



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

CURVAS ALABEADAS CON HODÓGRAFO PITAGÓRICO

Memoria realizada por Manuel Gómez Guisado

Dirigido por:

Dña. M. Carmen Márquez García

Abstract

In this work, we investigate the properties of polynomial space curves $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ whose hodographs, $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, satisfy $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \equiv \sigma^2(t)$ for some real polynomial $\sigma(t)$. We give a characterization for all cubic Pythagorean-hodograph space curve and show that such curves correspond geometrically to a family of non-circular helices.

Pythagorean-hodograph space curves of higher degree exhibit greater shape flexibility. We focus on the curves of degree 5, that admits a constructive representation.

Pythagorean-hodograph space curves have two geometrically attractive attributes: (i) the arc length of any segment can be determined exactly without numerical approximation; and (ii) the canal surfaces based on such curves as spines have precise rational parametrizations.

Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Conceptos previos	9
1.2. Curvas planas con Hodógrafo Pitagórico	11
2. Curvas alabeadas con Hodógrafo Pitagórico	15
3. Geometría intrínseca de curvas alabeadas HP	19
4. Curvas alabeadas HP de grado 3	23
5. Curvas alabeadas HP de mayor orden	41
6. Longitud de arco en curvas HP	49
7. Superficies canales racionales	51
Bibliografía	53

Introducción

Las curvas con Hodógrafo Pitagórico son una clase especial de curvas polinómicas paramétricas, distinguidas por la propiedad de que su parámetro natural es justamente una función polinómica del parámetro t con el que se describe la curva. Computacionalmente, esta propiedad dota a las curvas con Hodógrafo Pitagórico de dos atractivas propiedades que no tienen las curvas polinómicas en general:

- (i) la longitud de arco de cada segmento de curva $t \in [a, b]$ viene dada exactamente por una secuencia finita de operaciones aritméticas en los coeficientes de los polinomios de las ecuaciones paramétricas de la curva y los valores a y b ;
- (ii) la curva *offset* de una curva con Hodógrafo Pitagórico, es decir, la curva paralela a una distancia fija, admite una parametrización racional.

En este trabajo, nos proponemos explicar la naturaleza de las curvas alabeadas con Hodógrafo Pitagórico (a partir de ahora curvas HP). Mientras que para el caso de curvas planas se conocen las ecuaciones y se puede analizar sus grados de libertad (ver [6]), veremos que este estudio no es extensible trivialmente al caso de curvas alabeadas. Además las características del espacio de los Hodógrafos Pitagóricos regulares en \mathbb{R}^3 son más complicadas que en el espacio \mathbb{R}^2 .

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán conceptos que servirán de base para la comprensión de esta memoria. Enunciaremos las propiedades más relevantes de los polinomios de Bernstein y curvas de Bézier. También veremos algunas propiedades de las curvas planas HP que generalizaremos a las curvas alabeadas.

1.1. Conceptos previos

Comenzamos definiendo los conceptos de polinomios de Bernstein y curvas de Bézier.

Definición 1.1.1 (Polinomios de Bernstein) Fijado $n \in \mathbb{N}$ existen $n+1$ *polinomios de Bernstein* de grado n :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

definidos generalmente para $t \in [0, 1]$.

Una de las propiedades destacables de los polinomios de Bernstein es:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1. \tag{1.1.1}$$

Además estos polinomios forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado n con coeficientes reales.

Definición 1.1.2 (Curva de Bézier) Llamamos *curva de Bézier* simple o de un tramo a la curva en forma paramétrica donde cada coordenada es expresada como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1], \tag{1.1.2}$$

con $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. Los coeficientes P_i se denominan *puntos de control* de la curva de Bézier y la poligonal que forman estos puntos se conoce como *polígono de control* de la curva de Bézier.

Estas curvas cumplen algunas propiedades a tener en cuenta, como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control, es invariante por transformaciones afines, puede reparametrizarse mediante una transformación afín del intervalo, es simétrica, es decir, si invertimos el polígono de control, la gráfica de la curva es la misma sólo que recorrida en sentido inverso, interpola los puntos de control extremos siendo $\mathbf{r}(0) = P_0$, $\mathbf{r}(1) = P_n$ y es tangente al polígono de control en sus extremos, de modo que $\mathbf{r}'(0) = n(P_1 - P_0)$, $\mathbf{r}'(1) = n(P_n - P_{n-1})$. Otras propiedades son la relación que mantienen estas formas básicas con sus integrales definidas y sus derivadas:

$$\int_0^t B_k^{n-1}(\xi) d\xi = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n B_j^n(t), \quad (1.1.3)$$

para $k = 0, \dots, n-1$.

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} n \Delta P_k B_k^{n-1}(t), \quad (1.1.4)$$

donde $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$ para $k = 0, \dots, n-1$.

Ejemplo 1.1.3 Curva de Bézier de grado 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3 = \\ & (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3, \end{aligned}$$

$t \in [0, 1]$.

En el Capítulo 4 tendremos ocasión de hacer referencia a cierta clase de curvas alabeadas, las helicoidales. Por ello vamos a detenernos a estudiar alguna de sus propiedades.

Definición 1.1.4 Se dice que una curva regular α , con κ y τ tales que no se anulan en ningún punto, es una hélice, si las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con una dirección fija, que va en la dirección del eje de la hélice.

Proposición 1.1.5 Una curva α es una hélice si y sólo si κ/τ es una constante.

Demostración:

Sea \mathbf{a} el vector unitario de la dirección fija del eje de la hélice y sea θ el ángulo constante que forman las rectas tangentes con la dirección \mathbf{a} . Entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \theta = \text{constante}$. Derivando: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$. Por tanto, $\mathbf{a} = \cos \theta \mathbf{t} + \text{sen} \theta \mathbf{b}$; y derivando se obtiene $\kappa \cos \theta - \tau \text{sen} \theta = 0$, ó $\kappa/\tau = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta} = \text{tag} \theta = \text{constante}$. Recíprocamente, si $\kappa/\tau = \text{constante}$, podemos considerar esta constante como la tangente de un ángulo constante, por tanto $\kappa/\tau = \text{tag} \theta = \text{sen} \theta / \cos \theta$. Entonces $\kappa \cos \theta - \tau \text{sen} \theta = 0$. Luego, en particular, $0 = (\kappa \cos \theta - \tau \text{sen} \theta) \mathbf{n} = \frac{d}{dt}(\cos \theta \mathbf{t} + \text{sen} \theta \mathbf{b})$. Por tanto, la dirección $\mathbf{a} = \cos \theta \mathbf{t} + \text{sen} \theta \mathbf{b} = \text{constante}$ y forma un ángulo constante, θ , con \mathbf{t} . Luego α es una hélice.

□

El caso trivial donde $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ son constantes no nulas, es una hélice circular cuya proyección en cualquier plano perpendicular al eje es justamente una circunferencia.

1.2. Curvas planas con Hodógrafo Pitagórico

El Teorema de Pitágoras relaciona la longitud de la hipotenusa, c , con las longitudes, a y b , de los catetos de un triángulo rectángulo. Esto nos proporciona una ecuación en la que podemos determinar el valor real para c cuando conocemos los valores reales arbitrario de a y b :

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.2.1)$$

Sólo en ciertos casos especiales, esta ecuación es satisfecha para a , b y c valores enteros. Es decir, dados a y b enteros, siempre se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$ también es un número entero, pero ¿es posible encontrar c entero tal que $c^2 = a^2 + b^2$? En estos casos diremos que $\{a, b, c\}$ forman una tripleta pitagórica.

Podemos considerar un problema análogo, en el que a , b y c en (1.2.1) son polinomios reales en una variable dada, t . Veamos una caracterización particular para las tripletas de polinomios pitagóricos:

Teorema 1.2.1 (Kubota) Sean tres polinomios reales $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ verificando $\max[\deg(a), \deg(b)] = \deg(c) > 0$. Estos polinomios satisfacen la condición pitagórica $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$ si y solo si pueden expresarse en términos de polinomios reales $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ de la forma:

$$\begin{aligned} a(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\ b(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \\ c(t) &= w(t)[u^2(t) + v^2(t)]. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Demostración: Kubota en [10] demuestra este teorema en un contexto mucho más general, el de un dominio de factorización único arbitrario D de característica $p \neq 2$. En este trabajo aplicamos este teorema sobre el anillo de los polinomios con coeficientes reales en una variable. \square

Podemos asumir en (1.2.2) que los polinomios u y v son primos entre sí, ya que de lo contrario el $[mcd(u, v)]^2$ podría ser absorbido por w . Del mismo modo, podemos asumir que el polinomio w es mónico, es decir, el coeficiente, k , del monomio de mayor grado es igual a 1 ya que si no lo fuera, podríamos dividir w por k para que fuera mónico y multiplicar u y v por \sqrt{k} (la suposición de que $k > 0$ está justificada en la medida en que los elementos $\{a, b, c\}$ de la tripleta pitagórica se consideran de signo indeterminado).

Definición 1.2.2 Se dice que el hodógrafo $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ de una curva polinómica, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, es pitagórico si sus componentes son miembros de una tripleta de polinomios pitagóricos $\{x'(t), y'(t), \sigma(t)\}$.

Por el teorema de Kubota tenemos que existen unos polinomios $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ tales que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\ y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

donde identificamos $x'(t)$ con $a(t)$ e $y'(t)$ con $b(t)$, pues en caso contrario correspondería simplemente a una rotación de los ejes de coordenadas. Por tanto, cuando hablamos de una curva con hodógrafo pitagórico nos referimos a cualquier curva polinomial cuya derivada es de la forma (1.2.3).

Al ser curvas polinómicas, los dos polinomios que definen sus coordenadas, $x(t)$ e $y(t)$, pueden expresarse respecto a la base de Bernstein. De este modo, estas curvas pueden ser expresadas como curvas de Bézier. El siguiente resultado describe de forma geométrica las curvas planas HP de grado 3.

Teorema 1.2.3 Sea $\mathbf{r}(t)$ una curva plana de grado 3 definida por los puntos de control P_k . Sean L_1, L_2, L_3 las longitudes de los lados del polígono de control y θ_1, θ_2 los ángulos interiores en los vértices P_1 y P_2 . Las condiciones

$$L_2 = \sqrt{L_1 L_3} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \theta_1 \tag{1.2.4}$$

son necesarias y suficientes para asegurar que $\mathbf{r}(t)$ tenga hodógrafo pitagórico.

Demostración: Ver [6]

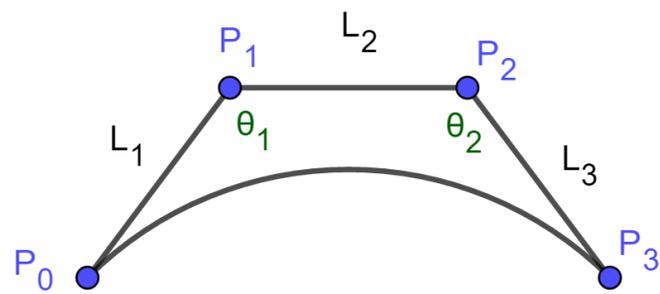


Figura 1.1: Curva cúbica plana con hodógrafo Pitagórico y su correspondiente polígono de control.

Capítulo 2

Curvas alabeadas con Hodógrafo Pitagórico

En este capítulo daremos la definición de Hodógrafo Pitagórico de una curva y veremos una condición suficiente para que una curva polinómica tenga Hodógrafo Pitagórico. También estudiaremos la expresión del parámetro natural de la curva y veremos que es fácilmente computable.

El *hodógrafo* de una curva alabeada $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es simplemente la curva que tiene por ecuaciones paramétricas $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. En este trabajo nos ocuparemos de curvas polinomiales en \mathbb{R}^3 , tales que las componentes de la curva hodógrafo $x'(t), y'(t), z'(t)$, satisfacen la relación Pitagórica

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \equiv \sigma^2(t)$$

para algún polinomio real $\sigma(t)$. Como se puede apreciar, si $x(t), y(t), z(t)$ son polinomios, entonces $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)$ es un polinomio. Cuando este polinomio es el cuadrado de otro, es cuando decimos que la curva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tiene hodógrafo Pitagórico.

