto j está disponible para el cliente i si $I_{i-1,j} > 0$. Luego, el coste de almacenamiento del periodo i vendrá dado por $t_i \sum_{j=1}^{J} I_{i-1j} h_j$.

El precio de reserva del cliente i sobre el producto j se denotará por V_{ij}. El producto elegido por el cliente i será aquel que proporcione el mayor valor del surplus $(V_{ij} - P_{jn})$ y será denotado por C_i:

$$C_i = \arg max_{j \in \{1,\dots,J\}} \{V_{ij} - P_{jn} | (I_{i-1,j} > 0) \cap (V_{ij} - P_{jn} \geq 0)\}$$

En esta ecuación, $I_{i-1,j} > 0$ indica que el producto j está disponible para el cliente i, y $V_{ij} - P_{jn} \geq 0$ indica que el precio de reserva del cliente i para el producto j es mayor que el precio auténtico. Si no se cumple que $V_{ij} - P_{jn} \geq 0$, entonces el cliente i se marcha sin comprar nada. Cada vez que un cliente llega, el inventario puede ir decreciendo. Por lo tanto, los clientes que lleguen más tarde tendrán menos libertad de elección.

Índices

$i = 1, \dots, I$ Índices de los clientes.

$j, k = 1, \dots, J$ Índices de los productos.

$n, m = 1, \dots, N_j$ Índices del conjunto de precios.

Parámetros

P_{jn} n-ésimo punto de precio del producto j.

S_{ijn} Surplus modificado del cliente i para el producto j en el precio P_{jn}; $S_{ijn} = 1 + (V_{ij}$ - $P_{jn})$, si $(V_{ij}$ - $P_{jn}) \geq 0$, en caso contrario 0.

c_j Coste unitario del producto j.

h_j Coste unitario de inventario del producto j.

o_j Coste de pedido del producto j.

V_{ij} Precio de reserva del cliente i para el producto j.

$type\_num$ Número de tipos de productos existentes.

S Espacio total disponible.

s_j Espacio ocupado por cada unidad del producto j.

t_i Tiempo transcurrido entre la llegada del cliente $i-1$ y la llegada del cliente i.

Variables de decisión

x_{ijn} 1, si el cliente i elige el producto j en el precio P_{jn}, 0 en caso contrario.

g_{jn} 1, si el producto j se ofrece al precio P_{jn}, 0 en caso contrario.

τ_{ij} 1, si el producto j está disponible para el cliente i, 0 en caso contrario.

y_j 1, si el producto j es seleccionado por el vendedor, 0 en caso contrario.

I_{ij} Cantidad restante del producto j tras el paso del cliente i.

Q_j Cantidad ordenada de producto j.

Modelo

$$\textbf{Max} \qquad \text{TP(g,y,k)} = \text{TR - TIC - TPC - TOC} \tag{1}$$

$$\textbf{sujeto a:} \quad \text{TR} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N} x_{ijn}P_{jn} \tag{2}$$

$$\text{TIC} = \sum_{i=1}^{I}\left(t_i \sum_{j=1}^{J} I_{i-1j}h_j\right) \tag{3}$$

$$\text{TPC} = \sum_{j=1}^{J} c_jQ_j \tag{4}$$

$$\text{TOC} = \sum_{j=1}^{J} o_j y_j \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{N} g_{jn} = 1 \qquad \forall j \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{n=1}^{N} x_{ijn} \leq 1 \qquad \forall i \tag{7}$$

$$I_{ij} = I_{i-1j} - \sum_{n=1}^{N} x_{ijn} \qquad \forall i, j \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{J} s_j Q_j \leq S \tag{9}$$

$$y_j S \geq \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} x_{ijn} \qquad \forall j \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{J} y_j \leq type\_num \tag{11}$$

$$\tau_{ij} \geq \sum_{n=1}^{N} x_{ijn} \qquad \forall i, j \tag{12}$$

$$\tau_{ij} S \geq I_{i-1,j} \qquad \forall i, j \tag{13}$$

$$\tau_{ij} \leq I_{i-1,j} \qquad \forall i, j \tag{14}$$

$$x_{ijn} \leq S_{ijn} g_{jn} \qquad \forall i, j, n \tag{15}$$

$$S_{ijn}(\tau_{ij} + g_{jn} - 1) \leq \sum_{k=1}^{j} \sum_{m=1}^{N} S_{ikm} x_{ikm} \qquad \forall i, j, n \tag{16}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{I} t_i = 1, t_0 = 0 \tag{17}$$

$$Q_j, I_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \tag{18}$$

$$Q_j = I_{0j} \qquad \forall j \tag{19}$$

$$x_{ijn}, \tau_{ij}, g_{jn}, y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j, n \tag{20}$$

La función objetivo en la ecuación (1) maximiza el beneficio total del vendedor. Esta incluye los ingresos totales (TR) representado en la ecuación (2), el coste total de inventario (TIC) representado en la ecuación (3), el coste total de compra (TPC) representado en la ecuación (4) y el coste total de pedido (TOC) representado en la ecuación (5).

La restricción (6) asegura que para cada producto un único punto de precio puede ser elegido. La restricción (7) explica que cada cliente puede comprar un único producto o marcharse sin adquirir ningún artículo. La restricción (8) muestra que el inventario se reduce una unidad cada vez que se efectúa una compra. La restricción (9) asegura que el espacio ocupado por el producto encargado no supere el espacio total disponible. La restricción (10) muestra que los clientes solo pueden comprar los productos que el vendedor ha encargado al principio del período de venta. La restricción (11) indica que el número de tipos de productos elegidos por el vendedor no puede superar al número de tipos de artículos existentes en la línea de producto. La restricción (12) indica que un producto se puede comprar si este está disponible. La restricción (13) obliga a τ_{ij} a ser 1 si el producto j está disponible para el cliente i. La restricción (14) obliga a τ_{ij} a ser 0 si el producto j no está disponible para el cliente i. La restricción (15) representa que la compra de un producto en un determinado punto de precio es posible únicamente si el correspondiente surplus es no negativo. La restricción (16) obliga al cliente a comprar un producto cuando al menos el surplus para algún producto es no negativo. Al mismo tiempo, el producto debe estar disponible en cierto punto de precio. Esta restricción también asegura que los clientes compran el producto que mayor surplus proporciona. La restricción (17) explica que la duración total del proceso debe ser 1 y que el periodo inicial es 0. La restricción (18) asegura que las variables de decisión son no negativas y la restricción (19) relaciona el inventario inicial con el encargo para cada producto. La restricción (20) representa la naturaleza binaria de las variables de decisión.

5.2. Estudio computacional

Para ilustrar nuestro modelo consideraremos varios escenarios con $J = 10$ productos potencialmente elegibles. En la tabla 5.4 podemos encontrar los valores de los parámetros que usaremos en nuestros experimentos.

Para modelar los precios de reserva de los clientes para cada producto j emplearemos la distribución Beta(α_j, β_j). Los parámetros α_j y β_j dependen de la elasticidad de demanda de la categoría que estemos considerando, siendo la elasticidad una medida que indica cuánto varía la demanda de un producto cuando varía su precio.

Si los clientes no tienen una preferencia inicial, los precios de reserva serán similares para cada artículo en venta. Esta situación suele estar asociada a categorías de productos con baja elasticidad de demanda, y por lo tanto la función de densidad correspondiente alcanzará valores relativamente bajos. De manera similar, para categorías con alta elasticidad se mostrará interés concreto por ciertos productos. Este fenómeno podemos apreciarlo claramente en la imagen 5.1.

