Trabajo Fin de Grado

HIPERCICLICIDAD E HIPERCICLICIDAD FRECUENTE

22 de junio de 2022

Pablo Acuaviva Huertos

Universidad de Sevilla

Departamento de Análisis Matemático

Directores: María del Carmen Calderón Moreno
José Antonio Prado Bassas

Índice general

Abstract

This work serves as an introduction to hypercyclicity, focusing on hypercyclicity in linear dynamical systems, with a detour to chaotic systems and hypercyclicity for sequences. We include a compendium of some of the most relevant developments in the field. The work finishes with a brief overview of frequent hypercyclicity, its similarities and differences with the original concept of hypercyclicity.

Resumen

Este trabajo sirve como introducción a la hiperciclicidad de aplicaciones, centrándose principalmente en el caso de sistemas lineales y con un breve resumen de sistemas caóticos e hiperciclicidad en sucesiones de funciones. Se incluye una recopilación de algunos de los resultados más importantes en esta rama. Para finalizar, se introduce el concepto de hiperciclicidad frecuente y se estudian las similitudes y diferencias con la hiperciclicidad.

Introducción

> *"Chaos theory, a more recent invention, is equally fertile ground for those with a bent for abusing sense. It is unfortunately named, for 'chaos' implies randomness. Chaos in the technical sense is not random at all. It is completely determined, but it depends hugely, in strangely hard-to-predict ways, on tiny differences in initial conditions."*
>
> (Richard Dawkins [23]— Science in the Soul: Selected Writings of a Passionate Rationalist)

El caos en un sistema implica que este se comporta de manera irregular y difícil de predecir. Su comportamiento se ve alterado en gran medida por pequeñas perturbaciones. Uno de los elementos más importantes del caos es la existencia de puntos hipercíclicos, es decir, puntos que *visitan* todo el espacio.

Generalmente el caos ha sido relacionado con sistemas no lineales, ya que se ha pensado que los sistemas lineales se comportan de manera simple y fácil de predecir. Sin embargo, hoy sabemos que dicha afirmación es falsa.

En 1929 G.D. Birkhoff [13] obtuvo una función entera en el plano complejo tal que su conjunto de trasladadas es denso en el espacio de funciones enteras. Posteriormente, en 1952, MacLane [40] obtuvo un resultado similar para el operador derivada y, en 1969, S. Rolewicz [48] probó otro resultado semejante para *shifts* lineales.

En efecto, los sistemas lineales exhibían una de las condiciones principales para el caos. En 1991 G. Godefroy y J.H. Shapiro [30] propusieron la definición de Devaney para caos y probaron que los tres operadores anteriores eran, de hecho, caóticos en este sentido.

Desde entonces, el estudio de la hiperciclicidad y el caos en sistemas lineales ha experimentando una gran explosión, dando lugar a resultados sorprendentes. En este trabajo nos centraremos principalmente en uno de los aspectos necesarios del caos, la hiperciclicidad.

El Capítulo 1 servirá para tratar las herramientas necesarias a lo largo del trabajo. Recordaremos algunos resultados elementales de Topología y Análisis Complejo. Además, se introducirán los conceptos de Análisis Funcional necesarios para el resto de capítulos.

En el Capítulo 2, nos encaminamos al trabajo propiamente dicho. Introducimos los conceptos de hiperciclicidad, tanto en sistemas dinámicos como en un ámbito general para sucesiones de aplicaciones. Se expondrá brevemente la noción de transitividad y su relación con la hiperciclicidad, obteniendo así un primer criterio para la hiperciclicidad. Finalmente, se tratará la definición de caos de Devaney y se darán algunos ejemplos de sistemas caóticos.

A partir del Capítulo 3, nos centraremos en sistemas dinámicos lineales. Introduciremos el concepto y veremos cómo los tres operadores clásicos son hipercíclicos. Se estudiarán diversas propiedades de los sistemas dinámicos lineales, llegando, entre otros resultados, al celebrado Teorema de Ansari. Asimismo, probaremos que, en sistemas lineales, la hiperciclicidad y, por tanto, el caos, son fenómenos exclusivos de los espacios infinito-dimensionales.

Continuamos en el Capítulo 4 con los distintos criterios existentes para la hiperciclicidad en el caso lineal. Seguiremos una línea ligeramente distinta al desarrollo histórico, que nos servirá para encajar adecuadamente los criterios y ver como estos pueden surgir uno tras otro. Comenzaremos con el criterio de Godefroy-Saphiro y seguiremos por los diferentes criterios hasta alcanzar el famoso Criterio de Hiperciclicidad en una de sus versiones más conocidas.

Finalmente, para concluir el trabajo, en el Capítulo 5 se darán unas pequeñas pinceladas sobre hiperciclicidad frecuente. Propiedad que indica que existen puntos en el sistema que no solamente *visitan* el espacio al completo, sino que lo hacen *frecuentemente*. Veremos que los tres operadores clásicos son, de hecho, frecuentemente hipercíclicos. Se expondrá el Criterio de Hiperciclicidad Frecuente como análogo al Criterio de Hiperciclicidad previamente estudiado. Para concluir, se mencionaran brevemente algunas similitudes y diferencias entre ambos conceptos.

Capítulo 1

Preliminares

"The enchanting charms of this sublime science reveal only to those who have the courage to go deeply into it."

(Carl Friedrich Gauss [27]— Letter to Sophie, 1807)

1.1. Propiedades topológicas básicas

Para comenzar, introduciremos algunas nociones topológicas básicas que nos serán necesarias en adelante. Recordemos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice T_1 cuando para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ pero $y \notin U$. Necesitamos también recordar la noción de punto aislado.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico, diremos que $x \in X$ es un* ***punto aislado*** *si $\{x\}$ es abierto en X. Sea S un subconjunto de X, diremos que x es un* ***punto aislado de*** *S si existe un entorno abierto U de X tal que $S \cap U = \{x\}$.*

Además diremos que un subconjunto $S \subset X$ es **discreto** si todo $x \in S$ es un punto aislado de S. Dado un conjunto $A \subset X$ denotaremos por $\mathring{A}$ al interior de A en la topología. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. *Sea X un espacio topológico T_1 y sin puntos aislados. Entonces todo conjunto finito es cerrado con interior vacío.*

Demostración. Notemos que para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado, al ser el espacio T_1, y con interior vacío, pues en caso contrario sería un punto aislado. Por tanto cada subconjunto finito de X debe ser cerrado. Veamos ahora que tiene interior vacío. Supongamos $F \subset X$ finito con interior no vacío. Entonces $\mathring{F}$ es abierto finito, por lo que también es un cerrado con al menos dos puntos, ya que en caso contrario tendríamos nuevamente puntos aislados. Sea un conjunto abierto no vacío $U \subset \mathring{F}$. U tiene al menos dos puntos u, v con lo que existe un abierto V tal que $u \notin V$ pero $v \in V$. Si tomamos $W = U \cap V$, entonces W es un abierto no vacío contenido estrictamente en U. Como F es finito, continuando iterativamente este proceso llegamos a una contradicción, por lo que debemos tener $\mathring{F} = \varnothing$. □

Definición 1.1.3. *Sea X un espacio topológico, se dice que:*

(a) *X es **primero numerable** si todo $x \in X$ tiene una base local numerable.*

(b) *X es **segundo numerable** o **completamente numerable** si admite una base numerable.*

Así pues, tenemos que todo espacio **segundo numerable** es separable, es decir, existe un conjunto denso numerable, ya que basta tomar un punto de cada elemento de la base que es numerable.

Nos interesa ahora ilustrar algunos resultados iniciales para conjuntos densos. Dado un subconjunto $A \subseteq X$ denotaremos $\overline{A}$ a su clausura. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.4. *Sean X un espacio topológico, D un conjunto denso en X. Si Q es un conjunto denso en D (con la topología relativa), entonces Q es denso en X.*

Demostración. Basta notar que $D = \overline{Q}^D = \overline{Q} \cap D$, de donde $D \subseteq \overline{Q}$, por tanto $X = \overline{D} \subseteq \overline{\overline{Q}} = \overline{Q}$. □

Proposición 1.1.5. *Sean X, Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación continua y $D \subset X$ un conjunto denso. Entonces $f(D)$ es denso en $f(X)$.*

En particular, si f tiene rango denso, entonces $f(D)$ es denso en Y para todo conjunto D denso en X.

Demostración. Basta notar que por definición de continuidad

$$f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}.$$

La parte final es evidente a partir del resultado general. □

Proposición 1.1.6. *Sean X un espacio topológico, D un abierto denso y Q un conjunto denso, entonces $D \cap Q$ es denso. En particular, la intersección de dos abiertos densos es un abierto denso.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto. Tenemos $V = D \cap U \neq \varnothing$, por ser D denso. Como V es un abierto $Q \cap V \neq \varnothing$ o, lo que es lo mismo, $Q \cap (D \cap U) = (Q \cap D) \cap U \neq \varnothing$. □

1.2. Espacios de Baire

Introducimos ahora conceptos que nos permiten formalizar la idea de tamaño topológico de un conjunto, es decir, queremos distinguir conjuntos topológicamente *grandes* o *pequeños*.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico, diremos que un subconjunto $A \subset X$ es* ***diseminado*** *si el interior de su clausura es vacío, es decir, si $(\overline{A})^\circ = \varnothing$.*

Proposición 1.2.2. *Sea X un espacio topológico, A es diseminado si y solo si su complementario A^c contiene un conjunto denso abierto.*

Demostración. Usamos $(\mathring{A})^c = (\overline{A^c})$, con lo que si A es diseminado entonces

$$\varnothing = (\overline{A})^\circ = (((A^c)^\circ)^c)^\circ,$$

de donde el complementario del interior de A^c tiene interior vacío, con lo que A^c contiene un abierto denso. La otra implicación es similar. $\square$

Claramente a partir de las definiciones y las propiedades de clausura e interior se tiene:

1. Cualquier subconjunto de un conjunto diseminado es diseminado.

2. La clausura de un conjunto diseminado es diseminado.

También podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 1.2.3. *Sea X un espacio topológico, la unión finita de conjuntos diseminados es diseminado. Es más, si X es T_1 y no tiene puntos aislados, entonces todo conjunto finito es diseminado.*

Demostración. La segunda proposición es consecuencia inmediata de la primera ya que si X es T_1 sin puntos aislados, todo punto es un conjunto diseminado. Vamos pues a probar la primera aserción, es suficiente probarla para dos conjuntos A y B diseminados. Pero esto de nuevo es inmediato si tomamos complementarios, ya que la intersección de dos abiertos densos es un abierto denso. $\square$

Sin embargo, si tratamos de extender la proposición anterior a uniones numerables nos daremos cuenta que no es posible. Quizás el caso más claro sea considerar $\mathbb{Q}$, que se puede escribir como la unión numerable de racionales (conjuntos diseminados), y es denso en $\mathbb{R}$. Por tanto es necesario ampliar nuestras definiciones.

Definición 1.2.4. *Sea X un espacio topológico, diremos que un subconjunto $A \subset X$ es **deficiente** o de **primera categoría** si se puede escribir como la unión numerable de conjuntos diseminados. Si A no es de primera categoría se dirá que A es **no deficiente** o de **segunda categoría**.*

Definición 1.2.5. *Sea X un espacio topológico, diremos que un subconjunto $A \subset X$ es **residual** si A^c es de primera categoría.*

Podemos ahora extender el resultado anterior de manera natural.

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio topológico, se tiene:*

(a) *Cualquier subconjunto de un conjunto de primera categoría es de primera categoría.*

(b) *La unión numerable de conjuntos de primera categoría es de primera categoría.*

Es más, si X es T_1 y no tiene puntos aislados entonces cualquier conjunto numerable es de primera categoría.

Notar que estas propiedades son similares a las de los conjuntos de medida nula. Si bien no existe una relación directa entre ambos conceptos, sí que se puede establecer similitudes y muchos de los resultados comparten análogo. Para más información puede consultarse [43].

Vamos ahora a definir los espacios de Baire, que no son más que espacios topológicos que presentan un *buen comportamiento* para los tipos de conjuntos definidos previamente.

Definición 1.2.7. *Se dice que un espacio X es un* ***espacio de Baire*** *si la intersección numerable de abiertos densos es densa.*

Es interesante ver que esta definición se puede formular equivalentemente de distintas formas:

1. Los conjuntos de primera categoría tienen interior vacío.

2. Los conjuntos residuales son densos.

Veremos estas equivalencias en el desarrollo del siguiente resultado, el teorema de Categoría de Baire. Para ello, debemos nuevamente ampliar los requisitos sobre nuestro espacio X. En este caso, debemos pedir que X sea un espacio métrico completo, es decir, un espacio topológico generado por una métrica tal que toda sucesión de Cauchy sea convergente.

Para la prueba necesitaremos el siguiente resultado adicional probado por Georg Cantor.

Lema 1.2.8 (Cantor)**.** *Sea X un espacio métrico completo, y $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos. Tal que*

$$D(F_i) := \sup\{d(x,y) : \ x, y \in F_i\} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Entonces existe $x \in X$ tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \{x\}$.

Demostración. Primero notamos que la intersección puede ser a lo sumo un único elemento, ya que, en caso contrario, tendríamos $d(x_1, x_2) > 0$, en contra de la suposición $D(F_i) \to 0$. Basta ver que la intersección es no vacía.

Seleccionamos $x_i \in F_i$, claramente la sucesión es de Cauchy ya que para $i, j \geq N$ se tiene $d(x_i, x_j) \leq D(F_N) \to 0$ porque $x_i, x_j \in F_N$. Por tanto, la sucesión es convergente a cierto x, pero como $x_i \in F_j$ para todo $i \geq j$ y F_j es cerrado tenemos que $x \in F_j$ para todo j con lo que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. □

Ya podemos probar el teorema.

Teorema 1.2.9 (Teorema de Categoría de Baire)**.** *Sea X un espacio métrico completo, entonces X es de Baire.*

Demostración. Primero vamos a ver que las caracterizaciones enunciadas anteriormente son equivalentes. Sea (A_n) una sucesión de conjuntos diseminados. Se tiene que $(\overline{A_n})$ es un sucesión de cerrados diseminados, por lo que es suficiente probar que toda unión cerrada de conjuntos diseminados tiene interior vacío. Tomando complementarios esto es equivalente a probar que la intersección de abiertos densos es densa.

Vamos a probar que la intersección de abiertos densos es densa. Sea (U_n) una sucesión de abiertos densos y sea $V \subset X$ un abierto no vacío cualesquiera. Consideramos una sucesión (a_n) que tienda a 0. Tenemos $U_1 \cap V$ es un abierto no vacío y podemos encontrar $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_1 \cap V$ para cierto $x_1 \in X$ y $0 < r_1 < a_1$. De la misma forma, $\overline{B(x_1, r_1)} \cap U_2$ es no vacío por lo que podemos encontrar $\overline{B(x_2, r_2)} \subset \overline{B(x_1, r_1)} \cap U_2$ para cierto $x_2 \in X$ y $0 < r_2 < a_2$. Siguiendo este procedimiento podemos encontrar una sucesión $(\overline{B(x_n, r_n)})$ con $r_n \to 0$. Aplicando el lema de Cantor existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)}$ o, lo que es lo mismo, la intersección $V \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)$ es no vacía. □

Para la elección de las bolas estamos utilizando una versión débil del Axioma de Elección, el *Axioma de Elección Dependiente*. De hecho, se ha probado que en teoría de conjuntos con los axiomas de Zermelo–Fraenkel (ZF) este axioma es equivalente al teorema de Categoría de Baire. Sin embargo, existe una prueba que no requiere de este axioma si se pide además que X sea separable, como sucede en nuestro caso.

1.3. Espacios de Fréchet

Para los sistemas que estudiaremos posteriormente será necesario ampliar más allá de los espacios de Banach y Hilbert. En particular, necesitaremos hacer uso de espacios de Fréchet, que permiten definir topologías sobre espacios vectoriales más generales. Comenzamos definiendo la noción de seminorma.

Definición 1.3.1. *Sea una función $p : X \to \mathbb{R}^+$ sobre un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$. Se dice que p es una **seminorma** si:*

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \ \forall x, y \in X$,

(b) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \ \ \forall x \in X, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Definición 1.3.2. *Sea X un espacio vectorial y (p_n) una familia de seminormas, decimos que (p_n) es **creciente** si $p_m(x) \geq p_n(x)$ para todo $m \geq n$ y todo $x \in X$. Decimos además que la familia es **separadora** si $p_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $x = 0$.*

Notemos que dada cualquier familia de seminormas (p_n) siempre podemos suponer que sea creciente sin más que tomar $p_n = \max_{k \leq n} p_n$. Con esto ya podemos definir nuestro nuevo tipo de espacio.