Por analogía con el caso de curvas planas (1.2.2), tenemos que, si existen ciertos polinomios $h(t), u(t), v(t), w(t)$ tales que:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2h(t)u(t)v(t), \\y'(t) &= 2h(t)u(t)w(t), \\z'(t) &= h(t)[u^2(t) - v^2(t) - w^2(t)],\end{aligned}\tag{2.0.1}$$

entonces la curva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tiene hodógrafo Pitagórico con $\sigma(t) = h(t)[u^2(t) +$

$v^2(t) + w^2(t)$]. En efecto, sean $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ de la forma (2.0.1), entonces:

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) &= 4h^2(t)u^2(t)v^2(t) + 4h^2(t)u^2(t)w^2(t) + h(t)^2[u^2(t) - v^2(t) \\ &\quad - w^2(t)]^2 = h^2(t) [4u^2(t)v^2(t) + 4u^2(t)w^2(t) + (u^2(t) - v^2(t) - w^2(t))^2] = \\ &= h^2(t)[4u^2(t)v^2(t) + 4u^2(t)w^2(t) + u^4(t) + v^4(t) + w^4(t) - 2u^2(t)v^2(t) - 2u^2(t)w^2(t) \\ &\quad + 2v^2(t)w^2(t)] = h^2(t)[u^4(t) + v^4(t) + w^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + 2u^2(t)w^2(t) + 2v^2(t)w^2(t)] = \\ &= h(t)^2[u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)]^2. \end{aligned}$$

Si una curva tiene un hodógrafo de la forma (2.0.1), entonces el *parámetro natural*

$$s = \int_0^t \|\mathbf{r}'(\gamma)\| d\gamma = \int_0^t \sqrt{x'^2(\gamma) + y'^2(\gamma) + z'^2(\gamma)} d\gamma = \int_0^t \sqrt{\sigma^2(\gamma)} d\gamma = \int_0^t |\sigma(\gamma)| d\gamma$$

es claramente la integral del valor absoluto del polinomio $\sigma(t)$, que tiene una computación trivial.

Observación 2.0.1 Para descartar casos “degenerados”, asumimos a partir de ahora que las siguientes condiciones se satisfacen en las ecuaciones (2.0.1):

(a) $h(t), u(t), v(t), w(t)$ son todos distintos de cero. Veamos con qué curvas nos encontramos en cada uno de los siguientes casos particulares:

(a₁) Si $h(t) = 0$ entonces $x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0$. Por tanto, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0)$, y lo que tenemos es una curva degenerada en un punto, (x_0, y_0, z_0) .

(a₂) Si $u(t) = 0$, entonces $x'(t) = y'(t) = 0$ y $z'(t) = -h(t)[v^2(t) + w^2(t)]$. Luego $\mathbf{r}(t) = (x_0, y_0, z(t))$, donde $z(t)$ es el polinomio resultante de integrar $z'(t)$. De este modo, lo que tendríamos sería una recta paralela al eje Z.

(a₃) Si $v(t) = 0$, entonces $x'(t) = 0$, $y'(t) = 2h(t)u(t)w(t)$ y $z'(t) = h(t)[u^2(t) - w^2(t)]$. Por tanto, $\mathbf{r}(t) = (x_0, y(t), z(t))$, donde $y(t)$ y $z(t)$ son los resultados de integrar $y'(t)$ y $z'(t)$ respectivamente. En este caso, tendríamos una curva en el plano de ecuación $X = x_0$.

(a₄) El caso $w(t) = 0$ es totalmente análogo al anterior, pero en este caso la curva está incluida en el plano de ecuación $Y = y_0$.

- (b) $u(t), v(t), w(t)$ no son todos constantes. Supongamos que $u(t), v(t), w(t)$ son todos constantes que denotamos por u_0, v_0, w_0 , respectivamente, entonces las expresiones de (2.0.1) quedarían de la forma:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_0 h(t) & x_0 &= 2u_0 v_0 \\ y'(t) &= y_0 h(t) & \text{donde } y_0 &= 2u_0 w_0 \\ z'(t) &= z_0 h(t) & z_0 &= u_0^2 - v_0^2 - w_0^2. \end{aligned}$$

Integrando las expresiones anteriores,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \int h(t) dt + x_1 \\ y(t) &= y_0 \int h(t) dt + y_1 \\ z(t) &= z_0 \int h(t) dt + z_1 \end{aligned}$$

donde x_1, y_1, z_1 son constantes de integración. Si ahora definimos el polinomio $g(t) := \int h(t) dt$, tenemos entonces $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0)g(t) + (x_1, y_1, z_1)$. Y tenemos claramente que $\mathbf{r}(t)$ es una recta.

- (c) $mcd(u(t), v(t), w(t))$ es una constante. Supongamos que no es constante. Sea entonces $f(t) := mcd(u(t), v(t), w(t))$ y podemos escribir:

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) \tilde{u}(t) \\ v(t) &= f(t) \tilde{v}(t) \\ w(t) &= f(t) \tilde{w}(t). \end{aligned}$$

Entonces, $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = h(t)[u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)] = h(t)f^2(t)[\tilde{u}^2(t) + \tilde{v}^2(t) + \tilde{w}^2(t)]$. Las raíces del polinomio $f(t)$ anulan el módulo de \mathbf{r}' , por tanto, obtenemos singularidades de la curva \mathbf{r} . Luego la curva no sería regular.

Además de asumir las condiciones de esta observación, podemos elegir $h(t)=1$, de lo contrario la correspondiente curva HP no tendría una parametrización *regular*. El parámetro natural de la curva definida por (2.0.1) se simplifica en la integral de $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)$.

Nota 2.0.2 Hay que tener en cuenta las siguientes observaciones en las curvas HP en \mathbb{R}^3 definidas por la forma (2.0.1) con polinomios h, u, v, w :

- (a) esta forma no es una propiedad “intrínseca” de los hodógrafos polinomiales en \mathbb{R}^3 , ya que no es invariante por giros;
- (b) elegir $h(t)=1$ no garantiza que $mcd(x', y', z')=1$, en particular, si $mcd(u, v^2+w^2) \neq$ constante, la correspondiente curva HP no estaría parametrizada regularmente.

Nota 2.0.3 Aunque tengamos una curva verificando la expresión de la forma (2.0.1), tenemos sólo una condición suficiente para que la curva en \mathbb{R}^3 sea HP. A diferencia del caso \mathbb{R}^2 , donde si tenemos la forma de $x'(t) = 2h(t)u(t)v(t)$, $y'(t) = h(t)[u^2(t) - v^2(t)]$ para los polinomios h, u, v , tenemos una condición suficiente y necesaria para una curva con hodógrafo Pitagórico en el plano.

Capítulo 3

Geometría intrínseca de curvas alabeadas HP

En este capítulo veremos que expresión tiene el triedro de Frenet para las curvas alabeadas con HP definidas por (2.0.1) con $h(t) = 1$. Para analizar las propiedades de las curvas alabeadas HP, necesitamos revisar brevemente algunos conceptos de Geometría Diferencial de Curvas en \mathbb{R}^3 .

En cada punto de una curva alabeada regular $\mathbf{r}(t)$, el triedro de Frenet es una base de vectores ortonormales orientados positivamente, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, definidos en términos de las derivadas de $\mathbf{r}(t)$ por:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| \|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}. \quad (3.0.1)$$

Estos vectores son el *tangente*, *normal* y *binormal* respectivamente de $\mathbf{r}(t)$, y los planos generados por (\mathbf{t}, \mathbf{n}) , (\mathbf{n}, \mathbf{b}) , y (\mathbf{b}, \mathbf{t}) son los planos *osculador*, *normal*, y *rectificante*, respectivamente, de la curva en cada punto de la misma.

La variación del triedro $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ a lo largo de $\mathbf{r}(t)$ viene dada por las ecuaciones:

$$\mathbf{t}' = f\kappa\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -f\kappa\mathbf{t} + f\tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -f\tau\mathbf{n}, \quad (3.0.2)$$

donde $f(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ denota la variación del parámetro natural, mientras que las funciones $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ son la *curvatura* y la *torsión* de $\mathbf{r}(t)$, dadas por:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}. \quad (3.0.3)$$

Las funciones κ y τ representan la velocidad instantánea de rotación (con respecto a la longitud de arco s) de los vectores tangente y binormal, \mathbf{t} y \mathbf{b} , respectivamente, a lo

largo de la curva. La variación del vector normal \mathbf{n} se llama curvatura “total”, la cual denotaremos por $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$. Nótese que, para una curva regular, la curvatura κ se anula si y solo si $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$, y en estos puntos la normal \mathbf{n} y binormal \mathbf{b} no están definidas.

Consideremos ahora la curva alabeada HP definida por el hodógrafo (2.0.1) con $h(t)=1$. La tangente y curvatura de esta curva tienen, en particular, expresiones simples en términos de los polinomios u, v, w y sus derivadas, concretamente:

$$\mathbf{t} = \frac{(2uv, 2uw, u^2 - v^2 - w^2)}{\sigma} \quad \text{y} \quad \kappa = 2 \frac{\sqrt{(uv' - u'v)^2 + (uw' - u'w)^2}}{\sigma^2},$$

donde $\sigma = u^2 + v^2 + w^2$. En efecto, para $h(t) = 1$, tenemos que $\mathbf{r}'(t) = (2uv, 2uw, u^2 - v^2 - w^2)$ y $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = u^2 + v^2 + w^2$, y por tanto,

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(2uv, 2uw, u^2 - v^2 - w^2)}{\sigma}.$$

Calculamos ahora $\mathbf{r}''(t) = (2u'v + 2uv', 2u'w + 2uw', 2uu' - 2vv' - 2ww') = 2(u'v + wv', u'w + uw', uu' - vv' - ww')$. Por tanto,

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2uv & 2uw & u^2 - v^2 - w^2 \\ u'v + uv' & u'w + uw' & uu' - vv' - ww' \end{vmatrix} = 2(2uw(uu' - vv' - ww') - (u^2 - v^2 - w^2)(u'w + uw'), 2uv(uu' - vv' - ww') - (u^2 - v^2 - w^2)(u'v + uv'), 2uv(u'w + uw') - 2uw(u'v + uv')).$$

Calculando su módulo y elevándolo al cuadrado tenemos que:

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = 4[(2uw(uu' - vv' - ww') - (u^2 - v^2 - w^2)(u'w + uw'))^2 + (2uv(uu' - vv' - ww') - (u^2 - v^2 - w^2)(u'v + uv'))^2 + (2uv(u'w + uw') - 2uw(u'v + uv'))^2].$$

Operando y simplificando debidamente llegamos a la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = 4(u^2 + v^2 + w^2)^2[(uv' - vu')^2 + (uw' - wu')^2]. \quad (3.0.4)$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{\sqrt{4(u^2 + v^2 + w^2)^2[(uv' - vu')^2 + (uw' - wu')^2]}}{\sigma^3} = \\ &= \frac{2\sigma \sqrt{(uv' - vu')^2 + (uw' - wu')^2}}{\sigma^3} = 2 \frac{\sqrt{(uv' - vu')^2 + (uw' - wu')^2}}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Como queríamos comprobar.

Las expresiones correspondiente para \mathbf{n} , \mathbf{b} y τ son mucho más engorrosas, y nos abstenemos de escribir su forma expandida aquí. Se obtienen de forma inmediata sustituyendo $\mathbf{r}' = (2uv, 2uw, u^2 - v^2 - w^2)$ y sus derivadas en las expresiones (3.0.1) y (3.0.3). Algunas relaciones útiles a tener en mente son:

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = \sigma\sigma' \text{ y } \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = 2\sigma\sqrt{(uv' - u'v)^2 + (uw' - u'w)^2}, \quad (3.0.5)$$

donde $\sigma' = 2(uu' + vv' + ww')$. La segunda igualdad se ve simplemente tomando la raíz cuadrada a la expresión (3.0.4). Veamos la primera:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' &= (2uv, 2uw, u^2 - v^2 - w^2) \cdot 2(u'v + uv', u'w + uw', uu' - vv' - ww') = 2[2uv^2u' + \\ &2u^2v' + 2uw^2u' + 2u^2ww' + u^3u' - u^2vv' - u^2ww' - v^2uu' + v^3v' + v^2ww' - uw^2u' + vw^2v' + \\ &w^3w'] = 2[u^2(uu' + vv' + ww') + v^2(uu' + vv' + ww') + w^2(uu' + vv' + ww')] = 2(u^2 + \\ &v^2 + w^2)(uu' + vv' + ww') = \sigma\sigma'. \end{aligned}$$

Usando la expresión anterior y la propiedad del producto vectorial $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' = (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'' - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')\mathbf{r}'$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\sigma\mathbf{r}'' - \sigma'\mathbf{r}'}{2\sigma\sqrt{(uv' - u'v)^2 + (uw' - u'w)^2}}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{2\sigma\sqrt{(uv' - u'v)^2 + (uw' - u'w)^2}}, \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

para los vectores generadores del plano normal de la curva.

Nótese que, a diferencia de la tangente \mathbf{t} , la normal \mathbf{n} y binormal \mathbf{b} no dependen racionalmente del parámetro t , pues no podemos asegurar que el denominador, $2\sigma\sqrt{(uv' - u'v)^2 + (uw' - u'w)^2}$, sea un polinomio. Sin embargo, es posible construir un par de vectores ortonormales que generan el plano normal de la curva que dependa racionalmente de t . Por otro lado, κ tampoco es una función racional de t para una curva espacial HP, debido a que $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ dada por las ecuaciones (3.0.5) no es, en general, un polinomio.