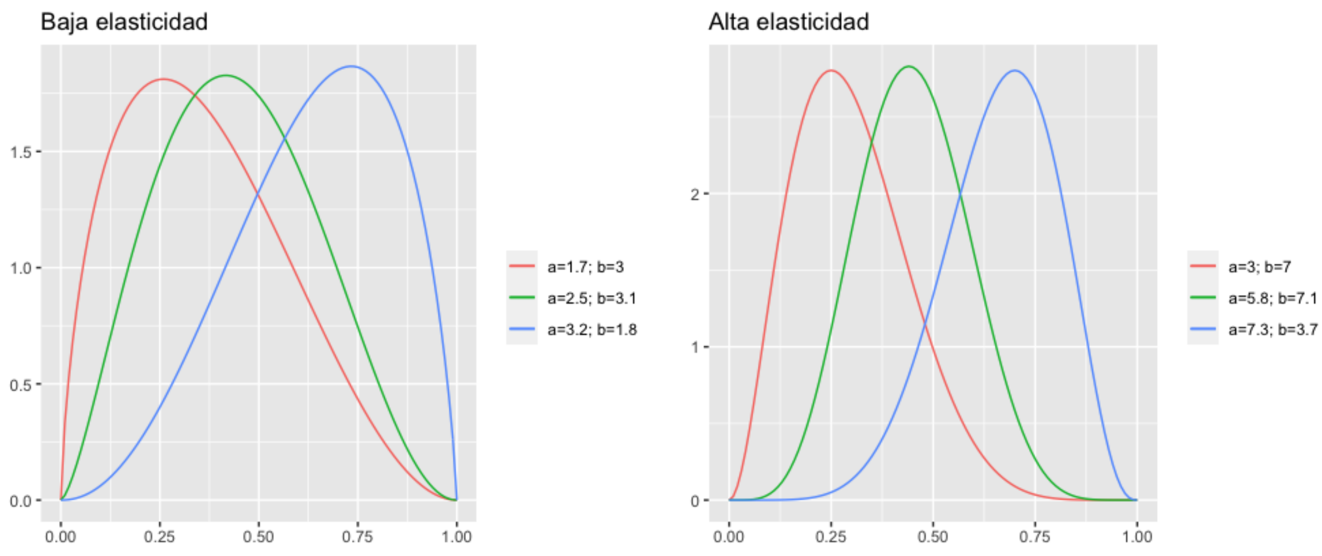

Figura 5.1: Funciones de densidad Beta(a,b)

Usando la tabla 5.2, tras generar 30 escenarios, resolver el respectivo problema usando CPLEX (código en el Apéndice A) y promediar los valores obtenidos, podemos confirmar ciertos resultados.

En primer lugar, un valor alto de *type_num* implica mayores ganancias. La imagen 5.2 presenta los resultados asociados a una categoría con alta elasticidad y 3 puntos de precio predefinidos. Podemos observar que para valores altos de *type_num*, el beneficio presenta valores no muy diferenciados.

Además, como podemos apreciar en la imagen 5.3, aumentar el número de puntos de precio está asociado con mayor beneficio, siendo esto algo consistente con la realidad. Para definir los puntos de precio utilizaremos la tabla 5.3.

Naturaleza	Parámetros	
	α_j	β_j
Baja elasticidad	{1.7, 2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 3.1, 3.2, 3.3, 3.2}	{3, 3.1, 3.2, 3.1, 3, 2.9, 2.6, 2.5, 2.1, 1.8}
Alta elasticidad	{3, 3.7, 4.4, 5.1, 5.8, 6.6, 7.1, 7.3, 7.4, 7.3}	{7, 7.3, 7.4, 7.3, 7.1, 6.6, 5.8, 5.1, 4, 3.7}

Tabla 5.2: Parámetros para modelizar los precios de reserva.

	Conjunto de datos
$N = 3$	{33,67,100}
$N = 5$	{20,40,60,80,100}
$N = 10$	{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100}

Tabla 5.3: Puntos de precio.

Parámetros	Valores
Coste unitario de inventario $h_j, j = 1, \ldots, 10$	{0.5, 1, 1.2, 0.7, 1.5, 0.9, 2, 1.5, 1, 0.8}
Coste unitario de compra $c_j, j = 1, \ldots, 10$	{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
Coste unitario de orden $c_j, j = 1, \ldots, 10$	{50, 40, 125, 100, 160, 255, 200, 175, 295, 75}
Espacio unitario ocupado $l_j, j = 1, \ldots, 10$	{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}

Tabla 5.4: Parámetros de productos.

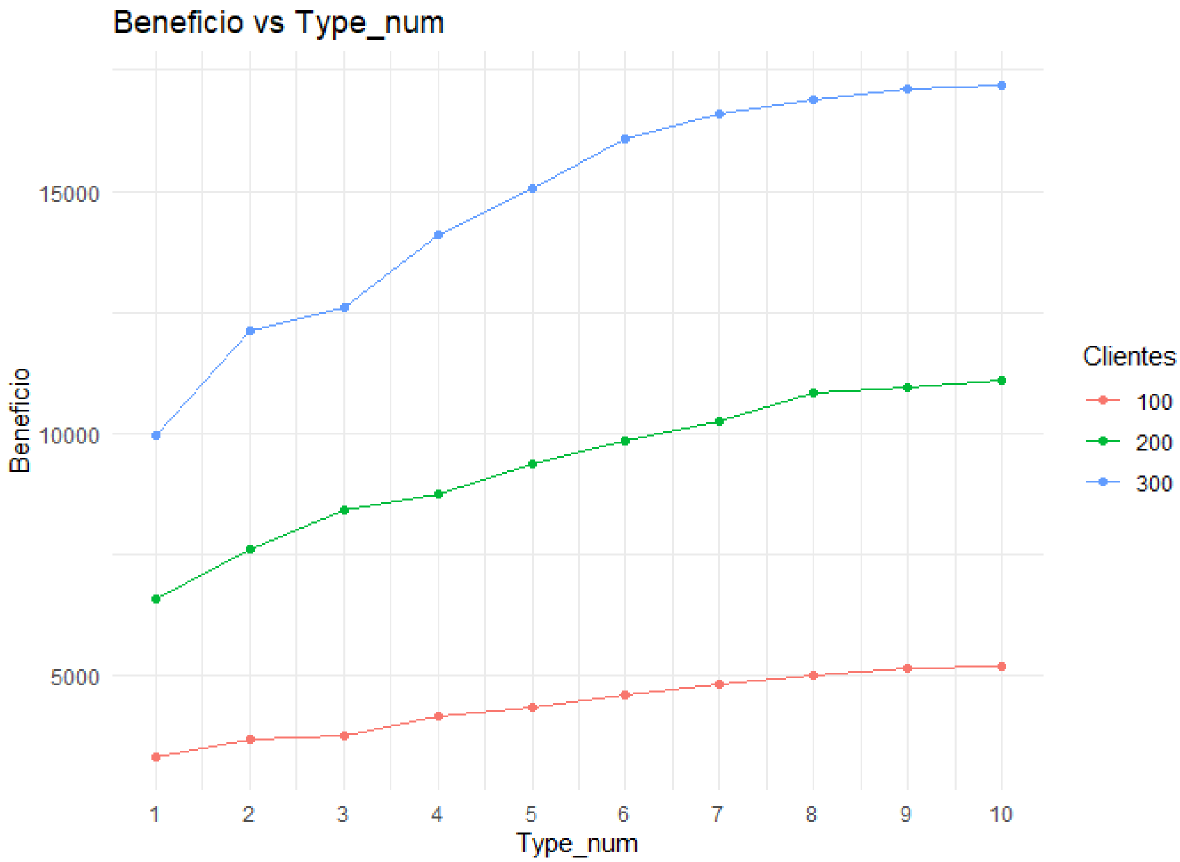

Figura 5.2: Relación entre el beneficio total y el número de tipos de productos existentes.

