Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

Grado en Matemáticas

Espacios de Convergencia

Trabajo Fin de Grado

Autora:

Urbana Guillén Guillén

Tutor:

Rafael Ayala Gómez

Junio 2022

Abstract

The main goal of this proyect is to deepen in the study of the Convergence Spaces which are a generalization of the topological spaces, by mean of certain kinds of convergence filters. For this purpose, we are going to introduce some basic concepts in order to delve further into the properties of these spaces such as separation axioms, continuous maps or compactness. We also study two important classes, pretopological and psedotopological spaces.

Índice general

Introducción

El estudio de los espacios topológicos como objeto formal se remonta a Hausdorff (1914), [10], y Kuratowski (1922), [14]. Una de las principales razones es la existencia de ciertos espacios de funciones en los que se tiene una noción de convergencia no métrica. Por tanto, no es posible definir adherencia o compacidad mediante sucesiones, lo que hizo necesario la introducción de otros objetos para generalizar las sucesiones, que son las redes, definidas por E.H. Moore y H.L. Smith en 1922, y los filtros, definidos por H. Cartan, en 1936.

Sin embargo, la convergencia en los espacios topológicos no es lo suficientemente general para englobar ciertas convergencias habituales en algunas ramas de las matemáticas, como en la Teoría de la Medida (convergencia casi por todo) o en el Análisis Funcional (convergencia débil en un espacio vectorial topológico).

Por otra parte, en ciertos problemas de la teoría de grafos y redes, que se presentan en el estudio de procesos de difusión, surgen de forma natural términos topológicos como la noción de proximidad entre sus elementos, y términos topológicos como entornos, conexión o continuidad, y emplear en ellos los métodos clásicos de la topología no es adecuados, esencialmente debido a la propiedad idempotente de la clausura. Surgen así los llamados espacios de Cech o pretopológicos en los que existe una noción de clausura pero sin dicha propiedad.

Todos estos problemas motivaron el estudio de una noción más general de convergencia basada en el concepto de filtro, que en realidad supone asociar unos entornos a los puntos pero sin exigirles compatibilidad, como si hacía Hausdorff en su axiomática. Es decir, un espacio donde se especifica cuáles van a ser los filtros que van a ser convergentes a un punto dado, imponiendo unas condiciones que en realidad se asemejan a las condiciones que cumplen las sucesiones convergentes a un punto.

Esta teoría general de convergencia fue iniciada en 1948, Choquet [7] presentó su teoría de los Espacios pseudotopológicos y de los Espacios pretopológicos, en los que el concepto de convergencia de un filtro está axiomatizado, se desarrollará en el Capítulo 5. Y posteriormente, otros autores han presentado axiomáticas distintas, como por ejemplo [18] y [3].

En este trabajo se da una breve introducción a los espacios de convergencia que generalizan tanto a los topológicos como los pseudotopológicos y pretopológicos.

En el Capítulo 1 se expone cómo en los espacios topológicos las sucesiones no bastan para caracterizar las nociones topológicas básicas fundamentales como clausura y compacidad, y cómo ello motivó la definición de redes y filtros que se estudian en el Capítulo 2.

En el Capítulo 3 se estudia con detalle la convergencia casi por todo y vemos que no está asociada a ninguna topología.

En el Capítulo 4 se exponen brevemente los conceptos básicos de la teoría de convergencia.

En el Capítulo 5 se estudian los dos tipos más importantes de espacios de convergencia, aparte de los topológicos.

En el Capítulo 6 se define una noción de continuidad entre estos espacios y se dan diversas caracterizaciones de la misma que no coinciden con las conocidas por los espacios topológicos. Las propiedades productivas y hereditarias de las estructuras de convergencia se recogen en el Capítulo 7.

En el Capítulo 8 se estudia un concepto de compacidad basado en la noción de convergencia de filtros y ultrafiltros que en el caso particular de los espacios topológicos, el clásico proporcionado por el Teorema de Heine-Borel.

Ya en el Capítulo 9 se definen las estructuras de convergencia natural asociado a un digrafo, y que por tanto corresponden a las pretopologías clásicas asociadas a relaciones binarias.

Por último en el Capítulo 10 se tratan los axiomas de separación para los espacios de convergencia, pero solamente las propiedades T_0, T_1 y T_2, pues las propiedades de regularidad y normalidad que se consideran en los espacios topológicos se enuncian en términos de conjuntos abiertos, y estos no son los elementos característicos del espacio de convergencia. Por ello, se encuentran en la literatura distintas definiciones de las mismas no equivalentes.

Capítulo 1

Topología y Convergencia

Si bien las sucesiones son suficientes para caracterizar propiedades fundamentales de los espacios métricos, como adherencia de un conjunto, las aplicaciones continuas o la compacidad, ello no es cierto, en general, en los espacios topológicos. Sí lo es en los espacios $1^{\underline{o}}N$, es decir, aquellos en los que cada punto admite una base de entornos numerable.

Recordemos que existen tres métodos fundamentales para definir el concepto de espacio topológico. Una, la que suele usarse en un primer curso de topología, es la que se basa en el concepto de *conjunto abierto*, generalización de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, y debida a Alexandroff (1927).

Definición 1.0.1. Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T} \subset P(X)$ una familia satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. X, $\emptyset \in \mathcal{T}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$.
3. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos de $\mathcal{T}$ entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

La segunda definición es debida a Kuratowski y consiste en considerar como noción de partida el concepto de clausura de un conjunto y sus cuatro propiedades fundamentales.

Definición 1.0.2. Un *espacio topológico* es un par (X, φ) donde $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ es un operador (habitualmente llamado operador clausura de Kuratowski), que satisface las siguientes condiciones:

1. Se conserva el conjunto vacío: $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.
2. Es extenso: para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq \varphi(A)$.
3. Conserva uniones binarias: para todo $A, B \subseteq X$ $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.
4. Es idempotente: para todo $A \subseteq X$, $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

La demostración de que ambas definiciones son equivalentes consiste en tomar como abiertos los complementarios de los puntos fijos de φ, es decir,

$$\mathcal{T}_\varphi = \{A \subset X \ ; \ \varphi(X - A) = (X, A)\}.$$

La tercera definición, debida a Hausdorff (1914), consiste en asociar a cada punto de un conjunto una familia de conjuntos que tienen propiedades similares a las bolas abiertas en un espacio métrico.

Definición 1.0.3. Un *espacio topológico* es un par (X, φ), donde $\varphi : X \longrightarrow P(P(X))$ es una aplicación que satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo $x \in X$, si $N \in \varphi(x)$, $x \in N$.
2. Si $N_1, N_2 \in \varphi(x)$, $N_1 \cap N_2 \in \varphi(x)$.
3. Si $N \in \varphi(x)$ y $N \subset M$, $M \in \varphi(x)$.
4. Si $N \in \varphi(x)$, existe $M \in \varphi(x)$ tal que $N \in \varphi(y)$ para todo $y \in M$.

La familia $\varphi(x)$ se suele denotar por $\mathcal{N}_x^\varphi$ y se prueba que dado (X, φ), existe una única topología $\mathcal{T}_\varphi$ sobre X, tal que $\mathcal{N}_x^\varphi$ son los entornos de x para dicha topología. La idea de la demostración consiste en tomar

$$\mathcal{T}_\varphi = \{O \subset X \ ; \ O \in \varphi(x) \text{ para cada } x \in X\},$$

y la Propiedad 4 permite probar la unicidad de $\mathcal{T}_\varphi$.

Es un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, los conjuntos más parecidos a las bolas abiertas centradas en un punto son los llamados entornos básicos de ese punto.

Definición 1.0.4. Una *base de entornos* de x es una familia $\mathcal{B}_x$ que satisface la siguiente propiedad:

$$\text{Si } N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}, \text{ existe } B_x \in \mathcal{B}_x \text{ con } x \in B_x \in N.$$

Por ello, son de gran interés los espacios en los que cada punto admite una base de entornos numerable, es decir, los espacios $1^{\underline{o}}N$: en ellos, cada punto admite una base de entornos decreciente, que es la propiedad clave para probar la caracterización de la continuidad mediante sucesiones.

Es decir, se tiene:

Proposición 1.0.5. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio $1^{\underline{o}}N$, para toda aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$, son equivalentes:*

1. *f es continua.*

2. Si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Demostración. ($2 \implies 1$) Haremos esta implicación por reducción al absurdo, como en los espacios métricos. Pero si $a \in X$ no tuviera una base de entornos numerables, el no ser continua en a permitiría encontrar un entorno $N \in \mathcal{N}_{f(a)}$ tal que la imagen $f(V)$ de todo entorno de a, no estaría incluida en N. Luego por el Axioma de Elección podríamos asociar a todo $V \in \mathcal{N}_a^{\mathcal{T}}$ un punto $x_V \in V$ con $f(x_V) \in N$. La diferencia esencial es que la familia $\{x_V\}_{V \in \mathcal{N}_a^{\mathcal{T}}}$ no es numerable y su existencia no contradice la propiedad 2.

($1 \implies 2$) Es válida para cualquier espacio topológico. $\square$

Capítulo 2

Redes y Filtros

2.1. Redes

Los primeros estudios para obtener una teoría de convergencia en espacios topológicos generales análoga a la de las sucesiones en los espacios métricos se deben a E. H. Moore (1915) y a Smith (1922).

Los objetos definidos por ellos se llaman *redes* o *sucesiones de Moore-Smith*.

La noción de red viene influenciada por la noción de sucesión, las cual nos sirve para los espacios métricos pero no para los espacios topológicos, pues no resulta suficiente para caracterizar la clausura de un conjunto o la continuidad de una función.

Definición 2.1.1. Se dice que un conjunto no vacío Λ es un *conjunto dirigido* si existe una relación $\leq$ sobre Λ de forma que:

1. Si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda \leq \lambda$.
2. Dados λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \Lambda$. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
3. Si λ_1, $\lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ de forma que $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Ejemplo 2.1.2. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y Λ una base de entornos de x, Entonces Λ es un conjunto dirigido de forma que para A, $B \in \Lambda$, $A \leq B$ si y solo si $B \subset A$.

Ejemplo 2.1.3. Si $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$, $(\mathcal{B}_x, \leq)$ es un conjunto dirigido, siendo $\leq$ la relación de inclusión. Entonces la aplicación $P : (\mathcal{B}_x, \leq) \longrightarrow X$ que a cada $B \in \mathcal{B}_x$ le asocia un punto $x_B \in B$, es una red y $P \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. En efecto, si $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, sea $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in \mathcal{B}_x \subset V$. Entonces, si $\mathcal{B}_x \leq \mathcal{B}'_x$, $\mathcal{B}'_x \subset \mathcal{B}_x$, y por tanto, $P(\mathcal{B}'_x) = x_{\mathcal{B}'_x} \in V$.

Definición 2.1.4. Sea X un conjunto. Una *red* en X es una función $P : \Lambda \to X$, donde

Λ es un conjunto dirigido.
Notaremos al punto $P(\lambda)$ como x_λ y la red basada en Λ por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Parece natural definir la convergencia de una red $\{x_i\}_{i\in I}$ a un punto x suponiendo la condición de que para todo entorno N de x todos los puntos x_i están contenidas en N a partir de un cierto índice i. Pero ello exige que en I exista un cierto orden, aunque no necesariamente total, sino que basta con garantizar que sea dirigido, en el sentido siguiente.

Definición 2.1.5. Sean X un espacio topológico y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X y $x \in X$.

La red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *converge* a x si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para cada $\lambda \geq \lambda_0$ tenemos que $x_\lambda \in V$.

Esta condición se expresa habitualmente diciendo que una red converge a un punto si está eventualmente en cualquier entorno de dicho punto

Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.1.3 es posible adaptar el resultado conocido para sucesiones y se obtiene, ver [12],

Proposición 2.1.6. *$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua en x si y solo si dada una red $\{x_i\}_{i\in I} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, $\{f(x_i)\}_{i\in I} \xrightarrow{\mathcal{T}'} f(x)$.*

Podemos generalizar el concepto de subsucesión de una sucesión para una red de la siguiente forma.

Definición 2.1.7. Si Λ es un conjunto dirigido, un subconjunto Λ' se llama cofinal si para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un elemento $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda \leq \lambda'$.

Definición 2.1.8. Sean $P : \Lambda \to X$ y $P' : \Lambda' \to X$ redes. Decimos que P' es una subred de P si existe una función $f : \Lambda' \to \Lambda$ de forma que,

1. f es monótona, si $\alpha \preceq \beta$, entonces $f(\alpha) \leq f(\beta)$.
2. f es cofinal, es decir $f(\Lambda')$ es una subred cofinal de Λ.
3. $\Lambda'(\alpha) = \Lambda(f(\alpha))$.

Proposición 2.1.9. *Sea $P : \Lambda \to X$ una red tal que $P \to x$. Si P' es una subred de P, entonces también se tiene que $P' \to x$.*

Definición 2.1.10. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $P : \Lambda \to X$ una red, y un punto $x \in X$. Se dice que x es un *punto de acumulación* de P si para cada conjunto abierto U tal que $x \in U$, y para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $e \in D$ con $\lambda \leq e$ de forma que $P(e) \in U$.

El siguiente resultado generaliza para redes una propiedad de las subsucesiones de una sucesión, que dice que un punto es de acumulación de una sucesión si x_n admite una subsucesión convergente. Ver [12].

Teorema 2.1.11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $P : \Lambda \to X$ una red. Entonces x es un punto de acumulación de P si y solo si existe una subred P' de P de forma que $P' \to x$.*

2.2. Filtros

En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la definición de sucesión convergente puede expresarse de manera que no aparezcan explícitamente condiciones sobre sus términos. En efecto, dado $\{x_n\}_{n\in N}$ y $m \geq N$, el conjunto

$$T_m(x_n) = \{x_n : n \geq m\}$$

se llama *sección* o *cola* de $\{x_n\}_{n\in N}$ determinada por m, y si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, se puede escribir $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si y solo si para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $m \in N$ tal que $T_m(\{x_n\}_{n\in N}) \subset N$.

De esta manera se observa que la convergencia de una sucesión está determinada por la familia de conjuntos

$$T(\{x_n\}_{n\in N}) = \{T_m(x_n)\}_{n\in N}.$$

Con las redes ocurre lo mismo y el hecho de que el conjunto de índices I sea dirigido, se refleja en las siguientes propiedades de la familia $T(\{x_i\}_{i\in I})$:

1. $T_j(\{x_i\}_{i\in I}) \neq \emptyset$, por ser $\leq$ reflexiva.
2. Dados $j, j' \in I$, existe $j'' \in I$ tal que $T_{j''}(x_i) \subset T_j(x_i) \cap T_{j'}(x_i)$, por ser $\leq$ transitiva e I dirigido.

Así pues, la propiedad de *convergencia* de una red $\{x_i\}_{i\in I}$, se expresa mediante condiciones sobre ciertos conjuntos:

$$\{x_i\}_{i\in I} \longrightarrow x \text{ si y solo si para todo } N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \text{ existe } T_j(x_i) \subset N.$$

Fue este hecho, es decir, la posibilidad de desarrollar un concepto de convergencia en espacios topológicos generales mediante familias de conjuntos con las propiedades características de $\{T_j(x_i)_{i\in I}\}$, que marca el inicio en 1937 por H. Cartan de la *teoría de filtros.*

Definición 2.2.1. Dado un conjunto X, un *filtro* $\mathcal{F}$ en X es una colección de subconjuntos no vacíos de X tal que:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$ entonces $G \in \mathcal{F}$.

Recordemos que el conjunto de los entornos $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ de un punto x en un espacio $(X, \mathcal{T})$ satisface las siguientes propiedades:

1. La intersección de dos entornos es un entorno $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ es cerrado para intersecciones finitas.

2. Si $\mathcal{N}$ es un entorno de x entonces cualquier conjunto $\mathcal{N}'$ tal que contenga a $\mathcal{N}$ es otro entorno de x.

Se observa que la definición de filtro es una generalización de estas dos propiedades.

Nota 2.2.2. Notaremos como $Fil(X)$ al conjunto de filtros sobre X.

Ejemplo 2.2.3. 1. Sea X un conjunto, entonces $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro sobre X, llamado *filtro trivial* sobre X.

2. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $x \in X$, el conjunto de los entornos $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ de x es un filtro sobre X.

3. Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$ y $A \subseteq X$, la familia

$$\mathcal{F}_A = \{G \subset X \ ; \ G \supset F \cap A \text{ para algún } F \in \mathcal{F}\}$$

es un filtro llamado filtro inducido sobre A.

4. Dado un conjunto infinito X, la colección $\mathcal{F}_{cof} = \{A \subseteq X \ ; \ X - A \text{ es finito}\}$ de conjuntos cofinitos sobre X es también un filtro, conocido por el nombre de *filtro de Fréchet* o *filtro cofinito*. En efecto,

   a) Tenemos que $X - X = \emptyset$ es finito, $X \in \mathcal{F}_{cof}$, luego $\mathcal{F}_{cof} \neq \emptyset$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F}_{cof}$, ya que $X - \emptyset = X$ no es finito.

   b) Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$. Tenemos que

   $$X - (F_1 \cap F_2) = (X - F_1) \cup (X - F_2).$$

   Como $X - F_1$ y $X - F_2$ son finitos, su unión también lo es, luego $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$.

   c) Sea $G \subset X$ tal que $F \subset G$ para algún $F \in \mathcal{F}_{cof}$. Entonces $X - G \subset X - F$. Como $X - F$ es finito, $X - G$ es finito. Luego, $G \in \mathcal{F}_{cof}$.

   Una propiedad importante de este filtro es que cualquier filtro que lo contenga no puede contener conjuntos finitos.

Observación 2.2.4. 1. Si $\mathcal{B}$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X que es cerrada para intersecciones finitas, entonces el conjunto

$$\{C \ ; \ B \supseteq C \subseteq X \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$$

es un filtro llamado filtro generado por $\mathcal{B}$ y se denota por $[\mathcal{B}]$.

2. En particular, si A es un subconjunto no vacío de X, entonces el conjunto $\{B\ ;\ A \subseteq B \subseteq X\}$ es un filtro, que denotamos por $[A]$ y llamaremos *filtro principal generado por* A.

3. El *filtro puntual en* x es el filtro principal $[\{x\}]$, que denotaremos por $[x]$.

Definición 2.2.5. Un filtro $\mathcal{F}$ se llama fijo si $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$ y libre en caso contrario.

Ejemplo 2.2.6.
1. El filtro principal en x es un filtro fijo para cada $x \in X$. Tenemos que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$ ya que x pertenece a todos los elementos del filtro.

2. El filtro principal en A es un filtro fijo para todo $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

3. El filtro de entornos de cualquier $x \in X$ es un filtro fijo, puesto que x pertenece a cualquier entorno, por lo que la intersección de los entornos contiene a x y por tanto no es vacía.

4. Los filtros cofinitos son filtros libres. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{F}_{cof}$ el filtro cofinito. Dado $x \in X$, sea $F_x = X - \{x\}$. Luego el complementario de F_x es finito, por lo que $F_x \in \mathcal{F}_{cof}$, pero $x \notin F_x$. Entonces x no está en la intersección de todos los elementos del filtro, es decir, la intersección es vacía. $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}_{cof}} F = \emptyset$ y $\mathcal{F}_{cof}$ es un filtro libre.

2.2.1. Bases de Filtros

Generalmente, cuando estudiamos espacios topológicos y sus propiedades lo hacemos restringiéndonos a sus bases, lo cual facilita la obtención de los resultados. En concreto, para los filtros sobre un espacio topológicos existe el concepto de bases de filtros los cuales permiten trabajar sobre un determinado subconjunto del filtro y luego extenderlo al filtro. Se trata de una teoría muy amplia, pero en este trabajo recogeremos aquellos resultados que son básicos y necesarios para desarrollar el objetivo de este, que es la convergencia.

Definición 2.2.7. Se dice que un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es una *base del filtro* $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$, es decir, si

$$\mathcal{F} = \{F \subset X\ ;\ \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } B \subset F\}$$

Definición 2.2.8. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{B}$ es *base de filtro sobre* X si:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ es una *base de filtro* sobre X,

$$< \mathcal{B} >= \{F \subset X \text{ ; existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } B \in \mathcal{F}\}$$

se llama filtro generado por $\mathcal{B}$.

Normalmente los filtros se definen indicando solo algunos de sus elementos y a partir de estos y utilizando la propiedad 2 de la definición de filtro los demás. Es decir, los elementos del filtro son los superconjuntos de los elementos de una base.