Definición 1.3.3. *Un **espacio de Fréchet** es un espacio vectorial X, con una familia de seminormas (p_n) creciente y separadora, cuya topología está generada por la métrica dada por*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)), \quad x, y \in X.$$

Se puede demostrar que X es completo y localmente convexo a partir de la métrica dada. A efectos de este trabajo procederemos asumiendo que este el caso.

Está claro que la métrica definida es **invariante por traslaciones**, es decir, $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Veamos algunas propiedades de estos espacios.

Proposición 1.3.4. *Sea X un espacio de Fréchet. Sean $(x_k) \subset X$, $x \in X$. Se tiene:*

(a) *$x_k \to x$ si y solo si $p_n(x_k - x) \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $n \geq 1$.*

(b) *(x_k) es de Cauchy si y solo si $p_n(x_k - x_l) \to 0$ cuando $k, l \to \infty$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración.

(a) Sabemos que $x_k \to x$. Pero esto es equivalente a $d(x_k, x) \to 0$, lo que ocurre si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}(1, p_n(x_k - x)) \to 0$ si y solo si $p_n(x_k - x) \to 0$ para todo $n \geq 1$.

(b) Sabemos que (x_k) es Cauchy. Equivalentemente $d(x_k, x_l) \to 0$, que se tiene si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}(1, p_n(x_k - x_l)) \to 0$ si y solo si $p_n(x_k - x_l) \to 0$ para todo $n \geq 1$.

□

Definición 1.3.5. *Sea X un espacio de Fréchet. Definimos la **n-bola**, $n \geq 1$ de radio $\varepsilon > 0$ como la bola generada por la seminorma p_n, es decir,*

$$B_n(x, \varepsilon) := \{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\}.$$

Proposición 1.3.6. *Sea X un espacio de Fréchet y dado $\varepsilon > 0$ se tiene:*

(a) $B_n(x, \varepsilon) \subset B_m(x, \varepsilon)$ *si* $n \geq m$,

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon)$,

(c) *Existe* $\varepsilon_1 > 0$ *y* $n \geq 1$ *tal que* $B_n(x, \varepsilon_1) \subset B(x, \varepsilon)$,

(d) *Dado* $n \geq 1$ *existe* $\varepsilon_2 > 0$ *tal que* $B(x, \varepsilon_2) \subset B_n(x, \varepsilon)$.

Demostración. Las dos primeras proposiciones son inmediatas a partir de las definiciones. Las dos siguientes son consecuencia de las posibles cotas a la distancia

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \operatorname{mín}(1, p_j(y - x)).$$

Para (c), dividiendo, se tiene

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \operatorname{mín}(1, p_j(y - x)) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \operatorname{mín}(1, p_j(y - x)),$$

que podemos acotar

$$d(x, y) \leq p_n(y - x) + \frac{1}{2^n},$$

de donde dado $\varepsilon > 0$ existe $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$ y, tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, se tiene

$$B_n(x, \varepsilon/2) \subseteq B(x, \varepsilon).$$

Para (d), dividiendo, se obtiene

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \operatorname{mín}(1, p_j(y - x)) + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \operatorname{mín}(1, p_j(y - x)),$$

que podemos acotar

$$d(x, y) \geq 0 + \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, p_n(y - x)),$$

dado $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ podemos seleccionar $\varepsilon_2 = \operatorname{mín}(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}})$ con lo que $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ si $y \in B(x, \varepsilon_2)$ y tenemos

$$d(x, y) \geq \frac{1}{2^n} p_n(y - x),$$

con lo que $B(x, \varepsilon_2) \subseteq B(x, \varepsilon)$. □

Proposición 1.3.7. *Sea X un espacio de Fréchet, un punto $x \in X$, y un abierto no vacío $U \subset X$. Entonces U es un entorno de x si y solo si existe $n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_n(x, \varepsilon) \subset U$.*

Demostración. U es un entorno si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Pero esto es inmediato a partir de las dos últimas proposiciones. □

Nos interesa, además, poder tratar de manera similar estos espacios a los espacios de Banach, con los que existe mayor familiaridad. Por tanto, definiremos los siguientes conceptos.

Definición 1.3.8. *Sea X un espacio de Fréchet, definimos su **F-norma** como*

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}(1, p_n(x)), \qquad x \in X,$$

con lo que $d(x, y) = \|x - y\|$ y $\|x\| = d(x, 0)$.

Este operador sobre X no es una norma como solemos entenderla en espacios de Banach, sin embargo, presenta propiedades muy similares que nos permiten trabajar en muchas ocasiones como si tuviésemos una norma.

Proposición 1.3.9. *Sea X un espacio de Fréchet, y sean $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene para su F-norma*

(a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(b) $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ *si* $|\lambda| \leq 1$,

(c) $\text{lím}_{\lambda \to 0} \|\lambda x\| = 0$,

(d) $\|x\| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

Demostración.

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,p_n(x+y))\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,p_n(x)+p_n(y))\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\text{mín}(1,p_n(x))+\text{mín}(1,p_n(y)))\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,p_n(x))+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,p_n(y))=\|x\|+\|y\|\,.\end{aligned}$$

(b) Si $|\lambda|\le 1$ operando

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,p_n(\lambda x))\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,|\lambda|\,p_n(x))\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\text{mín}(1,p_n(x))=\|x\|\,.\end{aligned}$$

(c) Basta notar que todos los sumandos en la expresión anterior tienden a 0 si $\lambda\to 0$ y ver que es posible cambiar límites.

(d) Es inmediato del hecho de que la familia de seminormas es separadora.

□

Tenemos, además, la siguiente proposición, que nos permite acotar por la F-norma de una manera parecida a las cotas con la norma.

Proposición 1.3.10. *Sea X un espacio de Fréchet, y sean $x\in X$, $\lambda\in\mathbb{K}$ se tiene*

$$\|\lambda x\|\le(1+|\lambda|)\|x\|\,.$$

Demostración. Sea $\lambda = re^{\theta\pi i}$ podemos escribir

$$\lambda = \underbrace{e^{\theta\pi i} + \cdots + e^{\theta\pi i}}_{\lfloor r \rfloor} + (r - \lfloor r \rfloor)e^{\theta\pi i}.$$

Con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \left\| ((e^{\theta\pi i} + \cdots + e^{\theta\pi i}) + (r - \lfloor r \rfloor)e^{\theta\pi i})x \right\| \\ &\leq (\|x\| + \cdots + \|x\|) + \|x\| = (1 + \lfloor |\lambda| \rfloor)\|x\| \\ &\leq (1 + |\lambda|)\|x\| . \end{aligned}$$

□

Nos interesará estudiar aplicaciones en estos espacios. En particular, nos interesan aplicaciones lineales.

Definición 1.3.11. *Sea X un espacio de Fréchet, diremos que $T : X \to X$ es un **operador** si T es una aplicación lineal y continua.*

Queremos ahora una caracterización que nos permita distinguir operadores. La siguiente proposición es una extensión natural de la caracterización para espacios de Banach e Hilbert.

Proposición 1.3.12. *Sean X e Y dos espacios de Fréchet con familias de seminormas (p_n) y (q_m) respectivamente. Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es un operador si y solo si para todo $m \geq 1$ existe n y un $M > 0$ tal que*

$$q_m(Tx) \leq Mp_n(x), \; x \in X.$$

Demostración. Veamos primero que la condición es suficiente, sea (x_k) una sucesión tal que $x_k \to x$. Fijemos $m \geq 1$, tenemos que existe $N \geq 1$ y M tal que

$$q_m(Tx_k - Tx) \leq Mp_n(x_k - x)$$

pero entonces para todo $n \geq N$, al ser la familia de seminormas creciente

$$q_m(Tx_k - Tx) \leq Mp_n(x_k - x) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

con lo que $Tx_k \to Tx$ en Y.

Veamos ahora que la condición es necesaria. Sea $m \geq 1$, consideramos la bola $B_m(0,1)$, por continuidad debe existir un entorno del $0 \in U \subset X$ tal que $T(U) \subset B_m(0,1)$, o lo que es lo mismo, existe $n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in B_n(0,\varepsilon)$ entonces $Tx \in B_m(0,1)$. Sea $x \in X$, entonces para cualquier $\delta > 0$ se tiene

$$\frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}x \in B_n(0,\varepsilon),$$

y, por tanto,

$$q_m(Tx) < \frac{p_n(x)+\delta}{\varepsilon},$$

ya que δ es arbitrario, basta tomar $M = 1/\varepsilon$. □

Para finalizar esta sección, notar que existen espacios más generales a los que podríamos extender nuestros resultados.

Definición 1.3.13. *Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial X dotado de una topología $\mathcal{T}$ tal que:*

1. *Todo punto $x \in X$ es cerrado.*

2. *Las operaciones del espacio (suma y producto por escalar) son continuas respecto de la topología.*

Para poder hablar de los distintos tipos de espacios vectoriales topológicos debemos introducir primero las siguientes definiciones.

Definición 1.3.14. *Sea X un espacio vectorial topológico. Un subconjunto $E \subset X$ se dice que* ***es o está acotado*** *si para todo entorno U del 0 existe $s > 0$ tal que $E \subseteq tU$ para todo $t > s$.*

Definición 1.3.15. *Sea X un espacio vectorial topológico. Una* ***base local*** *de X es una familia $\mathcal{B}$ de entornos del 0 tal que todo entorno del 0 contiene a un elemento de $\mathcal{B}$.*

Notemos que en caso de que X tenga una base local $\mathcal{B}$ los abiertos de la topología se corresponden con uniones de traslaciones de elementos de la base local $\mathcal{B}$.

Recordamos ahora que un conjunto $C \subset X$ se dice convexo si $\lambda C + (1-\lambda)C \subseteq C$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

Definición 1.3.16. *Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es **localmente convexo** si existe una base local $\mathcal{B}$ cuyos miembros son convexos.*

Definición 1.3.17. *Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es **localmente acotado** si el 0 contiene un entorno acotado.*

Definición 1.3.18. *Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es **localmente compacto** si el 0 contiene un entorno cuya clausura es compacta.*

Definición 1.3.19. *Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es **metrizable** si existe una métrica d que genere la topología de X.*

Ya podemos concretar donde se encuentran los espacios de Fréchet en el campo más general de espacios vectoriales topológicos.

Definición 1.3.20. *Sea X un espacio vectorial topológico con topología $\mathcal{T}$. Diremos:*

1. *X es un F-espacio si la topología $\mathcal{T}$ está inducida por una métrica invariante por traslaciones.*

2. *X es un espacio de Fréchet si X es un F-espacio localmente convexo.*

Se pueden caracterizar los F-espacios por la existencia de una F-norma tal que cumpla la Proposición 1.3.9. Asimismo, es posible demostrar que la equivalencia entre ambas definiciones de espacios de Fréchet (generados por una familia creciente de seminormas o como F-espacios localmente convexos).

Para más información sobre este tipo de espacios nos referimos a [35] o al libro *Functional Analysis* de Walter Rudin [50].

Para finalizar, remarcar que algunos de los resultados de este trabajo pueden llegar a extenderse sin problema a estos espacios. Sin embargo, por simplicidad, generalmente nos limitaremos a enunciar los resultados en espacios de Fréchet.

1.4. El espacio $H(\mathbb{C})$ y el teorema de Runge

Vamos a dar una breve introducción del espacio de funciones enteras en el plano complejo, que utilizaremos en numerosas ocasiones a lo largo del trabajo.

En este caso, la noción natural de convergencia es la convergencia uniforme en todo conjunto compacto. Por tanto, no vamos a poder tener un espacio de Banach, sino que debemos definir nuestra convergencia a través de una familia de seminormas, por ejemplo, mediante discos cerrados centrados en el origen. Tenemos así la siguiente definición.

Definición 1.4.1. *Definimos el espacio de funciones enteras*

$$H(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ es entera}\}.$$

Que es un espacio vectorial con la suma de funciones usual. Donde la topología viene generada por la familia creciente de seminormas

$$p_n(f) := \sup_{|z|\leq n} \big|f(z)\big|.$$

Será necesario también el siguiente teorema de aproximación [33, Anexo A].

Teorema 1.4.2 (teorema de Runge)**.** *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y A un conjunto que contenga al menos un punto de cada componente conexo de $\hat{\mathbb{C}} \backslash K$, donde $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dada una función entera f en un entorno de K, para todo $\varepsilon > 0$ existe una función racional h con polos exclusivamente en puntos de A tal que*

$$\sup_{z\in K} \big|f(z) - h(z)\big| < \varepsilon.$$

Notemos que el complemento de un compacto es abierto, por tanto, tiene una cantidad numerable de componentes conexas, con lo que podemos asumir que A es contable. Si además $\hat{\mathbb{C}} \backslash K$ es conexo, tomando $A = \{\infty\}$ tenemos que la función h es un polinomio.

Para una prueba de este enunciado nos remitimos a cualquier libro de análisis complejo, consultar por ejemplo [49] y [20]. Del teorema de Runge se puede obtener fácilmente que los polinomios con coeficientes racionales forman un conjunto denso en $H(\mathbb{C})$, por lo que este espacio es separable.

1.5. Espacios de sucesiones

La otra familia de espacios que más usaremos son los espacios de sucesiones, recordemos brevemente estos espacios.

Definición 1.5.1. *Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$\ell^p := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Son espacios de Banach con norma $\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$. En particular, en el caso $p = 2$ tenemos un espacio de Hilbert con producto dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Considerando sucesiones con un número finito de términos no nulos con coeficiente racional, es decir, sucesiones de la forma $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ para $n \geq 1$ con entradas en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, es fácil ver que ℓ^p es separable para cualquier $1 \leq p < \infty$.

Definimos ahora el espacio de sucesiones convergentes a cero.

Definición 1.5.2. *Se define el espacio de sucesiones convergentes a cero como*

$$c_0 := \left\{ (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\}.$$

Que es un espacio de Banach con norma $\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Así como los espacios de sucesiones indexadas por enteros y sucesiones donde la norma está ponderada.

Definición 1.5.3. *Dado $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio*

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

con norma $\|x\|_p := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Análogamente, dadas sucesiones (w_n), $n \in \mathbb{N}$ *y* (v_k), $k \in \mathbb{Z}$ *definimos*

$$\ell^p(w) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n|^p < \infty \right\}$$

y

$$\ell^p(\mathbb{Z}, v) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v_n x_n|^p < \infty \right\},$$

con la norma definida como antes.

Al igual que con los espacios ℓ^p $1 \leq p < \infty$ es fácil ver que los espacios introducidos también son separables.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos e hiperciclicidad

"The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics."

(G. H. Hardy [34]— A Mathematician's Apology)

2.1. Sistemas dinámicos

Dado un espacio topológico X y una función T, estamos interesados en la evolución de un punto x del espacio bajo la acción de T

$$x \to Tx \to T^2x \to \cdots \to T^nx \to \ldots$$

Es decir, queremos ver el efecto de una función continua sobre los distintos puntos de nuestro espacio al ser aplicada reiteradamente.

Definición 2.1.1. *Un **sistema dinámico** (discreto) es un par (X,T) donde X es un espacio topológico y T una aplicación continua $T : X \to X$.*

Definición 2.1.2. *Dado un sistema dinámico* (X, T) *se define la* ***órbita de*** x *como*

$$Orb(x, T) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\} = \{x, Tx, \dots\}.$$

En particular, estamos interesados en aquellos operadores que poseen puntos cuya órbita *visita* a todos los abiertos de la topología. Podemos concretar esta idea a través de la siguiente definición.

Definición 2.1.3. *Sea* (X, T) *un sistema dinámico. Diremos que* x *es* ***hipercíclico*** *para* T *si* $Orb(x, T)$ *es densa en* X*. Denotaremos por* $HC(T)$ *al conjunto de elementos hipercíclicos de* X*, esto es,*

$$HC(T) := \{x \in X : Orb(x, T) \text{ es densa en } X\}.$$

Si $HC(T)$ *es no vacío diremos que la aplicación* T *es* ***hipercíclica****.*

La órbita de cualquier punto es un conjunto numerable, por tanto, es necesario pedir que el espacio X sea separable para poder tener elementos hipercíclicos. De ahora en adelante asumiremos que X es separable. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos* $X = S^1$*, donde* S^1 *representa el círculo unidad en* $\mathbb{C}$*, podemos definir los siguientes sistemas dinámicos.*

(a) (S^1, R_α) *con* $R_\alpha(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\theta + \alpha i}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, que se corresponden con la rotación de puntos en la circunferencia unidad.*

Es fácil ver que R_α *es hipercíclico si y solo si* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Q}$*. Si* α *es un múltiplo racional de* π *tras un número finito de aplicaciones de la función volvemos al punto inicial. En cambio, si* α *es un no es un múltiplo racional, siempre nos queda un pequeño desfase respecto a la posición en la que inicialmente nos encontrábamos, podemos hacer ese desfase tan pequeño y utilizarlo para acercarnos a todos los puntos del círculo. Formalizar esta idea es sencillo, si bien algo tedioso en la notación.*

(b) (S^1, M_λ) *con* $M_\lambda(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\lambda\pi i\theta}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, *que se corresponde con las potencias positivas de los puntos la circunferencia unidad. En este caso se puede razonar de manera similar para encontrar los puntos hipercíclicos en función de* λ.