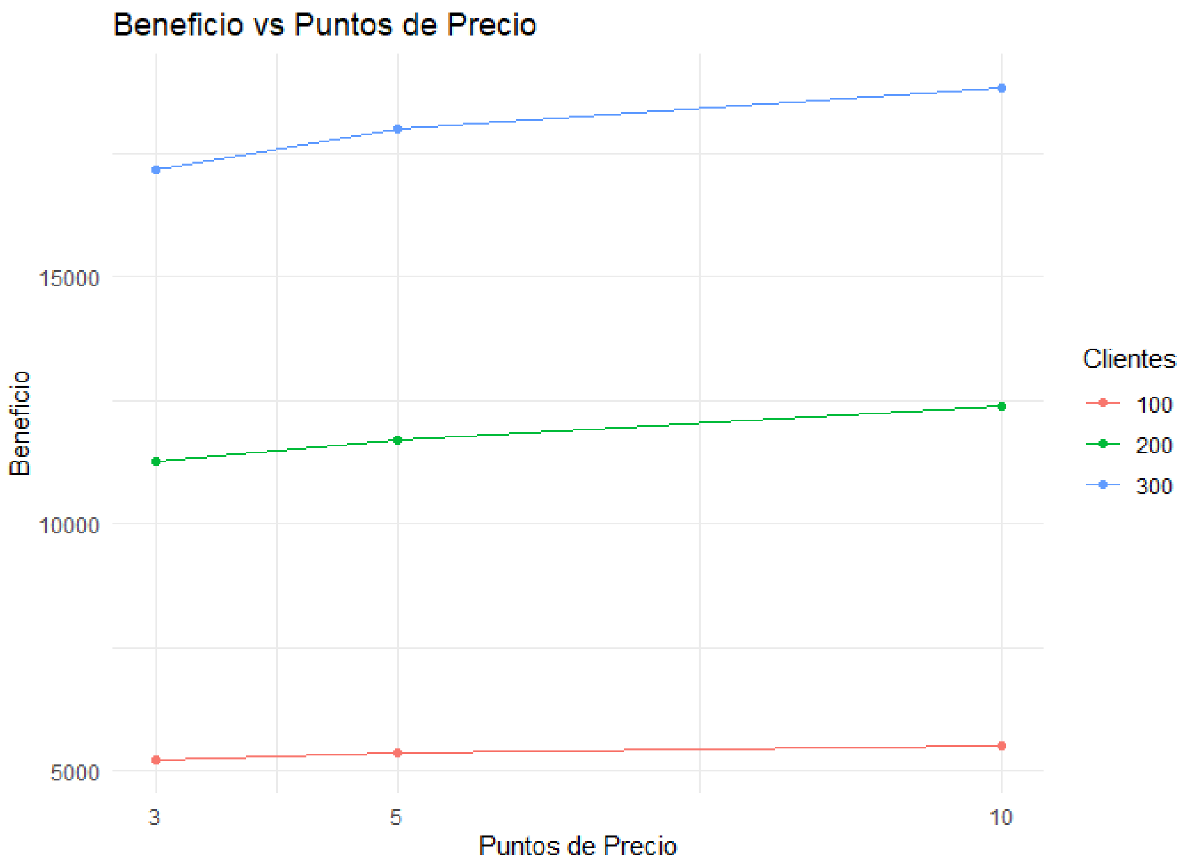

Figura 5.3: Relación entre el beneficio total y el número de puntos de precio.

Capítulo 6

Caso práctico

Tal y como hemos visto en los apartados anteriores, la polivalencia de cada modelo nos permite resolver una gran cantidad de problemas de diversa índole. Para constatar esta versatilidad, trataremos de resolver un problema con cierto matiz realista. Tras recopilar información sobre varios sectores comerciales, tratar de adjudicar un precio a entradas de un espectáculo en función del ángulo de visión y calidad de los asientos podría ser un ejemplo ilustrativo. Veamos que necesitamos para resolver este problema.

6.1. Planteamiento del problema

Dada la naturaleza del problema, recurriremos al modelo visto en el Capitulo 4. Supongamos que $I = 1000$ personas están interesadas asistir a cierto evento en el teatro Lope de Vega en Sevilla. El aforo total del teatro es de 733 asientos, de las cuales podemos distinguir diferentes asientos/productos según la localización de estos en la sala. En concreto disponemos de $J = 4$ productos que ordenaremos en función del ángulo de visión y distancia al escenario. Véase la imagen 6.1.

Por comodidad, asumiremos que cada producto tiene $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N = 20$ puntos de precio. Para incorporar los precios de reserva de los clientes usaremos las distribuciones $Beta(\alpha_j, \beta_j)$ igual que en el capitulo 5. En la imagen 6.2 podemos encontrar la distribución usada en cada producto.

- j = 1: Patio de butacas, cuya capacidad inicial (c_{01}) es de 342 y $r_{1n} = (\{42, 44, \ldots, 80\})$.
- j = 2: Palcos, cuya capacidad inicial (c_{02}) es de 130 y $r_{2n} = (\{38, 40, \ldots, 76\})$.
- j = 3: Piso 1, cuya capacidad inicial (c_{03}) es 114 y $r_{3n} = (\{34, 36, \ldots, 72\})$.
- j = 4: Piso 2, cuya capacidad inicial (c_{04}) es 147 y $r_{4n} = (\{32, 34, \ldots, 70\})$.

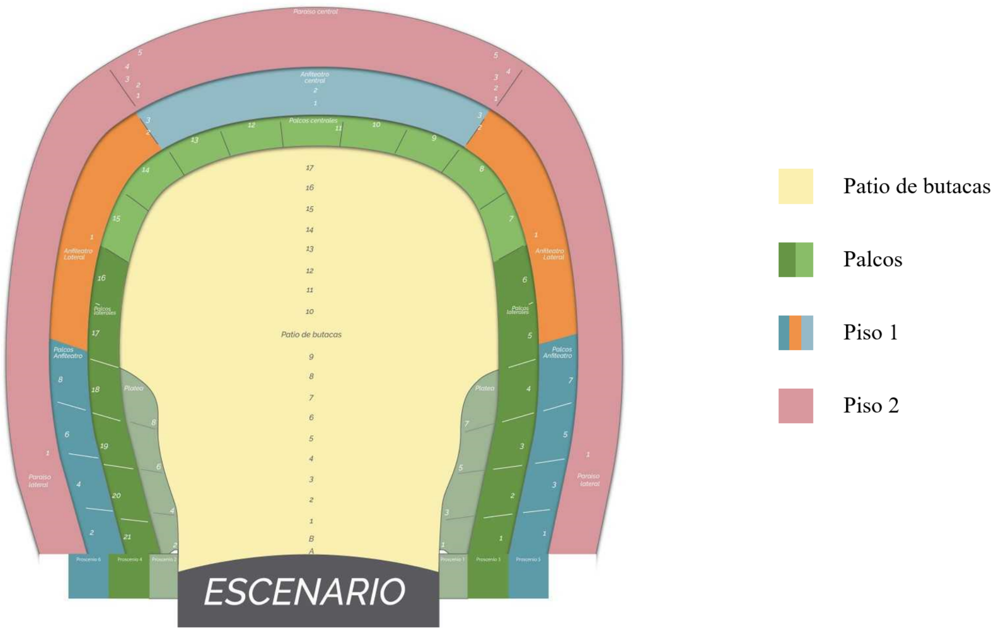

Figura 6.1: Representación de los diferentes asientos en el teatro.