Capítulo 4

Curvas alabeadas HP de grado 3

En este capítulo veremos que las curvas alabeadas HP más simples se pueden expresar directamente en términos del polinomio de control de Bézier sin tener la forma de (2.0.1).

Definición 4.0.1 (Curvas cúbicas) Se dice que una curva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una cúbica o cúbica de Bézier si $\max\{gr(x(t)), gr(y(t)), gr(z(t))\} = 3$ y sus ecuaciones paramétricas se obtienen sustituyendo $h(t) = 1$ y los polinomios $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ en su forma de Bernstein en la expresión del hodógrafo (2.0.1), y luego integrando.

Proposición 4.0.2 Sea $\mathbf{r}(t)$ una cúbica de Bézier obtenida de la forma que describe la Definición 4.0.1. Entonces $\mathbf{r}(t)$ tiene un hodógrafo Pitagórico de la forma (2.0.1) si y sólo si sus puntos de control pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{1}{3}(2u_0v_0, 2u_0w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2), \\ P_2 &= P_1 + \frac{1}{3}(u_0v_1 + u_1v_0, u_0w_1 + u_1w_0, u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1), \\ P_3 &= P_2 + \frac{1}{3}(2u_1v_1, 2u_1w_1, u_1^2 - v_1^2 - w_1^2), \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

para $u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1$ constantes (siendo arbitraria la constante de integración P_0).

Demostración: Como \mathbf{r} es una curva HP de grado 3, al menos uno de los polinomios $x'(t)$, $y'(t)$ o $z'(t)$ tiene que ser de grado exactamente 2. Por tanto, al menos uno de los polinomios $u(t)$, $v(t)$ o $w(t)$ es de grado exactamente 1. Luego podemos expresar cada uno de ellos en la base de Bernstein de grado 1:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(1-t) + u_1t, \\ v(t) &= v_0(1-t) + v_1t, \\ w(t) &= w_0(1-t) + w_1t, \end{aligned} \quad \text{con } u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.0.1) y $h(t) = 1$, nos quedan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 2[u_0(1-t) + u_1t][v_0(1-t) + v_1t] = \\
&\quad 2u_0v_0(1-t)^2 + 2[u_0v_1 + u_1v_0](1-t)t + 2u_1v_1t^2, \\
y'(t) &= 2[u_0(1-t) + u_1t][w_0(1-t) + w_1t] = \\
&\quad 2u_0w_0(1-t)^2 + 2[u_0w_1 + u_1w_0](1-t)t + 2u_1w_1t^2, \\
z'(t) &= [u_0(1-t) + u_1t]^2 - [v_0(1-t) + v_1t]^2 - [w_0(1-t) + w_1t]^2 = \\
&\quad (u_0^2 - v_0^2 - w_0^2)(1-t)^2 + (2u_0u_1 - 2v_0v_1 - 2w_0w_1)(1-t)t + (u_1^2 - v_1^2 - w_1^2)t^2.
\end{aligned}$$

Integrando estas expresiones y utilizando (1.1.3), tenemos que:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2u_0v_0 \int B_0^2(t)dt + (u_0v_1 + u_1v_0) \int B_1^2(t)dt + 2u_1v_1 \int B_2^2(t)dt = \\
&\quad \frac{2u_0v_0}{3} \sum_{j=1}^3 B_j^3(t) + C_0 + \frac{(u_0v_1 + u_1v_0)}{3} \sum_{j=2}^3 B_j^3(t) + C_1 + \frac{2u_1v_1}{3} B_3^3(t) + C_2.
\end{aligned}$$

Redefiniendo $C = C_0 + C_1 + C_2$ y utilizando la expresión (1.1.1) podemos escribir $C = C \cdot B_0^3(t) + C \cdot B_1^3(t) + C \cdot B_2^3(t) + C \cdot B_3^3(t)$, llegando a la expresión:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2u_0v_0}{3} \sum_{j=1}^3 B_j^3(t) + \frac{(u_0v_1 + u_1v_0)}{3} \sum_{j=2}^3 B_j^3(t) + \frac{2u_1v_1}{3} B_3^3(t) + C \sum_{j=0}^3 B_j^3(t) = \\
&\quad B_0^3(t)C + B_1^3(t)\left(\frac{2u_0v_0}{3} + C\right) + B_2^3(t)\left(\frac{2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0}{3} + C\right) + \\
&\quad B_3^3(t)\left(\frac{2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_1v_1}{3} + C\right).
\end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene una expresión similar para $y(t)$, cambiando v_0 por w_0 y v_1 por w_1 , y C por otra constante de integración, denotada por D . Entonces nos quedaría la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
y(t) &= B_0^3(t)D + B_1^3(t)\left(\frac{2u_0w_0}{3} + D\right) + B_2^3(t)\left(\frac{2u_0w_0 + u_0w_1 + u_1w_0}{3} + D\right) + \\
&\quad B_3^3(t)\left(\frac{2u_0w_0 + u_0w_1 + u_1w_0 + 2u_1w_1}{3} + D\right).
\end{aligned}$$

Veamos ahora qué expresión tendrá $z(t)$:

$$\begin{aligned}
z(t) &= (u_0^2 - v_0^2 - w_0^2) \int B_0^2(t) dt + (u_0 u_1 - v_0 v_1 - w_0 w_1) \int B_1^2(t) dt + \\
& (u_1^2 - v_1^2 - w_1^2) \int B_2^2(t) dt = \\
& \frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{3} \sum_{j=1}^3 B_j^3(t) + E_0 + \frac{(u_0 u_1 - v_0 v_1 - w_0 w_1)}{3} \sum_{j=2}^3 B_j^3(t) + E_1 + \\
& \frac{u_1^2 - v_1^2 - w_1^2}{3} B_3^3(t) + E_2 = \\
& B_0^3(t) E + B_1^3(t) \left(\frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{3} + E \right) + \\
& B_2^3(t) \left(\frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2 + u_0 u_1 - v_0 v_1 - w_0 w_1}{3} + E \right) + \\
& B_3^3(t) \left(\frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2 + u_0 u_1 - v_0 v_1 - w_0 w_1 + u_1^2 - v_1^2 - w_1^2}{3} + E \right),
\end{aligned}$$

donde $E = E_0 + E_1 + E_2$. Teniendo en cuenta la expresión del Ejemplo 1.1.3, vemos que si $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3$, donde

$$P_0 = (C, D, E),$$

$$P_1 - P_0 = \frac{1}{3}(2u_0 v_0, 2u_0 w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2),$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{3}(u_0 v_1 + u_1 v_0, u_0 w_1 + u_1 w_0, u_0 u_1 - v_0 v_1 - w_0 w_1), \quad (4.0.2)$$

$$P_3 - P_2 = \frac{1}{3}(2u_1 v_1, 2u_1 w_1, u_1^2 - v_1^2 - w_1^2).$$

□

Sin embargo, como vimos en el Capítulo 3, no todas las curvas HP cúbicas alabeadas se pueden expresar de esta forma.

Como la relación entre los coeficientes elegidos para los polinomios $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ y la geometría de la cúbica resultante es difícil de visualizar, sería conveniente tener una caracterización de las curvas con hodógrafos Pitagóricos propios de las cúbicas alabeadas en términos de la geometría de sus polígonos de control de Bézier. Afortunadamente, podemos obtener una caracterización para todas las cúbicas alabeadas HP, no sólo para las de la forma (4.0.1), y esta caracterización incorpora el caso de cúbicas planas HP visto en [6] como un caso particular.

Para tal propósito será conveniente describir el polígono de control de Bézier en términos de sus lados $\mathbf{L}_k = P_k - P_{k-1}$ para $k = 1, 2, 3$. Veamos ahora algunas restricciones que identifiquen todas las cúbicas HP en \mathbb{R}^3 :

Proposición 4.0.3 *Sea $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ los lados del polígono de control de una cúbica alabeada. Entonces la cúbica tiene un hodógrafo Pitagórico si y sólo si \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 están en un cono circular que tiene \mathbf{L}_2 como eje, siendo ϑ el ángulo que forman las generatrices con el eje, y su separación acimutal φ , ángulo que forma \mathbf{L}_1 con \mathbf{L}_3 , en este cono viene dado en términos de las longitudes L_1, L_2, L_3 de los lados por*

$$\cos \varphi = 1 - \frac{2L_2^2}{L_1L_3}. \quad (4.0.3)$$

Demostración: Supongamos que el polígono de control tiene la geometría especificada en el enunciado. Podemos elegir \mathbf{L}_2 en la dirección del eje Z, y \mathbf{L}_1 en el plano XZ. Si denotamos por ϑ el ángulo que forma \mathbf{L}_1 con \mathbf{L}_2 , tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= L_1(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta), \\ \mathbf{L}_2 &= L_2(0, 0, 1), \\ \mathbf{L}_3 &= L_3(\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta), \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

con φ definido en el enunciado. Ahora el hodógrafo de una cúbica $\mathbf{r}(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$ en término de los lados $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ del polígono de control y utilizando (1.1.4), será

$$\mathbf{r}'(t) = 3[\mathbf{L}_1(1-t)^2 + \mathbf{L}_22(1-t)t + \mathbf{L}_3t^2]. \quad (4.0.5)$$

Sustituyendo en la expresión anterior las ecuaciones de (4.0.4), obtenemos las expresiones de las componentes:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3L_1\sin\vartheta(1-t)^2 + 3L_3\sin\vartheta \cos\varphi t^2, \\ y'(t) &= 3L_3\sin\vartheta \sin\varphi t^2, \\ z'(t) &= 3L_1 \cos\vartheta(1-t)^2 + 3L_22(1-t)t + 3L_3 \cos\vartheta t^2. \end{aligned}$$

Expresamos el polinomio $f(t) = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)$ en la forma de Bernstein, es decir, $f(t) = \sum_{j=0}^4 c_j B_j^4(t)$. Así, partiendo de las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 &= 9L_1^2 \text{sen}^2 \vartheta (1-t)^4 + 9L_3^2 \text{sen}^2 \vartheta \cos^2 \varphi t^4 + \\
&\quad 18L_1 L_3 \text{sen}^2 \vartheta \cos \varphi t^2 (1-t)^2 + 9L_3^2 \text{sen}^2 \vartheta \text{sen}^2 \varphi t^4 + \\
&\quad 9L_1^2 \cos^2 \vartheta (1-t)^4 + 36L_2^2 t^2 (1-t)^2 + 36L_1 L_2 \cos \vartheta t (1-t)^3 + \\
&\quad 9L_3^2 \cos^2 \vartheta t^4 + 18L_1 L_3 \cos^2 \vartheta t^2 (1-t)^2 + 36L_2 L_3 \cos \vartheta t^3 (1-t) = \\
&= (1-t)^4 [9L_1^2] + 4t(1-t)^3 [9L_1 L_2 \cos \vartheta] + \\
&\quad 6t^2(1-t)^2 [3L_1 L_3 (\text{sen}^2 \vartheta \cos \varphi + \cos^2 \vartheta) + 6L_2^2] + \\
&\quad 4t^3(1-t) [9L_2 L_3 \cos \vartheta] + t^4 [9L_3^2].
\end{aligned}$$

Por tanto, vemos que sus coeficientes vienen dados por:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 9L_1^2, & c_1 &= 9L_1 L_2 \cos \vartheta, \\
c_2 &= 3L_1 L_3 (\text{sen}^2 \vartheta \cos \varphi + \cos^2 \vartheta) + 6L_2^2, & & \\
c_3 &= 9L_2 L_3 \cos \vartheta, & c_4 &= 9L_3^2.
\end{aligned} \tag{4.0.6}$$

Consideramos ahora el polinomio cuadrático $\sigma(t) = \sigma_0(1-t)^2 + \sigma_1 2(1-t)t + \sigma_2 t^2$ con coeficientes de Bernstein $\sigma_0 = 3L_1$, $\sigma_1 = 3L_2 \cos \vartheta$, $\sigma_2 = 3L_3$. Se verifica fácilmente que el polinomio $f(t)$ coincide con el cuadrado de $\sigma(t)$ siempre y cuando $c_2 = (2\sigma_1^2 + \sigma_0 \sigma_2)/3$, es decir, que se satisfaga la condición

$$3L_1 L_3 (\text{sen}^2 \vartheta \cos \varphi + \cos^2 \vartheta) + 6L_2^2 = 6L_2^2 \cos^2 \vartheta + 3L_1 L_3. \tag{4.0.7}$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= 3L_1(1-t)^2 + 6L_2 \cos \vartheta t(1-t) + 3L_3 t^2 \\
\sigma^2(t) &= [3L_1(1-t)^2 + 6L_2 \cos \vartheta t(1-t) + 3L_3 t^2]^2 = 9L_1^2(1-t)^4 + 36L_2^2 \cos^2 \vartheta t^2(1-t)^2 + \\
&\quad 9L_3^2 t^4 + 36L_1 L_2 \cos \vartheta t(1-t)^3 + 36L_2 L_3 \cos \vartheta t^3(1-t) + 18L_1 L_3 t^2(1-t)^2 = \\
&\quad 9L_1^2(1-t)^4 + 9L_1 L_2 \cos \vartheta 4t(1-t)^3 + [6L_2^2 \cos^2 \vartheta + 3L_1 L_3] 6t^2(1-t)^2 + \\
&\quad 9L_2 L_3 \cos \vartheta 4t^3(1-t) + 9L_3^2 t^4.
\end{aligned}$$

Entonces para que el hodógrafo sea Pitagórico, debe cumplirse que $f(t) = \sigma^2(t)$,

$$3L_1 L_3 (\text{sen}^2 \vartheta \cos \varphi + \cos^2 \vartheta) + 6L_2^2 = 6L_2^2 \cos^2 \vartheta + 3L_1 L_3,$$

pues los demás coeficientes de la base de Bernstein sí son iguales.