Ejemplo 2.1.5 (Collatz). *Sea* $(\mathbb{N}, C)$ *con*

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ n/2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

$(\mathbb{N}, C)$ *es un sistema dinámico. Este sistema dinámico aparece en la famosa Conjetura de Collatz que, en el lenguaje introducido en este capítulo, puede escribirse como*

"Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $Orb(n, C)$ *contiene al 1."*

Por tanto termina en $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. *Este problema aparentemente tan sencillo es, sin embargo, increíblemente difícil de afrontar. En palabras de Paul Ërdos*

"Mathematics may not be ready for such problems."

Para más información puede consultarse [39].

Es fácil ver que, bajo condiciones mínimas, el conjunto de elementos hipercíclicos es *grande* (en un sentido topológico) siempre que este sea no vacío.

Proposición 2.1.6. *Sea* X *un espacio topológico* T_1 *sin puntos aislados y* $T : X \to X$ *hipercíclica. Si* $x \in X$ *tiene una órbita densa, entonces* $T^n x$ *tiene órbita densa para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Tenemos $Orb(T^n x, T) = Orb(x, T) \setminus F$ con $F = \{x, \ldots, T^{n-1}x\}$. Como F es finito debe ser un cerrado con interior vacío (por ser X un T_1 sin puntos aislados) y por tanto $Orb(T^n x, T)$ es densa. $\square$

Corolario 2.1.7. *Sea* X *un espacio topológico* T_1 *sin puntos aislados y* $T : X \to X$ *hipercíclico. Entonces* $HC(T)$ *es denso.*

Demostración. Basta considerar $x \in X$ tal que $Orb(x, T)$ sea densa, por la proposición anterior $Orb(x, T) \subset HC(T)$ con lo que $HC(T)$ es denso. $\square$

Finalizamos la sección con un último ejemplo.

Ejemplo 2.1.8. *Queremos encontrar una aplicación T hipercíclico tal que T^2 no sea hipercíclica. Consideramos el sistema $(S_1 \sqcup S_2, T)$ con $S_1 = S_2 = S^1$,*

$$\begin{cases} T(s_1) & = (s_1)_2, \; s_1 \in S_1, \\ T(s_2) & = (R_\alpha(s_2))_1, \; s_2 \in S_2. \end{cases}$$

Donde $(\cdot)_i$ indica que se manda el elemento a la circunferencia S_i.

Tomamos α tal que T es hipercíclico, por ejemplo $\alpha = \sqrt{2}\pi$. Es fácil verificar que T^2 no puede ser hipercíclico, ya que cualquier punto se mantiene en su componente conexa.

2.2. Hiperciclicidad y sucesiones de operadores

Nada nos impide extender las nociones de sistemas dinámicos a un contexto más general. Podemos así prescindir del requisito de que el espacio de partida y llegada sea al mismo. Debido a este requerimiento, es necesario cambiar el uso de una aplicación T por el de una sucesión de aplicaciones (T_n).

Definición 2.2.1. *Dados dos espacios topológicos X e Y y una sucesión de aplicaciones continuas $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}_0$, se define la **órbita de** x como*

$$Orb(x, (T_n)) = \{T_n x : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

*Diremos que x es **hipercíclico** para la sucesión (T_n) si $Orb(x, (T_n))$ es denso en Y. Denotaremos por $HC((T_n))$ al conjunto de elementos hipercíclicos de X, esto es,*

$$HC((T_n)) = \{x \in X : Orb(x, (T_n)) \text{ es densa en } Y\}.$$

*Si $HC((T_n))$ es no vacío diremos que la sucesión (T_n) es **hipercíclica**.*

Notar que en este caso la Proposición 2.1.6 no es cierta, es decir, existen sucesiones hipercíclicas tales que su conjunto de elementos hipercíclicos no es denso. De hecho, podemos encontrar un contraejemplo fácilmente.

Ejemplo 2.2.2. *Consideremos $X = \mathbb{N}_0$ y $T(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Está claro que $x = 0$ es hipercíclico, pues $T^n 0 = n$. Sin embargo, $T^m(0) = m$ no es hipercíclico para ningún m ya que nunca va a contener en su órbita a $\{0, \ldots, m-1\}$.*

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.3. (a) *Tomemos $X = Y = S^1$ y $T_0 = I$, $T_n = R_{2\pi/n} T_{n-1}$, $n \geq 1$. Se puede ver que T_n no es hipercíclico para ningún n por el mismo razonamiento que el Ejemplo 2.1.4, pero la sucesión (T_n) es hipercíclica ya que la suma $\frac{1}{n}$ es divergente.*

(b) *En esta misma línea, si $X = Y = \mathbb{R}$, consideramos una numeración $\{q_n : n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{Q}$ y tomamos $T_n(x) = q_n$ está claro que T_n no es hipercíclico para ningún n pero (T_n) sí lo es.*

En la siguiente sección veremos qué, pidiendo más estructura en nuestro espacio X, se pueden obtener condiciones adicionales sobre $HC(T)$. Es más, sobre $HC((T_n))$ para una sucesión arbitraria.

2.3. Aplicaciones transitivas

Proseguimos nuestro estudio con el concepto de *transitividad* que veremos que guarda una relación estrecha con la hiperciclicidad.

Definición 2.3.1. *Sea $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}_0$, una sucesión de aplicaciones continuas entre espacios topológicos. La sucesión (T_n) se dice que es **topológicamente transitiva** o simplemente **transitiva** si para cualquier par de abiertos no vacíos $U \subset X$ y $V \subset Y$ existe $n \geq 0$ tal que*

$$T_n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

Veamos ahora un resultado básico de las aplicaciones transitivas.

Proposición 2.3.2. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}_0$, una sucesión de aplicaciones continuas. Son equivalentes:*

(a) *(T_n) es topológicamente transitiva.*

(b) *Para todo abierto no vacío U de X el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n(U)$ es denso.*

(c) *Para todo abierto no vacío V de Y el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n^{-1}(V)$ es denso.*

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Sea $V \subset X$ un abierto no vacío, tiene que existir un $n \geq 0$ tal que $T_n(U) \cap V \neq \varnothing$ con lo que $\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n(U) \cap V \neq \varnothing$. Análogamente (b) $\Longrightarrow$ (a).

Para (c) basta observar que $T_n(U) \cap V \neq \varnothing$ es equivalente a $U \cap T_n^{-1}(V) \neq \varnothing$ y procedemos análogamente. $\square$

Vamos a probar un primer criterio de hiperciclicidad para aplicaciones (y sucesiones de aplicaciones) transitivas.

Teorema 2.3.3. *Sea X un espacio topológico, Y un espacio topológico segundo numerable, y una sucesión $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}_0$, de aplicaciones continuas. Se tiene que $HC((T_n))$ es un G_δ.*

Si X es de Baire, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) *(T_n) es topológicamente transitiva.*

(b) *$HC((T_n))$ es un G_δ denso, en particular, (T_n) es hipercíclica.*

(c) *El conjunto $\{(x, T_n x) : x \in X,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $X \times Y$.*

Si además X es primer numerable, también son equivalentes:

(d) *Para cada $x \in X$ e $y \in Y$, existe una sucesión (x_k) en X y una sucesión de enteros positivos (n_k) tales que $x_k \to x$ y $T_{n_k} x_k \to y$ cuando $k \to \infty$.*

(e) *Existen $D \subset X$ y $D' \subset Y$ densos tales que para cada $d \in D$, $d' \in D'$ existe una sucesión (x_k) y una sucesión de enteros positivos (n_k) tales que $x_k \to d$ y $T_{n_k} x_k \to d'$ cuando $k \to \infty$.*

Demostración. Comenzamos probando la primera parte del enunciado, sabemos que existe una base numerable $\{V_k\}_{k\geq 0}$ de la topología de Y. Por consiguiente podemos escribir

$$HC((T_n)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n^{-1}(V_k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_k,$$

con $H_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n^{-1}(V_k)$ abiertos, por lo que $HC((T_n))$ es un G_δ.

Vamos a probar las 3 primeras equivalencias.

(b) $\Longleftrightarrow$ (a) Vemos primero (b) $\Longrightarrow$ (a). Fijados $U \subset X$ y $V \subset Y$, como $HC((T_n))$ es denso existe $x \in U \cap HC((T_n))$ con lo que hay un n tal que $T_n x \in V$ y se tiene (a).

Supongamos ahora que se cumple (a). Como antes escribimos,

$$HC((T_n)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_k.$$

Sabemos que cada conjunto H_k es abierto y denso. Como X es de Baire tenemos que $HC(T)$ es un G_δ denso.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) Supongamos (b). Fijado $W \subset X \times Y$ abierto, tenemos que existen $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos tales que $U \times V \subset W$. Al ser $HC((T_n))$ denso, existe $x \in U \cap H(T_n)$. Como $x \in HC((T_n))$ existe n tal que $T_n x \in V$, por lo que $(x, T_n x) \in U \times V \subset W$ y el conjunto $\{(x, T_n x) : x \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso.

Supongamos ahora (c). Como X es de Baire, basta probar que cada H_k es denso. Sea $U \subset X$ abierto, tenemos que $U \times V_k \subset X \times Y$ es un abierto, por lo que podemos encontrar un $x \in X$ y un $n \geq 0$ tal que $(x, T_n x) \in U \times V_k$, lo que implica que H_k es denso, es decir, tenemos (b).

En cuanto a las últimas equivalencias, es inmediato que se tienen las implicaciones (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e). Falta probar (e) $\Longrightarrow$ (a).

Para ello, es suficiente probar que cada H_k es denso. Fijado $U \subseteq X$ un abierto, existen $d \in D \cap U$, $d' \in D' \cap V_k$ con lo que existe $l \in \mathbb{N}_0$ tal que $x_l \in U$ y $T_{n_l} x_l \in V_k$. Así, $x_l \in U$ y $x_l \in H_k$. Por tanto $U \cap H_k \neq \varnothing$ y el conjunto H_k es denso. $\square$

En el Capítulo 4 profundizaremos en mayor medida en los diferentes criterios que se han establecido en las últimas décadas para tratar la hiperciclicidad en el ámbito particular de las aplicaciones lineales.

Cuando $Y = X$ podemos obtener un resultado que nos liga directamente la transitividad y la hiperciclicidad.

Teorema 2.3.4. *Sean X un espacio de Baire, segundo numerable y una sucesión de aplicaciones $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}_0$, continuas que conmutan (i.e, $T_n T_m = T_m T_n$, $n, m \geq 1$) con rango denso en X. Son equivalentes:*

(a) *(T_n) es topológicamente transitiva.*

(b) *(T_n) es hipercíclica.*

Demostración. Está claro que (a) $\Longrightarrow$ (b) por el resultado anterior.

Supongamos ahora que se cumple (b), es decir, $HC((T_n)) \neq \varnothing$. Sea $x \in HC((T_n))$. Por ser T_k de rango denso y conmutar las aplicaciones se tiene

$$T_k(Orb(x, T_n)) = \{T_k T_n x : n \geq 0\} = Orb(T_k x, T_n)$$

es denso para todo $k \geq 0$. Es decir, $T_k x \in HC((T_n))$ para todo $k \geq 0$[1].

Fijados ahora U, V abiertos no vacíos. Sabemos que debe existir $n \geq 0$ tal que $T_n x \in U$, pero como $T_n x$ también es un vector hipercíclico, se debe tener que existe un $k \geq 0$ tal que $T_k(T_n x) \in V$ y ya hemos terminado pues entonces $T_k(U) \cap V \neq \varnothing$. $\square$

Corolario 2.3.5. *Supongamos X de Baire y segundo numerable. Si las aplicaciones T_n, $n \in \mathbb{N}_0$, conmutan y son invertibles, entonces (T_n) es hipercíclica si y solo si (T_n^{-1}) lo es.*

Demostración. Basta observar que por la Proposición 2.3.2, (T_n) es transitiva si y solo si (T_n^{-1}) también lo es, y aplicar el resultado. $\square$

[1]Notar que tenemos una especie de análogo más general a la Proposición 2.1.6, este hecho se cumple bajo las mismas condiciones para cualquier elemento T^n, cuando consideramos la sucesión de aplicaciones hiperíndice.

Para ilustrar la importancia del resultado anterior, vamos a terminar la sección con un ejemplo de una sucesión hipercíclica que no es transitiva.

Ejemplo 2.3.6. *Sea* (x_n) *una sucesión densa en* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $y_n \in \mathbb{R}^2$, $n \geq 1$, *vector de norma* n *ortogonal a* x_n. *Tomemos las aplicaciones* $T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dadas por*

$$T_n(\alpha, \beta) = \alpha x_n + \beta y_n.$$

Está claro que los puntos de la forma $(\alpha, 0)$ *son hipercíclicos por construcción. Además, son los únicos puntos hipercíclicos posibles, ya que tan pronto* $\beta \neq 0$ *se tiene* $\big\|T_n(\alpha,\beta)\big\| = \|\alpha x_n + \beta y_n\| = |\alpha|\|x_n\| + |\beta|\|y_n\| \to \infty$ *porque* $\|y_n\| \to n$ *cuando* $n \to \infty$ *y son ortogonales.*

Por consiguiente $HC((T_n)) = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *y* (T_n) *es hipercíclica y su conjunto de vectores hipercíclicos en* $\mathbb{R}^2$ *no es denso, luego no es transitiva.*

2.4. Transitividad en sistemas dinámicos

Consideremos ahora sistemas dinámicos. En este caso, el teorema anterior nos asegura el siguiente resultado.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Transitividad de Birkhoff)**.** *Sea* (X, T) *un sistema dinámico con* X *un espacio* T_1 *segundo numerable, de Baire y sin puntos aislados. Son equivalentes:*

(a) T *es topológicamente transitiva.*

(b) T *es hipercíclica.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior a $T_n = T^n$, teniendo en cuenta que claramente conmutan y tienen rango denso (al no existir puntos aislados y ser T_1). □

Una prueba alternativa puede conseguirse usando el Teorema 2.3.3 junto con la Proposición 2.1.6 siguiendo [9].

Al igual que con las sucesiones que conmutan, la hiperciclicidad se conserva a través de la inversa.

Corolario 2.4.2. *Bajo las condiciones anteriores, T es hipercíclica si y solo si T^{-1} lo es.*

2.5. Introducción al Caos

Nos centramos ahora en la idea de caos. Utilizaremos la noción de caos introducida por Devaney en 1986 [25], que recoge las ideas que generalmente se entienden por dicho concepto. Para ello, debemos reducir nuestro estudio a sistemas dinámicos en espacios métricos sin puntos aislados.

Comenzamos con la idea de efecto mariposa, es decir, que pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden llevar a grandes cambios en las órbitas.

> *"The flapping of a single butterfly's wing today produces a tiny change in the state of the atmosphere. Over a period of time, what the atmosphere actually does diverges from what it would have done."*
>
> (Ian Steward [53]— Does God Play Dice?)

Lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.5.1. *Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. El sistema dinámico $T : X \to X$ se dice que es **sensible a las condiciones iniciales**, o simplemente que es **sensible**, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$ pero $d(T^n x, T^n y) > \delta$ para cierto $n \geq 0$. Denotaremos por δ a la **constante de sensibilidad**.*

La siguiente condición es que la función T sea transitiva, lo que transmite la idea intuitiva de que el sistema sea irreducible, es decir, no se pueda separar ninguna parte del sistema.

La última condición es que el sistema tenga un gran número de órbitas periódicas, presentando así dos comportamientos contrapuestos, por un lado, tiene puntos con comportamiento irregular y, por otro, tiene puntos con un comportamiento regular. Vamos a formalizar esta idea.

Definición 2.5.2. *Sea* (X, T) *un sistema dinámico.*

(a) *Un punto* $x \in X$ *es un* ***punto fijo*** *si* $Tx = x$.

(b) *Un punto* $x \in X$ *es* ***periódico*** *si existe un* $n \geq 1$ *tal que* $T^n x = x$. *Llamamos* ***período*** *de* x *al menor* $n \in \mathbb{N}$ *que cumpla esta propiedad. El conjunto de puntos periódicos se denotará como* $Per(T)$.

Ejemplo 2.5.3. (a) *Tomando* (X, Id) *donde* Id *denota la identidad se tiene* $Per(Id) = X$.

