Sucesiones interpolantes en el disco unidad

Álvaro García Rosa

Sucesiones interpolantes en el disco unidad

Álvaro García Rosa

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Luis Rodríguez Piazza

Índice general

Resumen

A lo largo de este texto, nuestro objetivo será presentar y demostrar la condición suficiente y necesaria, dada por Carleson, para que una sucesión compleja en el disco unidad sea una sucesión de interpolación universal.
Para ello, antes hablaremos y estudiaremos la geometría hiperbólica, las funciones holomorfas y cuestiones de análisis funcional, especialmente en los espacios de Lebesgue L^p y los espacios de Hardy H^p. A estos últimos espacios les prestaremos especial atención, pues serán fundamentales para nuestro propósito.
Como último preámbulo, veremos aspectos de teoría de la medida estudiando algunas funciones maximales, enfocándonos especialmente en las medidas de Carleson. Finalmente, daremos la condición necesaria y suficiente sobre una sucesión en $\mathbb{D}$ para que sea de interpolación universal, recreando la prueba que dio Carleson en su artículo de 1958.

Abstract

In this piece of work, our goal will be to introduce and prove the necessary and sufficient condition, given by Carleson, for a complex sequence on the unit disk to be an universal interpolating sequence.
In order to make this, first we will discuss and study the hyperbolic geometry, holomorphic functions and some questions about functional analysis, especially over Lebesgue spaces L^p and over Hardy spaces H^p. We will pay special attention to these last functional spaces, since they are essential for our purpose.
As the last preamble, we will see some aspects of measure theory studying some maximal functions, focusing ourselves on the Carleson measures. Finally, we will give the necessary and sufficient condition over a sequence on $\mathbb{D}$ in order to be an uni-

versal interpolating sequence, following the prove given by Carleson in his paper in 1958.

Introducción

A lo largo de este trabajo, nuestro objetivo será estudiar el problema de interpolación de sucesiones acotadas a través de funciones holomorfas acotadas, es decir, dar una condición suficiente y necesaria de interpolación en este caso particular. El primero en dar respuesta a este problema fue Lennart Carleson en un artículo de 1958. Nos centraremos en estudiar su demostración aunque existen pruebas más recientes y sofisticadas.

Para ello, desglosaremos el contenido y conceptos en varios capítulos. En el primero, recogeremos nociones fundamentales de Variable Compleja, introduciendo por primera vez el espacio de las funciones holomorfas y acotadas, H^∞ que será esencial a lo largo de todo este texto. Definimos los productos de Blaschke, que se usarán a lo largo de la demostración de Carleson. Además, introduciremos la geometría hiperbólica en el disco unidad, que tendrá un papel importante a la hora de simplificar la condición necesaria y suficiente dada por Carleson.

En el segundo capítulo haremos una parada para recordar unos espacios bien conocidos, estos son los espacios de Lebesgue o espacios L^p. A lo largo de este capítulo, daremos varios resultados y nociones de Análisis Funcional, algunos de ellos son resultados generales de espacios de medida o Banach y otros serán específicos para los espacios L^p. Todos ellos se usarán a lo largo de este trabajo como resultados auxiliares, haciendo menos engorrosas las demostraciones de los siguientes capítulos.

En el capítulo 3 presentaremos los espacios H^p, el espacio de funciones principal en este trabajo. Estos espacios de funciones son presentados por primera vez en 1923, gracias a Frigyes Riesz. Sin embargo, estos espacios ya habían sido usados anteriormente en 1915 por Godfrey Harold Hardy, de aquí que también se conozcan como espacios de Hardy. Estos espacios siguen siendo estudiados a día de hoy y han sido muy importantes a lo largo del siglo XX. Un ejemplo de esto es el famoso y complejo Teorema de la Corona, también resuelto por Lennart Carleson en la década de los 60. Se estudiarán las propiedades más básicas de los espacios H^p tales como normas y completitud. Además, se introduce el núcleo de Poisson y la integral de Poisson, que son fundamentales para indagar en algunas propiedades más específicas y de interés de los espacios de Hardy. Desde la propia definición de H^p se intuye que están estrechamente relacionados con los espacios L^p. Esto nos motiva a buscar una relación explícita, logrando identificar H^p con un subconjunto de L^p en el toro. Por último, se presenta la factorización de las funciones H^p como un producto de Blaschke y una potencia de una función de H^2, donde se consigue además una relación entre las normas.

En el capítulo 4, comenzamos estudiando algunas funciones maximales, consiguiendo algunas relaciones entre ellas. Sin embargo, lo realmente interesante para nuestro propósito son las medidas de Carleson, concepto que, de nuevo, fue introducido por Lennart Carleson. Nuestra pregunta a lo largo de este capítulo será la siguiente : ¿podemos dar una caracterización que nos diga si una medida es de Carleson? La respuesta será afirmativa, y se recoge al final del capítulo.

Finalmente, en el quinto y último capítulo retomamos el objetivo de este trabajo, dar la demostración del Teorema de interpolación de Carleson. La pregunta que queremos responder es si podemos caracterizar las sucesiones $\{z_\nu\}$ en el disco unidad para las que dada cualquier sucesión acotada $\{w_\nu\}$ en $\mathbb{C}$, existe una función f en H^∞ tal que $f(z_\nu) = w_\nu$ para todo ν. En ese caso, diremos que $\{z_\nu\}$ es una sucesión universal de interpolación. Comenzamos definiendo este concepto y dando algunas propiedades básicas.
Se introduce la constante de sucesiones de interpolación universales y gracias a este concepto y al Teorema de Montel conseguiremos reducir el problema a trabajar con sucesiones finitas. A continuación, en la primera sección se desarrollan y detallan un poco más algunos de los pasos que Carleson da en su artículo de 1958.
En la segunda y última sección del capítulo se da la buscada condición suficiente y necesaria sobre la sucesión $\{z_\nu\}$: que sea uniformemente separada. O lo que es lo mismo, hablando en términos de geometría hiperbólica, que el productorio de las distancias de un término de la sucesión $\{z_\nu\}$ con el resto sea mayor que un cierto $\delta > 0$, para todo término de $\{z_\nu\}$. Básicamente, se recoge la prueba original de Carleson, en la que hacemos uso de los conceptos y conocimientos que se presentan y prueban a lo largo de los capítulos anteriores y al comienzo de este mismo. La única diferencia de nuestra presentación con el artículo de Carleson es el uso del concepto de medida de

Carleson (ímplicito en el artículo) y de su caracterización general, que es un resultado posterior.

Definiciones y notación previa

Notación

- Llamaremos disco unidad, y lo notaremos como $\mathbb{D}$ al conjunto
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$
- Diremos que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una región si es abierto y conexo.
- Sea Ω es un subconjunto de $\mathbb{C}$. Notaremos como $\partial\Omega$ a su frontera y $\overline{\Omega}$ a su clausura.
- Notaremos como $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de las funciones holomorfas en Ω, siendo Ω un abierto de $\mathbb{C}$.

Definiciones

Definición 0.1. *Sean Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{C}$. Diremos que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es un isomorfismo si es una función biyectiva tal que ella y su inversa f^{-1} son holomorfas. Si además, $\Omega_1 = \Omega_2$, diremos que f es un automorfismo.*

Definición 0.2. *Denotaremos como $H^\infty(\mathbb{D})$ al conjunto de las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$.*

Definición 0.3. *Definimos el toro, que denominaremos $\mathbb{T}$, al conjunto de puntos de la frontera del disco unidad, es decir, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, es decir*
$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

1 Funciones holomorfas

Primero introduciremos algunos resultados entre los que encontraremos algunos bien conocidos y a los que recurriremos a lo largo de este texto.

Teorema 1.1 (Primer principio del módulo máximo).
Sea Ω una región del plano complejo (Ω abierto y conexo), $z_0 \in \Omega$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $|f|$ tiene un máximo relativo (o máximo local) en z_0, entonces f es constante en Ω.

Demostración.
Este resultado se cubre en la asignatura *Variable Compleja*, puede verse la prueba en [2,Theorem 10.24].

Corolario 1.1 (Segundo principio del módulo máximo).
Sean Ω un abierto acotado del plano complejo, y $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Entonces, $|f|$ alcanza su valor máximo en la frontera $\partial\Omega$, es decir

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

1.1 Geometría en el disco unidad

Lema 1.1 (de Schwarz).
Supongamos $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ y $f(0) = 0$. Entonces

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1}$$

$$\left|f'(0)\right| \leq 1. \tag{1.2}$$

Además, si se verifica la igualdad en (1.1) para algún $z \in U \setminus \{0\}$, o si se verifica la igualdad en (1.2), entonces $f(z) = \lambda z$, donde λ es una constante unimodular, es decir, f es un giro.

Demostración.
Este lema se prueba en la asignatura *Variable Compleja* (veáse [2,Theorem 12.2]).

En la siguiente proposición y en lo que sigue denotamos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Proposición 1.1.
Todo automorfismo del $\mathbb{C}_\infty$ es de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc \neq 0.$$

A este tipo de funciones les llamaremos transformaciones bilineales o funciones de Möbius.

Demostración.
Omitiremos la prueba ya que es materia correspondiente a la asignatura *Variable Compleja.*

Lema 1.2. Sea $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa y biyectiva, con $g(0) = 0$. Entonces existe $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$, tal que $g(z) = cz$, para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, g es un giro.

Demostración.
Este resultado se ve en la asignatura *Variable Compleja* (veáse en [1, pág. 263]).

Teorema 1.2.
Los automorfismos de $\mathbb{D}$ son las funciones de Möbius de la forma:

$$f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad |z| < 1,$$

con $a \in \mathbb{D}$, y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Demostración.
Sea la función de Möbius $g(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$, por lo que es un isomorfismo del *plano ampliado*, y manda círculos en círculos, veámoslo.

$$\left|e^{i\vartheta} - a\right| = \left|e^{-i\vartheta} - \overline{a}\right| = \left|1 - \overline{a}e^{i\vartheta}\right|, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

de estas igualdades deducimos que para $|g(z)| = 1$ para $z = e^{i\vartheta}$ para cualquier $\vartheta \in [0, 2\pi]$, luego g manda $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$. Y como $g(a) = 0$, g manda $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Y por tanto $g(z)$ también es un automorfismo del disco unidad.
Recíprocamente, sea $h(z)$ un automorfismo de $\mathbb{D}$ con $a = h^{-1}(0)$.Sea $g(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Entonces, $h \circ g^{-1}(w)$ es también automorfismo del disco. Además, $(h \circ g^{-1})(0) = h(a) = 0$ y por tanto es un giro por el lema anterior y se tiene $(h \circ g^{-1})(w) = e^{i\varphi}w$ con $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Llamando $w = g(z)$ tenemos $h(z) = e^{i\varphi}g(z)$.

Teorema 1.3 (Lema de Pick).
Sea f analítica en $\mathbb{D}$ y satisfaciendo $|f(z)| < 1$ para $|z| < 1$, entonces

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

Además, se alcanza la igualdad en (1.3) *si y solo si $f(z)$ es un automorfismo de $\mathbb{D}$.*

Demostración.
Para probar (1.3), llevaremos z y $f(z)$ al 0 mediante automorfismos del disco y aplicar el *Lema de Schwarz* a dicha composición.
Fijemos $z_0 \in \mathbb{D}$ y $w_0 = f(z_0)$. Sea $g(z)$ y $h(z)$ automorfismos de $\mathbb{D}$ con $f(0) = z_0$ y $h(w_0) = 0$, es decir,

$$g(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}, \qquad h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}.$$

Entonces $h \circ f \circ g$ manda el 0 al 0. Del *Lema de Schwarz* y por la regla de la cadena obtenemos

$$\left|(h \circ f \circ g)'(0)\right| = \left|h'(w_0)f'(z_0)g'(0)\right| \leq 1.$$

Luego, $\left|f'(z_0)\right| \leq 1/\left|g'(0)\right|\left|h'(w_0)\right|$. Sustituyendo $g'(0) = 1 - \left|z_0\right|^2$ y $h'(w_0) = 1/(1 - \left|w_0\right|^2)$ obtenemos (1.3). Ahora, si $f(z)$ es un automorfismo de $\mathbb{D}$, entonces también lo es la composición $h \circ f \circ g$ y se alcanza la igualdad en la inecuación anterior y, por tanto, se da la igualdad en (1.3). Recíprocamente, supongamos que $f(z)$ es una función analítica de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$ tal que se da la igualdad en la última inecuación en algún punto z_0. Esto significa que $|(h \circ f \circ g)'(0)| = 1$, es decir, es una multiplicación por constante unimodular y por consiguiente, un automorfismo de $\mathbb{D}$. Componiendo a la izquierda por h^{-1} y a la derecha por g^{-1}, concluimos que f es un automorfismo de $\mathbb{D}$.

Presentemos ahora la distancias hiperbólica y pseudo-hiperbólica, junto con algunas de sus propiedades con las que trabajaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.

Dada γ una curva regular a trozos en $\mathbb{D}$ se denomina :

$$\textit{Longitud hiperbólica de } \gamma = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Sean $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$. Se denomina distancia hiperbólica $d(z_0, z_1)$ al ínfimo de las longitudes hiperbólicas de las curvas regulares a trozos γ en $\mathbb{D}$ que unen z_0 y z_1.

A menudo aparece factor 2 multiplicando a la integral en la definición con la única función de ajustar la curvatura de la métrica que define (esto lo veremos a continuación) a -1. Sin embargo, es indiferente para nuestros intereses.

Proposición 1.2.

La distancia hiperbólica es una distancia.

Demostración.

Sean $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$

Es claro que $d(z_0, z_1) \geq 0$, pues si $\gamma \subseteq \mathbb{D}$ el integrando es positivo. Además, $d(z_0, z_1)$ $\geq |z_0 - z_1|$ pues como $\frac{1}{1-|z|} \geq 1$, si γ es una curva regular que une z_0 y z_1,

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} \geq \int_\gamma 1|dz| \geq |z_1 - z_0|.$$

Luego $d(z_0, z_1) \neq 0$ si $z_0 \neq z_1$. Por otro lado, es obvio que si $z_0 = z_1$ entonces $d(z_0, z_1) = 0$.

Además, si γ es una curva regular de z_0 a z_1, entonces, si γ_1 es la curva γ pero recorrida desde z_1 a z_0, γ_1 es una curva regular y como las integrales con respecto a la longitud de curva son invariantes por orientación se tiene

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z^2|} = \int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{1-|z^2|},$$

por lo que $d(z_0, z_1) = d(z_1, z_0)$.

Finalmente, sea $z_2 \in \mathbb{D}$, veamos que $d(z_0, z_2) \leq d(z_0, z_1) + d(z_1, z_2)$.

Razonemos por reducción al absurdo. Si $d(z_0, z_2) > d(z_0, z_1) + d(z_1, z_2)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ *tal que* $d(z_0, z_2) > d(z_0, z_1) + d(z_1, z_2) + \varepsilon$ lo que implica que existen γ_0, γ_1 curvas regulares cuyas longitudes hiperbólicas distan menos que $\varepsilon/2$ de $d(z_0, z_1)$ y $d(z_1, z_2)$ respectivamente. Pero esto es una contradicción, pues de ser así, $\gamma_0 + \gamma_1$ (la concatenación de ambas curvas) uniría z_0 y z_2 y su longitud sería menor que $d(z_0, z_2)$

Definición 1.2. *Diremos que una curva es geodésica entre z_0 y z_1 respecto de una distancia χ si dicha curva es de mínima longitud (respecto χ) uniendo ambos puntos.*

Como veremos ahora, la distancia hiperbólica tiene un comportamiento especial con respecto a algunos tipos de funciones de interés.

Proposición 1.3.
Se tiene que :

a) Si $w = f(z)$ es analítica con $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ entonces

$$d(f(z_0), f(z_1)) \leq d(z_0, z_1), \quad \text{con } z_0, z_1 \in \mathbb{D}.$$

b) Si además f es un automorfismo de $\mathbb{D}$ se tiene

$$d(f(z_0), f(z_1)) = d(z_0, z_1), \quad \text{con } z_0, z_1 \in \mathbb{D}.$$

Demostración.

a) Sea γ una curva regular uniendo z_0 a z_1, entonces $f \circ \gamma$ lleva $f(z_0)$ a $f(z_1)$. Por el Lema de Pick y por la propia definición tenemos

$$d(f(z_0), f(z_1)) \leq \int_{f\circ\gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_\gamma \frac{|f'(z)|\,|dz|}{1-|f(z)|^2} \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Tomando ínfimo en las curvas regulares γ, se tiene

$$d(f(z_0), f(z_1)) \leq d(z_0, z_1).$$

b) Aplicando *a*) a f,

$$d(f(z_0), f(z_1)) \leq d(z_0, z_1),$$

pero aplicando de nuevo *a*) a f^{-1} obtenemos

$$d(z_0, z_1) = d(f^{-1}(f(z_0)), f^{-1}(f(z_1))) \leq d(f(z_0), f(z_1)) \leq d(z_0, z_1)$$

y hemos terminado.

Proposición 1.4.
Dados z_0 y z_1 en $\mathbb{D}$ distintos, existe una única curva de longitud mínima para la distancia hiperbólica uniendo ambos puntos, esta es el arco de circunferencia pasando por z_0 y z_1 que es ortogonal a la circunferencia unidad.

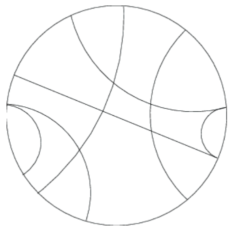


Figura 1.1: Geodésicas hiperbólicas

Demostración.
Sea $w = f(z)$ un automorfismo de $\mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$. Multiplicando por una constante unimodular, podemos adaptar $f(z_1) = r > 0$. Como f es automorfismo del disco, preserva longitudes hiperbólicas y manda arcos ortogonales a la circunferencia unidad en arcos ortogonales a la circunferencia unidad, basta ver que el segmento de 0 a r es el camino de longitud hiperbólica mínima de 0 a r.
Sea $\gamma(t)= x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq 1$, un camino regular a trozos en $\mathbb{D}$ desde 0 a r. Sea ahora $\alpha(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t)) = x(t)$ es un camino de 0 a r por el eje real, y

$$\int_\alpha \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^1 \frac{|dx(t)|}{1-x(t)^2} \leq \int_0^1 \frac{|dx(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Si para algún t ocurre que $y(t) \neq 0$, entonces $|\gamma(t)| > |x(t)|$ y la primera desigualdad de arriba sería estricta. En tal caso, el camino $\alpha(t)$ del eje real sería estrictamente más corto que $\gamma(t)$. Es más, si $\alpha(t)$ es decreciente en un intervalo podemos hacer la integral más pequeña al quitar el intervalo donde $\alpha(t)$ empieza y termina en el mismo valor. Concluimos pues que la integral es mínima justamente cuando $\gamma(t)$ es real y no decreciente, en cuyo caso el camino que da el mínimo es el segmento desde 0 a r. ∎

Definición 1.3. *Se define la distancia pseudo-hiperbólica entre z_0 y z_1 como*

$$\rho(z_0, z_1) = \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_0} \right| = \left| \varphi_{z_1}(z_0) \right|,$$

donde φ_{z_1} es el automorfismo de $\mathbb{D}$ de la siguiente forma

$$\varphi_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z}.$$

De hecho, $\varrho(z_0, z_1) = |\varphi(z_0)|$, siendo φ cualquier automorfismo del disco unidad cumpliendo $\varphi(z_1) = 0$ ya que entonces, $\varphi = \lambda\varphi_{z_1}$ con $|\lambda| = 1$.

Observación 1.1.
Con esta definición, podemos encontrar una relación entre la distancia hiperbólica y la distancia pseudo-hiperbólica.
Si calculamos la distancia hiperbólica de 0 a z obtenemos

$$d(0,z) = \int_0^{|z|} \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^{|z|} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right] dt =$$
$$\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) = \log\left(\frac{1+|\rho(0,z)|}{1-|\rho(0,z)|}\right).$$

Y, esta fórmula en realidad vale para la distancia de cualquier a hasta b con a, b complejos del disco unidad, pues podemos aplicar un automorfimo del disco adecuado, que será invariante para la distancia hiperbólica y ,por tanto, para la pseudo-hiperbólica.

Ahora, podemos simplificar la relación entre la distancia hiperbólica y la pseudo-hiperbólica

$$e^{d(a,b)} = \frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}, \quad \text{de donde} \quad e^{d(a,b)} - \rho(a,b)e^{d(a,b)} = 1 + \rho(a,b).$$

Por tanto, tomando factor común y despejando $\rho(a,b)$

$$\rho(a,b) = \frac{e^{d(a,b)} - 1}{e^{d(a,b)} + 1}.$$

Finalmente, multiplicando en el numerador y denominador por $e^{-d(a,b)/2}$,

$$\rho(a,b) = \frac{e^{d(a,b)/2} - e^{-d(a,b)/2}}{e^{d(a,b)/2} + e^{-d(a,b)/2}} = \tanh\left(\frac{d(a,b)}{2}\right),$$

de donde obtenemos la relación buscada

$$d(a,b) = 2\tanh^{-1}(\rho(a,b)) \Rightarrow d(a,b) = 2\tanh^{-1}\left(\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|\right).$$

Además, cabría esperar que también fuese una métrica o distancia, lo que por alusiones nos lleva al siguiente resultado.

Proposición 1.5.
La distancia pseudo-hiperbólica es una distancia.

