Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

Grado en Matemáticas

La noción de homotopía para espacios finitos y espacios de Alexandrov

Trabajo Fin de Grado

Autora:

Ana María Cumplido Caballero

Tutor:

Antonio Rafael Quintero Toscano

Junio 2022

Índice general

Introducción

El Trabajo de Fin de Grado que se presenta es una extensión de un Trabajo de Fin de Grado anterior realizado por Álvaro Luque Amaro [7]. Para hacerlo autocontenido, el material de [7] que se ha necesitado aquí ha sido incluido de manera resumida en la Parte I.

Seguimos considerando los A-espacios y en especial los espacios finitos como un tema de iniciación a la investigación muy apropiado para aquellos alumnos del Grado en Matemáticas interesados en topología, pues siendo accesible a estudiantes de último año plantea problemas de importancia y está relacionado con investigaciones en otras áreas.

El Tutor

Los llamados espacios de Alexandrov (A-espacios) proporcionan un lenguaje topológico para el tratamiento de los conjuntos ordenados. Esto fue observado por primera vez en 1937 por P.S. Alexandrov ([1]) e independientemente por A.W. Tucker ([15]). Después de treinta años en los que la sola referencia relevante sobre A-espacios seguía siendo el artículo de Alexandrov, el interés en la topología de los A-espacios se amplió cuando, a mitad de la década 1960-70, M. McCord ([10]) y R. Stong ([14]) probaron que los invariantes de la topología algebraica de los poliedros compactos (por ejemplo, la homología o el grupo fundamental) podían ser representados por espacios finitos.

Aún así, la literatura sobre la topología algebraica de los A-espacio al final del siglo XX se reducía a los trabajos de McCord y Stong, salvo algunas excepciones como el trabajo de K.A. Hardie y J.J.C. Vermeulen ([4]) de 1993, aunque por entonces los A-espacios ya eran utilizados habitualmente para dotar de un lenguaje topológico al análisis de imágenes digitales ([5]). En la década 2000-2010 además del interés por sus aplicaciones, el estudio de la topología de los A-espacios se reforzó con la aparición en 2003 de unas notas de J.P. May ([9]), posteriormente extendidas en [8], que recogían lo conocido de la topología algebraica de los espacios finitos, mostrando sus aplicaciones en problemas relevantes y sus conexiones con otras clases de objetos habituales de la topología algebraica.

Junto con May, J. Barmak y G. Minian ([3]) aumentaron el conocimiento de la topología de los A-espacios con nuevos resultados sobre espacios finitos. En particular, en ([3]) se puede encontrar un detallado estudio de las equivalencias homotópicas en la clase de los espacios finitos.

La exposición de parte de ese estudio es el objetivo principal de la presente memoria. Con el fin de centrar y resumir el material aquí recogido, recordemos que la construcción de McCord, $X \longmapsto \mathcal{K}(X)$, asocia a todo espacio finito un complejo simplicial finito de manera que una equivalencia débil de homotopía entre los espacios finitos X e Y se traduce en una equivalencia de homotopía entre los poliedros subyacentes a los correspondientes complejos $|\mathcal{K}(X)|$ e $|\mathcal{K}(Y)|$.

Como la relación de homotopía es más restrictiva que la de homotopía débil, el reflejo de una equivalencia de homotopía entre espacios finitos en sus poliedros asociados debe ser algo más exigente que la equivalencia de homotopía habitual en topología.

La solución dada por Barmak y Minian, recogida en [3], está basada en la noción de colapso. Esta operación actúa sobre la estructura combinatoria de un complejo simplicial eliminando ordenadamente aquellos símplices para los que "hundir" una cara sobre el resto de caras deja invariante al resto del complejo. Un ejemplo sencillo de esta operación se ilustra en la siguiente figura:

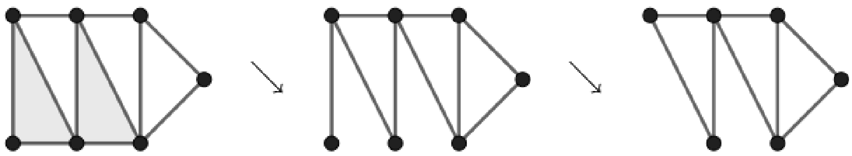

Figura 1: Colapsos.

La noción de colapso (y su inverso, la expansión) da lugar a una teoría de homotopía para poliedros conocida como homotopía simple, que es más restrictiva que la ordinaria, pero aún no es suficiente para describir las equivalencias de homotopía entre espacios finitos. Para ello se recurre a otra operación combinatoria llamada colapso fuerte, que consiste en la eliminación ordenada de aquellos símplices que contienen un vértice v y cuyas caras opuestas a v contienen todas ellas un cierto vértice v'. En otras palabras, todos los símplices principales que contienen a v contienen también la arista vv'. Obsérvese que todo colapso fuerte se descompone en una secuencia de colapsos ordinarios, como puede verse en la Figura 2 para un caso sencillo.

Que sea necesario recurrir a estas operaciones combinatorias para caracterizar las equivalencias de homotopía entre espacios finitos no es extraño si tenemos en cuenta que el cilindro de la defínción de homotopía no es por mucho un espacio finito. La falta de un cilindro canónico en la clase de los A-espacios hace que el tratamiento de la teoría de homotopía de estos espacios sea técnicamente complejo (ver [13]).

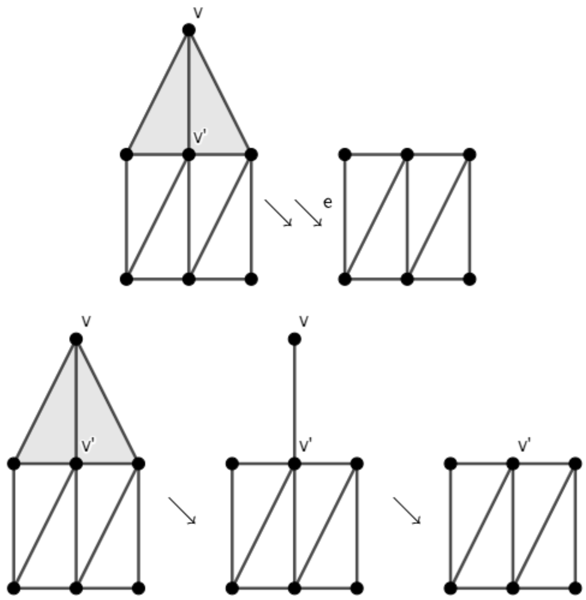

Figura 2: Colapso fuerte visto como colapsos ordinarios.

Respecto a la noción de homotopía en la clase de A-espacios arbitrarios, presentamos en el Capítulo 5 una noción de homotopía que creemos debe estar entre la noción intrínseca dada por el orden (que requiere de secuencias de aplicaciones comparables de longitud finita pero variable) y la homotoípa ordinaria definida con el intervalo unidad. También, como aportación, incluimos algunas variaciones sobre las demostraciones en [3]. Aquellas que son demostraciones alternativas a las originales están indicadas en el texto.

Terminamos detallando el contenido de esta memoria, que hemos dividido en dos partes.

Como ya el Trabajo Fin de Grado contiene una exhaustiva exposición de los tres primeros capítulos de [3], la Parte I presenta en los primeros capítulos un resumen de Topología General y una introducción a la topología de los A-espacios extraída de [7].

El Capítulo 3 presenta los resultados y definiciones de la Topología Poliedral usados en capítulos posteriores. Parte de ellos vienen ya en [7]. Aquellos que no aparecen en [7] se incluyen aquí con demostraciones detalladas.

El Capítulo 4 está dedicado a la relación entre espacios finitos y poliedros determinada por los operadores $\mathcal{K}$ y $\mathcal{X}$ de McCord, siendo integramente un resumen de lo expuesto en [7].

Los dos primeros capítulos de la Parte II se concentran en el objetivo central de esta memoria: la exposición detallada de la interpretación combinatoria de las equivalencias de homotopía entre espacios finitos dada en [3].

El Capítulo 5 comienza con un resumen de los resultados básicos de la teoría de homotopía de los A-espacios, destacando las propiedades de los espacios finitos. En especial el hecho de que el tipo de homotopía de un espacio finito X está representado, salvo homeomorfismo, por un subespacio minimal de X, llamado su núcleo.

Aquellos resultados que ya aparecen en [7] han sido simplemente citados, mientras que los resultados de [3] que no aparecen en [7] han sido incluidos con demostración. También damos una demostración alternativa y directa de la equivalencia de la homotopía ordinaria definida por secuencias de aplicaciones entre espacios finitos comparables por el orden natural.

Como aportación, este capítulo también contiene, en la Sección 5.3, una nueva noción de homotopía de aplicaciones entre A-espacios basada en la recta de Khalimsky, que permite disponer de infinitos "niveles" discretos. Es una noción que parece quedar entre la dada por el orden natural de las aplicaciones entre A-espacios y la dada por el rango continuo del intervalo, siendo las tres equivalentes en la clase de los espacios finitos.

El Capítulo 6 está dedicado al objetivo principal de esta memoria: presentar y estudiar con detalle la noción de colapso fuerte, que es la herramienta combinatoria usada en [3] para describir las equivalencias de homotopía entre espacios finitos. Este capítulo contiene algunas demostraciones alternativas a las dadas en [3] que pueden tener cierto interés.

Un capítulo final abierto plantea el problema de encontrar una noción de homotopía para la clase de los A-espacios localmente finitos que se corresponden con los colapsos fuertes tipo Siebenmann en complejos simpliciales localmente finitos.

Resumen

El objetivo de este trabajo es detallar la interpretación combinatoria de las equivalencias de homotopía entre espacios finitos y plantear algunos problemas en el caso de A-espacios infinitos. Para ello hemos divididoido el trabajo en dos partes.

La Parte I presenta un resumen de Topología General y una exhaustiva introducción a la topología de los A-espacios extraída del trabajo de fin de grado de Álvaro Luque ([7]), que a su vez es una exposición detallada de los primeros capítulos de [3]. También incluimos los resultado de Topología Simplicial necesarios para la comparación de la clase de los espacios finitos y la clase de complejos simpliciales (finitos).

La Parte II comienza con una introducción básica a la homotopía de los A-espacios tomada también de [7]. Como aportación, proponemos una nueva noción de homotopía de aplicaciones entre A-espacios basada en la recta de Khalimsky.
Seguimos con un estudio detallado de la noción de colapso fuerte en [3] y la descripción con ellos de las equivalencias de homotopía entre espacios finitos.

Terminamos el trabajo con un capítulo abierto que plantea el problema de encontrar una noción de homotopía para la clase de los A-espacios localmente finitos que se corresponda con los colapsos fuertes tipo Siebenmann en complejos simpliciales localmente finitos.

Además de las nuevas definiciones de homotopía y colapsos fuertes de Siebenmann, en este trabajo se aportan demostraciones alternativas a algunas de las dadas en [3].

Abstract

The aim of this project is to give a detailed summary of the combinatorial interpretation of the homotopy equivalences between finite spaces and to pose some problems in the case of infinite A-spaces. In order to do this we have divided this project into two different parts.

Part I presents a summary of General Topology and an exhaustive introduction to the topology of A-spaces extracted from Álvaro Luque's Final Degree Project ([7]) which in turn is a detailed exposition of the first chapters of [3]. We have also included the results from Simplicial Topology needed to compare the class of finite spaces and the class of simplicial (finite) complexes.

Part II begins with a basic introduction to the homotopy of A-spaces, which has also been taken from [7]. As a contribution, we propose a new notion of homotopy of maps between A-spaces based on the Khalimsky line.
We continue with a detailed study of the notion of strong collapse in [3] and its use in describing homotopy equivalences between finite spaces.

We finish this project with an open chapter that poses the problem of finding a homotopy notion for the class of locally finite A-spaces that corresponds to Siebenmann-type strong collapses in locally finite simplicial complexes.

Apart from the new definitions of homotopy and strong Siebenmann collapses, this project provides also alternative proofs to some of those given in [3].

CAPÍTULO 1

Topología General: Conceptos básicos

Este capítulo recoge la terminología básica necesaria para el desarrollo de este trabajo. Los detalles de los resultados expuestos podrán consultarse en cualquier texto de topología general, como [12].

1.1. Base de y para una topología

Definición 1.1.1. Una *topología*, $\mathcal{T}$, sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X cumpliendo las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$.
2. La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.
3. La unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama *espacio topológico*. Los conjuntos de $\mathcal{T}$ son llamados los *conjuntos abiertos* de $(X, \mathcal{T})$.

En la mayoría de los casos, los abiertos quedan determinados por ellos. Estos subconjuntos serán abiertos generadores, de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 1.1.2. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se dice que es una *base* de la topología $\mathcal{T}$ (o *base de abiertos*) si todo abierto no vacío de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$ si y solo si para cada abierto U y para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 1.1.3. Una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ se dice *minimal* si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ la familia $\mathcal{B} - \{B\}$ deja de ser base para $\mathcal{T}$.

La siguiente noción proporciona un método para la construcción de una topología a partir de una familia de conjuntos dada.

Definición 1.1.4. Una base $\mathcal{B}$ para una topología sobre X es una colección de conjuntos de X, llamados *elementos básicos*, tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos, B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x, de forma que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas condiciones, se define la única topología sobre X que tiene a $\mathcal{B}$ como base, la *topología generada por* $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, formada por los conjuntos $U \subseteq X$ de forma que para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$.

Añadiendo una tercera condición a la Definición 1.1.3, se obtiene una caracterización de base minimal para una topología.

Lema 1.1.5. *Un conjunto $\mathcal{B}$ de subconjuntos no vacíos de X es una base minimal para una topología si y solo si se cumplen las tres propiedades siguientes:*

1. *Todo punto de X está en algún conjunto B de $\mathcal{B}$.*
2. *Si x pertenece a la intersección de dos elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*
3. *Si una unión de conjuntos B_i de $\mathcal{B}$ está también en $\mathcal{B}$, entonces dicha unión es igual a uno de los B_i.*

1.2. Axiomas de Separación

La definición de espacio topológico es muy general y no muchos resultados interesantes se cumplen para todos. Los espacios topológicos pueden estudiarse diferenciándolos por clases, de forma que cuanto más restrictiva sea dicha clase, más resultados pueden probarse para los espacios que la compongan.

En esta sección se exponen los axiomas de separación, referidos a las distintas formas de separar puntos y conjuntos cerrados en espacios topológicos.

Definición 1.2.1.

1. X es un *espacio T_0* si para dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto G tal que, o bien $x \in G$ e $y \notin G$, o bien $x \notin G$ e $y \in G$.

2. X es un *espacio T_1* si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos G_1 y G_2 tales que $x \in G_1$, $y \notin G_1$ y también $x \notin G_2$, $y \in G_2$.

3. X es un *espacio T_2* o *espacio de Hausdorff* si existen abiertos G_1 y G_2 disjuntos tales que $x \in G_1$, $y \notin G_1$ y también $x \notin G_2$, $y \in G_2$.

4. X es un *espacio T_3* o *espacio regular* si es un espacio T_1 y, para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

5. X es un *espacio T_4* o *espacio normal* si es un espacio T_1 y para cada par de cerrados disjuntos $F_1, F_2 \subseteq X$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.

Lema 1.2.2. *Se tienen las siguientes equivalencias:*

1. *X es T_0 si y solo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ o bien $x \notin \overline{\{y\}}$, o bien $y \notin \overline{\{x\}}$.*

2. *X es T_1 si y solo si para todo $x \in X$, entonces $\{x\}$ es cerrado, es decir, $\{x\} = \overline{\{x\}}$, lo que a su vez equivale a pedir que para todo $x \in X$, $x = \bigcap_{x \in \mathcal{G}_x} G$ siendo $\mathcal{G}_x$ la familia de abiertos que contienen a x.*

3. *X es T_2 si y solo si para todo $x \in X$, $x = \bigcap_{x \in \mathcal{G}_x} \overline{G}$.*

Usando el Lema 1.2.2, se tiene que $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

1.3. Construyendo nuevos espacios

1.3.1. Topología unión

Sean X e Y espacios topológicos disjuntos. La *topología de la unión disjunta* sobre $X \sqcup Y$ es la generada por la familia formada por los conjuntos abiertos de X y los conjuntos abiertos de Y.

En particular, si $\mathcal{B}_1$ es una base de la topología de X y $\mathcal{B}_2$ es una base de la topología de Y, entonces $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 = \{B_1 \sqcup B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ es base de la topología unión $X \sqcup Y$.

Lema 1.3.1.1. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son minimales, también lo es $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$.

1.3.2. Topología producto

Definición 1.3.2.1. Sean X e Y espacios topológicos. La *topología producto* sobre $X \times Y$ es la topología generada por los productos $U \times V$, siendo U un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

Lema 1.3.2.2. Si $\mathcal{B}_1$ es una base de la topología de X, y $\mathcal{B}_2$ es una base de la topología de Y, entonces $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ es una base para la topología producto sobre $X \times Y$. Se tiene, además, que si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases minimales, entonces $\mathcal{B}$ también lo es.

Lema 1.3.2.3. Sean X, W, Y y Z espacios topológicos. Si $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow W$ son aplicaciones continuas, entonces

$$\begin{aligned} (f, g) : X \times Y &\longrightarrow Z \times W \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)), \end{aligned}$$

es continua.

1.3.3. Topología cociente

Definición 1.3.3.1. Sean X e Y espacios topológicos, y sea $p : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una *aplicación cociente* o *de identificación* si un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto en Y si y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.
Esta condición es habitualmente conocida como *continuidad fuerte*.

Definición 1.3.3.2. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto y $p : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. Entonces existe exactamente una topología $\mathcal{T}$ sobre Y inducida por p y respecto a la cual p es una aplicación cociente. Esta topología se conoce como *topología cociente* inducida por p.

La topología cociente se usa frecuentemente en situaciones donde se trabaje con un espacio cociente:

Definición 1.3.3.3. Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. El conjunto cociente $X/\sim$ con la topología cociente inducida por la proyección natural $p : X \longrightarrow X/\sim$ se denomina *espacio cociente* de X.
Si $A \subseteq X$, se denota por X/A al espacio cociente definido por la relación $x \sim a$ si $x = a$ o bien si $x, a \in A$.

Esta definición motiva otra forma para describir la topología cociente: un subconjunto U de $X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es la unión de los representantes de las clases en U. Así, un conjunto abierto de $X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un conjunto abierto de X.

1.4. Compactificaciones

Definición 1.4.1. Sea X un espacio topológico, una *compactificación* $\widehat{X}$ de X es una una incrustación topológica $j : X \longrightarrow \widehat{X}$ donde $\widehat{X}$ es compacto y $j(X)$ es denso en $\widehat{X}$.

Dos compactificaciones $j_1 : X \longrightarrow \widehat{X}_1$ y $j_2 : X \longrightarrow \widehat{X}_2$ son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : \widehat{X}_1 \longrightarrow \widehat{X}_2$ de forma que $h(j_1(x)) = j_2(x)$ para todo $x \in X$.
Recordemos que una *incrustación topológica* es una aplicación continua e inyectiva cuya restricción a la imagen es un homeomorfismo.

Definición 1.4.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se define la *compactificación por un punto* o *compactificación de Alexandrov* de X como el espacio topológico $(X^+, \mathcal{T}^+)$, donde, si ∞ es un símbolo que no es un elemento de X, entonces $X^+ = X \cup \{\infty\}$ y la topología $\mathcal{T}^+$ está dada por

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \left\{ V \subseteq X^+ : \infty \in V \text{ y } X - V \text{ es cerrado y compacto en } X \right\}.$$

Nota 1.4.3. Si X es Hausdorff es equivalente a pedir que las diferencias $X - V$ sean compactas.

Ejemplo 1.4.4.

1. Una base de la topología de $\mathbb{R}^+_{\geq 0}$ está formada por abiertos de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y $V_n = (n, \infty) \cup \{\infty\}$ con $n \in \mathbb{N}$. La compactificación por un punto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ es homeomorfa a $[0, 1]$. En efecto el homeomorfismo

$$j : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow [0, 1)$$
$$j(x) = \frac{x}{x+1}$$

se extiende al homeomorfismo

$$\widetilde{j} : \mathbb{R}^+_{\geq 0} \longrightarrow [0, 1]$$

que lleva ∞ en 1.

2. $\mathbb{R}^+ \cong S^1$, y en general $(\mathbb{R}^n)^+ \cong S^n$.

3. La compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos es el conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, con la topología $\mathcal{T}^*$ generada por los abiertos euclídeos de $\mathbb{R}$ junto con los conjuntos $V_n \cup \{\infty\}$, $W_n \cup \{-\infty\}$, donde $V_n = (n, \infty)$ y $W_n = (-\infty, n)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Obsérvese que tenemos un homeomorfismo

$$\widetilde{j} : \mathbb{R}^* \simeq [-1, 1]$$

como extensión del homeomorfismo

$$j : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$$
$$j(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

por $\widetilde{j}(\infty) = 1$ y $\widetilde{j}(-\infty) = -1$.

1.5. Conexión y Contractibilidad

Definición 1.5.1. Dado X un espacio topológico, un *camino* entre dos elementos $x, y \in X$ es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. En tal caso, se dice que x e y se pueden unir por un camino. La relación de estar unidos por un camino es de equivalencia.

Definición 1.5.2. Un espacio topológico X se dice *conexo por caminos* si todo par de puntos $x, y \in X$, se pueden unir por un camino. Más generalmente, un subconjunto $Z \subseteq X$ se llamará conexo por caminos si lo es con respecto a su topología relativa.

Definición 1.5.3. Un espacio topológico X se dice *localmente conexo por caminos* si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x existe otro entorno M de x que es conexo por caminos y $M \subseteq N$.

Definición 1.5.4. Un espacio X se dice *disconexo* si se puede descomponer como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos (equivalentemente cerrados) disjuntos y no vacíos. En caso contrario se dice que es *conexo.*

Nota 1.5.5. Es fácil probar que X es conexo si y solo si los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

Proposición 1.5.6. *Todo espacio conexo por caminos es conexo. En particular, un espacio localmente conexo por caminos es conexo si y solo si es conexo por caminos.*

La conexión por caminos es una noción más fuerte que la conexión topológica, y una noción mucho más fuerte es la contractibilidad, que definiremos más adelante.

Definición 1.5.7. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ se dicen homotópicas si existe una aplicación continua

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y,$$

tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$. La aplicación H se conoce como *homotopía* entre f y g, y la relación de ser homotópicas se denotará como $f \simeq g$. Esta relación es de equivalencia.

Definición 1.5.8. Una homotopía se dice *relativa* a un conjunto $A \subseteq X$ si $H(a,t) = f(a) = g(a)$ para todo t y $a \in A$.

Definición 1.5.9. Una aplicación se dice *homotópicamente trivial* si es homotópica a una constante.

Definición 1.5.10. Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una *equivalencia de homotopía* (o que X e Y son *homotópicamente equivalentes*) si existe $g : Y \longrightarrow X$ continua tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$.