(b) *Si consideramos el sistema dinámico* $(S^1, R_{\pi/2})$ *es fácil ver* $Per(R_{\pi/2}) = S^1$.

Ya tenemos todos los ingredientes para dar la definición de caos.

Definición 2.5.4 (Caos de Devaney [25])**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico sin puntos aislados. El sistema dinámico* $T : X \to X$ *se dice que es caótico (en el sentido de Devaney) si satisface las siguientes condiciones:*

(a) T *es sensible a las condiciones iniciales.*

(b) T *es transitiva.*

(c) T *tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Uno de los mayores problemas con esta definición es que la sensibilidad a las condiciones iniciales es, en un principio, dependiente de la métrica subyacente, incluso para métricas equivalentes.

Ejemplo 2.5.5. *Tomemos el sistema dinámico* $T : (1, \infty) \to (1, \infty)$ *dado por* $Tx = 2x$. *Si consideramos la distancia euclídea, tenemos que si* $x \neq y$ *entonces* $|T^n x - T^n y| = 2^n |x - y| \to \infty$, *por lo que tenemos sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, si consideramos la métrica equivalente* $d(x, y) = \big|\log(x) - \log(y)\big|$ *entonces* $d(T^n x, T^n y) = \big|\log(2^n x) - \log(2^n y)\big| = \big|\log(x) - log(y)\big| = d(x, y)$, *y no tenemos sensibilidad a las condiciones iniciales.*

Afortunadamente, la sensibilidad a las condiciones iniciales es redundante ya que puede ser deducida de las otras dos. Este sorprendente resultado fue probado en 1992 por los matemáticos J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey [2]. Comenzamos probando el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.5.6. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados y sea $T : X \to X$ una aplicación continua con un conjunto denso de puntos periódicos. Existe un $\eta > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe un punto periódico $p \in Per(T)$ tal que*

$$d(x, T^n p) > \eta \textit{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como X es un espacio métrico sin puntos aislados debe ser infinito. Por tanto podemos encontrar dos puntos p_1, p_2 periódicos con órbitas disjuntas. Seleccionamos η tal que

$$2\eta < \text{mín}\{d(T^n p_1, T^m p_2) : m, n \in \mathbb{N}\},$$

que sabemos que existe ya que estamos considerando un conjunto finito de distancias. Sea ahora $n^*, m^* \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(x, T^{n^*} p_1) = \text{mín}\{d(T^{n^*} p_1, x) : n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$d(x, T^{m^*} p_2) = \text{mín}\{d(x, T^{m^*} p_2) : m \in \mathbb{N}\}.$$

Si $d(T^{n^*} p_1, x) \leq \eta$ y $d(x, T^{m^*} p_2) \leq \eta$. Por la desigualdad triangular,

$$d(T^{n^*} p_1, T^{m^*} p_2) \leq d(T^{n^*} p_1, x) + d(x, T^{m^*} p_2) \leq 2\eta,$$

lo que no es posible, por tanto o bien $d(T^{n^*} p_1, x)$ o $d(x, T^{m^*} p_2)$ es mayor que η, lo que concluye la prueba. □

Teorema 2.5.7 (Banks–Brooks–Cairns–Davis–Stacey)**.** *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados y sea $T : X \to X$ una aplicación continua, transitiva y con un conjunto denso de puntos periódicos. Entonces T es sensible a las condiciones iniciales para cualquier métrica que genere la topología de X.*

Demostración. Sea η del lema anterior. Vamos a demostrar que tenemos sensibilidad respecto a las condiciones iniciales con $\delta = \eta/4$. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $Per(T)$ es denso tenemos que existe $q \in Per(T)$ tal que

$$d(x, q) < \text{mín}(\varepsilon, \delta).$$

Denotemos por N al período de q. Además, por el lema anterior, existe $p \in Per(T)$ tal que

$$d(x, T^n p) > \eta = 4\delta; \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Como T es continua existe un entorno V abierto tal que

$$d(T^n p, T^n y) < \delta; \ n = 0, 1, \dots, N, \ y \in V$$

y al ser T transitiva tenemos que existen $z \in X$, $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$ y $T^k z \in V$. Sea $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $k \leq jN < k + N$. Aplicando ahora la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} d(T^{jN} q, T^{jN} z) &= d(q, T^{jN-k} T^k z) \\ &\geq d(x, T^{jN-k} p) - d(T^{jN-k} p, T^{jN-k} T^k z) - d(x, q) \\ &> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta, \end{aligned}$$

con lo que $d(T^{jN} x, q) > \delta$ o $d(T^{jN} x, T^{jN} z) > \delta$. Pero ambos tienen distancia menor que ε a x con lo que hemos terminado. □

A la luz del resultado anterior, está claro que nuestra definición de caos puede prescindir de la condición de sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que se deduce de las otras dos. Observemos que toda aplicación caótica es hipercíclica por definición, pero no al revés. Vamos a finalizar con algún ejemplo.

Ejemplo 2.5.8. (a) *El sistema $(S^1, R_{\sqrt{2}\pi})$ no es caótico ya que no tiene puntos periódicos, pero la aplicación $R_{\sqrt{2}\pi}$ sí es hipercíclica por el Ejemplo 2.1.4.*

(b) *El sistema* (S^1, M_2) *es caótico. Es transitiva, ya que cualquier abierto debe contener un arco de la forma* $\left(e^{2\pi i(\theta+\varepsilon)}, e^{2\pi i(\theta+\varepsilon)}\right)$ *para cierto* $\theta \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$. *Cada vez que tomamos la imagen este arco crece, finalmente tocando a todos los abiertos. Además, los puntos periódicos se corresponden con las raíces* $(2^n - 1)-$*ésima de la unidad para cualquier* n, *que es un conjunto denso.*

Capítulo 3

Hiperciclicidad lineal

"The infinite we shall do right away. The finite may take a little longer."

(Stan Ulam [21]— From Cardinals to Chaos: Reflection on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam)

3.1. Sistemas dinámicos lineales

Nos centraremos ahora en el estudio de sistemas dinámicos *lineales*, es decir, sistemas dinámicos en los que la aplicación es lineal.

Definición 3.1.1. *Un* ***sistema dinámico lineal*** *es un par* (X, T) *tal que* X *es un espacio de Fréchet y* T *es un operador, es decir, una aplicación lineal y continua.*

Notación. *En este caso, a los puntos hipercíclicos nos referiremos normalmente como vectores hipercíclicos.*

Nos podemos referir a sistemas dinámicos de forma más general considerando X un espacio vectorial topológico cualquiera. Sin embargo, para este trabajo, nos limitaremos a espacios de Fréchet y los casos particulares de espacios de Banach y Hilbert.

Estos sistemas están ligados con el **problema del subconjunto invariante**, que plantea si todo operador T en un espacio de Hilbert posee un subconjunto A cerrado T-invariante, es decir, un conjunto $A \subset X$ cerrado tal que $T(A) \subseteq A$.

Equivalentemente, se trata de saber si puede existir o no un operador en un espacio de Hilbert tal que todo punto sea hipercíclico. Gracias a los trabajos de Enflo [26] y Read [46], se ha demostrado que este problema tiene una respuesta negativa para el caso de espacios que no sean de Hilbert. Es más, posteriormente, Read [47] dio un contraejemplo en ℓ^1. Sin embargo, esta pregunta sigue abierta para espacios de Hilbert.

Introducimos ahora los ejemplo clásicos de operadores lineales hipercíclicos que nos acompañaran en el resto de esta sección.

Ejemplo 3.1.2 (Operadores de Birkhoff [13])**.** *Se define como el operador traslación,* $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ *con* $a \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ *como*

$$T_a f(z) = f(z+a).$$

Veamos que es hipercíclico. Sean $U, V \subseteq H(\mathbb{C})$ *abiertos no vacíos. Consideremos fijadas funciones* $f \in U$ *y* $g \in V$*. Existe* $\varepsilon > 0$ *y un compacto* K *centrado en el origen tal que si* $\sup_{z\in K}\big|f(z) - h(z)\big| < \varepsilon$ *entonces* $h \in U$ *(y análogamente para* V*). Tomamos* $n \in \mathbb{N}$ *lo suficientemente grande para que* $K \cap (K + na) = \varnothing$ *y consideramos la función* h *tal que*

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & \text{en un entorno de } K, \\ g(z-na), & \text{en un entorno de } K+na. \end{cases}$$

Por el Teorema de Runge (Teorema 1.4.2) existe un polinomio p *tal que*

$$\sup_{z\in K}\big|h(z) - p(z)\big| < \varepsilon \quad y \quad \sup_{z\in K+na}\big|h(z) - p(z)\big| < \varepsilon$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sup_{z\in K}\big|f(z) - p(z)\big| < \varepsilon \quad y \quad \sup_{z\in K+na}\big|g(z-na) - p(z)\big| < \varepsilon,$$

con lo que además

$$\sup_{z\in K}\big|g(z)-p(z+na)\big|<\varepsilon.$$

Es decir, $p\in U$ y $T_a^n p\in V$, por lo que T_a es transitivo y por el Teorema de Transitividad de Birkhoff (Teorema 2.4.1) es hipercíclico.

Ejemplo 3.1.3 (Operador de MacLane [40])**.** *Se define como el operador derivada en $H(\mathbb{C})$, es decir, el operador $D: H(\mathbb{C})\to H(\mathbb{C})$ dado por*

$$Df=f'.$$

Vamos a ver que este operador es también hipercíclico. Para ello sean $U,V\subseteq H(\mathbb{C})$ abiertos no vacíos. Sabemos que los polinomios son densos en $H(\mathbb{C})$, por tanto, existen $p(z)=\sum_{k=0}^N a_k z^k\in U$ y $q(z)=\sum_{k=0}^N b_k z^k\in V$ polinomios, que podemos asumir del mismo grado (añadir los términos con coeficiente 0 necesarios). Sea $n>N$, consideramos el polinomio

$$r(z)=p(z)+\sum_{k=0}^{N}\frac{k!b_k}{(k+n)!}z^{k+n},$$

que cumple $D^n r=q$. Además, para $R>0$ se tiene,

$$\sup_{|z|\le R}\big|r(z)-p(z)\big|\le\sum_{k=0}^{N}\frac{k!|b_k|}{(k+n)!}R^{k+n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

Por tanto, para n suficientemente grande, se tiene $r\in U$ y $D^n r\in V$ con lo que D es transitivo y, por tanto, hipercíclico.

Es posible encontrar funciones que sean hipercíclicas tanto para Birkhoff como para MacLane al mismo tiempo. La prueba es inmediata a partir del Teorema de Transitividad de Birkhoff (Teorema 2.4.1). Para el interesado, consultar [14].

Ejemplo 3.1.4 (Operadores de Rolewicz [48])**.** *Consideramos el espacio $X=\ell^p$, $1\le p\le\infty$, ó $X=c_0$ y definimos el operador $B_\lambda: X\to X$ como*

$$B_\lambda((x_1,x_2,x_3,\dots))=\lambda(x_2,x_3,x_4,\dots),\ \lambda\in\mathbb{K}.$$

Este operador es hipercíclico si y solo si $|\lambda| > 1$. *La prueba de la hiperciclicidad sigue unas líneas generales parecidas al operador de MacLane (notar que podemos ver una función como la sucesión de sus coeficientes en su expansión de Taylor). Históricamente, este operador constituye el primer ejemplo dado de operador hipercíclico en un espacio de Hilbert (tomando* $p = 2$*).*

Veamos ahora un ejemplo ligeramente distinto construido a partir de uno de los operadores clásicos.

Ejemplo 3.1.5. *En las mismas condiciones que antes, definamos el operador* $F_\lambda : X \to X$ *como*

$$F_\lambda((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \lambda(0, x_1, x_2, \dots),\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Definamos ahora el operador $T = F_1$ *y* $S = B_\lambda B_1, |\lambda| > 1$. *Se tiene que* $ST = B_\lambda$ *es hipercíclico, mientras que la composición* TS *no puede ser hipercíclica pues la primera componente siempre será cero.*

3.2. Transitividad en sistemas dinámicos lineales

Vamos a recordar el Teorema de Transitividad de Birkhoff (Teorema 2.4.1), que está claro se sigue teniendo en el caso de sistemas dinámicos lineales.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Transitividad de Birkhoff)**.** *Sea* (X, T) *un sistema dinámico lineal, son equivalentes:*

1. T *es topológicamente transitiva.*

2. T *es hipercíclica.*

Además, si T *es invertible entonces* T *es hipercíclica si y solo si* T^{-1} *lo es.*

Aprovechamos esta sección para incluir algunos resultados adicionales, estos pueden consultarse en [37] para el caso especial de espacios de Banach. Nuestra prueba ajustará ligeramente los argumentos para extenderla al caso de espacios de Fréchet.

Proposición 3.2.2. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Si T es invertible y no es hipercíclico, entonces T y T^{-1} comparten un subconjunto invariante cerrado.*

Demostración. Sabemos que T no es hipercíclico, por tanto T^{-1} tampoco lo es. Sea $x \in X$ cualesquiera no nulo. Consideramos

$$J = \overline{Orb(x, T) \cup Orb(x, T^{-1})}.$$

Tenemos que J es cerrado, invariante por T y T^{-1} por construcción. Si $J \neq X$ ya hemos terminado. Supongamos que $J = X$. Entonces $Orb(x, T)$ es no discreta, ya que en caso contrario se tendría $\overline{Orb(x, T^{-1})} = X$, lo que no es posible. Por tanto el conjunto

$$L = \{y \in X : T^{r_i}x \to y \text{ para alguna sucesión } (r_i) \in \mathbb{N} \text{ creciente}\},$$

contiene un vector w no nulo y $L \subseteq \overline{Orb(x, T)} \neq X$.

Veamos que es invariante para T y T^{-1}. Sea $y \in L$ entonces tenemos que existe una sucesión (r_i) tal que $T^{r_i}x \to y$, de donde claramente $T^{r_i+1}x = T(T^{r_i}x) \to Ty$ con lo que $Ty \in L$, de manera similar se prueba para $T^{-1}y$.

Solo queda demostrar L es cerrado, o lo que es lo mismo, $X \backslash L$ es abierto. Sea $v \in X \backslash L$ entonces debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $d(v, T^n x) > \varepsilon$ para todo $n \geq N$ o lo que es lo mismo $B(v, \varepsilon) \subseteq X \backslash L$ y ya hemos terminado. □

Notar que realmente no hemos hecho uso de propiedades de linealidad, excepto para obtener un vector w no nulo. En un espacio métrico general se puede deducir fácilmente un resultado similar.

Teorema 3.2.3. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal tal que T sea invertible. Son equivalentes:*

(a) *T es hipercíclico.*

(b) *Existe un vector $x \in HC(T) \cap HC(T^{-1})$.*

(c) *Existe un vector $x \in X$ tal que $\overline{Orb(x,T) \cup Orb(x,T^{-1})} = X$.*

Demostración. (b) $\Longrightarrow$ (a) es por definición. (a) $\Longrightarrow$ (b) es directo de la prueba del Teorema de Transitividad de Birkhoff notando que la intersección de conjuntos G_δ densos sigue siendo densa. Es evidente que (a) $\Longrightarrow$ (c).

Queda únicamente por probar (c) $\Longrightarrow$ (a). Asumiendo (c), existe $x \in X$ tal que

$$X = \overline{Orb(x,T) \cup Orb(x,T^{-1})}.$$

Por el teorema de Categoría de Baire o bien $\overline{Orb(x,T)}$ o $\overline{Orb(x,T^{-1})}$ deben tener interior no vacío. Si $\overline{Orb(x,T)}$ es diseminado, entonces $\overline{Orb(x,T^{-1})} = X$ y T^{-1} sería hipercíclico lo que no es posible. Podemos asumir que el interior de $\overline{Orb(x,T)}$ es no vacío. Definimos nuevamente

$$L = \{y \in X : T^{r_i}x \to y \text{ para sucesión alguna } (r_i) \in \mathbb{N} \text{ creciente}\}$$

que, igual que antes, es un cerrado no vacío Tinvariante. Claramente, debe existir un $p \geq 1$ y un $\delta > 0$ tal que $B(T^p x, \delta) \subseteq \overline{Orb(x,T)}$ de donde debe existir un sucesión (r_i) tal que

$$T^{r_i}x \to T^p x$$

con lo que $T^p x \in L$. Ya que L es invariante para T^{-1} tenemos que $T^{-p}T^p x = x \in L$ y, por tanto,

$$X = \overline{Orb(x,T) \cup Orb(x,T^{-1})} \subseteq L \subseteq \overline{Orb(x,T)},$$

con lo que T es hipercíclico. $\square$

En particular, la propiedad (b) se tiene para sistemas dinámicos en general. Más adelante veremos que este resultado se puede obtener inmediatamente como consecuencia directa del Teorema de Bourdon-Feldman (Teorema 3.3.10).