Ejemplo 2.2.9. 1. *Filtro de las secciones o de las colas de una sucesión.*

Si $\{x_n\}$ una sucesión y $T_m(x_n) = \{x_n\}_{n>m}$ las colas de la sucesión, entonces se dice que la familia $T\ (\{x_n\}) = \{T_m(x_n)\}$ es base de filtro, y el filtro generado por las colas, $< T(x_n) >$, se llama filtro de las secciones de $\{x_n\}$.

2. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces, si $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ es una base de entornos de x, $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ es base del filtro $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

3. Sea $\mathcal{F} \in Fil(X)$ y $A \subseteq X$. Si $F \cap A \notin \emptyset$ para $F \in \mathcal{F}$, entonces

$$\{F \cap A \ ; \ F \in \mathcal{F}\}$$

es una base del filtro $\mathcal{F}_A$.

Proposición 2.2.10. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X y $f : X \to Y$ una aplicación, entonces $f(\mathcal{F})$ es base de filtro.*

Demostración. 1. Evidentemente, se trata de una familia no vacía de conjuntos no vacíos.

2. Si $y \in f(F_1) \cap f(F_2)$, entonces $y \in f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$ para $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

□

Observación 2.2.11. Nótese que en general, $f(F)$ no es un filtro, pues si f no es inyectiva, $f(F_1) \cap f(F_2) \notin f(\mathcal{F})$.

Ejemplo 2.2.12. Sea $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto Y y $f : X \to Y$ una aplicación, entonces $f^{-1}(\mathcal{F})$ no es un filtro sobre X, ni si quiera una base de filtro, pues puede existir $F \in \mathcal{F}$ de forma que $f^{-1}(F) = \emptyset$.

Observación 2.2.13. Si la aplicación f es sobreyectiva entonces sí es base de filtro.

Proposición 2.2.14. *Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces $\mathcal{T} = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$, es una* topología *sobre X.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{T}$ cumple las propiedades de una topología.

1. Vemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Como X está contenido en todo filtro sobre X, por la propiedad 3 de la definición de filtro, tenemos que $X \in \mathcal{F}$.

2. Sean $F_1,\ F_2 \in \mathcal{T}$. Si $F_1 = \emptyset$, entonces $F_1 \cap F_2 = \emptyset \in \mathcal{T}$. En otro caso se tiene que $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$, y como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{T}$.

3. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{T}$. Supongamos $\bigcup\limits_{i\in I} A \neq \emptyset$. Luego existe $F \in \mathcal{T}$ tal que $F \in A$ y $F \neq \emptyset$. Luego tenemos que $F \in \mathcal{F}$, donde $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} A$, como $\mathcal{F}$ es filtro obtenemos que $\bigcup\limits_{i\in I} A \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\bigcup\limits_{i\in I} A \in \mathcal{T}$. En el caso en el que esta unión sea vacía, por el apartado 1 también se encontraría en $\mathcal{T}$.

$\square$

Observación 2.2.15. No toda topología puede ser inducida por un filtro Por ejemplo, para la topología discreta no existe ningún filtro del cual obtenerla.

Nótese que si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in Fil(X)$, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no es en general un filtro, pues dado $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$, puede ocurrir que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Por ejemplo, si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_1 = [1]$ y $\mathcal{F}_2 = [2]$, entonces $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Se tiene el siguiente resultado, consecuencia directa de las definiciones,

Proposición 2.2.16. *Sea X un conjunto y $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de filtros sobre X. Si para cualesquiera $F_i,\ F_j$ con $i, j \in I$ tenemos que $F_i \subset F_j$ o $F_j \subset F_i$, entonces $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es un filtro.*

Observación 2.2.17. Sin embargo, la intersección arbitraria de filtros sí es un filtro, como ocurre con la intersección arbitraria de topologías de un conjunto que sigue siendo una topología.

Proposición 2.2.18. *Sean X un conjunto y $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de filtros sobre X, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es un filtro.*

Igual que en el conjunto de las topologías sobre un conjunto, podemos definir una estructura de *orden parcial* en $Fil(X)$,

Definición 2.2.19. Si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ son dos filtros sobre X tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, decimos que $\mathcal{G}$ es *más fino* que $\mathcal{F}$ y se escribirá que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$.

Aunque sí podemos obtener un nuevo filtro a partir de uniones finitas de elementos de dos filtros. De hecho, se tiene,

Proposición 2.2.20. *Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ filtros sobre X. Entonces,*

1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{F \cup G : F \in \mathcal{F} \text{ y } G \in \mathcal{G}\}$.

2. *Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son bases de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente, $\mathcal{B}'' = \{B \cup B' \ ; B \in \mathcal{B} \text{ y } B' \in \mathcal{B}'\}$ es base de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.*

Demostración. 1. Si $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $A = A \cup A$, luego $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subset \{F \cup G\ ;\ F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Recíprocamente, sea $F \cup G$. con $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Como $F \cup G \supset F$ y $F \cup G \supset G$, se tiene que $F \cup G \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

2. Por el apartado anterior, $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Además, si $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $A = F \cup G \supset B \cup B'$, luego $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} =< \mathcal{B}'' >$.

□

Proposición 2.2.21. *Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son filtros sobre X, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ si y solo si para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subseteq F$.*

Demostración. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces por la hipótesis sabemos que existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subseteq F$, y además $F \in \mathcal{F}$. Luego, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Si $F \in \mathcal{F}$, entonces por hipótesis $F \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es no vacío, entonces existe $G \in \mathcal{G}$. Luego $F \cap G$, subconjunto de F que pertenece a $\mathcal{G}$. □

Proposición 2.2.22. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $A \subseteq X$. Si $A \notin \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{G} = \{B\ ;\ \text{existe } F \in \mathcal{F} \text{ con } B \supset F - A\}$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}$.*

Demostración. Si $F - A = \emptyset$, entonces $F \subseteq A$. Al ser $\mathcal{F}$ un filtro, se sigue que $A \in \mathcal{F}$, lo cual contradice la hipótesis. Luego $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Si $G_1 \in \mathcal{G}$, y $G_1 \subseteq G_2$, $F - A \subseteq G_1 \subseteq G_2$ para algún $F \in \mathcal{F}$, luego $G_2 \in \mathcal{G}$. Si G_1 y G_2 pertenecen a $\mathcal{G}$, entonces $G_1 \supseteq F_1 - A$ y $G_2 \supseteq F_2 - A$, para ciertos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Luego $G_1 \cap G_2 \supseteq (F_1 - A) \cap (F_2 - A) = (F_1 \cap F_2) - A$ así que $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es un filtro. Finalmente, si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F - A \subseteq F$, luego $F \in \mathcal{G}$; por tanto, $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$. □

2.2.2. Ultrafiltros

En esta sección se estudiarán los elementos maximales de la relación de orden definida en $Fil(X)$, que son los llamados ultrafiltros.

Definición 2.2.23. Dado un conjunto X, un *ultrafiltro* $\mathcal{U}$ en X es un elemento maximal de $(Fil(X), \leq)$, es decir, un filtro tal que no existe ningún filtro en X más fino que $\mathcal{U}$.

Por tanto, $\mathcal{U} \in Fil(X)$ es un *ultrafiltro sobre* X si $\mathcal{F} \in Fil(X)$ cumple que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Nota 2.2.24. Notaremos por $Ult(X)$ al conjunto de ultrafiltros.

Ejemplo 2.2.25. 1. Sea X un conjunto. Si $x \in X$, entonces $[x]$ es un ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X tal que $[x] \subset \mathcal{G}$. Entonces para cada $G \in \mathcal{G}$, $G \cap \{x\} \neq \emptyset$. Luego $x \in G$ para cada $G \in \mathcal{G}$, es decir, $G \in [x]$. Por tanto, $\mathcal{G} = [x]$.

2. Sean X conjunto y $A \subset X$, con más de un punto. Entonces, $[A]$ no es un ultrafiltro, pues si $x \in A$, $[A] \subset [x]$. Pero $[x] \not\subset [A]$, pues $\{x\} \in [x]$ pero $\{x\} \notin [A]$.

Proposición 2.2.26. *Un filtro $\mathcal{U}$ en X es un ultrafiltro si y solo si $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$ para todo $A \subset X$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un filtro en X tal que $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$ para todo $A \subseteq X$. Si $\mathcal{U}$ está contenido estrictamente en un filtro $\mathcal{V}$, entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \notin \mathcal{U}$. Por hipótesis $X - V \in \mathcal{U}$, y por tanto $X - V \in \mathcal{V}$, pero entonces $(X - V) \cap V = \emptyset$ y $\mathcal{V}$ no sería filtro.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. Supongamos que $A \notin \mathcal{U}$ para un subconjunto A de X, por la Definición 2.2.19, se sigue que $\mathcal{V} = \{V \ ; \ V \supseteq U - A \wedge U \in \mathcal{U}\}$ es un filtro más fino que $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, se sigue que $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Como $X \in \mathcal{U}$, concluimos que $X - A \in \mathcal{U}$. □

Los ultrafiltros son de gran interés en topología, pues gracias a estos podemos expresar de una forma muy sencilla ciertas propiedades topológicas basadas en nociones de convergencia.

Sin embargo, aparte de los puntuales, es decir, los del tipo $[x]$, no se conoce ningún otro ejemplo de ultrafiltro definido específicamente, y para asegurar su existencia es necesario usar el Lema de Zorn, que es un principio de Teoría de Conjuntos equivalente al Axioma de Elección.

Recordemos que si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq X$, una cota superior de A es un elemento $a \in X$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in A$, y A se llama cadena si $(A, \leq)$ está totalmente ordenado. Se tiene,

Lema 2.2.27. Lema de Zorn.

Si toda cadena en $(X, \leq)$ tiene una cota superior, entonces $(X, \leq)$ admite al menos un elemento maximal.

Es decir, existe $x \in X$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in X$.

Teorema 2.2.28. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ en X de forma que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M} = \{\mathcal{G} \ ; \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ un filtro en $X\}$ y sea $\mathcal{H}$ una cadena en $\mathcal{M}$. Por la Proposición 2.2.16, la unión de todos los filtros que están en $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro y es cota superior de $\mathcal{H}$. Aplicando el lema de Zorn en $\mathcal{M}$, existe un elemento maximal $\mathcal{U}$, luego es $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. □

Proposición 2.2.29. *Un ultrafiltro que no es filtro puntual, es un filtro libre.*

Demostración. Supongamos que $\bigcap\{U \in \mathcal{U}\} = A \neq \emptyset$. Si $x \in A$, para todo $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $x \in A \subset U$, luego $U \in [x]$, es decir $\mathcal{U} \subset [x]$, y se tendría que $\mathcal{U} = [x]$.

□

La siguiente proposición nos muestra una forma de obtener nuevos filtros a partir de uno dado, haciéndolos más finos al irle añadiendo conjuntos que no se encuentran en $\mathcal{U}$.

Proposición 2.2.30. *Dados un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X y $A, B \subseteq X$, si $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ ó $B \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Veamos que si $B \notin \mathcal{U}$, pues el caso contrario es trivial, entonces se tiene que cumplir que $A \in \mathcal{U}$, Razonemos por reducción al absurdo, si $A \notin \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{F} := \{M \subseteq X \ \ ; \ \ A \cup M \in \mathcal{U}\}$ es un filtro. En efecto, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $B \in \mathcal{F}$. Si M y $M' \in \mathcal{F}$ entonces $A \cup (M \cap M') = (A \cup M) \cap (A \cup M')) \in \mathcal{U}$, luego $M \cap M' \in \mathcal{F}$. Por último, si $M \in \mathcal{F}$ y $M \subset N$, entonces $A \cup M \in \mathcal{U}$ y $A \cap M \subset A \cup N$, luego $A \cup N \in \mathcal{U}$.

Además, $\mathcal{F}$ es estrictamente más fino que $\mathcal{U}$, pues si $C \in \mathcal{U}$, entonces $A \cup C \in \mathcal{U}$, luego $C \in \mathcal{F}$. Pero $B \in \mathcal{F} - \mathcal{U}$. Se llega así a una contradicción, luego necesariamente $A \in \mathcal{U}$ ó $B \in \mathcal{F}$. □

Proposición 2.2.31. *Un filtro $\mathcal{U}$ en X es la intersección de todos los ultrafiltros en X que lo contienen.*

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un filtro y $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ es la familia de los ultrafiltros más fino que $\mathcal{F}$, basta probar que $\bigcap\{\mathcal{U}_i \ ; \ i \in I\} \subset \mathcal{F}$. Supongamos por el contrario que $\bigcap \mathcal{U}_i \not\subseteq \mathcal{F}$. Entonces por la Proposición 2.2.21, existe $U \in \{\mathcal{U}_i \ ; \ i \in I\}$, que no contiene a ningún conjunto $F \in \mathcal{F}$. Por tanto, si $\mathcal{G}$ es el filtro generado por la familia $\{F - U \ ; \ F \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$, y si $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro tal que $\mathcal{V} \geq \mathcal{G}$, ha de ser $\mathcal{V} \geq \mathcal{F}$, luego existe $i \in I$ tal que $\mathcal{V} = \mathcal{U}_i$. Pero entonces U y $F - U$, que son disjuntos, estarían en $\mathcal{U}_i$, lo que es abierto.

□

Proposición 2.2.32. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sen X y sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una colección finita de subconjuntos de X. Si $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{U}$, entonces $S_i \in \mathcal{U}$ para algún $i \in I$.*

Demostración. La haremos por inducción en $|I|$. Sea $|I| = 2$. Si ni S_0 ni S_1 pertenecen a $\mathcal{U}$, entonces $X - S_0$ y $X - S_1$ pertenecen ambos a $\mathcal{U}$, luego $X - (S_0 \cup S_1) = (X - S_0) \cap (X - S_1) \in \mathcal{U}$, lo cual contradice la hipótesis que nos decía que $S_0 \cup S_1 \in \mathcal{U}$.

Supongamos ahora que $|I| = n + 1$ para $n \geq 2$. Por hipótesis tenemos que $(S_1 \cup \cdots \cup S_n) \cup S_{n+1} \in \mathcal{U}$. Si $S_{n+1} \notin \mathcal{U}$, luego $S_1 \cup \cdots \cup S_n \in \mathcal{U}$, luego por la hipótesis inductiva tenemos que $S_k \in \mathcal{U}$ para algún $1 \leq k \leq n$. □

Proposición 2.2.33. *Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una colección finita de ultrafiltros sobre X. Si $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro* más fino *que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$, entonces $\mathcal{V}=\mathcal{U}_i$ para algún $i\in I$.*

Demostración. Si $\mathcal{V}\neq\mathcal{U}_i$ con $i\in I$, entonces para todo $i\in I$ existe $U_i\in\mathcal{U}_i$, tal que $X-U_i\in\mathcal{V}$, por lo que $X-\bigcup_{i\in I}U_i=\bigcap_{i\in I}(X-U_i)\in\mathcal{V}$, lo cual implica que $\bigcup_{i\in I}U_i\notin\mathcal{V}$, pero $\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathcal{U}_i$ para cada $i\in I$. De ello se sigue que $\bigcup_{i\in I}U_i\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\subseteq\mathcal{V}$, y por el resultado anterior existe $U_{i_0}\in\mathcal{V}$ en contra de lo supuesto. Concluimos que $\mathcal{V}=\mathcal{U}_i$ para algún $i\in I$. □

Proposición 2.2.34. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Si $\mathcal{U}$ contiene conjunto finito, entonces $\mathcal{U}$ es un filtro puntual.*

Demostración. Sea F el menor conjunto en $\mathcal{U}$. Si $G\subset F$, entonces $G\notin\mathcal{U}$, lo cual implica que $\mathcal{V}=\{V\ ;\ \text{existe } U\in\mathcal{U} \text{ con } V\supseteq U-G\}$ es un filtro más fino que $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro se sigue que $\mathcal{U}=\mathcal{V}$. En particular, $F-G\in\mathcal{U}$. Pero $|F-G|=|F|-|G|<|F|$, en contra de la hipótesis de que F es el conjunto finito más pequeño en $\mathcal{U}$. Por lo tanto, F no contiene subconjuntos propios, por lo que F es vacío o un conjunto unitario. Como F no puede ser vacío, concluimos que F es unitario, por lo que $\mathcal{U}$ es un filtro puntual. □

Proposición 2.2.35. *Si X es infinito, la intersección de todos los filtros libres sobre X es $\mathcal{F}_{cof}$.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ la familia de los filtros libres sobre X. Veamos que $\mathcal{F}_{cof}\subset\bigcap\{U_i\}_{i\in I}$. En caso contrario, existirían $i\in I$ y $F\in\mathcal{F}_{cof}-\mathcal{U}_i$. Pero entonces $X-F\in\mathcal{U}_i$, y por la Proposición 2.2.34, $\mathcal{U}_i$ sería puntual. La otra inclusión se demuestra razonando como en la demostración de la Proposición 2.2.31. □

Proposición 2.2.36. *Si $f:X\longrightarrow Y$ es sobreyectiva y $\mathcal{U}\in Ult(X)$, entonces $f(U)\in Ult(Y)$.*

Demostración. Supongamos que $V\notin f(\mathcal{U})$ para algún $V\subset Y$. Entonces $f^{-1}(V)\notin\mathcal{U}$, ya que en caso contrario, por ser f sobreyectiva, $f(f^{-1}(V))=V\in f(\mathcal{U})$. Por tanto, por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, $X-f^{-1}(V)\in\mathcal{U}$, luego $f(X-f^{-1}(V))\in f(\mathcal{U})$. Como $f(X-f^{-1}(V))\subseteq Y-V$ se tiene que $Y-V\in f(U)$. □

Proposición 2.2.37. *Sea $f:X\longrightarrow Y$ una aplicación y $\mathcal{F}\in Fil(X)$. Entonces, para cada ultrafiltro $\mathcal{V}\geq f(\mathcal{F})$ existe un ultrafiltro $\mathcal{U}\geq\mathcal{F}$ tal que $f(\mathcal{U})=\mathcal{V}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un ultrafiltro tal que $\mathcal{V}\geq f(\mathcal{F})$. Si $V\in\mathcal{V}-f(\mathcal{F})$, entonces $V\notin f(\mathcal{F})$ e $Y-V\notin f(\mathcal{F})$. Si $F\cap f^{-1}(V)=\emptyset$ para algún $F\in\mathcal{F}$, entonces $F\subseteq f^{-1}(Y-V)$, y por tanto $f(F)\subseteq Y-V$. Luego se tendría que $Y-V\in f(\mathcal{F})$. Así que ha de ser $F\cap f^{-1}(V)\neq\emptyset$ para todo $F\in\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{G} = [F \cap W]$, con $F \in \mathcal{F}$ y $W \in f^{-1}(\mathcal{V})$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro más fino que $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$ y $f^{-1}(\mathcal{V})$, $\mathcal{U}$ también lo es, así que $\mathcal{V} \subseteq f(f^{-1}(\mathcal{V})) \subseteq f(\mathcal{U})$, y por ser $\mathcal{V}$ ultrafiltro, $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. □

2.2.3. Convergencia de Filtros

El concepto de convergencia en términos de filtros fue introducido por primera vez por Henri Cartan y más tarde desarrollado por Bourbaki (1940). Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, definiremos punto límite y punto de acumulación de un filtro, y de esta forma podremos caracterizar conceptos topológicos como la compacidad y la clausura mediante filtros, como ocurre en los espacios métricos con las sucesiones.

Definición 2.2.38. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

1. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x, y lo denotamos por $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{F}$.

2. Se dice que x es un *punto de acumulación* de $\mathcal{F}$ si para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, es $N \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Equivalentemente, estos conceptos se pueden definir de forma análoga si habláramos de *bases de filtros* $\mathcal{B}$, y tendríamos,

1. $\mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si y solo si para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset N$.

2. x es *punto de acumulación* de $\mathcal{B}$ si y sólo si $B \cap N \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $B \in \mathcal{B}$.

Nótese que las condiciones 1 y 2 son equivalentes a que x sea punto de acumulación del filtro generado por $\mathcal{B}$.

Se pueden caracterizar los *puntos de acumulación* de un filtro $\mathcal{F}$ de la siguiente forma:

Proposición 2.2.39. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, un punto $x \in X$ es* punto de acumulación *de $\mathcal{F}$ si y sólo si $x \in \overline{F}$ para cada $F \in \mathcal{F}$.*

Ejemplo 2.2.40. Veamos algunos ejemplos para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ dado,

1. Para todo $x \in X$, y definiendo $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, es claro que $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

2. Dado $x \in X$, si $\mathcal{F} = [x]$, tenemos que $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, pues para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, $x \in N$.