Sustituyendo en la igualdad anterior $\cos \varphi = 1 - \frac{2L_2^2}{L_1 L_3}$, vemos que efectivamente se cumple la igualdad. Por tanto, el hecho de satisfacer las restricciones geométricas de la proposición implica que el hodógrafo es Pitagórico.

Veamos la otra implicación. Supongamos que tenemos los lados \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{L}_3 del polígono de control de una curva HP. Si θ_{12} , θ_{23} (donde $0 \leq \theta_{jk} \leq \pi$) denota los ángulos entre estos vectores, podemos elegir un sistema de coordenadas en el que \mathbf{L}_2 esté en la dirección de Z y \mathbf{L}_1 paralelo al plano XZ. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1 &= L_1(\text{sen}\theta_{12}, 0, \text{cos}\theta_{12}), \\ \mathbf{L}_2 &= L_2(0, 0, 1), \\ \mathbf{L}_3 &= L_3(\text{sen}\theta_{23} \cos \varphi, \text{sen}\theta_{23}\text{sen}\varphi, \text{cos}\theta_{23}),\end{aligned}\tag{4.0.8}$$

donde φ representa el ángulo acimutal de \mathbf{L}_3 sobre el eje Z. Consideramos ahora, igual que en (4.0.5), las ecuaciones de $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ y obtenemos que:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3L_1\text{sen}\theta_{12}(1-t)^2 + 3L_3\text{sen}\theta_{23} \cos \varphi t^2, \\ y'(t) &= 3L_3\text{sen}\theta_{23}\text{sen}\varphi t^2, \\ z'(t) &= 3L_1 \cos \theta_{12}(1-t)^2 + 3L_2 2(1-t)t + 3L_3 \cos \theta_{23} t^2.\end{aligned}$$

Entonces, ahora $f(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2$ tendrá una expresión distinta, que será:

$$\begin{aligned}f(t) &= 9L_1^2\text{sen}^2\theta_{12}(1-t)^4 + 9L_3^2\text{sen}^2\theta_{23} \cos^2 \varphi t^4 + \\ &18L_1L_3\text{sen}\theta_{12}\text{sen}\theta_{23} \cos \varphi t^2(1-t)^2 + 9L_3^2\text{sen}^2\theta_{23}\text{sen}^2\varphi t^4 + \\ &9L_1^2 \cos^2 \theta_{12}(1-t)^4 + 36L_2^2 t^2(1-t)^2 + 36L_1L_2 \cos \theta_{12} t(1-t)^3 + \\ &9L_3^2 \cos^2 \theta_{23} t^4 + 18L_1L_3 \cos \theta_{12} \cos \theta_{23} t^2(1-t)^2 + 36L_2L_3 \cos \theta_{23} t^3(1-t) = \\ &[9L_1^2\text{sen}^2\theta_{12} + 9L_1^2 \cos^2 \theta_{12}](1-t)^4 + [9L_1L_2 \cos \theta_{12}]4t(1-t)^3 + \\ &[3L_1L_3\text{sen}\theta_{12}\text{sen}\theta_{23} \cos \varphi + 6L_2^2 + 3L_1L_3 \cos \theta_{12} \cos \theta_{23}]6t^2(1-t)^2 + \\ &[9L_2L_3 \cos \theta_{23}]4t^3(1-t) + \\ &[9L_3^2\text{sen}^2\theta_{23} \cos^2 \varphi + 9L_3^2\text{sen}^2\theta_{23}\text{sen}^2\varphi + 9L_3^2 \cos^2 \theta_{23}]t^4 = \\ &9L_1^2(1-t)^4 + (9L_1L_2 \cos \theta_{12})4t(1-t)^3 + (3L_1L_3\text{sen}\theta_{12}\text{sen}\theta_{23} \cos \varphi + 6L_2^2 + \\ &3L_1L_3 \cos \theta_{12} \cos \theta_{23})6t^2(1-t)^2 + (9L_2L_3 \cos \theta_{23})4t^3(1-t) + 9L_3^2 t^4,\end{aligned}$$

y debe coincidir con el cuadrado de un polinomio cuadrático, $\sigma(t) = \sigma_0(1-t)^2 + \sigma_1 2t(1-t) + \sigma_2 t^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sigma^2(t) &= \sigma_0^2(1-t)^4 + 4\sigma_1^2 t^2(1-t)^2 + \sigma_2^2 t^4 + 4\sigma_0\sigma_1 t(1-t)^3 + 4\sigma_1\sigma_2 t^3(1-t) + \\ &2\sigma_0\sigma_2 t^2(1-t)^2 = \\ &\sigma_0^2(1-t)^4 + 4\sigma_0\sigma_1 t(1-t)^3 + 2(2\sigma_1^2 + \sigma_0\sigma_2) t^2(1-t)^2 + 4\sigma_1\sigma_2 t^3(1-t) + \sigma_2^2 t^4.\end{aligned}$$

E igualando los coeficientes de $f(t)$ y $\sigma^2(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= 9L_1^2, \quad \sigma_0\sigma_1 = 9L_1L_2 \cos \theta_{12}, \\ \sigma_0\sigma_2 + 2\sigma_1^2 &= 9L_1L_3(\text{sen}\theta_{12}\text{sen}\theta_{23} \cos \varphi + \cos \theta_{12} \cos \theta_{23}) + 18L_2^2, \\ \sigma_1\sigma_2 &= 9L_2L_3 \cos \theta_{23}, \quad \sigma_2^2 = 9L_3^2.\end{aligned}\tag{4.0.9}$$

Ahora de acuerdo a la primera y la última de estas ecuaciones, $\sigma_0 = \pm 3L_1$ y $\sigma_2 = \pm 3L_3$ pueden elegirse del mismo signo o de diferentes signos. Sustituyendo en la segunda y cuarta ecuación, y tomando la última elección de signo, implica que $\theta_{23} = \pi - \theta_{12}$, así que $\cos \theta_{23} = -\cos \theta_{12}$ y $\sen \theta_{23} = \sen \theta_{12}$. Pero entonces, para L_1, L_2, L_3 distintos de cero, la tercera ecuación es imposible que se satisfaga para un valor de $|\cos \varphi|$ que no exceda de la unidad.

Por lo tanto, σ_0 y σ_2 tienen que elegirse del mismo signo, y de la segunda y cuarta ecuación de (4.0.9) deducimos que $\theta_{23} = \theta_{12} (= \vartheta)$, es decir, \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 están en un cono cuyo eje está en la dirección de \mathbf{L}_2 y las generatrices forman un ángulo ϑ con el eje. Finalmente, $\cos \theta_{12} = \cos \theta_{23} = \cos \vartheta$ y $\sen \theta_{12} = \sen \theta_{23} = \sen \vartheta$ en la tercera ecuación de (4.0.9) y despejando $\cos \varphi$ obtenemos la expresión de (4.0.3). Luego, si el hodógrafo definido por $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ es Pitagórico, debe satisfacer las restricciones geométricas de la proposición. \square

Corolario 4.0.4 *Una cúbica alabeada tiene un hodógrafo Pitagórico si las longitudes de los lados $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ del polígono de control satisfacen la desigualdad*

$$L_2 \leq \sqrt{L_1 L_3} \quad (4.0.10)$$

Demostración: Si $L_2 \leq \sqrt{L_1 L_3}$ implica que $L_2^2 \leq L_1 L_3$. Entonces claramente, la ecuación (4.0.3) admite una solución válida para el ángulo acimutal φ de los lados \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 , ya que $|\cos \varphi| \leq 1$. Por tanto los lados $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ están en el cono indicado en la proposición anterior y la curva tiene HP. \square

Observación 4.0.5 En el caso de cúbicas planas, las condiciones que identifican curvas HP en términos de los lados del polinomio de control L_1, L_2, L_3 y los ángulos interiores θ_1, θ_2 , obtenidos en (1.2.4), son:

$$L_2 = \sqrt{L_1 L_3} \text{ y } \theta_1 = \theta_2.$$

Es gratificante ver que estas restricciones aparecen como un caso particular de las que describe la Proposición 4.0.3 para el caso de cúbicas alabeadas. Para un cono cuya generatriz forma un ángulo ϑ con el eje, un polígono de control que satisfaga las condiciones de la Proposición 4.0.3 es plano cuando $\varphi = \pm\pi$. Si el polígono es plano, tal como hemos visto en la demostración, $\theta_1 = \theta_2 = \vartheta$ y (4.0.3) se simplifica en $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$ y $\cos \varphi = -1$.

Basándonos en la Proposición 4.0.3, podemos dar una construcción “geométrica” para cúbicas alabeadas HP:

Algoritmo: Para construir una cúbica con hodógrafo Pitagórico:

- (a) elegimos las longitudes L_1, L_2, L_3 de acuerdo con (4.0.10) para los lados del polígono de control;
- (b) elegimos una dirección en \mathbb{R}^3 para el lado central \mathbf{L}_2 , y construimos un cono cuya generatriz forma un ángulo ϑ con el eje;
- (c) colocamos en el vértice de este cono los lados \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 , girados uno con respecto al otro un ángulo φ dado en términos de L_1, L_2, L_3 por (4.0.3);
- (d) los puntos de control son $P_k = P_{k-1} + \mathbf{L}_k$ para cada $k = 1, 2, 3$, con P_0 arbitrario.

En efecto, podríamos considerar L_1, L_2, L_3 como parámetros libres, sujetos a la condición (4.0.10), y φ vendría determinado por (4.0.3). La obtención del parámetro natural de una cúbica HP construida de acuerdo al algoritmo anterior requiere un breve cálculo de la integral del polinomio

$$\sigma(t) = 3[L_1(1-t)^2 + L_2 \cos \vartheta 2(1-t)t + L_3 t^2]. \quad (4.0.11)$$

Aplicando la desigualdad (4.0.10), observamos que el discriminante $\Delta = L_2^2 \cos^2 \vartheta - L_1 L_3$ de este polinomio es siempre negativo, así que $\sigma(t) \geq 0$ para todo t real.

Observación 4.0.6 Claramente, hay cuatro parámetros libres, ϑ y otros tres de L_1, L_2, L_3, φ , en la construcción de cúbicas alabeadas HP, en comparación con los tres en el caso plano (1.2.4).

Ejemplo 4.0.7 (a) Con $L_1 = L_3 = 1, L_2 = \sqrt{2}/2$ y $\vartheta = \pi/4$, la ecuación (4.0.3) nos dice que $\cos \varphi = 0$ y por tanto $\varphi = \pm\pi/2$. Tomando los ejes de coordenadas de acuerdo con (4.0.4) y $P_0 = \mathbf{0}$, obtenemos el polígono de control

$$P_0 = (0, 0, 0), \quad P_1 = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \quad P_2 = \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{2}}, \quad P_3 = \frac{(1, \pm 1, 3)}{\sqrt{2}}.$$

Entonces el hodógrafo es $\mathbf{r}'(t) = (3/\sqrt{2})((1-t)^2, \pm t^2, 1)$ y tenemos que $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \equiv \sigma^2(t)$, donde $\sigma(t) = 3(1-t)^2 + 3(1-t)t + 3t^2$.

- (b) Para $L_1 = 2/3, L_2 = 1, L_3 = 2$ y $\vartheta = \pi/3$, tenemos que $\varphi = \pm 2\pi/3$. Esto da el polígono de control

$$P_0 = (0, 0, 0), \quad P_1 = \frac{(\sqrt{3}, 0, 1)}{3}, \quad P_2 = \frac{(\sqrt{3}, 0, 4)}{3}, \quad P_3 = \frac{(-\sqrt{3}, \pm 9, 14)}{6}$$

de las expresiones de (4.0.4) llegamos a que $\sigma(t) = 2(1-t)^2 + 3(1-t)t + 6t^2$.