3.3. Propiedades de los sistemas dinámicos lineales

Vamos ahora a estudiar algunas propiedades particulares de los sistemas dinámicos lineales. Para las primeras propiedades, nos deberemos restringir a espacios más específicos de Hilbert y Banach.

Recordemos que dado un operador T en un espacio de Banach, se define su adjunto T^* como el único operador $T^* : X^* \to X^*$, donde X^* denota el dual de X, que satisface

$$T^*(\phi)x = \phi(Tx) \qquad \forall x \in X,\ \forall \phi \in X^*.$$

Proposición 3.3.1. *Sea (X,T) un sistema dinámico lineal sobre un espacio de Banach, tal que T es hipercíclico. Entonces el operador adjunto T^* no tiene autovalores.*

Demostración. Supongamos que existe un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de T^*, es decir, existe $\phi \in X^*\backslash\{0\}$ tal que $T^*\phi = \lambda\phi$. Tomemos $x \in HC(T)$, tenemos $\phi(T^n x) = ((T^*)^n\phi)(x) = \lambda^n x$, con lo que $\phi((Orb(x,T)) = \{\lambda^n\phi(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es densa lo cual es una contradicción pues implicaría $\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{K}$. $\square$

Proposición 3.3.2. *Sea (X,T) un sistema dinámico lineal sobre un espacio de Banach. Si T es hipercíclico entonces $\|T\| > 1$.*

Demostración. Basta notar que si $\|T\| \leq 1$ entonces se debe tener para $x \in X$ hipercíclico que $\|T^n x\| \leq \|T\|^n \|x\| \leq \|x\|$, lo que es absurdo. $\square$

Veamos ahora propiedades que se cumplen en el ámbito más general de espacios de Fréchet.

Proposición 3.3.3. *Sea (X,T) un sistema dinámico lineal tal que T es hipercíclico. Entonces todo vector $x \in X$ se puede escribir como la suma de dos vectores hipercíclicos.*

Demostración. Sabemos que $HC(T)$ es un G_δ denso, por tanto $x - HC(T)$ también lo es. Por el teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.2.9) sabemos la intersección es no vacía con lo que $x \in HC(T) + HC(T)$. □

Proposición 3.3.4. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal tal que T es hipercíclico. Entonces $T - \lambda I$ es denso para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Q = \overline{(T - \lambda I)}(X) \subset X$ estrictamente. Entonces el cociente, X/Q, es un espacio vectorial no trivial. Sea $\pi : X \to X/Q$, $\pi(x) = x + Q$ la aplicación cociente. Notar que $\pi((T - \lambda I)x) = 0$ para todo $x \in X$ de donde se deduce inmediatamente $\pi(Tx) = \pi(\lambda x) = \lambda\pi(x)$, con lo que $\pi(T^n x) = \lambda^n \pi(x)$ para $n \in \mathbb{N}$. Tomando ahora $x \in HC(T)$ tenemos que $\pi(Orb(x, T)) = \{\lambda^n \pi(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ debe ser densa en Q lo que es imposible ya que $\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ no puede ser denso en $\mathbb{K}$ para ningún λ. □

Señalamos que esta prueba se puede extender más allá de espacios de Fréchet de manera inmediata[6].

Gracias a esta proposición, podemos probar uno de los teoremas fundamentales para sistemas dinámicos lineales. La prueba original de este resultado fue aportada por Bourdon [18] para el caso complejo y extendida por Bès [11] para el caso real. Nuestra demostración está basada en la dada por Martínez [41]. Nos limitaremos a la prueba del caso complejo (la extensión al caso real es sencilla pero requiere de algunos resultados y definiciones adicionales). Para probar ambos casos simultáneamente nos referimos a [6, págs 15-16].

Teorema 3.3.5 (Bourdon[18])**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con T hipercíclico. Entonces $p(T)$ es de rango denso para todo $p \in \mathbb{K}[z] \backslash \{0\}$.*

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{i=0}^{M} a_i z^i$ con $a_M \neq 0$, $M \geq 1$. Basta tener en cuenta que podemos factorizar

$$p(T) = a_M(T - \lambda_1 I) \dots (Y - \lambda_M I), \;\; \lambda_k \in \mathbb{C}, \; 1 \leq k \leq M,$$

y aplicar la proposición anterior. □

El teorema anterior nos permite, además, demostrar el siguiente resultado [18] y [36].

Teorema 3.3.6 (Herrero-Bourdon)**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con T hipercíclico. Si $x \in HC(T)$, entonces*

$$\{p(T)x : p \text{ es un polinomio}\} \backslash \{0\}$$

es un conjunto denso de vectores hipercíclicos. En particular cualquier operador hipercíclico admite un subespacio invariante formado por vectores hipercíclicos (excepto por el 0).

Demostración. Sea $x \in HC(T)$, tenemos que

$$M := \{p(T)x : p \text{ es un polinomio}\} = span(Orb(x, T))$$

es claramente T-invariante y denso. Sea $y \in M\backslash\{0\}$, entonces $y = p(T)x$ y $T^n y = T^n p(T)x = p(T)T^n x$. Como $p(T)$ tiene rango denso y $Orb(x, T)$ es densa, $Orb(y, T)$ es densa. Por tanto, y es hipercíclico. □

Corolario 3.3.7. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con T hipercíclico. Entonces $HC(T)$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Siguiendo la demostración anterior, obtenemos que $dim(M) \geq 1$, ya que en caso contrario x sería un autovector, lo cual no es posible al ser su órbita densa. Claramente $M\backslash\{0\}$ es conexo y como

$$M\backslash\{0\} \subseteq HC(T) \subseteq \overline{M\backslash\{0\}} = X$$

tenemos que $HC(T)$ es conexo. □

Para finalizar esta sección, vamos a ilustrar cómo estos teoremas pueden ser eficaces a la hora de obtener resultados sobre operadores hipercíclicos. En particular, vamos a demostrar que toda potencia de un operador hipercíclico es hipercíclico. Utilizaremos la prueba de Ansari [1], notando que puede ser extendida sin problemas a espacios de Fréchet.

Teorema 3.3.8 (Ansari). *Sea (X,T) un sistema dinámico lineal con T un operador hipercíclico. Entonces (X,T^n), $n \in \mathbb{N}$, es un sistema dinámico lineal con T^n hipercíclico.*

Demostración. Sea $x \in HC(T)$ sabemos que

$$V := \{p(T)x : p \text{ es un polinomio}\}$$

es un conjunto denso de vectores hipercíclicos (excepto 0), T-invariante y conexo. En particular, si denotamos $R = T|_V$ tenemos que todo vector de V es hipercíclico para R. Sea $m \in \mathbb{N}$, queremos ver que $S := Orb(x, R^n) = \{R^{nm}x : m \in \mathbb{N}_0\}$ cumple $\overline{S}^V = V$. Definimos los conjuntos

$$S_k = \bigcup_{0 \le i_1 < \ldots < i_k \le n-1} \{\overline{R^{i_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{i_k}S}^V\}, \quad 1 \le k \le n.$$

Está claro que S_k es cerrado para cada k. Vamos a probar

(a) S_k es R-invariante,

(b) $0 \in S_n$,

(c) $S_n =$ V.

Con lo que habremos terminado, ya que $S_n \subseteq \overline{R^0S}^V = \overline{S}^V$.

Probemos cada uno de estos puntos.

(a) Sea $0 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n-1$ y denotemos

$$j_l = \begin{cases} i_l + 1, & i_l \neq n-1 \\ 0, & i_l = n-1 \end{cases} \qquad 1 \le l \le k$$

está claro que $0 \le j_1 < \ldots < j_l \le n-1$ y

$$\begin{aligned} R(\overline{R^{i_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{i_k}S}^V) &\subseteq \overline{R^{i_1+1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{i_k+1}S}^V \\ &\subseteq \overline{R^{j_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{j_k}S}^V \subseteq S_k. \end{aligned}$$

(b) Tenemos $S_1 = \overline{R^0 S}^V \cup \cdots \cup \overline{R^{n-1} S}^V = \overline{Orb(x,R)}^V = V$, en particular, debe existir $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $0 \in \overline{R^i S}^V$. Notando que $R(\overline{R^i S}^V) \subseteq \overline{R^{i+1} S}^V$ y $\overline{R^n S}^V \subseteq \overline{S}^V$ tenemos que $0 \in \overline{R^0 S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{n-1} S}^V = S_n$.

(c) Vamos a proceder por inducción. Sabemos que $S_1 = V$, supongamos que $S_k = V$, veamos que $S_{k+1} = V$. Supongamos que $S_{k+1} \neq V$. Como todo vector es hipercíclico para V y S_{k+1} es R-invariante debemos tener $S_{k+1} = \{0\}$. Si $(i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots j_k)$ entonces

$$\left(\overline{R^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{i_k} S}^V\right) \cap \left(\overline{R^{j_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{j_k} S}^V\right) \subset S_{k+1},$$

con lo que

$$\left(\overline{R^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{i_k} S}^V \backslash \{0\}\right) \cap \left(\overline{R^{j_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{R^{j_k} S}^V \backslash \{0\}\right) = \varnothing.$$

De donde $S_k \backslash \{0\}$ es una unión finita de conjuntos disjuntos cerrados (en V), como $S_k \backslash \{0\} = V \backslash \{0\}$ es conexo todos los conjuntos son vacíos salvo uno. Siguiendo el argumento de (a) se debe tener que $R(V \backslash \{0\}) = \varnothing$ pero esto no es posible ya que debe ser denso en V.

Y ya hemos terminado. □

Ejemplo 3.3.9. (a) *Ampliamos nuestra definición del operador de Rolewicz como*

$$B_{\lambda,b}((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = \lambda(x_{b+1}, x_{b+2}, x_{b+3}, \ldots),\ \lambda \in \mathbb{K},\ b \in \mathbb{N},$$

donde b denota el número de pasos hacia atrás a dar. Se puede comprobar que $B_\lambda = B_{\lambda,1}$. Además, es fácil verificar que $B_{\lambda_1,b_1} B_{\lambda_2,b_2} = B_{\lambda_1\lambda_2,b_1+b_2}$, en particular $B_{\lambda,b}^n = B_{\lambda^n,nb}$. A partir del resultado anterior podemos deducir que $B_{\lambda,b}$ es hipercíclico si y solo si $|\lambda| > 1$ para cualquier $b \in \mathbb{N}$. Es más, si tenemos $B_{\lambda_1,b_1}, \ldots, B_{\lambda_m,b_n}$ sabemos que si $\left|\prod_{i=1}^m \lambda_i\right| > 1$ entonces la composición es hipercíclica.

(b) *Volvemos a ampliar nuestra definición de operador de Rolewicz como*

$$B_{\lambda,b,s,d}((x_1, x_2, x_3, \ldots)) =$$
$$= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1+bs}, x_{d+2}, \ldots, x_{d+s}, x_{d+1+(b+1)s}, s_{d+s+2}, \ldots)$$

$$\lambda \in \mathbb{K},\ b \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0.$$

Donde s denota cada cuanto se debe dar el paso backwards y d el delay. Notar que $B_{\lambda,b} = B_{\lambda,b,1,0}$ y por notación usaremos $B_{\lambda,b,s} = B_{\lambda,b,s,0}$. Está claro que si $d > 0$ o $s > 1$ entonces el operador no puede ser hipercíclico. Ahora bien, si consideramos $B_{\lambda_1,1,2,0}$ y $B_{\lambda_2,1,2,1}$ tenemos que su composición es $B_{\lambda_1\lambda_2,2}$ que si $|\lambda_1\lambda_2| > 1$ es hipercíclica, mientras que ninguno de los operadores iniciales lo era.

Además, usando las ideas de la prueba anterior, es posible llegar a probar el siguiente resultado [19] para espacios de Fréchet.

Teorema 3.3.10 (Bourdon-Feldman)**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal y $x \in X$. Si $Orb(x, T)$ es no diseminada, entonces es densa.*

La mayoría de estos resultados, pueden ser extendido a espacios vectoriales topológicos, para el interesado nos referimos a [54].

Como consecuencia directa podemos obtener el siguiente teorema. Notar que este teorema es anterior históricamente a Bourdon-Feldman (Teorema 3.3.10) y fue uno de los impulsores de su descubrimiento [44], [22].

Teorema 3.3.11 (Costakis-Peris)**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal, y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Si tenemos que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} Orb(x_i, T)$$

es densa en X, entonces al menos un x_i es un vector hipercíclico y, por tanto, T es hipercíclico.

Demostración. Por hipótesis tenemos

$$X = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} Orb(x_i, T)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{Orb(x_i, T)}$$

de donde alguna de las órbitas debe ser no diseminada. Por el Teorema de Bourdon-Feldman (Teorema 3.3.10) dicha órbita es densa y por tanto T es hipercíclico. □

Podemos ver que el Teorema de Ansari (Teorema 3.3.8) es entonces inmediato.

Teorema 3.3.12 (Ansari)**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con T un operador hipercíclico. Entonces (X, T^n), $n \in \mathbb{N}$, es un sistema dinámico lineal con T^n hipercíclico y $HC(T) = HC(T^n)$.*

Demostración. Sea $x \in HC(T)$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos

$$Orb(x, T) = \bigcup_{j=0}^{n-1} Orb(T^j x, T^n)$$

que sabemos que es denso en X y por Costakis-Peris sabemos que $T^j x$ es un vector hipercíclico de T^n para cierto j. Como T^{n-j} tiene rango denso, tenemos

$$T^{n-j} Orb(T^j x, T^n) \subset Orb(x, T^n),$$

por lo que $x \in HC(T^n)$. □

3.3.1. Independencia en vectores hipercíclicos

Vamos ahora a ver que no pueden existir sistemas dinámicos lineales con operadores hipercíclicos en dimensión finita, para ello, primero necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Proposición 3.3.13. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con $dim(X) < \infty$. Supongamos que T es hipercíclico y sea $x \in X$ un vector hipercíclico. Dado $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $dim(X) \geq N$ el conjunto $\{x, Tx, \ldots, T^{N-1}x\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Operemos por reducción a lo absurdo. Supongamos que existen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tal que

$$\alpha_0 x + \cdots + \alpha_{N-1} T^{N-1} x = 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\alpha_{N-1} \neq 0$. Tenemos entonces

$$\alpha_{N-1} T^{N-1} x = -\alpha_0 x - \cdots - \alpha_{N-2} T^{N-2} x$$

con lo que $T^{N-1}x \in span(\{x, \ldots, T^{N-2}x\})$. Aplicando T, tenemos que $T^N x \in span(\{Tx, \ldots, T^{N-1}x\} \subseteq span(\{x, \ldots, T^{N-2}x\})$ y si continuamos aplicando T se obtiene $T^{N-1+j}x \in span(\{x, \ldots, T^{N-2}x\})$ para todo $j \geq 0$, con lo que tenemos $X = span(Orb(x, T)) = span(\{x, \ldots, T^{N-2}x\})$ pero esto no es posible ya que $dim(span(\{x, \ldots, T^{N-2}x\})) = N - 1 < N \leq dim(X)$. □

Ya podemos probar el resultado para hiperciclicidad en un espacio finito.

Teorema 3.3.14. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con $dim(X) = N < \infty$, entonces T no puede ser hipercíclico.*

Demostración. Operemos por reducción a lo absurdo. Fijemos $\alpha \in \mathbb{K}$, y tomemos $x \in X$ un vector hipercíclico y una sucesión (n_k) tal que $T^{n_k}x \to \alpha x$. Tenemos entonces $T^{n_k}(T^i x) = T^i(T^{n_k}x) \to T^i(\alpha x) = \alpha T^i x$ para todo $0 \leq i < N$. Como $\{x, \ldots, T^{N-1}x\}$ es una base se tiene $T^{n_k}z \to \alpha z$ para todo $z \in X$ con lo que $T^{n_k} \to \alpha I$ y $det(T^{n_k}) \to det(\alpha I) = |\alpha|^N$. Tomando ahora $\beta = \left|det(T)\right|$, esto implica que $\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{K}$ lo cual es una contradicción. □

Además el resultado anterior nos permite extender la independencia en las órbitas a cualquier espacio de Fréchet independientemente de la dimensión.

Proposición 3.3.15. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con T hipercíclico. Sea $x \in HC(T)$ un vector hipercíclico. Entonces $Orb(x, T)$ es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Por reducción a lo absurdo. Si existiese un N tal que

$$T^{N+1}x = \alpha_0 x + \ldots \alpha_N T^N x,$$

entonces tenemos que $S = span(\{x, \ldots, T^{N+1}x\})$ es un conjunto invariante por T. Como x es hipercíclico en X, se tiene que también lo es para $T|_S$ pero esto no es posible al ser S de dimensión finita. □

Capítulo 4

Criterios de hiperciclicidad

"The elegance of a mathematical theorem is directly proportional to the number of independent ideas one can see in the theorem and inversely proportional to the effort it takes to see them."