Demostración.
Es obvio que $\rho(z_0, z_1) = 0$ si y solo si $z_0 = z_1$ y que $\rho(z_0, z_1) \geq 0$.
Además $\rho(z_0, z_1) = \rho(z_1, z_0)$ si y solo si $\left|\frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_0}\right| = \left|\frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0} z_1}\right|$ si y solo si $\left|1 - \overline{z_1} z_0\right| = \left|1 - \overline{z_0} z_1\right|$, y efectivamente esto se tiene pues son conjugados.
Finalmente, resta demostrar la desigualdad triangular $\rho(z_0, z_2) \leq \rho(z_0, z_1) + \rho(z_1, z_2)$, si d es la distancia hiperbólica sabemos que

$$d = 2\tanh^{-1}(\rho) \text{ si y solo si } \rho = \tanh(\frac{d}{2})$$

Usando esto, sean z_0, z_1 y z_2 puntos distintos de $\mathbb{D}$

$$\rho(z_0, z_2) = \tanh\left(\frac{d(z_0, z_2)}{2}\right) \leq \tanh\left(\frac{d(z_0, z_1) + d(z_1, z_2)}{2}\right)$$

Donde en la última desigualdad se ha usado que la tangente hiperbólica ,tanh, es creciente y que d es distancia. Ahora, es conocida la igualdad trigonométrica $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$, siguiendo la cadena de arriba tenemos

$$\tanh\left(\frac{d(z_0, z_1) + d(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{\tanh\left(\frac{d(z_0, z_1)}{2}\right) + \tanh\left(\frac{d(z_1, z_2)}{2}\right)}{1 + \tanh\left(\frac{d(z_0, z_1)}{2}\right)\tanh\left(\frac{d(z_1, z_2)}{2}\right)}$$

$$< \tanh\left(\frac{d(z_0, z_1)}{2}\right) + \tanh\left(\frac{d(z_1, z_2)}{2}\right) = \rho(z_0, z_1) + \rho(z_1, z_2)$$

De hecho, hemos probado (gracias a que z_0, z_1 y z_2 son distintos) la desigualdad estricta.

1.2 Productos de Blaschke

Definición 1.4. *Productos de Blaschke finitos*
Un producto de Blaschke finito será una constante unimodular o un producto de automorfismos de $\mathbb{D}$ *, es decir, una función de la forma*

$$f(z) = e^{i\vartheta} \prod_{n=1}^{N} \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z}$$

con $\vartheta \in \mathbb{R}$ *,* $N \in \mathbb{N}$ *y* $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$

Para continuar, antes recordaremos algunas propiedades de convergencia y analiticidad de productos infinitos.

Proposición 1.6 (Analiticidad de productos infinitos en $\mathcal{H}(\Omega)$).
Sea Ω una región del plano complejo, y $\{f_n\}_n$ una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $\sum_n |f_n(z) - 1|$ converge normalmente en compactos de Ω. Se tienen :

(a) Para todo $z \in \Omega$ el producto $\prod_n f_n(z)$ es absolutamente convergente, y $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es también una función holomorfa en Ω.

(b) Si $A_n = \{z \in \Omega : f_n(z) = 0\}$, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es el conjunto de los ceros de P; es decir, $A = \{z \in \Omega : P(z) = 0\}$.

(c) Denotando por $m(f, z)$ la multiplicidad del cero z de f, entonces, para cada $z \in A$, se tiene $m(P, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z)$.

Demostración.
Este resultado se ve en la asignatura *Variable compleja* (veáse en [2, Theorem 15.6]).
∎

Proposición 1.7 (Criterio de Weierstrass para productos infinitos de $\mathcal{H}(\Omega)$).
Sean Ω una región del plano complejo, y $\{f_n\}_n$ una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$. Si para todo compacto K de Ω existe una sucesión de números positivos $\{M_n\}_n$ (que puede depender de K) tal que

$$\sum_n M_n < +\infty, \qquad y \qquad |f_n(z) - 1| \leq M_n, \qquad \text{para todo } z \in K$$

entonces la serie $\sum_n |f_n - 1|$ converge normalmente en compactos de Ω, y se verifican, por lo tanto las tesis del teorema anterior para el producto infinito $\prod_n f_n$.

Observación 1.2.
La condición de la proposición anterior basta verificarla para los compactos $\{K_m\}_m$ de una sucesión exhaustiva en Ω. También es suficiente que, para cada $z \in \Omega$, exista $\rho_z > 0$ tal que $K = B(z, \rho_z)$ verifique la condición. En $\mathbb{D}$, basta ver que la condición se verifica para cada bola $B(0, r)$ con $0 < r < 1$.

Teorema 1.4.
Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Entonces el producto funcional infinito

$$B(z) := \alpha z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \; (z \in \mathbb{D})$$

Define una funcion $B \in H(\mathbb{D})$ tal que $|B(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, $B \in H^{\infty}(\mathbb{D})$. Además, sus ceros son exactamente los puntos a_n (con multiplicidad dada por el número de veces que se repiten en la sucesión), más el origen si k>0.

Demostración.
Supongamos probado que, para cada $r \in (0, 1)$, el producto converge normalmente en $B(0, r)$. En tal caso, convergería normalmente en cada compacto de $\mathbb{D}$ (por la observación anterior a este teorema). Ya que cada factor está en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y tiene como único cero a a_n, resulta de la proposición anterior que $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y que sus ceros son los del enunciado del teorema. Puesto que cada factor tiene módulo menor que 1 en $\mathbb{D}$, lo mismo ocurrirá con el producto B. Así que, fijado un $r \in (0, 1)$, basta probar la convergencia normal en $B(0, r)$, lo cual (por la proposición anterior) equivale a probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|=r} \left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}\right| < +\infty$.
Fijemos z con $|z| < r$, observemos que

$$\left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}\right| = \left|\frac{a_n + |a_n| z}{(1 - \overline{a_n} z) a_n}\right| (1 - |a_n|) \leq \frac{1 + r}{1 - r}(1 - |a_n|)$$

Y como por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$, hemos terminado.

Definición 1.5. *Producto de Blaschke*
Una función es un producto de Blaschke si bien es un producto finito de Blaschke o bien es una función B como la función descrita en el teorema anterior.

Observación 1.3.
Una constante unimodular es un producto de Blaschke.
Por convenio, a la sucesión vacía se le asocia el producto de Blaschke dado por la función 1 constante.

Damos ahora una condición necesaria sobre los ceros de una función holomorfa y acotada en el disco unidad, es decir, una función de $H^\infty(\mathbb{D})$. Para ello, recordaremos primero un resultado ya conocido.

Teorema 1.5 (Fórmula de Jensen). *Sea f una función holomorfa en algún abierto que contenga al disco cerrado $\overline{B}(0,r)$ de centro 0 y radio $r > 0$. Si $f(0) \neq 0$ y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son los ceros de f en $\overline{B}(0,r)$ enumerados de acuerdo a sus multiplicidades; entonces*

$$\log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log(r/\left|\alpha_j\right|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{it})\right| dt$$

Demostración.
Este resultado se cubre en la asignatura *Variable Compleja*, veáse en [6, pág. 280].

Teorema 1.6 (Condición necesaria sobre los ceros de una función $H^\infty(\mathbb{D})$). *Sea $f \in H^\infty(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ y sea $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de ceros de f, enumerados según su multiplicidad. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\left|a_n\right|) < \infty$*

Demostración.
Si hay un número finito de ceros, hemos acabado. En caso contrario, si hay un número infinito, por el principio de prolongación analítica $\left|a_n\right| \to 1$, así que podemos suponer, con un cambio de orden y desplazamiento de los índices si es preciso, que el origen que es $m-$múltiple con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y que los ceros no nulos cumplen $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$. Denominemos, $c := \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ahora, usando la *fórmula de Jensen* y tomando logaritmo, tenemos que para todo $r \in (0,1)$

$$\sum_{|a_n|<r} \log\frac{r}{|a_n|} = -\log(|c|\, r^m) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\vartheta})\right| d\vartheta \leq -\log(|c|\, r^m) + C$$

donde C es una constante finita, ya que f es acotada. Sea $N \in \mathbb{N}$. Para cada $r > |a_N|$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} log\frac{r}{|a_n|} \leq \sum_{|a_n|<r} log\frac{r}{|a_n|} \leq -log(|c|\, r^m) + C$$

Cuando $r \to 1$, $\sum_{n=1}^{N} \log\frac{1}{|a_n|} \leq M \in (0,+\infty)$ para todo $N \in \mathbb{N}$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{1}{|a_n|}$ converge. Como es una serie de términos positivos, de $\lim_{t\to 1^-} \frac{\log(1/t)}{1-t} = 1$

y del criterio de comparación por paso al límite se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ converge también. ∎

2 | Propiedades de los espacios L^p

En este capítulo recordaremos algunas propiedades de los bien conocidos espacios de Lebesgue, además de recordar algunas otras que nos serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo.
Comenzamos recordando su definición y su norma

Definición 2.1 (Espacios L^p). *Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida, se define el espacio $L^p(\mu)$ como el espacio cociente de las funciones medibles f tales que*

$$\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$$

bajo la relación de equivalencia

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ en casi por todo } \Leftrightarrow \int_X |f-g|^p \, d\mu = 0.$$

Se define el espacio L^∞ como el conjunto cociente de funciones medibles esencialmente acotadas, es decir, las funciones f medibles cumpliendo

$$\text{ínf}\,\{a > 0 \, : \, \mu(\{x \in X \, : \, |f(x)| \geq a\}) = 0\} < \infty$$

bajo la relación de equivalencia descrita arriba

Algunas propiedades básicas de estos espacios son

- Los $L^p(\mu)$ con $p \in [1,\infty)$ son espacios de Banach para la norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

  veáse [2,Theorem 3.11].
  Además, L^2 es Hilbert con producto escalar $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g} d\mu$.

- $L^\infty(\mu)$ es Banach para la norma
$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\,\{a > 0 \,:\, \mu(\{x \in X \,:\, |f(x)| \geq a\}) = 0\}\,,$$
veáse [2,Theorem 3.11].
Nótese que al tomar la relación de equivalencia toda función *esencialmente acotada* tiene un representante acotado para el que se tiene la igualdad $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty$.
- Si $\mu(X) < \infty$, entonces se tiene la cadena de inclusiones $L^\infty \subseteq L^q \subseteq L^p$ si $q > p$.
- Si $p \in (1,\infty)$, L^p es reflexivo. Es más, si $p\,,q \in (1,\infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se dice que p y q son conjugados y entonces el dual topológico de L^p se identifica con L^q y viceversa. Esto se precisará más adelante.

Proposición 2.1.
Si existe p_0 tal que $\|f\|_{L^p} < \infty$ para todo $p \geq p_0$, entonces
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$$

Demostración.
Fijemos $0 < \alpha < \|f\|_\infty$ y consideremos el conjunto $S_\alpha = \{|f(x)| \geq \alpha\}$. Tenemos entonces
$$\|f\|_{L^p} \geq \left(\int_{S_\alpha} \alpha^p d\mu\right)^{1/p} = \alpha\mu(S_\alpha)^{1/p}.$$
Pero $\mu(S_\alpha)$ es positiva y finita pues, $||f||_\infty > \alpha$ y
$$+\infty > \|f\|_p^p \geq \int_{S_\alpha} |f|^p\, d\mu \geq \alpha^p \mu(S_\alpha),$$
tomando límite inferior
$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geq \alpha.$$
Como esto es cierto para todo $0 < \alpha < \|f\|_\infty$, tomando límite cuando $\alpha \to \|f\|_\infty$
$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_\infty\,.$$
Por otro lado, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ-e.c.t y para $p > p_0$
$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^{p-p_0}\, |f(x)|^{p_0}\, d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty^{\frac{p-p_0}{p}}\, \|f\|_{L^{p_0}}^{\frac{p_0}{p}}\,,$$

tomando límite superior cuando $p \to \infty$ tenemos la desigualdad contraria

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \limsup_{p\to\infty} \|f\|_{\infty}^{\frac{p-p_0}{p}} \|f\|_{L^{p_0}}^{\frac{p_0}{p}} = \|f\|_{\infty}$$

y por tanto la igualdad.

A continuación recordamos también el Teorema de Hahn-Banach tanto en su versión analítica, de extensión de funcionales, como en su versión geométrica, de separación de conjuntos convexos, que serán de utilidad para probar algunos de los resultados que se introducirán más adelante

Teorema 2.1 (Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach).
Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea M un subespacio vectorial de E. Supongamos que p es un funcional sublineal sobre E, que $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $g_{|M} = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración.
Este teorema forma parte del contenido de la asignatura *Análisis Funcional* (veáse en [8,Theorem 3.3]).

Teorema 2.2 (Versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach).
Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y A, B subconjuntos convexos de X. Supongamos que $B \neq \emptyset$, $int(A) \neq \emptyset$ e $int(A) \cap B = \emptyset$. Entonces, existen $f \in X^* \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$Re(f(a)) \leq \gamma \leq Re(f(b)) \qquad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

De hecho, se tiene que

$$Re(f(a)) < \gamma \qquad \forall a \in int(A).$$

Demostración.
Este teorema forma parte del contenido de la asignatura *Análisis Funcional* (veáse en [8,Theorem 3.4]).

Proposición 2.2.
Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{C}$, $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Supongamos que existe un único $u \in X^*$ con $\|u\| = 1$ y $u(x_0) = \|x_0\|$. Sea $y \in Y$ tal que

$$\|x_0 + \alpha y\| \geq \|x_0\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Entonces $u(y) = 0$.

Demostración.
Comencemos definiendo los conjuntos

$$G = B\left(0, \|x_0\|\right) \text{ abierto convexo,}$$
$$F = \left\{x_0 + \alpha y : \alpha \in \mathbb{C}\right\} \text{ cerrado convexo.}$$

Por la *versión geométrica del Teorema de Hanh-Banach* existe $v \in X^*$ tal que

$$Re(v(f)) > Re(v(g)) \qquad \text{para todo } f \in F \text{ y para todo } g \in G.$$

Nótese que podemos suponer que $\|v\| = 1$ ya que si no fuese así, podemos considerar $v^* = \frac{v}{\|v\|}$ que sigue cumpliendo lo anterior.
Ahora, veamos que $\sup_{g \in G} Re(v(g)) = \|x_0\|$. Como $\|v\| = 1$ se tiene por definición

$$\sup_{x \in B(0,1)} |v(x)| = 1 \quad \text{si y solo si} \quad \sup_{x \in B(0,\|x_0\|)} |v(x)| = \|x_0\|.$$

Luego, por definición de supremo, para todo $\varepsilon > 0$ tal que existe $y \in B(0, \|x_0\|)$ con

$$\|x_0\| - \varepsilon \leq |v(y)| \leq \|x_0\|.$$

Y existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha v(y) = |v(y)|$. Por lo que si $z = \alpha y$ entonces $z \in B(0, \|x_0\|)$. Además, $Re(v(z)) = v(y)$, y tenemos

$$\|x_0\| - \varepsilon \leq Re(v(z)) \leq \|x_0\|.$$

Luego,

$$\sup_{x \in B(0,\|x_0\|)} Re(v(x)) = \|x_0\|.$$

Además, como $Re(v(f)) > Re(v(g))$ para todo $f \in F$, para todo $g \in G$, al tomar supremo en $Re(v(g))$ obtenemos $Re(v(f)) \geq \|x_0\|$, en particular $Re(v(x_0)) \geq \|x_0\|$. Por continuidad, sabiendo que $\|v\| = 1$, se tiene $|v(x_0)| \leq \|x_0\|$, luego

$$Re(v(x_0)) \leq |v(x_0)| \leq \|x_0\|$$

Luego, $Re(v(x_0)) = \|x_0\|$. Por tanto las desigualdades anteriores son igualdades, en particular deducimos $Re(v(x_0)) = |v(x_0)|$, luego $v(x_0)$ es real y positivo. Entonces, $v(x_0) = \|x_0\|$ y habríamos encontrado otro funcional cumpliendo las hipótesis luego por unicidad debe ocurrir $v = u$.
Por último, veamos que $v(y) = 0$.
Por reducción al absurdo, supongamos $v(y) \neq 0$. $v(F) \neq \mathbb{C}$, pues $Re(v(f)) > Re(v(g))$ para todo $f \in F$, para todo $g \in G$ implica que en $v(f)$ no puede alcanzar los valores con la parte real de $v(g)$. Supongamos que $z \notin v(F)$. Podríamos expresarlo como $z = v(x_0) + bv(y)$ para cierto $b \in \mathbb{C}$, pero esto es contradicción ya que

$$z = v(x_0) + bv(y) = v(x_0 + by).$$

Por consiguiente,

$$z \in v(F)$$

y, por tanto, $v(y) = u(y) = 0$.

Observación 2.1.
La hipótesis $\|x_0 + \alpha y\| \geq \|x_0\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ la usamos implícitamente al usar la *versión geométrica del Teorema de Hanh-Banach*, nos indica que los conjuntos G y F usados en la demostración son disjuntos.

Para seguir, recordemos la definición de exponentes conjugados.

Definición 2.2. *Diremos que* $p, q \in (1, \infty)$ *son exponentes conjugados si satisfacen*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Proposición 2.3.
Para cada $f \in L^p$ definimos $\Lambda_f : L^q \to \mathbb{C}$ mediante

$$\Lambda_f(g) = \int fg \, d\mu$$

Entonces, Λ_f está bien definido, es lineal y continuo y con $\|\Lambda_f\|_{(L^q)^*} = \|f\|_{L^p}$. Es más, la aplicación

$$\begin{aligned} L^p &\longrightarrow (L^q)^* \\ f &\longmapsto \Lambda_f \end{aligned}$$

es una isometría lineal sobreyectiva que permite identificar L^p con el dual de L^q

Demostración.
Efectivamente el funcional :

$$\begin{aligned} \Lambda_f \ : L^q &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \int f g d\mu, \qquad f \in L^p \end{aligned}$$

Está bien definido por la desigualdad de Hölder, pues f y g son medibles y

$$\int |fg|\, d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty \quad \text{pues } f \in L^p \text{ y } g \in L^q$$

Como $\left|\int fg \ \ d\mu\right| \leq \int |fg|\, d\mu$, de las desigualdades de arriba también se deduce que es continuo. Además es lineal por la linealidad de la integral.
Para ver que la aplicación que a cada f le asocia Λ_f es isometría (es fácil ver que es lineal de nuevo por la linealidad de la integral), veamos primero que $\|\Lambda_f\|_{(L^q)^*} \leq \|f\|_{L^p}$

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_f\|_{(L^q)^*} = \sup\left\{|\Lambda_f(g)| \ : \ \|g\|_q = 1\right\} = \sup\left\{\int fgd\mu \ : \ \|g\|_q = 1\right\} \leq \\ &\leq \sup\left\{\int |fg|\, d\mu \ : \ \|g\|_q = 1\right\} \leq \sup\left\{\|g\|_q \|f\|_p \ : \ \|g\|_q = 1\right\} = \\ &= \sup\left\{\|f\|_p \ : \ \|g\|_q = 1\right\} = \|f\|_p \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $\|f\|_p = \alpha > 0$. Tomamos $g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|^p}{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$

Nótese que

$$|g|^q = \left(|f|^{p-1}\right)^q = |f|^p \Rightarrow \|g\|_q^q = \|f\|_p^p$$

Luego,

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p\, d\mu = \Lambda_f(g) \leq \|g\|_q \|\Lambda_f\| = \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|\Lambda_f\|$$

Despejando obtenemos la desigualdad buscada ya que

$$\|f\|_p^p \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} = \|f\|_p^{\frac{pq-p}{q}} = \|f\|_p^{\frac{(q-1)p}{q}} = \|f\|_p^{\frac{q}{q}} = \|f\|_p$$

Y por tanto $\|f\|_p \leq \|\Lambda_f\|_{(L^q)^*}$, lo que prueba que la aplicación $f \mapsto \Lambda_f$ es una isometría.
Finalmente, la sobreyectividad se prueba haciendo uso del *Teorema de Radon-Nikodym*, pero no lo haremos debido a que se escapa de los conocimientos del grado (veáse en [2, Theorem 6.16]). ∎

Proposición 2.4.
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $1 < p < +\infty$, $f \in L^p \setminus \{0\}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\exists ! g \in L^q$ con $\|g\|_q = 1$ y

$$\int gf \, d\mu = \|f\|_p$$

Demostración.
Existencia

Tomemos $g_0 = |f|^{p-2}\overline{f}$ y veamos que $g = \frac{g_0}{\|g_0\|_{L^q}}$ cumple las exigencias del enunciado. Primero,

$$\|g_0\|_{L^q}^q = \int ||f|^{p-2}\overline{f}|^q d\mu = \int |f^{p-1}|^q d\mu = \int |f|^p d\mu = \|f\|_{L^p}^p$$

luego, $g_0 \in L^q$ y por tanto g también. Además, $\|g\|_{L^q} = \frac{\|g_0\|_{L^q}}{\|g_0\|_{L^q}} = 1$. Finalmente,

$$\int fg \; d\mu = \int \frac{f|f|^{p-2}\overline{f}}{\|g_0\|_{L^q}} d\mu$$

como $\|g_0\|_{L^q}^q = \|f\|_{L^p}^p$ se tiene que $\|g_0\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}^{p/q}$ y

$$= \int \frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^{p/q}} d\mu = \|f\|_{L^p}^{p-p/q} = \|f\|_{L^p}$$

donde en la útlima igualdad hemos usado que de $1/p + 1/q = 1$ se obtiene que $p - p/q = 1$.