(c) Tomando ahora $L_1 = 3/2$, $L_2 = 1$, $L_3 = 4/3$ y $\vartheta = 5\pi/6$, tenemos que $\varphi = \pm\pi/2$ y entonces

$$P_0 = (0, 0, 0), \quad P_1 = \frac{(3, 0, -3\sqrt{3})}{4}, \quad P_2 = \frac{(3, 0, 4 - 3\sqrt{3})}{4}, \quad P_3 = \frac{(9, \pm 8, 12 - 17\sqrt{3})}{12}.$$

Es fácil ver que el correspondiente hodógrafo es Pitagórico. La Figura 4.1 ilustra estas curvas, sus polígonos de control, y las superficies cónicas que contienen a \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 .

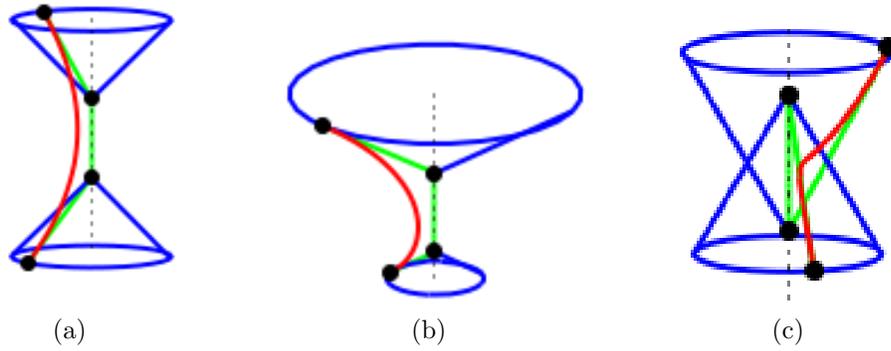


Figura 4.1: Tres ejemplos de curvas cúbicas alabeadas HP y sus polígonos de control, cuyos soportes \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{L}_3 satisfacen las condiciones geométricas de la Proposición 4.0.3. En cada caso, el punto de control P_0 está en el origen, \mathbf{L}_1 está en el plano XZ, y \mathbf{L}_2 es paralelo al eje Z.

Todas las cúbicas alabeadas HP de la forma (4.0.1) pueden ajustarse a la igualdad de la Proposición 4.0.3, y podemos obtenerla directamente de (4.0.1) de la siguiente forma. Para empezar, recordemos las expresiones de (4.0.2):

$$\begin{aligned} 3\mathbf{L}_1 &= 3(P_1 - P_0) = (2u_0v_0, 2u_0w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2), \\ 3\mathbf{L}_2 &= 3(P_2 - P_1) = (u_0v_1 + u_1v_0, u_0w_1 + u_1w_0, u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1), \\ 3\mathbf{L}_3 &= 3(P_3 - P_2) = (2u_1v_1, 2u_1w_1, u_1^2 - v_1^2 - w_1^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|3\mathbf{L}_1\| &= 3L_1 = \sqrt{4u_0^2v_0^2 + 4u_0^2w_0^2 + (u_0^2 - v_0^2 - w_0^2)^2} = \\ &= \sqrt{4u_0^2v_0^2 + 4u_0^2w_0^2 + u_0^4 + v_0^4 + w_0^4 - 2u_0^2v_0^2 - 2u_0^2w_0^2 + 2v_0^2w_0^2} = \\ &= \sqrt{u_0^4 + v_0^4 + w_0^4 + 2u_0^2v_0^2 + 2u_0^2w_0^2 + 2v_0^2w_0^2} = \\ &= \sqrt{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^2} = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2. \end{aligned}$$

Análogamente, $\|3\mathbf{L}_3\| = 3L_3 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$. Nos queda calcular el módulo de $3\mathbf{L}_2$.

$$\|3\mathbf{L}_2\| = 3L_2 = \sqrt{(u_0v_1 + u_1v_0)^2 + (u_0w_1 + u_1w_0)^2 + (u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1)^2}.$$

Calculamos aparte el discriminante de esta raíz cuadrada

$$\begin{aligned} & (u_0v_1 + u_1v_0)^2 + (u_0w_1 + u_1w_0)^2 + (u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1)^2 = \\ & u_0^2v_1^2 + u_1^2v_0^2 + 2u_0u_1v_0v_1 + u_0^2w_1^2 + u_1^2w_0^2 + 2u_0u_1w_0w_1 + u_0^2u_1^2 + v_0^2v_1^2 + w_0^2w_1^2 \\ & - 2u_0u_1v_0v_1 - 2u_0u_1w_0w_1 + 2v_0v_1w_0w_1 = \\ & = u_0^2v_1^2 + u_1^2v_0^2 + u_0^2w_1^2 + u_1^2w_0^2 + u_0^2u_1^2 + v_0^2v_1^2 + w_0^2w_1^2 + 2v_0v_1w_0w_1 = \\ & = u_0^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + v_0^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + w_0^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - v_0^2w_1^2 - w_0^2v_1^2 + \\ & 2v_0v_1w_0w_1 = (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0w_1 - v_1w_0)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$3L_2 = \sqrt{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0w_1 - v_1w_0)^2}.$$

Entonces las longitudes de \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{L}_3 vienen dadas por:

$$\begin{aligned} 3L_1 &= u_0^2 + v_0^2 + w_0^2, \\ 3L_2 &= \sqrt{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0w_1 - v_1w_0)^2}, \\ 3L_3 &= u_1^2 + v_1^2 + w_1^2, \end{aligned} \tag{4.0.12}$$

Ahora tomamos los productos escalares $\mathbf{L}_j \cdot \mathbf{L}_k$:

$$\begin{aligned} 9\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2 &= (2u_0v_0, 2u_0w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2) \cdot (u_0v_1 + u_1v_0, u_0w_1 + u_1w_0, \\ & u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1) = \\ & 2u_0^2v_0v_1 + 2u_0v_0^2u_1 + 2u_0^2w_0w_1 + 2u_0w_0^2u_1 + u_0^3u_1 - u_0^2v_0v_1 - u_0^2w_0w_1 - \\ & v_0^2u_0u_1 + v_0^3v_1 + v_0^2w_0w_1 - w_0^2u_0u_1 + w_0^2v_0v_1 + w_0^3w_1 = \\ & u_0^2v_0v_1 + u_0v_0^2u_1 + u_0^2w_0w_1 + u_0w_0^2u_1 + u_0^3u_1 + v_0^3v_1 + v_0^2w_0w_1 + w_0^2v_0v_1 + \\ & w_0^3w_1 = \\ & u_0^2(u_0u_1 + v_0v_1 + w_0w_1) + v_0^2(u_0u_1 + v_0v_1 + w_0w_1) + \\ & w_0^2(u_0u_1 + v_0v_1 + w_0w_1) = (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1 + w_0w_1). \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene la expresión para el producto escalar $9\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_3 = (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(u_0u_1 + v_0v_1 + w_0w_1)$. Veamos el último.

$$\begin{aligned} 9\mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{L}_1 &= (2u_1v_1, 2u_1w_1, u_1^2 - v_1^2 - w_1^2) \cdot (2u_0v_0, 2u_0w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2) = \\ & 4u_0u_1v_0v_1 + 4u_0u_1w_0w_1 + u_0^2u_1^2 - u_0^2v_1^2 - u_0^2w_1^2 - v_0^2u_1^2 + v_0^2v_1^2 + v_0^2w_1^2 - \\ & w_0^2u_1^2 + w_0^2v_1^2 + w_0^2w_1^2 = \\ & (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + 4u_0u_1v_0v_1 + 4u_0u_1w_0w_1 - 2u_0^2v_1^2 - 2u_0^2w_1^2 \\ & - 2v_0^2u_1^2 - 2w_0^2u_1^2 = \\ & (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - 2[(u_0v_1 - u_1v_0)^2 + (u_0w_1 - u_1w_0)^2]. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que el producto escalar cumple la igualdad $\mathbf{L}_j \cdot \mathbf{L}_k = L_j L_k \cos \theta_{jk}$. De donde despejando $\cos \theta_{jk}$, llegamos a la conclusión de que

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_{23} = \frac{u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2}}, \quad (4.0.13)$$

por tanto \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 están en un cono y cada uno forma un ángulo $\vartheta = \theta_{12} = \theta_{23}$ con \mathbf{L}_2 , el eje del cono, luego podemos usar las expresiones de (4.0.4), siendo φ la separación acimutal de \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_3 en este cono. Entonces, por un lado tenemos que:

$$\cos \theta_{31} = \frac{\mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{L}_1}{L_3 L_1} = 1 - 2 \frac{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (u_0 w_1 - u_1 w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)},$$

y por otro lado,

$$\frac{\mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{L}_1}{L_3 L_1} = \sin^2 \vartheta \cos \varphi + \cos^2 \vartheta,$$

y utilizando las dos expresiones anteriores,

$$\sin^2 \vartheta \cos \varphi + \cos^2 \vartheta = 1 - 2 \frac{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (u_0 w_1 - u_1 w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)}. \quad (4.0.14)$$

Despejando $\cos \varphi$ de esta expresión y usando las ecuaciones de (4.0.12), (4.0.13) junto con la igualdad:

$$(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) = (u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1)^2 + (u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2 + (w_0 u_1 - w_1 u_0)^2,$$

puede verificarse que la solución del $\cos \varphi$ de (4.0.14) viene dada por la expresión (4.0.3). En efecto, de (4.0.13) sabemos que

$$\cos \vartheta = \cos \theta_{12} = \cos \theta_{23} = \frac{u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2}}. \quad (4.0.15)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta &= \frac{(u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2}, \text{ y} \\ 1 - \cos^2 \vartheta &= \frac{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2 - (u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2} = \\ &= \frac{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (w_0 u_1 - w_1 u_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2}. \end{aligned}$$

Ahora despejamos $\cos \varphi$ de (4.0.14) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1 - \cos^2 \vartheta - 2 \frac{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (u_0 w_1 - u_1 w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)}}{1 - \cos^2 \vartheta} = \\ &= 1 - 2 \frac{\frac{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (u_0 w_1 - u_1 w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)}}{\frac{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (w_0 u_1 - w_1 u_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)} - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2} = \\ &= 1 - 2 \frac{[(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (u_0 w_1 - u_1 w_0)^2][(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2]}{[(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (w_0 u_1 - w_1 u_0)^2][(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)]} = \\ &= 1 - 2 \frac{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)} = 1 - 2 \frac{L_2^2}{L_1 L_3}, \end{aligned}$$

como queríamos comprobar.

Claramente, las restricciones del polígono de control enumeradas en la Proposición 4.0.3 impone condiciones en la geometría intrínseca de las correspondientes cúbicas HP. Veamos ahora el carácter geométrico de estas curvas.

Proposición 4.0.8 *Las cúbicas con hodógrafo Pitagórico en \mathbb{R}^3 son hélices tales que el ángulo que forman las tangentes con el eje viene dado por:*

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2L_2^2 | \operatorname{sen} \vartheta |}{L_1 L_3 \operatorname{sen} \varphi}, \quad (4.0.16)$$

donde los parámetros $L_1, L_2, L_3, \vartheta, \varphi$ describen el polígono de control como en la Proposición 4.0.3.