(George Polya [45]— Mathematics discovery: An understanding, learning, and teaching problem solving)

4.1. Primeros Criterios

Estamos interesados en criterios que nos permitan deducir la hiperciclidad de un operador sin la necesidad de probarlo directamente a partir de la definición (o de su reformulación equivalente por transitividad).

Los primeros criterios de este tipo fueron encontrados independientemente por Kitai [38] y Gethner y Shapiro [29]. El Criterio de Hiperciclicidad, en su versión general, es debido a Bès y Peris. [12][1].

No seguiremos un procedimiento histórico, que implicaría empezar con el Criterio de Kitai [38], sino que trataremos de relajar y modificar progresivamente las condiciones de los criterios que vayamos viendo hasta llegar a los

[1]Realmente los criterios que veremos implican una condición más fuerte que la hiperciclidad, y, para cada criterio, relajamos ligeramente la condición que se obtiene. Todas estas implican a su vez hiperciclicidad, que es lo único que usaremos a efecto de este trabajo.

criterios más conocidos.

Teorema 4.1.1 (Criterio de Godefroy-Shapiro [30] y [8]). *Sea* (X,T) *un sistema dinámico lineal, supongamos que los conjuntos*

(a) $X_0 = span\{x \in X : Tx = \lambda x, |\lambda| < 1\}$,

(b) $Y_0 = span\{x \in X : Tx = \lambda x, |\lambda| > 1\}$,

son densos. Entonces T *es hipercíclico.*

Demostración. Vamos a probar que T es transitivo. Fijemos $U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos. Ya que X_0 e Y_0 son densos, existen $x \in U \cap X_0$, $y \in V \cap Y_0$ que los podemos escribir como

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i, \quad y = \sum_{j=1}^{l} b_j y_j,$$

de tal forma que $Tx_i = \lambda_i x_i$, $Ty_i = \mu_i y_i$ con $|\mu_i| > 1 > \left|\lambda_j\right|$. Notar que, en particular, $T^n x \to 0$ cuando $n \to 0$. Definiendo

$$u_n = \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j}{\mu_j} y_j,$$

se tiene $u_n \to 0$ y $T^n u_n = y$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por tanto existe N tal que si $n \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} &x + u_n \in U, \\ &T^n(x + u_n) = T^n x + y \in V, \end{aligned}$$

con lo que $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$ y el operador es transitivo y por el Teorema de Transitividad de Birkhoff (Teorema 2.4.1) hipercíclico. $\square$

Vamos a utilizar este criterio para volver a demostrar la hiperciclicidad del operador de translación de Birkhoff. Para ello necesitamos el siguiente resultado adicional. Denotemos por e_λ a la función $e^{\lambda z}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lema 4.1.2. *Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto con un punto de acumulación, entonces el conjunto*

$$span\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

es denso en $H(\mathbb{C})$.

Demostración. Tenemos que existe una sucesión $(\lambda_n) \subset \Lambda,\ n \geq 1$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ y $\lambda_n \neq \lambda$ $(n \geq 1)$. Ahora escribimos

$$e^{\lambda_n z} = e^{\lambda z} e^{(\lambda_n - \lambda)z} = e^{\lambda z} + e^{\lambda z}(\lambda_n - \lambda)z + e^{\lambda_z}\frac{(\lambda_n - \lambda)^2 z^2}{2!} + \ldots$$

Tenemos además

$$e^{\lambda_n z} \to e^{\lambda z} \text{ uniformemente en todo conjunto compacto,}$$

con lo que la función $e_\lambda \in \overline{\text{span}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}}$ y de la expresión anterior

$$\frac{e^{\lambda n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} = e^{\lambda z} z + e^{\lambda_z}\frac{(\lambda_n - \lambda)^2 z^2}{2!} + \ldots$$

de donde

$$\frac{e^{\lambda n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} \to z e^{\lambda z},$$

con lo que $z \mapsto z e^{\lambda z}$ pertenece a $\overline{\text{span}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}}$. Continuando con este razonamiento, las fuciones de la forma $z^k e^{\lambda z},\ k \geq 0$ pertenecen a $\overline{\text{span}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}}$. Sea ahora $f \in H(\mathbb{C})$ cualesquiera, tenemos

$$f(z) = e^{\lambda z}(e^{-\lambda z} f(z)) = e^{\lambda z}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda z} a_k z^k$$

con coeficientes $a_k \in \mathbb{C},\ k \geq 0$ adecuados por tanto tenemos que $f \in \overline{\text{span}\{e_{\lambda_n} : n \geq 1\}}$. □

Ejemplo 4.1.3. *Sea $T_a,\ a \neq 0$ el operador de Birkhoff. Es claro que $e_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}$ es un autovector de T_a con autovalor $e^{a\lambda}$. Por tanto el subespacio X_0 contiene a span$\{e_\lambda : \left|e^{a\lambda}\right| < 1\}$, por lo que, por el lema anterior, es denso. De manera similar Y_0 es denso. Aplicando el Criterio de Gofedroy-Shapiro (Teorema 4.1.1) tenemos T_a que es hipercíclico.*

Extrayendo las ideas principales de la prueba del Criterio de Godefroy-Shapiro (Teorema 4.1.1) se puede obtener una prueba del siguiente teorema, el Criterio de Kitai. La prueba que presentamos no es la original de Kitai, quién proporcionó un método constructivo [38].

Teorema 4.1.4 (Criterio de Kitai)**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Supongamos que tenemos conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$ y una función $S : Y_0 \to Y_0$ tal que para todo $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ se tiene:*

(a) $T^n x \to 0 \quad (n \to \infty)$,

(b) $S^n y \to 0 \quad (n \to \infty)$,

(c) $TSy = y$.

entonces T es hipercíclico.

Demostración. Al igual que antes, es suficiente probar que T es transitivo. Fijemos $U, V \in X$ abiertos no vacíos. Como X_0 e Y_0 son densos existen $x \in U \cap X_0$, $y \in V \cap Y_0$. Tenemos

$$T^n x \to 0, \quad S^n y \to 0 \quad \text{y} \quad TSy = y \quad (n \to \infty),$$

pero entonces existe N tal que si $n \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} &x + S^n y \in U, \\ &T^n(x + S^n y) = T^n x + T^n S^n y = T^n x + y \in V, \end{aligned}$$

con lo que se tiene transitividad. □

En el criterio no estamos exigiendo condiciones adicionales sobre la aplicación. En particular, no es necesario que sea ni lineal ni continua.

Ejemplo 4.1.5. *Vamos a ver que los operadores de Rolewicz y MacLane son hipercíclicos utilizando el Criterio de Kitai.*

(a) *Para MacLane, consideramos* $X_0 = Y_0$ *el conjunto de polinomios. Y tomamos* S *como el operador integral* $S = \int_0^z f(x)dx$. *La primera y tercera condición son evidentes. Para la segunda basta notar que para cualquier monomio* z^k *sus imágenes iteradas* $S^n z^k = \frac{k!}{(k+n)!} z^{n+k}$ *tienden a* 0 *cuando* $n \to \infty$ *independientemente de* $k \geq 0$.

(b) *Para Rolewicz* B_λ *con* $|\lambda| > 1$, *basta tomar* $X_0 = Y_0$ *el conjunto de sucesiones finitas con coeficientes racionales. Recordemos que una sucesión finita con coeficientes racionales es una sucesión de la forma* $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ *con* $x_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, k \geq 1$. *Tomamos* $S = F_{1/\lambda}$. *De nuevo vemos que satisface las condiciones del Criterio de Kitai. La primera condición es inmediata ya que, al ser la sucesión finita, tras un número finito de aplicaciones de* B_λ *la sucesión es* 0. *La segunda condición es inmediata ya que* $1/\lambda^n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *igualmente, la tercera es clara. Por tanto, el operador es hipercíclico.*

Vamos a ver ahora que el Criterio de Kitai (Teorema 4.1.4) realmente engloba al Criterio de Godefroy-Shapiro (Teorema 4.1.1).

Primero, notar que en la prueba del Criterio de Godefroy-Shapiro simplemente definimos la función S sobre Y_0 como $Ty = u_n$ definido en la prueba. Así está claro que tenemos las condiciones del Criterio de Kitai.

Sin embargo, vamos a ver que se puede no cumplir el Criterio de Godefroy-Shapiro y sí cumplirse el Criterio de Kitai.

Ejemplo 4.1.6. *Consideremos ahora* $X = \ell^1(\mathbb{Z}, v)$. *Tomando* $v_k = \frac{1}{|k|+1}$, $k \in \mathbb{Z}$ *con el operador*

$$T(x_k) = (x_{k-1}.$$

Supongamos que se tiene $Tx = \lambda x$ *con* $x \neq 0$ *entonces se debe tener*

$$x = \left(\ldots, \frac{1}{\lambda^2}x_0, \frac{1}{\lambda}x_0, x_0, \lambda x_0, \lambda^2 x_0, \ldots\right), \qquad \lambda \neq 0,\ x_0 \neq 0,$$

pero entonces

$$\|x\| = |x_0| \left(1 \sum_{k\geq 1} \frac{|\lambda|^k}{k+1} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{|\lambda|^k (k+1)}\right) = \infty,$$

por lo que T no puede tener autovectores y, por tanto, no puede satisfacer el Criterio de Godefroy-Shapiro (Teorema 4.1.1). En cambio si tomamos $X_0 = Y_0$ el espacio de sucesiones finitas,

$$X_0 = Y_0 = \{(\dots, 0, 0, x_{-l}, \dots, x_k, 0, 0, \dots) : k, l \in \mathbb{N}_0\},$$

y $S((x_k))_{k\in\mathbb{Z}} = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$, exactamente igual que en el Ejemplo 4.1.5 (b) es inmediato que se cumple el Criterio de Kitai y, por tanto, el operador es hipercíclico.

4.2. Criterio de Hiperciclicidad

De la prueba del Criterio de Kitai (Teorema 4.1.4) está claro que no es necesario que las condiciones se cumplan para la sucesión (n), es suficiente utilizar una subsucesión (n_k). Con esta observación tenemos el siguiente criterio.

Teorema 4.2.1 (Criterio de Gethner-Shapiro)**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Supongamos conjuntos $X_0, Y_0 \subseteq X$ densos, una sucesión (n_k) de enteros positivos y una aplicación $S : Y_0 \to Y_0$ tal que para todo $x \in X_0,\ y \in Y_0$ se tiene:*

(a) $T^{n_k}x \to 0 \quad (k \to \infty)$,

(b) $S^{n_k}y \to 0 \quad (k \to \infty)$,

(c) $TSy = y$.

entonces T es hipercíclico.

Demostración. Nuevamente es suficiente ver que T es transitivo. Sean $U, V \in X$ abiertos no vacíos. Por hipótesis existen $x \in U \cap X_0$, $y \in V \cap Y_0$. Tenemos entonces

$$T^{n_k}x \to 0, \quad S^{n_k}y \to 0 \quad \text{y} \quad TSy = y \quad (k \to \infty).$$

Pero entonces existe K_0 tal que si $k \geq K_0$ se tiene

$$x + S^{n_k} \in U,$$
$$T^{n_k}(x + S^{n_k} y) = T^{n_k} x + T^{n_k} S^{n_k} y = T^{n_k} x + y \in V,$$

con lo que tenemos transitividad. □

Notemos que la prueba es exactamente la misma que para el Criterio de Kitai, con la única diferencia de que, en la parte final, no se tiene para todo n mayor o igual que cierto N, sino tan solo para una subsucesión.

Finalmente podemos darnos cuenta que es posible relajar aún más las condiciones necesarias para la hiperciclicidad, llegando así al Criterio de Hiperciclicidad en su versión más conocida.

Teorema 4.2.2 (Criterio de Hiperciclicidad). *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Supongamos que existen dos conjuntos $X_0, Y_0 \subseteq X$ densos, una sucesión (n_k) de enteros positivos con una sucesión de aplicaciones $S_{n_k} : Y_0 \to X$ tales que para todo $x \in X_0$, $y \in Y_0$ se tiene:*

(a) $T^{n_k} x \to 0 \quad (k \to \infty)$,

(b) $S_{n_k} y \to 0 \quad (k \to \infty)$,

(c) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y \quad (k \to \infty)$.

Entonces T es hipercíclico.

Demostración. Procedemos exactamente igual que antes. Sean $U, V \in X$ abiertos no vacíos. Consideramos $x \in U \cap X_0$, $y \in V \cap Y_0$. Luego, por hipótesis,

$$T^{n_k} x \to 0, \quad S_{n_k} y \to 0 \quad \text{y} \quad T^{n_k} S_{n_k} y \to y \quad (k \to \infty).$$

Pero entonces existe K_0 tal que si $k \geq K_0$ se tiene

$$x + S_{n_k} y \in U,$$
$$T^{n_k}(x + S_{n_k} y) = T^{n_k} x + T^{n_k} S_{n_k} y = T^{n_k} x + T^{n_k} S_{n_k} y \in V,$$

por tanto la aplicación es transitiva. □

Nuevamente, la prueba es esencialmente la misma simplemente con las condiciones relajadas convenientemente donde ha sido posible.

Es posible demostrar que, de hecho, el Criterio de Gethner-Shapiro (Teorema 4.2.1) y el Criterio de Hiperciclicidad (Teorema 4.2.2) son equivalentes. Para una prueba puede consultarse [33, pág 81].

4.3. Hiperciclicidad para sucesiones de operadores

En esta sección vamos a extender los resultados anteriores al caso de sucesiones de operadores. Es importante remarcar que las pruebas aportadas se mantienen igual si en vez de utilizar las potencias T^{n_k} de un operador estas se sustituyen por un operador arbitrario T_{n_k} en una sucesión de operadores (T_n). De esta forma se obtiene automáticamente el Criterio de Hiperciclicidad para sucesiones de operadores.

Teorema 4.3.1 (Criterio de Hiperciclicidad para sucesiones). *Sean X, Y dos espacios de Fréchet, y sea (T_n) una sucesión de operadores. Supongamos que existen $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ densos, una sucesión (n_k) de enteros positivos con una sucesión de aplicaciones $S_{n_k} : Y_0 \to X$ tal que para todo $x \in X_0$, $y \in Y_0$ se tiene:*

(a) $T_{n_k}x \to 0 \quad (k \to \infty)$,

(b) $S_{n_k}y \to 0 \quad (k \to \infty)$,

(c) $T_{n_k}S_{n_k}y \to y \quad (k \to \infty)$.

Entonces la sucesión (T_n) es hipercíclica.

En este caso, es posible encontrar fácilmente un ejemplo de sucesión de operadores hipercíclica que no cumplan el Criterio de Hiperciclicidad para sucesiones (Teorema 4.3.1).

Ejemplo 4.3.2. *Retomemos el Ejemplo 2.3.6. Sea* (x_n) *una sucesión densa en* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $y_n \in \mathbb{R}^2$, $n \geq 1$ *vectores de norma* n *ortogonales a* x_n. *Tomemos las aplicaciones* $T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dadas por*

$$T_n(\alpha, \beta) = \alpha x_n + \beta y_n.$$

Sabemos que esta sucesión es hipercíclica. Sin embargo, para cualquier $\beta \neq 0$ *se tiene que* $\|T_n(\alpha, \beta)\| \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$. *Es decir, no puede existir un conjunto denso que satisfaga la propiedad (a) del Criterio de Hiperciclicidad para sucesiones.*

Sin embargo, durante muchos años, se ha tratado de dilucidar si el Criterio de Hiperciclicidad (Teorema 4.2.2) es una caracterización de la hiperciclicidad de un operador, es decir, ver si solamente es una condición suficiente o si también es necesaria. En 2006[2], de la Rosa y Read [24] proporcionaron un espacio de Banach con un contraejemplo de un operador hipercíclico que no cumpliese el Criterio de Hiperciclicidad, dando así una respuesta negativa a la pregunta. Pronto, en 2007 Bayart y Matheron simplificaron el espacio y el operador, ofreciendo ejemplos en espacios ℓ^p [5].

De hecho, el Criterio de Hiperciclicidad es una caracterización de una propiedad ligeramente más fuerte que la hiperciclicidad, la de ser un operador **débilmente mezclante** (weakly mixing) [12]. El ejemplo de la Rosa y Read consiste en encontrar un operador hipercíclico que no posea esta propiedad. Para el interesado sobre más criterios para sucesiones de operadores puede consultarse [10], [7] y [51].