Proposición 2.2.41. *1. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, entonces x es* punto de acumulación *de $\mathcal{F}$.*

2. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, entonces cualquier filtro más fino que $\mathcal{F}$ *también converge a x.*

2.2.4. Propiedades topológicas caracterizadas por los Filtros

Como es sabido, en los espacios métricos, o en general, en los espacios $1^{\underline{o}}N$, utilizamos las sucesiones como herramienta para caracterizar la continuidad de una función, la clausura de un conjunto o la propiedad de compacidad. Sin embargo, ello no es posible para espacios que no son $1^{\underline{o}}N$, pero se pueden adaptar los resultados obtenidos mediante convergencia de sucesiones utilizando el concepto de filtro convergente y se tiene los siguientes resultados cuya demostración puede verse en [12].

Teorema 2.2.42. *Sean $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, $x \in X$ y $A \subset X$.Entonces la* clausura *de A es,*

$$\overline{A} = \left\{ x \in X : \exists \mathcal{F} \text{ tal que } \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x \text{ y } A \in \mathcal{F} \right\}.$$

Teorema 2.2.43. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T})$ espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Se cumple f es* continua *en x si y solo si el filtro $f(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}})$ converge a $f(x)$.*

Teorema 2.2.44. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T})$ espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Se tiene que f es* continua *en x si y solo si la base de filtro*

$$\mathcal{B}_{f(\mathcal{B})} = \{ f(F) : F \in \mathcal{B} \}$$

converge a $f(x)$, para cada base de filtro $\mathcal{B}$ convergente a x.

Teorema 2.2.45. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T})$ espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces f es* continua *en X si y solo si $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ para cada $x \in X$ y cada filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \to x$.*

Teorema 2.2.46. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un* espacio de Hausdorff *si y solo si todo filtro convergente en X converge a un punto como máximo.*

Teorema 2.2.47. *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*
3. *Todo ultrafiltro converge.*
4. *Todo filtro tiene un punto adherente.*

2.3. Relación entre Filtros y Redes

Hemos visto dos nociones de convergencia en un espacio topológico, la de filtro y la de red. Ahora veremos que son equivalentes una de la otra. Para ello definiremos una forma asociar un filtro a partir de una red y viceversa.

Proposición 2.3.1. *Sean X un espacio topológico, Λ un conjunto dirigido y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $B_\lambda = \{x_{\lambda_0}\ ;\ \lambda_0 \geq \lambda\}$. Entonces la familia $B_\Lambda = \{B_\lambda\ ;\ \lambda \in \Lambda\}$ es una base de filtro sobre X llamado el filtro de las colas o de las secciones.*

Sean X un espacio topológico, Λ un conjunto dirigido, $P : \Lambda \to X$ una red y $A \subseteq X$. Recordemos que la red P está *eventualmente en* A si A contiene alguna colas

$$T_d = \{P(e) : \lambda \leq e \in \Lambda\}$$

de la red.

Definición 2.3.2. Si Λ un conjunto dirigido y $P : \Lambda \to X$ una red en X,

$$\mathcal{F}_P = \{F \subseteq X : P \text{ está eventualmente en } F\}$$

es un filtro llamado filtro asociado P.

Recíprocamente, dado un filtro $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{F}$ es un conjunto dirigido con respecto a la relación definida como $F_1 \leq F_2$ si $F_2 \subseteq F_1$ para $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces $P_\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \leq_\mathcal{F})$ es un red llamada red asociada a $\mathcal{F}$.

Se tiene el siguiente resultado, ver [2], que afirma que es equivalente la convergencia por redes y por filtros. Por tanto, si una propiedad topológica se caracteriza mediante por convergencia por redes, se puede hacer de igual forma por convergencia por filtros.

Teorema 2.3.3. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$.*

1. *Si $P : \Lambda \to X$ es una red, entonces $P \to x$ si y solo si el filtro asociada $\mathcal{F}_P \to x$.*
2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces $\mathcal{F} \to x$ si y solo si la red asociada de $P_\mathcal{F}$ converge a x.*

A veces el usar uno u otro depende de las dificultades técnicas, hay muchos resultados que son más sencillos de obtener por filtros. Por ejemplo, el Teorema de Tyconoff, que afirma que el producto de compactos es compacto.

Capítulo 3

Convergencia no topológica

Vamos a trabajar con algunas nociones de los espacios métricos, vistas desde el punto de vista de espacios topológicos.El concepto de espacio métrico fueron introducido por Maurice René Fréchet (1906) lo que fue fundamental para la creación de la Topología general. La idea era generalizar el concepto de *distancia* para poder trabajar con objetos matemáticos de naturaleza no específica.

3.1. La convergencia casi por todo no es topológica

Definición 3.1.1. Una familia de subconjuntos de X se dice que $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$ *álgebra* si se cumple:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$.
3. Si una sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico tal que $X = \mathbb{R}$ y $S = \{(-\infty, x]\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$, se define $\sigma-$ *álgebra de Borel* como $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(S)$.

Los elementos de $\mathfrak{B}(X)$ se conocen como *borelianos*. Son elementos de $\mathfrak{B}(X)$, dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, los siguientes ejemplos:

1. $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x]$.
2. $\{x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (x - 1/n, x]$.
3. $(x, y) = (x, y] - \{y\}$.

Definición 3.1.3. Se dice que $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ es una medida si se verifica que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Para cualquier colección infinita de conjuntos disjuntos entre sí $A_1, A_2, A_3...$ cumple que μ es $\sigma-$ *aditiva*,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 3.1.4. Un *espacio de medida* es un triple $(X, \mathcal{A}, \mu)$ donde:

1. X es un conjunto.

2. $\mathcal{A}$ es un $\sigma-$ *álgebra* en el conjunto X.

3. μ es una *medida* en $(X, \mathcal{A})$.

Definición 3.1.5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que es $\mu-$ *medible* si para todo abierto $E \in \mathbb{R}$, si su antiimagen por f se encuentra en $\mathcal{A}$, es decir:

$$f^{-1}(E) := \{x \in X : f(x) \in E\} \in \mathcal{A}.$$

3.2. Convergencia en Medida

Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definición 3.2.1. Una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que *converge en medida* a la función medible f ($f_n \xrightarrow{\mu} f$) si para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Equivalentemente, si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\sigma > 0$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$, tal que $n \geq n_0$ implica que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \sigma.$$

Proposición 3.2.2. *Unicidad del punto límite.*

Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $f_n \xrightarrow{\mu} g$ en X, entonces $f = g$ para casi todo X, es decir, no se cumpliría para un subconjunto $A \subset X$ tal que $\mu(A) = 0$.

Definición 3.2.3. Se dice que una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sobre X *converge casi por todo* a una función f si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

para casi todo $x \in X$, es decir, si existe $A \subset X$ con $\mu(A) = 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \notin A$.

Nota 3.2.4. El siguiente ejemplo nos muestra que una sucesión de funciones medibles puede converger en medida pero no puntualmente a ningún punto. Podemos decir que convergencia en medida es una generalización de la convergencia puntal.

Ejemplo 3.2.5. *Cajas que van en círculos* o *La secuencia de la máquina de escribir*

A continuación indicamos un ejemplo de e convergencia en medida a cero, pero no convergencia en casi todo a cero. Sea el intervalo $[0,1]$ el cual dividimos en n segmentos de igual longitud para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos ahora una sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ como sigue:

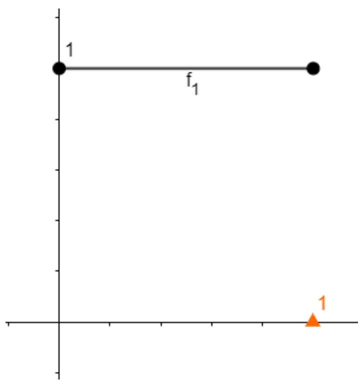
$$\begin{gathered}[0,1],\\ [0,1/2],[1/2,1],\\ [0,1/3],[1/3,2/3],[2/3,1],\\ [0,1/4],[1/4,2/4],[2/4,3/4],[3/4,1],\end{gathered}$$

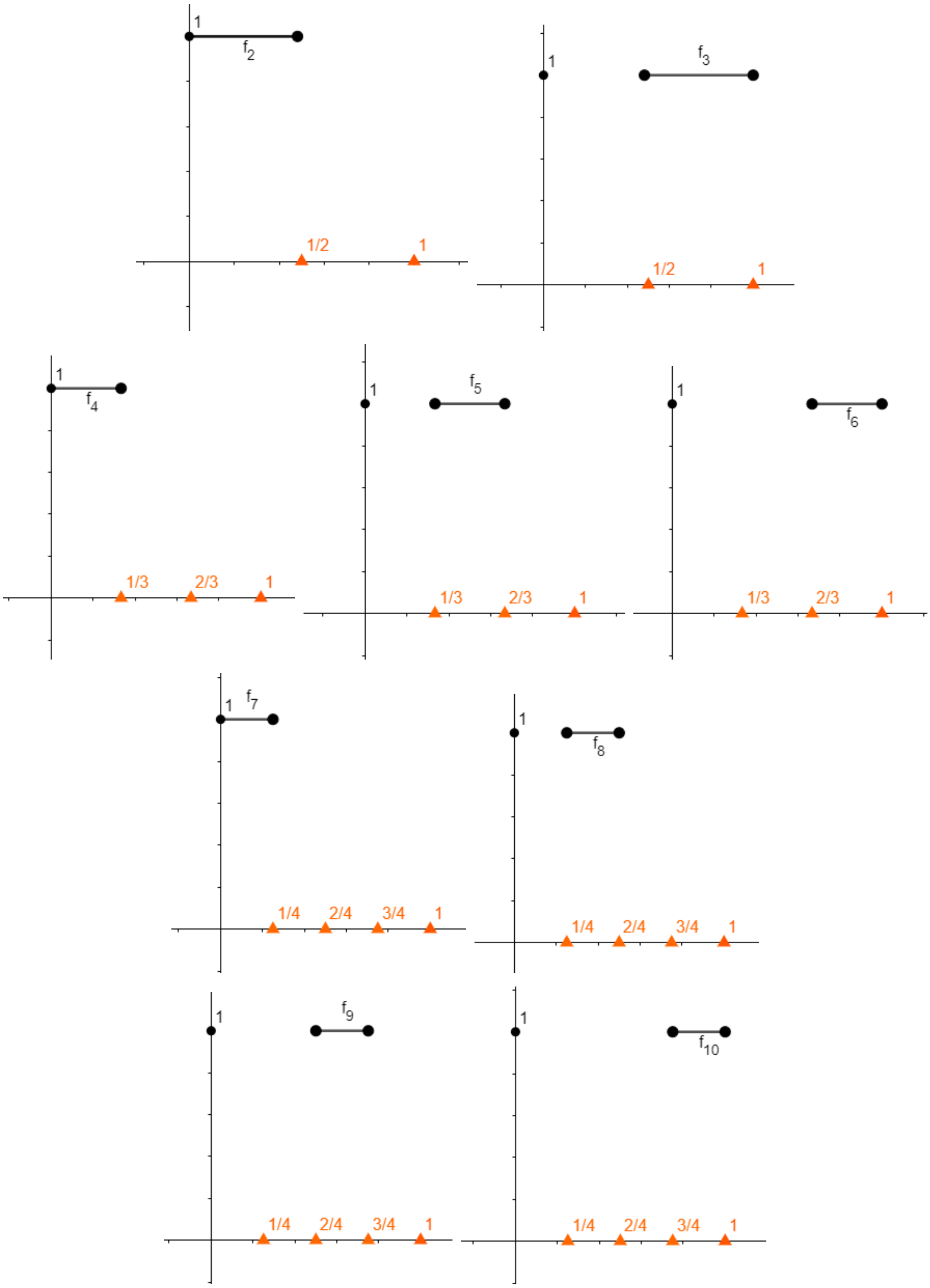
y definimos la sucesión de funciones:

$$\begin{gathered}f_1=\mathcal{X}_{[0,1]},\\ f_2=\mathcal{X}_{[0,1/2]}, f_3=\mathcal{X}_{[1/2,1]},\\ f_4=\mathcal{X}_{[0,1/3]}, f_5=\mathcal{X}_{[1/3,2/3]}, f_6=\mathcal{X}_{[2/3,1]},\\ f_7=\mathcal{X}_{[0,1/4]}, f_8=\mathcal{X}_{[1/4,2/4]}, f_9=\mathcal{X}_{[2/4,1]}, f_{10}=\mathcal{X}_{[3/4,1]},\end{gathered}$$

Donde $\mathcal{X}_{[i,j]}=\begin{cases}1 & si\ x\in\ [i,j]\\ \\ 0 & si\ x\notin\ [i,j]\end{cases}$ es la función característica.

Si pintamos los gráficos de estas funciones como cajas, las cajas van avanzando de izquierda a derecha por el intervalo $[0,1]$, luego vuelven, disminuyen de tamaño y vuelve a empezar la sucesión pero siendo más estrechas las cajas.



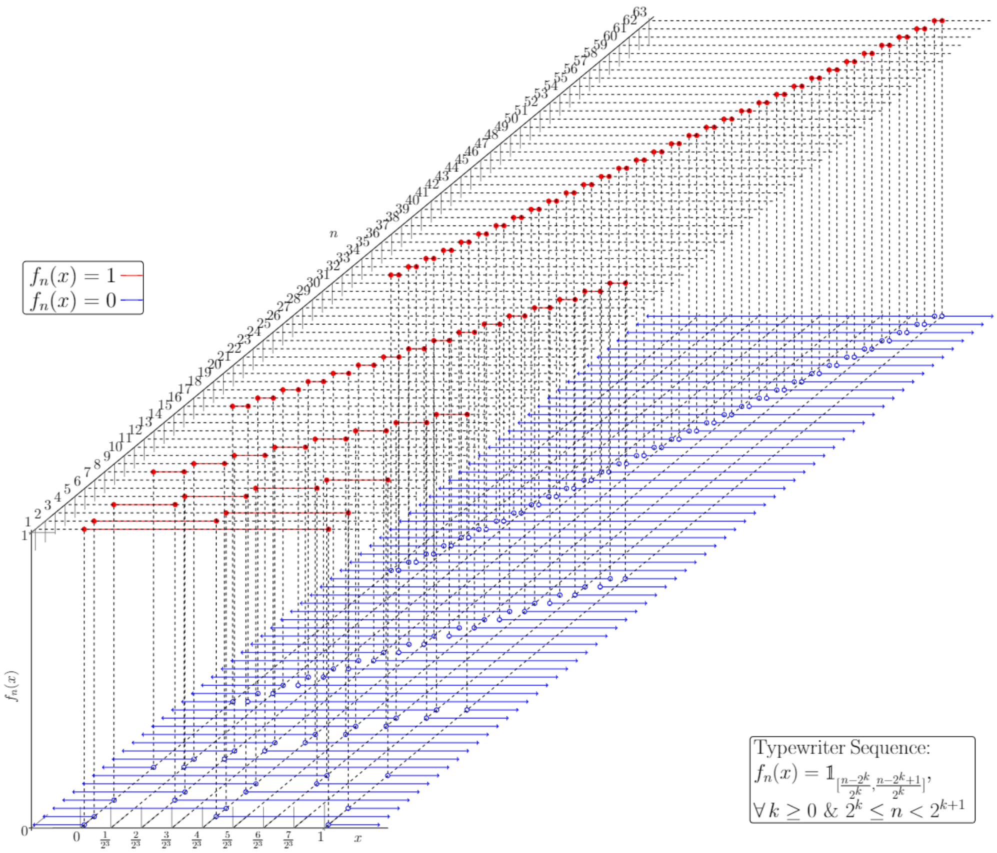


Fijado $\varepsilon \in (0,1)$, para los índices $k = 1, ..., 10$, la medida de Lebesgue de $\{|f_k| > \varepsilon\}$ es la sucesión

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}.$$

Por tanto, converge a cero conforme aumentamos k, puesto que la anchura del intervalo sobre el cual cada función toma el valor 1 se aproxima a 0, y las funciones eventualmente son picos infinitesimalmente delgados, por lo que su tamaño en medida de Lebesgue converge a 0. Luego $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, converge a 0 en medida.

Sin embargo, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \not\to f$ en ningún punto ya que para cada $x \in [0,1]$, $f_n(x) = 1$ para un número infinito de valores.



Teorema 3.2.6. *Veamos qué se entiende por* estructura de convergencia *asociada a la convergencia en casi todo.*

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida y X el conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ $\mu-$medibles. La aplicación

$$\varphi_{ae} : X \to Fil(X)$$

dada por:

$$\varphi_{ae}(f) = \{\mathcal{F} \in Fil(X) : \mathcal{F} \geq T(f_n)\}$$

donde $f_n \xrightarrow{ae} f$, es una estructura de convergencia sobre X.

Demostración. Veamos que φ_{ae} verifica las tres propiedades de las estructuras de convergencia.

1. Sea $[f] = \{\mathcal{F} \in Fil(X) : f \in \mathcal{F}\}$. Entonces, $[f] \in \varphi_{ae}(f)$ pues si $\{f_n\}$ es la sucesión constante con $f_n = f$, entonces $f_n \xrightarrow{ae} f$ y $T(f_n) = [f]$.

2. Si $\mathcal{F} \in \varphi_{ae}(f)$ y $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, entonces existe $f_n \xrightarrow{ae} f$ y $T(f_n) \leq \mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, luego $\mathcal{G} \in \varphi_{ae}(f)$.

3. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \varphi_{ae}(f)$, sean $f_n \xrightarrow{ae} f$, $g_n \xrightarrow{ae} f$ con $T(f_n) \leq \mathcal{F}$ y $T(g_n) \leq \mathcal{G}$. Entonces, dado $\varepsilon < 0$, existen $A, B \subset \Omega$ con $\mu(A) = 0 = \mu(B)$ y $n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin A$$

y

$$|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin B$$

Sea $h_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por:

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n & si \quad \text{n es impar} \\ \\ g_n & si \quad \text{n es par} \end{cases}$$

Si $x \notin A \cup B$, se cumple que $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ si $n \geq n_0, n'_0$, luego $h \xrightarrow{ae} f$

Por otra parte, si $m \geq n$

$$\{h_m : m \geq n\} \supset \{f_m : m \geq n\} \text{ y}$$
$$\{h_m : m \geq n\} \supset \{g_m : m \geq n\}$$

así que $\{h_m : m \geq n\} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Por tanto, $T(h_m) \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, y se tiene que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \varphi_{ae}(f)$.

□

A continuación probaremos que la convergencia en casi todo no está inducida por ninguna topología, lo cual nos indica que la teoría de la medida se extiende más allá de la topología.

Teorema 3.2.7. *Supongamos que una secesión de funciones medibles $f_n(x)$ converge en medida hacia $f(x)$. Entonces, de esta sucesión se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_k}(x)\}$ que converge en casi todos los puntos hacia $f(x)$. Teorema 11 de [13, pág 331] .*

Proposición 3.2.8. *Sea $X = \{f : ([0,1], \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mu)$. No existe ninguna topología $\mathcal{T}$ sobre X tal que $f_n \xrightarrow{\mathcal{T}} f$ si y solo si $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.*

Demostración. Supongamos que existiera $\mathcal{T}$ de forma que la convergencia en $(X, \mathcal{T})$ fuese la convergencia en casi todo. Si $\{f_n\}$ es la sucesión del ejemplo anterior, como $f_n \stackrel{a.e.}{\not\longrightarrow} 0$, $f_n \stackrel{\mathcal{T}}{\not\to} 0$. Por tanto, existe $N \in \mathcal{N}_0^{\mathcal{T}}$ que f_n está *frecuentemente* fuera de N, es decir, existe una subsucesión de f_n, f_{n_k}, tal que $f_{n_k} \subset X - N$. Pero como $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, también $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} 0$ y por el teorema anterior, f_{n_k} admite una subsucesión $f_{n_{k_l}}$ tal que $f_{n_{k_l}} \xrightarrow{a.e.} 0$, luego $f_{n_{k_l}} \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$, lo que es absurdo, pues $f_{n_{k_l}} \subset X - N$. □

Observación 3.2.9. La convergencia en medida sí está inducia topológicamente. De hecho, si $\mu(X) < \infty$, la convergencia en medida en X viene inducida por la métrica $\mathcal{L}^1$, dada por $d(f, g) = \int_X (f(x) - g(x))\, dx$.

Capítulo 4

Espacios de Convergencia

Para el estudio de la convergencia en espacios topológicos, las sucesiones ordinarias son demasiado restrictivas. Por este motivo se trabaja con otros dos conceptos, ya vistos; el de filtro y el de red. Ambas teorías son equivalentes.

Un espacio de convergencia es un conjunto, junto con una relación llamada convergencia que satisface ciertas propiedades referentes a elementos de X y con su familia de filtros asociada.