Definición 1.5.11. Un espacio X se dice *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un espacio puntual. Esta condición equivale a afirmar que la identidad id_X es homotópica a una aplicación constante $c : X \longrightarrow X$.

Definición 1.5.12. Un espacio X se dice *localmente contráctil* si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x, existe otro entorno M de x que es contráctil y $M \subseteq N$.

Definición 1.5.13. Un subespacio $A \subseteq X$ de un espacio X se dice que es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \longrightarrow A$, llamada *retracción*, tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Esto es, si $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión, $r \circ i$ es la identidad de A.
Se dice que A es un *retracto de deformación* de X si además la composición $i \circ r$ es homotópica a la identidad de X. Además, si se puede encontrar una homotopía $i \circ r \simeq id_X$ relativa a A, se dirá que es un *retracto de deformación fuerte*.

Definición 1.5.14. Un espacio X se dice *localmente compacto* si para todo punto $x \in X$ y para todo entorno N de x existe un entorno más pequeño de x, $K \subseteq N$, que es compacto.

Si Y^X denota el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y, toda homotopía $h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ induce una aplicación $\widehat{h} : [0,1] \longrightarrow Y^X$ definida por $\widehat{h}(t)(x) = h(x,t)$. Si se dota a Y^X de una topología apropiada para la que la aplicación $\widehat{h}$ sea continua, se podrán identificar las homotopías entre f y g con caminos en Y^X.

Esta topología se conoce como *topología compacto-abierto*, y está generada por todas las intersecciones finitas de la forma $\bigcap_{i=1}^n \langle K_i, U_i \rangle$ siendo, para cada i, K_i y U_i conjuntos compactos y abiertos de X e Y respectivamente, y $\langle K, U \rangle = \left\{ f \in Y^X : f(K) \subseteq U \right\}$.

Para la topología compacto-abierto se tiene un resultado conocido como *ley exponencial*, que se puede consultar en [12], teorema 46.11. En este teorema se exige la propiedad de Hausdorff aunque no es necesaria: ver teorema 1.5.10 en [7], donde se puede encontrar una demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.5.15. *Sean Y y Z espacios topológicos y sea X localmente compacto (no necesariamente Hausdorff). Entonces, si Y^X está dotado de la topología compacto-abierto, la continuidad de $h : X \times Z \longrightarrow Y$ es equivalente a la continuidad de la aplicación $\widehat{h} : Z \longrightarrow Y^X$ dada por $\widehat{h}(Z)(X) = h(X,Z)$. Es decir, la aplicación $h \longmapsto \widehat{h}$ induce una biyección $Y^{X \times Z} \simeq (Y^X)^Z$.*

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, si tomamos $Z = [0,1]$, el intervalo unidad euclídeo, se tiene la siguiente identificación de las homotopías como caminos entre aplicaciones.

Corolario 1.5.16. *Sea X un espacio localmente compacto. Entonces para todo espacio Y, dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ son homotópicas si y solo si están conectadas por un camino en Y^X con la topología compacto-abierto.*

CAPÍTULO 2

Espacios de Alexandrov y Espacios Finitos

Este capítulo es una breve introducción a la topología de los espacios de Alexandrov, dedicándole especial atención a los espacios finitos. Se incluirán algunos de los resultados más importantes, que servirán para el fin de este trabajo. Para las demostraciones y más resultados, ver [3] y [7].

2.1. Espacios de Alexandrov

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un *espacio de Alexandrov* (*A-espacio*) si la topología $\mathcal{T}$ es cerrada también bajo intersecciones arbitrarias. Es decir, la intersección arbitraria de abiertos es también un conjunto abierto.

Es obvio que todo espacio finito es un A-espacio, ya que toda intersección de abiertos se puede expresar como una intersección finita. Por tanto, todo lo que se establezca para A-espacios, seguirá siendo válido para espacios finitos.

Al estudiar los A-espacios hay que tener en cuenta la existencia de abiertos mínimos:

Definición 2.1.1. Si X es un A-espacio, se define el *abierto mínimo o minimal*, U_x de $x \in X$, como la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a x. De hecho, se tiene que los A-espacios son exactamente aquellos espacios topológicos con abiertos mínimos.

Nota 2.1.2. No existe ambigüedad en usar "mínimo" o "minimal" para designar a U_x, pues todo abierto minimal conteniendo a x es inmediatamente mínimo. En efecto, si los abiertos U y V contienen a x y son minimales, entonces $U \cap V$ es abierto y $x \in U \cap V$. Como $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$, se sigue que $U = V = U \cap V$.

Proposición 2.1.3. *X es un A-espacio si y solo si para todo punto $x \in X$, existe un abierto mínimo U_x que lo contiene.*

Es inmediato comprobar que los abiertos mínimos constituyen una base minimal (de hecho mínima) para la topología de X. El hecho de que los abiertos minimales formen una base lleva a la siguiente caracterización de la continuidad para A-espacios.

Proposición 2.1.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre A-espacios. Entonces f es continua si y solo si $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ para todo $x \in X$.*

Lema 2.1.5. *Si X es un A-espacio, entonces $U_x = U_y$ si y solo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. En particular, X es T_0 si y solo si $U_x = U_y$ es equivalente a $x = y$.*

Proposición 2.1.6. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, entonces para todo conjunto $Y \subseteq X$, el subespacio $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es también un A-espacio. Además, la familia $\{U_y \cap Y\}_{y \in Y}$ es la base mínima de Y.*
Es decir, los subespacios heredan la propiedad de ser A-espacios.

Proposición 2.1.7. *Sean X e Y dos A-espacios. Entonces $X \times Y$ es un A-espacio. Además, $\{U_x \times U_y\}_{(x,y) \in X \times Y}$ es base mínima de $X \times Y$.*

Definición 2.1.8. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *abierta* si para todo abierto G de X su imagen $f(G)$ es un abierto de Y.

Proposición 2.1.9. *Si $p : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente y X es un A-espacio, entonces Y también lo es. Además, la familia de imágenes $\{p(U_x)\}_{x \in X}$ es base mínima de Y si y solo si la aplicación cociente es abierta.*

2.2. Conexión y homotopía en A-espacios

Las propiedades relativas a la conexión de los A-espacios son similares a las de los espacios de interés en topología algebraico-geométrica: poliedros y variedades. Esto es, los A-espacios son también localmente contráctiles. Para un A-espacio esto equivale a decir que el abierto mínimo es contráctil.

Teorema 2.2.1. *Sea X un A-espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es conexo.*
2. *Dados $x, y \in X$, existe una secuencia $x = z_1, \ldots, z_s = y$, tal que $z_i \in U_{z_{i+1}}$ ó $z_{i+1} \in U_{z_i}$ para $i < s$.*
3. *X es conexo por caminos.*

Lema 2.2.2. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, donde Y es un A-espacio. Supongamos que $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)}$ o, equivalentemente, $f(x) \in U_{g(x)}$, para todo $x \in X$. Entonces f y g son homotópicas por una homotopía relativa al conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$.*

Corolario 2.2.3. *Si Y es un A-espacio tal que para algún $y_0 \in Y$ se tiene $U_{y_0} = Y$, entonces Y es contráctil.*

Teorema 2.2.4. *El espacio cociente X_0 de un A-espacio X por la relación $x \sim y$ si $U_x = U_y$ es un A-espacio T_0. Más aún, la aplicación cociente $p : X \longrightarrow X_0$ es una equivalencia de homotopía con inversa homotópica cualquier aplicación $f : X_0 \longrightarrow X$ que elija para cada clase de X_0 un representante de la misma.*

Definición 2.2.5. Al espacio X_0 dado en el teorema anterior se le llama *T_0-modelo* de X.

2.3. Conjuntos parcialmente ordenados (posets), A-topologías y preórdenes

La teoría de los conjuntos parcialmente ordenados se puede considerar parte de la Topología, ya que los posets son exactamente los A-espacios T_0. A continuación se describe esta equivalencia con detalle.

Definición 2.3.1. Un *preorden* $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva. Si un preorden $\mathcal{R}$ en X es además antisimétrico, se llamará *orden parcial* (o simplemente *orden* en X) y decimos que $(X, \mathcal{R})$ es un *conjunto parcialmente ordenado* o un *poset*. Se nota $x \leq y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$.
Dos elementos x e y del conjunto preordenado $(X, \leq)$ se dicen que están relacionados o que son *comparables* si $x \leq y$ ó $x \geq y$. De lo contrario, se dicen *incomparables*.
Si cada par de elementos son comparables, se dice que $(X, \leq)$ es un conjunto *totalmente ordenado*. En general, cualquier subconjunto totalmente ordenado de un poset se llamará *cadena*. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice una *anticadena* si ningún par de sus elementos son comparables.
Un elemento x de un conjunto preordenado X se dice *maximal* (*minimal*) si para cada z en X con $x \leq z$ ($z \leq x$, respectivamente) implica $x = z$. Se denotará por $Max(X)$ ($Min(X)$, respectivamente) al conjunto de los elementos maximales (minimales, respectivamente) de X. Tanto $Max(X)$ como $Min(X)$ son anticadenas.

Definición 2.3.2. Una aplicación entre conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \preceq)$ se dice que *preserva el orden* (o que es una *aplicación ordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x) \preceq f(x')$. Se dice que *invierte el orden* (o es *antiordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x') \preceq f(x)$.
La aplicación anterior se dice que es un *isomorfismo* entre conjunto preordenados si es una biyección tal que f y f^{-1} son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama *antiisomorfismo*.

Definición 2.3.3. Un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto decreciente* si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$, para $x, y \in X$. Para $x \in X$, $\downarrow x = \{y \in X : y \leq x\}$ es un conjunto decreciente llamado *ideal principal generado por x*.
De igual manera, un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto creciente* si $y \geq x \in S$ implica

$y \in S$, para $x, y \in X$. Para $x \in X$, $\uparrow x = \{y \in X : y \geq x\}$ es un conjunto creciente llamado *filtro principal generado por* x.

En lo que resta de sección, se describe la identificación entre A-espacios y conjuntos preordenados, debida a Alexandrov ([1]) y a Tucker ([15]). Denotaremos por **Alex** a la clase de los A-espacios y aplicaciones continuas, y por **PreOrd** a la clase de los conjuntos preordenados y aplicaciones que preservan el orden.

Lema 2.3.4. *Si $\leq$ es un preorden en X, entonces la familia de los ideales principales en X,*

$$\downarrow x = \{y \in X : y \leq x\}, x \in X,$$

es base mínima para una A-topología sobre X para la cual los abiertos son exactamente los conjuntos decrecientes (equivalentemente, los cerrados son los conjuntos crecientes).
Más aún, si $\leq$ es un orden parcial, entonces esta topología es T_0.

Definición 2.3.5. La topología anterior se conoce como *topología del preorden* $\leq$ y se denota por $\mathcal{T}_{\leq}$.

Nota 2.3.6. También es base mínima para una topología sobre X la familia de filtros principales $\uparrow x$, que sería la topología del preorden opuesto definido por $x \leq^{op} y$ si $y \leq x$.

Recíprocamente, se tiene el siguiente lema.

Lema 2.3.7. *En todo A-espacio $(X, \mathcal{T})$ se puede definir un preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ llamado preorden de especialización en $\mathcal{T}$, estableciendo $x \leq_{\mathcal{T}} y$ si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:*

$$y \in \overline{\{x\}} \Longleftrightarrow x \in U_y \Longleftrightarrow \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}.$$

Más aún, si $(X, \mathcal{T})$ es T_0, entonces el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ es, de hecho, un orden parcial.

El siguiente teorema da la equivalencia entre preórdenes y A-topologías.

Teorema 2.3.8. *Toda relación de preorden $\leq$ sobre un conjunto X coincide con el preorden de especialización de su topología. Más aún, toda A-topología $\mathcal{T}$ sobre X es la topología de su preorden de especialización. Además, $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \preceq)$ es ordenada si y solo si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua.*

Nota 2.3.9. Obsérvese que el abierto mínimo de un punto x, U_x, puede definirse, respecto al preorden de especialización $\leq_{\mathcal{T}}$, como

$$U_x = \downarrow x,$$

mientras que la clausura, $\overline{\{x\}}$, puede definirse como

$$\overline{\{x\}} = \uparrow x.$$

El teorema anterior puede reescribirse de la siguiente forma:

Teorema 2.3.10. *Existe una equivalencia entre la clase* ***Alex*** *y la clase* ***PreOrd****, que hace corresponder a un A-espacio* $(X, \mathcal{T})$ *el conjunto preordenado* $(X, \leq_{\mathcal{T}})$*, y a una aplicación continua* $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ *ella misma,* $f : (X, \leq_{\mathcal{T}_X}) \longrightarrow (Y, \leq_{\mathcal{T}_Y})$ *vista entre conjuntos preordenados.*

Esta equivalencia se restringe a una equivalencia entre los A-espacios T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados.

La equivalencia entre conjuntos preordenados y A-espacios permite traducir las propiedades topológicas de los A-espacios en términos de los preórdenes que definen.

Así los elementos minimales de un conjunto preordenado $(X, \leq)$ son abiertos unitarios de la A-topología asociada al preorden. Igualmente, los elementos maximales de X son conjuntos cerrados unitarios. En particular, $Min(X)$ es un subespacio abierto discreto y $Max(X)$ es un subespacio cerrado discreto. Como todo poset finito tiene algún elemento maximal y minimal, todo espacio finito T_0 posee al menos un punto que es subconjunto cerrado y otro punto que es abierto.

Terminamos esta sección recordando cómo quedan caracterizadas la conexión y la compacidad de los A-espacios por medio del orden asociado. Para la conexión se tiene como consecuencia inmediata del Teorema 2.2.1:

Teorema 2.3.11. *Un A-espacio* X *es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y solo si existe una secuencia de elementos comparables para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de* X*.*

Para la compacidad se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.12. *Un A-espacio es compacto si y solo si* $Max(X)$ *es finito, y todo* $x \in X$ *es menor que algún elemento de* $Max(X)$*.*

2.4. Diagramas de Hasse

Dado un poset $(X, \leq)$, se llama *diagrama de Hasse asociado a* X al grafo orientado $\mathcal{H}(X)$, en el que sus vértices son los elementos de X y sus aristas son los pares ordenados (a, b) tales que $a < b$ y no existe c tal que $a < c < b$.
Como cada espacio topológico finito $(X, \mathcal{T})$ puede ser identificado con un poset, se llama diagrama de Hasse del espacio al diagrama del poset que determina.

Usualmente, $\mathcal{H}(X)$ se dibuja en el plano de tal manera que, si $a < b$, entonces el vértice que representa a b está arriba del vértice que represente a a, quedando la dirección de la arista de a a b bien definida por el dibujo. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.4.1.

1. Sea el poset $(\{1,2,3,4\}, \leq)$, su diagrama de Hasse se representa en la Figura 3 (a).

2. Sea el poset $(\{1,2,3,4,6,8,12\}, |)$, donde $a \mid b$ si b es divisible por a. Su diagrama de Hasse asociado se representa en la Figura 3 (b).

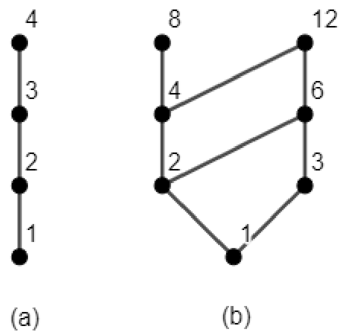

Figura 3: Ejemplos de diagramas de Hasse asociados a posets.

CAPÍTULO 3

Topología Simplicial

El estudio de los poliedros constituye una rama de la Topología conocida como Topología Simplicial o Poliedral. En esta sección se exponen los resultados básicos de esta disciplina. Para más detalle se puede consultar [2] y [11].

3.1. Complejos simpliciales

Una colección de puntos $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice *afínmente independiente* si los vectores $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ son linealmente independientes.

El *n-símplice* generado por $\{a_0, \ldots, a_n\}$ es el conjunto convexo

$$\sigma^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Los coeficientes λ_i son llamados *coordenadas baricéntricas* y los puntos a_i con $0 \leq i \leq n$ se llaman *vértices* de σ y se escribirá $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ para dar explícitamente los vértices de σ. Así, un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y un 3-símplice es un tetraedro.

Dado un símplice σ, el *interior (afín)* de σ es el conjunto $\mathring{\sigma} = \{x \in \sigma : \lambda_i > 0 \text{ para todo } 0 \leq i \leq n\}$.

Definición 3.1.1. Sean σ y τ dos símplices en $\mathbb{R}^m$. Se dice que τ es *cara* de σ y se denota por $\tau \leq \sigma$, si los vértices de τ son vértices de σ.

Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$ se dice que τ es una *cara propia* de σ y se denota por $\tau < \sigma$.

Si $\tau \leq \sigma$, se dirá que $\mathring{\tau}$ es una *cara abierta* de σ.

La unión de caras propias de un n-símplice $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ se llama *borde* de σ, y se denota por $\dot{\sigma}$. Nótese que $\dot{\sigma} = \{x \in \sigma : x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \text{ tal que } \lambda_j = 0 \text{ para algún j}\}$, y por tanto $\mathring{\sigma} = \sigma - \dot{\sigma}$.

Lema 3.1.2. *Se tienen las dos propiedades siguientes:*

1. *Todo símplice es unión disjunta de sus caras abiertas.*

2. *Dos caras de un mismo símplice o son disjuntas o se encuentran en una cara.*

Definición 3.1.3. Se llama *complejo simplicial* a una colección K finita de símplices en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ verificando:

1. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2.

2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

Como consecuencia del Lema 3.1.2 se tiene:

Lema 3.1.4. *Sean $\sigma, \tau \in K$ con $\mathring{\sigma} \cap \tau \neq \emptyset$. Entonces $\sigma \leq \tau$.*

Definición 3.1.5. La *dimensión* de K es el número $\max \{\dim \sigma : \sigma \in K\}$. Un símplice σ se dirá que es un *símplice maximal* en K si es de máxima dimensión en K.
Un símplice σ de un complejo K se dice *principal* si no existe ningún símplice $\tau \in K$ tal que $\sigma \leq \tau$. En particular, los símplices maximales de K son símplices principales.

Nota 3.1.6. Nótese que todo símplice σ determina un complejo simplicial al considerar σ y todas sus caras.

En lo que sigue, σ denotará indistintivamente un símplice o el complejo simplicial determinado por él.

Definición 3.1.7. Un *subcomplejo* $L \subseteq K$ es un conjunto de símplices de K que es a su vez un complejo simplicial. Se llama *m-esqueleto* de K y se denota por K^m al subcomplejo

$$K^m = \{\sigma \in K : \dim \sigma \leq m\}.$$

A K^0 se le llama el *conjunto de vértices* de K y los 1-símplices serán llamados las *aristas* de K.

Definición 3.1.8. El conjunto de los puntos de los símplices de K se denomina *poliedro subyacente* de K, y se denotará por $|K|$. Se tiene que $|K| = \bigcup \{\sigma : \sigma \in K\}$.
Como consecuencia inmediata del Lema 3.1.4 se tiene que todo $x \in |K|$ está en el interior de un único símplice de K, llamado *símplice soporte* de x.

Definición 3.1.9. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y φ una aplicación definida entre los vértices de K_1 y K_2. Se dice que φ es una *aplicación simplicial* si dado un símplice $\sigma \in K_1$ con $\sigma = (v_0, \ldots, v_n)$, los vértices $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n)$ están en un mismo símplice de K_2. Una aplicación simplicial entre K y L se denotará como $\varphi : K \longrightarrow L$. Nótese que la composición de aplicaciones simpliciales es siempre una aplicación simplicial. Un *isomorfismo simplicial* entre dos complejos simpliciales K_1 y K_2 es una biyección φ entre los vértives tal que $(v_0, \ldots, v_n)$ es un símplice de K_1 si y solo si $(\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n))$ lo es de K_2.

Toda aplicación simplicial $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ da lugar a una aplicación continua $|\varphi| : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ definida por extensión lineal. Esto es, si $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \in \sigma = (v_0, \ldots, v_n)$ se define $|\varphi|(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi(v_i)$.

Definición 3.1.10. Dos conjuntos finitos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se dicen *unibles* si $A \cup B$ es afínmente independiente. Se define la *unión simplicial* de A y B como el símplice de vértices $A \cup B$ o equivalentemente, como el conjunto

$$AB = \{\lambda a + \mu b : a \in A, b \in B; \lambda, \mu \geq 0; \lambda + \mu = 1\}.$$

Dos complejos simpliciales, K y L se dicen *unibles* si todo $\sigma \in K$ es unible con todo $\tau \in L$. Se define la *unión simplicial* de K y L, denotada por $K * L$, como el complejo simplicial:

$$K * L = \{\sigma, \tau, \sigma\tau : \sigma \in K, \tau \in L\}.$$

Nota 3.1.11. Sean K_1, K_2, K_3 complejos simpliciales unibles tales que cada uno de ellos es unible a la unión simplicial de los otros dos. Es inmediato comprobar que $(K_1 * K_2) * K_3 = K_1 * (K_2 * K_3)$.

Definición 3.1.12. Dado un vértice v en un complejo simplicial K, se define la *supresión de* v y se denota por $K \setminus v$ al subcomplejo de K formado por los símplices que no contienen a v. Esto es, $K \setminus v = (K - st(v, K)) \cup lk(v, K)$. Obsérvese que $|K \setminus v| = |K| - \overset{\circ}{st}(v, K)$.

Definición 3.1.13. Se define el *cono* de un complejo simplicial $K \in \mathbb{R}^n$ como la unión simplicial de K y un vértice v. Se denota como vK y se dirá cono de vértice v y base K.

Corolario 3.1.14. *La unión simplicial por un cono, es un cono.*

Demostración. Sean $K = aZ$ un cono y L un complejo simplicial. Por la Nota 3.1.11 $K * L = (a * Z) * L = a * (Z * L)$, que es un cono. □

Lema 3.1.15. *Dados dos complejos simplciales K, L, se tiene que, si $K * L = vZ$ es un cono, entonces K o L es un cono simplicial.*

Demostración. Supongamos que $v \in K$, el caso $v \in L$ es análogo. Se demostrará que $K = v(K \cap Z)$, es decir, que K es un cono.

$\subseteq$ Sea $\tau \in K \subseteq vZ$ un símplice tal que $v \notin \tau$, entonces, $\tau \in Z$. Por tanto, $\tau \in K \cap Z$ y $\tau \in v(K \cap Z)$. Sea ahora $\tau \in K$ un símplice tal que $v \in \tau$, y sea $\rho < \tau$ la cara con vértices distintos de v. Entonces, $\rho \in K$. Como $v \notin \rho$, entonces $\rho \in K \cap Z$ y se sigue que $\tau = v\rho \in v(K \cap Z)$. Como τ es un símplice arbitrario de K, todos los símplices de K están en $v(K \cap Z)$ y $K \subseteq v(K \cap Z)$.