Unicidad

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\|f\|_p = 1$ y veamos que solo existe una función $g \in L^q$ cumpliendo las hipótesis.

$$1 = \|f\|_p = \int gf \, d\mu \leq \int |gf| \, d\mu \leq \int \left(\frac{|g|^q}{q} + \frac{|f|^p}{p} \right) d\mu = \frac{\|g\|_{L^q}^q}{q} + \frac{\|f\|_{L^p}^p}{p} = 1$$

Ya que $\|g\|_{L^q}^q = 1$ por hipótesis y $\|f\|_{L^p}^p = 1$ por la suposición que hemos comentado. Esto implica que las desigualdades anteriores son en realidad igualdades y por tanto debe ocurrir que $gf \geq 0$ μ-casi por todo. Además debe ocurrir que

$$|g||f| = \frac{|g|^q}{q} + \frac{|f|^p}{p} \qquad \text{en } \mu - \text{casi por todo}$$

Como esta igualdad es en casi todo punto, basta ver cuándo se da la igualdad en un $z \in X$ arbitrario con $x = |f(z)|$, $y = |g(z)|$. Es decir, tenemos que ver donde se da la igualdad en la desigualdad de Hölder para escalares :

$$xy \leq \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}.$$

En caso de igualdad, se daría uno de estos dos casos

$$x = y = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{y}{x^{q-1}} \leq \frac{1}{q} + \frac{\left(\frac{y}{x^{q-1}}\right)^p}{p},$$

pues $(q-1)p = q$. Si obviamos el caso $x = 0$ (que implica $y = 0$ y por tanto es trivial), efectuando el cambio de variables $t = \frac{y}{x^{q-1}}$ tenemos la desigualdad

$$t \leq \frac{1}{q} + \frac{t^p}{p},$$

que podemos manejar usando que $p/q = p - 1$ para llegar a

$$0 \leq t^p - tp + p - 1.$$

Definiendo $h(t) = t^p - tp + p - 1$, h tiene un cero en $t = 1$ y, $h'(t) = pt^{p-1} - p$ solo se anula en $t = 1$. Por tanto el único cero de $h(t)$ está en $t = 1$. Deshaciendo el cambio, esto implica que la única g posible debe cumplir $|f| = |g|^{q-1}$, como debía cumplirse que $gf \geq 0$, $gf = |gf|$ de donde

$$g = \frac{|gf|}{f} = \frac{|g||f|}{f}.$$

Usando la condición $|f| = |g|^{q-1}$ que hemos conseguido, tenemos

$$= \frac{1}{f}|f||f|^{1/(q-1)} = \frac{1}{f}|f|^{q/(q-1)}$$

y, usando la relación de conjugación de p y q, $\frac{q}{q-1} = p$ y,

$$= \frac{1}{f}|f|^p = |f|^{p-2}\frac{|f|^2}{f} = |f|^{p-2}\overline{f}.$$

Por lo que hemos probado que $g = |f|^{p-2}\overline{f}$ es necesariamente la única función cumpliendo el enunciado.

∎

Proposición 2.5 ($\left(L^1\right)^* \approx L^\infty$).
Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito.
Para cada $f \in L^\infty$ definimos $\Lambda_f : L^1 \to \mathbb{C}$ mediante

$$\Lambda_f(g) = \int fg \ d\mu.$$

Entonces, Λ_f está bien definido, es lineal y continuo y con $\|\Lambda_f\|_{(L^1)^*} = \|f\|_{L^\infty}$. Es más, la aplicación

$$\begin{aligned} L^\infty &\longrightarrow (L^1)^* \\ f &\longmapsto \Lambda_f \end{aligned}$$

es una isometría lineal sobreyectiva que permite identificar L^∞ con el dual de L^1

Demostración.
Sea $f \in L^\infty$, definimos el funcional :

$$\begin{aligned} \Lambda_f : & L^1 \to \mathbb{C} \\ & g \mapsto \int_X gf d\mu \quad \forall g \in L^1. \end{aligned}$$

Está bien definido pues

$$|f| \leq \|f\|_\infty \ \text{ en } \mu\text{-casi por todo, por lo que } |gf| \leq \|f\|_\infty |g| \ \text{ en } \mu\text{-casi por todo,}$$

de donde también se deduce la continuidad. La linealidad se deduce de la linealidad de la integral.
Tenemos que probar que la aplicación que manda cada $f \in L^\infty$ a su respectivo Λ_f es una isometría (de nuevo es fácil ver que es lineal debido a la linealidad de la integral), es decir, $\|\Lambda_f\|_{(L^1)^*} = \|f\|_\infty$.
De lo anterior deducimos que

$$\|\Lambda_f\|_{(L^1)^*} = \sup\left\{|\Lambda_f(g)| \ : \ \|g\|_1 = 1\right\} = \sup\left\{\int_X fgd\mu \ : \ \|g\|_1 = 1\right\} \leq$$
$$\sup\left\{\int_X |fg| \, d\mu \ : \ \|g\|_1 = 1\right\} \leq \sup\left\{\|f\|_\infty \|g\|_1 \ : \ \|g\|_1 = 1\right\} =$$
$$= \sup\left\{\|f\|_\infty \ : \ \|g\|_1 = 1\right\} = \|f\|_\infty .$$

Por otro lado, si $\|f\|_\infty = 0$ es trivial. Si $\|f\|_\infty > 0$ sea $\varepsilon > 0$, $\|f\|_\infty > \varepsilon$ y sea $A \subseteq \{w \in X : |f(w)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$, con $\mu(A) > 0$. Podemos suponer $\mu(A) < \infty$, de no serlo, podemos expresar X como $X = \cup_{n=1}^\infty B_n$ y podemos extraer un $A_0 = A \bigcap B_{n_0} \subset A$ para algún n_0 con $0 < \mu(A_0) < +\infty$.

Sea ahora $g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}\chi_A, & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$

Lo que implica que $\|g\|_1 = \int_X \left|\frac{|f|}{f}\chi_{A_0}\right| d\mu = \mu(A_0)$. Y de aquí obtenemos

$$\|g\|_1 \|\Lambda_f\|_{(L^1)^*} \geq \Lambda_f(g) = \int_{A_0} g f \, d\mu = \int_{A_0} |f| \, d\mu \geq \int_{A_0} \left(\|f\|_\infty - \varepsilon\right) d\mu =$$
$$= \left(\|f\|_\infty - \varepsilon\right) \mu(A_0) = \left(\|f\|_\infty - \varepsilon\right) \|g\|_1 .$$

Finalmente, despejando tenemos $\|\Lambda_f\|_{(L^1)^*} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ lo que implica que $\|\Lambda_f\|_{(L^1)^*} \geq \|f\|_\infty$.
La sobreyectividad se prueba haciendo uso del *Teorema de Radon-Nikodym*, pero no lo haremos debido a que se escapa a los conocimientos del grado (veáse en [2, Theorem 6.16]). ∎

Observación 2.2.
Sin embargo, el dual topológico de L^∞ no se identifica con L^1 aunque si es cierto que toda función de L^1 induce un elemento del dual de L^∞

Proposición 2.6.
Sea $1 < q < \infty$. Si $f, g \in L^q$ no nulas tales que $f \neq g$ en un conjunto de medida no nula (esto es, $\|f - g\|_{L^q} > 0$) y tales que $\|f\|_{L^q} = \|g\|_{L^q} = \alpha$, entonces

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^q} < \alpha$$

Demostración.
Podemos suponer sin pérdida de generalidad $\alpha = 1$. Queremos probar $\|f+g\|_{L^q} < 2$. Razonemos por reducción al absurdo, supongamos $\|f+g\|_{L^q} = 2$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int |f+g|^q d\mu &\leq \int (|f| + |g|)^q d\mu \\ &= \int (|f| + |q|)^{q-1} |f| d\mu + \int (|f| + |q|)^{q-1} |g| d\mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Usando Hölder,

$$\begin{aligned}&\leq \|(|f|+|g|)^{q-1}\|_{L^p}\|f\|_{L^q}+\|(|f|+|g|)^{q-1}\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\\&=\left(\int(|f|+|g|)^q d\mu\right)^{1/p}\left(\|f\|_{L^q}+\|g\|_{L^q}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Extraigamos de la cadena de desigualdades la siguiente desigualdad,

$$\int(|f|+|g|)^q d\mu \leq \left(\int(|f|+|g|)^q d\mu\right)^{1/p}\left(\|f\|_{L^q}+\|g\|_{L^q}\right).$$

Dividiendo por $\left(\int(|f|+|g|)^q d\mu\right)^{1/p}$ a ambos lados obtenemos

$$\left(\int |f|+|g|)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^q}+\|g\|_{L^q} \leq 2. \tag{2.3}$$

Si se da la igualdad en (2.1) deducimos que $|f+g|=|f|+|g|$ en μ-casi por todo. Es decir, esto recoge la idea de que el argumento de f y g es el mismo μ-casi por todo. La igualdad en (2.3) implica la igualdad en (2.2) en ambos sumandos, y gracias a la Proposición 2.4,

$$(|f|+|g|)^{q-1}=\gamma|f|^{q-1} \text{ y } (|f|+|g|)^{q-1}=\delta|g|^{q-1},$$

con $\gamma,\delta>0$. Tomando raíz $(q-1)$-ésima,

$$(|f|+|g|)=\gamma^{1/(q-1)}|f| \text{ y } (|f|+|g|)=\delta^{1/(q-1)}|g|.$$

Finalmente, debe ocurrir que $|f|=A|g|$ (con $A>0$) pero como $\|f\|_{L^q}=\|g\|_{L^q}=1$ necesariamente $A=1$ por lo que $|f|=|g|$ en $\mu-$casi por todo. Y como ya sabíamos que el argumento de f y el de g eran iguales en $\mu-$casi por todo, necesariamente $f=g$, lo que es una contradicción. ∎

Consideremos $L^p(\mathbb{T})$ con la medida de arco normalizada, m (sin embargo, a menudo abusaremos de notación escribiendo μ). Las funciones de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$ podemos identificarlas con funciones $2\pi-$periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ a través del cambio :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}\\ x &\mapsto e^{ix}\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} f\,dm = \int_0^{2\pi} f(e^{ix})dx,$$

donde el intervalo $[0, 2\pi]$ puede ser cambiado por cualquiera de amplitud 2π. A lo largo de este texto usaremos indiferentemente ambas posibilidades.

Recordemos a continuación como se definía el producto de convolución para funciones 2π-periódicas.

Definición 2.3. *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funciones medibles y 2π-periódicas, llamaremos producto de convolución de f y g y lo denotaremos $f * g$ a*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Proposición 2.7.
Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ y sea $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ y

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

Demostración.
Para empezar, $\|f\|_{L^1}^p \leq \|f\|_{L^p}^p$ (si μ es una probabilidad) ya que

$$\|f\|_{L^1} = \int |f|\,d\mu \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |1|^q\right)^{1/q} = \|f\|_{L^p} \|1\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}.$$

Ahora probemos la proposición

$$\int_{\mathbb{T}} |f * g|^p\,dm = \int_{\mathbb{T}} \left|\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt\right|^p dx \leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\right)^p dx.$$

Como p y q son conjugados, $|g(t)| = |g(t)|^{1/q} |g(t)|^{1/p}$. Sigamos con la cadena de desigualdades de arriba,

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\right)^p dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|\,|g(t)|^{1/p} |g(t)|^{1/q}\,dt\right)^p dx.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder a $|f(x-t)||g(t)|^{1/p}$ y $|g(t)|^{1/q}$ tenemos

$$\leq \int_{\mathbb{T}} \left(\left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p \, |g(t)| \, dt \right)^{p/p} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(t)| \, dt \right)^{p/q} \right) dx$$
$$= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p \, |g(t)| \, dt \right) \|g\|_{L^1}^{p/q} \, dx.$$

Ahora, usando el *Teorema de Tonelli*,

$$= \|g\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p \, |g(t)| \, dx \right) dt = \|g\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p \, dx \right) dt$$
$$= \|g\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| \, \|f\|_{L^p}^p \, dt.$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se tiene que $1 + \frac{p}{q} = p$ y por tanto,

$$= \|g\|_{L^1}^{p/q} \, \|g\|_{L^1} \, \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \, \|f\|_{L^p}^p .$$

Teorema 2.3 (Arzela-Ascoli).
Supongamos $\mathcal{F}$ una familia de funciones complejas puntualmente acotadas y equicontinua en un espacio métrico X que contiene un subconjunto numerable y denso.
Entonces toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tiene entonces una subsucesión que converge uniformemente en cada compacto de X.

Demostración.
La prueba se omite ya que es contenido cubierto en la asignatura *Variable Compleja* puede verse una prueba en [2, Theorem 11.28].

Teorema 2.4.
Supongamos que

(a) X *es un espacio de Banach separable.*

(b) $\{\Lambda_n\}$ *es una sucesión de funcionales lineales en* X.

(c) $\sup_n \|\Lambda_n\| = M < \infty$.

Entonces existe una subsucesión $\left\{ \Lambda_{n_j} \right\}$ *tal que el límite*

$$\Lambda x = \lim_{j\to\infty} \Lambda_{n_j} x \tag{2.4}$$

existe para todo $x \in X$. *Además,* Λ *es lineal y* $\|\Lambda\| \leq M$.
(En esta situación decimos que Λ *es el límite débil de* Λ_{n_i}*).*

Demostración.
Como X es separable, tiene un subconjunto denso y numerable.
Ahora de las desigualdades

$$\left|\Lambda_n x\right| \leq M \left\|x\right\|, \qquad \left|\Lambda_n x' - \Lambda_n x''\right| \leq M \left\|x' - x''\right\|$$

deducimos que la sucesión $\left\{\Lambda_n\right\}$ está puntualmente acotada y es equicontinua. Y como X es un espacio métrico, todo punto de X es un compacto ya que la única sucesión posible es la identidad, que es convergente. Entonces, estamos en las condiciones del *Teorema de Arzela-Ascoli* y por tanto, existe una subsucesión $\left\{ \Lambda_{n_j} \right\}$ tal que $\left\{ \Lambda_{n_j} x \right\}$ converge para todo $x \in X$ cuando $j \to \infty$.
Si definimos Λ como en (2.4), es claro que es un funcional lineal por ser límite de funcionales lineales y por (c),

$$|\Lambda(x)| = \lim_{j\to\infty} |\Lambda_{n_j}(x)| \leq M\|x\|$$

y por tanto $\|\Lambda\| \leq M$. ∎

3 | Espacios H^p en el disco unidad

Nuestra intención a lo largo de este capítulo es presentar y familiarizarnos con los espacios de Hardy o espacios H^p con los que trabajaremos casi en exclusividad. Los definimos para $1 \leq p \leq \infty$, ya que, aunque también pueden definirse para $p < 1$, no los necesitamos para nuestro propósito y plantea algunas dificultades técnicas.

Definición 3.1 (Espacios H^p en $\mathbb{D}$). *Sea $1 \leq p < \infty$ y $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Se dice que $f \in H^p$ si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y satisface:*

$$\sup_{0\leq r<1} M_p(f;r) < \infty \quad \textit{con} \quad M_p(f;r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cuando $p = \infty$ definimos el espacio H^∞ como el espacio de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ acotadas, es decir, la clase de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y cumpliendo

$$\sup_{0\leq r<1} M_\infty(f;r) < \infty \quad \textit{con} \quad M_\infty(f;r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|.$$

Y se define

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p} &:= \sup_{0\leq r<1} M_p(f;r), \\ \|f\|_{H^\infty} &:= \sup_{0\leq r<1} M_\infty(f;r) = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}.\} \end{aligned}$$

Con esta definición, $\|\cdot\|_{H^p}$ y $\|\cdot\|_{H^\infty}$ son normas para los respectivos espacios H^p y H^∞. En el primer caso podemos usar la desigualdad de Minkowski dentro del argumento del supremo ($p \in [1,\infty)$) y tomar supremo mantiene la desigualdad no estricta y por tanto se tiene la desigualdad triangular. En el segundo caso, tenemos la bien conocida *norma infinito*. Por tanto, si $1 \leq p \leq \infty$ entonces H^p es un espacio normado.

Es interesante observar que las normas $\|\cdot\|_{H^p}$ y $\|\cdot\|_{H^\infty}$ son básicamente el supremo en $0 \leq r < 1$ de las normas $\|\cdot\|_{L^p}$ y $\|\cdot\|_{L^\infty}$ en las circunferencias de centro 0 y radio r. Por tanto, como sabemos que, si $\mu(X) < \infty$, $L^\infty \subseteq L^q \subseteq L^p$ si $q > p$, al tomar supremo se mantienen las desigualdades en las normas y por tanto la cadena de contenciones $H^\infty \subseteq H^q \subseteq H^p$ si $q > p$ también se tiene.

Es interesante introducir a continuación *el funcional evaluación* que nos dará una cota sobre las funciones de H^p (y H^∞).

Definición 3.2. *Sea $|z| < 1$, definimos el funcional evaluación en z para $1 \leq p \leq \infty$ como sigue*

$$\begin{aligned} \delta_z : H^p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Definido así, podemos extraer la siguiente cota sobre funciones $f \in H^p$ para $1 \leq p \leq \infty$, si $|z| < r < 1$. Sea γ_r, la circunferencia centrada en 0 y de radio r, se tiene entonces que por la *fórmula de Cauchy* :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

Tomando valor absoluto y usando que $|\omega - z| \geq r - |z|$,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{|f(\omega)|}{r - |z|} |d\omega| , \qquad \text{para cada } r < 1. \tag{3.1}$$

Por lo que

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{H^1}}{1 - |z|} \leq \frac{\|f\|_{H^p}}{1 - |z|}, \qquad \text{para todo } 1 \leq p \leq \infty.$$

Esta cota, en particular nos da la continuidad de δ_z (más adelante veremos una cota mejor pero, de momento, esta nos servirá). Además, gracias a ella podemos decir algo más sobre los espacios H^p.

Proposición 3.1.
Los espacios H^p son espacios de Banach si $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.

- Si p < ∞.
  Supongamos $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H^p$ una sucesión de Cauchy. Por la cota anterior, para cada $r < 1$, si fijamos $|z| < r$ la sucesión $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por tanto es convergente. Esto es, existe $f(z)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, para cada $|z| < r < 1$.
  Como $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H^p$ es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n, m \geq n_0$, $\|f_m - f_n\|_{H^p} < \varepsilon$, por la cota anterior se tiene
  $$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \frac{\|f_m - f_n\|_{H^p}}{1-r} < \frac{\varepsilon}{1-r}, \qquad \text{para todo } r < 1 \text{ y todo } |z| < r.$$
  De donde deducimos
  $$\lim_{m\to\infty} |f_m(z) - f_n(z)| = |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{1-r}, \qquad \text{para todo } r < 1 \text{ y todo } |z| < r.$$
  Luego,
  $$\sup_{|z|<r} |f(z) - f_n(z)| \to 0, \qquad \text{cuando n} \to \infty\text{, para todo } r < 1.$$
  Y, por tanto, $f_n \to f$ en cada bola de centro 0 y radio $r < 1$, luego $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ y entonces, por el *Teorema de Weierstrass* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.
  Veremos por último que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_{H^p} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, que en particular nos dice que $f \in H^p$. Por el *Lema de Fatou*
  $$\int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \liminf_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \varepsilon^p \text{ ,si } n \geq n_0$$
  para todo n, m mayores que un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ (que sabemos que existe porque $\{f_n\}$ es de Cauchy para $||\cdot||_{H^p}$) y para todo $r < 1$, es decir,
  $$M_p(f_n - f, r) < \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \geq n_0\text{, para todo } r < 1.$$
  Por consiguiente, la desigualdad de mantiene si tomamos supremo en r
  $$\sup_{0\leq r<1} M_p(f_n - f, r) \leq \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$
  Y por definición, hemos visto que $\|f_n - f\|_{H^p} \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Es decir, toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H^p$ es convergente para la norma $\|\cdot\|_{H^p}$, por lo que $(H^p, \|\cdot\|_{H^p})$ es Banach.

- Si p=∞.
  En este caso, actuando análogamente al caso anterior probamos que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Usando de nuevo el *Teorema de Weierstrass* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.
  Falta ver que dicha f es acotada, veámoslo. Como estamos considerando $\{f_n\} \subset H^\infty$ de Cauchy, en particular se tiene que $\{f_n\} \subset L^\infty$. Por tanto también será de Cauchy en L^∞ (ya que $||g||_{H^\infty}$ es el supremo de g en $\mathbb{D}$ y $||g||_{L^\infty}$ es el supremo esencial de g en $\mathbb{D}$). Como la convergencia uniforme en H^∞ y en L^∞ implica la convergencia puntual, sabemos que en ambos casos, $f_n \to f$ (la misma f en ambos casos). Finalmente, usamos que L^∞ es Banach y por tanto $f \in L^\infty$, es decir, f está esencialmente acotada. En particular, como cada f_n es continua f también lo es de nuevo por el *Teorema de Weierstrass* y, por tanto, f es acotada.

3.1 La integral de Poisson

Presentamos en esta sección el núcleo y la integral de Poisson que, como veremos más adelante, nos será de gran utilidad para trabajar con funciones holomorfas en el disco unidad.

Definición 3.3 (El núcleo de Poisson). *Sea $0 \leq r < 1$ y sea $t \in \mathbb{R}$, se denomina núcleo de Poisson a la función*

$$P_r(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{imt}$$

Proposición 3.2.
Se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$P_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} = \Re\left[\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right] = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}$$

Demostración.
La primera igualdad se tiene por definición.