Los espacios de convergencia generalizan las nociones de convergencia que se encuentran en la topología de conjuntos de puntos , incluida la convergencia métrica y la convergencia uniforme. Todo espacio topológico da lugar a una convergencia canónica pero hay convergencias, conocidas como convergencias no topológicas, que no surgen de ningún espacio topológico, como por ejemplo ocurre con la convergencia casi segura.

Definición 4.0.1. Un *espacio de convergencia* es un par (X, φ), donde

$$\varphi : X \to \mathcal{P}(Fil(X))$$

es una aplicación que cumple las siguientes propiedades,

1. $[x] \in \varphi(x)$.
2. Si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ y $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \in \varphi(x)$.
3. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \varphi(x)$, entonces $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \varphi(x)$.

Nota 4.0.2. Observamos la semejanza entre la definición de la aplicación φ y la aplicación que en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ asocia a cada $x \in X$ la familia de sus $\mathcal{T}$-entornos $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

Veamos el siguiente ejemplo, el cual nos demuestra que los espacios de convergencia son una generalización de los espacios topológicos.

Ejemplo 4.0.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y

$$\varphi_{\mathcal{T}} : X \to \mathcal{P}(Fil(X))$$

la aplicación dada por

$$\varphi_{\mathcal{T}}(x) = \left\{ \mathcal{F} \in Fil(X) : \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x \right\}.$$

Entonces $(X, \varphi_{\mathcal{T}})$ es un espacio de convergencia.

Demostración. La comprobación es inmediata a partir de las propiedades de los filtros convergentes a un punto en un espacio topológico. □

Observación 4.0.4. Por analogía con las definiciones y notaciones en los espacios topológicos, si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, se dirá que $\mathcal{F}$ es φ *−convergente* a x, y se escribirá $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} x$.

Definición 4.0.5. Sea (X, φ) es un espacio de convergencia, para cada $x \in X$,

$$\mathcal{N}_x^{\varphi} = \bigcap \left\{ \mathcal{F} \in Fil(X) : \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} x \right\}$$

se llama filtro de los φ *−entornos* de x en (X, φ), y sus elementos se conocen como $\varphi -$ *entornos* de x.

Nótese que $\mathcal{N}_x^{\varphi} \in Fil(X)$ por la Proposición 2.2.18.

Nota 4.0.6. La razón de utilizar estos términos es que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ es la intersección de todos los filtros que convergen a x respecto a $\mathcal{T}$.

Observación 4.0.7. Nótese que, en general, $\mathcal{N}_x^{\varphi} \notin \varphi(x)$, es decir, $\mathcal{N}_x^{\varphi}$ no converge a x respecto a φ. Los espacios de convergencia en los que esta propiedad se cumple se llaman *espacios pretopológicos*, y serán estudiados en el Capítulo 5.

Ejemplo 4.0.8. Sea $X = \{0, 1, 2\}$ y $\varphi : X \to Fil(X)$ dada por

$$\varphi(0) = \{[0], [\{0, 1\}]\} = \{[0], \{\{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}\}$$
$$\varphi(1) = \{[1], [\{1, 2\}]\} = \{[1], \{\{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}\}$$
$$\varphi(2) = \{[2], [\{0, 2\}]\} = \{[2], \{\{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}\}.$$

Veamos que (X, φ) *no es topológico.* En efecto,

$$\mathcal{N}_0^{\varphi} = \{\{0, 1\}, X\}$$
$$\mathcal{N}_1^{\varphi} = \{\{1, 2\}, X\}$$
$$\mathcal{N}_2^{\varphi} = \{\{0, 2\}, X\}.$$

Si $\mathcal{T}$ fuera una topología sobre X tal que $\mathcal{N}_i^{\varphi} = \mathcal{N}_i^{\mathcal{T}}$, entonces existe $0 \in \mathcal{T}$ entorno de todos sus puntos, lo cual no es cierto.

Al igual que en el conjunto $TopX$ de las topologías sobre X, en el conjunto $ConvX$ de las estructuras de convergencia sobre X, se define una *relación de orden parcial.*

Definición 4.0.9. Si φ y ψ son estructuras de convergencia sobre X, se dirá que $\varphi \leq \psi$ si se verifica que $\psi(x) \subseteq \varphi(x)$ para todo $x \in X$.

En ese caso, se dice que ψ es *más fina* que $\varphi(x)$, o que $\varphi(x)$ es *más gruesa* que ψ.

A continuación veremos que a todo espacio de convergencia (X, φ) se le puede asociar un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_\varphi)$, llamado *modificación topológica* de (X, φ).

Proposición 4.0.10. *Si* (X, φ) *es un espacio de convergencia, entonces*

$$\mathcal{T}_\varphi = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A \in \mathcal{N}_x^\varphi \text{ para todo } x \in A\}$$

es una topología sobre X. *Es decir, los abiertos de* $\mathcal{T}_\varphi$ *son los conjuntos que son* $\varphi-$ entornos *de cada uno de sus puntos.*

Demostración. 1. $X \in \mathcal{T}_\varphi$, ya que para todo $x \in X$ si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, entonces $X \in \mathcal{F}$.

2. Sean $A, B \in \mathcal{T}_\varphi$ y $x \in A \cap B$. Por hipótesis, si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $A, B \in \varphi(x)$, luego $A \cap B \in \mathcal{F}$.

3. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ tal que $A_i \in \mathcal{T}_\varphi$ y $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

   Sea $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, por hipótesis $A_{i_0} \in \mathcal{F}$, luego por ser $\mathcal{F}$ un filtro, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

$\square$

Proposición 4.0.11. *Si* $\mathcal{T}$ *una topología sobre* X, *entonces*

$$\mathcal{T}_{\varphi_\mathcal{T}} = \mathcal{T}.$$

Demostración. Si $O \in \mathcal{T}_{\varphi_\mathcal{T}}$, $O \in \mathcal{N}_x^{\varphi_\mathcal{T}}$ para cada $x \in O$. Por tanto, $O \in \mathcal{H}$ para todo $\mathcal{H} \in \varphi_\mathcal{T}(x)$. En particular, $O \in \mathcal{N}_x^\mathcal{T}$, luego $O \in \mathcal{T}$. Si $O \in \mathcal{T}$, $O \in \mathcal{N}_x^\mathcal{T}$ para todo $x \in A$. Por tanto $O \in \bigcap \left\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x\right\} = \bigcap \{\mathcal{F} \in Fil(X) : \mathcal{F} \in \varphi_\mathcal{T}(x)\} = \mathcal{T}_{\varphi_\mathcal{T}}$. Es decir, $O \in \mathcal{T}_{\varphi_\mathcal{T}}$.

$\square$

Proposición 4.0.12. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio de convergencia, entonces* $\varphi(x) \subset \varphi_{\mathcal{T}_\varphi}(x)$ *para todo* $x \in X$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F} \in \varphi(x)$. Entonces

$$\mathcal{N}_x^{\varphi_\mathcal{T}} = \{N \subset X : \exists O \in \mathcal{T}_\varphi \text{ con } x \in O \text{ y } O \subset N\}.$$

Pero si $O \in \mathcal{T}_\varphi$ y $x \in O$, por definición de $\mathcal{T}_\varphi$, $O \in \bigcap\{\mathcal{H} \in Fil(X) : \mathcal{H} \in \varphi(x)\}$. Luego $O \in \mathcal{F}$ y por tanto, $N \in \mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{N}_x^{\varphi_\mathcal{T}} \leq \mathcal{F}$ y se tiene que $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}_\varphi} x$. Por tanto, $\mathcal{F} \in \varphi_\mathcal{T}(x)$. □

Corolario 4.0.13. $\varphi_{\mathcal{T}_\varphi} \leq \varphi$.

Veremos a continuación que $\varphi_\mathcal{T}$ es la mayor de las estructuras de convergencia topológicas que son menores (más gruesas) que φ.

Proposición 4.0.14. *Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre X tal que $\varphi_\mathcal{T} \leq \varphi$. Entonces $\varphi_\mathcal{T} \leq \varphi_{\mathcal{T}_\varphi}$.*

Demostración. Como $\varphi_\mathcal{T} \leq \varphi$, entonces $\mathcal{T}_{\varphi_\mathcal{T}} \leq \mathcal{T}_\varphi$. Pero $\mathcal{T}_{\varphi_\mathcal{T}} = \mathcal{T}$, por la Proposición 4.0.11, luego por el Corolario 4 se tiene que $\varphi_\mathcal{T} \leq \varphi_{\mathcal{T}_\varphi}$. □

4.1. Estructura de convergencia para la convergencia en casi todo

En esta sección se indica la estructura de convergencia asociada a la convergencia en casi todo.

Proposición 4.1.1. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida y $\mathcal{Y} = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es } \mu\text{-medible}\}$. La aplicación*

$$\varphi_{ae} : \mathcal{Y} \to Fil(X)$$

dada por:

$$\varphi_{ae}(f) = \Big\{\mathcal{F} : \exists f_n \xrightarrow{ae} f \text{ y } T(\{f_n\}) \subset \mathcal{F}\Big\},$$

es una estructura de convergencia sobre X.

Demostración. Veamos que φ_{ae} verifica las tres propiedades de las estructuras de convergencia.

1. Sea $[f] = \{\mathcal{F} \in Fil(X) : f \in \mathcal{F}\}$. Entonces, $[f] \in \varphi_{ae}(f)$ pues si $\{f_n\}$ es la sucesión constante con $f_n = f$, entonces $f_n \xrightarrow{ae} f$ y $T(f_n) = [f]$.

2. Si $\mathcal{F} \in \varphi_{ae}(f)$ y $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, entonces existe $f_n \xrightarrow{ae} f$ y $T(f_n) \leq \mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, luego $\mathcal{G} \in \varphi_{ae}(f)$.

3. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \varphi_{ae}(f)$, sean $f_n \xrightarrow{ae} f$, $g_n \xrightarrow{ae} f$ con $T(f_n) \leq \mathcal{F}$ y $T(g_n) \leq \mathcal{G}$. Entonces, dado $\varepsilon < 0$, existen $A, B \subset \Omega$ con $\mu(A) = 0 = \mu(B)$ y $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ tales que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin A$$

y

$$|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin B$$

Sea $h_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por:

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n & si \quad \text{n es impar} \\ \\ g_n & si \quad \text{n es par} \end{cases}$$

Si $x \notin A \cup B$, se cumple que $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ si $n \geq n_0, n_0'$, luego $h \xrightarrow{ae} f$

Por otra parte, si $m \geq n$

$$\{h_m : m \geq n\} \supset \{f_m : m \geq n\} \text{ y}$$
$$\{h_m : m \geq n\} \supset \{g_m : m \geq n\}$$

así que $\{h_m : m \geq n\} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Por tanto, $T(h_m) \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, y se tiene que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \varphi_{ae}(f)$.

□

4.2. Operadores clausura e interior asociados a una estructura de convergencia

Si (X, φ) es un espacio de convergencia, φ induce dos operadores de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$, llamados operadores de $\varphi-$ *clausura* y $\varphi-$ *interior* respectivamente, y definidos del siguiente modo.

Definición 4.2.1. El operador $Cl_\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por:

$$Cl_\varphi(A) = \{x \in X : \exists \mathcal{F} \in \varphi(x) \text{ tal que } A \in \mathcal{F}\}$$

se llama $\varphi -$ *clausura* de A.

Definición 4.2.2. El operador $I_\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por:

$$I_\varphi(A) = \{x \in A : A \in \mathcal{N}_x^\varphi\}$$

$\varphi -$ *interior* de A.

Proposición 4.2.3. *El operador Cl_φ tiene las siguientes propiedades:*

1. $Cl_\varphi(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq Cl_\varphi(A)$ *para todo* $A \subseteq X$.
3. $Cl_\varphi(A) \subseteq Cl_\varphi(B)$ *si* $A \subseteq B$.

4. $Cl_\varphi(A \cup B) = Cl_\varphi(A) \cup Cl_\varphi(B)$.

Demostración. 1. Trivial.

2. Si $x \in A$, $[x] \in \varphi(x)$ y $A \in [x]$.

3. Si $x \in Cl_\varphi(A)$, existe $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Por tanto, $B \in \mathcal{F}$, luego $x \in Cl_\varphi(B)$.

4. Como $A, B \subset A \cup B$, por 3. $Cl_\varphi(A) \cup Cl_\varphi(B) \subset Cl_\varphi(A \cup B)$.

   Si $x \in Cl_\varphi(A \cup B)$, existe $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ tal que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{U} \in \varphi(x)$ y, o bien, $A \in \mathcal{U}$, o bien $B \in \mathcal{U}$, luego $x \in Cl_\varphi(A)$ o $x \in Cl_\varphi(B)$.

□

Ejemplo 4.2.4. El operador Cl_φ no es idempotente y, por tanto, no es un operador de clausura de Kuratowski sobre X. En efecto, sea $X = \{0, 1, 2\}$ y φ la estructura de convergencia sobre X dada por:

$$\varphi(0) = \{[0], [\{0, 1\}]\}$$
$$\varphi(1) = \{[1], [\{1, 2\}]\}$$
$$\varphi(2) = \{[2], [\{0, 2\}]\}$$

Entonces, $Cl_\varphi(Cl_\varphi \{0\}) = Cl_\varphi(\{0, 2\}) = X$.

La relación entre los operadores Cl_φ e I_φ es análoga a la relación entre los operadores clausura e interior en un espacio topológico. Es decir, se tiene:

Proposición 4.2.5. *Si (X, φ) es un espacio de convergencia,*

$$X - Cl_\varphi(A) = I_\varphi(X - A) \text{ para todo } A \subseteq X.$$

Demostración. Si $x \in Cl_\varphi(A)$, $x \in X - A$ y para todo $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $A \notin \mathcal{F}$. Luego si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro con $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$, como $\mathcal{U} \in \varphi(x)$, $A \notin \mathcal{U}$. Por tanto, $X - A \in \mathcal{U}$. Pero $\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro y } \mathcal{U} \leq \mathcal{F}\}$, así que $X - A \in \mathcal{F}$ y se tiene que $x \in I_\varphi(A)$.

Recíprocamente, si $x \in I_\varphi(X - A)$, $x \in X - A$ y $X - A \in \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \varphi(x)$. Por tanto, no existe $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ tal que $A \in \mathcal{F}$, luego $x \notin Cl_\varphi(A)$. □

Como consecuencia de este resultado y de las propiedades del operador Cl_φ, es inmediato demostrar las siguientes propiedades de I_φ.

Proposición 4.2.6. *1. Si $A \subset B$, entonces $I_\varphi(A) \subset I_\varphi(B)$.*

2. $I_\varphi(A) \cap I_\varphi(B) = I_\varphi(A \cap B)$.

Definición 4.2.7. Dado (X, φ) espacio de convergencia, $A \subseteq X$ se llama:

1. $\varphi - cerrado$ si $Cl_{\varphi}(A) = A$.
2. $\varphi - abierto$ si $I_{\varphi}(A) = A$.

Nótese que, teniendo en cuenta la relación entre Cl_{φ} e I_{φ},

$$A \text{ es } \varphi - cerrado \text{ si y solo si } X - A \text{ es } \varphi - abierto.$$

Capítulo 5

Tipos de Convergencia

En este capítulo estudiaremos dos de los tipos de espacios de convergencia más importantes, estos son los espacios pretopológicos y los espacios pseudotopológicos. Especialmente los primeros son de gran interés debido a sus posibles aplicaciones en muchos campos científicos como la genética, química, topología digital y la biología evolutiva. Ver [19], [23], [21], [22].

5.1. Espacios pretopológicos

Recordemos, ver Definición 4.0.5, que si (X,φ) un espacio de convergencia, para todo $x \in X$, el filtro $\mathcal{N}_x^{\varphi} = \bigcap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \varphi(x)\}$ se conoce como *el filtro de los entornos* de x, y sus elementos son $\varphi-$entornos de x.

Definición 5.1.1. Se dice que un espacio de convergencia (X,φ) es *pretopológico* si para todo $x \in X$, $\mathcal{N}_x^{\varphi} \xrightarrow{\varphi} x$.

Ejemplo 5.1.2. *Ejemplo de espacio de convergencia que no es pretopológico.*

Sean $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$ y $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow Fil(\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{[x]\} & si \quad x \notin A \\ \\ \{[B] : B \subset A \text{ es finito}\} & si \quad x \in A \end{cases}$$

Demostración. Veamos que $(\mathbb{R},\varphi)$ es un espacio de convergencia.

1. Si $x \notin \mathbb{N}$, $x \subset \varphi(x)$.

   Si $x \in A$, basta tomar $B = \{x\}$.

2. Si $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \varphi(x)$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \varphi(x)$.

   Si $x \notin \mathbb{N}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = [x]$.

Si $x \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{[B]\}$, $\mathcal{G} = \{[C]\}$, de forma que $B \subset C \subset \mathbb{N}$ finito.

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{H : H \supset B, H \subset \mathbb{N}\} = \{H \supset B \cup C\} \in \varphi(x)$.

3. Sea $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ y $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Veamos que $\mathcal{G} \in \varphi(x)$. En efecto, si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $\mathcal{F} = [B]$ con $B \subset \mathbb{N}$ finito.

   Sea $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ un ultrafiltro que contenga a $\mathcal{G}$. Entonces $B \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$. Luego por la Proposición 2.2.34, $B = \{y\}$ conjunto unitario y $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = [y]$ filtro de los superconjuntos.

   Por tanto se tendría que $\mathcal{F} = [y] \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{U}(\mathcal{G}) = [y]$.

   Luego, $\mathcal{G} = [y] \in \varphi(x)$.

Veamos ahora que (X, φ) no es pretopológico.

1. Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, $\bigcap \{\mathcal{F} \in \varphi(x)\} = [x]$.

2. Si $x \in \mathbb{N}$, $\bigcap \{\mathcal{F} \in \varphi(x)\} = \bigcap \{M \subseteq \mathbb{N} : M \supset B \ \forall B \subset \mathbb{N} \text{ finito}\} = \{\mathbb{N}\}$.

Si $M \in \bigcap \{\mathcal{F} \in \varphi(x)\}$, M contendría a cualquier subconjunto finito de $\mathbb{N}$, luego tendría que ser $M = \{\mathbb{N}\}$ o cualquier conjunto que contenga a $\mathbb{N}$. El único superconjunto que pertenece a todo $\mathbb{N}$ es el propio $\mathbb{N}$. □

Observación 5.1.3. La categoría de espacios pretopológicos es equivalente a la de los espacios de clausura definidos por Cech en [6] que son pares (X, c) donde c es un operador que satisface las propiedades recogidas en la Proposición 4.2.3, es decir, las propiedades de un operador de clausura de Kuratoski salvo la idempotencia.

En efecto, dado un espacio de Cech se define un espacio pretopológico (X, φ_c) del siguiente modo:

$$\mathcal{F} \in \varphi_c(x) \text{ si y solo si } \mathcal{F} \supset \mathcal{N}_x^c,$$

siendo este el filtro de los entonces de x en (X, c).

El concepto de pretopología es utilizado también por un grupo de matemáticos franceses de los años 70 que usan esta estructura para moderar fenómenos complejos de propagación o difusión. Aunque en este sentido existen cuatro tipos de pretopologías, el que se estudia en este trabajo corresponde con el más restrictivo de ellos, que son aquellas en las que la clausura de un conjunto es la unión de las clausuras de los elementos. [5].

5.2. Espacios pseudotopológicos

Un espacio pseudotopológico es una generalización del espacio topológico basado en el concepto de ultrafiltro convergente. También se pueden describir estructuras pseudotopológicas en términos de convergencia de filtros arbitrarios que satisfacen ciertas propiedades. En este sentido, un espacio pseudotopológico es un tipo especial de espacio de convergencia.

La categoría $PsTop$ de espacios pseudotopológicos incluye a Top, categoría topológica, como una subcategoría completa.

Definición 5.2.1. (X, φ) es un *espacio pseudotopológico* si se satisface la siguiente condición:

Dado $\mathcal{F} \in Fil(X)$; $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ si $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} \in \varphi(x)$, siendo $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ un ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$.

Por tanto, (X, φ) es pseudotopológico si y solo si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ si y solo si $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} \in \varphi(x)$, para todo ultrafiltro $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ más fino que x.