Demostración: Necesitamos calcular la curvatura y la torsión, usando las expresiones de (3.0.3), de las cúbicas que tienen polígono de control de la forma descrita en la Proposición 4.0.3. De nuevo tenemos libertad para elegir ejes arbitrarios en \mathbb{R}^3 , y entonces centramos nuestra atención en el polígono de control dado en (4.0.4). Derivando el hodógrafo (4.0.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(t) &= 6[(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1)(1 - t) + (\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2)t], \\ \mathbf{r}'''(t) &= 6(\mathbf{L}_3 - 2\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1), \end{aligned} \quad (4.0.17)$$

y entonces tenemos que:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = 18[\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2(1-t)^2 - \mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_1(1-t)t + \mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_3 t^2], \quad (4.0.18)$$

donde, de las expresiones de (4.0.4), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2 &= L_1 L_2 \text{sen} \vartheta (0, -1, 0), \\ \mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_1 &= L_3 L_1 \text{sen} \vartheta (\cos \vartheta \text{sen} \varphi, \cos \vartheta (1 - \cos \varphi), -\text{sen} \vartheta \text{sen} \varphi), \\ \mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_3 &= L_2 L_3 \text{sen} \vartheta (-\text{sen} \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Haciendo uso de (4.0.3), un cálculo directo aunque tedioso demuestra que:

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 6L_2 |\text{sen} \vartheta| \sigma(t), \quad (4.0.19)$$

donde $\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ es la derivada del parámetro natural respecto al parámetro t y viene dado por (4.0.11), entonces la curvatura es:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{6L_2 |\text{sen} \vartheta|}{\sigma^2(t)}. \quad (4.0.20)$$

Para calcular la torsión, vemos de (4.0.17) y (4.0.18) que el producto escalar de $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'''(t)$ se reduce a $108(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{L}_3$, y de la expresión (4.0.4) tenemos $(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{L}_3 = -L_1 L_2 L_3 \text{sen}^2 \vartheta \text{sen} \varphi$. Entonces, usando (4.0.19), obtenemos

$$\tau(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2} = \frac{-3L_1 L_3 \text{sen} \varphi}{L_2 \sigma^2(t)}. \quad (4.0.21)$$

Como el cociente entre la curvatura (4.0.20) y la torsión (4.0.21) es constante, la cúbica HP tiene que ser una hélice con ángulo θ dado por (4.0.16) cuya tangente es igual a esta constante. \square

Observación 4.0.9 Teniendo en cuenta (4.0.20) y (4.0.21), se tiene que, como $\sigma(t)$ no es constante, la curvatura y la torsión de las cúbicas alabeadas HP son no constantes (asumiendo que $L_1, L_2, L_3, \vartheta, \varphi$ son todos distintos de cero). Por tanto, estas curvas no pueden ser hélices circulares.

Observación 4.0.10 Supongamos que L_1, L_2, L_3 son todos distintos de cero, entonces hay dos casos degenerados de las cúbicas alabeadas HP que pueden identificarse con la curvatura y la torsión dadas en (4.0.20) y (4.0.21):

- (a) Si $\text{sen} \varphi = 0$ (o $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$), entonces $\tau(t) \equiv 0$ y tenemos una curva plana (ver Observación 4.0.5);

(b) Si $\text{sen}\vartheta = 0$, entonces $\kappa(t) \equiv 0$ y tenemos una línea recta.

Pasamos ahora a dar una expresión del eje de las hélices en función de los parámetros libres $L_1, L_2, L_3, \vartheta, \varphi$. El eje, \mathbf{a} , de una cúbica alabeada HP, que ya hemos visto que es una hélice, puede determinarse usando la expresión $\mathbf{a} = \cos\theta\mathbf{t} + \text{sen}\theta\mathbf{b}$. La tangente \mathbf{t} y la binormal \mathbf{b} en cualquier punto se puede calcular fácilmente y sustituyendo en la expresión anterior del vector \mathbf{a} , ambos valores obtenidos de (4.0.16). Como $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ vienen dados por (4.0.4), y $\mathbf{r}'(t)$ por (4.0.5), de la condición $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos\theta$, tenemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'(t) = \cos\theta\sigma(t)$ y, usando (4.0.11), despejamos las componentes de \mathbf{a} igualándolo con los coeficientes de Bernstein. Esto nos lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{a} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\varphi} (\text{sen}\vartheta\text{sen}\varphi, \text{sen}\vartheta(1 - \cos\varphi), \cos\vartheta\text{sen}\varphi).$$

El análisis se simplifica si centramos nuestra atención en las cúbicas alabeadas HP que admiten la representación (4.0.1). La curvatura y a la torsión son entonces:

$$\kappa(t) = 2 \frac{\sqrt{(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2}}{\sigma^2(t)} \quad (4.0.22)$$

$$\tau(t) = 2 \frac{v_1w_0 - v_0w_1}{\sigma^2(t)},$$

donde $\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)$. Entonces el ángulo θ de la hélice es:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2}}{v_1w_0 - v_0w_1}$$

y el eje de la hélice pasa a ser:

$$\mathbf{a} = \frac{v_0w_1 - v_1w_0}{|v_0w_1 - v_1w_0|} \frac{(w_1u_0 - w_0u_1, u_1v_0 - u_0v_1, v_1w_0 - v_0w_1)}{\sqrt{(w_1u_0 - w_0u_1)^2 + (u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (v_1w_0 - v_0w_1)^2}}.$$

Veamos de dónde salen estas cuatro últimas expresiones. Sabemos que \mathbf{a} es una dirección fija, así que podemos escribir $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$. Entonces, por un lado tenemos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}' = \cos\theta\sigma(t) = 3L_1 \cos\theta B_0^2(t) + 3L_2 \cos\vartheta \cos\theta B_1^2(t) + 3L_3 \cos\theta B_2^2(t),$$

y por otro, calculando el producto escalar de \mathbf{a} y \mathbf{r}' utilizando la expresión (4.0.5), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}' &= [3L_1 \text{sen}\vartheta B_0^2(t) + 3L_3 \text{sen}\vartheta \cos\varphi B_2^2(t)] a_0 + [3L_3 \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi B_2^2(t)] a_1 \\ &\quad [3L_1 \cos\vartheta B_0^2(t) + 3L_2 B_1^2(t) + 3L_3 \cos\vartheta B_2^2(t)] a_2 = \\ &= [3a_0 L_1 \text{sen}\vartheta + 3a_2 L_1 \cos\vartheta] B_0^2(t) + 3a_2 L_2 B_1^2(t) + \\ &\quad [3a_0 L_3 \text{sen}\vartheta \cos\varphi + 3a_1 L_3 \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi + 3a_2 L_3 \cos\vartheta] B_2^2(t). \end{aligned}$$

Iguualamos estas dos expresiones término a término y nos queda el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (a_0, a_1 y a_2) que tenemos que resolver:

$$\left. \begin{aligned} 3a_0L_1\text{sen}\vartheta + 3a_2L_1\cos\vartheta &= 3L_1\cos\theta \\ 3a_2L_2 &= 3L_2\cos\vartheta\cos\theta \\ 3a_0L_3\text{sen}\vartheta\cos\varphi + 3a_1L_3\text{sen}\vartheta\text{sen}\varphi + 3a_2L_3\cos\vartheta &= 3L_3\cos\theta \end{aligned} \right\}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $a_2 = \cos\vartheta\cos\theta$, y sustituyendo por su valor en la primera ecuación, llegamos a que:

$$\begin{aligned} 3a_0L_1\text{sen}\vartheta + 3L_1\cos\theta\cos^2\vartheta &= 3L_1\cos\theta \Rightarrow a_0\text{sen}\vartheta = \cos\theta(1 - \cos^2\vartheta) = \cos\theta\text{sen}^2\vartheta \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0 = \cos\theta\text{sen}\vartheta. \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la última ecuación los valores de a_0 y a_2 , vemos que:

$$\begin{aligned} 3L_3\cos\theta\text{sen}^2\vartheta\cos\varphi + 3a_1L_3\text{sen}\vartheta\text{sen}\varphi + 3L_3\cos\theta\cos^2\vartheta &= 3L_3\cos\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1\text{sen}\vartheta\text{sen}\varphi &= \cos\theta[1 - \cos^2\vartheta - \text{sen}^2\vartheta\cos\varphi] = \cos\theta\text{sen}^2\vartheta(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{\cos\theta\text{sen}^2\vartheta(1 - \cos\varphi)}{\text{sen}\vartheta\text{sen}\varphi} = \frac{\cos\theta\text{sen}\vartheta(1 - \cos\varphi)}{\text{sen}\varphi}. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2) = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\varphi}(\text{sen}\vartheta\text{sen}\varphi, \text{sen}\vartheta(1 - \cos\varphi), \cos\vartheta\text{sen}\varphi)$.

Veamos ahora las expresiones para la curvatura y la torsión de (4.0.22). Calculemos primero la curvatura. Para ello utilizamos la expresión (4.0.20) y sustituimos los valores de L_1, L_2 y L_3 dados por (4.0.12). Además, sabemos de (4.0.15) que

$$\text{sen}\vartheta = \sqrt{\frac{(u_0v_1 - u_1v_0)^2 + (u_0w_1 - u_1w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0w_1 - v_1w_0)^2}}.$$

Sustituyendo todo estos valores en (4.0.20) tenemos que:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{6L_2 |\operatorname{sen}\vartheta|}{\sigma^2(t)} = 2\sqrt{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0w_1 - v_1w_0)^2}. \\ &\sqrt{\frac{(u_0v_1 - u_1v_0)^2 + (u_0w_1 - u_1w_0)^2}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (v_0w_1 - v_1w_0)^2}} = \\ &2\frac{\sqrt{(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2}}{\sigma^2(t)}.\end{aligned}$$

Para calcular la torsión, calculamos primero $\operatorname{sen}\varphi$. Utilizando la expresión (4.0.3) tenemos que

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= 1 - 2\frac{L_2^2}{L_1L_3} \Rightarrow \cos^2\varphi = \left(1 - 2\frac{L_2^2}{L_1L_3}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi &= \sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{L_2^2}{L_1L_3}\right)^2} = \sqrt{4\frac{L_2^2}{L_1L_3} - 4\frac{L_2^4}{L_1^2L_3^2}} = \sqrt{4\frac{L_2^2}{L_1L_3}\left(1 - \frac{L_2^2}{L_1L_3}\right)} = \\ &2L_2\sqrt{\frac{L_1L_3 - L_2^2}{L_1^2L_3^2}}.\end{aligned}$$

Y sustituyendo en (4.0.21),

$$\tau(t) = -\frac{3L_1L_3\operatorname{sen}\varphi}{L_2\sigma^2(t)} = -\frac{6L_1L_2L_3\sqrt{\frac{L_1L_3 - L_2^2}{L_1^2L_3^2}}}{L_2\sigma^2(t)} = -\frac{6\sqrt{L_1L_3 - L_2^2}}{\sigma^2(t)}.$$

Sustituyendo L_1 , L_2 y L_3 por sus respectivos valores obtenemos la expresión para la torsión de (4.0.22) que estábamos buscando. Por otro lado sabemos que $\tan\theta = \kappa(t)/\tau(t)$, así que sustituyendo la curvatura y la torsión de (4.0.22) tenemos que

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1} \frac{2\sqrt{(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2}}{\sigma^2(t)} \frac{\sigma^2(t)}{2\frac{v_1w_0 - v_0w_1}{\sigma^2(t)}} = \\ &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2}}{v_1w_0 - v_0w_1}.\end{aligned}$$

En este caso, vemos de (4.0.22) que las condiciones $v_1w_0 - v_0w_1 = 0$ y $(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2 = 0$ se identifican con los casos degenerados de curva plana y línea recta, respectivamente. El volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ es el valor absoluto de

$$(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{L}_3 = \frac{2}{27}(v_1w_0 - v_0w_1)[(u_1v_0 - u_0v_1)^2 + (w_1u_0 - w_0u_1)^2].$$

La simplicidad de las cúbicas alabeadas HP han facilitado una investigación rigurosa. Sin embargo, los grados de libertad de estas curvas probablemente son insuficientes para la mayoría de las aplicaciones, y tendremos que buscar más flexibilidad entre las curvas alabeadas HP de mayor orden.

Capítulo 5

Curvas alabeadas HP de mayor orden

Las curvas alabeadas HP de grado 4 pueden obtenerse sustituyendo $h(t)$ y $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ por polinomios lineales en la expresión (2.0.1) y luego integrando. Como en este caso el polinomio $h(t)$ siempre tiene una raíz real, estas curvas alabeadas nunca son regulares.

Las curvas alabeadas HP de grado 5 definidas por (2.0.1) se clasifican en dos distinguidas categorías: las que tienen como $h(t)$ un polinomio de grado 2 y $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ son lineales, y las que tienen que $h(t) = 1$ y $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ son de grado 2. Entonces las primeras son curvas regulares sólo en los casos donde el discriminante de $h(t)$ es negativo, mientras que las segundas son regular cuando sea $\text{mcd}(u, v^2 + w^2) = 1$. Nos ocuparemos aquí de la última de las categorías de grado 5.

Observación 5.0.1 Nos centraremos en los hodógrafos de la forma (2.0.1). A pesar del hecho de que no representan todas las curvas HP de grado 5 en \mathbb{R}^3 , este estudio está motivado por las dificultades algebraicas que aparecen directamente trabajando con la geometría del polígono de control. Podemos obtener una idea de la extensión de estas dificultades del caso de curvas planas HP de quinto grado [3], donde la identificación de las condiciones suficientes y necesarias de un polígono de control requerían el uso de representación compleja y técnicas de bases de Gröbner. Es más, la importancia geométrica de alguna de las restricciones resultantes es bastante extraña, y podría serlo aún más en \mathbb{R}^3 .