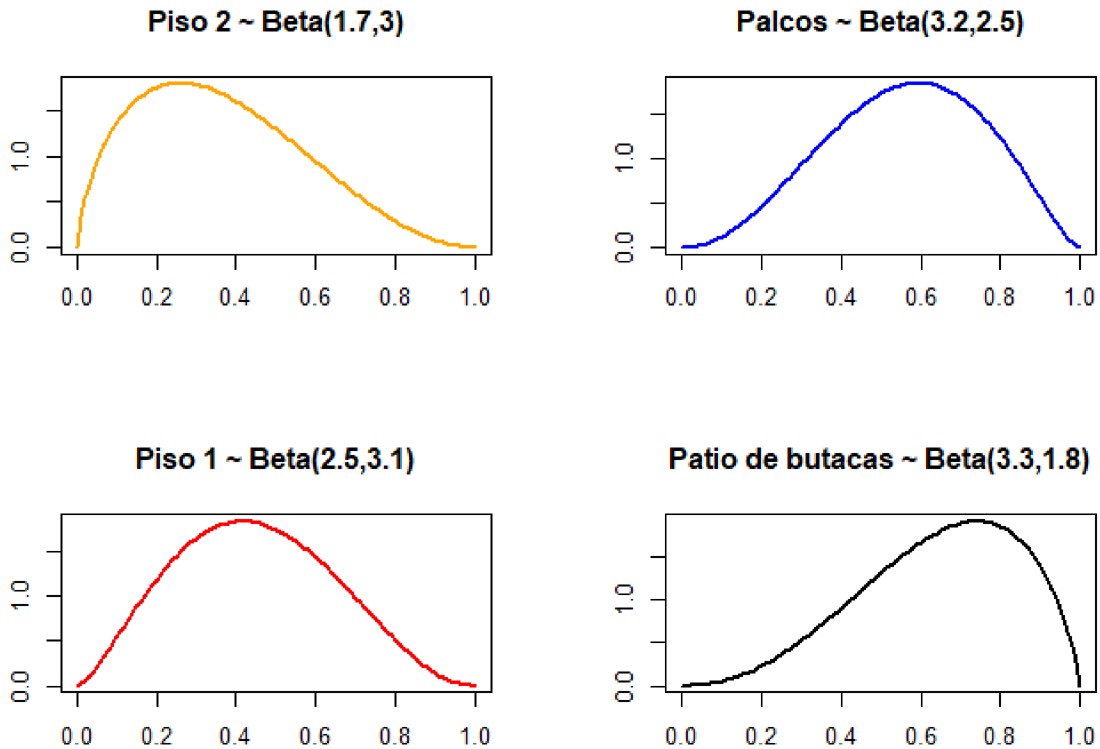

Figura 6.2: Distribución de los precios de reserva.

6.2. Resultados

Para resolver el problema hemos utilizado el software de programación matemática AMPL usando el solver CPLEX 20.1.0.0. El punto de precio elegido finalmente para el producto $j = 1$ es 72, para el producto $j = 2$ es 62, para el producto $j = 3$ es 60 y para el producto $j = 4$ es 50. Este conjunto de precios es consistente con la realidad, ya que al ser el teatro un servicio con baja elasticidad de demanda, al ofrecer productos con atributos insuficientemente discriminatorios, es frecuente que los precios sean relativamente similares.

Podemos encontrar el código usado para resolver este problema en el Apéndice A.

Bibliografía

[1] Quelch, J.A., D. Kenny. 1994. *Extend profits, not product lines.* Harvard Bus Rev. 72 153-160.

[2] Kurt Salmon Associates. 1993. *Efficient consumer response: Enhancing consumer value in the grocery industry.* Food Marketing Institute Report 9-526. Food Marketing Institute.

[3] Harold Hotelling. 1929. *Stability in Competition.* The Economic Journal. Vol. 39, No. 153, p.p 41-57.

[4] Stephen A. Smith, Narendra Agrawal, *Management of multi-item retail inventory systems with demand substitution.* Operations Research, Vol. 48, págs 50-64, 2000.

[5] Mussa, M., S. Rosen., *Monopoly and product quality. Journal of Economic Theory.* Economic Theory. 18 301-317, 1978.

[6] Moorthy, S. , *Market segmentation, self-selection, and product line design* . Marketing Science 3 288-307, 1984.

[7] Hoch, S.J., E.T. Bradlow, B. Wansink., *The variety of an assortment.* Mrkt. Sci. 25 342-55, 1999.

[8] Corstjens, M., P. Doyle. , *A model for optimizing retail space allocations.* . Science. 27 822-833, 1981.

[9] van Herpen, E., R. Pieters., *The variety of an assortment: An extension to the attribute-based approach.* Marketing Science. 21(3) 331-341, 2002.

[10] Thomas Gruen, Daniel Corsten, *Desperately Seeking Shelf Availability: An Examination of the Extent, the Causes, and the Efforts to Address Retail Out-of-Stocks.* International Journal of Retail & Distribution Management, 2003.

[11] Eda Yücel, Fikri Karaesmen, F. Sibel Salman, Metin Türkay, *Optimizing product assortment under customer-driven demand substitution.* European Journal of Operational Research 199, 759–768, 2009.

[12] Wolfgang R. Burkart, Robert Klein, Stefan Mayer, *Product line pricing for services with capacity constraints and dynamic substitution*. European Journal of Operational Research 219, 347–359, 2012.

[13] Ilkyeong Moona, Kun Soo Park, Jing Hao, Dongwook Kim, *Joint decisions on product line selection, purchasing, and pricing*. European Journal of Operational Research 262, 207–216, 2017.

[14] Alok Kumar Singh, Rohit Kapoor, *A Literature Review on Demand Models in Retail Assortment Planning*. International Journal of Marketing and Business Communication Volume 2, 2013.

[15] A.G. Kök, M.L. Fisher, R. Vaidyanathan, *Assortment planning: Review of literature and industry practice*. Invited chapter to appear in Retail Supply Chain Management, Kluwer Publishers, 2006.

[16] Lancaster, K., *A new approach to consumer theory*. Journal of Political Economy. 74, 132-57, 1966.

Apéndice A

Código AMPL

A.1. Capítulo 3

modelo1.dat

```
data;

# Coste unitario de producto.
param: PRODUCTOS: coste:=
 P1 10 P2 8 P3 6;

# Niveles de sustitucion.
set SUSTNIVEL:= L1 L2;

# Preferencia de sustitucion.
param preferencias: P1 P2 P3:=
     P1 0 0.1 0.2
     P2 0.2 0 0.5
     P3 0.1 0.5 0;

# Probabilidad de perdida de venta.
param sustpreferencias:=
     P1 0.7 P2 0.3 P3 0.4 ;

# Coste de pedido a los proveedores.
param: PROVEEDOR: costeorden:=
```

```
    S1 40 S2 45;

# Coste de seleccion de proveedor.
param costeelegir:=
    S1 35000 S2 50000;

# Demanda de cada producto.
param demanda:=
    P1 3000 P2 4000 P3 5000;

# Cota superior de encargo del producto.
param cotaproducto:=
    P1 12000 P2 10000 P3 20000;

# Espacio disponible para cada producto.
param espacioproducto:=
    P1 10000 P2 12000 P3 9000;

# Productos que pueden ser provistos por cada proveedor.
param vinculos: S1 S2:=
    P1 0 1
    P2 1 0
    P3 0 1;

# Coste inventario de cada producto.
param costeinventario:=
    P1 0.7 P2 0.5 P3 0.4;

# Coste de recibir productos de mala calidad.
param costepobre:=
    P1 4 P2 3 P3 2;

# Probabilidad de recibir productos de mala calidad.
param porcenpobre:=
    P1 0.05 P2 0.10 P3 0.09;

# Precio de venta de cada producto.
param precioproducto:=
    P1 19 P2 14 P3 12;
```

```
# Coste de penalizacion por usar producto Pi en el nivel Lk de
   sustitucion.
param costesustitucion: P1 P2 P3:=
     L1  2.7  1.8  1.8
     L2  5.4  3.6  3.6;

# Coste de penalizacion por perdida de venta.
param costeperdida:=
     P1 9 P2 6 P3 6;

# inventorio inicial.
param invinicial:=
     P1 0 P2 0 P3 0;
```