Proposición 5.2.2. *Si (Y, ψ) es un espacio pseudotopológico, $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es continua si y solo si para todo $\mathcal{U} \in Ult(X)$, $f(\mathcal{U}) \in \psi(f(x))$ si $\mathcal{U} \in \varphi(x)$.*

Demostración. Si f es continua, dado $\mathcal{U} \in Ult(X)$ tal que $\mathcal{U} \in \varphi(x)$, entonces $f(\mathcal{U}) \in \psi(f(x))$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro más fino que $f(\mathcal{F})$. Por el Teorema 2.2.28, existe $\mathcal{V} \in Ult(X)$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{V}$ y $f(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Por hipótesis, como $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $f(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \in \psi(f(x))$. Luego, por ser (Y, ψ) pseudotopológico, $f(\mathcal{F}) \in \psi(f(x))$, y por tanto f es continua. $\square$

Proposición 5.2.3. *Todo espacio pretopológico es pseudotopológico.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in Fil(X)$ tal que $\mathcal{U} \in \varphi(x)$ para todo ultrafiltro $\mathcal{U} \geq \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F} \notin \varphi(x)$, entonces $\mathcal{F}$ no es más fino que $\mathcal{N}_x^{\varphi}$, por tanto existe $N \in \mathcal{N}_x^{\varphi} - \mathcal{F}$, por lo que $X - N \in \mathcal{U}$. Pero $\mathcal{U} \in \varphi(x)$, luego, por ser (X, φ) pretopológico, se trendrá que $N \in \mathcal{U}$ $\square$

Ejemplo 5.2.4. El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Sobre $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ se considera la estructura de convergencia φ dada por:

1. $\varphi(n) = [n]$ si $n \neq 0$.
2. $\varphi(0) = \{[0]\} \cup \{[m]\}$ si $m \notin B$, siendo $B \subset \mathbb{N}$ finito.
3. $\varphi(x)$ no contiene filtros libres.

Se tiene que $\mathcal{N}_0^{\varphi} = [\mathbb{N} - B]$, y como $\mathbb{N} - B \in \mathcal{F}_{cof}$, $\mathcal{N}_0^{\varphi} \subset \mathcal{F}_{cof}$. Pero si $\mathcal{G}$ es un filtro libre, entonces $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}_{cof} \geq \mathcal{N}_0^{\varphi}$, por tanto $\mathcal{N}_0^{\varphi} \notin \varphi(0)$.

Ejemplo 5.2.5. *De un espacio que no es pseudotopológico.*

Si X es infinito, sea $x_0 \in X$. Se toma $\varphi(x) = [x]$ si $x \neq x_0$, y se considera $\mathcal{F} \in \varphi(x_0)$ si $\mathcal{F} \geq \bigcap_{i \in D} (\mathcal{U}_i \cap [x_0])$, siendo D un conjunto finito y $\mathcal{U}_i$ un ultrafiltro libre sobre X.

Corolario 5.2.6. *1. Si $\{(X_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios pseudotopológicos, $(\prod X_i, \prod \varphi_i)$ también lo es.*

2. Si (X, φ) es pseudotopológico y $A \subset X$, $(A, \varphi(A))$ también lo es.

Teorema 5.2.7. *Sean (X, φ) espacio de convergencia, y (Y, ψ) espacio pseudotopológico. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si $f(U) \in \psi(f(x))$.*

Observación 5.2.8. Este tipo de convergencia desempeña un importante papel en el estudio de las topologías sobre el conjunto de las aplicaciones continuas de un espacio en otro. Ver [3].

Capítulo 6

Aplicaciones continuas entre Espacios de Convergencia

En este capítulo se introduce el concepto de aplicaciones continuas entre espacios topológicos basándose en la propiedad de las aplicaciones continuas entre espacios topológicos. En el caso de los espacios pretopológicos, admiten las caracterizaciones conocidas para estos.

Definición 6.0.1. Si (X, φ) e (Y, ψ) son espacios de convergencia, se dice que $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es $(\varphi, \psi) -$ *continua en* x para $x \in X$, o *continua* de ahora en adelante, si $f(\mathcal{F}) \in \psi(f(x))$ para todo $\mathcal{F} \in \varphi(x)$.

La aplicación se llama *continua en* X si lo es para todo $x \in X$.

Nótese que esta definición está inspirada en la caracterización mediante filtros de la continuidad en un punto de una aplicación entre espacios topológicos.

Proposición 6.0.2.

1. $id_X : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \psi)$ *es continua si y solo si* $\psi \leq \varphi$*, sea* $x \in X$ *y* $\mathcal{F} \in \varphi(x)$.
2. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *e* $(Y, \mathcal{T}')$ *son espacios topológicos,* $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ *es continua en* x *si y solo si lo es* $f : (X, \varphi_{\mathcal{T}}) \longrightarrow (Y, \varphi_{\mathcal{T}'})$.

Demostración.

1. En efecto, si $\psi \leq \varphi$, sea $x \in X$ y $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, entonces $id_X(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \in \psi(x)$, ya que $\varphi(x) \subset \psi(x)$.

   Recíprocamente, si id_X es continua, para todo $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ se tiene que $id_X(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \in \psi(x)$. Es decir, $\varphi(x) \subseteq \psi(x)$, luego $\varphi \geq \psi$.

2. En efecto, si $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua en x, y $\mathcal{F} \in \varphi_{\mathcal{T}}(x)$, entonces $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, luego $f(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{T}'} f(x)$ y por tanto $f(\mathcal{F}) \in \varphi_{\mathcal{T}'}(f(x))$. El recíproco se encuentra de la misma forma.

□

Proposición 6.0.3. *Si* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *y* $g : (Y, \psi) \longrightarrow (Z, \phi)$ *son continuas, entonces* $g \circ f$ *también lo es.*

Demostración. Dados $x \in X$ y $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, se tiene que $f(\mathcal{F}) \in \varphi(f(x))$ y $g(f(\mathcal{F})) \in \phi(g(f(x)))$. □

Proposición 6.0.4. *Si* $f : (X, \varphi_1) \longrightarrow (Y, \psi_1)$ *es continua y* φ_2, ψ_2 *estructuras de convergencia con* $\varphi_1 \leq \varphi_2$ *y* $\psi_2 \leq \psi_1$*, entonces* $f : (X, \varphi_2) \longrightarrow (Y, \psi_2)$ *es continua.*

Demostración. Basta tener en cuenta que, según la Proposición 6.0.2, apartado 1, $id_X : (X, \varphi_2) \longrightarrow (X, \varphi_1)$ e $id_Y : (Y, \psi_1) \longrightarrow (Y, \psi_2)$ son continuas y que la composición de aplicaciones continuas también lo es. □

Corolario 6.0.5. *Sea* (X, φ) *un espacio de convergencia, y* φ_{π_φ}, $\varphi_{\mathcal{T}_\varphi}$ *las modificaciones pretopológicas y topológicas de* φ *respectivamente. Entonces* $id_X : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \varphi_{\mathcal{T}_\varphi})$, $id_X : (X, \varphi) \longrightarrow (X, \varphi_{\pi_\varphi})$ *e* $id_X : (X, \varphi_{\pi_\varphi}) \longrightarrow (X, \varphi_{\mathcal{T}_\varphi})$ *son continuas.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 6.0.3, teniendo en cuenta que $\varphi_{\mathcal{T}_\varphi} \leq \varphi_{\pi_\varphi} \leq \varphi$. □

Proposición 6.0.6. *Si* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *es continua y* $O \in \mathcal{T}_\psi$*, entonces* $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_\varphi$.

Demostración. Si $x \in f^{-1}(O)$, veamos que $f^{-1}(O) \in \mathcal{N}_x^\varphi = \bigcap\{\mathcal{F} \in Fil(X) \ ; \mathcal{F} \in \varphi(x)\}$. Como f es continua en x, dado $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $f(\mathcal{F}) \in \psi(f(x))$. Pero por ser $O \in \mathcal{T}_\psi$ y $f(x) \in O$, $O \in f(\mathcal{F})$. Por tanto, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f(F) \subseteq O$. Pero $F \subset f^{-1}(f(\mathcal{F})) \subset f^{-1}(O)$, luego $f^{-1}(O) \in \mathcal{F}$. □

Ejemplo 6.0.7. El recíproco del resultado anterior es cierto para estructuras de convergencia que sean topológicas pero no es cierto en general; basta considerar un espacio de convergencia (X, φ), siendo φ una estructura no topológica. Entonces $\varphi_{\mathcal{T}_\varphi} \lneq \varphi$ y por la Proposición 6.0.4, $id_X : (X, \varphi_{\mathcal{T}_\varphi}) \longrightarrow (X, \varphi)$ no es continua. Ahora bien, $\mathcal{T}_{\varphi_{\mathcal{T}_\varphi}} = \mathcal{T}_\varphi$, luego A es $\varphi - abierto$ si y solo si es $\varphi_{\mathcal{T}_\varphi} - abierto$.

Corolario 6.0.8. *Si* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *es continua, también lo es* $f : (X, \varphi_{\mathcal{T}_\varphi}) \longrightarrow (Y, \psi_{\mathcal{T}_\psi})$.

Demostración. Por la proposición anterior, $f : (X, \mathcal{T}_\varphi) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_\psi)$ es continua y el resultado sigue la Proposición 6.0.3. □

Observación 6.0.9. La proposición anterior no es cierto en general. En efecto si (X, φ) no es pretopológico, $id_X : (X, \pi_\varphi) \longrightarrow (X, \varphi)$ no es continua por la Proposición 6.0.2. Sin embargo, $\mathcal{N}_x^\varphi = \mathcal{N}_x^{\pi_\varphi}$.

También se puede obtener una caracterización de continuidad mediante entornos.

Proposición 6.0.10. *Si* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *es continua. Entonces* $N^{\psi}_{f(x)} \subset f(\mathcal{N}^{\varphi}_x)$ *para todo* $x \in X$*.*

Demostración. Como f es continua en x , si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $f(\mathcal{F}) \in \psi(f(x))$. Luego $V \in \mathcal{N}^{\psi}_{f(x)}$, $V \in f(\mathcal{F})$, es decir, existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $f(U) \subseteq V$. Por tanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, y se tiene que $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Así pues, $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}^{\varphi}_x$, y como $f(f^{-1}(V)) \subset V$, $V \in f(\mathcal{N}^{\varphi}_x)$, y se tiene el resultado. $\square$

Proposición 6.0.11. *Si* (X, φ) *e* (Y, ψ) *son espacios pretopológicos,* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *es continua si y solo si* $\mathcal{N}^{\psi}_{f(x)} \subset f(\mathcal{N}^{\varphi}_x)$ *para todo* $x \in X$*.*

Demostración. Hay que demostrar el recíproco de la Proposición 6.0.10. Sea $\mathcal{F} \in \varphi(x)$. Como $\mathcal{F} \geq \mathcal{N}^{\varphi}_x$, $f(\mathcal{F}) \geq f(\mathcal{N}^{\varphi}_x)$. Luego, por hipótesis, $\mathcal{N}^{\psi}_{f(x)} \leq f(\mathcal{F})$ y por tanto $f(\mathcal{F}) \in \psi(f(x))$, es decir, f es continua. $\square$

Corolario 6.0.12. *Si* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *es* continua*,* $f : (X, \pi_{\varphi}) \longrightarrow (Y, \pi_{\psi})$ *también lo es.*

Demostración. Si $\mathcal{F} \in \pi_{\varphi}(x)$, entonces $\mathcal{F} \geq \mathcal{N}^{\varphi}_x$, así que $f(\mathcal{F}) \geq f(\mathcal{N}^{\varphi}_x)$. Por la proposición anterior, se tiene que $\mathcal{N}^{\psi}_{f(x)} \geq f(\mathcal{N}^{\varphi}_x) \geq f(\mathcal{F})$, luego $f(\mathcal{F}) \in \pi_{\psi}(f(x))$, y se tiene el resultado. $\square$

Proposición 6.0.13. *Si* $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ *es continua y* $A \subset X$*, entonces* $f(Cl_{\varphi}(A)) \subset Cl_{\varphi}(f(A))$*.*

Demostración. Si $y \in f(Cl_{\varphi}(A))$, sea $x \in Cl_{\varphi}(A)$ tal que $y = f(x)$. Sea $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Entonces $f(A) \in f(\mathcal{F})$, y como f es continua, $f(\mathcal{F}) \in \psi(f(x))$. $\square$

Capítulo 7

Estructuras de Convergencia Iniciales y Finales

En este capítulo, de forma análoga como se hace en los espacios topológicos, se consideran las estructuras de convergencia iniciales y finales correspondientes a familias de aplicaciones cuyos dominios son espacios de convergencia.

Los resultados y propiedades que se obtienen son muy similares para las primeras, pero difieren notablemente en las segundas.

7.1. Estructuras de Convergencia Iniciales

Los ejemplos habituales de estructuras inciales corresponden a la estructura sobre un producto y a la estructura sobre un subconjunto.

Veamos en primer lugar cómo se define una estructura topológica asociada a una familia de aplicaciones.

Definición 7.1.1. Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, X un conjunto y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones $f_i : X \longrightarrow X_i$. La *topología inicial sobre* X para la familia $\{f_i\}$, denotada por $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ es la que tiene como subbase la familia

$$\mathcal{A}_{\{f_i\}} = \{\bigcap_{J\subset I} f_j^{-1}(O_j) \ ; \ O_j \in \mathcal{T}_j \text{ y } J \subset I \text{ es finito}\}.$$

Se tiene la siguiente caracterización de $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$.

Proposición 7.1.2. *Una topología $\mathcal{T}$ sobre X es $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ si y solo se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua para todo $i \in I$.*

2. *Si $\mathcal{T}'$ es una topología sobre X tal que $f : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}_i)$ es continua, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Es decir, la topología inicial $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ es la topología menos finas sobre X que hace continua a todas las aplicaciones $f_i : X \longrightarrow X_i$.*

Demostración. 1. Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$. Como $\mathcal{A}_{\{f_i\}_{i\in I}} \subset \mathcal{T}$, es inmediato que $f_i : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua para todo $i \in I$.

2. Por otra parte, si $\mathcal{T}'$ es una topología sobre X tal que $f : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua, entonces $A_{\{f_i\}} \subset \mathcal{T}'$, y por tanto, $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}} \subset \mathcal{T}'$.

   Recíprocamente, como para todo $i \in I$, $f_i : (X, \mathcal{T}_{\{f_i\}}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua, se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\{f_i\}}$. Por otro lado, si $A_{\{f_i\}} \subset \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}_{\{f_i\}} \subset \mathcal{T}$.

□

Teniendo en cuenta la caracterización de la continuidad de una función en un punto mediante filtros Teorema 2.2.43, se verifica:

Proposición 7.1.3. *Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, entonces $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}_{\{f_i\}}} x$ si y solo si $< f_i(\mathcal{F}) > \xrightarrow{\mathcal{T}_i} x_i$ para todo $i \in I$.*

Ejemplo 7.1.4. (1) Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$, la topología relativa $\mathcal{T}_{|A}$ es la topología inicial asociada a la inclusión $j : A \longrightarrow X$. Por tanto, es la menor topología sobre A que hace continua a j.

Otro ejemplo de gran importancia de topología inicial es la topología producto de una familia de espacios topológicos.

Definición 7.1.5. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, se define el *producto cartesiano* como:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \longrightarrow \bigcup X_i \ ; \ x(i) = x_i \in X_i, \text{ para todo } i \in I\}.$$

La aplicación $p_i : \prod X_i \longrightarrow X$ dada por $p_i(x) = x(i) = x_i$ se llama la *i-ésima proyección canónica* de $\prod X_i$ en X_i, y la topología inicial sobre $\prod X_i$ asociado a la primera familia $\{p_i\}_{i\in I}$ se llama *topología producto* de las topologías $\mathcal{T}_i$, y se denotará por $\mathcal{T}_P$.

Ejemplo 7.1.6. (2) Si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado real y $X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineales y continuas $\}$, entonces la topología inicial definida sobre X mediante X^* es la topología débil sobre X. En general, es más gruesa que la topología de la norma, y ambas coinciden si y solo si X es de dimensión finita.

Observación 7.1.7. Teniendo en cuenta la definición de la topología inicial,

Una *subbase de la topología producto* es, $\mathcal{A}_P = \{p_i^{-1}(O_i) \ ; \ O_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$.

Por tanto, una *base* de $\mathcal{T}_P$ es, $\mathcal{B}_P = \{\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(O_i) \ ; \ O_i \in \mathcal{T}_i, J \subset I \text{ es finito}\}$.

Como $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(O_i) = \prod_{i\in I} A_i$ donde $A_i = \begin{cases} O_i & si \quad i \in J \\ \\ X_i & si \quad i \in I - J \end{cases}$ resulta que $\mathcal{B}_P =$ $\{\prod_{i\in I} O_i$; existe $J \subset I$ finito$\}$ con $G_i = \begin{cases} \mathcal{T}_i & si \quad i \in J \\ \\ X_i & si \quad i \in I - J. \end{cases}$

Luego, cuando I es *finito*, se tiene que $\mathcal{B}_P = \{\prod_{i\in I} O_i \ ; \ O_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Como consecuencia inmediata de las definiciones, se prueba, igual que en caso en que I es finito que,

Proposición 7.1.8. *Para todo $i \in I$, la aplicación*

$$p_i : (\prod X_i, \mathcal{T}_P) \longrightarrow (X_i, T_i)$$

es sobreyectiva, continua y abierta.

Teniendo en cuenta la Proposición 7.1.3, se tiene la siguiente caracterización de los filtros convergentes en un espacio producto.

Proposición 7.1.9. *$\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}_P} x$ si y solo si $< p_i(F) > \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x)$.*

La caracterización de los filtros convergentes en una topología inicial sugiere la definición de estructura de convergencia inicial asociada a una familia de aplicaciones $\mathcal{A} = \{f_i\}_{i\in I}$, $f_i : X \longrightarrow (X_i, \varphi_i)$, donde X es un conjunto y $\{(X_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios de convergencia.

Proposición 7.1.10. *La aplicación $\varphi_{\{f_i\}} : X \longrightarrow Fil(X)$ dada por $\varphi_{\{f_i\}}(x) = \{\mathcal{F} \in Fil(X) \ ; \ < f_i(\mathcal{F}) > \in \varphi_i(f_i(x))$, para todo $i \in I\}$ es una estructura de convergencia sobre X.*

Demostración. Dado $x \in X$, como $f_i[x] = [f_i(x)] \in \varphi_i(f_i(x))$ se tiene que $[x] \in \varphi_{\{f_i\}}$.

Sea $\mathcal{F} \in \varphi_{\{f_i\}}(x)$ y $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$, $< f_i(\mathcal{G}) \geq f_i(\mathcal{F})$, para todo $i \in I$. Y como $< f_i(\mathcal{F}) > \in \varphi_i(f_i(x))$, se tiene que $< f_i(\mathcal{G}) > \in \varphi_i(f_i(x))$. Por tanto, $\mathcal{G} \in \varphi_{\{f_i\}}(x)$.

Por último, veamos que si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \varphi_{\{f_i\}}(x)$, entonces $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \varphi_{\{f_i\}}(x)$. Pero ello es consecuencia de la definición de $\varphi_{\{f_i\}}$, de ser φ_i estructura de convergencia, y de la igualdad $< f_i(\mathcal{G}) \cap f_i(\mathcal{F}) >=< f_i(\mathcal{G}) > \cap < f_i(\mathcal{F}) >$. En efecto, si $M \in < f_i(\mathcal{G}) \cap f_i(\mathcal{F}) >$, entonces $M \supset H$, con $H = f_i(G)$ y $H = f_i(F)$, para ciertos $G \in \mathcal{G}$ y $F \in \mathcal{F}$. Entonces $M \in < f_i(\mathcal{G}) > \cap < f_i(\mathcal{F}) >$. Por otra parte, si $M \in < f_i(\mathcal{G}) > \cap < f_i(\mathcal{F}) >$, $M \supset f_i(G)$, con $G \in \mathcal{G}$ y $M \supset f_i(F)$, con $F \in \mathcal{F}$. Luego $M \supset f_i(G) \cup f_i(F) = f_i(G \cup F)$. Pero como $G \cup F \in \mathcal{G} \cap \mathcal{F}$, resulta que $M \in < f_i(\mathcal{G}) \cap f_i(\mathcal{F}) >$. $\square$

Corolario 7.1.11. *1. Si (X, φ) es un espacio de convergencia y $A \supset X$, $(A, \varphi_{|A})$ es un espacio de convergencia, donde $\varphi_{|A}$ es la estructura de convergencia inicial correspondiente a la inclusión canónica, $i : A \longrightarrow X$, viene dada por $\varphi_{|A}(x) = \{< \mathcal{F} > ; \mathcal{F} \in Fil(A) \cap \varphi(x)\}$.*

2. Si $\{(X_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios de convergencia, entonces $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \varphi)$, donde $\varphi(x) = (\varphi_i(x_i))$ si $x = (x_i)$, es un espacio de convergencia.