$\supseteq$ Sea $\mu \in v(K \cap Z)$ un símplice. Supongamos que μ contiene a v y sea $\alpha \leq \mu$ la cara con vértices distintos de v. Como $\mu \in Z$, $\alpha \in Z$ y $\mu = v\alpha \in vZ = K * L$. Además, $v \in K$, por lo que μ no tiene vértices de L, por lo que $\mu \in K$. Entonces $v(K \cap Z) \subseteq K$ y se ha demostrado que K es un cono. □

Definición 3.1.16. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un símplice. Se llama *estrella* de σ en K al subcomplejo simplicial

$$st(\sigma; K) = \{\tau \in K: \text{ existe } \rho \in K \text{ con } \tau, \sigma \leq \rho\}.$$

Obsérvese que $|st(\sigma; K)| = \bigcup \{\mu : \mu \in K, \sigma \leq \mu\}$.
Si $x \in |K|$ se define la *estrella* de x en K como el subcomplejo

$$st(x; K) = \{\tau \in K : \text{existe } \rho \in K \text{ con } x \in \rho \text{ y } \tau \leq \rho\}.$$

Por otra parte, se define la *estrella abierta* de $x \in |K|$ como el conjunto

$$\overset{\circ}{st}(\sigma; K) = \bigcup \left\{\overset{\circ}{\mu} : \mu \in K \text{ y } x \in \mu\right\}.$$

La propiedad clave de la estrella abierta es que define un abierto de la topología de $|K|$. Esto se debe al hecho de que cuando la intersección $\overset{\circ}{st}(x; K) \cap \sigma$ no es vacía, entonces $x \in \sigma$ y esa intersección es justamente la diferencia $\sigma - \sigma_x$, donde σ_x es el símplice soporte de x, que es un abierto de σ.

Definición 3.1.17. Se define el *engarce* o *link* de σ en K como el subcomplejo simplicial

$$lk(\sigma; K) = \{\rho \in st(\sigma; K) : \sigma \cap \rho = \emptyset\}.$$

Así mismo, se define el *engarce* o *link* de $x \in |K|$ como el subcomplejo

$$lk(x; K) = \{\sigma \in st(x; K) : x \notin \sigma\}.$$

Lema 3.1.18. *Se tienen la siguientes igualdades. Para cualquier $x \in |K|$:*

1. $|lk(x, K)| = |st(x, K)| - \overset{\circ}{st}(x, K)$.

Y si σ es el símplice soporte de x, se tiene

2 $st(x, K) = st(\sigma, K) = \sigma lk(\sigma, K)$. *En particular, si v es un vértice de K, $st(v, K) = vlk(v, K)$.*

3 $lk(x, K) = \dot{\sigma} lk(\sigma, K)$.

Demostración. Todos los enunciados se demuestran directamente a partir de las definiciones. Haremos solo la demostración del segundo apartado:
Veamos primero que $st(x, K) = st(\sigma, K)$. Dados $\tau \in st(x, K)$ existe ρ de forma que $\tau \leq \rho$ y $x \in \rho$. Como $x \in \overset{\circ}{\sigma}$, por el Lema 3.1.4, $\sigma \leq \rho$. Entonces $\rho \in st(\sigma, K)$, y por ser un complejo simplicial, $\tau \in st(\sigma, K)$.
Recíprocamente, si $\xi \in st(\sigma, K)$, existe ρ tal que $\xi \leq \rho \geq \sigma$. Como $x \in \overset{\circ}{\sigma}$, $x \in \rho$. Entonces $\rho \in st(x, K)$ y por ser un complejo simplicial $\xi \in st(x, K)$.
Veamos ahora que $st(\sigma, K) = \sigma lk(\sigma, K)$. Dado $\xi \in st(\sigma, K)$, existe ρ tal que $\xi \leq \rho \geq \sigma$. Sea ahora

$\xi' \leq \xi$ la cara formada por los vértices en $\xi - \sigma$, y sea $\sigma' \leq \sigma$ la cara formada por los vértices en $\sigma - \xi$, ambas caras posiblemente vacías. Entonces $\xi = \sigma'\xi'$. Como $\xi \in st(\sigma, K)$, entonces $\xi' \in st(\sigma, K)$, pero como $\xi' \cap \sigma = \emptyset$, $\xi' \in lk(\sigma, K)$. Como $\sigma' \leq \sigma$, entonces $\xi = \sigma'\xi' \in \sigma lk(\sigma, K)$. Recíprocamente, sea $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \in \sigma lk(\sigma, K)$. Si $\alpha_1 = \emptyset$, $\alpha = \alpha_2 \in lk(\sigma, K) \subseteq st(\sigma, K)$. Si $\alpha_2 = \emptyset$, $\alpha = \alpha_1 \leq \sigma$ y $\alpha \in st(\sigma, K)$. En general, $\alpha_1 \leq \sigma$ y $\alpha_2 \in lk(\sigma, K)$. Por tanto existe $\rho \in K$ con $\sigma \leq \rho \geq \alpha_2$ y $\alpha_2 \cap \sigma = \emptyset$. Luego $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$ y $\alpha_1 \leq \rho$. Así pues $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \leq \rho$ y $\alpha \in st(\sigma, K)$. □

Lema 3.1.19. *Si v es un vértice de K, se tiene que*

1. $st(v, K * L) = st(v, K) * L$, *para todo complejo simplicial L unible a K.*

2. $lk(v, K * L) = lk(v, K) * L$.

Análogamente si $v \in L$.

Demostración. Veamos la demostración del primer apartado:

$\subseteq$ Sea $\sigma \in st(v, K * L)$, entonces existe $\rho \in K * L$ de forma que $\sigma \leq \rho$ y $v \in \rho$. Se tiene $\rho = \rho_1\rho_2$, con la posibilidad de $\rho_2 = \emptyset$, y con $\rho_1 \in K$ y $\rho_2 \in L$. Como $v \in \rho$, entonces $v \in \rho_1$ y $\rho_1 \in st(v, K)$. Luego, $\rho = \rho_1\rho_2 \in st(v, K) * L$. Como $\sigma \leq \rho_1\rho_2$, entonces $\sigma \in st(v, K) * L$.

$\supseteq$ Sea $\sigma \in st(v, K) * L$ tal que $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ con $\sigma_1 \in st(v, K)$, $\sigma_2 \in L$, con la posibilidad de $\sigma_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$. Si $\sigma_1 = \emptyset$, como $v \in K$, entonces $v\sigma_2 \in st(v, K * L)$. Por tanto, $\sigma = \sigma_2 \leq v\sigma_2 \in st(v, K * L)$. Si $\sigma_1 \neq \emptyset$, entonces existe $\rho \in K$ tal que $\sigma_1 \leq \rho$ y $v \in \rho$. Por tanto, $\rho\sigma_2 \in K * L$ y $v \in \rho\sigma_2$. Luego $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \leq \rho\sigma_2 \in st(v, K * L)$.

Para la demostración del segundo apartado:

$\subseteq$ Si $\sigma \in lk(v, K * L)$ tenemos que $v \notin \sigma$ y $\sigma \in st(v, K * L)$. Por el apartado anterior, $\sigma \in st(v, K) * L$. Además, se tiene que $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ con $v \notin \sigma_1 \in st(v, K)$ y $\sigma_2 \in L$. Por tanto, $\sigma_1 \in lk(v, K)$ y $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \in lk(v, K) * L$.

$\supseteq$ Sea $\sigma \in lk(v, K) * L$, entonces $\sigma \in st(v, K) * L$. Por el apartado anterior, se tiene que $\sigma \in st(v, K * L)$, pero como $v \notin \sigma$, entonces $\sigma \in lk(v, K * L)$. □

3.2. La subdivisión baricéntrica

Definición 3.2.1. Sean K y K' complejos simpliciales. Se dice que K' es una *subdivisión* de K si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $|K| = |K'|$.

2. Todo símplice de K es unión de símplices de K'. En particular, los vértices de K son vértices de K'.

Se tiene especial interés al caso de la subdivisión baricéntrica.

Definición 3.2.2. Dado un n-símplice σ se llama *baricentro* de σ al punto

$$b(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_i,$$

donde $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$.

Definición 3.2.3. Sea K un complejos simplicial. Dada una secuencia de símplices de K ordenada por la relación de cara $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n \in K$, el conjunto de sus baricentros $\{b(\sigma_0), \ldots, b(\sigma_n)\}$ es afínmente independiente y determina así un símplice contenido en σ_n. La *subdivisión baricéntrica* de K, sdK, es el complejo simplicial formado por estos símplices. De esta forma los vértices de sdK son los baricentros de los símplices de K. En particular los vértices de K siguen siendo vértices de sdK.

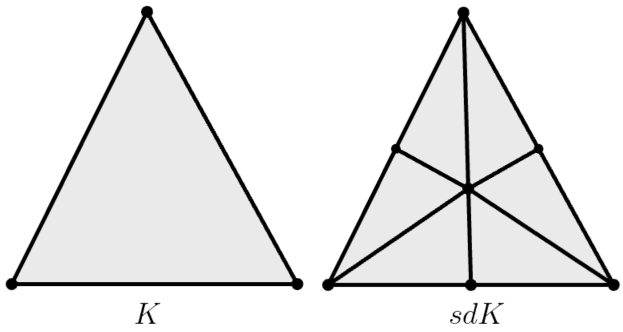

Figura 4: Subdivisión baricéntrica de un 2-símplice.

Nota 3.2.4.

1. Si σ es de dimensión n, los n-símplices de sdK contenidos en σ están en biyección con las permutaciones de los vértices de σ.

2. Para subdivisiones baricéntricas reiteradas se usa la notación $sd^m K = sd(sd^{m-1}K)$ con $m \geq 1$ y $sd^0 K = K$.

Nota 3.2.5. Los diámetros de los símplices de subdivisiones baricéntricas reiteradas tienden a 0, y la familia $\mathcal{V} = \left\{ \overset{\circ}{st}(x; sd^n K) \right\}_{n \geq 0}$ es una base encajada de entornos, para cada $x \in |K|$.

CAPÍTULO 4

A-espacios y poliedros

En [1], Alexandrov incluye la observación de que los A-espacios tienen asociados de manera natural un poliedro. Posteriormente McCord probó en [10] el hecho sorprendente de que todo A-espacio posee los mismos invariantes de la topología algebraica que su poliedro asociado. Este capítulo lo dedicaremos a definir y estudiar los resultados anteriores.

4.1. Complejos abstractos

Estrictamente hablando, todo A-espacio determina lo que se conoce como complejo abstracto, que se puede definir como la familia de los símplices de un complejo simplicial vistos como colecciones de vértices sin hacer referencia a ninguna representación espacial. Más precisamente:

Definición 4.1.1. Dado un conjunto V, un *complejo abstracto* con vértices en V consiste en una colección no vacía de partes finitas de V, $\mathcal{A}$, verificando las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{A}$ contiene todos los subconjuntos unitarios de V.
2. Dado $\Sigma \in \mathcal{A}$, todo subconjunto de Σ pertenece a $\mathcal{A}$.

A los elementos de V se les llama *vértices* de $\mathcal{A}$, y a los subconjuntos de $\mathcal{A}$ símplices de $\mathcal{A}$.
La *dimensión* de $\mathcal{A}$ es el número (posiblemente infinito):

$$\dim \mathcal{A} = \sup \{card(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{A}\} - 1.$$

Es claro que todo complejo simplicial K determina un complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ donde los vértices de $\mathcal{A}(K)$ son los vértices de K y los símplices de $\mathcal{A}(K)$ son los conjuntos de vértices de K situados en un mismo símplice de K.

La definición de aplicación simplicial entre complejos abstractos es inmediata: dados dos complejos abstractos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ una aplicación entre sus conjuntos de vértices $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ se dice *aplicación simplicial* si para todo símplice s de $\mathcal{A}_1$, $\varphi(s)$ es un símplice de $\mathcal{A}_2$. De esta forma, φ será un *isomorfismo simplicial* si además es una biyección entre V_1 y V_2. Una aplicación simplicial se denota $\varphi : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$.

Definición 4.1.2. Una *realización geométrica* de un complejo abstracto $\mathcal{A}$ es un complejo simplicial K cuyo complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ es simplicialmente isomorfo a $\mathcal{A}$.

Teorema 4.1.3. *Todo complejo abstracto finito y de dimensión $\leq n$ admite una realización geométrica en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Notación 4.1.4. A partir de ahora todo complejo abstracto se identificará con una realización geométrica suya.

4.2. Poliedros asociados a espacios finitos

Sea X un espacio finito T_0, se llama *complejo orden* de X al complejo abstracto $\mathcal{K}(X)$ tal que los vértices de $\mathcal{K}(X)$ son los puntos de X y sus símplices son las cadenas finitas del orden de especialización de X (ver Sección 2.3). Más aún, toda aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios finitos T_0 define una aplicación simplicial $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ que envía la cadena $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ en la cadena $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \cdots \leq f(x_n)$.

Lema 4.2.1. *Sea X un espacio finito T_0, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $lk(x, \mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(U_x - \{x\}) * \mathcal{K}(\overline{\{x\}} - \{x\})$. Además, si x es un punto eliminable ascendentemente, $\mathcal{K}(\overline{\{x\}} - \{x\})$ es un cono, y si x es un punto eliminable descentemente, lo es $\mathcal{K}(U_x - \{x\})$.*

Demostración. Sabemos que en $\mathcal{K}(X)$ los vértices son los puntos de X y los símplices se corresponden con las cadenas ordenadas $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ de X. Por definición,

$$st(x, \mathcal{K}(X)) = \{\tau \in \mathcal{K}(X) : \exists \rho \in K \text{ con } x \leq \rho \text{ y } \tau \leq \rho\}.$$

Sea $\rho = (y_1 \dots y_s) \in \mathcal{K}(X)$ tal que $x \in \rho$. Así ρ es una cadena en X de la forma $\rho = (y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_i \leq x \leq y_{i+1} \leq \cdots \leq y_s)$. Es decir, respecto al orden de X, $st(x, \mathcal{K}(X))$ puede verse como:

$$st(x, \mathcal{K}(X)) = \{\text{cadenas de } X \text{ que contienen a } x \text{ y sus subcadenas}\}.$$

Por otro lado,

$$lk(x, \mathcal{K}(X)) = \{\sigma \in st(x, \mathcal{K}(X)) : x \notin \sigma\}.$$

Así que, especto al orden de X tenemos:

$$lk(x, \mathcal{K}(X)) = \{\tau - \{x\} : \tau \text{ es una cadena de } X \text{ que contienen a } x\}.$$

Es decir, en $lk(x, \mathcal{K}(X))$ estará formado por cadenas en las que todos sus elementos son o bien menores que x, o bien mayores que x. Esto es:

$$lk(x, \mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(U_x - \{x\}) * \mathcal{K}(\overline{\{x\}} - \{x\}).$$

Para la segunda parte de la demostración, sea $x \in X$ un punto eliminable ascendentemente y sea $y \in X$ tal que $y \geq z$ para todo $z \geq x$ (la Figura 5 (a) muestra el diagrama de Hasse alrededor de x). Esto se puede escribir respecto a la topología mediante la igualdad:

$$\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \cup \{x\}\,.$$

Por tanto,

$$\mathcal{K}(\overline{\{x\}} - \{x\}) = \mathcal{K}(\overline{\{y\}}) = y\mathcal{K}(\overline{\{y\}} - \{y\}),$$

que es un cono.

De manera análoga, si $x \in X$ es un punto eliminable descendentemente como se indica en la Figura 5 (b),

$$U_x = U_y \cup \{x\}\,.$$

Por tanto,

$$\mathcal{K}(U_x - \{x\}) = \mathcal{K}(U_y) = y\mathcal{K}(U_y - \{y\}),$$

que es un cono.

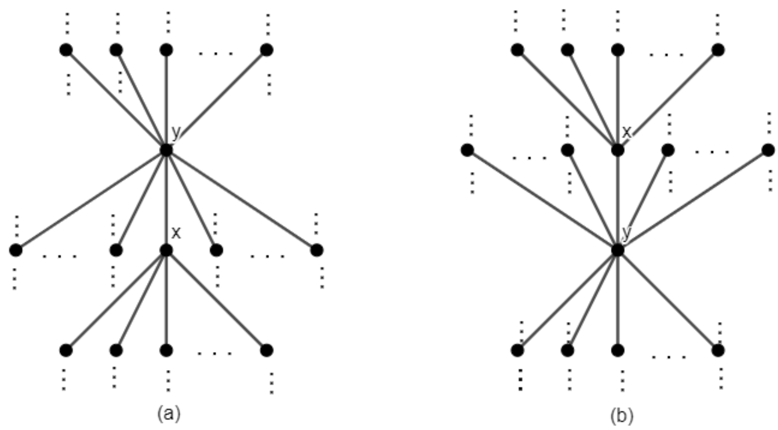

Figura 5

$\square$

Para el poliedro $|\mathcal{K}(X)|$ siempre es posible definir una aplicación $\psi_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$ de la siguiente manera: dado $z \in |\mathcal{K}(X)|$, sea $s = \{x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n\}$ el símplice soporte de z en $\mathcal{K}(X)$. Entonces se toma

$$\psi_X(z) = x_0 = \text{mín}\, s. \tag{4.1}$$

La continuidad de ψ_X se sigue de que, para todo $x \in X$, $\psi^{-1}(U_x) = \bigcup_{y \leq x} \overset{\circ}{st}(y, \mathcal{K}(X))$. Más aún, ψ_X hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} |\mathcal{K}(X)| \arrow[r, "\mathcal{K}(f)"] \arrow[d, "\psi_X"'] & |\mathcal{K}(Y)| \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

La conmutatividad sigue de la observación de que si $s = (x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n)$ es el símplice soporte de z, entonces, por definición, $\mathcal{K}(f)(z)$ tiene a $\mathcal{K}(f)(s)$ como símplice soporte; además, por preservar f el orden, $f(\text{mín}\, s) = \text{mín}\, f(s)$.

McCord demostró en [10] el siguiente teorema:

Teorema 4.2.2. *Para todo espacio finito X y T_0, la aplicación ψ_X es una equivalencia de homotopía débil.*

Recordemos la noción de equivalencia de homotopía débil:

Definición 4.2.3. Si $[X, Y]$ denota el conjunto cociente $Y^X / \simeq$ por la relación de homotopía, toda aplicación $f : Y \longrightarrow Z$ induce una aplicación $f_* : [X, Y] \longrightarrow [X, Z]$ dada por $f_*([g]) = [f \circ g]$. Obsérvese que si $g \simeq g'$ y $f \simeq f'$, entonces se tiene que $f \circ g \simeq f' \circ g'$ por la compatibilidad de la relación de la homotopía con la composición de aplicaciones. En particular, f_* está bien definida y $f_* = f'_*$.
Una aplicación continua se llama una *equivalencia de homotopía débil* si para todo complejo simplicial finito K se tiene que $f_* : [|K|, X] \longrightarrow [|K|, Y]$ es una biyección. Dos espacios X e Y son del *mismo tipo de homotopía débil* (o *débilmente homotópicamente equivalentes*) si existe una secuencia de espacios $X = X_0, X_1, \ldots, X_n = Y$ tal que para cada $1 \leq i \leq n$ hay equivalencias débiles $X_i \to X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \to X_i$. Es claro que toda equivalencia de homotopía es una equivalencia de homotopía débil. Más aún, el recíproco es cierto para los poliedros.

Como consecuencia se obtiene que si X e Y son espacios finitos T_0 del mismo tipo de homotopía débil, entonces sus complejos de orden definen poliedros del mismo tipo de homotopía.

Nota 4.2.4. Si bien ψ_X es siempre una equivalencia de homotopía débil, solo puede ser una equivalencia de homotopía cuando $|\mathcal{K}(X)|$ es una unión disjunta de poliedros contráctiles. En efecto, si X no es conexo y $X_1, \ldots, X_m$ son sus componentes conexas, se tiene por construcción que ψ_X es la unión de las aplicaciones $\psi_{X_i} : |\mathcal{K}(X_i)| \longrightarrow X_i$. Así pues, sea X conexo y supongamos que existe $g : X \longrightarrow |\mathcal{K}(X)|$ tal que las composiciones $\psi_X \circ g$ y $g \circ \psi_X$ son homotópicas a las correspondientes identidades. En particular, la imagen de $g \circ \psi_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow |\mathcal{K}(X)|$ debe ser un subconjunto conexo de un poliedro y contener solo una cantidad finita de puntos. Esto solo es posible si es un único punto, luego la identidad de $|\mathcal{K}(X)|$ es homotópica a una constante y por tanto este poliedro debe ser contráctil.

Sin embargo, aún siendo el poliedro $|\mathcal{K}(X)|$ contráctil, ψ_X puede no ser una equivalencia de homotopía, como muestra el siguiente ejemplo (puede encontrarse en el Ejemplo 4.2.1 de [3]).

Ejemplo 4.2.5. Sea X el espacio finito cuyo diagrama de Hasse aparece en la Figura 6 (a). Es inmediato que no tiene puntos eliminables, por tanto es un espacio minimal y no puede ser contráctil. Sin embargo, su complejo simplicial asociado, $\mathcal{K}(X)$, es la triangulación del cuadrado que aparece en la Figura 6 (b). Entonces, usando el Teorema 4.2.2, X es del tipo de homotopía débil de un punto, pero no es contráctil.
Este ejemplo muestra que la contractibilidad de un espacio finito X no equivale a la contractibilidad de su complejo simplicial asociado $\mathcal{K}(X)$. A la caracterización de la contractibilidad de X dedicaremos el Capítulo 6.

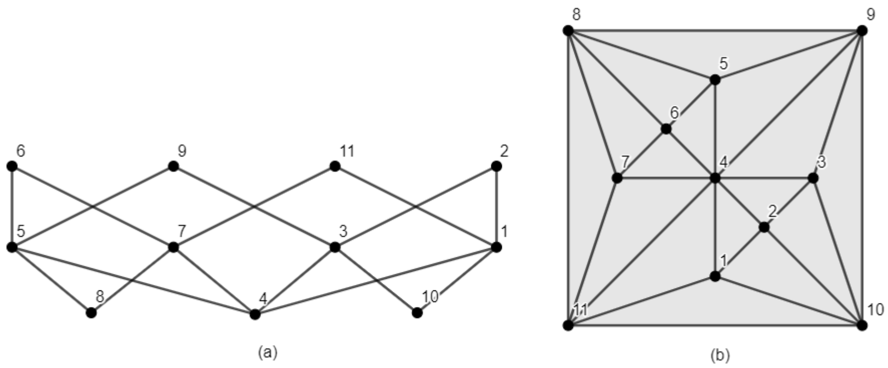

Figura 6

4.3. Espacios finitos asociados a complejos

La estructura combinatoria de un complejo simplicial K da lugar de manera natural a un poset finito $\mathcal{X}(K) = (\mathcal{X}(K), \leq)$, al considerar como puntos de $\mathcal{X}(K)$ a los símplices de K y la relación de orden $\leq$ como la relación de ser cara. De esta manera, en el espacio finito asociado a este orden, el abierto minimal U_s de $s \in \mathcal{X}(K)$ coincide con el subcomplejo de K formado por s y todas sus caras. Dada una aplicación simplicial $f : K \longrightarrow L$, se define $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \longrightarrow \mathcal{X}(L)$ por $\mathcal{X}(f)(s) = f(s)$. Nótese que $\mathcal{X}(f)$ preserva el orden y por tanto es continua entre los espacios finitos. A $\mathcal{X}(K)$ se le llama *espacio finito asociado a* K.