Segunda igualdad

Sea $z = re^{it}$ ($r \in [0,1)$), sabemos que

$$\frac{1+z}{1-z} = (1+z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} =$$
$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int}$$

Tomando parte real y usando que $\cos(nt) = \frac{e^{int}+e^{-int}}{2}$ tenemos

$$\Re\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n cos(nt) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{e^{int}+e^{-int}}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$$

Tercera y cuarta igualdad

Hemos visto en el desarrollo de la primera igualdad que $\Re\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(e^{int} + e^{-int})$ con $z = re^{it}$, como esta serie esta mayorada por $2\sum_{n=1} r^n$ podemos separarla en dos series geométricas. Nótese también que $re^{-it} = r(\cos(-t) + i\sin(-t)) = r(\cos t - i\sin t) = \overline{re^{it}}$. Por tanto

$$\Re\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(e^{int} + e^{-int}) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(re^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(re^{-it})^n =$$
$$= 1 + \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{1}{1-re^{-it}} - 2 = \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{1}{1-\overline{re^{it}}} - 1 = \frac{1-re^{it} + \overline{1-re^{it}}}{|1-re^{it}|^2} - 1$$

Pero un simple cálculo nos lleva a que

$$\begin{aligned} 1-re^{it} &= (1-r\cos t) + i(-r\sin t)\ , \\ |1-re^{it}|^2 &= 1 + r^2\cos^2 t - 2r\cos t + r^2\sin^2 t \\ &= 1 + r^2 - 2r\cos t \end{aligned}$$

Lo que prueba la cuarta igualdad y uniéndolo a los cálculos de arriba :

$$\Re\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = \frac{1-re^{it} + \overline{1-re^{it}}}{|1-re^{it}|^2} - 1 =$$
$$= \frac{2 - r(\cos t + i\sin t) - r(\cos t - i\sin t) - 1 - r^2 + 2r\cos t}{|1-re^{it}|^2} =$$
$$= \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}$$

Y tenemos la tercera igualdad.

∎

Recogemos algunas de las propiedades más importantes del núcleo de Poisson en la siguiente proposición :

Proposición 3.3.
Para cada $r \in [0, 1)$, sea $P_r(t)$ el núcleo de Poisson r-ésimo. Se tiene :

(a) $P_r(t) \geq 0$, y $P_r(-t) = P_r(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) $P_r(t) \leq P_r(\delta)$, y $\lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = 0$, si $0 < \delta \leq t \leq \pi$

(c) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$

Demostración.
Lo probaremos apartado por apartado

(a) Como $P_r(t) = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}$ y $r < 1$, deducimos que $P_r(t) \geq 0$.
Por otro lado, de la igualdad $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ y de que el coseno es una función par, obtenemos que para cada r $P_r(-t) = P_r(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \Rightarrow P_r'(t) = -\frac{(1-r^2)2r\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2} \leq 0$ si $t \in (0, \pi]$, luego $P_r(t) \leq P_r(\delta)$ si $0 < \delta \leq t \leq \pi$. Y si tomamos $0 < \delta \leq t \leq \pi$ tomando límite cuando $r \to 1^-$

$$\lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} = 0$$

(c) Es fácil ver que $P_r(t)$ es 2π-periódica ya que

$$P_r(t+2\pi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im(t+2\pi)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{imt}e^{im2\pi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{imt} = P_r(t)$$

Por tanto, se tiene $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt$.
Si $r < 1$ $P_r(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{imt}$ converge uniformemente en t, podemos integrar término a término y

$$\int_0^{2\pi} r^{|m|}e^{imt}dt = \begin{cases} \frac{r^{|m|}}{m}(\sin mt - i\cos mt)_0^{2\pi} = 0 & \text{si m} \neq 0 \\ 1 & \text{si m = 0} \end{cases}$$

Definición 3.4. *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, se define la integral de Poisson de f como*

$$P[f](re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt = (f * P_r)(\theta)$$

Observación 3.1.
$P[f](re^{it})$ es una función armónica, veámoslo.

Si $f = u + iv$, probemos que $P[u](re^{it})$ es una función armónica, el razonamiento para $P[v](re^{it})$ es análogo.

$$P[u](re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{imt}e^{-ims}\right)ds$$

Por la convergencia uniforme de la serie, podemos escribir

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)e^{-ims}ds\right)r^{|m|}e^{imt}$$

Nótese que cada integral del sumatorio nos da el coeficiente de Fourier $\hat{u}(m)$. Si $m > 0$ denotamos $r^{|m|}e^{imt} = z^m$, tenemos

$$r^{|m|}e^{imt} = \begin{cases} z^m & \text{si } m > 0 \\ \overline{z^{-m}} & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Así, podemos seguir la cadena de igualdades de arriba

$$P[u](re^{it}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{u}(m)r^{|m|}e^{imt}$$

Ahora, es trivial que si u es real, entonces $\hat{u}(-m) = \overline{\hat{u}(m)}$, por lo que podemos separar en dos sumatorios (recordemos que es una serie geométrica uniformemente convergente)

$$= \sum_{m<0} \hat{u}(m)\overline{z^{-m}} + \hat{u}(0) + \sum_{m>0}\hat{u}(m)z^m = \sum_{m>0}\overline{\hat{u}(m)}\overline{z^m} + \hat{u}(0) + \sum_{m>0}\hat{u}(m)z^m$$

Esta última función es real. Pues $\hat{u}(0)$ es real por ser u real y la parte imaginaria de ambas series se cancelan término a término. Por tanto,

$$P[u](re^{it}) = \Re\left[\sum_{m>0}\overline{\hat{u}(m)}\overline{z^m} + \hat{u}(0) + \sum_{m>0}\hat{u}(m)z^m\right]$$

$$= \hat{u}(0) + 2\sum_{m>0}\Re\left[\hat{u}(m)z^m\right] = \Re\left[\hat{u}(0) + 2\sum_{m>0}\hat{u}(m)z^m\right]$$

Es decir, $P[u](re^{it})$ es la parte real de una función analítica, por tanto, es una función armónica.
Luego, la combinación lineal $P[f] = P[u] + iP[v]$ también es armónica.

Lema 3.1. Sea $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ medible y acotada. Si φ es continua en $z_0 = e^{i\alpha_0} \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$$\lim_{z\to z_0, z\in\mathbb{D}} P[\varphi](z) = \varphi(z_0)$$

Demostración.
Sea $z_0 = e^{i\alpha_0}$. Por la continuidad de φ, fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\left|\alpha - \alpha_0\right| < \delta$, entonces $\left|\varphi(e^{i\alpha}) - \varphi(e^{i\alpha_0})\right| < \varepsilon$. Tomemos $r > 1-\eta$, con $\eta > 0$ a determinar y $z = re^{i\alpha}$ con $|\alpha - \alpha_0| < \frac{\delta}{2}$.

Entonces

$$\left|P[\varphi](z) - \varphi(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\alpha - t)[\varphi(e^{i\alpha}) - \varphi(e^{i\alpha_0})]dt\right|$$

Ahora, haciendo el cambio de variables $\alpha - t = s$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)[\varphi(e^{i(\alpha-s)}) - \varphi(e^{i\alpha_0})]dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)\left|\varphi(e^{i(\alpha-s)}) - \varphi(e^{i\alpha_0})\right|ds$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \varepsilon P_r(s)ds + \int_{\delta/2<|s|<\pi} P_r(s)2||\varphi||_\infty ds$$

Ya que $|(\alpha - s) - \alpha_0| \le |s| + |\alpha - \alpha_0| < \delta$ si $|s| < \frac{\delta}{2}$. En la otra integral, $\frac{\delta}{2} < |s| < \pi$, por lo que de la Proposición 3.3 *b*), se sigue que

$$\left|P[\varphi](z) - \varphi(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \varepsilon P_r(s)ds + 2||\varphi||_\infty P_r(\delta/2)\int_{\delta/2<|s|<\pi} ds$$
$$\le \varepsilon + 2||\varphi||_{H^\infty}\pi P_r(\delta/2).$$

Como $\lim_{r\to1^-} P_r(\delta/2) = 0$, podemos elegir ahora η tal que

$$2||\varphi||_\infty P_r(\delta/2)\,\pi < \varepsilon \quad \text{si } r > 1-\eta$$

De aquí deducimos que

$$\left|P[\varphi](z) - \varphi(z_0)\right| < \varepsilon + \varepsilon$$

si $z = re^{i\alpha}$, con $|\alpha - \alpha_0| < \delta/2$ y $r > 1 - \eta$. Estos son los z que pertenecen a la intersección de $\mathbb{D}$ con un entorno de z_0, lo que termina la demostración. ∎

3.1.1 El problema de Dirichlet en el disco

El problema de Dirichlet es un problema clásico de valores iniciales, con numerosas aplicaciones a la física, química y otras ramas de las ciencias.
Se trata de encontrar una función armónica tal que su valor en la frontera del disco sea una función (generalmente continua) dada como dato.

Definición 3.5 (Problema de Dirichlet). *Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y dada una función f continua en $\partial\Omega$, el problema de Dirichlet estudia la existencia y unicidad de una función u continua en $\overline{\Omega}$, con $u(z) = f(z)$ para todo $z \in \partial\Omega$.Además es armónica en Ω.*

Curiosamente, si estudiamos este problema, llegamos a que la solución es una función *archiconocida* para nosotros.

Teorema 3.1.
Sea $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una función $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ tal que $u = f$ en $\partial\mathbb{D}$ y tal que u es armónica en $\mathbb{D}$. Es más, u es única y es la integral de Poisson de f, es decir

$$P[f](re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$$

para $0 \leq r < 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Demostración.
Si definimos

$$u(z) = \begin{cases} P[f](z) & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ f(z) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

Por la Observación 3.1 y el Lema 3.1, u es solución del *problema de Dirichlet.*
La unicidad es consecuencia del principio del máximo y del mínimo para funciones armónicas (ambos cubiertos en la asignatura *Ecuaciones en Derivadas Parciales*).
Supongamos que v es otra función cumpliendo el enunciado del teorema. Consideremos función $g = u - v$. Aplicando el principio del máximo a g (si $u \neq v$ en $\mathbb{D}$), $|g|$ alcanza su máximo en la frontera. Pero en la frontera, $u = v = f$ por lo que el máximo de $|g|$ en $\overline{\mathbb{D}}$ es 0. Análogamente se deduce lo mismo para el mínimo, luego $u = v$ en $\overline{\mathbb{D}}$.

Observación 3.2.
Es fácil ver que una vez resuelto el problema de Dirichlet para el disco unidad, aplicando una homotecia ($z \mapsto \lambda z$) con $\lambda > 0$ tenemos la solución para el problema de Dirichlet en el disco $\lambda \cdot \mathbb{D}$ (ya que una homotecia actúa sobre la frontera del disco como sigue $\partial\mathbb{D} \mapsto \lambda \cdot \partial\mathbb{D}$)

Es decir, si u es armónica y $u(re^{it}) = u_r(e^{it})$ (r fijo) es la restricción de u a la frontera del disco de radio r y centro 0 con ($0 \leq s < r < 1$) podemos expresar u dentro de dicho disco como sigue

$$u(se^{i\theta}) = (u_r * P_{s/r})(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{s/r}(\theta - t)u_r(e^{it})dt \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

De esta observación deducimos que si u es armónica (en particular si es holomorfa) por la Proposición 2.7 $M_p(u, s) \leq M_p(u, r)$ si $s < r$ y si $1 \leq p < \infty$.

Observación 3.3.
Por tanto, si $1 \leq p < \infty$ y $f \in H^p \|f\|_{H^p} = \sup_{0\leq r<1} M_p(f; r) = \text{lím}_{r\to 1} M_p(f; r)$ por ser $M_p(f; \cdot)$ creciente. Si $f \in H^\infty$, se tiene el mismo resultado usando el principio del módulo máximo.

Proposición 3.4.
Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si

$$u(z) = \begin{cases} P[f](z) & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ u(z) = f(z) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

y $u_r(e^{it}) = u(re^{it})$, entonces

a) Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $\text{lím}_{r\to 1^-} \|u_r - f\|_\infty = 0$
b) Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, y $1 \leq p < \infty$ entonces $\text{lím}_{r\to 1^-} \left\|u_r - f\right\|_{L^p} = 0$

Demostración.
a) u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, que es compacto, luego es uniformemente continua y por tanto, deducimos *a*).
b) Sea $\varepsilon > 0$, y sea $g \in C(\mathbb{T})$ tal que $\|g - f\|_{L^p} < \varepsilon$ (podemos escoger g así por la densidad de las funciones continuas en L^p). Sea ahora $v = P[g]$. Entonces como

$$u_r - f = (u_r - v_r) + (v_r - g) + (g - f).$$

Y haciendo uso correctamente de la Proposición 2.7 tenemos $\left\|u_r - v_r\right\|_{L^p}$ $= \left\|(u-v)_r\right\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$ y por tanto

$$\left\|u_r - f\right\|_{L^p} \leq 2\varepsilon + \left\|v_r - g\right\|_{L^p}$$

para todo r < 1. Además, $\left\|v_r - g\right\|_{L^p} \leq \left\|v_r - g\right\|_{L^\infty}$ donde el segundo término tiende a 0 cuando $r \to 1$.

3.2 Algunas propiedades más avanzadas de los espacios H^p

Una vez estudiadas las propiedades más básicas de los espacios H^p, en esta sección buscaremos la respuesta a dos cuestiones principalmente

- Identificar H^p como un subespacio de L^p
- H^2 es un espacio de Hilbert (lo veremos un poco más adelante), mientras que los demás H^p ($p \geq 1$) son solo Banach. Por esta razón, parece razonable preguntarse si existe una forma de factorizar las funciones de H^p como funciones de H^2. Veremos que no lo conseguiremos, pero si podremos probar la factorización como un producto de Blaschke (función de H^∞) y una potencia de una función de H^2.

Teorema 3.2.
Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{T})$ con sus coeficientes de Fourier $\hat{f}(m) = 0$, para todo $m < 0$, entonces $P[f]$, la integral de Poisson de f, está en H^p. Además, $||f||_{L^p(\mathbb{T})} = ||P[f]||_{H^p}$.

Demostración.
Veamos primero que $P[f]$ es analítica. Como vimos en la Observación 3.1,

$$P[f](re^{it}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-ims} ds \right) r^{|m|} e^{imt} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e^{imt} \hat{f}(m)$$

Por tanto, usando la hipótesis $\hat{f}(m) = 0$ si $m < 0$ y tomando $z = re^{it}$ tenemos

$$P[f](z) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{f}(m) z^m$$

por lo que $P[f]$ es analítica.

Por la Proposición 2.7,

$$M_p(P[f],r) = ||P_r * f||_{L^p} \leq ||f||_{L^p}.$$

Esto nos da la desigualdad $||P[f]|| \leq ||f||_{L^p}$.
Para la otra desigualdad, distinguimos casos :

- Si $1 \leq p < \infty$, por la Proposición 3.4 (usando la misma notación), se tiene que $u_r \to f$ en $||\cdot||_{L^p}$ y, por la continuidad que nos da el Lema 3.1 se tiene $||P[f]||_{H^p} = \text{lím}_{r\to 1} ||u_r||_{L^p}$
- Si $p = \infty$, de nuevo por la Proposición 3.4 tenemos que $u_r \to f$ en $||\cdot||_{L^1}$. En particular, existe una sucesión que r_n que tiende a 1 tal que $u_r \to f$ en casi por todo. Además, como $|u_{r_n}(z)| \leq ||P[f]||_{H^\infty}$ tomando límite cuando $n \to \infty$ en r_n llegamos a que
$$||f||_{L^\infty} \leq ||P[f]||_{H^\infty}.$$

∎

Teorema 3.3.
Si $1 < p \leq \infty$ y $f \in H^p$, entonces existe una única $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ con $\hat{f}^*(m) = 0$, si $m < 0$ y tal que $f = P[f^*]$.

Demostración.
Definamos $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$. Consideremos una sucesión r_n tal que $r_n \to 1$, por ejemplo, $r_n = 1 - 1/n$. Definimos la sucesión de funcionales

$$\begin{aligned} \Lambda_n : L^q(\mathbb{T}) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \int_{\mathbb{T}} g f_{r_n} d\mu \end{aligned}$$

Por la Proposicion 2.3, se tiene que

$$||\Lambda_n|| = ||f_{r_n}||_{L^p} \quad \text{lo que implica} \quad \sup_n ||\Lambda_n|| = M$$

Y ahora, por el Teorema 2.4 sabemos que existe una subsucesión de funcionales, pongamos n_k, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f_{r_{n_k}} g d\mu = \int_{\mathbb{T}} f^* g d\mu = \Lambda(g), \qquad \text{para toda } g \in L^q(\mathbb{T})$$

con $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.
Ahora, veamos que se cumplen lo requerido sobre f^*.
Sus coeficientes de Fourier serán :

$$\hat{f^*}(m) = \int_{\mathbb{T}} f^*(z)\overline{z^m}d\mu = \Lambda(\overline{z^m}) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_{n_k}(\overline{z^m}) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_{r_{n_k}}}(m) = 0, \quad \text{si } m < 0.$$

La última igualdad la tenemos ya que, como cada f_r es analítica, se tiene

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(re^{i\theta})^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta}$$

que converge uniformemente en $r < 1$. Por tanto, se debe dar la igualdad término a término con la serie de Fourier asociada a cada f_r, es decir, los términos con $m < 0$ son 0.

Probemos ahora que $P[f^*] = f$.

$$P[f^*](\rho e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_\rho(\theta - t)f^*(t)\, dt$$

$P_\rho \in L^q(\mathbb{T})$ (pues, de hecho, $P_\rho \in L^q(\mathbb{T})$), luego

$$\begin{aligned} &= \Lambda(P_\rho) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} P_\rho(\theta - t)f(r_n e^{it})\, dt = \lim_{n\to\infty} P[f_{r_n}|_{\partial\mathbb{D}}](\rho e^{i\theta}) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_{r_n}(\rho e^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} f(r_n\rho e^{i\theta}) \to f(\rho e^{i\theta}), \end{aligned}$$

ya que f es continua.
Por último, veamos la unicidad. Supongamos $f^*, f_1 \in L^p(\mathbb{T})$ distintas tal que $f = P[f^*] = P[f_1]$. Entonces, $P[f^* - f_1] = 0$, y por la Proposición 3.4

$$\lim_{r\to 1^-} ||0 - (f^* - f_1)||_\infty = 0.$$

Pero esto implica que $f^* = f_1$, lo que es una contradicción y hemos terminado.

∎

En las condiciones del teorema anterior, diremos que f^* es el valor frontera de f.

De los dos teoremas anteriores podemos sacar una observación que nos será de gran utilidad de aquí en adelante.

Observación 3.4.
Sea

$$X^p \equiv \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) \,:\, \hat{f}(m) = 0 \text{ si } m < 0 \right\}$$

La aplicación

$$f^* \in X^p \mapsto P[f^*]$$

es una isometría lineal sobreyectiva entre X^p, subespacio de $L^p(\mathbb{T})$, y H^p gracias a los dos teoremas anteriores (es isometría lineal por el Teorema 3.2 y sobreyectiva por el Teorema 3.3). Esto que permite identificar X^p con H^p.

Proposición 3.5.
Si $1 \leq p \leq \infty$, X^p es un subespacio cerrado de L^p.

Demostración.
Hemos visto ya que H^p es un subespacio de L^p. Solo hay que probar que dada una sucesión de funciones $\left\{ f_k \right\}_k$ en H^p tendiendo a f (en norma $|| \cdot ||_{L_p}$), entonces $f \in H^p$. Esto es equivalente a probar que $\hat{f}(m) = 0$ si $m < 0$ por la identificación vista anteriormente. Usando la desigualdad triangular y que $|e^{-imt}| = 1$, tenemos que

$$|\hat{f}(m)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt = ||f||_{L^1} \leq ||f||_{L^p}$$

De la misma forma deducimos:

$$|\hat{f}_k(m) - \hat{f}(m)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_k - f \right| dt = \left\| f_k - f \right\|_{L^1} \leq \left\| f_k - f \right\|_{L^p}$$

Como la parte derecha tiende a 0 cuando $k \to \infty$, se tiene que $\left\{ \hat{f}_k(m) \right\}_k$ tiende a $\hat{f}(m)$ para todo m. Finalmente, como cada f_k está en H^p se cumple que $\hat{f}_k(m) = 0$ si $m < 0$, lo que nos dice que $\hat{f}(m) = 0$ si $m < 0$ pues es el límite de una sucesión nula. ∎

Observación 3.5.
Usando conocimientos básicos de Análisis Funcional, de esta última proposición obtenemos otra prueba de que los espacios H^p son Banach, pues son un subespacio cerrado de L^p que es Banach. Además si $p = 2$, podemos concluir también que H^2 es Hilbert, pues L^2 lo es.

Buscamos dar ahora una condición sobre los ceros de una función de H^p, de hecho, daremos un resultado algo más general. Para ello, primero introduciremos la clase de funciones de *Nevanlinna*.

Definición 3.6 (La clase de funciones de Nevanlinna).
Sea $t \in \mathbb{R}$, se define $\log^+ t = \begin{cases} \log t & si\, t \geq 1 \\ 0 & si\, t < 1. \end{cases}$

Se dice que una función compleja es de Nevanlinna, $f \in N$, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y cumple

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta < \infty.$$

Es fácil comprobar que, según la definición anterior, se tienen las siguientes contenciones

$$H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N, \quad \text{si } 0 < s < p < \infty.$$

Con estas contenciones, estamos en condiciones de extender la condición del Teorema 1.6 a un espacio de funciones mayor.