modelo1(Generacionaleatoria).dat

```
data;


# Productos que pueden ser provistos por cada proveedor.
param a: 1 2 3 4 5:=
     1 1 0 0 0 0
     2 0 1 0 0 0
     3 1 0 0 0 0
     4 0 0 1 0 0
     5 1 0 0 0 0
     6 0 0 0 1 0
     7 0 0 0 1 0
     8 0 0 0 1 0
     9 0 0 0 0 1
    10 0 1 0 0 0 ;



# Inventario inicial.
```

```
param zo:=
    1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8 0 9 0 10 0;
```

modelo1.mod

```
# Conjuntos

set PRODUCTOS;
set SUSTNIVEL;
set PROVEEDOR;


# Parametros

param coste{PRODUCTOS};
param preferencias{PRODUCTOS,PRODUCTOS};
param sustpreferencias{PRODUCTOS};
param costeorden{PROVEEDOR};
param costeelegir{PROVEEDOR};
param demanda{PRODUCTOS};
param cotaproducto{PRODUCTOS};
param espacioproducto{PRODUCTOS};
param vinculos{PRODUCTOS,PROVEEDOR};
param costeinventario{PRODUCTOS};
param costepobre{PRODUCTOS};
param porcenpobre{PRODUCTOS};
param precioproducto{PRODUCTOS};
param costesustitucion{SUSTNIVEL,PRODUCTOS};
param costeperdida{PRODUCTOS};
param invinicial{PRODUCTOS};


# Variables de decision

var invfinal{PRODUCTOS} >= 0, integer;
var x{PRODUCTOS} >= 0, integer;
var y{PRODUCTOS} binary;
var o{PROVEEDOR} binary;
```

```
var xcero{PRODUCTOS} >= 0, integer;
var xs{SUSTNIVEL,PRODUCTOS,PRODUCTOS} >=0, integer;
var xl{SUSTNIVEL,PRODUCTOS} >=0, integer;



# Funcion objetivo

maximize beneficioTotal:
# TR (Ingresos esperados)
  sum {i in PRODUCTOS} precioproducto[i]*(invinicial[i] + x[i] -
     invfinal[i]) -
# TCO (Costes de pedido esperados)
  sum {i in PROVEEDOR} costeorden[i]*o[i] -
# TCSS (Coste de seleccion de proveedor esperados)
  sum {i in PROVEEDOR} costeelegir[i]*o[i] -
# TCP (Costes esperados de compra)
  sum {i in PRODUCTOS} coste[i]*x[i] -
# TCI (Coste esperado de inventario)
  sum {i in PRODUCTOS} (invinicial[i] + x[i] +
     invfinal[i])*costeinventario[i]/2 -
# TCPQ (Coste esperados de productos de mala calidad)
  sum {i in PRODUCTOS} costepobre[i]*porcenpobre[i]*x[i] -
# TCS (Coste esperado de sustitucion)
  sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS,k in PRODUCTOS}
     costesustitucion[m,i]*xs[m,i,k] -
# TCL (Coste esperado de perdidas)
  sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS} costeperdida[i]*xl[m,i];



# Restriccion (5)
subject to coherencia {i in PRODUCTOS, j in PROVEEDOR}:
  o[j] >= vinculos[i,j]*y[i];

# Restriccion (11)
subject to cumpledemanda {i in PRODUCTOS}:
  xcero[i]+sum {m in SUSTNIVEL, k in PRODUCTOS} xs[m,k,i] + sum {m
     in SUSTNIVEL} xl[m,i]= demanda[i];
```

```
# Resticcion (12)
subject to cumplede {i in PRODUCTOS}:
  xcero[i]+invfinal[i]+sum {m in SUSTNIVEL, k in PRODUCTOS}
     xs[m,i,k] = invinicial[i]+x[i];

# Restriccion (13)
subject to nivel1 {i in PRODUCTOS,k in PRODUCTOS}:
  xs['L1',i,k]<= (demanda[k]-xcero[k])*preferencias[k,i];

# Restriccion (14)
subject to nivel1prima {k in PRODUCTOS}:
  xl['L1',k]<= (demanda[k]-xcero[k])*sustpreferencias[k];

# Restriccion (15)
subject to nivel2 {i in PRODUCTOS,k in PRODUCTOS}:
  xs['L2',i,k]<= (demanda[k]-xcero[k]- xl['L1',k] -sum{r in
     PRODUCTOS}xs['L1',r,k]) * sum{r in
     PRODUCTOS}preferencias[k,r]*preferencias[r,i];

# Restriccion (16)
subject to nivel2prima {k in PRODUCTOS}:
  xl['L2',k]<= (demanda[k]-xcero[k]- xl['L1',k] -sum{r in
     PRODUCTOS}xs['L1',r,k])*sum{r in
     PRODUCTOS}preferencias[k,r]*sustpreferencias[r];

# Restriccion (17)
subject to cumpleinv {i in PRODUCTOS}:
  invinicial[i]+x[i]<=espacioproducto[i];

# Restriccion (18)
subject to capacidad1 {i in PRODUCTOS}:
  0 <= x[i];

subject to capacidad2 {i in PRODUCTOS}:
  x[i] <= cotaproducto[i]*y[i];
```