Existe un isomorfismo simplicial $t_K : \mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) \longrightarrow sd(K)$ que asocia a cada cadena $\sigma_0 \leq \cdots \leq \sigma_n$ el símplice $(b(\sigma_0), \ldots, b(\sigma_n))$. Más aún, si $\varphi : K \longrightarrow L$ es una aplicación simplicial, el siguiente diagrama es conmutativo, donde $sd(\varphi) : sd(K) \longrightarrow sd(L)$ es la aplicación simplicial inducida por φ que lleva el baricentro $b(\sigma)$ en el baricentro $b(\varphi(\sigma))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) \arrow[r, "\mathcal{K}(\varphi)"] \arrow[d, "t_K"', "\cong"] & \mathcal{K}(\mathcal{X}(L)) \arrow[d, "\cong"', "t_L"] \\
sdK \arrow[r, "sd(\varphi)"'] & sdL
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

De acuerdo con el Teorema 4.2.2 tenemos una equivalencia de homotopía débil $\psi_{\mathcal{X}(K)} : |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \longrightarrow \mathcal{X}(K)$.

Teorema 4.3.1. *Mediante el isomorfismo simplicial t_K se obtiene una equivalencia de homotopía débil $\Phi_K = \psi_{(\mathcal{K})} \circ t_K^{-1} : |K| = |sdK| \longrightarrow |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \longrightarrow \mathcal{X}(K)$. De hecho, la aplicación es natural en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
|sdK| \arrow[r, "sd(\varphi)"] \arrow[d, "\Phi_K"', "\cong"] & |sdL| \arrow[d, "\cong"', "\Phi_L"] \\
\mathcal{X}(K) \arrow[r, "\mathcal{X}(\varphi)"'] & \mathcal{X}(L)
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi : K \longrightarrow L$ es una aplicación simplicial. Esto es consecuencia de la conmutatividad de los diagramas (4.2) y (4.3).

Aunque $|K| = |sdK|$, el diagrama anterior no es conmutativo si se sustituye $sd(\varphi)$ por φ, pues en general, $sd(\varphi)$ y φ no coinciden como aplicaciones entre poliedros. No obstante, $\varphi : K \longrightarrow L$ es aproximación simplicial de $sd(\varphi) : |K| = |sdK| \longrightarrow |sdL| = |L|$, ya que el símplice soporte de $sd(\varphi)(x)$ en L coincide con el de $\varphi(x)$. Así, ambas aplicaciones son homotópicas y se tiene, por tanto, que $\Phi_L \circ \varphi \simeq \mathcal{X}(\varphi) \circ \Phi_K$.

Mediante los operadores $\mathcal{X}$ y $\mathcal{K}$ se definen y desarrollan, para espacios finitos T_0, herramientas análogas a las de la topología simplicial, basadas en las ideas de subdivisión baricéntrica y aproximación simplicial. Así, se define la *subdivisión baricéntrica* del espacio finito T_0 X como el espacio finito $X' = \mathcal{X} \circ \mathcal{K}(X)$. Esta consecuencia se puede iterar y se obtiene la *n-ésima subdivisión baricéntrica* de X como $sd_{\mathcal{X}}^m = (\mathcal{X} \circ \mathcal{K})^n(X)$. Además, toda aplicación $h : X \longrightarrow Y$ entre espacios finitos T_0 define una aplicación $sd_{\mathcal{X}}^m h = (\mathcal{X} \circ \mathcal{K})^n(h)$. Si el isomorfismo simplicial t_K del diagrama (4.2) se usa como identificación, sd^n y $sd_{\mathcal{X}}^n$ están ligados por la igualdad $\mathcal{K} \circ sd_{\mathcal{X}}^n(X) = sd^n \circ \mathcal{K}(X)$.

CAPÍTULO 5

Homotopía en A-espacios

Como vimos en la Sección 1.5, las homotopías entre aplicaciones de X en Y se traducen en la conexión por caminos en el espacio Y^X de tales aplicaciones con la topología compacto-abierto. A continuación estudiamos las homotopías en la clase de los A-espacios.

5.1. Homotopía en A-espacios y orden

Es natural buscar una formulación de las homotopías entre aplicaciones de A-espacios en términos de una relación de orden. Para ello se observa que si X e Y son A-espacios (o, equivalentemente, conjuntos preordenados), se puede dotar a Y^X con el orden:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ en el preorden de } Y \text{ para todo } x \in X. \tag{5.1}$$

Para la topología de Alexandrov asociada a este preorden, la conexión por caminos corresponde a la conexión por secuencias de aplicaciones comparables por ese orden (Teorema 2.3.11). En general, la topología compacto-abierto no coincide con la topología para este orden, por lo que a una homotopía no siempre se le podrá asociar una secuencia de aplicaciones comparables. Sin embargo, esto sí ocurre para los espacios finitos, más explícitamente:

Proposición 5.1.1. *Si X es un espacio finito e Y es cualquier A-espacio, la topología compacto-abierto sobre Y^X coincide con la A-topología del orden en (5.1).*

Como una consecuencia inmediata de esta proposición se tiene

Corolario 5.1.2. *Dos aplicaciones f y g son homotópicas si y solo si existe una sucesión de aplicaciones $f_0, ..., f_n$ tales que $f_0 = f, f_n = g$ y f_i es comparable a f_{i+1} para todo $0 \leq i \leq n-1$.*

La secuencia en el corolario anterior se puede conseguir de manera que la diferencia entres dos aplicaciones consecutivas de la misma sea solo en un punto. Esto es,

Proposición 5.1.3. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones homotópicas entre espacios finitos T_0. Entonces existe una sucesión $f = f_0, f_1, \ldots, f_n = g$ tal que para todo $0 \leq i < n$ existe un punto $x_i \in X$ con las siguientes propiedades:*

1. *f_i y f_{i+1} coinciden en $X - \{x_i\}$.*

2. *$f_i(x_i) \prec f_{i+1}(x_i)$ ó $f_{i+1}(x_i) \prec f_i(x_i)$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f = f_0 \leq g$ pues el caso $f_0 \geq g$ es análogo y podemos razonar paso a paso en la secuencia dada entre f y g por el Corolario 5.1.2.
Se define el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Si $A = \emptyset$, entonces $f = g$ y no hay nada que probar. Supongamos, por tanto, $A \neq \emptyset$ y sea x_0 un punto maximal de A. Se define $f_1 : X \longrightarrow Y$ como $f_1(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ y $f_1(x_0) = g(x_0)$. Afirmamos que f_1 es continua. En efecto, si $x \leq x'$ con $x, x' \neq x_0$, $f_1(x) = f(x) \leq f(x') = f_1(x')$ por ser f continua. Ahora, si $x \leq x_0$ entonces $f_1(x) = f(x) \leq g(x) \leq g(x_0) = f_1(x_0)$, usando la continuidad de g.
En caso de que $x_0 \leq x$, la maximilidad de x_0 es A nos dice que $f(x) = g(x)$ a menos que $x = x_0$. Entonces si $x_0 < x$, $f_1(x_0) = g(x_0) = f(x_0) \leq f(x) = f_1(x)$. Esto demuestra la continuidad de f_1. Más aún, $f_1 \leq g$ y $A_1 = \{x \in X; f_1(x) \neq g(x)\} = A - \{x_0\}$.
Ahora repetimos el razonamiento con A_1. Reiterándolo llegamos a agotar A y obtenemos una secuencia $f = f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n = g$. ☐

5.1.1. Una demostración directa del Corolario 5.1.2

En las referencias habituales de la literatura sobre la homotopía de espacios finitos, como [3] o [8], la caracterización de las homotopías como secuencias de aplicaciones comparables dada en el Corolario 5.1.2 se apoya en el uso de la topología compacto-abierto tal y como hemos hecho aquí. Parece interesante dar una demostración directa que solo utilice resultados básicos dados en el Grado de Matemáticas.

Demostración alternativa del Corolario 5.1.2. Sea $H : X \times I \to Y$ una homotopía entre las aplicaciones $f, g : X \to Y$ donde X es un espacio finito e Y un A-espacio cualquiera. Por continuidad, para cada $x \in X$ y $t \in I$ existe un $\epsilon = \epsilon(x,t) > 0$ tal que $H(U_x \times (t - \epsilon, t + \epsilon)) \subseteq U_{H(x,t)}$ (ver Proposición 2.1.4). Como X es finito, para cada $t \in I$ se puede tomar $\epsilon(t) = \min\{\epsilon(x,t); x \in X\}$. Tenemos entonces que dado cualquier $t \in I$,

$$H(U_x \times (t - \epsilon(t), t + \epsilon(t)) \subseteq U_{H(x,t)} \text{ para todo } x \in X. \tag{5.2}$$

Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue del recubrimiento de I por los intervalos $(t - \epsilon(t), t + \epsilon(t))$ $(t \in I)$. Ahora sea $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ una partición de I tal que $s_{i+1} - s_i < \delta$ para todo

i. Así pues para cada subintervalo $[s_i, s_{i+1}]$ existe un $t_i \in I$ con $[s_i, s_{i+1}] \subseteq (t_i - \epsilon(t_i), t_i + \epsilon(t_i))$ y por (5.2)

$$H(U_x \times [s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{H(x,t_i)} \text{ para todo } x \in X.$$

En particular, para las aplicaciones continuas $f_i = H_{|X\times\{s_i\}}$ y $g_i = H_{|X\times\{t_i\}}$ tenemos $f_i(x) \leq g_i(x) \geq f_{i+1}(x)$. Esto es, $f = f_0 \leq g_0 \geq f_1 \leq g_1 \geq f_2 \leq \ldots f_{n-1} \leq g_{n-1} \geq f_n = g$. $\square$

5.2. Espacios finitos minimales

Para los espacios finitos, la caracterización de aplicaciones homotópicas dada en la Proposición 5.1.3 permitió a Stong ([14]) dar un método para reducir el estudio de los tipos de homotopía de estos espacios al de tipos de homeomorfía. A continuación se exponen algunos de los resultados obtenidos por Stong y que puede verse también en [3] o [8].

Definición 5.2.1. Sea X un A-espacio. Un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable ascendentemente* o que es un *punto e.a.* si existe $y \in X$ con $y \geq x$ tal que $z \geq x$ en X implica $z \geq y$. Igualmente, un punto $x \in X$ se dice *eliminable descendentemente* o que es un *punto e.d.* si existe $y \in X$ con $y \leq x$ tal que $z \leq y$ para todo $z \leq x$.
Se dirá que un punto $x \in X$ es *eliminable* si lo es ascendentemente o descendentemente.
Si $x \in X$ es un punto eliminable, $X - \{x\}$ se llamará una *reducción* de X.
Diremos que X se reduce a Y si existe una secuencia de reducciones $X = X_0, X_1, \ldots, X_n = Y$.

Proposición 5.2.2. *Si x es un punto eliminable en X, entonces la inclusión $i : X - \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia de homotopía.*

Definición 5.2.3. Un A-espacio se dice *minimal* si no tiene puntos eliminables. A todo subespacio minimal de un A-espacio que sea retracto de deformación de X se le llama un *núcleo* de X.

Teorema 5.2.4. *Sea X un espacio finito. Entonces X admite un núcleo.*

Además, se tiene por el siguiente resultado que todos los núcleos de un mismo espacio finito son homeomorfos.

Teorema 5.2.5. *Sea X un espacio minimal finito y sea $f : X \longrightarrow X$ homotópica a la identidad. Entonces f es la identidad. En particular, toda equivalencia de homotopía entre espacios minimales finitos es un homeomorfismo.*

Este teorema tiene como consecuencia los siguientes corolarios:

Corolario 5.2.6. *Dos espacios finitos T_0 son homotópicamente equivalentes si y solo si tienen núcleos homeomorfos.*

Corolario 5.2.7. *Todo espacio minimal finito con más de un punto no es contráctil.*

Ahora veremos que el operador $\mathcal{K}$ transforma la clase de homotopía de una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en la clase de contigüidad de la aplicación simplicial $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$.

Recordemos la noción de contigüidad, bien conocida en Topología Simplicial.

Definición 5.2.8. Dos aplicaciones simpliciales $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$ se dice que son *contiguas* si para todo símplice $\sigma \in K$ se tiene que $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$ es un símplice de L. Además, se dirá que φ y ψ están en la misma *clase de contigüidad*, denotado por $\varphi \sim \psi$, si existe una sucesión $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \psi$ tal que φ_i y φ_{i+1} son contiguas para todo $0 \leq i < n$.

Nota 5.2.9. Si $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$ están en la misma clase de contigüidad, las aplicaciones inducidad en los poliedros subyacentes, $|\varphi|, |\psi| : |K| \longrightarrow |L|$ son homotópicas. Sea $x \in |K|$, para el símplice soporte de x, $\sigma = (v_0 \ldots v_n)$, tenemos $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$ con $\lambda_1 > 0$. Entonces, ya que $\tau = \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$ es un símplice de L, tenemos

$$\varphi(x) \in \overset{\circ}{\varphi(\sigma)} \subseteq \varphi(\sigma) \leq \tau$$

$$\psi(x) \in \overset{\circ}{\psi(\sigma)} \subseteq \psi(\sigma) \leq \tau$$

Por ser τ convexo podemos definir la homotopía

$$H : K \times [0,1] \longrightarrow L$$

$$H(x,t) = (1-t)\varphi(x) + t\phi(x)$$

De modo que

$$H(x,0) = \varphi(x)$$

$$H(x,1) = \psi(x)$$

y por tanto φ, ψ son homotópicas.

Lema 5.2.10. *Si $\varphi_1, \varphi_2 : K \longrightarrow L$, $\psi_1, \psi_2 : L \longrightarrow M$ son aplicaciones simpliciales tales que $\varphi_1 \sim \varphi_2$ y $\psi_1 \sim \psi_2$, entonces $\psi_1\varphi_1 \sim \psi_2\varphi_2$.*

Demostración. Como $\varphi_1 \sim \varphi_2$, se tiene que, para $\sigma \in K$, los vértices que aparecen en $\varphi_1(\sigma) \cup \varphi_2(\sigma)$ forman un símplice de L. Usando la contigüidad de ψ_1 con ψ_2, tenemos que los vértices en $\psi_1(\varphi_1(\sigma) \cup \varphi_2(\sigma)) \cup \psi_2(\varphi_1(\sigma) \cup \varphi_2(\sigma))$ forman un símplice τ de M. En particular, los vértices en $\psi_1\varphi_1(\sigma) \cup \psi_2\varphi_2(\sigma)$ forman una cara de τ y por ello un símplice de M. $\square$

Proposición 5.2.11. *Sean $f, q : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones homotópicas entre espacios finitos T_0. Entonces, las aplicaciones simpliciales $\mathcal{K}(f), \mathcal{K}(g) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ están en la misma clase de contigüidad.*

Demostración. Como f y g son homotópicas, existe una sucesión de aplicaciones comparables entre f y g. Supongamos que tiene la forma $f \leq f_1 \geq f_2 \leq \cdots \leq f_n \geq g$. Por la Proposición

5.1.3 podemos suponer que existen $p_i \in X$ par $i = 1, \ldots, n$ cumpliendo que:

$$\begin{aligned}
f_1 &= f \text{ salvo en } p_1 \Rightarrow f(p_1) \leq f_1(p_1) \\
f_2 &= f_1 \text{ salvo en } p_2 \Rightarrow f_2(p_2) \leq f_1(p_2) \\
&\vdots \\
f_n &= g \text{ salvo en } p_n \Rightarrow g(p_n) \leq f_n(p_n)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Ahora, todo símplice $\sigma \in \mathcal{K}(X)$ corresponde a una cadena en X. Si σ no contiene a p_1 entonces $\mathcal{K}(f)(\sigma) = f(\sigma) = f(\sigma_1) = \mathcal{K}(f_1)(\sigma_1)$. Si $\sigma = \{x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i \leq p_1 \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &= \{f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots \leq f(x_i) \leq f(p_1) \leq f(x_{i+1}) \leq \cdots \leq f(x_n)\}\,, \\
f_1(\sigma) &= \{f_1(x_1) \leq f_1(x_2) \leq \cdots \leq f_1(x_i) \leq f_1(p_1) \leq f_1(x_{i+1}) \leq \cdots \leq f_1(x_n)\}\,.
\end{aligned}$$

Como $f = f_1$ en $X - \{p_1\}$, y $f(p_1) \leq f_1(p_1)$, tenemos que $f(\sigma) \cup f_1(\sigma)$ es la cadena

$$\{f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_1) \leq f(p_1) \leq f_1(p_1) \leq f(x_{i+1}) \leq \cdots \leq f(x_n)\}$$

Esto es, $\mathcal{K}(f)$ y $\mathcal{K}(f_1)$ son contiguas. Reiterando el proceso llegamos a que $\mathcal{K}(f)$ y $\mathcal{K}(g)$ están en la misma clase de contigüidad.

La demostración es análoga para cualquier otra secuencia de aplicaciones comparables entre f y g. □

Proposición 5.2.12. *Sean $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$ dos aplicaciones simpliciales que están en la misma clase de contigüidad. Entonces, $\mathcal{X}(\varphi)$ y $\mathcal{X}(\psi)$ son homotópicas.*

Demostración. Por la transitividad de la relación de homotopía basta demostrar el caso en el que φ y ψ sean contiguas. Esto es, para todo símplice σ de K, $\sigma = (v_0 \ldots v_n)$, los vértices de $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$,

$$\{\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n), \psi(v_0), \ldots, \psi(v_n)\}$$

lo son de un símplice de L. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned}
f : \mathcal{X}(K) &\longrightarrow \mathcal{X}(L) \\
f(\sigma) &= \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)
\end{aligned}$$

Esta aplicación es continua porque, si $\sigma \leq \tau$, entonces $\varphi(\sigma) \leq \varphi(\tau)$, $\psi(\sigma) \leq \psi(\tau)$ y $f(\sigma) \leq f(\tau)$. Además, como

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(\varphi)(\sigma) &= (\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n)), \\
f(\sigma) &= (\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n), \psi(v_0), \ldots, \psi(v_n)), \\
\mathcal{X}(\psi)(\sigma) &= (\psi(v_0), \ldots, \psi(v_n)),
\end{aligned}$$

se sigue que $\mathcal{X}(\varphi)(\sigma) \leq f(\sigma)$ y $\mathcal{X}(\psi)(\sigma) \leq f(\sigma)$. Entonces, se tiene que $\mathcal{X}(\varphi) \leq f \geq \mathcal{X}(\psi)$, y por ello $\mathcal{X}(\varphi)$ y $\mathcal{X}(\psi)$ son homotópicas. □

5.3. Arcos de Khalimsky y homotopías en A-espacios

El uso del intervalo euclídeo unidad $I = [0,1]$ para definir homotopías en la clase de A-espacios es un recurso externo a dicha clase, ya que al no ser I un A-espacio tampoco lo es el cilindro $X \times I$. Esta anomalía se debe a que no hay un espacio finito único que haga el papel del intervalo unidad para la construcción de un cilindro. De hecho tenemos una cantidad infinita de espacios finitos no homeomorfos cuyo poliedro asociado lo es al intervalo I. Estos espacios son conocidos como arcos de Khalimsky, que pasamos a definir.

Definición 5.3.1. Se llama *recta de Khalimsky* al A-espacio $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ donde sus abiertos mínimos son los siguientes:

1. Si $n \in \mathbb{Z}$ es impar, $U_n = \{n\}$.
2. Si $n \in \mathbb{Z}$ es par, $U_n = \{n-1, n, n+1\}$.

Desde el punto de vista del orden, la recta de Khalimsky es el poset $K = (\mathbb{Z}, \preccurlyeq)$ donde $2k+1 \preccurlyeq 2k, 2k+2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Nota 5.3.2. Se podría haber usado el orden opuesto $\lesssim^{op}$ como definición de recta de Khalimsky. Obsérvese que $\psi(n) = n+1$ nos da un homeomorfismo de $(\mathbb{Z}, \lesssim)$ en $(\mathbb{Z}, \lesssim^{op})$.

El diagrama de Hasse de la recta de Khalimsky aparece en la Figura 7.

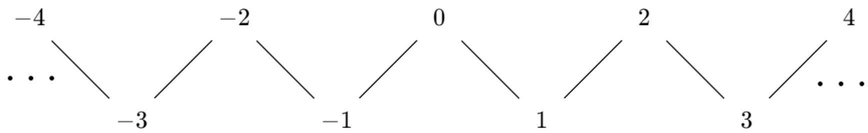

Figura 7: Recta de Khalimsky.

Definición 5.3.3. La *semirrecta de Khalimsky* es el subposet de K, $K_{\geq 0} = (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \preccurlyeq)$, cuyo diagrama de Hasse representamos en la Figura 8.
Análogamente un *arco de Khalimsky* de longitud $n \geq 2$ es un subposet de K con $n \geq 2$ elementos consecutivos (en el orden de $\mathbb{Z}$). En la Figura 9 podemos ver un arco de Khalimsky que comienza en -4 y acaba en 4. El arco de Khalimsky con p y q de primer y último elementos (en el orden de $\mathbb{Z}$) se denotará por K_p^q.

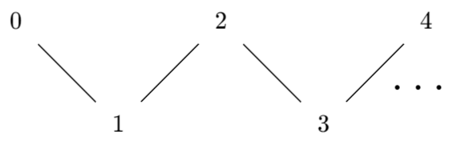

Figura 8: Semirrecta de Khalimsky.

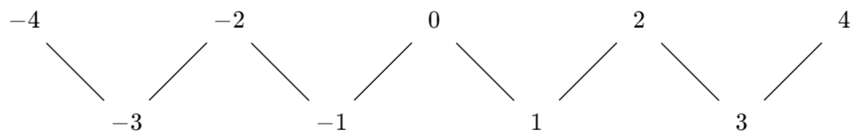

Figura 9: Arco de Khalimsky de -4 a 4.

Recordemos que dados dos posets $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$, el poset producto $(X \times Y, \trianglelefteq)$ está dado por $(x, y) \trianglelefteq (x', y')$ si $x \leq x'$ e $y \preceq y'$. De esta forma la topología inducida por '$\trianglelefteq$' es la topología producto de las correspondientes topologías de $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ ya que

$$U_{(x,y)} = \downarrow(x, y) = \downarrow x \times \downarrow y = U_x \times U_y.$$

Usando los arcos de Khalimsky podemos reescribir el Corolario 5.1.2 de la siguiente manera.

Teorema 5.3.4. *Sea X un espacio finito e Y un A-espacio cualquiera. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$:*

1. *f y g son homotópicas.*

2. *Existe un arco de Khalimsky K_0^n y una aplicación continua $H : X \times K_0^n \longrightarrow Y$ con $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, n) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

3. *Existe un arco de Khalimsky K_p^q y una aplicación continua $H : X \times K_p^q \longrightarrow Y$ con $H(x, p) = f(x)$ y $H(x, q) = g(x)$ para todo $x \in X$.*
   A las aplicaciones $H : X \times K_p^q \longrightarrow Y$ las llamaremos A-homotopías.