Teorema 3.4.
Sea $f \in N$, distinta de 0 en $\mathbb{D}$, y sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ los ceros de f, ordenados según su multiplicidad. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

Demostración.
Si f tiene un cero de orden m en el origen, y $g(z) = z^{-m} f(z)$, entonces $g \in N$, y g tiene los mismos ceros que f, excepto en el origen. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $f(0) \neq 0$. Sea $n(r)$ el número de ceros de f en la bola cerrada $\overline{B}(0;r)$, fijamos k, y tomamos $r < 1$ tal que $n(r) > k$. Manipulando el primer miembro de la *fórmula de Jensen*,

$$\log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n(r)} \log(r/|a_j|) = \log|f(0)| + \log \prod_{j=1}^{n(r)} (r/|a_j|) = \log\left(|f(0)| \prod_{j=1}^{n(r)} (r/|a_j|)\right),$$

de donde, por la propia *formula de Jensen*

$$|f(0)| \prod_{j=1}^{n(r)} (r/|a_j|) = exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{it})\right| dt\right)$$
$$\leq exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{it})\right| dt\right).$$

Como $f \in N$,

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = C_1 < \infty,$$

es decir,

$$0 < exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{it})\right| dt\right) = |f(0)| \prod_{j=1}^{n(r)} (r/|a_j|) \leq C = e^{C_1}.$$

Por lo que

$$\prod_{j=1}^{k} |\alpha_j| \geq C^{-1}\,|f(0)|\,r^k.$$

Dicha desigualdad se tiene para todo k, y cuando $r \to 1$ y haciendo $k \to \infty$

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \geq C^{-1}\,|f(0)| > 0.$$

Entonces tenemos que

$$0 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \log|\alpha_j| \geq M > -\infty.$$

Finalmente, como se tiene que

$$\frac{-log(|\alpha_j|)}{1-|\alpha_j|} \to 1$$

hemos acabado pues $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|) < +\infty$. ∎

Veamos ahora dos resultados de factorización en los espacios H^p, para ello primero debemos dar un resultado auxiliar que recoge el comportamiento de los productos de Blaschke en el borde del disco unidad.

Teorema 3.5.
Si $B(z)$ es un producto de Blaschke $\left(B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1-\overline{z}_n z}\right)$, entonces $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ en casi por todo (donde B^* denota el valor frontera).

Demostración.
Sin pérdida de generalidad, asumiremos que todos los $|z_n| > 0$ (ya que en otro caso trabajaríamos con $B(z)/z^k$). Entonces $\log|B(0)| = \sum_n \log|z_n|$. Ahora, como debe ocurrir que $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$, se tiene que $\sum_n \log|z_n| > -\infty$. Sea $0 < r < 1$ con r distinto de todo $|z_n|$. Ahora, por la *fórmula de Jensen* :

$$\log|B(0)| + \sum_{|z_n|<r} \log\left(\frac{|z_n|}{r}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

por la igualdad $\log|B(0)| = \sum_n \log|z_n|$ se tiene

$$\sum_n \log|z_n| + \sum_{|z_n|<r} \log\left(\frac{|z_n|}{r}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Usando ahora las propiedades del logaritmo,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta = \sum_{|z_n|<r} \log\left(\frac{|z_n|}{r}\right) - \sum_n \log\left(\frac{1}{|z_n|}\right)$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ y p tal que $\sum_{n>p} \log(1/|z_n|) < \varepsilon$, y tomemos $r < 1$ suficientemente cerca de 1 para que $|z_n| < r$ si $n = 1, 2, \ldots, p$. Entonces, las desigualdades de arriba nos dan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta \geq \sum_{n=1}^{p} \log\left(\frac{|z_n|}{r}\right) - \sum_{n=1}^{p} \log\left(\frac{1}{|z_n|}\right) - \varepsilon.$$

Y tomando r aún más cerca de 1, de forma que se satisfaga

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta > -2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto nos lleva a que

$$2\varepsilon \geq \limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-\log|B(re^{i\theta})|) d\theta \geq 0.$$

Pero $B(re^{i\theta}) \to B^*(e^{i\theta})$ en casi por todo cuando $r \to 1$ y $\log\left|B(re^{i\theta})\right| \leq 0$. De donde deducimos, por el *Lema de Fatou's* que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-\log\left|B^*(e^{i\theta})\right|)d\theta \leq 2\varepsilon, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Y como $\left|B^*(e^{i\theta})\right| \leq 1$, podemos elegir una sucesión r_n con $r_n \to 1$ cuando $n \to \infty$ tal que $B_{r_n} \to B^*$ en casi todo cuando $n \to \infty$.Por tanto, $\log\left|B^*(e^{i\theta})\right| = 0$ en casi por todo, de donde se deduce el teorema. ∎

Veremos a continuación, que si $f \in H^p$ con $p > 0$ y hacemos cociente con el producto de Blaschke de sus ceros, no solo tenemos otra función de H^p , sino que dicha función preserva la norma de f.

Teorema 3.6.
Supongamos que $f \in H^p$, no nula, y que B es el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Sea $g = f/B$, entonces $g \in H^p$ y $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.
Primero, observemos que f/B es holomorfa, pues todas sus singularidades serán evitables.
Ahora,

$$|B(z)| \leq 1 \text{ si } z \in \mathbb{D} \text{ implica que } |g(z)| \geq |f(z)| \text{ si } z \in \mathbb{D}$$

Sea B_n el producto finito de Blaschke formado por los n primeros ceros de f, enumerándolos en una sucesión teniendo en cuenta sus multiplicidades. Sea ahora $g_n = f/B_n$. Para cada n, $\left|B_n(e^{i\theta})\right| \to 1$ uniformemente, cuando $r \to 1$. Por consiguiente, $\left\|g_n\right\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ (pues $\left\|g_n\right\|_{H^p} = \left\|g_n^*\right\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p} = \|f\|_{H^p}$. Cuando $n \to \infty$, $\left|g_n\right| \to |g|$, uniformemente en compactos del disco,por lo tanto

$$||f||_{H^p} = \left\|g_r\right\|_{H^p} \geq \lim_{n\to\infty} M_p(r; g_n) = M_p(r; g) \qquad (0 < r < 1)$$

Si hacemos $r \to 1$, tenemos $\|g\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$. Finalmente, observando la primera desigualdad de esta prueba obtenemos la desigualdad contraria. ∎

Por último, veremos que toda función de H^p puede factorizarse como un producto de Blaschke y una potencia de una función de H^2, que tiene la ventaja de ser un espacio de Hilbert.

Teorema 3.7.
Supongamos $1 \le p < \infty$, $f \in H^p$, *no nula, y* B *el producto de Blaschke formado con los ceros de* f. *Entonces, existe una función que no se anula en* $\mathbb{D}$, h, *tal que* $h \in H^2$ *y cumpliendo*

$$f = B \cdot h^{2/p} \qquad y \qquad \|f\|_{H^p}^p = \|h\|_{H^2}^2$$

En particular, toda función de H^1 *es un producto*

$$f = g \cdot h$$

donde cada factor es un elemento de H^2 *con* $\|g\|_{H^2} = \|h\|_{H^2} = \|f\|_{H^1}^{1/2}$

Demostración.
Por el teorema anterior sabemos que, $f/B \in H^p$ (y que $\|f/B\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$). Como f/B no tiene ceros en $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}$ es un simplemente conexo, existe $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\exp(\varphi) = f/B$ (esto es, existe una rama holomorfa del logaritmo). Sea $h = \exp(p\varphi/2)$, entonces $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $|h|^2 = |f/B|^p$ y por consiguiente, $h \in H^2$ y se tiene la factorización (es más, $\|h\|_{H^2}^2 = \|f\|_{H^p}^p$).
En el caso particular $f \in H^1$ basta tomar $f = (B \cdot h) \cdot h$ en el caso general.

4 Medidas de Carleson

En este capítulo nos centraremos en conceptos de teoría de la medida. Nuestro propósito es familiarizarnos con el concepto de medida de Carleson, que el propio Lennart Carleson introdujo y que ha sido muy importante a lo largo del siglo XX.

4.1 Funciones maximales

Comencemos dando la definición de la ya conocida *función maximal de Hardy-Littlewood*

Definición 4.1. *Si f es integrable en $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, definimos su función maximal Hardy-Littlewood Mf por*

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(t)|\, dt$$

donde m representa la medida de Lebesgue y las B son bolas en $\mathbb{R}^d$.

Es claro que así definida, si f es acotada entonces $|Mf| \leq \|f\|_\infty$. Además, la función maximal Mf tiene las siguientes propiedades

Proposición 4.1.
Sea f integrable en $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. Entonces

a) Mf es medible

b) Mf es finita en c.t

c) Mf verifica la desigualdad

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{3^d}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

Demostración.
Este es un resultado visto en *Análisis de Fourier*, veáse, por ejemplo, en [4, Theorem 3.4]

Aunque hemos definido la función maximal de Hardy-Littlewood para cualquier dimensión d, nosotros solo la usaremos para el caso unidimensional $d = 1$.

Definición 4.2. *Sea (X, μ) un espacio de medida y $\lambda > 0$, denominaremos función de distribución de f en X a*

$$m_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

Es directo ver que la función de distribución es una función decreciente.

Siguiendo con las propiedades de Mf, podemos introducir una cota sobre su norma en L^p, primero daremos un teorema de los propios Hardy y Littlewood y un lema técnico

Teorema 4.1.
En el caso $d = 1$, si $\lambda > 0$ se tiene

$$m_{Mf}(\lambda) \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\{Mf(x) > \lambda\}} |f(x)|\, dx.$$

Demostración.
Podemos suponer que $f(x) \geq 0$ sin pérdida de generalidad. Ahora, consideramos

$$f_1(x) = \frac{1}{h} \sup_{h>0} \int_x^{x+h} f(t)dt, \qquad f_2(x) = \frac{1}{h} \sup_{h>0} \int_{x-h}^{x} f(t)dt$$

y los conjuntos $E_1 = \{x : f_1(x) > \lambda\}$, $E_2 = \{x : f_2(x) > \lambda\}$ y $E = \{x : Mf(x) > \lambda\}$, así definidos tenemos que

$$\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{x-h_1}^{x+h_2} f(t)dt = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \left(\frac{1}{h_1} \int_{x-h_1}^{x} f(t)dt \right) + \frac{h_2}{h_1 + h_2} \left(\frac{1}{h_2} \int_{x}^{x+h_2} f(t)dt \right)$$

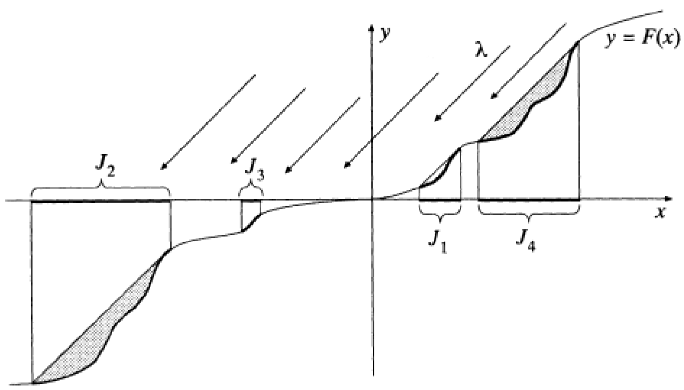
entonces $E \subseteq E_1 \cup E_2$, por tanto $m_{Mf}(\lambda) \leq m_{f_1}(\lambda) + m_{f_2}(\lambda)$ y por tanto basta probar que

$$m_{f_1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_{E_1} f(x)dx, \qquad m_{f_2}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_{E_2} f(x)dx$$

Probaremos la primera igualdad, la segunda es análoga.
Sea

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

Basta que consideremos el caso en que $F(x)$ es finita y por el *Teorema fundamental del cálculo* continua, de otra forma ambas partes de la desigualdad a probar serían infinito. Como $f(x) \geq 0$, $F(x)$ será creciente y podemos expresar E_1 como una unión disjunta de intervalos abiertos J_k (que pueden ser incluso de longitud no finita). Estos J_k son las proyecciones sobre el eje X de las áreas que quedan "en sombra" si el sol ilumina con pendiente λ, ilustrémoslo con una figura



Por consiguiente, podemos afirmar que, en cada intervalo J_k, F crece $\lambda\left|J_k\right|$. Esto es

$$\lambda\left|J_k\right| = \int_{J_k} f(t)dt$$

Y como E_1 es la unión de todos los J_k

$$\lambda\left|E_1\right| = \int_{E_1} f(t)dt$$

por tanto,

$$m_{f_1}(\lambda) = \left|E_1\right| = \frac{1}{\lambda}\int_{E_1} f(t)dt$$

∎

Lema 4.1.
Si (X, μ) es un espacio de medida, $f(x)$ es medible y $0 < p < \infty$ entonces

$$\int |f|^p \, d\mu = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda$$

Demostración.
Podemos asumir que f es cero salvo en un conjunto de medida σ-finita, digamos A, de no ser así ambas partes de la igualdad serían ∞. Ahora, simplemente tenemos que aplicar el *Teorema de Fubini*

$$\int_A |f|^p \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(|f|^p > t) dt$$

y haciendo el cambio de variables $t = \lambda^p$ llegamos al resultado

$$= \int_0^{+\infty} \mu(|f|^p > \lambda^p) p\lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^{+\infty} \mu(|f| > \lambda) p\lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^{+\infty} m_f(\lambda) p\lambda^{p-1} d\lambda$$

En la prueba anterior hemos usado el Teorema de Fubini para productos de medidas cualesquiera para que valga para toda medida μ. Es por eso que al principio nos restringimos al caso de medida σ-finita. Este producto de medidas cualesquiera puede que no se vea en el grado, sin embargo, cuando usemos de aquí en adelante el lema, μ será la medida de Lebesgue y por tanto el Teorema de Fubini será el visto en el grado.

Teorema 4.2.
Si $p > 1$ entonces $\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$ con C_p constante que solo depende de p.

Demostración.
Si $f = 0$ el resultado es obvio. Supongamos entonces $f \neq 0$.
Para el caso $p = \infty$ este resultado ya lo conocíamos pues $|Mf| \leq \|f\|_\infty$ y basta tomar supremo.
Para el caso $1 \leq p < \infty$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(x) \geq 0$. Podemos aproximar $f(x)$ por debajo (con esto se quiere decir que los grafos de la sucesión están por debajo del grafo de f) mediante una sucesión de funciones acotadas de soporte compacto $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$. Para cada una de estas Φ_n tenemos que $M\Phi_n$ está acotada pues Φ_n lo está. Si además tomamos la sucesión $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ creciente, obtenemos

una sucesión $M\Phi_n$ que tiende a Mf por debajo, además crecientemente pues la sucesión $\{\Phi_n\}$ lo es, por tanto $\|Mf\|_{L^p}$ es el límite de $\|M\Phi_n\|_{L^p}$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, es suficiente probar que $\|M\Phi_n\|_{L^p} \leq C_p \|\Phi_n\|_{L^p}$
Ahora sin embargo, podemos asegurar que $\|M\Phi_n\|_{L^p} < \infty$ ya que, están acotadas y son de soporte compacto. Por tanto, por el lema anterior

$$\|M\Phi_n\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m_{M\Phi_n}(\lambda)d\lambda$$

y ahora por el *Teorema de Hardy-Littlewood*

$$\leq 2p\int_0^\infty \left\{\int_{\{M\Phi_n(x)>\lambda\}} \Phi_n(x)dx\right\}\lambda^{p-2}d\lambda$$

y cambiando el orden de integración, como estamos integrando cuando $M\Phi_n(x) > \lambda$, tenemos

$$2p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{M\Phi_n(x)} \lambda^{p-2}\Phi_n(x)d\lambda dx = \frac{2p}{p-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(x)\left(M\Phi_n(x)\right)^{p-1}dx$$

por último, aplicando la desigualdad de Hölder como $p = (p-1)q$ y $p/q = p-1$

$$\leq \frac{2p}{p-1}\|\Phi_n\|_{L^p}\|M\Phi_n\|_{L^p}^{p-1}$$

Luego, tenemos

$$\|M\Phi_n\|_{L^p}^p \leq \frac{2p}{p-1}\|\Phi_n\|_{L^p}\|M\Phi_n\|_{L^p}^{p-1}$$

y como hemos supuesto $f \neq 0$ a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M\Phi_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ por lo que podemos dividir por $\|M\Phi_n\|_{L^p}^{p-1}$ a ambos lados de la desigualdad obteniendo

$$\|M\Phi_n\|_{L^p} \leq \frac{2p}{p-1}\|\Phi_n\|_{L^p}$$

Tomando $\frac{2p}{p-1} = C_p$ hemos terminado. ∎

Observación 4.1.
Como consecuencia de este resultado podemos afirmar que la maximal de Hardy-Littlewood manda funciones de L^p en funciones de L^p para $p > 1$.

Definición 4.3. *Definiremos el conjunto Ω_α, con $0 < \alpha < 1$ como el interior de la envolvente conexa del disco de centro 0 y radio α con el punto $z = 1$.*
Del mismo modo, diremos que $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ será el interior de la envolvente convexa del disco de centro 0 y radio α con el punto $z = e^{i\theta}$.

Definición 4.4. *Si u es una función compleja de dominio $\mathbb{D}$, se define la función maximal no tangencial M_α en $\mathbb{T}$ como*

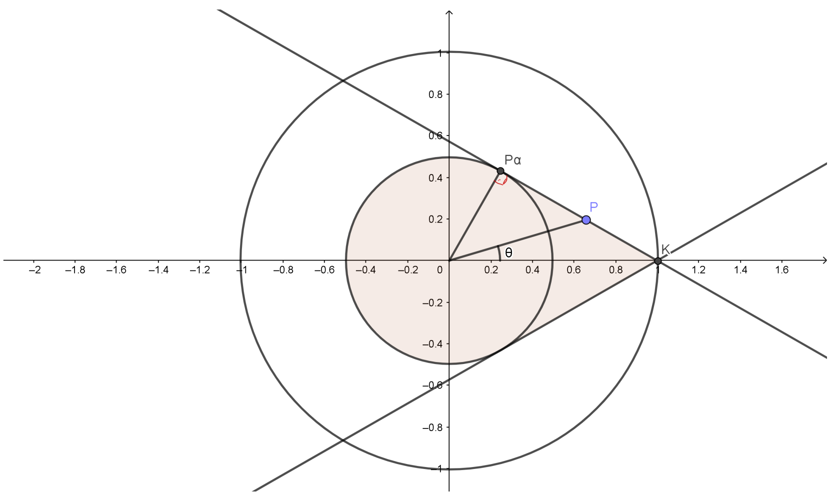
$$(M_\alpha u)(e^{it}) = \sup\left\{|u(z)| \,:\, z \in e^{it}\Omega_\alpha\right\}.$$

Una vez definida, la siguiente proposición nos relaciona la función maximal no tangencial, M_α, y la función maximal de Hardy-Littlewood, M.

Proposición 4.2.
Si $u = P[f]$ es su integral de Poisson de f, para todo $\alpha \in (0, 1)$, existe $C_\alpha > 0$ tal que se tiene la siguiente desigualdad

$$(M_\alpha u)(e^{i\theta}) \leq C_\alpha (Mf)(e^{i\theta}).$$

Demostración.
Hay que probar que $|u(z)| \leq C_\alpha (Mf)(re^{i\theta})$, para todo $re^{it} \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$. De hecho, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\theta = 0$, pues si no lo es basta aplicar un giro.



En el dibujo, llamaremos P_α y P'_α a los puntos de tangencia de la circunferencia de radio α y centro 0 y las rectas que pasan por el punto 1 (aunque P'_α no aparece en el dibujo, este será el simétrico de P_α respecto del eje real). La parte sombreada representa nuestro conjunto Ω_α. Primero, probaremos que

$$|t-\theta| = |t| \leq K_\alpha(1-r)$$

para todo $z = re^{it} \in \Omega_\alpha$. Podemos reducir el problema a los $z \in \Omega_\alpha$ que no pertenecen a la circunferencia de radio α y centro 0. Pues para los z que pertenezcan, podemos escoger una constante lo suficientemente grande para que se cumpla la desigualdad (por ejemplo, $2\pi/(1-\alpha)$) y luego escoger el máximo entre la constante dentro de la circunferencia y fuera. Nos centramos pues, los puntos de Ω_α que no pertenecen a la circunferencia de radio α y centro 0. Pero es fácil ver que si se la desigualdad se cumple en los $z \in \Omega_\alpha$ que pertenecen a las rectas tangentes, se cumplirá para los demás, pues es el caso extremo para cada t. Como las tangentes son simétricas respecto al eje real, basta considerar la tangente que pasa por P^α.
Siguiendo la notación del dibujo, P será nuestro z y podemos expresarlo como $P = P_\alpha + a(1-P_\alpha)$ con $a \in (0,1)$. Es fácil ver que los vectores P_α y $1-P_\alpha$ son ortogonales y que $|P_\alpha| = \alpha$ por estar en la circunferencia. Entonces, por el *Teorema de Pitágoras*,

$$|P|^2 = \alpha^2 + a^2(1-\alpha^2)$$

Sea ahora $P_\alpha = (A_\alpha, B_\alpha)$ (escribiremos indistintamente A y B para relajar la notación) y $P = (x, y)$, entonces,

$$\begin{cases} x = A + a(1-A) \\ y = B - aB \end{cases}$$

Por tanto, podemos escribir $t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y}{x} = \frac{(1-a)B}{A(1-a)+a}$, distingamos dos casos.

- Si $a \geq 1/2$, entonces siguiendo las igualdades del párrafo anterior $t \leq 2B(1-a)$, pues $A(1-a)+a \geq 1/2$. Por otro lado como $r = |P|$,

  $$1-r^2 = 1-\alpha^2-a^2(1-\alpha^2) = (1-\alpha^2)(1-a^2) \geq (1-\alpha^2)(1-a).$$

  Uniendo ambas desigualdades,

  $$t \leq 2B_\alpha\frac{1-r^2}{1-\alpha^2} \leq \frac{4B_\alpha}{1-\alpha^2}(1-r).$$

  Podemos tomar entonces $K_\alpha = \frac{4B_\alpha}{1-\alpha^2}$.