modelo1(Generacionaleatoria).mod

```
# Numero de productos
param J := 10;


# Numero de proveedores
param IP:= 5;


# Niveles de sustitucion
param SB:= 2;

# Escenarios de demanda
#param SD:= 100;


# Conjuntos

set PRODUCTOS:= 1 .. J;
set SUSTNIVEL:= 1 .. SB;
set PROVEEDOR:= 1 .. IP;
#set ESCENARIOS:= 1 .. SD;

# Parametros
param teta;

param c{PRODUCTOS} = Uniform(5,10);
param unifor{i in 1 .. J,j in 1 .. (J+1)} =
    if i = j
    then 0
    else Uniform01();

param sumaunifor {i in PRODUCTOS} = sum {j in 1 .. (J+1)}
   unifor[i,j];
param w{i in PRODUCTOS,j in PRODUCTOS} = unifor[i,j]/sumaunifor[i];
```

```
param wl{i in PRODUCTOS} = unifor[i,J+1]/sumaunifor[i];
param oc{PROVEEDOR} = Uniform(30,50);
param ssc{PROVEEDOR} = Uniform(25000,40000);
param unifor2 {i in PRODUCTOS} = Uniform01();
param sumaunifor2 = sum {i in PRODUCTOS} unifor2[i];
param d{i in PRODUCTOS} = 70000*unifor2[i]/sumaunifor2;
param OQ{PRODUCTOS} = Uniform(4000,34000);
param SS{PRODUCTOS} = Uniform(8000,40000);
param a{PRODUCTOS,PROVEEDOR};
param h{PRODUCTOS} = Uniform(0.3,1);
param pq{PRODUCTOS} = Uniform(2,4);
param qq{PRODUCTOS} = Uniform(0,0.15);
param p{i in PRODUCTOS} = c[i] + Normal(6,2);
param s{m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS} = m*teta*(p[i] - c[i]);
param sl{i in PRODUCTOS} = max(2*teta,1)*(p[i] - c[i]);
param zo{PRODUCTOS};


# Variables de decision

var z1{PRODUCTOS} >= 0;
var x{PRODUCTOS} >= 0;
var y{PRODUCTOS} binary;
var o{PROVEEDOR} binary;
var xcero{PRODUCTOS} >= 0;
var xs{SUSTNIVEL,PRODUCTOS,PRODUCTOS} >=0;
var xl{SUSTNIVEL,PRODUCTOS} >=0;



# Funcion objetivo

maximize beneficioTotal:

# TR (Ingresos esperados)
  sum {i in PRODUCTOS} p[i]*(zo[i] + x[i] - z1[i]) -

# TCO (Costes de pedido esperados)
  sum {i in PROVEEDOR} oc[i]*o[i] -
```

```
# TCSS (Coste de seleccion de proveedor esperados)
  sum {i in PROVEEDOR} ssc[i]*o[i] -

# TCP (Costes esperados de compra)
  sum {i in PRODUCTOS} c[i]*x[i] -

# TCI (Coste esperado de inventario)
  sum {i in PRODUCTOS} (zo[i] + x[i] + z1[i])*h[i]/2 -

# TCPQ (Coste esperados de productos de mala calidad)
  sum {i in PRODUCTOS} pq[i]*qq[i]*x[i] -

# TCS (Coste esperado de sustitucion)
  sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS,k in PRODUCTOS}
     s[m,i]*xs[m,i,k] -

# TCL (Coste esperado de perdidas)
 sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS} sl[i]*xl[m,i];


#Restriccion (5)
subject to coherencia {i in PRODUCTOS, j in PROVEEDOR}:
  o[j] >= a[i,j]*y[i];

# Restriccion (11)
subject to cumpledemanda {i in PRODUCTOS}:
  xcero[i]+sum {m in SUSTNIVEL, k in PRODUCTOS} xs[m,k,i] + sum {m
     in SUSTNIVEL} xl[m,i]= d[i];

# Resticcion (12)
subject to cumplede {i in PRODUCTOS}:
  xcero[i]+z1[i]+sum {m in SUSTNIVEL, k in PRODUCTOS} xs[m,i,k] =
     zo[i]+x[i];

# Restriccion (13)
subject to nivel1 {i in PRODUCTOS,k in PRODUCTOS}:
  xs[1,i,k]<= (d[k]-xcero[k])*w[k,i];
```

```
# Restriccion (14)
subject to nivel1prima {k in PRODUCTOS}:
  xl[1,k]<= (d[k]-xcero[k])*wl[k];

# Restriccion (15)
subject to nivel2 {i in PRODUCTOS,k in PRODUCTOS}:
  xs[2,i,k]<= (d[k]-xcero[k]- xl[1,k] -sum{r in PRODUCTOS}xs[1,r,k])
     * sum{r in PRODUCTOS} w[k,r]*w[r,i];

# Restriccion (16)
subject to nivel2prima {k in PRODUCTOS}:
  xl[2,k]<= (d[k]-xcero[k]- xl[1,k] -sum{r in
     PRODUCTOS}xs[1,r,k])*sum{r in PRODUCTOS} w[k,r]*wl[r];

# Restriccion (17)
subject to cumpleinv {i in PRODUCTOS}:
  zo[i]+x[i]<=SS[i];

# Restriccion (18)
subject to capacidad1 {i in PRODUCTOS}:
  0 <= x[i];

subject to capacidad2 {i in PRODUCTOS}:
  x[i] <= OQ[i]*y[i];
```

modelo1.run

```
reset;
model modelo1.mod;
data modelo1.dat;
option solver cplex;
solve;
display x;
display xl;
display xs;
```

modelo1(Generacionaleatoria).run

```
 reset;
model modelo1multi.mod;
data modelo1multi.dat;
option solver cplex;
param TP {1..nruns};
param TR {1..nruns};
param TCO {1..nruns};
param TCSS {1..nruns};
param TCP {1..nruns};
param TCI {1..nruns};
param TCPQ {1..nruns};
param TCS {1..nruns};
param TCL {1..nruns};
param ds {1..nruns};
param fst {1..nruns};
param snd {1..nruns};
param lost {1..nruns};


for {n in 0..1 by 0.1} {
let teta := n;
for {k in 1..nruns} {
  update data;
  solve;
  let TP[k] := beneficioTotal;
  let TR[k] := sum {i in PRODUCTOS} p[i]*(zo[i] + x[i] - z1[i]);
  let TCO[k] := sum {i in PROVEEDOR} oc[i]*o[i];
  let TCSS[k] := sum {i in PROVEEDOR} ssc[i]*o[i];
  let TCP[k] := sum {i in PRODUCTOS} c[i]*x[i];
  let TCI[k] := sum {i in PRODUCTOS} (zo[i] + x[i] + z1[i])*h[i]/2 ;
  let TCPQ[k] := sum {i in PRODUCTOS} pq[i]*qq[i]*x[i];
  let TCS[k] := sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS,l in PRODUCTOS}
     s[m,i]*xs[m,i,l];
  let TCL[k] := sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS} sl[i]*xl[m,i];
```

```
  let ds[k] := (sum {i in PRODUCTOS} xcero[i])/(sum {i in PRODUCTOS}
     d[i]);
  let fst[k] := (sum {i in PRODUCTOS,r in PRODUCTOS} xs[1,i,r])/(sum
     {i in PRODUCTOS} d[i]);
  let snd[k] := (sum {i in PRODUCTOS,r in PRODUCTOS} xs[2,i,r])/(sum
     {i in PRODUCTOS} d[i]);
  let lost[k] := (sum {m in SUSTNIVEL,i in PRODUCTOS} xl[m,i])/(sum
     {i in PRODUCTOS} d[i]);
}

print (sum {k in 1..nruns} ds[k])*100 / nruns > prueba.txt;
print (sum {k in 1..nruns} lost[k])*100 / nruns > prueba.txt;
print ((sum {k in 1..nruns} fst[k])*100 + (sum {k in 1..nruns}
   snd[k])*100) / nruns > prueba.txt;



printf "TP: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TP[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TR: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TR[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCO: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCO[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCSS: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCSS[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCP: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCP[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCI: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCI[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCPQ: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCPQ[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCS: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCS[k]) / nruns >
   prueba2.txt;
printf "TCL: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TCL[k]) / nruns >
   prueba2.txt;


}
```

A.2. Capítulo 4

modelo2.dat

```
data;



# Capacidad inicial.
param c0:=
     1 2
     2 2;

# Precios de reserva.
param v: 1 2:=
     1 72 69
     2 66 0
     3 81 57
     4 92 61
     5 55 55;

# Puntos de precios.
param r: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20:=
     1 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95
     2 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 ;
```

modelo2(Teatro).dat

```
 data;

param c0:=
     1 171
     2 65
     3 107
     4 74 ;

# alpha
param alpha:=
```

```
     1 3.3
     2 3.2
     3 2.5
     4 1.7;
# beta
param beta:=
     1 1.8
     2 2.5
     3 3.1
     4 3;


param r: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20:=
     1 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80
     2 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76
     3 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72
     4 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 ;
```