Demostración. La implicación 2) $\Rightarrow$ 3) es obvia. Además 3) $\Rightarrow$ 1) pues para todo k entre p y q las aplicaciones continuas $f_k(x) = H(x, k)$ son comparables pues $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ ó $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ en Y según $k \preccurlyeq k + 1$ ó $k + 1 \preccurlyeq k$. Entonces f y g son homotópicas por el Corolario 5.1.2.
Finalmente, si f y g son homotópicas, tenemos por el Corolario 5.1.2 que existe una secuencia de aplicaciones relacionadas en Y^X, $f = f_0, \ldots, f_n = g$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que no hay en ella cadenas de tres o más elementos consecutivos en dicha secuencia, por lo que los signos $\leq$ y $\geq$ se alternan en ella (siempre podemos reducir la secuencia dada a una de esta forma).

Si $f_0 \leq f_1$, se define $H : X \times K_0^{n+1} \longrightarrow Y$ como $H(x,0) = H(x,1) = f_0(x)$ y $H(x,s) = f_{s-1}(x)$ para $s \geq 2$. Nótese que H es continua en $(x,0)$, y para $s \geq 1$, si $(x,s) \trianglelefteq (x',s')$, entonces $x \leq x'$ y $s \preccurlyeq s'$, con lo que, si $s \neq s'$, s es impar y $s' = s+1$ ó $s' = s-1$. Por la condición sobre la secuencia de las f_i y la continuidad de ellas,

$$H(x,s) = f_{s-1}(x) \leq f_{s-1}(x') \leq f_{s'}(x') = H(x',s').$$

Si $f_0 \geq f_1$, se define $H : X \times K_0^n \longrightarrow Y$ como $H(x,s) = f_s(x)$. La continuidad se sigue de que si $(x,s) \trianglelefteq (x',s')$ con $s \geq 0$ entonces, si $s \neq s'$, s debe ser impar y $s' = s-1$ ó $s' = s+1$. De nuevo por la condición de la secuencia y la continuidad

$$H(x,s) = f_s(x) \leq f_s(x') \leq f_{s'}(x') = H(x',s').$$

Esto demuestra 1) $\Rightarrow$ 2). $\square$

El Teorema 5.3.4 deja de ser cierto si consideramos A-espacios infinitos. En el siguiente ejemplo veremos que la semirrecta de Khalimsky es contráctil pero no lo es si nos restringimos a A-homotopías.

Ejemplo 5.3.5. Sea $K_{\geq 0}$ la semirrecta recta de Khalimsky y para cada par $2n \in K_{\geq 0}$ ($n \geq 0$), sea el camino $\alpha_{2n} : I \to K_{\geq 0}$ entre 0 y $2n$ dado por

$$\alpha_{2n}(t) = \begin{cases} 2k & \text{si } \frac{2k}{2n+1} \leq t \leq \frac{2k+1}{2n+1} \quad \text{para } 0 \leq k \leq n \\ 2k+1 & \text{si } \frac{2k+1}{2n+1} < t < \frac{2k+2}{2n+1} \quad \text{para } 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Análogamente, para cada impar $2n+1 \in K_{\geq 0}$ se define el camino $\alpha_{2n+1} : I \to K_{\geq 0}$ entre 0 y $2n+1$ dado por

$$\alpha_{2n+1}(t) = \begin{cases} 2k & \text{si } \frac{2k}{2n+2} < t < \frac{2k+1}{2n+2} \quad \text{para } 0 \leq k \leq n \\ 2k+1 & \text{si } \frac{2k+1}{2n+2} \leq t \leq \frac{2k+2}{2n+2} \quad \text{para } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Entonces la aplicación $H : K_{\geq 0} \times I \to K_{\geq 0}$ dada por $H(s,t) = \alpha_s(t)$ es continua y define una homotopía entre la aplicación constante c_0 y la identidad $id_{K_{\geq 0}}$ por lo que la semirrecta de Khalismky es contráctil.

La continuidad de H se puede comprobar como sigue: Si $H(2n,t) = 2k$ entonces $\frac{2k}{2n+1} \leq t \leq \frac{2k+1}{2n+1}$ y tenemos

$$\frac{2k}{2n+2} \leq \frac{2k}{2n+1} \leq t \leq \frac{2k+1}{2n+1} < \frac{2k+2}{2n+2} \quad (k \geq 0).$$

Para t en el intervalo $(\frac{2k}{2n+1}, \frac{2k+1}{2n+1})$ se tiene que los posibles valores de $H(2n+1,t)$ son $2k$ y $2k+1$, mientras que los de $H(2n-1,t)$ son $2k-1$ y $2k$. Así pues $H(U_{2n} \times (\frac{2k}{2n+1}, \frac{2k+1}{2n+1})) \subseteq U_{2k}$.

De manera similar, si $H(2n,t) = 2k+1$ entonces $\frac{2k+1}{2n+1} < t < \frac{2k+2}{2n+1}$ y ahora en ese intervalo $H(2n+1,t)$ y $H(2n-,t)$ solo pueden tomar el valor $2k+1$. Así que $H(U_{2n} \times (\frac{2k+1}{2n+1}, \frac{2k+2}{2n+1})) \subseteq U_{2k+1}$, lo que nos da la continuidad en $(2n,t)$ para todo t.

Si $H(2n+1,t) = m$ entonces $\frac{m}{2n+2} < t < \frac{m+1}{2n+2}$ y como $U_{2n+1} = \{2n+1\}$, tenemos $H(U_{2n+1} \times (\frac{m}{2n+2} < t < \frac{m+1}{2n+2}) \subseteq U_m$, lo que nos da la continuiudad de H en $(2n+1,t)$ para todo t.

En contraste no podemos encontrar ninguna A-homotopía entre c_0 e $id_{K_{\geq 0}}$ pues si existiese un $s \geq 1$ y una A-homotopía $G : K_{\geq 0} \times K_0^s \to K_{\geq 0}$ con $G(n,0) = 0$ y $G(n,s) = n$ para todo n, $\alpha = G(s+1,-) : \{s+1\} \times K_0^s \to K_{\geq 0}$ sería una aplicación continua cuya imagen contiene a 0 y $s+1$. Como K_0^s es conexo, también lo sería $\alpha(K_0^s)$. Pero todo conexo en $K_{\geq 0}$ conteniendo a 0 y $s+1$ contiene a todos los puntos intermedios. Por tanto el cardinal de $\alpha(K_0^s)$ es $\geq s+2$, mientras que el de K_0^s es $s+1$. Esta contradicción muestra que c_0 e $id_{K_{\geq 0}}$ no son A-homotópicas.

Para disponer de una cantidad infinita de "niveles" en una homotopía podríamos considerar la compactificación por un punto (ver la Sección 1.4) de $K_{\geq 0}$. Esto es, el espacio $K_{\geq 0}^{+} = K_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ cuyos abiertos están generados por los abiertos de $K_{\geq 0}$ y los conjuntos $\{\infty\} \cup G$, donde $G = X - A$, recorriendo A los conjuntos compactos y cerrados de $K_{\geq 0}$.

Lema 5.3.6. *Los conjuntos compactos y cerrados de $K_{\geq 0}$ son uniones finitas de arcos de Khalimsky K_n^m, donde n y m son enteros pares no negativos.*

Demostración. En efecto, si $A \subseteq K_{\geq 0}$ es compacto entonces del recubrimiento por abiertos $A \subseteq \cup_{a \in A} U_a$ se puede extraer uno finito $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_s}$ y como cada U_a es finito se sigue la finitud de A. Por otro lado, si A es cerrado y $a \in A$ entonces $\overline{\{a\}} \subseteq A$, donde $\overline{\{a\}} = \{a\}$ si a es par y $\{a-1, a, a+1\}$ si a es impar. $\square$

Es fácil comprobar que una base de la topología de $K_{\geq 0}^{+}$ la forman los abierto minimales U_x $(x \in K_{\geq 0})$ y los complementarios de los arcos de Khalimsky K_0^{2n} $(n \geq 1)$.

Con el uso de la compactificación $K_{\geq 0}^{+}$ se podría pensar en definir que dos aplicaciones $f, g : X \times Y$ entre A-espacios son $K_{\geq 0}^{+}$*-homotópicas* si existe una aplicación continua $H : X \times K_{\geq 0}^{+} \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,\infty) = g(x)$. Desafortunadamente debemos descartar esta idea pues es inmediato que ∞ no tiene abierto minimal en $K_{\geq 0}^{+}$, así que la topología de $K_{\geq 0}^{+}$ alrededor de ∞ es muy distinta de la que se tiene alrededor de 0, lo que impide que la relación definida anteriormente sea simétrica.

Ejemplo 5.3.7. Existe una A-homotopía entre la constante 0, $c_0 : K_{\geq 0} \to K_{\geq 0}$, y la identidad $id_{K_{\geq 0}}$, pero no recíprocamente. En efecto, sea $H : K_{\geq 0} \times K_{\geq 0}^{+} \to K_{\geq 0}$ dada por $H(n,s) = n$ si (n,s) está en la diagonal o por encima de ella y $H(n,s) = s$ en caso contrario. Además $H(n,\infty) = n$.

Esta aplicación es continua en $K_{\geq 0} \times K_{\geq 0}$ como consecuencia del que si (n,s) está en el primer caso entonces $(n+1,s)$ también y si $(n-1,s)$ no lo está entonces necesariamente $s = n$.

Análogamente, si (n, s) está por debajo de la diagonal también lo está $(n-1, s)$ y si $(n+1, s)$ no lo está entonces $n = s-1$. Además la continuidad en (n, ∞) sigue de que para el abierto $\Omega = K_{\geq 0} - K_0^m$ con $m \geq n+1$ (en el orden de la recta euclídea) se tiene $H(U_n \times \Omega) \subset U_n$.

Sin embargo, no existe una $K_{\geq 0}^+$-homotopía $H : K_{\geq 0} \times K_{\geq 0}^+ \to K_{\geq 0}$ que sea la identidad en $K_{\geq 0} \times \{0\}$ y c_0 en $K_{\geq 0} \times \{\infty\}$. En efecto, esto es una consecuencia del siguiente resultado que nos dice que no se puede discretizar la homotopía del Ejemplo 5.3.5.

Lema 5.3.8. *Sea $H : K_{\geq 0} \times K_0^s \to K_{\geq 0}$ una A-homotopía con $H(-, 0)$ la identidad de $K_{\geq 0}$. Entonces $H(-, k) = id$ en $K_{\geq k+1}$ para todo entero $k \in [0, s]$.*

Demostración. El resultado es trivial para $k = 0$. Supongamos el resultado cierto para el nivel $k-1$ con $k \geq 1$. Si el nivel $H(-, k)$ es la identidad no hay nada que hacer. Supongamos que existe $n \geq k+1$ con $H(n, k) \neq n$. Sea n_0 el mínimo de tales elementos (en el orden habitual). Nótese que $n_0 \geq k+1 \geq 1$ y si k es par, entonces $H(n_0 - 1, k) = n_0 - 1$ y si además n_0 es par, como $n_0 - 1 = H(n_0 - 1, k) \preccurlyeq H(n_0, k)$ y $H(n_0, k) \neq n_0$, tenemos que $H(n_0, k) = n_0 - 2$. Por continuidad $H(n_0, k) = n_0 - 2$ debe ser comparable en $K_{\geq 0}$ con $H(n_0, k-1) = n_0$, lo que nos da una contradicción.

Si n_0 es impar, $n_0 \preccurlyeq n_0 - 1$ y $H(n_0, k) \preccurlyeq H(n_0 - 1, k) = n_0 - 1$, así que $H(n_0, k) \neq n_0$ nos lleva a $H(n_0, k) = n_0 - 2$. Como $H(n_0, k-1) = n_0$ debe ser comparable con $H(n_0, k) = n_0 - 2$, llegamos también a una contradicción. □

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario,

Corolario 5.3.9. *No existe una $K_{\geq 0}^+$-homotopía $H : K_{\geq 0} \times K_{\geq 0}^+ \to K_{\geq 0}$ tal que $H(-, 0)$ sea la identidad y $H(-, \infty)$ una constante.*

Demostración. Supongamos que $H(n, \infty) = m_0$ para todo n. Por la definición de la topología sobre $K_{\geq 0}^+$, la continuidad de H nos da para cada n un nivel s_n tal que $H(U_n \times (\{\infty\} \cup (K - K_0^{s_n}))) \subseteq U_{m_0} \subseteq \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\}$. Sea s mayor (en el sentido usual) que $m_0 + 2$ y s_n para $n \in [0, m_0 + 2]$. Entonces, por el Lema 5.3.8 tenemos que $H(n, s) = n$ para todo n en $K_{\geq s}$. Además tenemos la inclusión estricta de arcos de Khalimsky $K_0^{m_0+2} \subsetneq K_0^s$. Más aún, $H(-, s)$ envía $K_0^{m_0+2}$ en $U_{m_0} \subseteq \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\}$. En particular $H(-, s)$ restringida a $K_{m_0+2}^{s+1}$ nos da un camino en $K_{\geq 0}$ entre un punto $x_0 \in U_{m_0}$ y $H(s+1, s) = s+1$. Por conexión, todos los puntos del arco $K_{x_0}^{s+1}$ deben aparecer en la imagen por $H(-, s)$ del arco $K_{m_0+2}^{s+1}$. Pero este último arco contiene $s+1-(m_0+2)+1 = s - m_0$ elementos, mientras que $K_{x_0}^{s+1}$ contiene entre $s+1-(m_0+1)+1 = s - m_0 + 1$ y $s+1-(m_0-1)+1 = s - m_0 + 3$ elementos. Esta contradicción termina la demostración. □

Para conseguir la simetría podemos tomar la siguiente compactificación por dos puntos de la recta de Khalimsky K: Consideramos $K^* = K \cup \{+\infty, -\infty\}$ con la topología generada por los abiertos de K y aquellos conjuntos $\{+\infty\} \cup G_n$ y $\{-\infty\} \cup H_n$ donde $G_n = K_{\geq 0} - K_0^{2n}$ y $H_n = K_{\leq 0} - K^0_{-2n}$ para $n \geq 1$.

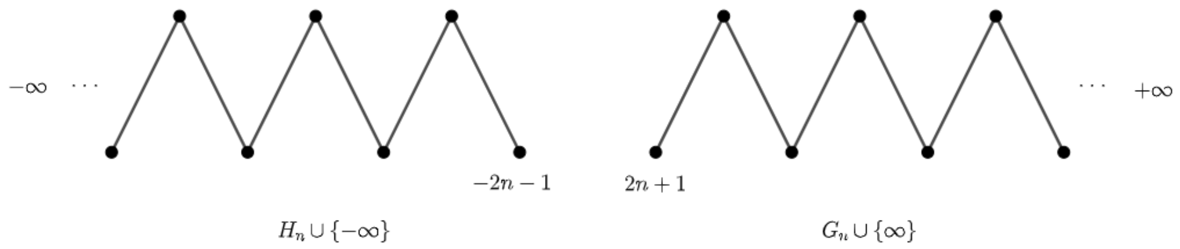

Figura 10: Compactificación por dos puntos de la recta de Khalimsky.

La simetría está asegurada por el siguiente lema:

Lema 5.3.10. *La aplicación $\psi : K \to K$ dada por $\psi(x) = -x$ es un homeomorfismo que determina un homemorfismo $\psi^* : K^* \to K^*$ que intercambia $+\infty$ con $-\infty$.*

Demostración. Obsérvese que $\psi = \psi^{-1}$ y $\psi^* = (\psi^*)^{-1}$ por lo que bastará demostrar la continuidad de ψ y ψ^*. Esto es inmediato, ya que $\psi(U_n) = U_n$ para todo entero n. □

Ahora podemos definir que dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ entre A-espacios son K^*-*homotópicas* si existe una secuencia de aplicaciones $f_0, \dots f_n : X \to Y$ y $H_0, \dots, H_{n-1} : X \times K^* \to Y$ tales que $f_0 = f$, $f_n = g$, $H_i(x, -\infty) = f_i(x)$ y $H_i(x, +\infty) = f_{i+1}(x)$ para todo $x \in X$ y $0 \leq i \leq n$.

Obsérvese que toda $K^+_{\geq 0}$-homotopía da lugar a una homotopía ordinaria y por tanto toda K^*-homotopía también. Más concretamente, tenemos

Lema 5.3.11. *Sea $H : X \times K^+_{\geq 0} \to Y$ una $K^+_{\geq 0}$-homotopía entre las aplicaciones $f, g : X \to Y$ donde X e Y son A-espacios. Entonces existe una homotopía $G : X \times I \to Y$ entre ellas. Lo mismo ocurre para una K^*-homotopía.*

Demostración. La demostración se reduce a encontrar una aplicación continua $\psi : \mathbb{R}^+_{\geq 0} \to K^+_{\geq 0}$ con $\psi(0) = 0$ y $\psi(\infty) = \infty$ ya que como el intervalo unidad $[0, 1]$ es homeomorfo a la compactificación por un punto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ por medio de un homeomorfismo $h : [0, 1] \to \mathbb{R}^+_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = \infty$, entonces la homotopía buscada sería $G = H \circ (id_X \times \psi) \circ (id_X \times h)$.

Ahora la defінción de ψ es la siguiente: $\psi(\infty) = \infty$, $\psi(2n) = 2n$ y $\psi(x) = 2n + 1$ $(n \geq 0)$ para $x \in (2n, 2n + 2)$. La continuidad de ψ es inmediata pues $\psi^{-1}(U_0) = \psi^{-1}(\{0, 1\}) = [0, 2)$ y para $n \geq 1$ $\psi^{-1}(U_{2n}) = \psi^{-1}(\{2n - 2, 2n, 2n + 2\}) = (2n - 2, 2n + 2)$, mientras que $\psi^{-1}(U_{2n-1}) = \psi^{-1}(\{2n-1\}) = (2n-2, 2n)$. Además, para el abierto básico de ∞ en K^+, $U_\infty = \{\infty\} \cup (K - K_0^{2n})$, tenemos $\psi^{-1}(U_\infty) = \{\infty\} \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} - ([0, 2n])$.

Finalmente, si ahora tenemos una K^*-homotopía $H : X \times K^* \to Y$, consideramos las K^+-homotopías dadas por las restricciones de H a $X \times (K_{\geq 0} \cup \{+\infty\})$ y $X \times (K_{\leq 0} \cup \{-\infty\})$ entre $H(-,0)$ y f y $H(-,0)$ y g, respectivamente, y aplicamos la propiedad transitiva de la relación de homotopía clásica. □

Nota 5.3.12. La restricción $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to K_{\geq 0}$ de la aplicación ψ usada en la demostración anterior es la generalización de la equivalencia débil ψ definida para espacios finitos en (4.1) ya que el poliedro asociado $\mathcal{K}(K_{\geq 0})$ es justamente la semirrecta euclídea con la triangulación dada por los intervalos $[n, n+1]$ $(n \geq 0)$. Análogamente $\mathcal{K}(X)$ es la recta $\mathbb{R}$ triangulada por $[n, n+1]$ con $n \in \mathbb{Z}$.

En resumen, podemos considerar tres relaciones de homotopía en la clase de A-espacios: la ordinaria, la definida aquí como K^*-homotopía y la homotopía definida por secuencias de aplicaciones relacionadas por el orden natural en Y^X.

Las tres coinciden para los espacios finitos y se tiene que toda homotopía dada por el orden es una K^*-homotopía y que toda K^*-homotopía da lugar una homotopía ordinaria. Sabemos que hay K^*-homotopías que no proceden del orden de Y^X (la identidad $id_{K_{\geq 0}}$ y la constante c_0 son K^*-homotópicas, pero no A-homotópicas). Queda aquí abierto el problema de encontrar dos aplicaciones entre A-espacios homotópicas que no sean K^*-homotópicas.

CAPÍTULO 6

Homotopía en A-espacios y homotopía fuerte en complejos simpliciales

Como ya se vio en la Sección 5.2, las equivalencias débiles de homotopía entre espacios finitos se corresponden, por el operador $\mathcal{K}$, con equivalencias de homotopía entre los poliedros asociados.

Se plantea el problema de definir la operación que sobre los poliedros describe las equivalencias de homotopía ordinaria entre espacios finitos. Barmak y Minian probaron que tal operación es el colapso fuerte.

Este capítulo expone la parte del Capítulo 5 de [3] que contiene los resultados necesarios para demostrar cómo los colapsos fuertes se corresponden, via el operador $\mathcal{K}$, con las equivalencias de homotopía de los espacios finitos.

6.1. Colapsos y colapsos fuertes en complejos simpliciales

En esta sección se introduce la noción de colapso para complejos simpliciales, usando los conceptos previamente definidos en la Sección 3.

Definición 6.1.1. Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial K. Se dice que hay un *colapso simplicial elemental* de K a L si existe un símplice σ de K y un vértice a de K tal que $a\sigma \in K$, y $L = K - \{a\sigma, \sigma\}$ (en particular, $L \cap \sigma = a\dot{\sigma}$). Equivalentemente, existen solo dos símplices σ, τ de K que no están en L y tales que τ es el único símplice que contiene a σ. En este caso, σ se dice *cara libre* de τ. Los colapsos elementales se denotarán por $K \searrow^{e} L$.

Definición 6.1.2. Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial K. Se dice que K *colapsa simplicialmente* a L (o que L *expande* a K) si existe una secuencia de complejos simpliciales finitos $K = K_1, K_2, \dots, K_n = L$ de forma que $K_i \searrow^{e} K_{i+1}$ para todo i. Se denotará por $K \searrow L$ (o $L \nearrow K$).

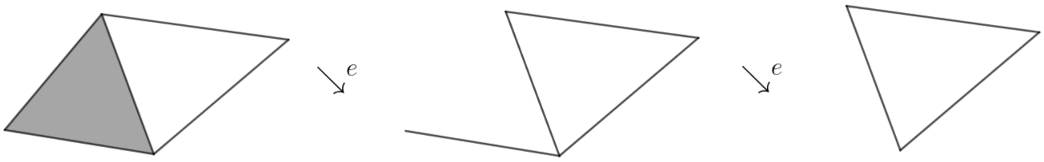

Figura 11: Complejo simplicial que colapsa al borde de un 2-símplice.

Definición 6.1.3. Dos complejos simpliciales K y L se dice que *tienen el mismo tipo de homotopía simple* o que son *simplemente homotópicamente equivalentes* si existe una secuencia $K = K_1, K_2, \dots, K_n = L$ de forma que o bien $K_i \searrow K_{i+1}$ o bien $K_i \nearrow K_{i+1}$ para todo i.