- Si $a < 1/2$, de nuevo siguiendo la desigualdad del último párrafo, $t \leq \pi$ y tenemos
$$1 - r^2 \geq \frac{1}{2}(1 - \alpha^2),$$
como $1 - r^2 = (1 - r)(1 + r)$ y $1 + r \leq 2$ por ser $r < 1$, tenemos
$$1 - r^2 \geq \frac{1}{4}(1 - \alpha^2).$$
Finalmente, como habíamos visto que $t \leq \pi$,
$$\pi(1 - r^2) \geq \frac{\pi}{4}(1 - \alpha^2) \geq \frac{t}{4}(1 - \alpha^2),$$
es decir, en este caso, podemos escoger $K_\alpha = 4\pi/(1 - \alpha^2)$.

Por tanto, hemos probado que
$$|t| \leq K_\alpha(1 - r),$$
con $K_\alpha = \text{máx}\left\{\frac{2\pi}{(1-\alpha)}, \frac{4B_\alpha}{1-\alpha^2}, \frac{4\pi}{(1-\alpha^2)}\right\}$.

Recordemos que queremos probar que $|u(z)| \leq C_\alpha(Mf)(e^{i\theta})$, para todo $z = re^{it} \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$. La idea es usar una escalonada por intervalos concéntricos en t del núcleo de Poisson P_r para acotar las integrales de Poisson, sin embargo, necesitamos que el punto $e^{i\theta}$ pertenezca a estos intervalos para poder usar la maximal no tangencial en $e^{i\theta}$. Por ello, haremos la aproximación mediante la escalonada a una función Q que será igual a P_r en los puntos mayores que θ (y sus simétricos respecto de t) y constante con valor $P_r(t-s)$ en los demás puntos. De esta aproximación dependerá nuestra constante C_α. Construyamos pues la aproximación escalonada de P_r que hemos mencionado antes.

Fijemos r ($z = re^{it}$) y tomemos una sucesión de arcos $I_j \subset \mathbb{T}$ centrados en e^{it} tal que I_1 es el mínimo intervalo que contiene a $e^{i\theta}$ y $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n = \mathbb{T}$. Denotemos χ_j la función característica de I_j y sea h_j el mayor número positivo que cumple $h_j\chi_j \leq P_r$. Recordemos que $Q(s)$ será
$$Q(s) = \text{mín}\left\{P_r(t - s), P_r(t - \theta)\right\}.$$
Nuestra función escalonada de Q será :

$$G = \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1})\chi_j,$$

donde tomaremos $h_{n+1} = 0$. A través de un proceso sucesivo de aproximación, podemos obtener dicha función G tal que

$$2\int_0^{2\pi} G(s)|f(s)| \geq \int_0^{2\pi} Q(s)|f(s)|.$$

Supongamos que (lo probaremos al final de la demostración), en los puntos donde

$$|t-\theta| \leq K_\alpha(1-r),$$

se cumple

$$\frac{P_r(t-\alpha)}{Q(t)} \leq C_\alpha \tag{4.1}$$

con $C_\alpha > 0$. Sabiendo esto, si $z \in \Omega_\alpha e^{i\theta}$,

$$|u(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-\alpha)|f(s)|\,ds.$$

Usando ahora (4.1),

$$\leq \frac{C_\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(s)|f(s)|\,ds \leq \frac{2C_\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(s)|f(s)|\,ds.$$

Al dividir en sumandos e introducir en cada uno de ellos $\frac{m(I_j)}{m(I_j)}$, nos queda

$$= \frac{C_\alpha}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(h_j - h_{j+1})m(I_j)\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}|f(s)|ds = 2C_\alpha||G||_{L^1}\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}|f(s)|ds$$
$$\leq 2C_\alpha||P_r||_{L^1}\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}|f(s)|ds \leq 2C_\alpha\frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j}|f(s)|ds \leq 2C_\alpha Mf(e^{i\theta}).$$

Y esto vale para todo $z \in \Omega_\alpha e^{i\theta}$, por lo que habríamos terminado.

Lo único que falta por probar es (4.1), veámoslo. Por un lado, $Q = P_r$ en los intervalos centrados en t que contienen a θ. Por lo que basta ver (4.1) para el resto de puntos.

En el resto de puntos, $P_r > Q$. Por tanto, podemos acotar superiormente

$$Q \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2+2r-2r} = \frac{1-r^2}{2r(1-\cos(t-\theta))+(1-r)^2}$$

Y además,

$$2r(1-\cos(t-\theta)) \leq C|t-\theta|^2 \leq CK_\alpha^2(1-r)^2.$$

Es fácil comprobar que $P_r(t-s)$ alcanza su máximo $\frac{1+r}{1-r}$ en $s=t$. Por tanto,

$$\frac{P_r(t-\alpha)}{Q(t)} \leq \frac{\frac{1+r}{1-r}}{\frac{1-r^2}{CK_\alpha^2(1-r)^2}} = CK_\alpha^2 = C_\alpha.$$

4.2 Medidas de Carleson

Dado un arco $I=[e^{ia},e^{ib})\subseteq\mathbb{T}$ con $a,b\in[0,2\pi)$, definimos la ventana de Carleson asociada a I de la forma :

$$W(I)=\left\{re^{i\theta}\ :\ 1-|I|\leq r<1;\ a\leq\theta<b\right\}$$

Definición 4.5 (Medida de Carleson).
Sea μ de Borel finita y positiva en $\mathbb{D}$, diremos que μ es una medida de Carleson de constante A si

$$\mu(W(I))\leq Ah, \qquad \text{para todo } I\subseteq\mathbb{T}$$

donde los conjuntos $W(I)$ son las ventanas de Carleson definidas anteriormente y $h=|I|$ para cada $I\subseteq\mathbb{T}$.

Observación 4.2.
Puesto que la medida μ es finita, basta probar la condición para intervalos I con $|I|<1$. Esto es debido a que, como $|I|$ está acotado por 2π, después podremos reajustar la constante si esta existe para los I con $|I|<1$.

Proposición 4.3.
Si μ es de Carleson, existe $C>0$ tal que para todo $\lambda>0$ y para todo $F\in H^2(\mathbb{D})$ se cumple

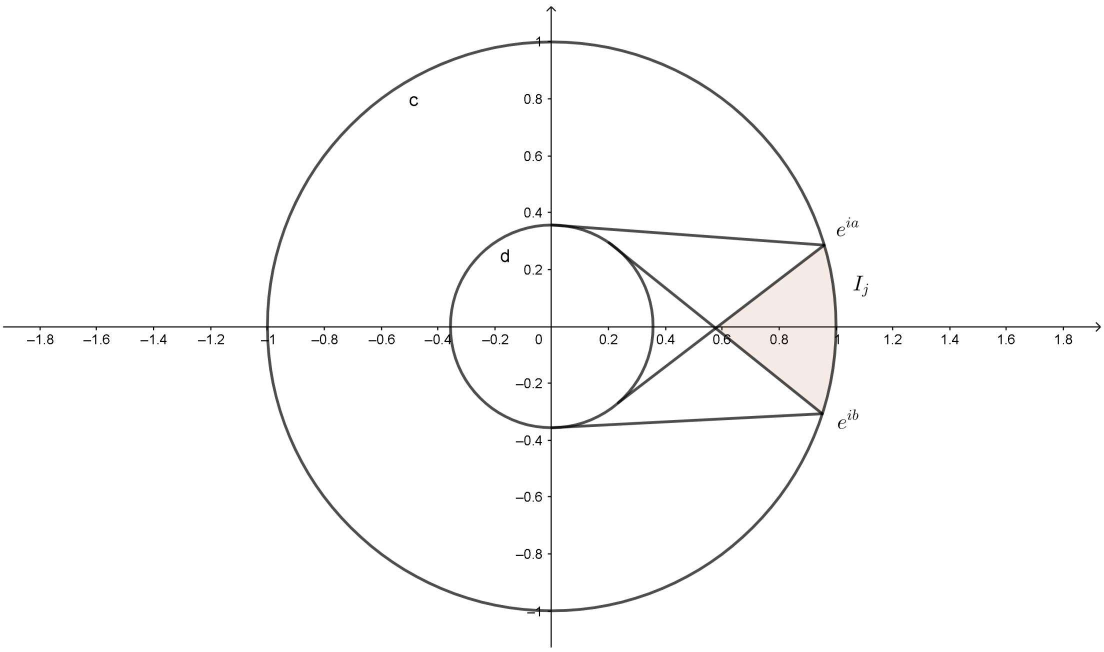
$$\mu(\{|F|>\lambda\})\leq Cm\left(\left\{\left|M_\alpha F\right|>\lambda\right\}\right).$$

Demostración.
El conjunto $\{|M_\alpha F| > \lambda\}$ es un conjunto abierto, pues si existe algún $z \in \Omega_\alpha e^{it}$ tal que $z \in \{|F| > \lambda\}$ entonces existe un entorno de z tal que cuando hacemos un pequeño giro, existen algunos puntos que cortarán del entorno de z que quedan dentro. Distinguimos dos casos :

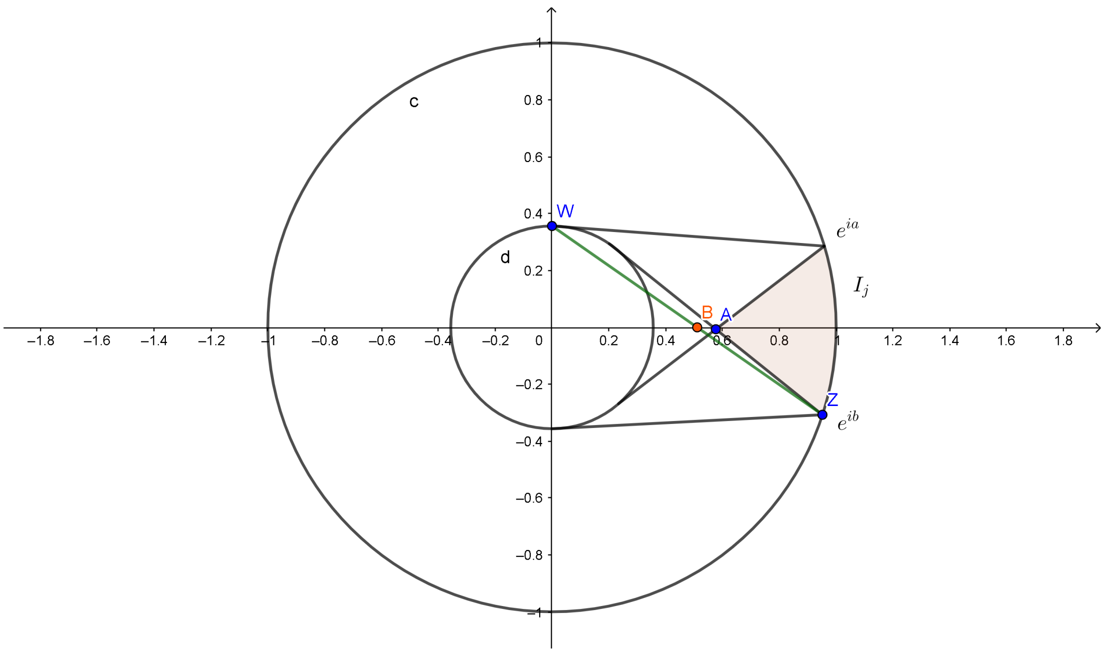
1) Si $\{|M_\alpha F| > \lambda\} = \mathbb{T}$, entonces como $\mu(\{|F| > \lambda\}) \leq \mu(\mathbb{D})$ y $m\{|M_\alpha F| > \lambda\} = m(\{\mathbb{T}\}) = 2\pi$, luego basta $C \geq \mu(\mathbb{D})/2\pi$.
2) Como $\{|M_\alpha F| > \lambda\} = G \neq \mathbb{T}$ es abierto, podemos expresarlo como $G = \bigsqcup_{k=1} I_k$ con cada I_k un arco abierto de $\mathbb{T}$.
Si un punto del toro $e^{i\theta}$ pertenece a G, existirá un j tal que $e^{i\theta} \in I_j$. Podemos suponer que I es de la forma

$$I_j = \{e^{it} : t \in (a,b)\}, e^{ia}, e^{ib} \notin G \qquad \text{para cada } j$$

Si $z = re^{i\theta}, \theta \in (a,b)$ y $|M_\alpha F(z)| > \lambda$, entonces $z \in T(I_j)$, donde con $T(I_j)$ nos referimos a la zona sombreada del dibujo que podemos ver a continuación.



Esto es debido a que como $\{M_\alpha F\}$ es un abierto, e^{ia} y e^{ib} no pertenecen a I_j. Entonces, en los conjuntos $e^{ia}\Omega_\alpha$ y $e^{ib}\Omega_\alpha$ $M_\alpha F < \lambda$.
Veamos que si $A \in T(I_j)$ entonces $A \in W(I_j)$. Podemos asumir que $|I| < 1$, si no, no hay nada que probar ocurriría $W(I) = \mathbb{D}$



de hecho probaremos algo más fuerte, que $B \in W(I_j)$ (la ventana de Carleson de I_j), lo que implica $A \in T(I_j)$. Hay que probar que $1 - B \geq |I|$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el intervalo I_j está centrado en el eje X (simplemente aplicando un giro a $\mathbb{D}$). Luego, suponemos $I_j = \left\{e^{it} : t \in (-b, b)\right\}$.
La recta que pasa por W, B y Z tiene como ecuación $w = -iz + t(e^{ib} + i\alpha)$ con $t \in \mathbb{R}$. Entonces, $w = -i\alpha + ti\alpha + ti \sin b + t \cos b$. Esta recta corta al eje X en B cuando la parte imaginaria es 0, es decir, si $-\alpha + t\alpha t \sin b = 0$. De aquí podemos despejar $t = \frac{\alpha}{\alpha + \sin b}$ y sustituyendo este t en la recta w obtenemos $B = t \cos b = \frac{\alpha \cos b}{\alpha + \sin b}$. Si $B > 1 - M|I|$ para un cierto M esto implica $M > \frac{1-B}{|I|}$ y si $M > 1$ habríamos probado $B \in W(I_j)$ y por tanto $A \in W(I_j)$

$$M > \frac{1 - B}{|I|} = \frac{\alpha + \sin b - \alpha \cos b}{(\alpha + \sin b)2b}, \text{ para todo } b \in (0, \pi].$$

Si llamo M al supremo de $\frac{1-B}{M}$, veamos que es finito y mayor que 1. Aplicando L'Hôpital, $\text{lím}_{b \to 0^+} \frac{\alpha + \sin b - \alpha \cos b}{(\alpha + \sin b)2b} = \frac{1}{2\alpha} \leq M$. Luego, $1 < \frac{1}{2\alpha} \leq M$.
Por otro lado M es finito, pues $\alpha + \sin b - \alpha \cos b < \infty$ para todo $b \in (0, \pi]$ y $(\alpha + \sin b)2b \neq 0$ si $b \neq 0$. Además, ya habíamos estudiado el límite cuando $b \to 0^+$, que también es finito.
Por tanto, hemos probado $A \in W(I_j)$ por el razonamiento que hemos hecho arriba.

Para terminar, se tiene por lo visto antes la cadena de inclusiones :

$$\{|F| > \lambda\} \subseteq \cup_{j=1} T(I_j) \subseteq \cup_{j=1} W(I_j).$$

Por consiguiente,

$$\mu(\{|F| > \lambda\}) \leq \sum_{j=1} \mu(W(I_j)).$$

Como μ es de Carleson y los intervalos I_j son dos a dos disjuntos,

$$\leq C \sum_{j=1} |I_j| = Cm\left(\{|M_\alpha F| > \lambda\}\right).$$

∎

La definición que hemos proporcionado de medida de Carleson es una interpretación geométrica (más fácil de comprobar generalmente), sin embargo, también podemos dar una caracterización analítica equivalente.

Teorema 4.3 (Condición suficiente y necesaria de medida de Carleson).
Sea μ una medida de Borel finita y positiva sobre $\mathbb{D}$ y sea $1 \leq p < \infty$, entonces para que exista $C > 0$ constante tal que

$$\left\{\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu\right\}^{1/p} \leq C \, \|f\|_{H^p}, \qquad \textit{para toda } f \in H^p$$

es necesario y suficiente que μ sea una medida de Carleson.

Demostración.
Basta probarlo para $p = 2$, ya que si $p \neq 2$ podemos factorizar f como una potencia de una función de H^2 por un producto de Blaschke como vimos en el Teorema 3.7. Veámoslo, queremos probar que

$$\left\{\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, d\mu\right\}^{1/2} \leq C \, \|f\|_{H^2} \quad \text{implica que} \quad \left\{\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu\right\}^{1/p} \leq C \, \|f\|_{H^p}$$

Por un lado si se cumple $\left\{\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, d\mu\right\}^{1/2} \leq C \, \|f\|_{H^2}$. Por el Teorema 3.7, si $f \in H^p$, $f = Bg^{\frac{2}{p}}$ (donde B es un producto de Blaschke) con $g \in H^2$ y $||f||^p_{H^p} = ||g||^2_{H^2}$, por tanto

$$\int |f|^p d\mu = \int |Bg^{2/p}|^p = \int |B|^p |g|^2 d\mu$$

Como $|B| \leq 1$,

$$\leq \int |g|^2 d\mu \leq C||g||_{H^2}^2 = C||f||_{H^p}^p$$

Condición necesaria

Supongamos cierto que existe $C > 0$ tal que

$$\left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, d\mu \right\}^{1/2} \leq C \, \|f\|_{H^2}, \quad \text{para toda } f \in H^2$$

Consideremos la función de H^2 $g(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$, con $a \in \mathbb{D}$, veamos que $\|g\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \frac{1}{1-|a|^2}$

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1-az} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-az|^2} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1-az} \right) \left(\frac{1}{1-\overline{az}} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a^n z^n} \right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a^n z^n|^2 \, d\theta =$$

Ahora, si $z = re^{it}$,como el argumento de la integral está dominado,

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a^n z^n|^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a^n|^2 \, d\theta = \frac{2\pi}{1-|a|^2}$$

como se quería.

Definimos ahora $h_a = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z}$, que por lo visto arriba, tiene norma 1 en H^2. Sea $I \subset \mathbb{T}$ un arco

$$I = \left\{ e^{it} : t \in (\alpha, \beta) \right\},$$

con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Como hemos comentado anteriormente, podemos suponer que $h = |I| < 1$. Así, $h = \beta - \alpha$ (longitud normalizada). Pongamos ahora $a = (1-h)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Usando la desigualdad del enunciado para h_a,

$$C \left\| h_a \right\|_{H^2} \geq \int_{\mathbb{D}} \left| h_a \right|^2 d\mu \geq \int_{W(I)} \left| h_a \right|^2 d\mu. \tag{4.2}$$

Acotemos ahora $|h_a(z)|^2 = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}$ inferiormente.

- Por un lado, $1-|a|^2 \geq 1-|a|$, pues $|a| < 1$. Además, $|a| = 1-h/2$. Por tanto, $1-|a|^2 \geq 1-1+h = h$.

- Por otro lado, falta acotar superiormente $|1-\overline{a}z|^2$, pues está en el denominador. Acotaremos $|1-\overline{a}z|$. Primero,

$$|1-\overline{a}z| \leq |1-\overline{a}a| + |\overline{a}||a-z| \leq 1-|a|^2 + |a-z|$$

  Acotemos $1-|a|^2$. Como $1-h = |a|$, elevando al cuadrado tenemos $1-2h+h^2 = |a|^2$, de donde

$$1-|a|^2 = 2h-h^2 \leq 2h.$$

  Por tanto, falta acotar $|a-z|$.

$$|a-z| \leq |a-|a|e^{it}| + ||a|e^{it} - re^{it}|,$$

  ahora, usamos que $a = (1-h/2)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ en el primer sumando y que $|a| < 1$. En el segundo sumando, sacamos factor común e^{it}, que no aparecerá, pues $|e^{it}| = 1$.

$$= \left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{it}\right) + ||a| - r|.$$

  Para terminar de acotar, usamos que $\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{it}\right) \leq h/2$ (pues $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ es el punto medio en el argumento de los puntos de $W(I)$ y la amplitud de I es h) y que $||a|-r| \leq h$, pues no pueden distar en módulo más de h si a, $z = re^{it} \in W(I)$. Luego,

$$|a-z| \leq h/2 + h = h/2 + h = \frac{3}{2}h.$$

  Así, la cota obtenida para el denominador es :

$$|1-\overline{a}z| \leq 2h + \frac{3}{2}h = \frac{7}{2}h.$$

Recapitulando, hemos acotado

$$|h_a(z)|^2 = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} \geq \frac{h/2}{\frac{49}{4}h^2} = \frac{2}{49h}.$$

Volviendo a (4.2),

$$C\left\|h_a\right\|_{H^2} \geq \int_{\mathbb{D}} \left|h_a\right|^2 d\mu \geq \int_{W(I)} \left|h_a\right|^2 d\mu \geq \int_{W(I)} \frac{2}{49h}\, d\mu = \frac{2}{49h}\mu(W(I)).$$

Despejando, obtenemos

$$C\frac{49h}{2}\left\|h_a\right\|_{H^2} \geq \mu(W(I)).$$

Condición suficiente

Sea $F = P[g]$, por el Lema 4.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{D}} |F|^2\, dm = \int_0^\infty \mu\left(|F|^2 > t\right) dt,$$

como μ es de Carleson, por la Proposición 4.3 y usando de nuevo el Lema 4.1,

$$\leq C\int_0^\infty m\left(\left|M_\alpha F\right|^2\right) dt = C\int_{\partial\mathbb{D}} \left|M_\alpha F\right|^2 dm.$$

Ahora, por la Proposición 4.2,

$$\leq CC_1 \int_{\partial\mathbb{D}} |Mg|^2\, dm.$$

Finalmente por el Teorema 4.2

$$\leq CC_1C_2 \int_{\partial\mathbb{D}} |g|^2\, dm$$

∎

5 La prueba de Carleson al problema de interpolación

En este último capítulo, abordaremos el problema de las *sucesiones universales de interpolación* y daremos la prueba de Carleson de su caracterización. Definamos primero el problema.