Proposición 7.1.12. *Sea $\mathcal{A} = \{f_i\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones $f : X \longrightarrow (X_i, \varphi_i)$, donde (X_i, φ_i) son espacios de convergencia topológicos. Si φ es la estructura de convergencia inicial asociada a $\mathcal{A}$, (X, φ) es topológico.*

Demostración. Sea $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{V \subset X\}$, donde los conjuntos V satisfacen la siguiente condición: para cada $x \in V$ e $i \in I$, existe U_i, φ_i-abierto en X_i, tal que $x \in f_i^{-1}(U_i) \subset V$.

Teniendo en cuenta las propiedades de los φ_i-abiertos, es inmediato comprobar que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X. Veamos que $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ si y solo si $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Pero si $U \in \mathcal{N}_{f_i(x)}^{\varphi_i}$, existe un conjunto φ_i-abierto V tal que $f_i(x) \in V \subset U$, y como $f_i : (X, \varphi) \longrightarrow (X_i, \varphi_i)$ es continua, por la Proposición 6.0.6, $f^{-1}(V)$ es $\varphi-$abierto, así que $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Y como $f_i(f_i^{-1}(U)) \subset U$, se tiene que $U \in f_i(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}})$, luego $\mathcal{N}_{f_i(x)}^{\varphi_i} \subset f_i(\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}) \subset f_i(\mathcal{F})$, lo que implica que $f_i(\mathcal{F}) \in \varphi_i(f_i(x))$.

Recíprocamente, si $U \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V \subset U$, así que para cada existe un abierto $W_i \subset X_i$ tal que $x \in f_i^{-1}(W_i) \subseteq V \subseteq U$. Como $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, $f_i(\mathcal{F}) \in \varphi_i(f_i(x))$, así que $W_i \in \mathcal{N}_{f_i(x)}^{\varphi_i} \subset f_i(\mathcal{F})$. Por tanto, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(F) \subseteq W_i$, por lo que $F \subseteq f_i^{-1}(W_i) \subseteq U$, y se tiene así que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$. □

Resultados análogos se tienen para otras estructuras de convergencia estudiadas, es decir,

Proposición 7.1.13. *Sea $\mathcal{A} = \{f_i\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones $f : X \longrightarrow (X_i, \varphi_i)$, donde (X_i, φ_i) son espacios pretopológicos. Si φ es la estructura de convergencia inicial asociada a $\mathcal{A}$, (X, φ) es pretopológico.*

Demostración. Si $V \in \mathcal{N}_{f_i(x)}^{\varphi_i}$, como f_i es continua, por la Proposición 6.0.10 existe $U \in \mathcal{N}_x^{\varphi}$ tal que $f_i(U) \subseteq V$, lo que implica que $V \in f_i(\mathcal{N}_x^{\varphi})$. Por tanto, $\mathcal{N}_{f_i(x)}^{\varphi_i} \subseteq f_i(\mathcal{N}_x^{\varphi})$ y se tiene que $f_i(\mathcal{N}_x^{\varphi})$ para todo $i \in I$. □

Proposición 7.1.14. *Si $\{(X_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios pseudotopológicos, $\{f_i : X \longrightarrow X_i\}_{i \in I}$ es una familia de aplicaciones y φ es la estructura de convergencia inicial respecto a $\{f_i\}_{i \in I}$, (X, φ) es pseudotopológico.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in Fil(X)$ tal que si $\mathcal{H} \geq \mathcal{F}$ es un ultrafiltro, $\mathcal{H} \in \varphi(x)$. Veamos que $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, es decir que $f_i(\mathcal{F}) \in \varphi_i(f_i(x))$ para todo $i \in I$.

Pero si $\mathcal{G} \geq f_i(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en X_i, existe un ultrafiltro $\mathcal{H} \geq \mathcal{F}$ tal que $f_i(\mathcal{H}) = \mathcal{G}$. Por ser f_i continua, $\mathcal{G} \in \varphi_i(f_i(x))$, luego por ser (X_i, φ_i) pseudotopológico, $f_i(\mathcal{F}) \in \varphi_i(f_i(x))$. $\square$

7.2. Estructuras de Convergencia Finales

Hay que señalar que existen distintas formas de construir las estructuras de convergencia finales. Hemos seguido la presentación de [3]. Esta diferencia se debe principalmente a las distintas condiciones que se exigen a una estructura de convergencia. Por ejemplo, varios autores no exigen la condición 3 de la Definición 4.0.1.

7.2.1. Estructura de Convergencia Cociente

Definición 7.2.1. Sea (X, φ) un espacio de convergencia y $q : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación $\varphi_q : Y \longrightarrow P(Fil(Y))$ dada por

$$\varphi_q(y) = \{\mathcal{F} \in Fil(Y) \text{ ; existen } x_1, \ldots x_n \text{ con } f(x_i) = y \text{ y filtros } \mathcal{F}_i \in \varphi(x_i),$$
$$\text{con } 1 \leq i \leq n \text{ tales que } \bigcap_{1 \leq i \leq n} q(\mathcal{F}_i) \leq \mathcal{F}\}$$

se llama *estructura de convergencia cociente asociada a q.*

Proposición 7.2.2. (Y, φ_q) *es un espacio de convergencia.*

Demostración. 1. Dado $y \in Y$, sea $x \in X$ con $f(x) = y$. Como $[y] = f[x]$, $[y] \in \varphi_q(y)$.

2. Es consecuencia directa de la definición de φ_q que si $\mathcal{F} \in \varphi_q(y)$ y $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{G} \in \varphi_q(y)$.

3. Sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \varphi_q(y)$. Supongamos que existen

   a) $\mathcal{F}_i \in \varphi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, con $\bigcap_{1 \leq i \leq n} q(\mathcal{F}_i) \leq \mathcal{G}_1$ y

   b) $\mathcal{H}_j \in \varphi(z_j)$, $1 \leq j \leq m$, con $\bigcap_{1 \leq j \leq m} q(\mathcal{H}_j) \leq \mathcal{G}_2$.

   Entonces consideramos la intersección,

   $$q(\mathcal{F}_1) \cap \cdots \cap q(\mathcal{F}_n) \cap q(\mathcal{H}_1) \cap \cdots \cap q(\mathcal{H}_m) \tag{7.2.1}$$

   Si existen índices i, j tales que $x_i = z_j$, entonces $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{H}_j \in \varphi(x_i) = \varphi(z_j)$, y como $q(\mathcal{F}_i) \cap q(\mathcal{H}_j) = q(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{H}_j)$, en la intersección (6.1.1) aparecen tantos conjuntos distintos como puntos en $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{z_j\}_{1 \leq j \leq m}$, y además uno de ellos es la imagen de un filtro de $\varphi(x_i) = \varphi(z_j)$. Como (6.1.1) es un filtro menos fino que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$, se tiene el resultado.

$\square$

Proposición 7.2.3. *Una aplicación $g : (Y, \varphi_q) \longrightarrow (Z, \theta)$ es continua si y solo si $g \circ q$ es continua.*

Demostración. Como $q : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \varphi_q)$ es continua, si g es continua, entonces $g \circ \varphi_q$ también lo es.

Recíprocamente, supongamos que $g \circ q$ es continua y que $\mathcal{F} \in \varphi_q(y)$. Veamos que $g(\mathcal{F}) \in \theta(y)$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in f^{-1}(y)$ y $\mathcal{F}_i \in \varphi(x_i)$, con $\bigcap_{1 \leq i \leq n} q(\mathcal{F}_i) \leq \mathcal{F}$. Entonces, como $g \circ \varphi_q$ es continua en x_i, $1 \leq i \leq n$, $g(\varphi_q(\mathcal{F}_i)) \in \theta(y)$ por tanto, $g(\mathcal{F}) \geq g(\bigcap_{1 \leq i \leq n} q(\mathcal{F}_i)) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} g(q(\mathcal{F}_i))$ y por la Definición 4.0.1, apartado 2 y 3, se tiene el resultado.

□

Corolario 7.2.4. *φ_q es la estructura de convergencia más fina sobre Y que hace continua la aplicación q.*

Demostración. Sea η una estructura de convergencia sobre Y tal que $q : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \eta)$ es continua. Por la Proposición 7.2.3, $id : (Y, \varphi_q) \longrightarrow (Y, \eta)$ es continua, así que $\varphi_q \geq \eta$. □

El operador Cl_{φ_q} admite la siguiente caracterización.

Es inmediato comprobar el siguiente resultado,

Proposición 7.2.5. *Si (X, φ) es un espacio de convergencia si y solo si existe $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ y $F \cap A \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*

Proposición 7.2.6. *Si $A \subset Y$, $Cl_{\varphi_q}(A) = q(Cl_\varphi(q^{-1}(A)))$.*

Demostración. Como $q : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \varphi_q)$ es continua, por la Proposición 6.0.13 se tiene que $q(Cl_\varphi(q^{-1}(A))) \subseteq Cl_{\varphi_q}(q(q^{-1}(A))) \subseteq Cl_{\varphi_q}(A)$. Por otra parte, si $y \in Cl_{\varphi_q}(A)$, existe $\mathcal{F} \in \varphi_q(y)$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Por tanto, por definición de φ_q, existen $x_1, \ldots, x_n \in q^{-1}(y)$ y filtros $\mathcal{F}_i \in \varphi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ tales que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} q(\mathcal{F}_i) \leq \mathcal{F}$. Veamos que existe $\mathcal{F}_k$, $1 \leq k \leq n$, tal que $F \cap q^{-1}(A) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}_k$. En caso contrario, para todo $1 \leq i \leq n$ existiría $F_i \in \mathcal{F}_i$ tal que $F_i \cap q^{-1}(A) = \emptyset$. Por tanto, si $O = \cup F_i \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$, $q(O) \in \bigcap_{i=1}^{n} q(\mathcal{F}_i) \leq \mathcal{F}$. Pero $q(O) \cap A = \emptyset$, lo que contradice que $A \in \mathcal{F}$. Por la Proposición 7.2.5, $x_k \in Cl_\varphi(q^{-1}(A))$, y por tanto $y = f(x_k) \in q(Cl_\varphi(q^{-1}(A)))$. □

Proposición 7.2.7. *Si $f : (X, \varphi) \longrightarrow (Y, \psi)$ es una aplicación sobreyectiva y continua entre espacios pretopológicos, son equivalentes:*

1. *Para cada $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $\mathcal{N}_y^\psi = f(\mathcal{N}_x^\varphi)$.*

2. *$\psi = \varphi_f$.*

Demostración. ($1 \Longrightarrow 2$) Como f es continua, $\psi \leq \varphi_f$. Veamos que $\varphi_f \leq \psi$, es decir, que $\psi(y) \subseteq \varphi_f(y)$, para todo $y \in Y$. Dado $\mathcal{F} \in \psi(y)$, por ser ψ pretopología, $\mathcal{N}_y^{\psi} \leq \mathcal{F}$. Pero por hipótesis, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $f(\mathcal{N}_x^{\varphi}) = \mathcal{N}_y^{\psi} \leq \mathcal{F}$, luego por definición de φ_f, $\mathcal{F} \in \varphi_f(y)$.

$\square$

Capítulo 8

Compacidad en Espacios de Convergencia

8.1. Adherencia de un filtro en Espacios de Convergencia

Este capítulo está dedicado a la noción de compacidad en espacios de convergencia. El método para hacerlo es aprovechar la caracterización de los espacios topológicos compactos mediante convergencia de filtros. En estos espacios no se cumple en general el Teorema de Heine-Borel. No obstante, las principales propiedades conocidas de la compacidad se conservan.

Definición 8.1.1. Sea (X, φ) un espacio de convergencia. Un elemento $x \in X$ se dice que es $\varphi -$ *adherente al filtro* $\mathcal{F}$ si existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ y $\mathcal{G} \in \varphi(x)$.

Definición 8.1.2. Sea (X, φ) un espacio de convergencia. El conjunto de todos los puntos de X $\varphi-$adherentes al filtro $\mathcal{F}$, se llama la *adherencia de* $\mathcal{F}$. Lo denotaremos como $a_\varphi(\mathcal{F})$, o simplemente $a(\mathcal{F})$ si no hay confusión.

Proposición 8.1.3. *Sea (X, φ) un espacio de convergencia. Entonces se cumple,*

1. *Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, $a_\varphi(\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathcal{G} \geq \mathcal{F}} \operatorname{lím} G$.*
2. *Si $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$, entonces $a_\varphi(\mathcal{F}) \subseteq a_\varphi(\mathcal{G})$.*
3. *Si $\mathcal{U} \in Ult(X)$, entonces $a_\varphi(\mathcal{U}) = \operatorname{lím}(\mathcal{U})$.*

Demostración. 1. Es consecuencia directa de la definición de a_φ.

2. Si $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$, existe $\mathcal{H} \geq \mathcal{F}$ con $\mathcal{H} \in \varphi(x)$. Como $\mathcal{H} \geq \mathcal{G}$, se tiene que $x \in a_\varphi(\mathcal{G})$.
3. Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro y $x \in a_\varphi(\mathcal{U})$, existe $\mathcal{G} \geq \mathcal{U}$, con $\mathcal{G} \in \varphi(x)$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, ha de ser $\mathcal{U} = \mathcal{G}$.

□

Proposición 8.1.4. *Sea (X, φ) un espacio de convergencia y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos filtros sobre X. Entonces,*

1. $a(\mathcal{F}) \cup a(\mathcal{G}) \subseteq a(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$.

2. *Si $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ existe, entonces $a(\mathcal{F}) \cap a(\mathcal{G}) \supseteq a(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$.*

Demostración. 1. Sea $x \in a(\mathcal{F}) \cup a(\mathcal{G})$, entonces ó $x \in a(\mathcal{F})$ ó $x \in a(\mathcal{G})$. Supongamos que $x \in a(\mathcal{F})$, entonces existe $\mathcal{H} \in Fil(X)$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \in \varphi(x)$. Pero $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Luego, $x \in a(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$.

2. Recordemos que $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} =< F \cap G\ ;\ F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G} >$ y se cumple que $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$. Por lo tanto, $a(\mathcal{F}) \cap a(\mathcal{G}) \supseteq a(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$.

□

Proposición 8.1.5. *Sea (X, φ) y (Y, ψ) dos espacios de convergencia tal que $\psi \leq \varphi$, entonces para todo $\mathcal{F} \in F(X)$, se tiene que $a_\varphi(\mathcal{F}) \subseteq a_\psi(\mathcal{F})$.*

Demostración. Sea $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$, entonces existe $\mathcal{G} \in F(X)$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \in \varphi(x)$. Como $\varphi(x) \subseteq \psi(x)$, tenemos que $\mathcal{G} \in \psi(x)$. Por lo tanto, $x \in a_\psi(\mathcal{F})$. □

Proposición 8.1.6. *Si (X, φ) es un espacio de convergencia. Son equivalentes,*

1. *Si $\mathcal{U} \in Ult(X)$, $\lim \mathcal{U} \neq \emptyset$.*

2. *Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, $a_\varphi(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.*

Demostración. ($1 \Longrightarrow 2$) Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, sea $\mathcal{U} \in Ult(X)$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$. Si $x \in \lim \mathcal{U}$, entonces $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$.

($2 \Longrightarrow 1$) Si $\mathcal{U} \in Ult(X)$, sea $x \in a_\varphi(\mathcal{U})$. Por la Proposición 8.1.3, $x \in \lim(\mathcal{U})$. □

Proposición 8.1.7. *Sea (X, φ) un espacio de convergencia y $\mathcal{F} \in Fil(X)$. Entonces, si $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$, $x \in \bigcap\{Cl_\varphi(F)\ ;\ F \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración. Si $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$, existe $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ con $\mathcal{G} \in \varphi(x)$. Por tanto, dado $F \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{G}$, y el resultado es consecuencia de la definición de $Cl_\varphi(F)$.

□

A continuación, se comprobará que el recíproco de este resultado es cierto si (X, φ) es un espacio pretopológico. Se obtiene así una generalización de la propiedad ya conocida para los filtros de un espacio topológico.

Proposición 8.1.8. *Sea* (X, φ) *un espacio topológico y* $\mathcal{F} \in Fil(X)$. *Entonces,* $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$ *si y solo si* $x \in \bigcap\{Cl_\varphi(F) \ ; \ F \in \mathcal{F}\}$.

Demostración. Veamos que si $x \in \bigcap\{Cl_\varphi(F) \ ; \ F \in \mathcal{F}\}$ existe $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G} \in \varphi(x)$. Por hipótesis, dado $F \in \mathcal{F}$ y $N \in \mathcal{N}_x^\varphi$, se tiene que $F \cap N \neq \emptyset$. Veamos que $\mathcal{B} = \{F \cap N \ ; \ F \in \mathcal{F} \text{ y } N \in \mathcal{N}_x^\varphi\}$ es base de filtro. Es claro que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $X \in \mathcal{B}$, y que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Además, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Si se toma $\mathcal{G} =< \mathcal{B} >$, entonces $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, ya que si $F \in \mathcal{F}$, $F = F \cap X \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} \in \varphi(x)$, pues por ser (X, φ) pretopológico, $\mathcal{N}_x^\varphi \in \varphi(x)$ y $\mathcal{G} \geq \mathcal{N}_x^\varphi$. □

8.2. Compacidad en Espacios de Convergencia

La compacidad es una de las propiedades topológicas más importantes. Así mismo, es una noción importantes es espacios de convergencia.

Definición 8.2.1. Un espacio de convergencia (X, φ) es $\varphi -$ *compacto* si todo ultrafiltro en X es convergente.

A diferencia de los espacios topológicos, donde los conjuntos abiertos son los elementos características, en los espacios de convergencia la noción primordial es la de convergencia de filtros. Por tanto, como era de esperar, no existe una traslación inmediata del teorema de Borel-Lebesgue, es decir, una caracterización de los espacios de convergencia compactos mediante recubrimientos por abiertos. Ello lleva a Dolecki, [8], que *"la naturaleza de la compacidad no es topológica, si no pseudotopológica."* No obstante, si existe una versión de dicho teorema para cierto tipo de recubrimientos.

Definición 8.2.2. Sea (X, φ) un espacio de convergencia. Se dice que una familia no vacía de conjuntos de X, $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$, es una *familia* $\varphi-$ *recubridora* si cada filtro convergente en X contiene algún elemento de $\mathcal{S}$.

Proposición 8.2.3. *Si* $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ *es un sistema recubridor de* (X, φ), *entonces* $\mathcal{S}$ *es un recubrimiento de* X.

Demostración. Si $x \in X$, como $\mathcal{F} = [x]$ converge a x, ha de existir $S_i \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S_i$. □

En los espacios pretopológicos, los sistemas de recubrimiento admiten la siguiente caracterización.

Proposición 8.2.4. *Si* (X, φ) *es un espacio pretopológico, son equivalentes,*

1. $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ *es un sistema recubridor de* (X, φ).

2. $I_\varphi(\mathcal{S}) = \{I_\varphi(S_i)\}_{i\in I}$ *es un recubrimiento de* X.

Demostración. ($1 \Longrightarrow 2$) Si $x \in X$, como $\mathcal{N}_x^\varphi \xrightarrow{\varphi} x$, existe $i \in I$ tal que $S_i \in \mathcal{N}_x^\varphi$, luego $x \in I_\varphi(S_i)$.

($2 \Longrightarrow 1$) Supongamos que $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} x$. Como $\{I_\varphi(S_i)\}_{i\in I}$ recubre X, existe $i \in I$ tal que $x \in I_\varphi(S_i)$. Entonces, $S_i \in \mathcal{N}_x^\varphi \subseteq \mathcal{F}$. □

Teorema 8.2.5. *Sea* (X,φ) *un espacio de convergencia. Entonces son equivalentes:*

1. (X,φ) *es compacto.*
2. *Todo filtro en* X *tiene un punto de adherencia.*
3. *Si* $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$ *es una familia recubridora hay un número finito de miembros de* $\mathcal{S}$ *cuya unión es* X.

Demostración. 1. ($1 \Longrightarrow 2$) Es consecuencia de la Proposición 8.1.6.

2. ($2 \Longrightarrow 3$) Supongamos que $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$ es una familia recubridora tal que X no puede ser recubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{B} = \{X - S_i\ ;\ S_i \in \mathcal{S}$ es una base de filtro, y si $\mathcal{F} =< \mathcal{B} >$, por hipótesis, existe $x \in a_\varphi(\mathcal{F})$. Por tanto, existe $\mathcal{G} \in Fil(X)$ tal que $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ y $\mathcal{G} \in \varphi(x)$, luego existe $S_i \in \mathcal{G}$, lo que es una contradicción.

3. ($3 \Longrightarrow 1$) Si existe $\mathcal{G} \in Ult(X)$ tal que $\lim \mathcal{G} = \emptyset$, dado $\mathcal{F} \in Fil(X)$ convergente, $\mathcal{G}$ no puede ser más fino que $\mathcal{F}$, así que $M_\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ tal que $M_\mathcal{F} \notin \mathcal{G}$.