Nota 6.1.4. Nótese que si existe un colapso elemental $K \searrow^e L$, entonces $|L|$ es un retracto de deformación fuerte de $|K|$. En efecto, todo símplice $\sigma = (v_0 \dots v_n)$ se retrae a su cara $\sigma' = (v_0 \dots v_{n-1})$ mediante la aplicación simplicial $\varphi : \sigma \longrightarrow \sigma'$ tal que $\varphi(v_n) = v_0, \varphi(v_j) = v_j$ para todo $j = 0, \dots, n-1$. De forma que

$$\varphi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = (\lambda_n + \lambda_0)v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1}v_{n-1} \tag{6.1}$$

donde $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ son las coordenadas baricéntricas de un punto de σ. Además, φ es un retracto de deformación fuerte pues la aplicación $H : \sigma \times I \longrightarrow \sigma$ tal que

$$H(x,t) = (1-t)x + t\varphi(x).$$

está bien definida por ser σ convexo, y además:

$$\begin{cases} H(x,0) &= \quad id \\ H(x,1) &= \varphi(x) \\ H(x,t) &= \quad x \qquad \text{si } \ x \in \sigma' \end{cases}$$

Se tiene así que H es una homotopía entre id_σ y $i \circ \varphi$, donde $i : \sigma' \subseteq \sigma$ es la inclusión. Supongamos ahora que $\tau = (v_1, \dots, v_n)$ es una cara libre de $\sigma = (v_0, \dots, v_n) \in K$. Si $b(\tau)$ es el baricentro de τ, σ admite la subdivisión dada por el cono reiterado

$$b(\tau)(v_0\dot{\tau}).$$

Sea σ_j el símplice $\sigma_j = b(\tau_j)v_j$ donde $\tau_j = (v_0 \dots \widehat{v_j} \dots v_n)$ es la j-ésima cara de τ.
Definimos las aplicaciones simpliciales, para todo j, $\varphi_j : \sigma_j \longrightarrow (v_0\tau_j) = \sigma'$ igual que en (6.1).
Estudiamos la compatibilidad de estas aplicaciones. Sea $x \in \sigma_i \cap \sigma_k$, es decir,

$$x \in b(\tau)(v_0 \dots \widehat{v_i} \dots \widehat{v_k} \dots v_n)$$

de forma que

$$x = \xi_0 v_0 + \lambda_0 b(\tau) + \lambda_1 v_1 + \dots + \widehat{\lambda_i} v_i + \dots + \widehat{\lambda_k} v_k + \dots + \lambda_n v_n.$$

Así, se tiene que

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = (\xi_0 + \lambda_0)v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \widehat{\lambda_i} v_i + \cdots + \widehat{\lambda_k} v_k + \cdots + \lambda_n v_n \\ \varphi_k(x) = (\xi_0 + \lambda_0)v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \widehat{\lambda_i} v_i + \cdots + \widehat{\lambda_k} v_k + \cdots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

Y, por tanto, $\varphi_i(x) = \varphi_k(x)$ para un x arbitrario. La unión de todas las aplicaciones φ_j define un retracto con deformación fuerte de σ sobre $v_0\overset{\bullet}{\tau}$.

Definición 6.1.5. Un complejo simplicial K es *colapsable* si colapsa a uno de sus vértices. Se denotará por $K \searrow *$.

Un complejo puede colapsar a un punto por una secuencia de colapsos pero no necesariamente por otra, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1.6. Consideremos un cubo dividido en dos "plantas" y dividimos cada planta en prismas que triangulamos sin añadir muchos vértices.

1. Podemos colapsar aprovechando las caras libres situadas en la "tapa" del cubo y colapsamos prisma a prisma toda la segunda planta al techo de la primera. Repetimos los colapsos análogos a los de la segunda planta hasta colapsar la primera planta sobre su suelo, y después ese cuadrado colapsa sobre un lado que terminará colapsando a punto.

2. Otra manera de colapsar sería la siguiente: Consideramos dos prismas P_1 y P_2 en la primera y segunda planta respectivamente, y una pared dada por otro prisma que vaya desde la pared del prisma hasta la pared del cubo, como puede verse en la Figura 13. La cara de P_2 que se encuentra en la tapa del cubo es una cara libre. Empezando por esta cara se "eliminará" el interior del prisma. Repetimos este colapso desde la cara de P_1 que se encuentra en la base del cubo. Ahora, tanto el suelo de P_2 como el techo de P_1, son caras libres, y podemos colapsar desde ellas. La cara libre de P_2 irá "eliminando" el interior de la primera planta hasta chocar con la pared, al igual que la cara libre de P_1 "eliminará" el interior de la segunda planta. Al finalizar estos colapsos, no quedan caras libres. El poliedro bidimensional resultante se conoce como "Casa de dos habitaciones de Bing", y no permite continuar la secuencia de colapsos.

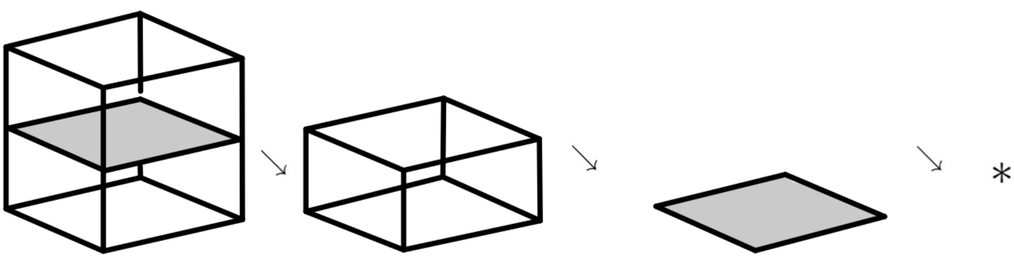

Figura 12: El cubo colapsa a punto.

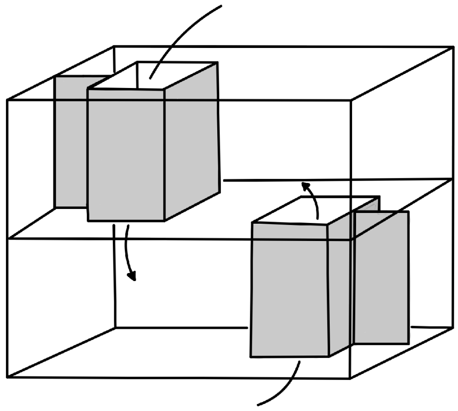

Figura 13: El cubo colapsa a la “Casa de Bing”.

Lema 6.1.7. *Sea K un complejo simplicial. Todo cono simplicial aK es colapsable.*

Demostración. Se prueba el resultado por inducción en n, el número de símplices del complejo simplicial K. Para $n = 1$, K se reduce a un vértice v. En este caso, el cono av es una arista que es claramente colapsable. Suponiendo cierto el resultado para $n \geq 1$, sea K un complejo simplicial con $n + 1$ símplices, y sea aK el cono simplicial de a sobre K. Nótese que para todo símplice principal σ en K se tiene que σ es una cara libre de $a\sigma$ en aK. Por tanto, $aK \searrow aK - \{a\sigma, \sigma\} = a(K - \{\sigma\})$. Pero $a(K - \{\sigma\})$ es un cono sobre $K - \{\sigma\}$ que tiene n símplices, y por hipótesis de inducción, es colapsable. Es decir, $aK \searrow aK - \{a\sigma, \sigma\} = a(K - \{\sigma\}) \searrow *$, y aK es colapsable. □

Lema 6.1.8. *Sea aK un cono simplicial de un complejo K. Entonces, K es colapsable si y solo si $aK \searrow K$.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Sea K un complejo simplicial colapsable y sea n el número de símplices de K. Si $n = 1$, K es un vértice y aK es una arista, y, en este caso, es obvio que $aK \searrow K$. Supongamos que todo complejo simplicial colapsable K con n símplices cumple que $aK \searrow K$. Sea entonces K un complejo simplicial colapsable con $n + 1$ símplices. Sea σ un símplice principal en K y τ una cara libre de σ. Entonces, $a\sigma$ es principal en aK y $a\tau$ es cara libre de $a\sigma$. Por tanto, $aK \searrow^e aK - \{a\sigma, a\tau\} = (aK_1) \cup \{\sigma, \tau\}$, donde $K_1 = K - \{\sigma, \tau\}$. Por hipótesis, $aK_1 \searrow K_1$, por lo que $(aK_1) \cup \{\sigma, \tau\} \searrow K_1 \cup \{\sigma, \tau\} = K$. Tenemos así, $aK \searrow K$.

$\Leftarrow$ Análogamente a lo hecho antes, supongamos inductivamente que el resultado es cierto para complejos con n símplices y sea K un complejo con $n + 1$ símplices tal que $aK \searrow K$. Sea $aK \searrow^e L_1 \searrow^e L_2 \searrow^e \cdots \searrow^e K$ una secuencia de colapsos elementales. En particular, $L_1 = aK - \{\mu, \mu_0\}$, donde μ es un símplice principal de aK y μ_0 una cara libre de μ. Esto implica que necesariamente $\mu = a\rho$ con ρ un símplice principal en K. Además, como $K \subseteq L_1$ y $\mu_0 \notin L_1$, se sigue que $\mu_0 \notin K$ y por tanto a está entre los vértices de μ_0; esto es, $\mu_0 = a\rho_0$ para alguna cara $\rho_0 \leq \rho$. Es inmediato comprobar que ρ_0 es cara libre de ρ ya que μ_0 lo es de μ. Así pues $K \searrow^e K - \{\rho, \rho_0\} = K_1$ y $aK_1 = L_1$. Por tanto, por la hipótesis de inducción, $K_1 \searrow *$ y se sigue, reiterando el razonamiento, que $K \searrow *$. $\square$

Lema 6.1.9. *Sean K y M dos complejos simpliciales finitos de forma que K colapsa a un subcomplejo L. Entonces $K * M \searrow L * M$.*

Demostración. Sea $K \searrow^e L_1 \searrow^e L_2 \searrow^e \cdots \searrow^e L$ una secuencia de colapsos elementales. Si $L_1 = K - \{\alpha, \beta\}$ con α un símplice principal de K y $\beta \leq \alpha$ una cara libre, tomamos un símplice principal $\tau \in M$. Es inmediato comprobar que $\alpha\tau$ es un símplice principal de $K * M$ y $\beta\tau$ es una cara libre de $\alpha\tau$. Entonces $K * M \searrow^e L_1 * M$. Reiterando el razonamiento anterior llegamos a una secuencia de colapsos elementales $K * M \searrow^e L_1 * M \searrow^e L_2 * M \searrow^e \cdots \searrow^e L * M$. $\square$

Corolario 6.1.10. *Sean K, L dos complejos simpliciales tales que $K \searrow L$, y sea v un vértice. Entonces se tiene que $vK \searrow vL$.*

Corolario 6.1.11. *Sea K un complejo simplicial y v un vértice. Si $K \searrow *$, entonces $vK \searrow *$.*

Proposición 6.1.12. *Si K y L son subcomplejos no vacíos de un complejo simplicial finito tales que $K \cap L \neq \emptyset$, entonces $K \cup L \searrow K$ si y solo si $L \searrow K \cap L$.*

Demostración.

$\Rightarrow$ | Supongamos $K \cup L \searrow K$ y $L \subseteq K$. En este caso es obvio, puesto que $K \cup L = K$ y $K \cap L = L$.

Supongamos ahora $L \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq L$. Sea la secuencia de colapsos elementales

$$K \cup L \searrow^e M_1 = K \cup L - \{\sigma_1, \tau_1\} \searrow^e M_2 \searrow^e \cdots \searrow^e M_n \searrow^e K.$$

donde σ_1 un símplice principal en $K \cup L$ y τ_1 cara libre de σ_1. Esto implica que $\sigma_1, \tau_1 \in K \cup L$, pero $\sigma_1, \tau_1 \notin K$ pues $K \subseteq M_1$. Por lo tanto, $\sigma_1, \tau_1 \in L$, y σ_1 será un símplice principal en L y τ_1 cara libre de σ_1 en L. Se tiene que

$$L \searrow^e L_1 = L - \{\sigma_1, \tau_1\},$$
$$M_1 = K \cup L.$$

Sea ahora σ_2 el símplice principal de M_1 y τ_2 cara libre de σ_2 que desaparecen en el segundo colapso de la secuencia anterior:

$$M_1 \searrow^e M_2 = M_1 - \{\sigma_2, \tau_2\} = K \cup L - \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2\}.$$

Por tanto, $\sigma_2, \tau_2 \notin K$, pero $\sigma_2, \tau_2 \in M_1 = K \cup L_1$, luego $\sigma_2, \tau_2 \in L_1$, y σ_2 será un símplice principal en L_1 y τ_2 cara libre de σ_2 en L_1. Entonces

$$L_1 \searrow^e L_2 = L_1 - \{\sigma_2, \tau_2\}.$$

Aplicamos este proceso hasta que $M_n \searrow^e K$, entonces se obtendrá que $L_n \searrow^e L_{n+1} = L - \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n+1}\}$, donde $\sigma_j, \tau_j \notin K$ con $j = 1, \ldots, n+1$. Por tanto, mediante colapsos elementales

$$L \searrow L_{n+1} = L - \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n+1}\}.$$

L_{n+1} será no vacío puesto que $K \cap L \neq \emptyset$ y en cada colapso elemental $L_1 \searrow^e L_{i+1}$ se eliminan símplices de L que no están en K. Por tanto, los símplices de L_{n+1} son aquellos que están tanto en L como en K, es decir, están en $L \cap K$ y $L \searrow L_{n+1} = L \cap K$.

$\Leftarrow$ Supongamos $L \searrow L \cap K$ y $L \subseteq K$. En este caso es obvio.
Supongamos que $L \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq L$. Sea una secuencia de colapsos elementales

$$L \searrow^e L_1 = L - \{\sigma_1, \tau_1\} \searrow^e \cdots \searrow^e L_n - \{\sigma_n, \tau_n\} \searrow^e K \cap L.$$

donde σ_i un símplice principal en L_i y τ_i cara libre de σ_i. Esto implica que $\sigma_i, \tau_i \notin K \cap L_i$ pues $K \cap L_i \subseteq L_i$, pero $\sigma_i, \tau_i \in L_i$, luego $\sigma_i, \tau_i \notin K$. De esta forma, σ_i será un símplice principal en $K \cup L_i$ con τ_i cara libre. Entonces

$$K \cup L \searrow^e \cdots \searrow^e K \cup L_i \searrow K \cup L_{i+1} = K \cup (K \cap L) = K.$$

Es decir, $K \cup L \searrow K$. $\square$

Nota 6.1.13. Destacar que, en la demostración anterior, debe cumplirse que $K \cap L \neq \emptyset$, puesto que, si $K \cap L = \emptyset$, entonces $L \searrow \emptyset$, lo que es una contradicción.

A continuación se introduce el concepto de *colapso fuerte*, que dará paso a la noción de homotopía fuerte en complejos simpliciales, asociada a la contigüidad estudiada en la Sección 5.2.

Lema 6.1.14. *Sean K y L dos complejos simpliciales y v un vértice de K. Se tiene que $(K \setminus v) * L = (K * L) \setminus v$. Análogamente, si $v \in L$, se tiene que $K * (L \setminus v) = (K * L) \setminus v$.*

Demostración.

$\subseteq$ Sea $\sigma \in (K \setminus v) * L$. Entonces, $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$ con $\sigma_1 \in K \setminus v \subset K$, $\sigma_2 \in L$, con la posibilidad de $\sigma_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$. Por tanto, $\sigma_1 \in K$ y $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \in K * L$. Como $v \notin \sigma$, se tiene que $\sigma \in (K * L) \setminus v$.

$\supseteq$ Sea $\sigma \in (K * L) \setminus v$. Entonces, $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$ con $\sigma_1 \in K$, $\sigma_2 \in L$ y $v \notin \sigma_1$. Por tanto, $\sigma_1 \in K \setminus v$, $\sigma_2 \in L$ y $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \in (K \setminus v) * L$. $\square$

Definición 6.1.15. Un vértice v de un complejo simplicial K se dice que está *dominado* por otro vértice $v' \neq v$ si todo símplice principal que contiene a v también contiene a v'.

Lema 6.1.16. *Sea K un complejo simplicial. Un vértice $v \in K$ está dominado por v' en K si y solo si $lk(v, K) = v'Z$ es un cono sobre algún subcomplejo $Z \subseteq K$.*

Demostración. De estar v dominado por v' se sigue que la arista vv' aparece en cualquier símplice principal que contenga a v, y por ello $vv' \in K$ y así $v' \in lk(v, K)$.
Además, $lk(v, K) = v'Z$ con $Z = lk(v, K) \setminus v'$. En efecto, si $\tau \in lk(v, K)$, sea ρ un símplice principal de $lk(v, K)$ con $\tau \leq \rho$. Entonces $v\rho$ es un símplice principal de K pues $v\rho \leq \alpha$ implica que $v \in \alpha$, y la cara de α que no contiene a v, $\alpha' < \alpha$, está en $lk(v, K)$ y contiene a ρ, así que $\alpha' = \rho$ y $\alpha = v\rho$. Por tanto $v' \in v\rho$ y $v' \in \rho$. Llegamos a $\tau \leq \rho = v'\rho'$, donde $\rho' \in lk(v, K) \setminus v'$ es la cara de ρ que no contiene a v'.
Recíprocamente, supongamos que $lk(v, K) = v'Z$ es un cono, entonces $v' \in lk(v, K)$ y $Z = lk(v, K) \setminus v'$. Si ρ es un símplice principal de K con $v \in \rho$, tenemos que $\rho' \leq \rho$ la cara que no contiene a v es principal en $lk(v, K) = v'Z$, y por ello debe contener a v'. Así pues $v' \in \rho$ y v está dominado por v'. □

Definición 6.1.17. Un complejo simplicial finito K se dirá que es un *complejo minimal* si no tiene vértices dominados.

Ejemplo 6.1.18. Algunos ejemplos de complejos simpliciales minimales:

1. El borde de cualquier n-símplice (Figura 14 (a)).
2. La triangulación clásica de un toro (Figura 14 (b)).

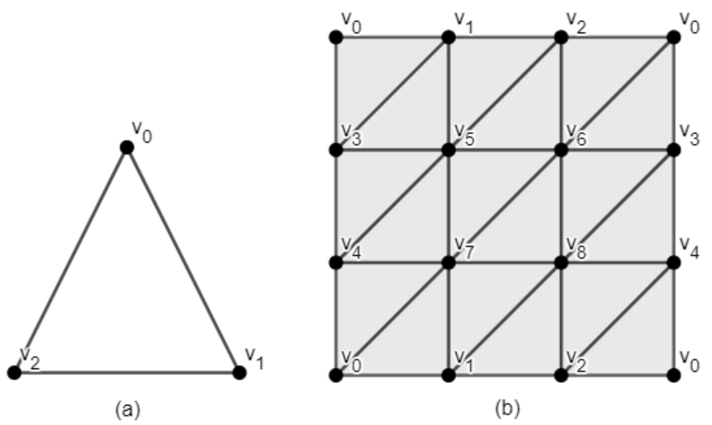

Figura 14: Borde de un 2-símplice y triangulación del toro.

Definición 6.1.19. Sea K un complejo simplicial y sea $L \subseteq K$ un subcomplejo. Se dice que L es *lleno* en K si para todo $\sigma = (v_0 \dots v_n) \in K$ tales que $v_i \in Vert(L)$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $\sigma \in L$. Equivalentemente, L se dirá lleno en K si para todo símplice $\sigma \in K$ la intersección $\sigma \cap |L|$ es una cara de σ (posiblemente vacía).

Nota 6.1.20. Obsérvese que para todo vértice $v \in K$ el subcomplejo $K \setminus v$ es lleno en K. En efecto, si $\sigma \in K$ tiene todos sus vértices en $K \setminus v$, ninguno de esos vértices es v, por lo que $\sigma \in K \setminus v$, por definición.

El siguiente lema es clave en la demostración del Teorema 6.2.6, y forma parte de una demostración del mismo alternativa a la dada en [3].

Lema 6.1.21. *Sea K un complejo simplicial. Sea $L' \subseteq sdK = K'$ un subcomplejo lleno que contiene a todos los baricentros de los símplices principales y vértices de K. Entonces si $b(\sigma) \in L'$ es un vértice dominado en L', σ no es un símplice principal de K. Si $\sigma = v$ es un vértice entonces también está dominado en K.*

Demostración. Sea $\sigma \in K$ un símplice principal. Por hipótesis $b(\sigma) \in L'$. Supongamos que $lk(b(\sigma), L') = b(\mu)Z$ es un cono con vértice $b(\mu) \in L'$. Para todo vértice $v \in \sigma$ sabemos por hipótesis que $b(v) = v \in L'$, así que de ser L' lleno se deduce que la arista $(b(v), b(\mu)) \in L'$. Por tanto v debe ser un vértice de μ para todo vértice de σ, y por ello $\sigma \leq \mu$. De ser σ principal se sigue que $\sigma = \mu$ y esto contradice que $b(\mu) \in lk(b(\sigma), L')$.
Si ahora $\sigma = v$ fuese un vértice, sean $\mathcal{P} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ los símplices principales de K que contienen a v. Entonces $b(\sigma_i) \in L'$ para todo $i = 1, \ldots, s$ por hipótesis, y, también por hipótesis, $v = b(v) \in L'$. Tenemos que, por ser L' lleno, $b(v)b(\sigma_i)$ es un símplice de L' y $b(\sigma_i) \in lk(b(v), L') = b(\mu)Z$.
Si $\mu = \sigma_{i_0}$ para algún i_0, entonces no puede existir más que ese símplice principal en la familia $\mathcal{P}$, ya que en caso contrario tendríamos una arista $(b(\sigma_{i_0})b(\sigma_j)) \in L' \subseteq K'$, que nos daría que o bien $\sigma_{i_0} \leq \sigma_j$, o bien $\sigma_j \leq \sigma_{i_0}$, entre símplices principales tales que $\sigma_{i_0} \neq \sigma_j$. Por tanto, $lk(v, K) = \widehat{\sigma_{i_0}}$, la cara opuesta de v en σ_{i_0}, y por ello v está dominado.
Si $\mu \neq \sigma_i$ para todo i, entonces $(b(\mu)b(\sigma_i)) \in lk(b(v), L')$, y por la definición de subdivisión baricéntrica $(b(v)b(\mu)b(\sigma_i))$ es un símplice de L'. Por ser σ principal se tiene que $v \neq \mu \leq \sigma_i$. Entonces para cualquier $v' \in \mu$ con $v' \neq v$, tenemos que todo símplice principal que contiene a v contiene también a v', y por ello v está dominado por v'. □

Definición 6.1.22. Sea K un complejo simplicial finito y sea $v \in K$ un vértice. Se dice que existe un *colapso fuerte elemental* de K a $K \setminus v$, denotado por $K \searrow\searrow^e K \setminus v$, si $lk(v; K)$ es un cono simplicial $v'L$, esto es, v está *dominado* por v'.
Se dirá que existe un *colapso fuerte* del complejo K al subcomplejo L si hay una secuencia de colapsos fuertes elementales que empieza en K y termina en L.
El inverso de un colapso fuerte es una *expansión fuerte*, denotada por $L \nearrow\nearrow K$. Dos complejos simpliciales K, L tienen el mismo *tipo de homotopía (simple) fuerte* si existe una sucesión de colapsos y expansiones fuertes empezando en K y terminando en L. Se denotará por $K \curvearrowright L$.