Diremos que una función f interpola a la sucesión $\{w_n\}$ en los puntos $\{z_n\}$ si $f(z_n) = w_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Definición 5.1. *Diremos que una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ es una sucesión de interpolación universal si para toda sucesión $\{w_n\}$ acotada existe una función $f \in H^\infty$ tal que f interpola $\{w_n\}$ en los puntos de $\{z_n\}$.*

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en el disco unidad. Nuestro objetivo es dar una condición necesaria y suficiente sobre $\{z_n\}$ para que esta sea una sucesión de interpolación universal.

Observación 5.1.
Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión de interpolación universal, es decir, para cada $\{w_n\} \in \ell^\infty$ existe $f \in H^\infty$ tal que $f(z_n) = w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que el operador

$$\begin{aligned} T: H^\infty &\to \ell^\infty \\ f &\mapsto (f(z_n))_{n=1}^\infty \end{aligned}$$

es sobreyectivo. Es fácil ver que T es lineal y continuo, la continuidad la deducimos de

$$\|T(f)\|_{\ell^\infty} = \|f(z_n)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(z_n)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = \|f\|_\infty$$

y la linealidad de que si $f_1, f_2 \in H^\infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$T(\alpha f_1+\beta f_2) = (\alpha f_1(z_n)+\beta f_2(z_n))_{n=1}^\infty = \alpha(f_1(z_n))_{n=1}^\infty+\beta(f_2(z_n))_{n=1}^\infty = \alpha T(f_1)+\beta T(f_2)$$

Proposición 5.1.
En las condiciones anteriores, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $w \in \ell^\infty$ existe $f \in H^\infty$ con $Tf = w$, $\|f\|_\infty \leq C\|w_n\|_\infty$.

Demostración.
Por el *Teorema de la aplicación abierta* T es abierto. Denotemos por B_{H^∞} la bola unidad abierta centrada en 0 para la norma $\|\cdot\|_{H^\infty}$ y por B_{ℓ^∞} su análoga para ℓ^∞. Ya que T es abierto, $T(B_{H^\infty})$ es un entorno abierto del 0 en ℓ^∞ luego, existe un $c > 0$ tal que $T(B_{H^\infty})$ contiene a cB_{ℓ^∞}. Por tanto, todo elemento de ℓ^∞ con $\|w\|_{\ell^\infty} < c$ se puede expresar de la forma $w = T(f)$ con $\|f\|_{H^\infty} < 1$. Entonces para cualquier $a \in \ell^\infty$ no nulo como $\tilde{a} = \frac{c}{2}\frac{a}{\|a\|_{\ell^\infty}}$ está en cB_{ℓ^∞}, por lo dicho antes, existe una $\tilde{g} \in H^\infty$ con $\|\tilde{g}\|_{H^\infty} < 1$ tal que $T(\tilde{g}) = \tilde{a}$.
Si nos fijamos, si $g = \frac{2\|a\|_{\ell^\infty}}{c}\tilde{g}$, se tiene que $T(g) = a$ y como $\|\tilde{g}\|_{H^\infty} < 1$, $\|g\|_{H^\infty} \leq \frac{2}{c}\|a\|_{\ell^\infty}$. Por lo que hemos encontrado una constante $C = \frac{2}{c}$ tal que para cualquier $a \in \ell^\infty$ tenemos una $g \in H^\infty$ cumpliendo $T(g) = a$ y $\|g\|_{H^\infty} \leq C\|a\|_{\ell^\infty}$ ∎

Definición 5.2. *Diremos que $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ es una sucesión de interpolación universal de constante C si para toda sucesión $\{w_n\} \in \ell^\infty$, existe una función $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que*

- $f(z_n) = w_n$ *, para todo* $n \in \mathbb{N}$
- $\|f\|_{H^\infty} \leq C\|w\|_{\ell^\infty}$

La definición anterior es válida también para sucesiones finitas.
Por la proposición anterior, hemos probado que si $\{z_n\}$ es sucesión de interpolación universal entonces es sucesión de interpolación universal de constante C para algún

$C < \infty$.
Es fácil ver que las constantes para las sucesiones de interpolación universales son mayores que 1, debido a que $\|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \geq \|w\|_{\ell^\infty}$.

Introducimos a continuación dos propiedades más de las sucesiones de interpolación universales.

- Si $\{z_n\}$ es sucesión de interpolación universal, entonces $\sum_{n=1}(1-|z_n|) < \infty$.

  Sea $f \in H^\infty$ tal que $f(z_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$
  Como $f \in H^\infty$, por el Teorema 1.6, tenemos que $\sum_{n=2}(1-|z_n|) < \infty$ y por tanto al sumar el termino finito correspondiente a z_1, la serie sigue siendo convergente.

- Si $\{z_n\}$ es sucesión de interpolación universal de constante C y tomamos $\delta = 1/C$, entonces $\rho(z_n, z_k) \geq \delta > 0$ para $n \neq k$. Las sucesiones $\{z_n\}$ que verfican esta propiedad se denominan separadas, por tanto, toda sucesión de interpolación universal es separada.

  Sea $f \in H^\infty$ con $f(z_n) = \begin{cases} 1/C & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$
  y $\|f\|_{H^\infty} \leq C\frac{1}{C} = 1$. Luego, $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. Sin embargo, como f no es constante, $f(\mathbb{D})$ es abierto y ocurrirá que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ (por el *Teorema de la Aplicación Abierta*), de donde deducimos $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Ahora, por la Proposición 1.3,

  $$\rho(z_m, z_k) \geq \rho(f(z_n), f(z_k)) = \frac{1}{C} = \delta > 0, \text{ para todo } k \neq m.$$

Proposición 5.2.
Sea $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$. Si existe una constante C tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, $\{z_n\}_{n=1}^{N}$ es una sucesión de interpolación universal de constante C, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de interpolación de constante C.

Demostración.
Sea $w \in \ell^\infty$. Por hipótesis, tenemos que para cada n existe una función $f_n \in H^\infty$ con

$$\begin{aligned}
&f_1(z_1) = w_1, \\
&f_2(z_1) = w_1,\ f_2(z_2) = w_2, \\
&\vdots \\
&f_n(z_1) = w_1,\ f_n(z_2) = w_2, \dots, f_n(z_n) = w_n, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

con $\|f_n\| \leq C\|w\|_{\ell^\infty}$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Esto implica que $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en $\mathbb{D}$. Luego, por el *Teorema de Montel*, $\{f_n\}$ es relativamente compacta, esto es, existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $f_{n_k} \to g$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.
Dicha g cumple que $\|g\|_{H^\infty} \leq C\|w\|_{\ell^\infty}$ pues

$$|g(z)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(z)|$$

y $|f_{n_k}(z)| \leq C\|w\|_{\ell^\infty}$.
Además, g cumple la condición de interpolación ya que por la convergencia puntual,

$$g(z_n) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_n) = w_n,$$

pues para $n_k \geq n$, $f_{n_k}(z_n) = w_n$. ∎

5.1 Interpolación finita en H^q con 1<q<∞

En este capítulo, trabajaremos con espacios H^q con $q \geq 1$ como viene siendo habitual en este texto.

Para comenzar, sea $z_1, z_2, \dots, z_n$ una sucesión de n números complejos diferentes con $0 < |z_\nu| < 1$ para todo $\nu = 1, 2, \dots, n$, y sea $w_1, w_2, \dots, w_n$ una sucesión arbitraria en $\mathbb{C}$.

Consíderese el problema de extremos

$$m_q = m_q(w_1, w_2, \dots, w_n) = \inf_{f\in H^q} \|f\|_{H^q}, \quad \text{con } 1 \leq q \leq \infty \tag{5.1}$$

bajo las condiciones de interpolación

$$f(z_\nu) = w_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

de aquí podemos deducir que la solución se alcanza para una función $f_q \in H^q$ $(1 \leq q \leq \infty)$. Además, f_q es única si $1 < q < \infty$. Podemos verlo como sigue :

Existencia

Sea $\{f_n\} \subset H^q$ una sucesión minimizante cumpliendo (5.2), es decir, $f_n(z_\nu) = w_\nu$ para $\nu = 1, 2, \ldots, n$ y con $\|f_n\|_{H^q} \to m_q$ cuando $n \to \infty$. Como sabemos, se tiene que

$$|f_n(z)| \leq \frac{\|f_n\|_{H^q}}{1 - |z|}$$

si $|z| < r < 1$, es decir, $\{f_n\}$ esta uniformemente acotada en compactos de $\mathbb{D}$ y por el *Teorema de Montel* $\{f_n\}$ es relativamente compacta. Es decir, existe una subsucesión n_k tal que $f_{n_k} \to f_q$ cuando $k \to \infty$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Por la convergencia puntual que esto nos proporciona, f_q cumple (5.2). Al ser una sucesión minimizante en la norma, $f_q \in H^q$.
Falta ver que $\|f_q\|_{H^q} = m_q$. Es claro que $\|f_q\|_{H^q} \geq m_q$, pues es el ínfimo.
Por otro lado, veamos que $\|f_q\|_{H^q} \leq m_q$. Distingamos dos casos :

- Sea $q = \infty$ y $z \in \mathbb{D}$, por la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$ vista antes,

  $$|f_\infty(z)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(z)| \leq \lim_{k\to\infty} ||f_{n_k}||_{H^\infty} = m_\infty.$$

  De donde deducimos que $||f_\infty||_{H^\infty} \leq m_\infty$.

- Si $q < \infty$ tenemos, también por la convergencia uniforme en compactos, que

  $$\int_0^{2\pi} |f_{n_k}(re^{it})|^q \, dt \to \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^q \, dt, \text{ para todo } r \in (0, 1).$$

  Esto implica :

  $$M_q(f_q; r) = \lim_{k\to\infty} M_q(f_{n_k}; r) \leq \lim_{k\to\infty} ||f_{n_k}||_{H^q} = m_q, \text{ para todo } r \in (0, 1),$$

  de donde se deduce la desigualdad contraria $\|f_q\|_{H^q} = \sup_{0 \leq r < 1} M_q(f_q; r) \leq m_q$, y por tanto la igualdad $m_q = \|f_q\|_{H^q}$.

Unicidad $(1 < q < \infty)$
Supongamos que existen $f_1, f_2 \in H^q$ distintas tales que $\|f_1\|_{H^q} = \|f_2\|_{H^q} = m_q$, entonces su media, $\frac{f_1+f_2}{2}$, también cumple (5.2) y por la Proposición 2.6 si denotamos por f_j^*, $j = 1, 2$, los respectivos valores frontera (en $L^q(\mathbb{T})$).

$$\left\| \frac{f_1^* + f_2^*}{2} \right\|_{H^q} = \left\| \frac{f_1^* + f_2^*}{2} \right\|_{L^q} < m_q.$$

Sin embargo, esto es contradicción pues m_q es el mínimo, lo que finaliza la prueba.

A partir de ahora, sólo consideraremos el caso $q \in (1, \infty)$; ya que nuestro objetivo será tomar límite $q \to \infty$ para estudiar el caso de interés para nosotros, H^∞.

Consideremos ahora el producto de Blaschke formado con la sucesión $\{z_\nu\}$,

$$B_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z - z_\nu}{1 - z\overline{z_\nu}}$$

Ahora cualquier función de H^q cumpliendo (5.2) será de la forma $f = f_q + B_n g$ con $g \in H^q$, esto es porque para toda $f \in H^q$ cumpliendo (5.2), $\frac{f-f_q}{B_n}$ es una función de H^q, que será nuestra g asociada a f. Como f_q da la solución al problema de extremos (5.1), se tiene que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\|f_q + \alpha B_n g\|_{H^q} \geq \|f_q\|_{H^q}$$

O equivalentemente, denotando con $*$ los respectivos valores frontera (las identificaciones en $L^q(\mathbb{T})$),

$$\|f_q^* + \alpha B_n^* g^*\|_{L^q} \geq \|f_q^*\|_{L^q}, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{C}$$

Es decir, estamos en las condiciones de la Proposición 2.2. Tomando u el funcional que nos da la Proposición 2.4,

$$\int_{\mathbb{T}} |f_q^*|^{q-2}\overline{f_q^*} B_n^* g^* d\theta = 0, \qquad \text{para toda } g \in H^q$$

Observación 5.2.
Nótese que integrar contra $|f_q^*|^{q-2}\overline{f_q^*}$ no es exactamente el funcional que nos da la Proposición 2.4 pues no está normalizado. Pero como se cumple que la integral es 0 para el funcional normalizado, también se cumplirá para el funcional sin normalizar, pues es el mismo multiplicado por un escalar.

Tomemos $F_q^* = |f_q^*|^{q-2}\overline{f_q^*}B_n^* z^{-1} m_q^{1-q}$, veamos que existe $F_q \in H^1$ tal que F_q^* es su valor frontera. Si denotamos $H^* = |f_q^*|^{q-2}\overline{f_q^*}z^{-1}B_n^*$, $H^* \in L^1(\mathbb{T})$, de hecho, está en $L^p(\mathbb{T})$ (siendo p el exponente conjugado de q). Pues si $f_q \in H^q$, entonces $\int_{\mathbb{T}}(|f_q^*|^{q-1})^p d\theta < \infty$, ya que $(q-1)p = q$, $|f_q^*|^{q-1} \in L^p$ lo que implica

$$\int_{\mathbb{T}} ||f_q^*|^{q-2}\overline{f_q^*}z^{-1}B_n^*|^p d\theta = \int_{\mathbb{T}} |(f_q^*)^{q-1}|^p d\theta < \infty$$

es decir, $H^* \in L^p(\mathbb{T})$. Ahora, por lo visto antes, si tomamos como $g(z)$ las funciones z^p con $p = 0, 1, \ldots$, y sea $z = e^{i\theta}$ en $\mathbb{T}$,

$$\int_{\mathbb{T}} (|f_q^*|^{q-2}\overline{f_q^*}z^{-1}B_n^*)z^{p+1} d\theta = 0 \qquad p = 0, 1, \ldots$$

Pero además, la integral de arriba es

$$\int_{\mathbb{T}} H^* z^m d\theta = \int_{\mathbb{T}} H^* e^{i\theta m} d\theta = \int_{\mathbb{T}} H^* \overline{e^{-i\theta m}} d\theta = \int_{\mathbb{T}} H^* \overline{z^{-m}} d\theta = 0 \quad m = 1, 2, \ldots$$

es decir, los coeficientes de Fourier de H^* para todo m negativo son nulos, luego existe una $H \in H^p$ con H^* su valor frontera y por tanto una F_q con valor frontera F_q^*, pues es H por un escalar.
Ahora,

$$\|F_q^*\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|F_q^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = m_q^{1-q}\left(\int_{\mathbb{T}} \left||f_q^*|^{q-2}|\overline{f_q^*}||B_n^*||z^{-1}|\right|^p d\theta\right)^{1/p}.$$

Pero, $\left(\int_{\mathbb{T}} \left||f_q^*|^{q-2}|\overline{f_q^*}||B_n^*||z^{-1}|\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f_q^*|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f_q^*|^q\right)^{1/p}$. Por lo que siguiendo la cadena de desigualdades anterior,

$$\leq m_q^{1-q} \left(\int_{\mathbb{T}} |f_q^*|^q \right)^{1/p} \leq m_q^{1-q} \|f_q^*\|_{L^q(\mathbb{T})}^{q/p} = \|f_q\|_{H^q(\mathbb{T})}^{1-q} \|f_q\|_{H^q(\mathbb{T})}^{q/p} = 1,$$

sabiendo que $1 - q + q/p = 0$ si p y q son exponentes conjugados. Es decir, hemos probado

$$\|F_q^*\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq 1.$$

Ahora, tal y como hemos definido m_q en (5.1) tenemos que

$$m_q = \frac{1}{2\pi} m_q^{1-q} \int_{|z|=1} |f_q^*|^q d\theta. \tag{5.3}$$

Por como hemos definido F_q, haciendo el cambio $z = e^{i\theta}$ para integrar en z, tenemos

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{F_q^* f_q^* z}{B_n^*} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{F_q^* f_q^*}{B_n^*} dz. \tag{5.4}$$

Introducimos y probamos a continuación un lema que nos ayudará a continuar con la cadena de igualdades (5.4).

Lema 5.1.
En las condiciones anteriores, se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{F_q^* f_q^*}{B_n^*} dz = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{F_q f_q}{B_n} dz.$$

Demostración.
Como $1 < p < \infty$, sabemos que si $f = P[f^*]$ entonces, por la Proposición 3.4 y siguiendo una notación similar, se tiene que

$$\lim_{r \to 1^-} ||f_r^* - f^*||_{L^p} = 0.$$

Hemos visto antes que, $F_q \in H^p$ y $f_q \in H^q$. Luego, usando lo visto en el párrafo anterior tenemos

$$(F_q)_r \to F_q^*, \text{ en } || \cdot ||_{L^p} \text{ cuando } r \to 1,$$
$$(f_q)_r \to f_q^*, \text{ en } || \cdot ||_{L^q} \text{ cuando } r \to 1.$$

Por tanto, gracias a la desigualdad de Hölder, $F_q f_q \in L^1$ y,

$$(F_q f_q)_r \to F_q^* f_q^*, \text{ en } ||\cdot||_{L^1} \text{ cuando } r \to 1.$$

Además, también sabemos por Proposición 3.5 que

$$\left(\frac{1}{B_n}\right)_r \to \frac{1}{B_n^*}, \text{ uniformemente cuando } r \to 1.$$

Finalmente, por la convergencia uniforme que tenemos de nuevo, por la Proposición 3.4

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{F_q^* f_q^*}{B_n^*} dz = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{F_q f_q}{B_n} dz,$$

como se requería. ∎

Por tanto, seguimos las igualdades (5.4) gracias al lema anterior,

$$m_q = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{F_q f_q}{B_n} dz. \tag{5.5}$$

Finalmente, existe un $0 < r < 1$ tal que B_n tiene todos sus ceros en la bola $B(0, r)$ y podemos usar el *Teorema de los residuos* para calcular las integrales de (5.5). Calculemos los residuos. Sea $h(z) = F_q(z) f_q(z)$ y $g(z) = B_n(z)$, la función $\frac{h(z)}{g(z)}$ tiene, a lo más, polos simples en cada z_ν. Podemos escribir,

$$\begin{aligned}
&h(z) - h(z_\nu) = (z - z_\nu) h_1(z), \ h_1 \text{ holomorfa en un entorno de } z_\nu. \\
&g(z) = (z - z_\nu) g_1(z), \ g_1 \text{ holomorfa en un entorno de } z_\nu \text{ y con } g_1(z_\nu) \neq 0,
\end{aligned}$$

pues g tiene un cero de orden 1 en z_ν. Entonces

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(z_\nu) + (z - z_\nu) h_1(z)}{(z - z_\nu) g_1(z)} = \frac{h(z_\nu)}{(z - z_\nu) g_1(z)} + \frac{h_1(z)}{g_1(z)},$$

donde el segundo sumando es holomorfo en z_ν, luego el residuo es

$$Res(h/g, z_\nu) = \lim_{z\to z_\nu} (z - z_\nu)\left[\frac{h(z_\nu)}{(z - z_\nu) g_1(z)} + \frac{h_1(z)}{g_1(z)}\right] = \frac{h(z_\nu)}{g_1(z_\nu)}.$$

Además, tenemos

$$h(z_\nu) = F_q(z_\nu) f_q(z_\nu) = F_q(z_\nu) w_\nu,$$
$$g_1(z_\nu) = B_n'(z_\nu),$$

pues $g(z) = (z - z_\nu) g_1(z)$ implica $g_1(z) = \frac{g(z)-g(z_\nu)}{z-z_\nu}$, ya que $g(z_\nu) = 0$. Tomando límite cuando $z \to z_\nu$ lo tenemos. Luego podemos seguir la igualdad que dejamos en (5.5) con

$$m_q = \sum_{\nu=1}^{n} F_q(z_\nu) \frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)}. \tag{5.6}$$

Ahora, si hacemos tender $q \to \infty$, de (5.1) y de $\|F_q\|_{H^1} \leq 1$ seguimos que podemos extraer una subsucesión $\{q_n\}$ tal que $f_q(z)$ y $F_q(z)$ convergen uniformemente en compactos a las funciones $f(z)$ y $F(z)$ respectivamente. Además, f seguirá satisfaciendo (5.2) y F seguirá cumpliendo $\|F\|_{H^1} \leq 1$. Además, f será acotada pues, por la definición (5.1),

$$m_q \leq m_\infty \text{ si } q \in (1, \infty).$$

Pongamos ahora,

$$M = \sup_{1 \leq q} m_q = \lim_{q \to \infty} m_q \leq m_\infty.$$

Veamos que $f \in H^\infty$. Si $q < q_n$,

$$||f||_{H^q} \leq \liminf_{n \to \infty} ||f_{q_n}||_{H^q} \leq \liminf_{n \to \infty} ||f_{q_n}||_{H^{q_n}}.$$

Lo que implica, usando el *Lema de Fatou* en un razonamiento que ya hemos usado anteriormente,

$$||f||_{H^q} \leq \liminf_{n \to \infty} ||f_{q_n}||_{H^{q_n}} = \lim_{n \to \infty} m_{q_n} = M.$$

De aquí, tenemos que para cada r,

$$M_\infty(f;r) = \lim_{q\to\infty} M_q(f;r) \leq ||f||_{H^q} \leq M,$$

y como f interpola, es decir, cumple (5.2) :

$$m_\infty \leq ||f||_{H^\infty} \leq M \leq m_\infty. \tag{5.7}$$

Es decir, $f \in H^\infty$ cumpliendo (5.2) con el menor máximo posible m_∞.