Proposición 5.0.2 *Sea $\mathbf{r}(t)$ una curva de grado 5 de Bézier tal que $h(t) = 1$ y $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ son cuadráticos. Entonces $\mathbf{r}(t)$ tiene hodógrafo Pitagórico de la forma (2.0.1) si y sólo si sus puntos de control pueden expresarse como:*

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + \frac{1}{5}(2u_0v_0, 2u_0w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2), \\
P_2 &= P_1 + \frac{1}{5}(u_0v_1 + u_1v_0, u_0w_1 + u_1w_0, u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1), \\
P_3 &= P_2 + \frac{2}{15}(2u_1v_1, 2u_1w_1, u_1^2 - v_1^2 - w_1^2) \\
&\quad + \frac{1}{15}(u_0v_2 + u_2v_0, u_0w_2 + u_2w_0, u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2), \\
P_4 &= P_3 + \frac{1}{5}(u_1v_2 + u_2v_1, u_1w_2 + u_2w_1, u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2), \\
P_5 &= P_4 + \frac{1}{5}(2u_2v_2, 2u_2w_2, u_2^2 - v_2^2 - w_2^2),
\end{aligned} \tag{5.0.1}$$

para valores de los coeficientes $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2$ constantes (siendo arbitraria la constante de integración P_0).

Demostración: Como \mathbf{r} es una curva de grado 5, al menos uno de los polinomios $x'(t)$, $y'(t)$ o $z'(t)$ tienen que ser de grado exactamente 4. Por tanto, al menos uno de los polinomios $u(t)$, $v(t)$ o $w(t)$ es de grado exactamente 2. Luego podemos expresar cada uno de ellos en la base de Bernstein de grado 2:

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_0B_0^2(t) + u_1B_1^2(t) + u_2B_2^2(t), \\
v(t) &= v_0B_0^2(t) + v_1B_1^2(t) + v_2B_2^2(t), \\
w(t) &= w_0B_0^2(t) + w_1B_1^2(t) + w_2B_2^2(t).
\end{aligned} \tag{5.0.2}$$

Para los siguientes cálculos vamos a necesitar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(B_0^2(t))^2 &= (1-t)^4 = B_0^4(t), \\
B_0^2(t)B_1^2(t) &= (1-t)^2 2t(1-t) = 2t(1-t)^3 = \frac{B_1^4(t)}{2}, \\
B_0^2(t)B_2^2(t) &= (1-t)^2 t^2 = \frac{B_2^4(t)}{6}, \\
(B_1^2(t))^2 &= (2t(1-t))^2 = 4t^2(1-t)^2 = \frac{4}{6}B_2^4(t), \\
B_1^2(t)B_2^2(t) &= 2t(1-t)t^2 = 2t^3(1-t) = \frac{B_3^4(t)}{2}, \\
(B_2^2(t))^2 &= t^4 = B_4^4(t).
\end{aligned} \tag{5.0.3}$$

Sustituyendo las expresiones de (5.0.2) en (2.0.1) con $h(t) = 1$, y utilizando la equivalencia entre las bases de Bernstein de grado 2 y 4 de (5.0.3), nos queda las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 2[u_0B_0^2(t) + u_1B_1^2(t) + u_2B_2^2(t)][v_0B_0^2(t) + v_1B_1^2(t) + v_2B_2^2(t)] \\
&= 2[u_0v_0(B_0^2(t))^2 + u_0v_1B_0^2(t)B_1^2(t) + u_0v_2B_0^2(t)B_2^2(t) + u_1v_0B_1^2(t)B_0^2(t) + \\
&\quad u_1v_1(B_1^2(t))^2 + u_1v_2B_1^2(t)B_2^2(t) + u_2v_0B_2^2(t)B_0^2(t) + u_2v_1B_2^2(t)B_1^2(t) + \\
&\quad u_2v_2(B_2^2(t))^2] = \\
&= 2u_0v_0B_0^4(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)B_1^4(t) + \frac{1}{3}(u_0v_2 + u_2v_0 + 4u_1v_1)B_2^4(t) + \\
&\quad (u_1v_2 + u_2v_1)B_3^4(t) + 2u_2v_2B_4^4(t).
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 2u_0w_0B_0^4(t) + (u_0w_1 + u_1w_0)B_1^4(t) + \frac{1}{3}(u_0w_2 + u_2w_0 + 4u_1w_1)B_2^4(t) + \\
&\quad (u_1w_2 + u_2w_1)B_3^4(t) + 2u_2w_2B_4^4(t).
\end{aligned}$$

Ahora para obtener una expresión de $z'(t)$ primero tenemos que saber las expresiones de $u^2(t)$, $v^2(t)$ y $w^2(t)$. En realidad basta con tener la de $u^2(t)$, pues las otras dos son análogas.

$$\begin{aligned}
u^2(t) &= (u_0B_0^2(t) + u_1B_1^2(t) + u_2B_2^2(t))^2 = u_0^2(B_0^2(t))^2 + u_1^2(B_1^2(t))^2 + u_2^2(B_2^2(t))^2 + \\
&\quad 2u_0u_1B_0^2(t)B_1^2(t) + 2u_0u_2B_0^2(t)B_2^2(t) + 2u_1u_2B_1^2(t)B_2^2(t) = \\
&= u_0^2B_0^4(t) + u_0u_1B_1^4(t) + \frac{1}{3}(2u_1^2 + u_0u_2)B_2^4(t) + u_1u_2B_3^4(t) + u_2^2B_4^4(t).
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
z'(t) &= (u_0^2 - v_0^2 - w_0^2)B_0^4(t) + (u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1)B_1^4(t) + \\
&\quad \frac{1}{3}(2u_1^2 - 2v_1^2 - 2w_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2)B_2^4(t) \\
&\quad + (u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2)B_3^4(t) + (u_2^2 - v_2^2 - w_2^2)B_4^4(t).
\end{aligned}$$

Integramos ahora $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ utilizando (1.1.3). Empecemos por $x'(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2u_0v_0 \int B_0^4(t)dt + (u_0v_1 + u_1v_0) \int B_1^4(t)dt + \\
&\quad \frac{1}{3}(u_0v_2 + u_2v_0 + 4u_1v_1) \int B_2^4(t)dt + (u_1v_2 + u_2v_1) \int B_3^4(t)dt + \\
&\quad 2u_2v_2 \int B_4^4(t)dt = \\
&= \frac{2}{5}u_0v_0 \sum_{j=1}^5 B_j^5(t) + C_0 + \frac{1}{5}(u_0v_1 + u_1v_0) \sum_{j=2}^5 B_j^5(t) + C_1 + \\
&\quad \frac{1}{15}(u_0v_2 + u_2v_0 + 4u_1v_1) \sum_{j=3}^5 B_j^5(t) + C_2 + \frac{1}{5}(u_1v_2 + u_2v_1) \sum_{j=4}^5 B_j^5(t) + C_3 + \\
&\quad 2u_2v_2B_5^5(t) + C_4.
\end{aligned}$$

Redefiniendo $C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ y utilizando la expresión (1.1.1), podemos escribir $C = C \sum_{j=0}^5 B_j^5(t)$. Entonces llegamos a la expresión:

$$x(t) = CB_0^5(t) + \left(\frac{2u_0v_0}{5} + C\right)B_1^5(t) + \left(\frac{u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_0v_0}{5} + C\right)B_2^5(t) + \\ \left(\frac{u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_0v_0}{5} + \frac{u_0v_2 + u_2v_0 + 4u_1v_1}{15} + C\right)B_3^5(t) + \\ \left(\frac{u_1v_2 + u_2v_1 + u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_0v_0}{5} + \frac{u_0v_2 + u_2v_0 + 4u_1v_1}{15} + C\right)B_4^5(t) + \\ \left(\frac{2u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_0v_0}{5} + \frac{u_0v_2 + u_2v_0 + 4u_1v_1}{15} + C\right)B_5^5(t).$$

Análogamente se obtiene una expresión similar para $y(t)$, cambiando los v_i por w_i , y C por otra constante de integración, por ejemplo D. Entonces nos quedaría la siguiente expresión:

$$y(t) = DB_0^5(t) + \left(\frac{2u_0w_0}{5} + D\right)B_1^5(t) + \left(\frac{u_0w_1 + u_1w_0 + 2u_0w_0}{5} + D\right)B_2^5(t) + \\ \left(\frac{u_0w_1 + u_1w_0 + 2u_0w_0}{5} + \frac{u_0w_2 + u_2w_0 + 4u_1w_1}{15} + D\right)B_3^5(t) + \\ \left(\frac{u_1w_2 + u_2w_1 + u_0w_1 + u_1w_0 + 2u_0w_0}{5} + \frac{u_0w_2 + u_2w_0 + 4u_1w_1}{15} + D\right)B_4^5(t) + \\ \left(\frac{2u_2w_2 + u_1w_2 + u_2w_1 + u_0w_1 + u_1w_0 + 2u_0w_0}{5} + \frac{u_0w_2 + u_2w_0 + 4u_1w_1}{15} + D\right)B_5^5(t).$$

Veamos ahora que expresión tendrá $z(t)$:

$$z(t) = (u_0^2 - v_0^2 - w_0^2) \int B_0^4(t)dt + (u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1) \int B_1^4(t)dt + \\ \frac{1}{3}(2u_1^2 - 2v_1^2 - 2w_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2) \int B_2^4(t)dt + \\ (u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2) \int B_3^4(t)dt + (u_2^2 - v_2^2 - w_2^2) \int B_4^4(t)dt = \\ = \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2 - w_0^2) \sum_{j=1}^5 B_j^5(t) + E_0 + \frac{1}{5}(u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1) \sum_{j=2}^5 B_j^5(t) + E_1 + \\ \frac{1}{15}(2u_1^2 - 2v_1^2 - 2w_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2) \sum_{j=3}^5 B_j^5(t) + E_2 + \\ \frac{1}{5}(u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2) \sum_{j=4}^5 B_j^5(t) + E_3 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2 - w_2^2)B_5^5(t) + E_4 =$$

$$\begin{aligned}
= & EB_0^5(t) + \left(\frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{5} + E \right) B_1^5(t) + \\
& \left(\frac{u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1 + u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{5} + E \right) B_2^5(t) + \\
& \left(\frac{2u_1^2 - 2v_1^2 - 2w_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2}{15} + \frac{u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1 + u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{5} \right. \\
& \left. + E \right) B_3^5(t) + \left(\frac{u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2 + u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1 + u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{5} + \right. \\
& \left. \frac{2u_1^2 - 2v_1^2 - 2w_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2}{15} + E \right) B_4^5(t) + \\
& \left(\frac{u_2^2 - v_2^2 - w_2^2 + u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2 + u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1 + u_0^2 - v_0^2 - w_0^2}{5} + \right. \\
& \left. \frac{2u_1^2 - 2v_1^2 - 2w_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2}{15} + E \right) B_5^5(t),
\end{aligned}$$

donde $E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4$. Teniendo en cuenta la expresión del Ejemplo 1.1.3, vemos que si $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = P_0B_0^5(t) + P_1B_1^5(t) + P_2B_2^5(t) + P_3B_3^5(t) + P_4B_4^5(t) + P_5B_5^5(t)$, entonces

$$P_0 = (C, D, E)$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{5}(2u_0v_0, 2u_0w_0, u_0^2 - v_0^2 - w_0^2),$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{5}(u_0v_1 + u_1v_0, u_0w_1 + u_1w_0, u_0u_1 - v_0v_1 - w_0w_1),$$

$$\begin{aligned}
P_3 = & P_2 + \frac{2}{15}(2u_1v_1, 2u_1w_1, u_1^2 - v_1^2 - w_1^2) \\
& + \frac{1}{15}(u_0v_2 + u_2v_0, u_0w_2 + u_2w_0, u_0u_2 - v_0v_2 - w_0w_2),
\end{aligned}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{5}(u_1v_2 + u_2v_1, u_1w_2 + u_2w_1, u_1u_2 - v_1v_2 - w_1w_2),$$

$$P_5 = P_4 + \frac{1}{5}(2u_2v_2, 2u_2w_2, u_2^2 - v_2^2 - w_2^2).$$

□

Proposición 5.0.3 *En las curvas HP de grado 5 de la forma (2.0.1) con $h(t) = 1$, los pares de puntos de control iniciales y finales P_0, P_1 y P_4, P_5 están identificados por los coeficientes*

$$\begin{aligned}
(u_0, v_0, w_0) &= \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\sqrt{\Delta z_0 + |\Delta P_0|}, \frac{\Delta x_0}{\sqrt{\Delta z_0 + |\Delta P_0|}}, \frac{\Delta y_0}{\sqrt{\Delta z_0 + |\Delta P_0|}} \right), \\
(u_2, v_2, w_2) &= \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\sqrt{\Delta z_4 + |\Delta P_4|}, \frac{\Delta x_4}{\sqrt{\Delta z_4 + |\Delta P_4|}}, \frac{\Delta y_4}{\sqrt{\Delta z_4 + |\Delta P_4|}} \right),
\end{aligned} \tag{5.0.4}$$

donde $\Delta P_0 = P_1 - P_0$ y $\Delta P_4 = P_5 - P_4$, y

$$(u_1, v_1, w_1) = -\frac{3}{4}(u_0 + u_2, v_0 + v_2, w_0 + w_2) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{c+d}, \frac{a}{\sqrt{c+d}}, \frac{b}{\sqrt{c+d}}), \tag{5.0.5}$$

las cantidades a, b, c y $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ vienen dados por

$$\begin{aligned}
a &= \frac{15}{2}(x_4 - x_1) + \frac{9}{8}(u_0 v_0 + u_2 v_2) + \frac{5}{8}(u_0 v_2 + u_2 v_0), \\
b &= \frac{15}{2}(y_4 - y_1) + \frac{9}{8}(u_0 w_0 + u_2 w_2) + \frac{5}{8}(u_0 w_2 + u_2 w_0), \\
c &= \frac{15}{2}(z_4 - z_1) + \frac{9}{16}(u_0^2 - v_0^2 - w_0^2 + u_2^2 - v_2^2 - w_2^2) + \frac{5}{8}(u_0 u_2 - v_0 v_2 - w_0 w_2).
\end{aligned} \tag{5.0.6}$$