Nota 6.1.23. Si v está dominado por v', el colapso fuerte elemental $K \searrow\searrow^e K \setminus v$ es un colapso simple $K \searrow K \setminus v$. En efecto, como $lk(v, K)$ es un cono entonces es colapsable, y como $st(v, K) = vlk(v, K)$ por el Lema 3.1.18, usando el Lema 6.1.8 se obtiene que $st(v, K) \searrow lk(v, K)$. Entonces,

como $K = (K \setminus v) \cup st(v, K)$ con $(K \setminus v) \cap st(v, K) = lk(v, K)$, concluimos por la Proposición 6.1.12 que $K \searrow K \setminus v$.
En particular, $|K|$ y $|K \setminus v|$ tienen el mismo tipo de homotopía por la Nota 6.1.4.

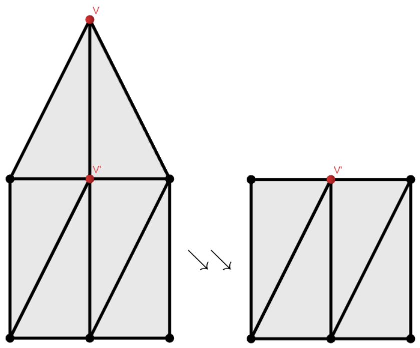

Figura 15: Colapso fuerte elemental.

Lema 6.1.24. *Sea K un complejo simplicial y v un vértice. Entonces $vK \searrow\searrow v$.*

Demostración. Por inducción en el número de vértices de K. Supongamos $K = \{w\}$, entonces está claro que $vK = vw \searrow\searrow^e v$. Supongamos que es cierto cuando K tiene $n - 1$ vértices. Sea ahora K un complejo simplicial con n vértices. Para todo $w \in Vert(K)$ se tiene, por el Lema 3.1.19 que

$$lk(w, vK) = vlk(w, K)$$

es un cono, luego w es un vértice dominado en vK y podemos hacer un colapso fuerte elemental:

$$vK \searrow\searrow^e (vK) \setminus w = v(K \setminus w)$$

donde la igualdad se tiene por el Lema 6.1.14. Por hipótesis de inducción, $v(K \setminus w) \searrow\searrow v$, y por tanto $vK \searrow\searrow v$. $\square$

Nota 6.1.25. Dos complejos simpliciales isomorfos tienen el mismo tipo de homotopía fuerte. En efecto, dado un isomorfismo simplicial $\psi : K \longrightarrow L$, $Vert(K) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $Vert(L) = \{\psi(v_1), \ldots, \psi(v_n)\}$. Ahora trabajamos considerando K y L como complejos abstractos, y consideramos nuevos vértices $v'_1, \ldots, v'_n$. Tomamos el complejo $K_1 = K \cup v'_1 st(v_1, K)$ en el que

$$lk(v'_1, K_1) = st(v_1, K) = v_1 lk(v_1, K)$$

es un cono. Por tanto, v'_1 es un vértice dominado por v_1 en K_1 y $K_1 \searrow\searrow K$. Además, se tiene que

$$lk(v_1, K_1) = v'_1 lk(v_1, K)$$

es un cono, y análogamente, al eliminar el vértice v_1, $K_1 \searrow\searrow \widetilde{K_1} = (K \setminus v_1) \cup v_1' lk(v_1, K)$. Así, $K \frown \widetilde{K_1}$.

Análogamente, para $\psi(v_1) \in L$, se define el complejo $L_1 = L \cup v_1' st(\psi(v_1), L)$. Se tiene que

$$lk(v_1', L_1) = st(\psi(v_1), L) = \psi(v_1) lk(\psi(v_1), L)$$

es un cono, y $L_1 \searrow\searrow L$. Además, se tiene que

$$lk(\psi(v_1), L_1) = v_1' lk(\psi(v_1), L)$$

es otro cono, y $L_1 \searrow\searrow \widetilde{L_1} = L - \psi(v_1) \cup v_1' lk(\psi(v_1), L)$. Así, $L \frown \widetilde{L_1}$.

Además, $\widetilde{K_1}$ y $\widetilde{L_1}$ son dos complejos simpliciales isomorfos mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \widetilde{K_1} &\longrightarrow \widetilde{L_1} \\ v_i &\longrightarrow \varphi_1(v_i) = \psi(v_i) \text{ para todo } i \neq 1 \\ v_1' &\longrightarrow v_1' \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso para los vértices restantes $v_2, \ldots, v_n \in K$, obtenemos sucesiones de complejos $\widetilde{K}_1, \ldots, \widetilde{K}_n$ y $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_n$ tale que

$$\begin{aligned} Vert(\widetilde{K}_i) &= \{v_1', \ldots, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n\} \\ Vert(\widetilde{L}_i) &= \{v_1', \ldots, v_i', \psi(v_{i+1}), \ldots, \psi(v_n)\} \end{aligned}$$

Además, $K \frown \widetilde{K}_i$ y $L \frown \widetilde{L}_i$ y existe un isomorfismo $\psi_i : \widetilde{K}_i \longrightarrow \widetilde{L}_i$ dado por $\psi_i(v_j') = v_j'$ para $j \leq i$, y $\psi_i(v_j) = \psi(v_j)$ si $j \geq i+1$. En particular, $K \frown \widetilde{K_n} = \widetilde{L_n} \frown L$.

Ahora relacionaremos los colapsos fuertes con la contigüidad definida en la Sección 5.2. Recordemos que $f \sim g$ denota que f y g están en la misma clase de contigüidad.

Definición 6.1.26. Una aplicación simplicial $\varphi : K \longrightarrow L$ es una *equivalencia fuerte* si existe $\psi : L \longrightarrow K$ tal que $\psi\varphi \sim id_K$ y $\varphi\psi \sim id_L$. Esta equivalencia fuerte se denotará por $K \sim L$.

Proposición 6.1.27. *Sea K un complejo simplicial minimal y sea $\varphi : K \longrightarrow K$ una aplicación simplicial que está en la misma clase de contigüidad que la identidad. Entonces, φ es la identidad.*

Demostración. Como φ está en la misma clase de contigüidad que la identidad, podemos suponer que es contigua a id_K. Sea $v \in K$ un vértice y sea $\sigma \in K$ un símplice maximal tal que $v \in \sigma$. Por ser aplicaciones contiguas, $\varphi(\sigma) \cup \sigma$ es un símplice, y por ser σ maximal se tiene que $\varphi(v) \in \varphi(\sigma) \cup \sigma = \sigma$. Por tanto, por ser σ arbitrario, todo símplice maximal que contiene a v también contiene a $\varphi(v)$. Entonces, como K es minimal, $\varphi(v) = v$, es decir, φ es la identidad. $\square$

Corolario 6.1.28. *Una equivalencia fuerte entre complejos minimales K y L es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $\varphi : K \longrightarrow L$ una equivalencia fuerte y $\psi : L \longrightarrow K$ tal que $\varphi\psi \sim id_L$, $\psi\varphi \sim id_K$. Como K y L son complejos simpliciales minimales, por la Proposición 6.1.27, $\varphi\psi = id = \psi\varphi$, es decir, son inversas simpliciales y, por tanto, son isomorfismos. $\square$

Proposición 6.1.29. *Sea K un complejo simplicial y sea $v \in K$ un vértice dominado por v'. Entonces, la inclusión $i : K \setminus v \hookrightarrow K$ es una equivalencia fuerte. En particular, si dos complejos K, L tienen el mismo tipo de homotopía fuerte (esto es, $K \curvearrowright L$), entonces $K \sim L$.*

Demostración. Definimos la aplicación

$$
\begin{aligned}
r : Vert(K) &\longrightarrow Vert(K \setminus v)\\
w &\longmapsto w \text{ si } w \neq v\\
v &\longmapsto v'
\end{aligned}
$$

Hay que probar que r es una aplicación simplicial y que $ir \sim id_K$, $ri \sim id_{K\setminus v}$.
Veamos que r es simplicial. Supongamos $\sigma \in K \setminus v$, está claro que $r(\sigma) = \sigma$. Sea entonces $\sigma \in K$ de modo que $v \in \sigma = (vw_1 \dots w_s)$. Se tiene que $(w_1 \dots w_s) \in lk(v, K)$, que es un cono sobre v'. Entonces $r(\sigma) = (v'w_1 \dots w_s)$ es un símplice de $lk(v, K) \subseteq K \setminus v$ (posiblemente con algún $w_i = v'$). Se tiene pues que r es una aplicación simplicial de K en $K \setminus v$.
Para la contigüidad, está claro que $ri = id_{K\setminus v}$. Además $ir \sim id_K$ pues, de acuerdo con lo anterior, $\sigma \cup r(\sigma) = \sigma$ si $\sigma \in K \setminus v$ y $\sigma \cup r(\sigma) = (vv'w_1 \dots w_s) \in st(v, K) = vlk(v, K)$ si $v \in \sigma$.
Sean ahora K, L dos complejos simpliciales con el mismo tipo de homotopía fuerte, entonces existe una secuencia de complejos $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ donde K_i colapsa o se expande a K_{i+1}. Para cada inclusión $K_i \hookrightarrow K_{i+1}$ ó $K_{i+1} \hookrightarrow K_i$ ya tenemos la demostración y reiterando este proceso se demuestran el resto de colapsos y expansiones, y por transitividad $K \sim L$. $\square$

Definición 6.1.30. El *núcleo* de un complejo simplicial K es un subcomplejo minimal $K_0 \subseteq K$ tal que $K \searrow\!\searrow K_0$.

Un complejo simplicial puede colapsar a dos subcomplejos sin caras libres que no sean isomorfos (ver el Ejemplo 6.1.6), sin embargo, si colapsa fuertemente a dos complejos minimales, entonces deben ser isomorfos, como veremos a continuación.

Teorema 6.1.31. *Todo complejo simplicial tiene un núcleo que es único salvo isomorfismos. Dos complejos simpliciales K y L tienen el mismo tipo de homotopía fuerte ($K \curvearrowright L$) si y solo si sus núcleos son isomorfos. El núcleo de un complejo simplicial se puede obtener eliminando puntos dominados uno a uno.*

Demostración. Sean $K_1, K_2 \subseteq K$ dos núcleos de K, entonces tienen el mismo tipo de homotopía fuerte y, por la Proposición 6.1.29 se tiene que $K_1 \sim K_2$. Como son complejos minimales, por el Corolario 6.1.28, son isomorfos.
Si K y L tienen el mismo tipo de homotopía fuerte, sus núcleos K_0, L_0 también tienen el mismo tipo de homotopía fuerte, y por lo anterior, K_0 y L_0 son isomorfos.
Recíprocamente, si K_0 y L_0 son isomorfos, por la Nota 6.1.25 tienen el mismo tipo de homotopía fuerte, y, por lo tanto, K y L tienen el mismo tipo de homotopía fuerte. $\square$

Proposición 6.1.32. *Sean K y L dos complejos simpliciales finitos. Entonces, $K * L$ es fuertemente colapsable si y solo si K ó L es fuertemente colapsable.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si K ó L es el complejo vacío, el resultado es trivial. Ahora, razonamos por inducción en el número de colapsos elementales. Supongamos $K * L \searrow\searrow^e *$, entonces, si $v \in K$ es un vértice dominado en $K * L$, tenemos, por el Lema 6.1.14 que $(K * L) \setminus v = (K \setminus v) * L = w$ con w un vértice. Por tanto, $K * L$ solo puede ser una arista de vértices v, w, es decir, $K = v, L = w$, y $K \searrow\searrow *$ y $L \searrow\searrow *$.

Supongamos cierto para $n - 1$ colapsos elementales y sea

$$K * L \searrow\searrow^e \underbrace{(K * L) \setminus v \searrow\searrow^e \cdots \searrow\searrow^e *}_{n-1 \text{ colapsos elementales}}$$

Si v' domina a v en K en el primer colapso fuerte elemental, tenemos por el Lema 3.1.19, $v'Z = lk(v, K * L) = lk(v, K) * L$, donde $Z = lk(v, K * L) \setminus v'$. Entonces, por el Lema 3.1.15, si $v' \in K$, se tiene que $lk(v, K)$ es un cono, exactamente $lk(v, K) = v'(Z \cap K)$, y entonces $K \searrow\searrow^e K \setminus v$.

Ahora bien, como $(K * L) \setminus v = (K \setminus v) * L$ por el Lema 6.1.14, la hipótesis de inducción nos dice que $K \setminus v$ ó L es fuertemente colapsable. Si lo es L no hay nada que hacer. Si $K \setminus v \searrow\searrow *$, entonces tenemos $K \searrow\searrow^e K \setminus v \searrow\searrow *$ y K es fuertemente colapsable.

Si $v \in L$ se razona de forma análoga y llegamos a que K ó L es fuertemente colapsable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que K es fuertemente colapsable, en el caso de que fuera L fuertemente colapsable se razonaría igual. Sea v un vértice dominado de K. Entonces, $lk(v, K)$ es un cono y, por el Lema 3.1.19, $lk(v, K * L) = lk(v, K) * L$ es un cono. Por tanto, v también está dominado en $K * L$. Por tanto, como K colapsa fuertemente a un vértice v_0, por el Lema 6.1.24, $K * L \searrow\searrow v_0 L \searrow\searrow v_0$ por ser $v_0 L$ un cono. □

6.2. Equivalencias de homotopía en A-espacios y equivalencias de homotopía fuerte en complejos simpliciales

En esta sección se estudiará la relación que determina el operador $\mathcal{K}$ entre el tipo de homotopía en espacios finitos y el tipo de homotopía fuerte en complejos simpliciales.

Recordemos que si K es un complejo simplicial, entonces su subdivisión baricéntrica $sd(K)$ se puede identificar con $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$, donde $\mathcal{K}$ y $\mathcal{X}$ son los operadores definidos en la Sección 4.2 y Sección 4.3. Por otro lado, si X es un espacio finito T_0, entonces su subdivisión baricéntrica se define como $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$. De esta forma, la subdivisión baricéntrica de un espacio finito T_0, X, consiste en todas las cadenas no vacías de X ordenadas por inclusión.

Teorema 6.2.1.

1. *Si dos espacios finitos T_0, X e Y, son homotópicamente equivalentes, sus complejos simpliciales asociados, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$, tienen el mismo tipo de homotopía fuerte.*

2. *Si dos complejos simpliciales, K y L, tienen el mismo tipo de homotopía fuerte, sus espacios finitos asociados, $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(L)$, son homotópicamente equivalentes.*

Demostración.

1. Supongamos $f : X \longrightarrow Y$ una equivalencia de homotopía entre espacios finitos T_0, con una inversa homotópica $g : Y \longrightarrow X$. Por la Proposición 5.2.11, $\mathcal{K}(g)\mathcal{K}(f) \sim id_{\mathcal{K}(X)}$ y $\mathcal{K}(f)\mathcal{K}(g) \sim id_{\mathcal{K}(Y)}$. Por tanto, $\mathcal{K}(X) \sim \mathcal{K}(Y)$.

2. Si K, L son dos complejos simpliciales con el mismo tipo de homotopía fuerte, existen $\varphi : K \longrightarrow L$ y $\psi : L \longrightarrow K$ tales que $\psi\varphi \sim id_K$, $\varphi\psi \sim id_L$. Por la Proposición 5.2.12, $\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \longrightarrow \mathcal{X}(L)$ es una equivalencia de homotopía con inversa homotópica $\mathcal{X}(\psi)$.

□

Más precisamente, para la relación entre los colapsos fuertes de complejos simpliciales y reducción por puntos eliminables (ver la Definición 5.2.1) tenemos el siguiente teorema del que damos una demostración alternativa a la dada en [3] y que solo hace uso de la noción de punto eliminable.

Teorema 6.2.2.

1. *Sea X un espacio finito T_0, y sea $Y \subseteq X$. Si X se reduce a Y, entonces $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow \mathcal{K}(Y)$.*

2. *Sea K un complejo simplicial y sea $L \subseteq K$. Si $K \searrow\searrow L$, entonces $\mathcal{X}(K)$ se reduce a $\mathcal{X}(L)$.*

Demostración.

1. Supongamos que $Y = X - \{x\}$ donde x es un punto eliminable ascendentemente (el caso en el que sea un punto eliminable descendentemente es análogo). Por definición, $st(x, \mathcal{K}(X)) = \{\sigma \in \mathcal{K}(X) : \exists \tau \geq \sigma \text{ con } x \in \tau\}$. Entonces, τ visto en X corresponde con una cadena ordenada
$$\tau = (x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_s).$$
Como $x \in \tau$, existe un $x_i \in \tau$ de forma que $x_i = x$, es decir:
$$\tau = (x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i = x \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_s).$$
Como x es un punto eliminable ascendentemente, existe $y \in X$ tal que $x \leq y \leq x_{i+1}$, por tanto tenemos la cadena
$$\tau' = (x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i = x \leq y \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_s),$$
de forma que $\tau' \geq \tau \geq \sigma$. Usando el Lema 4.2.1 se tiene que $lk(x, \mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(U_x - \{x\}) * \mathcal{K}(\overline{\{x\}} - \{x\})$ y $\mathcal{K}(\overline{\{x\}} - \{x\})$ es un cono aZ. Entonces, $lk(x, \mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(U_x - \{x\}) * a * Z =$

$a * (\mathcal{K}(U_x - \{x\}) * Z)$ es un cono (ver Nota 3.1.11) y existe un colapso fuerte elemental $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow^e \mathcal{K}(X) \setminus x$. Pero $\mathcal{K}(X) \setminus x$ son todos los símplices de $\mathcal{K}(X)$ que no contienen a x, es decir, visto en espacios finitos, son todas las cadenas ordenadas que no contienen a x, y por tanto las cadenas en $Y = X - \{x\}$. Así, $\mathcal{K}(X) \setminus x = \mathcal{K}(Y)$ y por tanto $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow^e \mathcal{K}(Y)$.

Para el caso en el que se eliminen n puntos eliminables, se aplica este proceso reiteradamente y se llega a $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow \mathcal{K}(Y)$.

2. Basta probarlo para $K \searrow\searrow^e L$. Sea $v \in K$ un vértice dominado por v' de manera que $lk(v, K) = v'Z$ un cono con $Z = lk(v, K) \setminus v'$ y $L = K \setminus v$. Sea $k = dimZ$ y para cada $0 \leq i \leq k$ sea $\mathcal{P}_i(Z) = \{\sigma \in Z : dim\sigma = i\}$ y $\mathcal{R}_i(Z) = \{v\sigma : \sigma \in \mathcal{P}_i(Z)\}$. Obsérvese que $Z = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{P}_i(Z)$. Para cada $\sigma \in \mathcal{P}_k(Z)$, tenemos que el símplice $vv'\sigma$ es maximal en K. Además, $v\sigma$ es cara libre de $vv'\sigma$, por lo que $v\sigma$ es eliminable ascendentemente en $\mathcal{X}(K)$ (ver Figura 16, donde σ_1, σ_2 son principales y $\tau \leq \sigma_1, \sigma_2$).

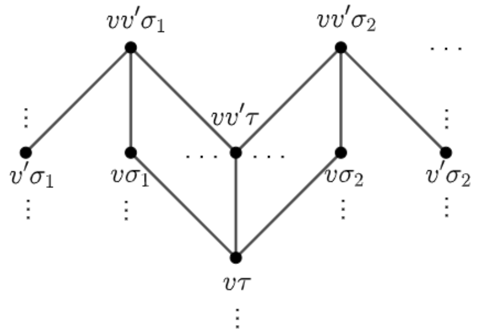

Figura 16.

Sea $Y_k = \mathcal{X}(K) - \mathcal{R}_k(Z)$. Ahora bien, para cada $\tau \in \mathcal{P}_{k-1}(Z)$, tenemos que $v\tau \leq \eta$ en Y_k, lo que implica que, al no estar los $v\sigma$ con $\tau \leq \sigma \in \mathcal{P}_k(Z)$, $\eta = vv'\tau$ o bien $\eta = vv'\sigma$ con $\tau \leq \sigma$. Por tanto, $v\tau$ es eliminable ascendentemente en Y_k (ver Figura 17).

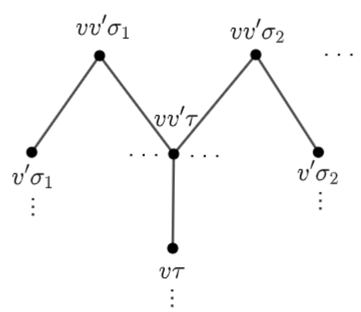

Figura 17.

Consideremos

$$Y_{k-1} = Y_k - \mathcal{R}_{k-1}(Z) = \mathcal{X}(K) - (\mathcal{R}_k(Z) \cup \mathcal{R}_{k-1}(Z)).$$

Reiteramos este proceso hasta llegar con $\mathcal{R}_{-1}(Z) = \{v\}$ para $\mathcal{P}_{-1}(Z) = \emptyset$ a que

$$Y_{-1} = \mathcal{X}(K) - \left(\bigcup_{j=-1}^{k} \mathcal{R}_j(Z) \right)$$

se ha obtenido a partir de $\mathcal{X}(K)$ por reducciones sucesivas que suprimen los conjuntos $\mathcal{R}_k(Z)$ de puntos eliminables ascendentemente.
Observamos, además, que la diferencia $\mathcal{A} = Y_{-1} - \mathcal{X}(K \setminus v)$ es la unión

$$\mathcal{A} = \left\{vv'\right\} \cup \left\{vv'\tau : \tau \in Z\right\}.$$

Además, en Y_{-1}, solo v' es menor que vv', por lo que vv' es un punto eliminable descendentemente en Y_{-1}. Tenemos

$$Y_{-1} \searrow\searrow Y_{-2} = Y_{-1} - \left\{vv'\right\}.$$

Dado un vértice $w \in \mathcal{P}_0(Z)$, la única arista del borde del triángulo $vv'w$ que queda en Y_{-2} es $v'w$, por lo que $vv'w$ es eliminable descendentemente en Y_{-2}, y llegamos a

$$Y_{-3} = Y_{-2} - \left\{vv'w : w \in \mathcal{P}_0(Z)\right\}.$$

Reiterando este proceso llegamos a que

$$Y_{-1} - \mathcal{A} = \mathcal{X}(K \setminus v)$$

se ha obtenido de Y_{-1} por reducciones sucesivas que suprimen los conjuntos $\{vv'\sigma; \sigma \in \mathcal{P}_k(Z)\}$ de puntos eliminables descendentemente.
Por tanto llegamos a que $\mathcal{X}(K)$ se reduce a $\mathcal{X}(K \setminus v)$ por reducciones sucesivas.