Si tomamos $G(z)$ una función arbitraria en H^1 con $\|G\|_{H^1} \leq 1$, de nuevo, igual que antes por el *Teorema de los residuos*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n^*)'(z_\nu)}\right| = \left|\int_{|z|<r} \frac{Gf}{B_n}dz\right|,$$

con $r \in (0,1)$ y tal que la bola $B(0,r)$ contenga a todos los ceros de B_n. Entonces,

$$\leq M_1(G;r)M_\infty(f;r)M_\infty(\frac{1}{B_n},r) \leq m_\infty M_\infty(\frac{1}{B_n},r).$$

Y como $\frac{1}{B_n}$ es continua cerca del borde y, $\left\|\left(\frac{1}{B_n}\right)^*\right\|_{L^\infty} = 1$, se tiene que al tomar límite $r \to 1$,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n^*)'(z_\nu)}\right| \leq m_\infty.$$

Pero además, hemos visto en (5.7) que se alcanza la igualdad en (5.6) cuando $q \to \infty$. Es decir, el siguiente teorema ha quedado probado.

Teorema 5.1.
Sea m_∞ el menor máximo posible de una función analítica en $|z| < 1$ satisfaciendo las condiciones de interpolación (5.2). Entonces

$$m_\infty(w_1,\ldots,w_n) = m_\infty = \sup_{\|G\|_{H^1}=1}\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)}\right|$$

5.2 Condición necesaria y suficiente de sucesión universal de interpolación

Comencemos introduciendo dos lemas técnicos

Lema 5.2.
Sea $|a| < 1$ un número complejo fijo. Entonces

$$\sup_{\phi} |\phi(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}, \qquad \|\phi\|_{H^1} \leq 1$$

alcanzándose el supremo en $\phi(z) = (1-|a|^2)/(1-\overline{a}z)^2$

Demostración.
Como $\phi \in H^1$, por el Teorema 3.7, podemos factorizar ϕ como

$$\phi = h_1 h_2, \qquad \text{con } \|h_j\|_{H^2} \leq 1 \text{ para } j = 1, 2$$

centrémonos en h_1 (h_2 es completamente análogo). Si el desarrollo de Taylor en a de h_1 es $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n a^n$, podemos establecer la cota siguiente

$$|h_1(a)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n a^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}_n a^n\right|$$

como H^2 es Hilbert, podemos usar Cauchy-Schwarz y

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a|^{2n}\right)^{1/2} = \|f\|_{H^2} \left(\frac{1}{1-|a|^2}\right)^{1/2}$$

como hemos supuesto $\|h_1\|_{H^2} \leq 1$, tenemos

$$\leq \left(\frac{1}{1-|a|^2}\right)^{1/2}.$$

por tanto,

$$|\phi(a)| \leq \left(\frac{1}{1-|a|^2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{1-|a|^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Por otro lado, veamos que el supremo se alcanza en dicha función.
Llamemos $f(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z} = \sum_{n=0} (\overline{a})^n z^n$, estos serán sus coeficientes de Taylor por tanto.
De aquí podemos deducir la siguiente cadena de igualdades :

$$||f^2||_{H^1} = ||f||^2_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |(\overline{a})^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{2n} = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Como $\phi(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} = (1-|a|^2)f^2$, tenemos que

$$||\phi||_{H^1} = ||(1-|a|^2)f^2||_{H^1} = (1-|a|^2)||f^2||_{H^1} = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1,$$

y hemos terminado.

Definición 5.3. *Se dice que una sucesión* $\{z_k\}$ *es uniformemente separada si existe un número* $\delta > 0$ *tal que*

$$\prod_{j=1, j\neq k}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1-\overline{z_j}z_k} \right| \geq \delta, \ \textit{para todo } k = 1, 2, \ldots$$

Lema 5.3.
Si $\{z_k\}$ es una sucesión uniformemente separada, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_j}z_k|^2} \leq A, \ k = 1, 2, \ldots,$$

donde A es una constante independiente de k.

Demostración.
Observemos que

$$\left| \frac{z_k - z_j}{1-\overline{z_j}z_k} \right|^2 = 1 - \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_j}z_k|^2},$$

que denotaremos por comodidad

$$= 1 - \alpha_{jk} < 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \delta^2 &\leq \prod_{j=1, j\neq k}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1-\overline{z_j}z_k} \right|^2 = \prod_{j\neq k} (1-\alpha_{jk}) \\ &= \exp\left\{ \sum \log(1-\alpha_{jk}) \right\} \leq \exp\left\{ -\sum_{j\neq k} \alpha_{jk} \right\}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde la última la desigualdad la tenemos porque $\log(1-\alpha_{jk}) \leq -\alpha_{jk}$.
Para ver esto último, basta ver que $\log(1+x) \leq x$ para todo x. Es decir, $1+x \leq e^x$ para todo x. Esto se tiene porque $e^x - x - 1 \geq 0$ para todo x, lo podemos ver fácilmente llamando $h(x) = e^x - x - 1$. Entonces,

$$h(0) = 0,$$
$$h'(x) > 0, \ \text{si } x > 0,$$
$$h'(x) < 0, \ \text{si } x < 0.$$

Para terminar, tomando logaritmo en (5.8), multiplicando por -1 y sumando 1 (el sumando correspondiente a $j = k$ en el último sumatorio) llegamos a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jk} \leq 1 - 2\log\delta = A.$$

Finalmente, presentemos y probemos el teorema principal de este texto.

Teorema 5.2.
Sea $\{z_\nu\}$ una sucesión de números complejos, $0 < |z_\nu| < 1$. Entonces el problema de interpolación

$$f(z_\nu) = w_\nu, \quad \text{con } f(z) \text{ acotada y analítica en } |z| < 1, \tag{5.9}$$

tiene solución para cada sucesión arbitraria $\{w_\nu\}$ acotada ($\{z_\nu\}$ es una sucesión de interpolación universal) si y solo si

$$\prod_{\nu \neq j} \left| \frac{z_\nu - z_j}{1 - \overline{z_j} z_\nu} \right| \geq \delta > 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \tag{5.10}$$

Observación 5.3.
Nótese que si ρ es la distancia pseudo-hiperbólica, la condición del teorema equivale a

$$\prod_{\nu \neq \mu} \rho(z_\nu, z_\mu) \geq \delta > 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

Demostración.

Condición necesaria

Supongamos que $\{z_\nu\}$ es una sucesión de interpolación universal, entonces lo será para una constante C.
Sea $\{w_\nu\} \in \ell^\infty$, entonces

$$m_\infty = \text{ínf}\left\{\|f\|_{H^\infty} : f(z_\nu) = w_\nu, \nu = 1, 2, \dots\right\}$$

por la Observación 5.1 tenemos que existe C tal que

$$C\|w\|_{\ell^\infty} \geq m_\infty$$

pues m_∞ es el ínfimo de las normas $\|\cdot\|_{H^\infty}$ de las f que interpolan la sucesión $\{w_\nu\}$.
Ahora por el Teorema 5.1,

$$= \sup_{\|G\|_{H^1}=1}\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)}\right|, \text{ para todo } w \in \ell^\infty.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|w_\nu\|_{\ell^\infty} = 1$, es decir,

$$C \geq m_\infty(w_1, ..., w_n) = \sup_{\|G\|_{H^1}=1}\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)}\right|, \text{ para todo } w \in B_{\ell^\infty}$$

ahora podemos elegir el $w_\nu \in \partial\mathbb{D}$ tal que $w_\nu \frac{G(z_\nu)}{B_n'(z_\nu)} = \left|\frac{G(z_\nu)}{B_n'(z_\nu)}\right|$ obtenemos

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{G(z_\nu)}{B_n'(z_\nu)}\right| \leq C, \text{ para toda } G \in H^1 \text{ tal que } \|G\|_{H^1} \leq 1 \tag{5.11}$$

ahora, veamos la forma que tiene la derivada del producto de Blaschke,

$$B_n(z) = c\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{z - z_\nu}{1 - \overline{z_\nu}z}\right), \text{ con } |c| = 1.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} B_n'(z) &= c\sum_{\nu=1}^{n}\left(\left(\prod_{j\neq\nu}^{n}\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}\right)\left(\frac{z - z_\nu}{1 - \overline{z_\nu}z}\right)'\right) \\ &= c\sum_{\nu=1}^{n}\left(\left(\prod_{j\neq\nu}^{n}\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}\right)\left(\frac{1 - |z_\nu|^2}{(1 - \overline{z_\nu}z)^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Tomando módulo y evaluando en z_ν,

$$|B_n'(z_\nu)| = \left(\prod_{j\neq\nu}^{n}\left|\frac{z_\nu - z_j}{1 - \overline{z_j}z_\nu}\right|\right)\left|\frac{1 - |z_\nu|^2}{(1 - |z_\nu|^2)^2}\right| = \left(\prod_{j\neq\nu}^{n}\left|\frac{z_\nu - z_j}{1 - \overline{z_j}z_\nu}\right|\right)\left|\frac{1}{1 - |z_\nu|^2}\right|.$$

Volviendo a (5.11), usando el Lema 5.2 para $a = z_\nu$, llamemos $G_\nu(z) = \phi(z) = \frac{(1-|z_\nu|^2)}{(1-\overline{z_\nu}z)^2}$. Luego, $G_\nu(z_\nu) = \frac{1}{1-|z_\nu|^2}$. Se tiene entonces

$$C \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{|G_\nu(z_j)|}{|B_n'(z_j)|} \geq \frac{|G_\nu(z_\nu)|}{|B_n'(z_\nu)|} = \frac{1}{\prod_{j=1, j\neq\nu}^{n} \left|\frac{z_\nu - z_j}{1-\overline{z_j}z_\nu}\right|}.$$

De donde obtenemos

$$\prod_{j\neq\nu}^{n} \left|\frac{z_\nu - z_j}{1-\overline{z_j}z_\nu}\right| \geq \frac{1}{C} = \delta > 0, \ \text{ para todo } \nu = 1, ..., n.$$

Como C no depende de n, tenemos la desigualdad para todo producto parcial. Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos que $\{z_\nu\}$ es uniformemente separada.

Condición suficiente

Supongamos ahora que $\{z_\nu\}$ está uniformemente separada, esto es, existe $\delta > 0$ tal que

$$\prod_{j\neq k} \left|\frac{z_k - z_j}{1-\overline{z_j}z_k}\right| \geq \delta > 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5.12}$$

Definamos la medida

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)\delta_{z_k}$$

con δ_{z_k} la delta de Dirac. Veamos que μ es una medida finita. Por el Lema 5.3 sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_j}z_k|^2} \leq A, \ k = 1, 2, \dots,$$

y como $|1-\overline{z_j}z_k|^2 < 4$, se tiene

$$4A \geq \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2) \geq (1-|z_k|^2) \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|^2),$$

luego μ es finita. Queremos probar ahora que μ es de Carleson, esto es equivalente, como vimos en el Capítulo 4, a probar

$$\sum_{z_j \in W(I)} (1-|z_j|^2) \leq C|I| \text{ para todo arco } I \subset \partial\mathbb{D}$$

De hecho, como μ es finita, basta probarlo cuando $|I| < 1$.
Sea $J = [e^{ia}, e^{ib}) \subseteq \mathbb{T}$, arco con $|J| < 1$ y $a, b \in [0, 2\pi)$. Se definen los siguientes conjuntos :

$$W(J) = \left\{ re^{i\theta} \ : \ 1 - |J| \leq r < 1; \ a \leq \theta < b \right\},$$
$$W^+(J) = \left\{ re^{i\theta} \ : \ 1 - |J| \leq r < 1 - \frac{|J|}{2}; \ a \leq \theta < b \right\}.$$

Fijemos $h = |I|$. Distinguiremos dos casos

1) Existe algún z_k con $z_k \in W(I)$ con $1 - h \leq |z_k| \leq 1 - h/2$.
Consideremos $I = [e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$, si $z = \rho e^{i\theta} \in W(I)$ entonces z cumple $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y $1 > \rho \geq 1 - (\beta - \alpha)$. Sea $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ y $z_j = \rho_j e^{i\theta_j} \in W(I)$, entonces

$$1 - \overline{z_k} z_j = 1 - \rho_k e^{-i\theta_k} \rho_j e^{i\theta_j} = 1 - e^{i(\theta_j - \theta_k)} + e^{i(\theta_j - \theta_k)}(1 - \rho_j \rho_k).$$

Luego,
$$|1 - \overline{z_k} z_j| \leq h + (1 - (1 - h)^2) = h - h^2 + 2h \leq 3h.$$

Usando las cotas obtenidas,

$$4A \geq \sum_{z_j \in W(I)} \frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \overline{z_k} z_j|^2},$$

ya que si era cierta para todos los z_j también lo será si hay menos sumandos (pues son positivos). Usando $|1 - \overline{z_k} z_j| \leq 3h$ tenemos

$$\geq \sum_{z_j \in W(I)} \frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{9h^2}.$$

Por otro lado, $|z_k| \geq 1 - h/2$ implica que $1 - |z_k|^2 \geq 1 - |z_k| \geq h/2$. De esta cota deducimos que

$$\frac{4A9h2}{2} = 36Ah \geq \sum_{z_j \in W(I)} (1 - |z_j|^2),$$

que nos da la condición de medida de Carleson.

2) Supongamos ahora el caso en el que no hay un z_k en $W(I)$ con $1-h \leq |z_k| \leq 1-h/2$, siendo $h = |I| < 1$. Pongamos $I = [e^{ia}, e^{ib})$. Sea $S = \{z_n\}$. Para todo $A \subseteq \mathbb{D}$ medible se tiene que $\mu(A) = \mu(A \cap S)$ (en particular, para $W(I)$ también). Con estas definiciones, $W^+(I) \cap S = \emptyset$.

   Sea $\mathcal{P}_n$ la partición diádica de nivel $n$de I, es decir, 2^n intervalos semicerrados (que entenderemos como cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha) de amplitud $2^{-n}|I|$ y tal que no se solapan. A cada elemento de $\mathcal{P}_n$, para algún n, lo denominaremos intervalo diádico.
   Definamos ahora el siguiente conjunto :

$$\mathcal{D} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n.$$

   $\mathcal{D}$ es la colección de todos los intervalos diádicos.
   Observemos que cada intervalo de $\mathcal{P}_n$ se divide por la mitad en cada nivel en dos intervalos de $\mathcal{P}_{n+1}$.
   Definimos también :

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ J \in \mathcal{D} : W^+(J) \cap S \neq \emptyset \right\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \left\{ J \in \mathcal{D}_1 : J \text{ es maximal en } \mathcal{D}_1 \right\}.$$

   Donde con maximal queremos decir que no hay otro intervalo diádico en $\mathcal{D}_1$ que lo contenga estrictamente. Así, los intervalos $J \in \mathcal{D}_2$ son dos a dos disjuntos. Pues, si $J_1, J_2 \in \mathcal{D}_2$, al ser intervalos diádicos, solo hay dos opciones, o uno contiene al otro, o son disjuntos. Pero si, por ejemplo, $J_1 \subset J_2$ llegamos a una contradicción pues habíamos supuesto J_1 maximal.
   Veamos ahora que $W(I) \cap S = \cup_{J \in \mathcal{D}_1} W^+(J) \cap S$. La contención $\supseteq$ es trivial. Probemos pues la contención $\subseteq$.
   Si $z \in W(I) \cap S$ con $|I| = h < 1$, entonces existe un n tal que

$$\frac{h}{2^n} \geq 1 - |z| > \frac{h}{2^{n+1}}.$$

   Como $\mathcal{P}_n$ es partición, existe $J \in \mathcal{P}_n$ tal que $e^{i\theta} \in J$ y $|J| = \frac{h}{2^n}$. Luego,

$$|J| \geq 1 - |z| > \frac{|J|}{2}, \text{ con } e^{i\theta} \in J,$$

   lo que implica que $z \in W^+(J)$ y habríamos probado la contención restante. Por tanto, $W(I) \cap S = \cup_{J \in \mathcal{D}_1} W^+(J) \cap S$.

   Ahora, veamos que $W(I) \cap S = \cup_{J \in \mathcal{D}_2} W(J) \cap S$. De nuevo, la contención $\supseteq$ es clara.

Veamos la contención contraria
Si $J \in \mathcal{P}_1$, debe existir un intervalo maximal que lo contenga. Esto es debido a que solo hay dos posibilidades : o J está contenido en otro intervalo diádico de nivel n inferior (solo hay una cantidad finita de niveles inferiores) o J ya era maximal.
Pongamos entonces que el maximal que lo contiene es $K_J \in \mathcal{D}_2$. Entonces,

$$W(I) \cap S = \cup_{J \in \mathcal{D}_1} W^+(J) \cap S \subseteq \cup_{J \in \mathcal{D}_1} W(K_J) \cap S \subseteq \cup_{J \in \mathcal{D}_2} W(J) \cap S$$

Para cada elemento de $J \in \mathcal{D}_1$ se tiene, por el caso 1 ya estudiado, que

$$\mu(W(J)) \leq 36Ah|J|, \ \ J \in \mathcal{D}_1.$$

En particular, esto es cierto para $J \in \mathcal{D}_2$,

$$\mu(W(I)) = \mu(W(I) \cap S) \leq \sum_{J \in \mathcal{D}_2} 36Ah|J|.$$

Pero, como los intervalos en $\mathcal{D}_2$ son dos a dos disjuntos,

$$\leq 36Ah|I|.$$

Por tanto, hemos probado que $\mu = \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\delta_{z_k}$ es una medida de Carleson.

Para terminar, nos basta ver que en este caso tenemos la hipótesis de la Proposición 5.2. Es decir, queremos ver que existe una constante C tal que para toda $w \in \ell^\infty$ (que podemos suponer con $\|w\|_{\ell^\infty} = 1$ simplemente por un razonamiento de normalización) para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una $f_n \in H^\infty$ tal que

$$\begin{aligned} &f_n(z_\nu) = w_\nu \quad \nu = 1, \ldots, n, \\ &\|f_n\|_{H^\infty} \leq C. \end{aligned}$$

Veamos entonces, en otras palabras que, $m_\infty(w_1, \ldots, w_n) \leq C$. Como hemos deducido anteriormente en el Teorema 5.1,

$$m_\infty = \sup_{\|G\|_{H^1}=1} \left| \sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu) \frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)} \right|.$$

Acotando el argumento del supremo con la desigualdad triangular,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu) \frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |G(z_\nu)| \frac{|w_\nu|}{|(B_n)'(z_\nu)|},$$

y como hemos supuesto $\|w\|_{\ell\infty} = 1$,

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|G(z_\nu)|}{|(B_n)'(z_\nu)|}.$$

Rescatando los cálculos hechos en la *condición necesaria* sabemos que $|(B_n)'(z_\nu)| = \left(\prod_{j\neq\nu}^{n} \left|\frac{z_\nu - z_j}{1-\overline{z_j} z_\nu}\right|\right) \left|\frac{1}{1-|z_\nu|^2}\right|$. Además, $\{z_\nu\}$ es una sucesión uniformemente separada. Lo que nos da

$$\leq \frac{1}{\delta}\left(\sum_{\nu=1}^{n}(1-|z_\nu|^2)|G(z_\nu)|\right) \leq \frac{1}{\delta}\|G\|_{H^1(\mu)}$$

y como hemos probado que μ es de Carleson, por el Teorema 4.3 tenemos

$$\leq \frac{C}{\delta}\|G\|_{H^1}.$$

Por tanto, hemos acotado

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)}\right| \leq \frac{C}{\delta}\|G\|_{H^1},$$

de lo que seguimos que

$$m_\infty = \sup_{\|G\|_{L^1}=1}\left|\sum_{\nu=1}^{n} G(z_\nu)\frac{w_\nu}{(B_n)'(z_\nu)}\right| \leq \sup_{\|G\|_{L^1}=1}\left(\frac{C}{\delta}\|G\|_{H^1}\right) = \frac{C}{\delta}.$$

Finalmente, como habíamos adelantado, aplicando la Proposición 5.2 hemos terminado. ∎

Bibliografía

[1] Theodore W. Gamelin: *Complex Analysis.*
Springer, New York, 2001.

[2] W. Rudin: *Análisis Real y Complejo.*
McGraw-Hill International Editions, New York, 1979.

[3] Peter L. Duren: *Theory of H^p spaces.*
Academic Press, New York, 1970.

[4] John B. Garnett: *Bounded Analytic Functions.*
Springer, New York, 2007.

[5] Paul Koosis: *Introduction to H_p spaces.*
Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[6] John B. Conway: *Functions of One Complex Variable.*
Springer-Verlag, New York, 1978.

[7] John B. Conway: *Functions of One Complex Variable II.*
Springer Science+Business Media, LLC, New York, 1995

[8] W. Rudin: *Functional Analysis.*
McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1991.

[9] Lennart Carleson: *An Interpolation Problem for Bounded Analytic Functions.*
American Journal of Mathematics Vol. 80, No. 4, (Oct, 1958), pages 921-930.