   Por tanto, $X - M_\mathcal{F} \in \mathcal{G}$. Pero la familia $\mathcal{S} = \{M_\mathcal{F}\ ;\ \mathcal{F}$ es convergente$\}$, así que por hipótesis existen $M_\mathcal{F}^1, M_\mathcal{F}^2, \ldots, M_\mathcal{F}^m$ tal que $\bigcup_{1\leq i\leq m} M_\mathcal{F}^i = X$.

   Y como $\mathcal{G}$ es ultrafiltro, algún conjunto de esta familia finita estaría en $\mathcal{G}$, lo que es una contradicción.

□

Corolario 8.2.6. *Si* (X,φ) *es un espacio pretopológico, son equivalentes,*

1. (X,φ) *es* $\varphi-$*compacto.*
2. *Si* $\mathcal{S} = \{S_i\}$ *es una familia tal que* $\{I_\varphi(S_i)\}$ *recubre* X, $\mathcal{S}$ *admite un subrecubrimiento finito.*

Nota 8.2.7. Para un ejemplo de espacio de convergencia que sea $\varphi-$compacto, pero en el que existen recubrimientos por $\varphi-$abiertos que no admiten un subrecubrimiento finito, ver [18], Ejemplo IX. 11.8.

Teorema 8.2.8. *Sean (X,φ) y (X,ψ) dos estructuras de convergencia tal que $\varphi \leq \psi$. Entonces si (X,ψ) es* compacto*, (X,φ) también lo es.*

Demostración. Como $a_\psi(\mathcal{F}) \subseteq a_\varphi(\mathcal{F})$ para todo $\mathcal{F} \in F(X)$ y (X,ψ) es compacto, tenemos que $a_\psi(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Como $a_\varphi(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, el teorema anterior nos dice por tanto que (X,φ) es compacto. □

Definición 8.2.9. Si (X,φ) es un espacio de convergencia, se dice que $A \subset X$ es *$\varphi-$compacto* si $(A,\varphi_{|A})$ lo es.

Proposición 8.2.10. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una colección de espacios compactos, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es $\varphi-$compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $f_i(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro en X_i, luego converge a algún $x_i \in X_i$. Sea x un punto en X tal que $\pi_i(x) = x_i$ para cada $i \in I$. Como $\mathcal{U} \in \varphi(x)$, concluimos que X es compacto. □

La compacidad se preserva mediante funciones continuas.

Proposición 8.2.11. *Sean (X,φ) un espacio compacto y (Y,φ) un espacio de convergencia y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva y continua, entonces (Y,φ) es* espacio compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X y sea $\mathcal{V}$ un ultrafiltro más fino que $f^{-1}(\mathcal{U})$. Como f es sobreyectiva, tenemos que $\mathcal{U} = f(f^{-1}(\mathcal{U})) \subseteq f(\mathcal{V})$, luego $f(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Como (X,φ) es compacto se sigue que $\mathcal{V}$ converge, luego $\mathcal{U} = f(\mathcal{V})$ converge, Luego (Y,φ) es espacio compacto. □

Capítulo 9

Espacios de Convergencia asociados a digrafos

Un *grafo dirigido* o *digrafo* es un tipo de grado dónde las aristas poseen un sentido definido. En contraposición tenemos al grafo no dirigido en el cual las aristas no apuntan a ningún sentido.

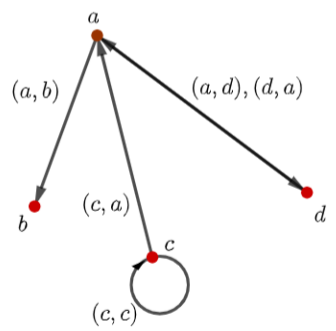
Definición 9.0.1. Un *grafo dirigido* o *digrafo* es un par $G = (V, A)$ dónde:

1. $V \neq \emptyset$ es un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *nodos* o *vértices*.
2. $A \subseteq \{(a, b) \in V \times V\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V, los cuales se llaman *aristas* o *arcos*.

De forma que si denotamos a un arco de forma $a = (x, y)$ estamos indicando que se recorre desde el nodo x hasta el nodo y.

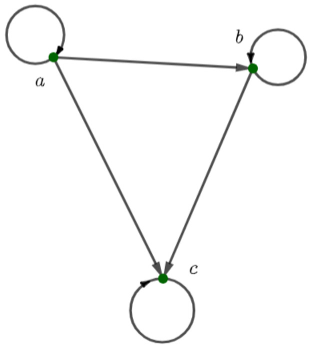
Observación 9.0.2. Es decir, una digrafo es una relación binaria R sobre V.

Ejemplo 9.0.3. Representación de un grafo dirigido.



Observación 9.0.4. Para abreviar la notación, al tener una arista de esta forma, es equivalente escribir:

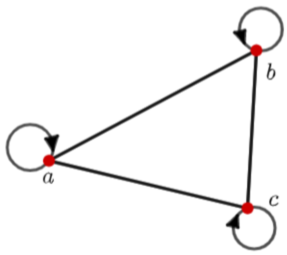
Ejemplo 9.0.5. Digrafo con relación de orden parcial sobre $\{a, b, c\}$.



Este grafo cumple:

1. Propiedad reflexiva para cada nodo, ya que $(a, a), (b, b)$ y (c, c).
2. Propiedad antisimétrica, ya que si (a, b) y (b, a), entonces $a = b$.
3. Propiedad transitiva, ya que si (a, b) y (b, c), entonces (a, c).

Ejemplo 9.0.6. Grafo de una relación de equivalencia en $\{a, b, c\}$.



Cumple las propiedades:

1. Reflexiva, ya que cada nodo está relacionado consigo mismo.
2. Simétrica, todas las aristas tienen doble sentido, es decir, si tenemos (a, b) para $a, b \in V$, entonces también tenemos (b, a).

3. Transitiva, ya que si (a, b) y (b, c), entonces (a, c).

Definición 9.0.7. Si $G = (V, E)$ es un *digrafo* y $v \in V$, sea $\mathcal{N}_v = \{w \in V \ ; \ (v, w) \in E\}$ y $st(v; G) = \{v\} \cup N_v$. Si

$$\varphi_G(v) = \{\mathcal{F} \in Fil(V) \ ; \ st(v; G) = \{v\} \cup N_v \in \mathcal{F}\},$$

$(G, \varphi_G(v))$ es un espacio de convergencia.

Es decir, $\varphi_G(v) = [st(v; G)]$. Por tanto, $\mathcal{N}_x^{\varphi_G} = [st(v; G)]$ y se tiene que (G, φ_G) es un *espacio pretopológico.*

Nota 9.0.8. 1. Si G es reflexivo, $v \in \mathcal{N}_v$, luego $\varphi_G(v) = \mathcal{N}_v$.

2. Si G es un grafo simple (es decir, G es arreflexivo y simétrico), entonces $\varphi_G(v) = \{v\} \cup \{w \in V \ ; \ \{v, w\} \in E\}$.

Proposición 9.0.9. *Si $G = (V, E)$ es un grafo simple, $Cl_{\varphi_G}(V) = st(v; G)$.*

Demostración. $w \in Cl_\varphi(v)$ si y solo si $v \in \mathcal{N}_x^{\varphi_G} = st(v; G)$. Es decir, $w \in Cl_\varphi(v)$ si y solo si $\{v, w\} \in E$. □

Proposición 9.0.10. *Si $G = (V, E)$ es un grafo simple y $A \subset V$, entonces $Cl_{\varphi_G}(A) = \bigcup\{Cl_{\varphi_G}(v) \ ; \ v \in A\}$.*

Demostración. Por la propiedad de $Cl_{\varphi(G)}$, basta comprobar que $Cl_{\varphi_G}(A) \subseteq \bigcup\{Cl_{\varphi_G}(v) \ ; \ v \in A\}$.

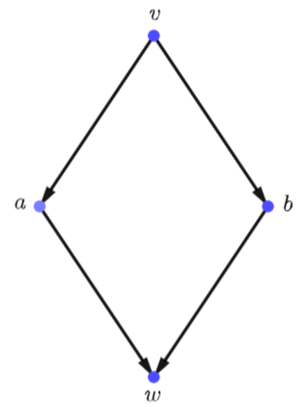
Pero si $w \in Cl_{\varphi(G)}(A)$, existe $v \in A \cap st(w; G)$, así que $\{v, w\} \in E$, es decir, $w \in st(v; G) = Cl_{\varphi_G}(v)$.

□

Proposición 9.0.11. *Si $G = (V, E)$ es un* grafo simple $\varphi_G -$ conexo*, entonces $A \subset V$ es $\varphi_G -$ cerrado si y solo si $A = V$.*

Demostración. Supongamos que $Cl_{\varphi_G} = A \subsetneq V$. Si $v \in V - A$, por la proposición anterior, para todo $w \in A$, $v \notin Cl_{\varphi_G}(w) = st(w; G)$, es decir, v no puede ser adyacente a ningún vértice de A. Pero si l es un arco de longitud mínima en G entre dos vértices, $w \in A$ y $v \notin A$; dicho camino contendría dos vértices adyacentes $v_i \in A$ y $v_{i+1} \notin A$. □

Ejemplo 9.0.12. Si $G = (V, E)$ es el digrafo de la figura:



$st(v;G) = \{v, a, b\} \neq \{a, v, b, w\} = Cl_{\varphi_G}(st(v;G))$, es decir, no es cerrado.

$U = \{v, a, b\}$ no sería un abierto ya que $st(a;G) \not\subset U$.

Corolario 9.0.13. *Si $G = (V, E)$ es un grafo simple conexo, los únicos subconjuntos $\varphi-$cerrados son $\emptyset$ y V.*

Proposición 9.0.14. *Si $G = (V, E)$ es un digrafo, para todo $u \in V$,*

$$Cl_{\varphi_G}(st(u;G)) = \{v \in V \ ; \ st(u;G) \cap st(v;G) \neq \emptyset\}.$$

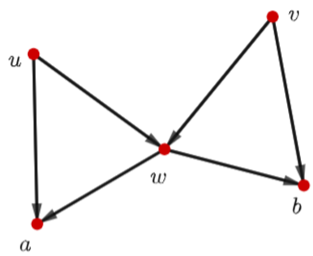
Demostración. Si $v \in Cl_{\varphi_G}(st(u;G))$, existe $\mathcal{F} \in \varphi_G(v)$ tal que $st(v;G) \in \mathcal{F}$, por tanto $st(v;G) \cap st(u;G) = \emptyset$.

Recíprocamente, si $A = st(v;G) \cap st(u;G) \neq \emptyset$, entonces $st(u;G) \in [A]$ y $[A] \in \varphi_G(v)$, luego $v \in Cl_{\varphi_G}(u)$. □

Corolario 9.0.15. *$st(u;G)$ es φ_G-cerrado si y solo si para cada $v \in V$ se tiene que $st(u;G) \cap st(v;G) = \emptyset$ ó $v \in st(u;G)$.*

Demostración. Supongamos que $Cl_{\varphi_G}(st(u;G)) = st(u;G)$. Si $v \notin st(u;G)$, por la proposición anterior, $st(u;G) \cap st(v;G) = \emptyset$. Recíprocamente, si $v \in Cl_{\varphi_G}(st(u;G))$, entonces $st(u;G) \cap st(v;G) \neq \emptyset$ así que, por hipótesis, $x \in st(u;G)$. □

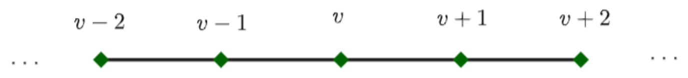
Ejemplo 9.0.16. Si $G = (V, E)$ es el digrafo de la figura:



$st(u;G) = \{u, w, a\}$ y $Cl_{\varphi_G}(st(u;G)) = \{u, w, a, v\}$.

$st(w;G) = \{w, a, b\}$ y $Cl_{\varphi_G}(st(w;G)) = \{w, a, b, u, v\}$.

Ejemplo 9.0.17. Si $G = (V, E)$ es el digrafo de la figura tal que $V = \mathbb{Z}$:



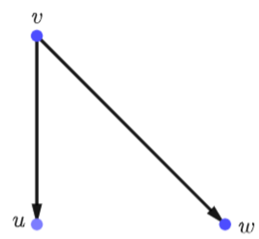
$st(v; G) = \{v-1, v, v+1\}$, para todo $v \in \mathbb{Z}$.

Proposición 9.0.18. *Si $G = (V, E)$ es un digrafo, $U \subset V$ es φ_G- abierto si y solo si $st(v; G) \subset U$ para todo $v \in U$.*

Demostración. U es φ_G-abierto si y solo si $U \in \mathcal{N}_x^{\varphi_G}$ para todo $x \in U$. Por tanto, U es φ_G-abierto si y solo si $st(x; G) \subset U$.

□

Ejemplo 9.0.19. Sea $G = (V, E)$ el digrafo con figura,



1. $st(v; G) = \{v, u, w\}$ no es $\varphi-$ abierto.
2. $st(u; G) = \{u\}$ sí es $\varphi-$ abierto.
3. $st(w; G) = \{w\}$ sí es $\varphi-$ abierto.

Corolario 9.0.20. *Si $G = (U, V)$ es* transitivo*, $st(v; G)$ es $\varphi-$ abierto para todo $v \in V$*

Demostración. Veamos que si $w \in st(v; G)$, entonces $st(w; G) \subset st(v; G)$. Pero si $w \in st(v; G)$ y $u \in st(w; G)$, $(v, w) \in E$ y $(w, u) \in E$; y por ser G transitivo, $(v, u) \in E$, es decir, $u \in st(v; G)$. □

Proposición 9.0.21. *(G, φ_G) es* topológico *si y solo si G es transitiva.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre V tal que $\varphi_{\mathcal{T}} = \varphi_G$. Si $v \in st(u; G)$ y $w \in st(v; G)$, veamos que $w \in st(u; G)$. Por hipótesis, $st(u; G) \in \mathcal{N}_u^{\mathcal{T}}$, así que existe $O \in \mathcal{T}$ tal que $u \in O \subset st(u; G)$, y por tanto, $O = st(u; G)$. Así pues, O es φ_G- abierto, luego por la Proposición 9.0.18, $st(v; G) \subset st(u; G)$.

Recíprocamente, supongamos que G es transitivo. Veamos que existe una topología $\mathcal{T}$ sobre V tal que $\mathcal{F} \in \varphi_G(v)$ si y solo si $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}_v^{\mathcal{T}}$. Es inmediato comprobar que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset V\ ;\ st(v;U) \subset U \text{ para todo } v \in U\}$ es una topología sobre V.

Por otra parte, sea $\mathcal{F} \in Fil(V)$ tal que $\mathcal{F} \supset \mathcal{N}_v^{\mathcal{T}}$. Como G es transitivo, $st(v;G)$ también lo es, y por tanto, si $w \in st(v;G)$, $st(w;G) \subset st(v;G)$. Es decir, $st(v;G) \in \mathcal{T}$, y por tanto, $st(v;G) \in \mathcal{F}$.

Recíprocamente, supongamos que $st(v;G) \in \mathcal{F}$. Si $N \in \mathcal{N}_v^{\mathcal{T}}$, existe $O \in \mathcal{T}$ tal que $v \in O \subset N$, luego $st(v;G) \subset O \subset N$, y por tanto, $N \in \mathcal{F}$. □

Nota 9.0.22. El resultado anterior significa que toda estructura de convergencia asociada a una relación de preorden es topológica.

Al igual que ocurre con todos los espacios de convergencia finitos, los digrafos reflexivos finitos son *compactos.* Para que los digrafos reflexivos finitos sean compactos también basta con que el complemento de algún abierto del grafo sea finito.

Por el contrario, si un dígrafo reflexivo infinito es compacto, entonces uno de sus abiertos también deben ser infinito.

Proposición 9.0.23. *Si $G = (V,E)$ es un* digrafo, *son equivalentes:*

1. *(V, φ_G) es $\varphi_G -$ compacto.*

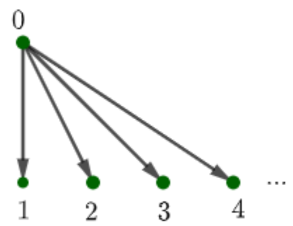
2. *V es finito o existe $v \in V$ tal que $V - st(v;G)$ es finito.*

Demostración. ($1 \Longrightarrow 2$) Reducción al Absurdo. Si V es infinito y $st(v;G)$ es finito para todo $v \in V$, si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro que converge a V, entonces, como $st(v;G) \in \mathcal{U}$, ha de ser $\mathcal{U} = [v]$. Por tanto, los ultrafiltros libres de (V, φ_G) no convergerían.

($2 \Longleftarrow 1$) Si V es finito, entonces todo ultrafiltro en V es de la forma $[v]$ con $v \in V$, y por tanto converge a v. Si existe $v \in V$ tal que $V - st(v;G)$ es finito, entonces $st(v;G) \subset \mathcal{F}_{cof}$. Por tanto, $\mathcal{F}_{cof} \xrightarrow{\varphi_G} v$, y como consecuencia, todo ultrafiltro libre V converge.

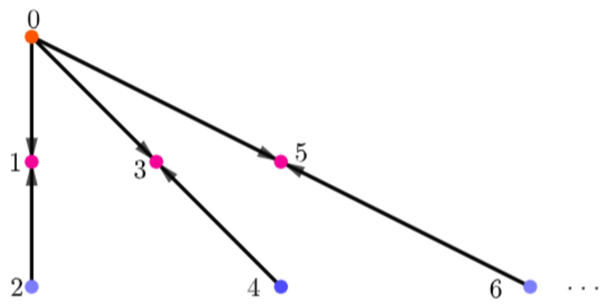
□

Ejemplo 9.0.24. Si G es el digrafo de la figura,



(G, φ_G) es compacto.

Ejemplo 9.0.25. Consideremos el siguiente digrafo H con la estructura de convergencia reflejada en el dibujo,



Los siguientes conjuntos son abiertos en (H, φ_H),

1. $U_0 = st(0; H) = \{0, 1, 3, \dots\}$ es abierto ya que dado un impar $2n+1$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $st(2n+1; H) = \{2n-1\} \subset U_0$.

2. $U_{2n+1} = st(2n+1; H) = \{2n+1\}$ es abierto ya que $st(2n+1; H) = \{2n+1\} \subset U_{2n+1}$.

3. $U_{2n+2} = st(2n+2; H) = \{2n+2, 2n+1\}$ es abierto ya que,

   a) Para $st(2n+2; H) = \{2n+2, 2n+1\} \subset U_{2n+2}$.

   b) Para $st(2n+1; H) = \{2n+1\} \subset U_{2n+1}$.

Se tiene que $U = \{U_n\}_{n \geq 0}$ es un recubrimiento de $V = \{0\} \cup \mathbb{N}$, los vértices, del cual no se puede extraer un subrecubrimiento finito, ya que $U_{2n+2} = \{2n+2, 2n+1\}$.

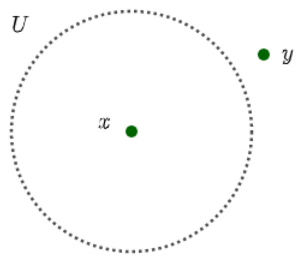
Capítulo 10

Axiomas de separación T_0, T_1, T_2 en espacios de convergencia

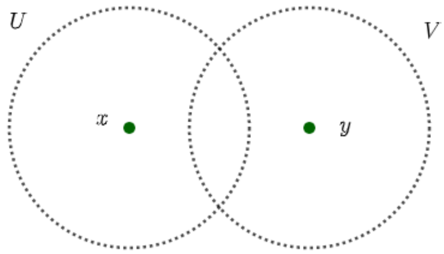
En este capítulo estudiaremos los axiomas de separación T_0, T_1, T_2 en los espacios de convergencia. Al igual que en los espacios topológicos, dichas propiedades pueden enunciarse en términos de los entornos de cada punto. De hecho, con dichos axiomas se pretende reflejar hasta qué punto se diferencian los filtros de los entornos de dos puntos distintos en un espacio topológico. Se consideran las siguientes definiciones.

10.1. Espacios topológicos T_0, T_1, T_2

Definición 10.1.1. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_0 si dados dos puntos distintos, existe un entorno que contiene uno de ellos y no al otro. Es decir, si $x \neq y$ entonces existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$, $y \notin U$.