□

Corolario 6.2.3. *Si X es un espacio finito T_0 que es contráctil, entonces también lo es X'.*

Demostración. Si X es contráctil entonces por Teorema 6.2.2 (1), $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow *$, y por tanto, por Teorema 6.2.2 (2), $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ es contráctil. □

Proposición 6.2.4. *Sea X un espacio finito T_0. Entonces X es un espacio minimal si y solo si $\mathcal{K}(X)$ es un complejo simplicial minimal.*

Demostración. Si X no es minimal, tiene un punto eliminable x y por tanto $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow \mathcal{K}(X - \{x\})$ por el Teorema 6.2.2. Por tanto $\mathcal{K}(X)$ no es minimal.
Recíprocamente, veamos que si X es minimal entonces $\mathcal{K}(X)$ es minimal. En efecto, si $\mathcal{K}(X)$ no es minimal, sea $x \in X$ un vértice de $\mathcal{K}(X)$ dominado por otro vértice $x' \in X$; esto es, $lk(x, \mathcal{K}(X)) = x'Z$ es un cono sobre un subcomplejo $Z = lk(x, \mathcal{K}(X)) \setminus x'$. En particular, la arista xx' está en $\mathcal{K}(X)$ y por ello $x < x'$ ó $x' < x$.

Supongamos $x < x'$ (el otro caso es análogo). Como x está dominado por x', todo símplice principal $\sigma \in \mathcal{K}(X)$ que contenga a x también contiene a x'. Por definición, $\sigma \subseteq X$ es una cadena maximal $x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_s$, donde $x_i = x$ para algún i y $x' = x_j$ con $j > i$.

Afirmamos que para todo $y \in X$ con $y > x_{j-1}$ se tiene $y \geq x_j = x'$ y así x_{j-1} es un punto eliminable hacia arriba en X y este espacio no sería minimal. Para demostrar la afirmación obervamos que toda cadena maximal conteniendo a $x_0 < x_1 < \ldots x_i = x < \ldots < x_{j-1} < y$ debe contener a $x' = x_j$, lo que nos lleva a $x' = x_j \leq y$ pues $y < x_j$ nos dice que $x_0 < x_1 < \ldots x_i = x < \ldots < x_{j-1} < y < x_j \ldots < x_s$ sería una cadena más larga que σ, lo que contradice su maximalidad. □

Nota 6.2.5. El ser K minimal no implica que $\mathcal{X}(K)$ lo sea. En efecto el complejo K de la Figura 18 es colapsable pero no tiene ningún vértice dominado. Esto es, es minimal, pero en $\mathcal{X}(K)$ las aristas v_0v_1, v_0v_2 y v_1v_2 son eliminables hacia arriba pues son las caras libres de los triángulos $v_0v_1w_1$, $v_0v_2w_2$ y $v_1v_2w_0$, respectivamente.

Obsérvese que, en general, si $\mathcal{X}(K)$ es minimal entonces ningún símplice principal de K puede tener caras libres pues estas serían puntos eliminables hacia arriba en $\mathcal{X}(K)$. En particular, si $\mathcal{X}(K)$ es minimal, entonces K es minimal, pues si $v \in K$ es un vértice dominado por otro vértice v', tenemos que $lk(v, K) = v'Z$ es un cono y todo símplice principal σ en $v'Z$ solo es cara del símplice $v\sigma$ que es principal en K.

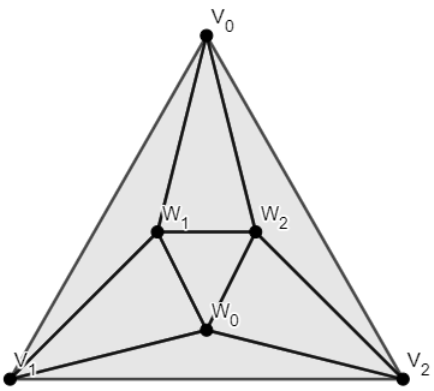

Figura 18.

La demostración que sigue está basada en el Lema 6.1.21 y es una variación con importantes cambios de la original en [3].

Teorema 6.2.6. *Sea K un complejo simplicial finito. Entonces, K es fuertemente colapsable si y solo si $sd(K)$ es fuertemente colapsable.*

Demostración. Si $K \searrow\searrow *$, entonces $\mathcal{X}(K)$ es contráctil y $sdK = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) \searrow\searrow *$ por el Teorema 6.2.2.
Supongamos ahora que K es un complejo simplicial tal que $sdK \searrow\searrow *$, y sea L un núcleo de K.

Entonces $K \searrow\searrow L$ y por el Teorema 6.2.2, $sdK \searrow\searrow sdL$. Por tanto L es minimal por ser un núcleo y sdL es fuertemente colapsable por el Teorema 6.1.31. Sea $L_0 = sdL, L_1, L_2, \ldots, L_n = *$ una secuencia de subcomplejos de sdL tal que existe un colapso fuerte elemental de L_i a L_{i+1} para todo $0 \leq i < n$. Vamos a demostrar que en este caso L se reduce a un punto.

Primero destacamos que L_i es lleno en L_{i-1} para todo $0 < i \leq n$. En efecto, si $L_{i-1} \searrow\searrow^e L_i$, entonces $L_i = L_{i-1} \setminus w$ con w un vértice dominado en L_{i-1}. Ahora, aplicando el Lema 6.1.21 a $L_0 \searrow\searrow^e L_1$ tenemos que todos los baricentros de los símplices principales de L están en L_1, además no se puede hacer el colapso fuerte elemental por un vértice v de L, pues entonces v estaría dominado en L, pero L es minimal. Así pues L_1 contiene a todos los baricentros de los símplices principales de L, así como todos sus vértices.

Aplicando este proceso recurrentemente llegamos a $L_n = *$, por lo que L se reduce a un vértice, y así K es fuertemente colapsable. □

Corolario 6.2.7. *Sea X un espacio finito T_0. Entonces, X es contráctil si y solo si X' es contráctil.*

Demostración. Por el Corolario 6.2.3 tenemos la implicación directa. Recíprocamente, veamos que si X' es contráctil, entonces también lo es X. Sea $Y \subseteq X$ un núcleo de X. Por Teorema 6.2.2 (1), $\mathcal{K}(X) \searrow\searrow \mathcal{K}(Y)$, y por Teorema 6.2.2 (2), $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ se reduce a $Y' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(Y))$ mediante reducciones sucesivas. Si X' es contráctil, también lo es Y'. De nuevo por el Teorema 6.2.2, $\mathcal{K}(Y') = \mathcal{K}(Y)'$ es fuertemente colapsable. Por el Teorema 6.2.6, $\mathcal{K}(Y)$ es fuertemente colapsable. Por la Proposición 6.2.4 y por ser Y un núcleo de X, $\mathcal{K}(Y)$ es un complejo simplicial minimal, y por tanto $\mathcal{K}(Y) = *$. Así, Y es un único punto y X es contráctil. □

Corolario 6.2.8.

1. *Sea X un espacio finito T_0. Entonces, X es contráctil si y solo si $\mathcal{K}(X)$ es fuertemente colapsable.*

2. *Sea K un complejo simplicial finito. Entonces K es fuertemente colapsable si y solo si $\mathcal{X}(K)$ es contráctil.*

Demostración.

1. Como X es contráctil, por Teorema 6.2.2 (1) se tiene que $\mathcal{K}(X)$ colapsa fuertemente a punto. Recíprocamente, si $\mathcal{K}(X)$ es fuertemente colapsable, entonces $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ es contráctil por Teorema 6.2.2 (2). Usando ahora el Corolario 6.2.7, X es contráctil.

2. Como K es fuertemente colapsable, por Teorema 6.2.2 (2) se tiene que $\mathcal{X}(K)$ se reduce a un punto. Recíprocamente, si $\mathcal{X}(K)$ es contráctil, por por Teorema 6.2.2 (1), $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = sdK$ colapsa fuertemente a punto, y por el Teorema 6.2.6 se tiene que K es fuertemente colapsable.

□

CAPÍTULO 7

Colapsos fuertes infinitos y la noción de homotopía para A-espacios localmente finitos

Nuevas contribuciones en el estudio de la topología de los A-espacios han extendido resultados ya conocidos para espacios finitos a A-espacios infinitos (ver [6] y [16]).

Con este último capítulo queremos plantear la posibilidad de extender los resultados de [3] expuestos detalladamente en el Capítulo 6 a cierta clase de A-espacios finitos.

Esa clase es la de los llamados A-espacios localmente finitos y corresponde a la clase de posets infinitos más estudiada en la teoría del orden.

7.1. A-espacios localmente finitos

Definición 7.1.1. Un poset $(X, \leq)$ se dice *localmente finito* si para todo $x \in X$ tanto el ideal principal generado $\downarrow x$ como el filtro principal $\uparrow x$ generado por él son finitos.
Un A-espacio se dice *localmente finito* si su poset asociado lo es.

El siguiente lema es fácil de demostrar a partir de las propiedades básicas del orden de especialización de una A-topología.

Lema 7.1.2. *Sea X un A-espacio X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es localmente finito.*
2. *U_x y $\overline{\{x\}}$ son finitos para todo $x \in X$.*
3. *$\overline{U_x}$ es finito para todo $x \in X$.*

Sobre la compacidad y conexión de los A-espacios localmente finitos tenemos las dos propiedades siguientes.

Lema 7.1.3. *Sea X un A-espacio T_0 localmente finito. Entonces un conjunto $Z \subseteq X$ es compacto si y solo si es finito.*

Demostración. Supongamos que Z es compacto. Entonces por el Teorema 2.3.12 el conjunto $M = Max(Z)$ es finito y para todo $z \in Z$ existe $m \in M$ con $z \leq m$. Por ser X localmente finito solo existe una cantidad finita de elementos menores que cada $m \in M$ en X y por ello Z es finito. El recíproco es trivial. □

Lema 7.1.4. *Todo A-espacio T_0 localmente finito conexo es numerable*

Demostración. Recordemos que la conexión de X es equivalente a su conexión por caminos. Dado $x_0 \in X$, sea $X_n \subseteq X$ el conjunto de los $x \in X$ que se pueden unir a x_0 por una secuencia de hasta n elementos comparables. Entonces, $X_0 = \{x_0\}$ y $X_n = \{x; x$ es comprable a algún $y \in X_{n-1}\}$. De acuerdo con la finitud local, los elementos comparables a cualquier $x \in X$ forman un conjunto finito y así podemos deducir inductivamente que cada X_n es finito, y por tanto $X = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$ es numerable. □

Otra propiedad también usada para posets infinitos es la siguiente.

Lema 7.1.5. *Un poset $(X, \leq)$ se dice que cumple la* condición de cadenas finitas *(abreviado a* c.c.f.*) si para todo punto $x \in X$ toda cadena que lo contenga es finita.*

Lema 7.1.6. *Si $(X, \leq)$ es localmente finito entonces cumple la c.c.f.*

Ejemplo 7.1.7.

1. La recta de Khalimsky es localmente finita.
2. Sea $X = \vee_{n=1}^{\infty} X_n$ la unión por el origen de copias disjuntas de intervalos de longitudes crecientes de números enteros positivos $X_n = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x \leq n\}$. Si damos sobre X el orden natural, el poset $(X, \leq)$ cumple la c.c.f. pero no es localmente finito (ver Figura 19).

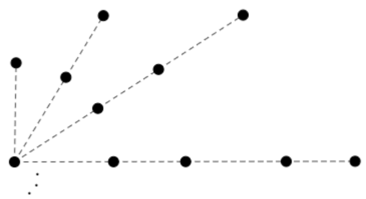

Figura 19.

7.2. Los operadores $\mathcal{K}$ y $\mathcal{X}$ y la finitud local

En Topología Simplical los complejos infinitos más estudiados son también denominados localmente finitos y tienen la siguiente definición:

Definición 7.2.1. Un complejo simplicial K se dice *localmente finito* si el conjunto de símplices que contienen a uno dado es finito.

El siguiente lema nos da definiciones equivalentes a la anterior.

Lema 7.2.2. *Si K es un complejo simplicial, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K es localmente finito.*
2. *Para todo símplice $\sigma \in K$, $lk(\sigma, K)$ es finito.*
3. *Para todo vértice $v \in K$, $lk(v, K)$ es finito.*
4. *Para todo punto $x \in |K|$, $lk(x, K)$ es finito.*
5. *El poliedro subyacente $|K|$ es localmente compacto.*

A partir del lema anterior y del Lema 4.2.1 se sigue inmediatamente el siguiente resultado.

Lema 7.2.3. *El operador $\mathcal{K}$ lleva A-espacios localmente finitos en complejos localmente finitos. Análogamente el operador $\mathcal{X}$ lleva complejos localmente finitos en A-espacios localmente finitos.*

Más aún, la aplicación canónica $\psi_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$ en (4.1) está definida para el caso de A-espacios localmente finitos y E. Wosfey ([16]) probó que el teorema de McCord se extiende a A-espacios localmente finitos. Más precisamente,

Teorema 7.2.4. *Sea X un A-espacio localmente finito. Entonces su aplicación canónica $\psi = \psi_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$ es una equivalencia débil de homotopía.*

7.3. Colapsos y colapsos fuertes infinitos

Para complejos localmente finitos existe en la literatura de la Topología Simplical una bien conocida noción de colapso infinito debida a L.C. Siebenmann que pasamos a detallar.

Definición 7.3.1. Sea K un complejo simplicial localmente finito y $L \subseteq K$ un subcomplejo. Se dice que hay un *colapso propio elemental* de K a L, denotado $K \searrow^{pe} L$, si $K = L \cup (\cup_{i \in I} C_i)$, donde $I \subseteq \mathbb{N}$ (posiblemente infinito), para $i, j \in I$, $C_i \cap C_j \subseteq L$ y $C_i \searrow^{pe} C_i \cap L$. para todo $i, j \in I$.

Se dirá que hay un *colapso propio* de K a L, denotado $K \searrow^p L$, si existe una secuencia finita $K = K_0, \ldots, K_n = L$ donde K_i es un colapso propio elemental de K_{i-1} para $1 \leq i \leq n$.

Nota 7.3.2. Nótese que por medio de una secuencia infinita de colapsos podemos llegar al conjunto vacío. Así para la semirrecta $\mathbb{R}_{\geq 0}$, triangulada por los intervalos $[n, n+1]$ $(n \geq 0)$ tenemos la sucesión de colapsos

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \searrow^{pe} [1, \infty) \searrow^{pe} \cdots \searrow^{pe} [n, \infty) \searrow^{pe} [n+1, \infty) \searrow^{pe} \cdots \searrow^{pe} \ldots \emptyset.$$

Es natural modificar la definición anterior para para dar la versión de Siebenmann de los colapsos fuertes. Esto es,

Definición 7.3.3. Sea K un complejo simplicial localmente finito y $L \subseteq K$ un subcomplejo. Se dice que hay un *colapso fuerte propio elemental* de K a L, $K \searrow\searrow^{pe} L$ si $K = L \cup (\cup_{i \in I} C_i)$, donde $I \subseteq \mathbb{N}$ (posiblemente infinito), para $i, j \in I$, $C_i \cap C_j \subseteq L$ y $C_i \searrow\searrow^{pe} C_i \cap L$ para todo $i, j \in I$.

Se dirá que hay un *colapso fuerte propio* de K as L, denotado $K \searrow\searrow^p L$, si existe una secuencia finita $K = K_0, \ldots, K_n = L$ donde K_i es un colapso fuerte propio elemental de K_{i-1} para $1 \leq i \leq n$.

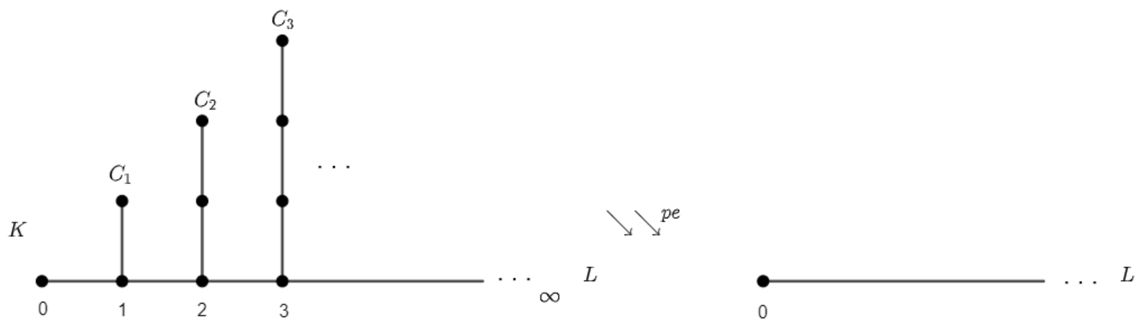

Figura 20: Un colapso propio fuerte elemental de K a L.

7.4. Aplicaciones propias entre A-espacios

Aunque la compacidad es una propiedad con muchas e importantes consecuencias, los espacios no compactos de interés no son escasos, comenzando por los espacios euclídeos. La ausencia de compacidad en los espacios lleva aparejada la necesidad de un análisis del "infinito"de estos. Para ello los espacios no compactos son dotados de un infinito topologizado y las aplicaciones a considerar son aquellas "continuas en el infinito".

El método habitual es topologizar el infinito es por medio de la llamada *compactificación de Alexandrov* o por un punto que vimos en la Sección 1.4. Las diferencias $X - C$, con C cerrado y compacto, son llamadas *entornos básicos del infinito* en X.

Con estos entornos la continuidad en el infinito queda garantizada las llamadas aplicaciones propias. Recordemos que una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice *propia* si para cada $C \subseteq Y$ cerrado y compacto se tiene que $f^{-1}(C)$ es también cerrado y compacto en X.

Nótese que $f^{-1}(C)$ ya es cerrado por continuidad. Habitualmente se trabaja con espacios de Hausdorff por lo que la definición de aplicación propia más frecuente solo exige que $f^{-1}(C)$ sea compacto para todo compacto $C \subseteq Y$. La definición de aplicación propia queda justificada por la siguiente caracterización.

Lema 7.4.1. *Una aplicación $f : X \to Y$ es propia si y solo si su extensión $f^+ : X^+ \to Y^+$ con $f^+(\infty) = \infty$ es continua.*

Como consecuencia inmediata del Lema 7.1.3 tenemos la siguiente caracterización de las aplicaciones propias (una demostración puede verse en [7]).

Lema 7.4.2. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre A-espacios T_0 localmente finitos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *f es propia*
2. *Para todo conjunto finito y cerrado $Z \subseteq Y$, $f^{-1}(Z)$ es finito.*
3. *Para todo conjunto finito $Z \subseteq Y$, $f^{-1}(Z)$ es finito.*

Nota 7.4.3. Como habíamos observado en el Capítulo 5, la compactificación de Alexandrov de un A-espacio no es un A-espacio. Es el mismo fenómeno que ocurre en Topología Simplicial donde una triangulación de la semirrecta euclídea $\mathbb{R}_{\geq 0} \cong [0, 1)$ no se puede extender a una triangulación de su compactificación $\mathbb{R}^+_{\geq 0} \cong [0, 1]$.

La demostración de Wosfey del Teorema de McCord en [16] da en realidad el resultado más fuerte establecido el siguiente teorema (ver [7] para una demostración).

Teorema 7.4.4. *Sea X un A-espacio localmente finito. Entonces la aplicación $\psi_X : \mathcal{K}(X) \to X$ es una equivalencia de homotopía propia débil.*

Esto es, ψ_X es una aplicación propia y para todo complejo localmente finito K, ψ_X induce una biyección entre conjuntos de clases de homotopía propia $[|K|, |\mathcal{K}(X)|]_p \cong [|K|, X]_p$ (*equivalencia de homotopía propia débil*).

Por una *homotopía propia* se entiende una homotopía que es aplicación propia. Una *equivalencia de homotopía propia* es una aplicación propia $f : X \to Y$ tal que existe otra aplicación propia $g : Y \to X$ de forma que $f \circ g$ y $g \circ f$ son propiamente homotópicas a las correspondientes identidades. Es inmediato que toda equivalencia de homotopía propia es una equivalencia de homotopía propia débil.

7.5. Problemas abiertos sobre la noción de homotopía (propia) entre A-espacios (localmente finitos)

Ya vimos en el Capítulo 5 que una homotopía entre aplicaciones $f, g : X \to Y$ donde X es un espacio finito puede ser representada por una secuencia de aplicaciones comparables con el orden natural de Y^X.

También vimos que esto no ocurre si X es un A-espacio infinito ya que la semirrecta de Khalimsky $K_{\geq 0}$ es contráctil pero no se puede hacer la contracción en un número finito de pasos. Si en Topología Simplicial consideramos el poliedro asociado a $K_{\geq 0}$ es la semirrecta $\mathbb{R}_{\geq 0}$, que también es contráctil pero no podemos hacer la contracción por medio de colapsos propios. Esto nos lleva a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué noción de homotopía (propia) en la clase de los A-espacios localmente finitos hace que el operador $\mathcal{K}$ lleve las equivalencias respecto a esas homotopías en las equivalencias definidas por los colapsos fuertes propios?

2. ¿Esa misma noción hace que el operador $\mathcal{X}$ lleve la noción de equivalencia por colapsos fuertes propios en A-espacios equivalentes para ella?

3. ¿Qué relaciones hay entre las homotopías buscada en las preguntas anteriores y las K^*-homotopías definidas en el Capítulo 5?

La solución a los problemas 1. y 2. daría una extensión del Teorema 6.2.1 a los A-espacios localmente finitos.

Bibliografía

[1] P.S. Alexandrov. *Math. Sbornik*, Diskrete Raume, 1937. 501-519.

[2] M.K. Agoston. *Algebraic Topology: A first course.* Marcel Dekker Inc, New York, 1976.

[3] J.A. Barmak. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications.* Lecture Notes in Mathematics 2032, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

[4] K.A. Hardie and J.J.C. Vermeulen. *Homotopy theory of finite and locally finite T_0 spaces.* Expo. Math., 1993.

[5] E.D. Khalimsky, R. Kopperman, P. R. Meyer. *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets.* Topol. Its Appl. 36(1990), 1-17.

[6] M.J. Kukiela. *On homotopy types of Alexandroff spaces.* Order, 27(2010), 9-21.

[7] A. Luque. *Espacios de Alexandrov: el puente entre poliedros y conjuntos ordenados.* Trabajo Fin de Grado. Tutor: Antonio Quintero Toscano, 2014.

[8] J.P. May. *Finite spaces and larger contexts. Preliminary draft submited to the AMS*, 2014. Finite spaces and larger contexts. Preliminary draft submited to the AMS PDF.

[9] J.P. May. *Finite topological spaces.* Notes for REU, 2003. Finite topological spaces PDF.

[10] M. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math., 1966. (33): 465-474.

[11] J.M. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.

[12] J.R. Munkres. *Topología.* Pearson Educación, 2002.

[13] G. Raptis. *Homotopy theory of posets.* Homology Homotopy Appl. 12 (2010), 211–230.

[14] R.E. Stong. *Finite topological spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 123(1966), 325-340.

[15] A.W. Tucker. *Cell spaces*, Ann. of Math., 1936. 92-100.

[16] E. Wofsey. *On the algebraic topology of finite spaces.* Preprint, 2008.