[2]Señalar que el artículo salió en *preprint* en 2006 y fue publicado en 2009. Eso explica el siguiente contraejemplo de Bayart y Matheron que fue publicado en 2007, aparentemente antes del ejemplo original de la Rosa y Read.

Capítulo 5

Operadores frecuentemente hipercíclicos

"It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment. When I have clarified and exhausted a subject, then I turn away from it, in order to go into darkness again."

(Carl Friedrich Gauss [28]— Letter to Bolyai, 1808)

5.1. Introducción

Un operador es hipercíclico cuando existe un vector que *visita* a todos los abiertos de la topología, es decir, cuando existe $x \in X$ tal que para cualquier abierto no vacío U de X se tiene $U \cap Orb(x, T) \neq \varnothing$. Nos interesamos ahora por aquellos operadores que tienen vectores que no sólo *visitan* los abiertos, sino que, además, lo hacen *frecuentemente*. Para ello, primero debemos introducir nociones que nos permitan entender a qué nos referimos con *frecuentemente*. Comenzaremos con una definición que nos permite formalizar esta idea.

Definición 5.1.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}_0$, se define $\underline{dens}(A)$ la* ***densidad inferior***

de A como

$$\underline{dens}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{card\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1}.$$

De la misma forma se define la ***densidad superior*** *de A como*

$$\overline{dens}(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{card\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1}.$$

En caso de que ambas coincidan diremos que la ***densidad*** *de A es* $dens(A) = \underline{dens}(A) = \overline{dens}(A)$.

Estos conceptos nos permiten tener una idea de *tamaño* dentro del conjunto de los números naturales. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1.2. (a) *Fijemos* $n \in \mathbb{N}$ *y consideramos* $n\mathbb{N} := \{n, 2n, \dots\}$. *Se tiene* $dens(n\mathbb{N}) = \overline{dens}(n\mathbb{N}) = \underline{dens}(n\mathbb{N}) = 1/n$. *Así por ejemplo,* $dens(2\mathbb{N}) = 1/2$ *y* $dens(3\mathbb{N}) = 1/3$.

(b) *Sea* $A \subset \mathbb{N}$ *finito, está claro que* $dens(A) = \overline{dens}(A) = \underline{dens}(A) = 0$.

(c) *Dada una sucesión* (x_k) *estrictamente creciente, definimos el conjunto*

$$S_{x_k} := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \ tal\ que\ x_{2m-1} < n \leq x_{2m}\}.$$

Es decir, nos quedamos con los números naturales que se vayan encontrando entre cada par de coeficientes de forma alternada. Por ejemplo, tomemos $x_k = 2k$. *Tenemos* $S_{2k} = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, \dots\}$ *con* $dens(S_{2k}) = 1/2$.

(d) *Consideremos la sucesión* $x_k = 2^{2^k}$. *Vamos a ver que:*

(i) $\overline{dens}(S_{2^{2^k}}) = 1$,

(ii) $\underline{dens}(S_{2^{2^k}}) = 0$.

Consideremos la sucesión dada por los términos pares de (x_k). *Se tiene*

$$\overline{dens}(S_{2^{2^k}}) \geq \lim_{l\to\infty} \frac{card\{0 \leq n \leq 2^{2^{2l}} : n \in S_{2^{2^k}}\}}{2^{2^{2l}}+1} \geq \lim_{l\to\infty} \frac{2^{2^{2l}} - 2^{2^{(l-1)}}}{2^{2^l}+1} = 1.$$

De forma análoga, considerando los términos impares, $\underline{dens}(S_{2^{2^k}}) = 0$.

Notar que podemos ordenar los elementos de A, con lo que $A = \{n_k : k \geq 1\}$ con $n_{k+1} > n_k$. Tenemos así una forma sencilla de calcular la densidad inferior.

Proposición 5.1.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}_0$, escribimos $A = \{n_k : k \geq 1\}$ creciente, se tiene que $\underline{dens}(A) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$.*

Demostración. Basta notar que si tomamos $n_k \leq N < n_{k+1}$ se tiene

$$card\{0 \leq n \leq N : n \in A\} = k,$$

con lo que

$$\frac{k}{n_{k+1}} \leq \frac{card\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1} < \frac{k}{n_k},$$

y ya hemos terminado. □

Notar que $\underline{dens}(A) > 0$ si y solo si $\liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} > 0$ si y solo si $\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{k}$ está acotado, es decir, si y solo si $n_k = O(k)$.

Ya podemos definir a qué nos referimos con operadores con vectores que *visitan frecuentemente* a los abiertos de la topología.

Definición 5.1.4. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal, se dice que T es **frecuentemente hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que para todo abierto $U \subseteq$ no vacío X se tiene*

$$\underline{dens}(\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\}) > 0.$$

*En dicho caso, diremos que x es un **vector frecuentemente hipercíclico** de T. Al conjunto de vectores frecuentemente hipercíclicos lo denotaremos como $FHC(T)$.*

Claramente si T es frecuentemente hipercíclico y tomamos $x \in FHC(T)$ entonces $Orb(x, T)$ *visita* a todos los abiertos U de X con lo que la órbita es densa y T es hipercíclico, es más, $FHC(T) \subseteq HC(T)$.

Es posible introducir un concepto análogo utilizando la densidad superior en vez de la densidad inferior en la definición, teniendo así la noción de operadores $\mathcal{U}$-frecuentemente hipercíclicos, introducidos por Shkarin [52]. Para más información puede consultarse [17].

Además, a través de la proposición anterior, es inmediato que tenemos una caracterización equivalente.

Proposición 5.1.5. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal y sea $x \in X$. Entonces x es frecuentemente hipercíclico para T si y solo si existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ de enteros positivos, con $n_k = O(k)$, tal que para todo $k \geq 1$ tenemos*

$$T^{n_k}x \in U.$$

Demostración. Inmediato a partir de la Proposición 5.1.3. □

Notar que x será hipercíclico para T si y solo si el resultado anterior es cierto para cualquier sucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ no necesariamente para una de orden $O(k)$.

Otra caracterización equivalente es la siguiente [4]. Recordemos que X es un espacio de Fréchet con F-norma $\|\cdot\|$.

Proposición 5.1.6. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal y sea $x \in X$. Son equivalentes:*

(a) *x es un vector frecuentemente hipercíclico.*

(b) *Para todo $y \in X$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que el conjunto*

$$App(T, x, y, \varepsilon) := \{n \in \mathbb{N}_0 : \|T^n x - y\| < \varepsilon\}$$

tiene densidad positiva.

Demostración. Inmediata a partir de las definiciones. □

En comparación, x será hipercíclico para T si y solo si el conjunto anterior es no vacío.

5.2. Criterio de Hiperciclicidad Frecuente

Queremos encontrar un criterio que nos permita determinar operadores frecuentemente hipercíclicos de manera similar al caso de operadores hipercíclicos [3] y [4].

Daremos aquí una prueba siguiendo [15], [16], que utiliza el método constructivo que empleó Kitai [38] para su criterio. Este mismo método se puede emplear para dar una demostración alternativa del Criterio de Kitai (Teorema 4.1.4) y, más importante, una prueba del Criterio de Hiperciclicidad (Teorema 4.2.2), consultar [33, pág 75] .

Recordemos que X es un espacio de Fréchet separable. Sea $x \in X$, como X es separable podemos encontrar una familia $(y_l)_{l\geq 1}$ de elementos distintos densa en X y existe una familia de subconjuntos $A(l,\nu)$, $l \geq 1$, $\nu \geq 1$ de $\mathbb{N}_0$ tal que si $n \in A(l,\nu)$ se tiene

$$\|T^n x - y_l\| \leq \frac{1}{\nu}.$$

Está claro que si tomamos $A(l,\nu)$ y $A(k,\mu)$ con $l \neq k$, podemos seleccionar ν y μ lo suficientemente grandes tal que $A(l,\nu) \cap A(k,\mu) = \varnothing$. Veamos que podemos encontrar conjuntos con propiedades más estrictas de separación.

Lema 5.2.1. *Existe una familia de subconjuntos* $A(l,\nu)$ $(l \geq 1,\ \nu \geq 1)$ *de* $\mathbb{N}_0$*, disjuntos dos a dos que cumple:*

(a) *Para todo* $n \in A(l,\nu)$ *y* $m \in A(k,\mu)$ *se tiene que* $n \geq \nu$ *y*

$$|n - m| \geq \nu + \mu.$$

(b) $\underline{dens}(A(l,\nu)) > 0$ *para todo* $l \geq 1,\ \nu \geq 1$.

Demostración. Primero necesitamos escribir los números naturales con su representación diádica, es decir, para $n \in \mathbb{N}$ nos referimos

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j = (a_0, a_1, \dots).$$

Para cada $l \geq 1,\ \nu \geq 1$ definimos el conjunto

$$I(l,\nu) = \{(\underbrace{0,\dots 0}_{l-1},\underbrace{1,\dots 1}_{\nu},0,*) : * \text{ sucesión cualesquiera}\}.$$

Es evidente que los conjuntos $I(l,\nu)$ forman una partición de $\mathbb{N}$. Luego, para cada k podemos definir $\delta_k = \nu$ si $k \in I(l,\nu)$ y consideramos la sucesión (n_k) dada por

$$n_k := 2\sum_{i=1}^{k-1}\delta_i + \delta_k, \quad k \geq 1,$$

que claramente es creciente. Definimos ahora

$$A(l,\nu) = \{n_k : k \in I(l,\nu)\}, \quad l \geq 1,\ \nu \geq 1.$$

Veamos que este es el conjunto que estábamos buscando. Sea $n_k \in A(l,\nu)$. Entonces $n_k \geq \delta_k = \nu$. Si $n_j \in A(l,\nu)$ y $n_m \in A(k,\mu)$ (podemos asumir que $j > m$), tenemos

$$n_j - n_m = \delta_m + 2\sum_{i=m+1}^{j-1} + \delta_j \geq \mu + \nu.$$

De donde, además, podemos ver que los conjuntos $A(l,\nu)$ son disjuntos. Solo nos quedaría por probar que los conjuntos $A(l,\nu)$ tienen densidad inferior positiva. Primero vamos a ver que existe $M > 0$ tal que

$$n_k \leq Mk,\ k \geq 1.$$

Es suficiente probarlo para $k = 2^N$ $(N \geq 1)$ ya que entonces dado cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $N \geq 1$ tal que $2^{N-1} \leq k < 2^N$ y tenemos

$$n_k \leq n_{2^N} \leq M2^N \leq 2Mk.$$

Sea $k = 2^N$. Si $l + \nu \leq N + 2$, entonces $I(l,\nu)$ contiene como máximo $2^{N+2-l-\nu}$ elementos menores o iguales a 2^N. Si $l + \nu > N + 2$ no contiene ningún elemento menor o igual a 2^N. Por tanto tenemos

$$n_{2^N} \leq 2\sum_{i=1}^{2^N}\delta_i \leq 2\sum_{l+\nu\leq N+2} 2^{N+2-l-\nu}\nu \leq \big(8\sum_{l,\nu\geq 1}\frac{\nu}{2^{l+\nu}}\big)2^N,$$

con lo que podemos tomar $M = 8\sum_{l,\nu\geq 1}\frac{\nu}{2^{l+\nu}}$. Sea ahora $l \geq 1,\ \nu \geq 1$ y escribimos $I(l,\nu) = \{k_j : j \geq 1\}$ creciente. Sabemos que $I(l,\nu)$ tiene densidad inferior positiva, con lo que existe una constante $K > 0$ tal que

$$k_j \leq Kj, \quad j \geq 1,$$

de donde se sigue que $A(l,\nu) = \{n_{k_j} : j \geq 1\}$ y

$$n_{k_j} \leq Mk_j \leq MKj, \quad j \geq 1.$$

Por tanto, $A(l,\nu)$ tiene densidad inferior positiva.

□

Vamos a enunciar el Criterio de Hiperciclicidad Frecuente. Pero antes, recordemos que significa que una serie sea **incondicionalmente convergente**. Se dice que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente si para cualquier biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ es convergente.

Teorema 5.2.2 (Criterio de Hiperciclicidad Frecuente). *Sea (X,T) un sistema dinámico lineal. Supongamos que existe un subconjunto $X_0 \subseteq X$ denso y una aplicación $S : X_0 \to X_0$ tal que para todo $x \in X_0$ se tiene:*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ *converge incondicionalmente,*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ *converge incondicionalmente,*

(c) $TSx = x$.

Entonces T es frecuentemente hipercíclico.

Demostración. Al ser X separable podemos escoger una sucesión (y_j) de X_0 densa en X. Sea $\|\cdot\|$ la F-norma que define la topología en X. Por (a) y (b) existen $N_l \in \mathbb{N}(l \geq 1)$ tales que para cualquier $j \leq l$ y cualquier conjunto finito $F \subset \{N_l + m : m \in \mathbb{N}\}$ se tiene

$$\left\|\sum_{n\in F} T^n y_j\right\| < \frac{1}{l2^l}, \qquad \left\|\sum_{n\in F} S^n y_j\right\| < \frac{1}{l2^l}.$$

Sean $A(l,\nu)$ $(l \geq 1,\ \nu \geq 1)$ subconjuntos de $\mathbb{N}_0$ proporcionados por el Lema 5.2.1. definimos

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} A(l, N_l)$$

y

$$z_n = y_l \text{ si } n \in A(l, N_l).$$

Consideramos

$$x = \sum_{n \in A} S^n z_n,$$

veamos que esta serie converge incondicionalmente. Sea $l \geq 1$, para cualquier conjunto finito $F \subset \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\in F}} S^n z_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n\in F}} S^n y_j = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n\in F}} S^n y_j + \sum_{j=l+1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n\in F}} S^n y_j.$$

A partir de los anterior sabemos que si $j \leq l$ un conjunto finito $F \subset \{N_l + m : m \in \mathbb{N}\}$ tenemos

$$\left\| \sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n\in F}} S^n y_j \right\| < \frac{1}{l2^l},$$

es más, ya que $n \geq N_j$ para todo $n \in A(j, N_j)$ tenemos que para todo $j \geq 1$ y un conjunto finito $F \subset \{N_l + m : m \in \mathbb{N}\}$ se cumple

$$\left\| \sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n\in F}} S^n y_j \right\| < \frac{1}{j2^j} \leq \frac{1}{2^j}.$$

Por tanto, para cualquier conjunto finito $F \subset \{N_l + m : m \in \mathbb{N}\}$ se tiene

$$\left\| \sum_{\substack{n\in A\\ n\in F}} S^n z_n \right\| < \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l2^l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^l},$$

y la serie es condicionalmente convergente. Veamos ahora que x es frecuentemente hipercíclico para T. Sea $l \geq 1$ fijo, para $n \in A(l, N_l)$ tenemos

$$T^n x - y_l = \sum_{\substack{k\in A\\ k<n}} T^n S^k z_k + \sum_{\substack{k\in A\\ n>k}} T^n S^k z_k + T^n S^n z_n - y_l.$$

Para la segunda suma tenemos que para $m \geq n$ a partir de la condición (c)

$$\sum_{\substack{k\in A\\ n<k\leq m}} T^n S^k z_k = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{k\in A(j,N_j)\\ n<k\leq m}} S^{k-n} y_j + \sum_{j=l+1}^{\infty} \sum_{\substack{k\in A(j,N_j)\\ n<k\leq m}} S^{k-n} y_j.$$

Por el Lema 5.2.1 sabemos que $k - n \geq N_l$ en la primera suma y $k - n \geq N_j$ en la segunda. Por tanto, igual que antes, se tiene

$$\left\| \sum_{\substack{k\in A\\ n<k\leq m}} T^n S^k z_k \right\| < \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l2^l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^l},$$

y, por tanto,

$$\left\| \sum_{\substack{k\in A\\ k>n}} T^n S^k z_k \right\| \leq \frac{2}{2^l}.$$

De forma análoga se puede obtener que

$$\left\| \sum_{\substack{k\in A\\ k<n}} T^n S^k z_k \right\| \leq \frac{2}{2^l}.$$

con lo que, usando $n \in A(l, N_l)$ tenemos

$$T^n S^n z_n = y_l.$$

Luego, para todo $n \in A(l, N_l)$

$$\|T^n x - y_l\| \leq \frac{4}{2^l},$$

y como y_l forman un conjunto denso en X y cada conjunto $A(l, N_l)$ tiene densidad inferior positiva tenemos que x es frecuentemente hipercíclico para T. □

Notar que de la prueba, las condiciones (b) y (c) pueden sustituirse por la siguiente condición

(b') Sea $x \in X_0$ existe una sucesión $(u_n)_{n\geq 0}$ en X con $u_0 = x$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge incondicionalmente y $T^n u_k = u_{k-n}$ si $n \leq k$.