modelo2.mod

```
# Numero de productos
param J := 2;

# Numero de clientes
param IP:= 5;

# Numero de puntos
param N := 20;

# Conjuntos
set PRODUCTOS:= 1 .. J;
set CLIENTES:= 1 .. IP;
set PUNTOS:= 1 .. N;



param v{CLIENTES,PRODUCTOS};
param r{PRODUCTOS,PUNTOS};
```

```
param c0{PRODUCTOS};
#Surplus modificado
param s{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:=
    if (1 + (v[i,j] - r[j,n]))>0
    then 1 + (v[i,j] - r[j,n])
    else 0;


# Variables de decision
var x{CLIENTES,PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var k{CLIENTES,PRODUCTOS} binary;
var pi{PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var c{CLIENTES,PRODUCTOS} >= 0 integer;


maximize beneficioTotal:
  sum {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}
      x[i,j,n]*r[j,n];

# Restriccion (2)
subject to unicidadpunto {j in PRODUCTOS}:
     sum {n in PUNTOS} pi[j,n] = 1;

# Restriccion (3)
subject to decreciente :
     sum {n in PUNTOS} r[1,n]*pi[1,n] >= sum {n in PUNTOS}
        r[2,n]*pi[2,n];

# Restriccion (4)
subject to limcompra {i in CLIENTES}:
     sum {j in PRODUCTOS, n in PUNTOS} x[i,j,n] <= 1;

# Restriccion (5)
subject to capacidad0 {j in PRODUCTOS}:
  c[1,j] = c0[j] - sum {n in PUNTOS} x[1,j,n];

subject to capacidad {i in CLIENTES,j in PRODUCTOS: i > 1}:
  c[i,j] = c[i-1,j] - sum {n in PUNTOS} x[i,j,n];
```

```
# Restriccion (6)
subject to disponible {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS}:
  sum {n in PUNTOS} x[i,j,n] <= k[i,j];

# Restriccion (7)
subject to disp0 {j in PRODUCTOS}:
  c0[j]/c0[j] <= k[1,j];

# Restriccion (8)
subject to disp1 {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS: i > 1}:
  c[i-1,j]/c0[j] <= k[i,j];

subject to disp2 {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS: i > 1}:
  k[i,j] <= c[i-1,j];

# Restriccion (9)
subject to pc {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
    x[i,j,n] <= s[i,j,n]*pi[j,n];

# Restriccion (10)
subject to ic {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
    s[i,j,n]*(k[i,j]+pi[j,n]-1) <= sum {p in PRODUCTOS, m in PUNTOS}
       s[i,p,m]*x[i,p,m];
```

modelo2(Teatro).mod

```
# Numero de productos
param J := 4;

# Numero de clientes
param IP:= 733;

# Numero de puntos
param N := 20;

# Conjuntos
set PRODUCTOS:= 1 .. J;
```

```
set CLIENTES:= 1 .. IP;
set PUNTOS:= 1 .. N;


param alpha{PRODUCTOS};
param beta{PRODUCTOS};
param r{i in PRODUCTOS,p in PUNTOS};
param v{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS}:=
Beta(alpha[j],beta[j])*100;
param c0{PRODUCTOS};




#Surplus modificado
param s{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:=
    if (1 + (v[i,j] - r[j,n]))>0
    then 1 + (v[i,j] - r[j,n])
    else 0;


# Variables de decision
var x{CLIENTES,PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var k{CLIENTES,PRODUCTOS} binary;
var pi{PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var c{CLIENTES,PRODUCTOS} >= 0 integer;


maximize beneficioTotal:
  sum {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}
      x[i,j,n]*r[j,n];

# Restriccion (2)
subject to unicidadpunto {j in PRODUCTOS}:
     sum {n in PUNTOS} pi[j,n] = 1;

# Restriccion (3)
subject to decreciente {i in PRODUCTOS: i < J} :
```

```
     sum {n in PUNTOS} r[i,n]*pi[i,n] >= sum {n in PUNTOS}
        r[i+1,n]*pi[i+1,n];

# Restriccion (4)
subject to limcompra {i in CLIENTES}:
     sum {j in PRODUCTOS, n in PUNTOS} x[i,j,n] <= 1;

# Restriccion (5)
subject to capacidad0 {j in PRODUCTOS}:
  c[1,j] = c0[j] - sum {n in PUNTOS} x[1,j,n];

subject to capacidad {i in CLIENTES,j in PRODUCTOS: i > 1}:
  c[i,j] = c[i-1,j] - sum {n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion (6)
subject to disponible {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS}:
  sum {n in PUNTOS} x[i,j,n] <= k[i,j];

# Restriccion (7)
subject to disp0 {j in PRODUCTOS}:
  c0[j]/c0[j] <= k[1,j];

# Restriccion (8)
subject to disp1 {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS: i > 1}:
  c[i-1,j]/c0[j] <= k[i,j];

subject to disp2 {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS: i > 1}:
  k[i,j] <= c[i-1,j];

# Restriccion (9)
subject to pc {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
    x[i,j,n] <= s[i,j,n]*pi[j,n];

# Restriccion (10)
subject to ic {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
    s[i,j,n]*(k[i,j]+pi[j,n]-1) <= sum {p in PRODUCTOS, m in PUNTOS}
       s[i,p,m]*x[i,p,m];
```

modelo2.run

```
reset;
model modelo2.mod;
data modelo2.dat;
option solver cplex;
solve;
display pi;
```

modelo2(Teatro).run

```
reset;
model modelo2(Teatro).mod;
data modelo2(Teatro).dat;
option solver cplex;
solve;
display pi;
```

A.3. Capítulo 5

modelo3.dat

```
data;

# Coste unitario de compra.
param c:=
     1 1
     2 1;

# Coste unitario de almacenamiento.
param h:=
     1 0.5
     2 1;

# Coste de orden de producto.
param o:=
     1 50
     2 40;



# alpha
param alpha:=
     1 1.7
     2 2.0;

# beta
param beta:=
     1 3
     2 3.1;

# Espacio unitario ocupado por cada producto
param s:=
     1 1
     2 1;
```

modelo3(Generacion aleatoria).dat

```
data;

# Coste unitario de compra.
param c:=
    1 1
    2 1
    3 1
    4 1
    5 1
    6 1
    7 1
    8 1
    9 1
    10 1;

# Coste unitario de almacenamiento.
param h:=
    1 0.5
    2 1
    3 1.2
    4 0.7
    5 1.5
    6 0.9
    7 2
    8 1.5
    9 1
    10 0.8;

# Coste de orden de producto.
param o:=
    1 50
    2 40
    3 125
    4 100
    5 160
```

```
    6 255
    7 200
    8 175
    9 295
    10 75;

/*
# alpha high
param alpha:=
    1 1.7
    2 2
    3 2.3
    4 2.5
    5 2.7
    6 2.9
    7 3.1
    8 3.2
    9 3.3
    10 3.2;
*/
#/*
# alpha low
param alpha:=
    1 3
    2 3.7
    3 4.4
    4 5.1
    5 5.8
    6 6.6
    7 7.1
    8 7.3
    9 7.4
    10 7.3;
#*/
/*
# beta high
param beta:=
    1 3
    2 3.1
```

```
    3 3.2
    4 3.1
    5 3
    6 2.9
    7 2.6
    8 2.5
    9 2.1
    10 1.8;
*/

#/*
# beta low
param beta:=
    1 7
    2 7.3
    3 7.4
    4 7.3
    5 7.1
    6 6.6
    7 5.8
    8 5.1
    9 4.0
    10 3.7;
#*/

# Espacio unitario ocupado por cada producto
param s:=
    1 1
    2 1
    3 1
    4 1
    5 1
    6 1
    7 1
    8 1
    9 1
    10 1;

# 3 puntos de precio
```

```
param P:=
    1 33 2 67 3 100;

# 5 puntos de precio
# param P:=
#     1 20 2 40 3 60 4 80 5 100;

# 10 puntos de precio
#param P:=
#    1 10 2 20 3 30 4 40 5 50 6 60 7 70 8 80 9 90 10 100;
```