Definición 10.1.2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un entorno que contiene a x pero no a y y un entorno que contiene a y pero no a x. Es decir, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \notin U$; $x \notin V$, $y \in V$



Definición 10.1.3. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_2 o *de Hausdorff* si dados dos puntos distintos $x, y \in X$,existen dos entornos disjuntos que contienen a x e y respectivamente. Es decir, si $x \neq y$ entonces existe $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$, con $U \cap V = \emptyset$

10.1.1. Espacios de convergencia T_0, T_1, T_2

Definición 10.1.4. Dos puntos x e y de un espacio de convergencia (X, φ) son *distinguibles* si y solo si existe un filtro que converge exactamente a uno de los puntos, es decir, si $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

Proposición 10.1.5. *Sea (X, φ) un espacio de convergencia y $x, y \in X$. Si $\mathcal{N}_x^\varphi \nsubseteq [x, y]$ o $\mathcal{N}_y^\varphi \nsubseteq [x, y]$, entonces x e y son distinguibles.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que x e y no son distinguibles. Entonces $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ si y solo si $\mathcal{F} \in \varphi(y)$. En particular, $[y] \in \varphi(x)$. Si $[x, y] \nsupseteq \mathcal{N}_x^\varphi$, entonces existe $N \in \mathcal{N}_x^\varphi$ no contiene $\{x, y\}$. Pero $N \in [y]$, luego $\{x, y\} \subseteq N$. Igualmente, suponer $[x, y] \nsupseteq \mathcal{N}_x^\varphi$ lleva a una contradicción. Por lo tanto x e y deben ser distinguibles. $\square$

Definición 10.1.6. Se dice que un espacio de convergencia (X, φ) es T_0 si cada par de puntos distintos $x, y \in X$ son distinguibles.

Veamos que (X, φ) es un espacio de convergencia topológico, entonces esta definición coincide con la Definición 10.1.1.

Proposición 10.1.7. *Un espacio de convergencia topológico (X,φ) es T_0 si y solo si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un conjunto $\varphi-$abierto que contiene exactamente a x ó y.*

Demostración. Supongamos que U es $\varphi-$abierto que contiene a x pero no a y. Entonces $U \in \mathcal{N}_x^\varphi - \mathcal{N}_y^\varphi$, luego $\mathcal{N}_x^\varphi \nsubseteq \mathcal{N}_x^\varphi$ y por tanto, $\mathcal{N}_y^\varphi \notin \varphi(x)$. Si U contiene a y pero no a x, se razona de la misma forma, y se tiene así que (X,φ) es T_0.

Recíprocamente, si todo abierto contiene a x si y solo si contiene a y, $\mathcal{N}_x^\varphi = \mathcal{N}_y^\varphi$ y por tanto, $\varphi(x) = \varphi(y)$. □

Ejemplo 10.1.8. El resultado anterior no es cierto en general. Por ejemplo, el espacio de convergencia (no topológico) definido en el Ejemplo 4.0.8 es T_0, pero el único abierto no vacío es el total.

Proposición 10.1.9. *Un espacio pretopológico (X,φ) es T_0 si y solo si $\mathcal{N}_x^\varphi \neq \mathcal{N}_y^\varphi$ para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$.*

Demostración. [*Necesario.*] Por reducción al absurdo. Si (X,φ) no es T_0, entonces existen dos puntos distintos $x, y \in X$ tal que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Como $\mathcal{N}_x^\varphi \in \varphi(x)$, tenemos que $\mathcal{N}_x^\varphi \in \varphi(y)$, luego $\mathcal{N}_x^\varphi \supseteq \mathcal{N}_y^\varphi$. Como $\mathcal{N}_y^\varphi \in \varphi(y)$, tenemos que $\mathcal{N}_y^\varphi \in \varphi(x)$. Luego $\mathcal{N}_x^\varphi \subseteq \mathcal{N}_y^\varphi$. Por tanto $\mathcal{N}_x^\varphi = \mathcal{N}_y^\varphi$.

[*Suficiente.*] Por reducción al absurdo. Por hipótesis, existen $x, y \in X$ distintos tal que $\mathcal{N}_x^\varphi = \mathcal{N}_y^\varphi$. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en (X,φ), entonces $\mathcal{F} \in \varphi(x)$ si y solo si $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}_x^\varphi$. Es decir, si y solo si $\mathcal{F} \in \varphi(y)$. Por tanto x, y son no distinguibles y por ello (X,φ) no es T_0. □

Proposición 10.1.10. *Un espacio pseudotopológico (X,φ) es T_0 si y solo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \in Ult(X)$ que converge exactamente a uno de dichos puntos.*

Demostración. [*Necesario.*] Por hipótesis, x, y son distinguibles. Luego (X,φ) es T_0.

[*Suficiente.*] Sea $x, y \in X$ puntos distintos. Por hipótesis, existe un filtro $\mathcal{F}$ que converge exactamente a uno de x e y. Si $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, pero $\mathcal{F} \notin \varphi(y)$, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ más fino que $\mathcal{F}$ que no converge a y. Como $\mathcal{F} \in \varphi(x)$, se tiene que $\mathcal{U} \in \varphi(x)$. Igualmente, si $\mathcal{F} \in \varphi(y)$, pero $\mathcal{F} \notin \varphi(x)$, entonces existe un ultrafiltro que converge a y pero no a x. □

Definición 10.1.11. Un espacio de convergencia (X,φ) se llama T_1 su dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, $[y] \notin \varphi(x)$ y $x \notin \varphi(y)$.

Proposición 10.1.12. (X,φ) *es T_1 si y solo si $a_\varphi([x]) = \{x\}$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Si (X,φ) es T_1, para todo $x \in X$, $x \in a_\varphi([x])$, pues $[x] \in \varphi(x)$ y es un ultrafiltro. Si $y \neq x$, $y \notin a_\varphi([x])$, pues $[y]$ es un ultrafiltro, pero $[y] \notin \varphi(x)$.

Recíprocamente, dados $x, y \in X$, si $[y] \in \varphi(x)$, entonces $x \in a_\varphi([y])$, y por tanto, $x = y$. □

Como en el caso de los espacios topológicos, se tiene la siguiente caracterización de los espacios de convergencia T_1,

Proposición 10.1.13. *Un espacio de convergencia (X,φ) es T_1 si y solo si $\{x\}$ es $\varphi-$cerrado para todo $x \in X$.*

Demostración. Si (X,φ) es T_1, sea $y \neq x$ tal que $y \in Cl_\varphi(x)$. Entonces, existe $\mathcal{F} \in \varphi(y)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{F}$. Por tanto, $[x] = \mathcal{F}$, lo que contradice que (X,φ) sea T_1.

Recíprocamente, si $\{x\}$ es $\varphi-$cerrado, $Cl_\varphi(x) = a_\varphi([x]) = \{x\}$. □

La definición de espacio de convergencia T_2 se basa en la propiedad que tienen los espacios topológicos de Hausdorff, en los que un filtro no puede tener más de un punto límite.

Definición 10.1.14. Un espacio de convergencia (X,φ) es T_2 o Hausdorff si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene que $\varphi(x) \cap \varphi(y) = \emptyset$.

Es decir, no existe ningún filtro que converja a dos puntos distintos.

Observación 10.1.15. Nótese que si $\mathcal{N}_x^\varphi \cap \mathcal{N}_y^\varphi = \emptyset$, entonces (X,φ) es T_2, pues si existe $\mathcal{F} \in \mathcal{N}_x^\varphi \cap \mathcal{N}_y^\varphi$, entonces $\mathcal{F} \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$. En los espacios pretopológicos se cumple el recíproco, es decir,

Proposición 10.1.16. *Un espacio pretopológico (X,φ) es T_2 si y solo si $\mathcal{N}_x^\varphi \cap \mathcal{N}_y^\varphi = \emptyset$, para todo par de puntos distintos $x, y \in X$.*

Demostración. Por la Observación 10.1.15, basta probar que si $\varphi(x) \cap \varphi(y) = \emptyset$, entonces $\mathcal{N}_x^\varphi \cap \mathcal{N}_y^\varphi = \emptyset$ si $x \neq y$. En caso contrario, es decir, si existe $N \in \mathcal{N}_x^\varphi \cap \mathcal{N}_y^\varphi \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$ por ser (X,φ) pretopológico. □

Corolario 10.1.17. *Un espacio pretopológico (X,φ) es T_2 si y solo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $U \in \mathcal{N}_x^\varphi$ y $V \in \mathcal{N}_y^\varphi$ disjuntos.*

Demostración. Supongamos que existen U y V en las condiciones indicadas. Si (X,φ) no fuese T_2, existiría $\mathcal{F} \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$, luego $\mathcal{N}_x^\varphi \leq \mathcal{F}$ y $\mathcal{N}_y^\varphi \leq \mathcal{F}$, y por tanto, habría de ser $U \cap V = \emptyset$.

Recíprocamente, si (X,φ) es T_2 y $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{N}_x^\varphi$ y todo $V \in \mathcal{N}_y^\varphi$, $\mathcal{F} =< U \cap V\ ;\ U \in \mathcal{N}_x^\varphi$ y $V \in \mathcal{N}_y^\varphi >$ sería un filtro más fino que $\mathcal{N}_x^\varphi$ y $\mathcal{N}_y^\varphi$, y por tanto $\mathcal{F} \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$. □

El siguiente resultado es una extensión de una conocida propiedad de los espacios topológicos compactos.

Proposición 10.1.18. *Un espacio pseudotopológico* (X, φ) *es Hausdorff si y solo si ningún ultrafiltro converge a dos puntos distintos de* X.

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que ningún ultrafiltro converge a dos puntos distintos. Si $\mathcal{F}$ converge a dos puntos distintos $x, y \in X$, entonces todo ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$ converge a ambos x, y, lo que contradice la hipótesis.

($\Longrightarrow$) Se sigue de la Definición 10.1.14. $\square$

Proposición 10.1.19. *Sea* (X, φ) *un espacio de convergencia y* $A \subseteq X$ *un subespacio. Entonces,*

1. *Si* X *es* $\varphi-$*compacto y* A *es* $\varphi-$ *cerrado, entonces* A *es* $\varphi-$*compacto.*

2. *Si* X *es un espacio de Hausdorff y* A *es* $\varphi-$*compacto, entonces* A *es* $\varphi-$*cerrado.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in Fil(A)$ y $\mathcal{F}_x =< \mathcal{F} >$. Es decir, $\mathcal{F}_x =< H \subset X$; existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset H\}$. Veamos que si $\mathcal{F} \in Ult(A)$, entonces $\mathcal{F}_x \in Ult(X)$.

Dado $C \subset X$, si $A \subset X - C$, entonces $X - C \in \mathcal{F}_x$.

Si $A \cap C \neq \emptyset$ y $A \cap C \in \mathcal{F}$, entonces $C \in \mathcal{F}_x$.

Si $A \cap C \neq \emptyset$ y $A - A \cap C \in \mathcal{F}$, entonces $X - C = ((X-C) \cap A) \cup ((X-C) \cap (X-A)) \supset (X-C) \cap A = A - A \cap C \in \mathcal{F}$, luego $X - C \in \mathcal{F}_x$.

Como X es $\varphi-$compacto, $\text{lím}\, \mathcal{F}_x \subset X - A$. Entonces, por ser $X - A$ $\varphi-$abierto, se tiene que $X - A \in \mathcal{F}_x$, en contradicción con que $A \in \mathcal{F}_x$. Así pues, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{F}_x \longrightarrow a$, y por tanto $\mathcal{F} \longrightarrow a$. $\square$

Apéndice A

Anexo

A.1. Categorías

La teoría de categorías trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, a través de objetos y morfismos.

Intuitivamente, una categoría es una colección de conjuntos dotados de estructuras de la misma especie y aplicaciones que preservan estas estructuras, es decir, una colección de objetos y flechas entre dichos objetos dónde se define una composición de flechas. La esencia de una categoría topológica es la existencia de estructuras iniciales y finales que generalizan los conceptos de topologías iniciales y finales.

Se podría decir que el estudio de categorías se inicia con los trabajos de Bourbaki (1930) y con otros más recientes como los de Adámeck, Herrlich y Streker (1990) y Preuss (1988).

Definición A.1.1. Una *categoría* $\mathfrak{C}$ es un par (O, Hom) formado por una colección llamada los objetos de la categoría, O, los cuales pueden ser grupos, conjuntos de espacios topológicos o espacios vectoriales, y Hom, una colección de conjuntos cuyos elementos son las aplicaciones o las flechas de la categoría.

Una categoría $\mathfrak{C}$ es:

1. Una colección de *objetos* $O(\mathfrak{C})$.

2. Para cada par de objetos $A, B \in \mathfrak{C}$ le asociamos una colección de *morfismos* $Hom(A, B)$ de A a B. Un morfismo $f \in Hom(A, B)$ de denota por $f : A \to B$.

3. Dados dos pares de morfismos $f : A \to B$, $f : B \to C$, un morfismo $g \circ f : A \to C$ llamado *morfismo composición* de f y g.

de forma que:

1. Para todo objeto $A \in O(\mathfrak{C})$, existe un morfismo $id_A \in Hom(A, A)$, que llamamos *morfismo identidad*.

2. Para todo morfismo $f : A \to B$:

$$id_A \circ f = f \circ id_A = f.$$

3. Dados $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ morfismos, tenemos que se cumple la propiedad asociativa para la composición $\circ$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ejemplo A.1.2. Algunos ejemplos de objetos de la categoría son:

1. La categoría de conjuntos y aplicaciones.

2. La categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos.

3. La categoría de grupos y homomorfismos de grupos.

4. La categoría espacios topologicos y aplicaciones continuas.

5. La categoría anillos conmutativos con unidad y homomorfismos de anillos.

Nota A.1.3. Las categorías con las que trataremos en el trabajo son:

1. Met, la categoría de espacios métricos y funciones cortas.

2. Top, la categoría de espacios topológicos y funciones continuas.

3. $Conv$, la categoría de espacios convergentes y funciones $\varphi - continua$.

4. $PrTop$, la categoría de espacios pretopológicos, que se desarrollará en el Capítulo 5.

5. $PsTop$, la categoría de espacios pseudotopológicos, que se desarrollará en el Capítulo 5.

Se trata de una generalización para la simplificación del lenguaje y de esta forma así economizar la escritura. Este concepto de categoría es mucho más amplio y engloba mucha más teoría como las subcategorías.

Definición A.1.4. Dadas dos categorías $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_2$, decimos que $\mathfrak{C}_2$ es una *subcategoría* de $\mathfrak{C}_1$ si:

1. Los objetos O_2 de $\mathfrak{C}_2$ son una *subclase* de los objetos O_1 de $\mathfrak{C}_1$.

2. $\forall A, B \in O_2$, $Hom_{\mathfrak{C}_2}(A, B) \subset Hom_{\mathfrak{C}_1}(A, B)$.

3. $\forall A, B, C \in O_2$, $\forall f \in Hom_{\mathfrak{C}_2}(A, B)$ y $\forall g \in Hom_{\mathfrak{C}_2}(B, C)$,

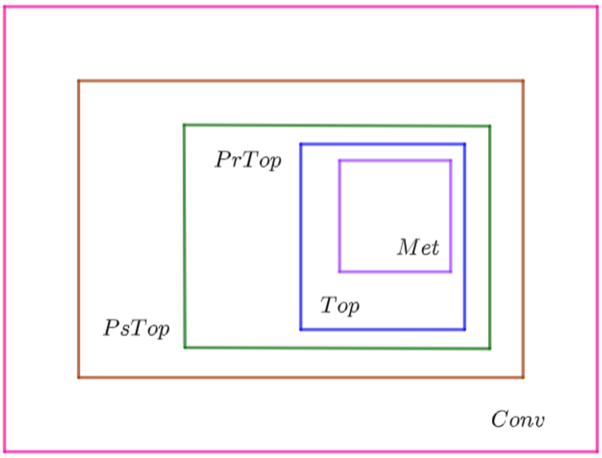
$$f \circ_B g = f \circ_A g.$$

4. $\forall A \in O_2$, $id_A^{\mathfrak{C}_1} = id_A^{\mathfrak{C}_2}$.

Nota A.1.5. Se dice que la subcategoría es *llena* si

$$Hom_{\mathfrak{C}_2}(A, B) = Hom_{\mathfrak{C}_1}(A, B).$$

Observación A.1.6. El siguiente diagrama nos muestra las subcategorías que existen en los espacios que comentábamos antes.



A.2. Funtores

Un funtor es una aplicación entre categorías. De forma que lleva objetos a objetos y morfismos a morfismos donde la composición de morfismos y las identidades se preservan.

Definición A.2.1. Sean $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_2$ dos categorías. Un *funtor* F de una categoría a otra denotado por $F : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$, está definido por,

1. Una función F que asocia a cada objeto A en $\mathfrak{C}_1$, un objeto $F(X)$ en $\mathfrak{C}_2$.
2. Una función, denotada también por F, que asocia cada morfismo $f \in Hom_{\mathfrak{C}_1}(A, B)$ un morfismo $F(f) \in Hom_{\mathfrak{C}_1}(F(A), F(B))$ de forma que,
   a) $F(id_X) = id_{F(X)}$.
   b) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ para todos los morfismos $f \in Hom_{\mathfrak{C}_1}(A, B)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}_1}(A, B)$.

Ejemplo A.2.2. Veamos algunos ejemplos.

1. El funtor *identidad* de cualquier categoría $\mathfrak{C}$ en sí misma.

2. El funtor *olvido*, de la categoría de espacios topológicos en la categoría de conjuntos, la cual asigna a cada espacio topológico X el conjunto base X (sin estructura) y a cada aplicación olvidando la continuidad.

3. El funtor *espacio dual* que asigna a cada espacio vectorial real V su dual V^* y a cada aplicación lineal $\varphi : V \to W$ la aplicación dual $\varphi^* : W^* \to V^*$ definida por $\varphi^*(f(x)) = f(\varphi(x))$.

Es decir, los funtores conservan los *morfismos de identidad* y la *composición* de morfismos.

Bibliografía

[1] Aparicio, C. Y. (2013). *Filtros en Topologıa y algunas aplicaciones (Doctoral dissertation, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México).*

[2] Bartle, R. G. (1955). *Nets and filters in topology. The American Mathematical Monthly, 62(8), 551-557.*

[3] Beattie, R., & Butzmann, H. P. (2013). *Convergence structures and applications to functional analysis. Springer Science & Business Media.*

[4] Bentley, H. L., Herrlich, H., & Lowen-Colebunders, E. (1990). *Convergence. Journal of Pure and Applied Algebra, 68(1-2), 27-45.*

[5] Caillaut, G., & Cleuziou, G. (2018). *Learning pretopological spaces to model complex propagation phenomena: a multiple instance learning approach based on a logical modeling. arXiv preprint arXiv:1805.01278.*

[6] Čech, E., Frolík, Z., & Katětov, M. (1966). *Topological spaces.*

[7] Choquet, G. (1948). *Convergences. Annales de l'université de Grenoble. Nouvelle série. Section sciences mathématiques et physiques, 23, 57-112.*

[8] Dolecki, S. (2002).*Convergence-theoretic characterizations of compactness. Topology and its Applications, 125(3), 393-417.*

[9] Dolecki, S., & Mynard, F. (2016). *Convergence Foundations of Topology. World Scientific Publishing Company.*

[10] Hausdorff, F. (2005). *Set theory (Vol. 119). American Mathematical Soc.*

[11] Heil, C. (2019). *Introduction to Real Analysis (Vol. 280). Springer.*

[12] Hinrichsen, D., & Fernández Zoby, J. L. (1977). *Topología general.*

[13] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. E., & Vega, C. (1972). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.*

[14] Kuratowski, C. (1922). *Sur l'opération A de l'analysis situs. Fundamenta Mathematicae, 3(1), 182-199.*

[15] Ordman, E. T. (1966). *Convergence almost everywhere is not topological. Amer. Math. Monthly, 73(2), 182-183.*

[16] Patten, D. R. (2014). *Problems in the theory of convergence spaces (Doctoral dissertation, Syracuse University).*

[17] Rubiano, G. N. (2000). *Topología general. Univ. Nacional de Colombia.*

[18] Dolecki, S., & Mynard, F. (2016). *Convergence Foundations of Topology. World Scientific Publishing Company.*

[19] Šlapal, J. (2017). *Alexandroff pretopologies for structuring the digital plane. Discrete Applied Mathematics, 216, 323-334.*

[20] Stadler, M. M. (2002). *Topología General. UNAN Managua (Nicaragua).*

[21] Stadler, B. M., & Stadler, P. F. (2004). *The topology of evolutionary biology. In Modelling in molecular biology (pp. 267-286). Springer, Berlin, Heidelberg.*

[22] Stadler, B. M., & Stadler, P. F. (2018). *Reachability, connectivity, and proximity in chemical spaces. MATCH Commun. Math. Comput. Chem, 80, 639-659.*

[23] Stadler, P. F., & Stadler, B. M. (2006). *Genotype-phenotype maps. Biological Theory, 1(3), 268-279.*