Demostración: Nótese que las soluciones reales (u, v, w) del sistema de ecuaciones

$$2uv = a, 2uw = b, u^2 - v^2 - w^2 = c \tag{5.0.7}$$

pueden expresarse, para todos los valores reales de a, b, c y $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, de la forma

$$(u, v, w) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{c+d}, \frac{a}{\sqrt{c+d}}, \frac{b}{\sqrt{c+d}} \right). \tag{5.0.8}$$

De (5.0.1), vemos que los valores de (u_0, v_0, w_0) y (u_2, v_2, w_2) están determinados solamente por el polígono de control ΔP_0 y ΔP_4 ; pueden escribirse en la forma (5.0.4) tomando $(a, b, c) = 5(\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0)$ y $5(\Delta x_4, \Delta y_4, \Delta z_4)$, respectivamente. Para encontrar valores de (u_1, v_1, w_1) , añadimos una nueva ecuación en (5.0.1) e introducimos nuevas variables $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1) = \frac{3}{4}(u_0 + u_2, v_0 + v_2, w_0 + w_2) + (u_1, v_1, w_1)$. Esto lleva a un sistema de la forma (5.0.7) para $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1)$, con a, b, c dados por (5.0.6). \square

La elección del signo en las expresiones (5.0.4) y (5.0.5) para los coeficientes de $u(t), v(t), w(t)$ se puede tomar de forma independiente. Entonces, podríamos tener 8 soluciones del problema de interpolación de Hermite por una curva HP de grado 5 en

\mathbb{R}^3 . Sin embargo, se demuestra que realmente sólo hay 4 interpolantes geoméricamente distintas.

La Figura 5.1 muestra las cuatro curvas alabeadas HP con puntos iniciales y finales P_0, P_1 y P_4, P_5 . Sólo una de estas curvas tiene propiedades interesantes desde el punto de vista del modelado, ya que las otras tres tienen mucha curvatura cerca de sus puntos iniciales o finales.

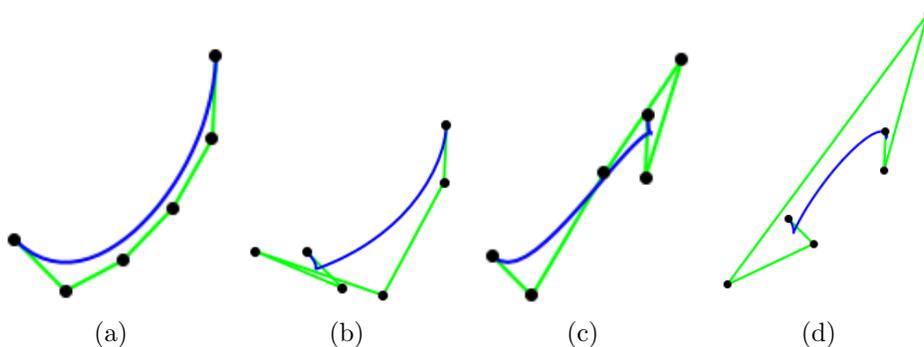


Figura 5.1: Cuatro curvas alabeadas de grado 5 HP distintas junto con sus polígonos de control. Los puntos de control iniciales y finales que hemos considerado son $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1.5, -1, 0)$ y $P_4 = (3.1, 0.8, 2.3)$, $P_5 = (2.3, 2.3, 2.8)$. Nótese que sólo una de las cuatro curvas - caso (a) - tiene buenas propiedades para el modelado.

Una estrategia para asignar vectores tangentes v_0, \dots, v_N en una secuencia ordenada de puntos $P_0, \dots, P_N \in \mathbb{R}^3$, es construir una curva HP de grado 5 a trozos que interpole estos puntos. Pero esto no siempre es posible, porque para una curva HP de grado 5 definida a trozos de clase \mathcal{C}^2 en \mathbb{R}^3 se puede resolver un sistema de ecuaciones no lineales, el cuál no siempre tiene soluciones reales.

Capítulo 6

Longitud de arco en curvas HP

En este capítulo estudiaremos qué expresión tiene la longitud de arco $s(t)$ de una curva alabeada polinomial. En general, viene dada por una integral que no se puede resolver con funciones elementales de t , y por consiguiente debemos recurrir a aproximación numérica [8]. El hecho de que $s(t)$ es justamente un polinomio para curvas alabeadas HP facilita la formulación de procedimientos simples para parametrizar cada curva por incrementos de longitud de arco uniformes.

Para una curva alabeada regular HP de grado n , $\mathbf{r}(t)$, podemos escribir un polinomio de grado n , $s(t)$, que da el incremento de longitud de arco medido desde $t = 0$. La longitud del arco de curva $\mathbf{r}(t) \forall t \in [a, b]$ viene dado por $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi$. Podemos escribir el polinomio $s(t)$ respecto de la base de Bernstein, denotando s_i a sus coeficientes.

$$s(t) = \sum_{i=0}^n s_i B_i^n(t).$$

Y también podemos expresar el polinomio $\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$, que tendrá grado $n - 1$, respecto de la base de Bernstein, denotando σ_k a sus coeficientes.

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t).$$

Combinando las dos expresiones anteriores y utilizando (1.1.3), tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n s_i B_i^n(t) &= s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_0^t \sigma(\xi) d\xi = \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \int_0^t B_k^{n-1}(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n B_j^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \sum_{j=k+1}^n B_j^n(t), \end{aligned}$$

y por tanto, obtenemos la siguiente relación entre los coeficientes:

$$s_0 = 0 \quad \text{y} \quad s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

Para una curva de la forma (2.0.1) con $h(t) = 1$, $\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)$, y en términos de los coeficientes de Bernstein de los polinomios $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ de grado $m = \frac{1}{2}(n-1)$, tenemos para $k = 0, \dots, n-1$ (ver [5]):

$$\sigma_k = \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m, k)} \frac{\binom{m}{j} \binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j} + w_j w_{k-j}).$$

De estas expresiones, para las curvas de grado 5 definidas por el polígono de control (5.0.1), por ejemplo, tenemos $s_0 = 0$, $s_1 = \sigma_0/5$, $s_2 = (\sigma_0 + \sigma_1)/5$, \dots , $s_5 = (\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)/5$, donde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2 + w_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1, \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{1}{3}(u_0 u_2 + v_0 v_2 + w_0 w_2), \\ \sigma_3 &= u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2, \\ \sigma_4 &= u_2^2 + v_2^2 + w_2^2. \end{aligned}$$

En el caso de curvas cúbicas alabeadas HP definidas por la Proposición 4.0.3, tenemos la expresión (4.0.11) para el polinomio $\sigma(t)$.

Capítulo 7

Superficies canales racionales

Una superficie canal puede verse como la envoltura de una familia de esferas de radio fijo cuyos centros están a lo largo de la curva $\boldsymbol{\alpha}(t)$ dada en \mathbb{R}^3 , la curva “soporte” [9]. Ejemplos simples de esto son el cilindro circular y el toro, correspondientes a los casos donde la curva $\boldsymbol{\alpha}(t)$ es una recta y una circunferencia, respectivamente. En general, las superficies canales no admiten una parametrización simple, incluso si $\boldsymbol{\alpha}(t)$ es una curva polinomial o racional. Sin embargo, las superficies canales cuyas curvas soportes son HP son siempre racionales.

Para cualquier curva soporte $\mathbf{r}(t)$ con normal $\mathbf{n}(t)$ y binormal $\mathbf{b}(t)$, tenemos la representación

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{r}(t) + d \frac{(1 - s^2)\mathbf{n}(t) + 2s\mathbf{b}(t)}{1 + s^2} \quad (7.0.1)$$

para las superficies canales de radio d (nótese que $\mathbf{x}(s, t_0)$ define un círculo en el plano normal de $\mathbf{r}(t)$ en $t = t_0$). Para una curva polinomial general, la parametrización (7.0.1) no es racional porque \mathbf{n} y \mathbf{b} no dependen racionalmente de t . Incluso si $\mathbf{r}(t)$ es una curva alabeada HP, la expresión (7.0.1) sigue siendo no racional ya que, como vimos en el Capítulo 3, \mathbf{n} y \mathbf{b} no son funciones racionales de t para cada curva. A diferencia del caso de curvas soportes generales, este defecto se puede remediar fácilmente en el caso de curvas HP.

Si $\mathbf{r}(t)$ tiene hodógrafo (2.0.1) con $h(t) = 1$, introducimos el ángulo $\beta(t)$ definido por

$$(\cos \beta, \sin \beta) = \frac{(uw' - u'v, uw' - u'w)}{\sqrt{(uw' - u'v)^2 + (uw' - u'w)^2}},$$

y luego construimos una base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ en el plano normal a la curva en cada punto rotando (\mathbf{n}, \mathbf{b}) a través del ángulo $\beta(t)$ en sentido derecho definido por \mathbf{t} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0(t) \\ \mathbf{e}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta(t) & \sin \beta(t) \\ -\sin \beta(t) & \cos \beta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{bmatrix}.$$

Usando las expresiones (3.0.5), se puede comprobar que $\mathbf{e}_0(t)$ y $\mathbf{e}_1(t)$ dependen racionalmente de t , y entonces tenemos la parametrización racional

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{r}(t) + d \frac{(1 - s^2)\mathbf{e}_0(t) + 2s\mathbf{e}_1(t)}{1 + s^2}$$

de la superficie canal. El ángulo β determina cómo las líneas paramétricas $s = \text{constante}$ “giran” alrededor de la curva soporte (relativo a su triedro de Frenet) cuando nos movemos a lo largo de la superficie canal.

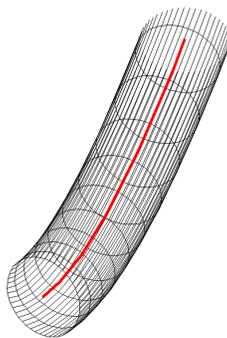


Figura 7.1: Curva con hodógrafo Pitagórico, y su superficie canal correspondiente para $d = 2$.

Bibliografía

- [1] M. P. Do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad textos, Madrid 1990.
- [2] R. T. Farouki, *Pythagorean-hodographs curves in practical use*, in: *Geometry Processing for Design and Manufacturing*. ed. R.E. Bamhill (SIAM, Philadelphia, 1992) 3-33.
- [3] R. T. Farouki, *The conformal map $z \rightarrow z^2$ of the hodograph plane*, *Comp. Aided Geom Design*, to appear.
- [4] R. T. Farouki, C. A. Neff, *Analytic properties of plane offset curves, y Algebraic properties of plane offset curves*, *Comp. Aided Geom Design* **7** (1990) 83-99 y 101-127.
- [5] R. T. Farouki, V. T. Rajan, *Algorithms for polinomials in Berstein form*, *Comp. Aided Geom Design* **5** (1988) 1-26.
- [6] R. T. Farouki, T. Sakkalis, *Pythagorean hodographs*. *IBM J. Res. Develop.* **34** (1990) 736-752.
- [7] R. T. Farouki, T. Sakkalis, *Real rational curves are not "unit speed"*, *Comp. Aided Geom. Design* **8** (1991) 151-157.
- [8] B. Guenter, R. Parent, *Computing the arc length of parametric curves*, *IEEE Comp. Graph. Appl.* **10** (1990) 72-78.
- [9] E. Kreyszig, *Differential Geometry* (University of Toronto Press, Toronto, 1959).
- [10] K. K. Kubota, *Pythagorean Triples in Unique Factorization Domains*, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972) 503-505.
- [11] A. W. Nutbourne, R. R. Martin, *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design* (Halsted Press (Wiley), New York, 1988).