modelo3.mod

```
# Numero de productos
param J := 2;

# Numero de clientes
param IP:= 5;

# Numero de puntos
param N := 10;

# Conjuntos
set PRODUCTOS:= 1 .. J;
set CLIENTES:= 1 .. IP;
set PUNTOS:= 1 .. N;

# Type-num
param typenum:= card(PRODUCTOS);

# Espacio total (Sin restriccion)
param Sp := 99999999;

# Puntos de precio
param P{n in PUNTOS}:= n*10;

param c{PRODUCTOS};
```

```
param h{PRODUCTOS};
param o{PRODUCTOS};

# Precio de reserva
param alpha{PRODUCTOS};
param beta{PRODUCTOS};
param V{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS}:=
Beta(alpha[j],beta[j])*100;

# Espacio unitario ocupado por cada producto
param s{PRODUCTOS};

# Entre tiempos
param t{i in CLIENTES}:= 1/IP;



# Surplus modificado
param S{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:=
    if (1 + (V[i,j] - P[n]))>0
    then 1 + (V[i,j] - P[n])
    else 0;



# Variables de decision
var x{CLIENTES,PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var g{PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var tau{CLIENTES,PRODUCTOS} binary;
var y{PRODUCTOS} binary;
var I{CLIENTES,PRODUCTOS} >= 0, integer;
var Q{PRODUCTOS} >= 0, integer;

maximize beneficioTotal:
# TR
  sum {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS} x[i,j,n]*P[n] -
# TIC
  (t[1]*sum{j in PRODUCTOS} Q[j]*h[j]) -
  sum {i in CLIENTES: i > 1} (t[i]*sum{j in PRODUCTOS}
     I[i-1,j]*h[j]) -
# TPC
```

```
  sum {j in PRODUCTOS} c[j]*Q[j] -
# TOC
  sum {j in PRODUCTOS} o[j]*y[j];


# Restriccion 6
subject to restriccion6 {j in PRODUCTOS}:
     sum {n in PUNTOS} g[j,n] = 1;

# Restriccion 7
subject to restriccion7 {i in CLIENTES}:
     sum {j in PRODUCTOS,n in PUNTOS} x[i,j,n] <= 1;

# Restriccion 8
subject to restriccion8p {j in PRODUCTOS}:
     I[1,j] = Q[j] - sum{n in PUNTOS} x[1,j,n];
subject to restriccion8 {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS: i > 1}:
     I[i,j] = I[i-1,j] - sum{n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion 9
subject to restriccion9:
     sum {j in PRODUCTOS} s[j]*Q[j] <= Sp;

# Restriccion 10
subject to restriccion10{j in PRODUCTOS}:
     y[j]*Sp >= sum {i in CLIENTES, n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion 11
subject to restriccion11:
     sum {j in PRODUCTOS} y[j] <= typenum;

# Restriccion 12
subject to restriccion12{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS}:
     tau[i,j] >= sum {n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion 13
subject to restriccion13p{j in PRODUCTOS}:
     tau[1,j]*Sp >= Q[j];
subject to restriccion13{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS: i > 1}:
```

```
    tau[i,j]*Sp >= I[i-1,j];

# Restriccion 14
subject to restriccion14p{j in PRODUCTOS}:
    tau[1,j] <= Q[j];
subject to restriccion14{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS: i > 1}:
    tau[i,j] <= I[i-1,j];

# Restriccion 15
subject to restriccion15{i in PRODUCTOS,j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
    x[i,j,n] <= S[i,j,n]*g[j,n];

# Restriccion 16
subject to restriccion16{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
    S[i,j,n]*(tau[i,j] + g[j,n] - 1) <= sum{k in PRODUCTOS,m in
       PUNTOS} S[i,k,m]*x[i,k,m];

# Restriccion 17
subject to restriccion17:
    sum{i in CLIENTES} t[i] = 1;
```

modelo3(Generacionaleatoria).mod

```
# Numero de productos
param J := 10;

# Numero de clientes
param IP:= 100;
# param IP:= 200;
# param IP:= 300;
# Numero de puntos
param N := 3;

# Conjuntos
set PRODUCTOS:= 1 .. J;
set CLIENTES:= 1 .. IP;
set PUNTOS:= 1 .. N;
```

```
# Type-num
param typenum:= 10;

# Espacio total (Sin restriccion)
param Sp := 99999999;

# Puntos de precio
param P{PUNTOS};

param c{PRODUCTOS};
param h{PRODUCTOS};
param o{PRODUCTOS};

# Precio de reserva
param alpha{PRODUCTOS};
param beta{PRODUCTOS};
param V{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS}:=
Beta(alpha[j],beta[j])*100;

# Espacio unitario ocupado por cada producto
param s{PRODUCTOS};

# Entre tiempos
param t{i in CLIENTES}:= 1/IP;



# Surplus modificado
param S{i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:=
    if V[i,j] - P[n] >=0
    then 1 + (V[i,j] - P[n])
    else 0;



# Variables de decision
var x{CLIENTES,PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var g{PRODUCTOS,PUNTOS} binary;
var tau{CLIENTES,PRODUCTOS} binary;
var y{PRODUCTOS} binary;
```

```
var I{CLIENTES,PRODUCTOS} >= 0, integer;
var Q{PRODUCTOS} >= 0, integer;

maximize beneficioTotal:
# TR
  sum {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS, n in PUNTOS} x[i,j,n]*P[n] -
# TIC
  (t[1]*sum{j in PRODUCTOS} Q[j]*h[j]) -
  sum {i in CLIENTES: i > 1} (t[i]*sum{j in PRODUCTOS}
     I[i-1,j]*h[j]) -
# TPC
  sum {j in PRODUCTOS} c[j]*Q[j] -
# TOC
  sum {j in PRODUCTOS} o[j]*y[j];


# Restriccion 6
subject to restriccion6 {j in PRODUCTOS}:
     sum {n in PUNTOS} g[j,n] = 1;

# Restriccion 7
subject to restriccion7 {i in CLIENTES}:
     sum {j in PRODUCTOS,n in PUNTOS} x[i,j,n] <= 1;

# Restriccion 8
subject to restriccion8p {j in PRODUCTOS}:
     I[1,j] = Q[j] - sum{n in PUNTOS} x[1,j,n];
subject to restriccion8 {i in CLIENTES, j in PRODUCTOS: i > 1}:
     I[i,j] = I[i-1,j] - sum{n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion 9
subject to restriccion9:
     sum {j in PRODUCTOS} s[j]*Q[j] <= Sp;

# Restriccion 10
subject to restriccion10{j in PRODUCTOS}:
     y[j]*Sp >= sum {i in CLIENTES, n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion 11
```

```
subject to restriccion11:
     sum {j in PRODUCTOS} y[j] <= typenum;

# Restriccion 12
subject to restriccion12{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS}:
     tau[i,j] >= sum {n in PUNTOS} x[i,j,n];

# Restriccion 13
subject to restriccion13p{j in PRODUCTOS}:
     tau[1,j]*Sp >= Q[j];
subject to restriccion13{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS: i > 1}:
     tau[i,j]*Sp >= I[i-1,j];

# Restriccion 14
subject to restriccion14p{j in PRODUCTOS}:
     tau[1,j] <= Q[j];
subject to restriccion14{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS: i > 1}:
     tau[i,j] <= I[i-1,j];

# Restriccion 15
subject to restriccion15{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
     x[i,j,n] <= S[i,j,n]*g[j,n];

# Restriccion 16
subject to restriccion16{i in CLIENTES,j in PRODUCTOS, n in PUNTOS}:
     S[i,j,n]*(tau[i,j] + g[j,n] - 1) <= sum{k in PRODUCTOS,m in
        PUNTOS} S[i,k,m]*x[i,k,m];
```

modelo3.run

```
reset;
model modelo3.mod;
data modelo3.dat;
option solver cplex;
solve;
```

modelo3(GeneracionAleatoria).run

```
reset;
model modelo3(GeneracionAleatoria).mod;
data modelo3(GeneracionAleatoria).dat;
option solver CPLEX;
param nruns := 30;
param TP {1..nruns};


for {k in 1..nruns} {
  reset data V;
  solve;
  let TP[k] := beneficioTotal;
}

printf "TP: $%6.2f.\n",(sum {k in 1..nruns} TP[k]) / nruns >
   prueba.txt;
```