También es interesante señalar que todo operador frecuentemente hipercíclico debe satisfacer el Criterio de Hiperciclicidad (Teorema 4.2.2), [31] y [32]. Como primeros ejemplos, vamos a probar que los operadores clásicos son frecuentemente hipercíclicos.

Ejemplo 5.2.3. *El operador de Birkhoff $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es frecuentemente hipercíclico. Consideremos el conjunto de funciones*

$$X_0 = \{f_{p,\alpha,\nu}(z) = p(z)e^{-\alpha(z-\nu)^2} : p \in \mathbb{C}[x], \alpha > 0, \nu \in \mathbb{N}_0\}.$$

Está claro que para todo $\nu \geq 0$ y $p \in \mathbb{C}[x]$ fijos se tiene que $f_{p,\alpha,\nu} \to p$ cuando $\alpha \to 0$ con lo que X_0 es denso. Consideramos ahora el operador $Sf(z) = f(z-a)$. Sea ahora p, α y ν fijos, y consideramos

$$T_a^n f_{p,\alpha,\nu}(z) = p(z+na)e^{-\alpha(z+na-\nu)^2} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

que claramente es absolutamente sumable y, por tanto, la serie converge incondicionalmente. Igualmente para S, obtenemos así las dos primeras condiciones del Criterio de Hiperciclicidad Frecuente (Teorema 5.2.2). La tercera condición es inmediata.

Ejemplo 5.2.4. *El operador de MacLane $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ es frecuentemente hipercíclico. Sea X_0 el conjunto de polinomios y S el operador integral (i.e $Sf(z) = \int_0^z f(\eta)d\eta$). La primera condición del criterio es inmediata (tenemos un conjunto finito de elementos no nulos), al igual que la tercera. Para la segunda condición consideramos los monomios z^k. Se tiene*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n z^k = k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} z^{k+n},$$

que converge uniformemente en cualquier conjunto compacto.

Ejemplo 5.2.5. *Consideramos ahora el operador de Rolewicz B_λ con$|\lambda| > 1$. Consideramos X_0 el conjunto de sucesiones con un número finitos de términos no nulos y $S = F_{1/\lambda}$. La primera condición claramente se cumple (volvemos a tener un número finito de términos no nulos), al igual que la tercera. Para la segunda condición, basta notar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} F_1^n(x_k)\frac{1}{\lambda^n},$$

que converge incondicionalmente.

Ejemplo 5.2.6. *Siguiendo exactamente los Ejemplos 3.1.5 y 3.3.9 podemos encontrar operadores T, S tales que TS sea frecuentemente hipercíclico y ST no lo sea; así como operadores T_1, T_2 no frecuentemente hipercíclicos (ni siquiera hipercíclicos) tales que T_1T_2 sea frecuentemente hipercíclico.*

Finalizamos esta sección con un operador hipercíclico que no es frecuentemente hipercíclico. Necesitaremos algunos resultados adicionales, para las pruebas nos remitimos a [33, pág 97 y 247].

Proposición 5.2.7. *Sean $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$ y (w_n) una sucesión de pesos. Definimos la función lineal*

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) = (w_2x_2, w_3x_3, \dots).$$

Se tiene:

(a) *B_w es un operador si y solo si la la sucesión de pesos está acotada.*

(b) *B_w es hipercíclico si y solo si*

$$\sup_{n\geq 1} \prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = \infty.$$

(c) *Sea (e_n) una base incondicional. Si B_w es frecuentemente hipercíclico existe $A \subset \mathbb{N}_0$ de densidad inferior positiva tal que*

$$\sum_{n\in A} \left(\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n \text{ converge.}$$

Ejemplo 5.2.8. *Consideramos el espacio $X = \ell^2$ y el operador B_w con $w_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}$. Aplicando el apartado (b) de la proposición anterior tenemos que el operador es hipercíclico. Sin embargo, si fuese frecuentemente hipercíclico tendríamos un conjunto $A = \{n_k : k \geq 1\}$ de densidad inferior positiva tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k + 1} < \infty.$$

Lo cual es imposible ya que $n_k = O(k)$ y la suma debe ser divergente.

5.3. Similitudes y diferencias

Vamos a ver algunas propiedades de operadores frecuentemente hipercíclicos y como se diferencian o asemejan a aquellas de los operadores hipercíclicos.

5.3.1. Similitudes

Es posible probar un resultado similar al Teorema de Ansari (Teorema 3.3.8) para operadores frecuentemente hipercíclicos.

Teorema 5.3.1 ([4])**.** *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Se tiene que para todo $p \in \mathbb{N}$, $FHC(T) = FHC(T^p)$. En particular, T es frecuentemente hipercíclico si y solo si T^p lo es para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por simplicidad, vamos a realizar la prueba para $p = 2$, con lo que se expondrá el argumento general. Nos limitaremos a la inclusión no trivial. Sean $x \in FHC(T)$, $y \in X$ cualesquiera y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema de Ansari (Teorema 3.3.8) sabemos que $x, Tx \in HC(T)$, luego existen $p_0, q_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$\left\|T^{2p_0}x - y\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left\|T^{2q_0+1}x - y\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos el conjunto

$$E := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T^n x - x\| < \frac{\varepsilon}{2\max(\|T^{2p_0}\|, \|T^{2q_0+1}\|)} \right\}.$$

Es claro que $\underline{dens}(E) > 0$. Sea $n \in E$, tenemos dos posibilidades, si $n = 2m$ es par

$$\left\|T^{2(m+p_0)x-y}\right\| \leq \left\|T^{2p_0}(T^{2m}x - x)\right\| + \left\|T^{2p_0}x - y\right\| < \varepsilon,$$

si $n = 2m + 1$ impar

$$\left\|T^{2(m+q_0+1)x-y}\right\| \leq \left\|T^{2q_0+1}(T^{2m+1}x - x)\right\| + \left\|T^{2q_0+1}x - y\right\| < \varepsilon.$$

Si $F = \{m + p_0 : 2m \in E\} \cup \{m + q_0 + 1 : 2m + 1 \in E\}$ falta ver $\underline{dens}(F) > 0$. Pero esto es inmediato ya que si tomamos $\delta < \underline{dens}(E)$ tenemos $card(E \cap \{0, 2, \ldots, N-1\}) \geq \delta N$ con lo que o bien $card(E \cap \{0, \ldots, \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor\}) \geq \frac{\delta}{2} N$ o bien $card(E \cap \{1, 3, \ldots, \lfloor 2\frac{N-2}{2} + 1 \rfloor\}) \geq \frac{\delta}{2} N$ y ya hemos terminado. $\square$

Podemos obtener un resultado similar a Herrero-Bourdon (Teorema 3.3.6) para hiperciclicidad frecuente [4].

Teorema 5.3.2. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal con T frecuentemente hipercíclico. Si $x \in FHC(T)$, entonces*

$$\{p(T)x : p \textit{ es un polinomio}\} \backslash \{0\}$$

es un conjunto denso de vectores frecuentemente hipercíclicos. En particular cualquier operador frecuentemente hipercíclico admite un subespacio invariante formado por vectores frecuentemente hipercíclicos (excepto por el vector nulo).

Demostración. Sea $y = p(T)(x)$ con $p \in \mathbb{K}[x] \backslash \{0\}$, sabemos por Bourdon (Teorema 3.3.5) que $p(T)$ tiene rango denso. Sea $v \in X$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera, tomemos $w \in X$ tal que $\left\|P(T)w - v\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea ahora $n \in App(T, x, w, \frac{\varepsilon}{2\left\|P(T)\right\|})$ con lo que

$$\|T^n x - w\| < \frac{\varepsilon}{2\left\|P(T)\right\|},$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|T^n y - v\| &\leq \left\|P(T)(T^n x) - P(T)w\right\| + \left\|P(T)w - v\right\| \\ &< \left\|P(T)\right\| \|T^n - w\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Así $n \in App(T, y, v, \varepsilon)$ con lo que este conjunto tiene densidad inferior positiva y por tanto $y \in FHC(T)$. $\square$

Además, podemos obtener un resultado análogo a Bourdon-Feldman (Teorema 3.3.10)[31].

Teorema 5.3.3. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Si existe un vector $x \in X$ y un conjunto $U \subseteq X$ abierto no vacío tal que $\underline{dens}(\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in V\}) > 0$ para todo abierto V no vacío de U, entonces x es un vector frecuentemente hipercíclico de T.*

Demostración. Aplicando Bourdon-Feldman (Teorema 3.3.10) sabemos que T es hipercíclico y por tanto topológicamente transitivo. Sea W un abierto cualesquiera de X, debe existir un $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(U) \cap W \neq \varnothing$ por lo que existe un abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $T^N(V) \subseteq W$, con lo que tenemos

$$\underline{dens}(\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in W\}) \geq \underline{dens}(\{N + n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in V\}) > 0,$$

con lo que x es un vector frecuentemente hipercíclico. $\square$

5.3.2. Diferencias

Comenzaremos viendo que el tamaño del conjunto de vectores frecuentemente hipercíclicos es, bajo condiciones mínimas, mucho menor que el conjunto de vectores hipercíclicos en la mayoría de situaciones.

Proposición 5.3.4. *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Si existe un conjunto denso X_0 tal que $T^n x \to 0$ para todo $x \in X_0$, entonces $FHC(X)$ es un conjunto de primera categoría.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que el conjunto $\{x \in X : \|x\| > \delta\}$ sea no vacío. Entonces tenemos que

$$E := \{x \in X : \underline{dens}(\{n \in \mathbb{N}_0 : \|T^n x\| \geq \delta\}) > 0\}$$

contiene a todos los vectores frecuentemente hipercíclicos. Además, podemos escribir

$$E = \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{M\geq 1} E_{k,M},$$

con

$$E_{k,M} := \bigcap_{N\geq M} \left\{ x \in X : card\{n \leq N : \|T^n x\| \geq \delta\} \geq \frac{N+1}{k} \right\}.$$

Por continuidad,

$$X \backslash E_{k,M} = \bigcup_{N\geq M} \left\{ x \in X : card\{n \leq N : \|T^n x\| < \delta\} > (N+1)(1-\frac{1}{k}) \right\},$$

es denso y contiene a X_0 con lo que $E_{k,M}$ es diseminado y E es de primera categoría. □

Notar que como caso particular, cualquier operador que cumpla el Criterio de Hiperciclicidad Frecuente (Teorema 5.2.2) tiene un conjunto de vectores frecuentemente hipercíclicos de primera categoría.

Tampoco es posible obtener un análogo directo para Costakis-Peris (Teorema 3.3.11), consultar [32, página 255]).

Sabemos que si (X, T) es un sistema dinámico lineal y T es hipercíclico e invertible, entonces T^{-1} debe ser hipercíclico. Una pregunta natural es si sucede lo mismo en el caso de operadores frecuentemente hipercíclicos. Por desgracia, este no es el caso, los contraejemplos son relativamente elaborados, para el interesado referirse a [42].

Bibliografía

[1] S.I. Ansari. «Hypercyclic and Cyclic Vectors». En: *Journal of Functional Analysis* 128.2 (1995), págs. 374-383.

[2] J. Banks y col. «On Devaney's Definition of Chaos». En: *The American Mathematical Monthly* 99.4 (1992), págs. 332-334.

[3] F. Bayart y S. Grivaux. «Hypercyclicité: le rôle du spectre ponctuel unimodulaire». En: *Comptes Rendus Mathematique* 338.9 (2004), págs. 703-708.

[4] F. Bayart y S. Grivaux. «Frequently hypercyclic operators». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 358.11 (2006), págs. 5083-5117.

[5] F. Bayart y É. Matheron. «Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces». En: *Journal of Functional Analysis* 250.2 (2007), págs. 426-441.

[6] F. Bayart y E. Matheron. *Dynamics of Linear Operators*. 2009. ISBN: 978-0-521-51496-5.

[7] T. Bermúdez, A. Bonilla y A. Peris. «On hypercyclicity and supercyclicity criteria». En: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 70.1 (2004), págs. 45-54.

[8] L. Bernal-González. «Hypercyclic Sequences of Differential and Antidifferential Operators». En: *Journal of Approximation Theory* 96.2 (1999), págs. 323-337.

[9] L. Bernal-González. *Curso de Doctorado - Universalidad y Caos*. 2003.

[10] L. Bernal-González y K.G. Grosse-Erdmann. «The hypercyclicity criterion for sequences of operators». En: *Studia Mathematica* 157 (2003), págs. 17-32.

[11] J.P. Bès. «Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case». En: *Proc. Amer. Math. Soc* (1999), págs. 1801-1804.

[12] J.P. Bès y A. Peris. «Hereditarily hypercyclic operators». En: *Journal of Functional Analysis* 167.1 (1999), págs. 94-112.

[13] G.D. Birkhoff. «Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres». En: *C. R. Acad Sci. Paris Ser. I Math.* 189 (1929), págs. 473-475.

[14] C. Blair y L.A. Rubel. «A triply universal entire function». En: *Enseign. Math* 30.3-4 (1984), págs. 269-274.

[15] A. Bonilla y K.G. Grosse-Erdmann. «Frequently hypercyclic operators and vectors». En: *Ergodic theory and dynamical systems* 27.2 (2007), págs. 383-404.

[16] A. Bonilla y K.G. Grosse-Erdmann. «Frequently hypercyclic operators and vectors–ERRATUM». En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 29.6 (2009), págs. 1993-1994.

[17] A. Bonilla y K.G. Grosse-Erdmann. *Upper frequent hypercyclicity and related notions*. 2016.

[18] P.S. Bourdon. «Invariant Manifolds of Hypercyclic Vectors». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 118.3 (1993), págs. 845-847.

[19] P.S. Bourdon y N.S. Feldman. «Somewhere dense orbits are everywhere dense». En: *Indiana University mathematics journal* (2003), págs. 811-819.

[20] J.B. Conway. *Functions of one complex variable*. Springer, 1978.

[21] N.G. Cooper, R. Eckhardt y N. Shera. *From Cardinals to Chaos: Reflection on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam*. Los Alamos science, 1987.

[22] G. Costakis. «On a conjecture of D. Herrero concerning hypercyclic operators». En: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 330.3 (2000), págs. 179-182.

[23] R. Dawkins. *Science in the Soul: Selected Writings of a Passionate Rationalist*. Random House, 2017. ISBN: 978-0631232513.

[24] M. De la Rosa y C.J. Read. «A Hypercyclic operatos whose direct sum $T \oplus T$ is not Hypercyclic». En: *Journal of Operator Theory* 61.2 (2009), págs. 369-380. (Visitado 10-06-2022).

[25] L.R. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2.ª ed. 1986. ISBN: 978-0813340852.

[26] P. Enflo. «On the invariant subspace problem for Banach spaces». En: *Acta Mathematica* 158.none (1987), págs. 213-313.

[27] C.F. Gauss. *Carta a Sophie Germain, Braunschweig, 30 de abril de 1807*. 1807. (Visitado 11-06-2021).

[28] C.F. Gauss. *Carta a Wolfgang Bolyai, Göttingen, 2 de septiembre de 1808*. 1808. (Visitado 11-06-2021).

[29] R.M. Gethner y J.H. Shapiro. «Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 100.2 (1987), págs. 281-288.

[30] G. Godefroy y J.H. Shapiro. «Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds». En: *Journal of Functional Analysis* 98.2 (1991), págs. 229-269.

[31] K.G. Grosse-Erdmann y A. Peris. «Frequently dense orbits». En: *Comptes Rendus Mathematique* 341.2 (2005), págs. 123-128.

[32] K.G. Grosse-Erdmann y A. Peris. «Corrigendum to the note "Frequently dense orbits». En: *no aceptado en C. R. Math. Acad. Sci. Paris* (2008).

[33] K.G. Grosse-Erdmann y A. Peris. *Linear Chaos*. Universitext. Springer, 2011. ISBN: 978-1-4471-2169-5.

[34] G. H. Hardy. *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, 1940.

[35] K. Harwani. *Topological vector space and its properties*. 2019.

[36] D.A. Herrero. «Hypercyclic operators and chaos». En: *Journal of Operator Theory* 28.1 (1992), págs. 93-103.

[37] D.A. Herrero y C. Kitai. «On Invertible Hypercyclic Operators». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 116.3 (1992), págs. 873-875. (Visitado 15-04-2022).

[38] C. Kitai. «Invariant Closed Sets for Linear Operators. University of Toronto». Tesis doct. thesis, 1982.

[39] J.C. Lagarias. *The ultimate challenge: The 3x+ 1 problem*. American Mathematical Soc., 2010.

[40] G.R. MacLane. «Sequences of derivatives and normal families». En: *Journal d'Analyse Mathématique* 2.1 (dic. de 1952), págs. 72-87.

[41] F. Martínez-Giménez. «Operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet». En: *Revista Colombiana Matemáticas* 33 (1999), págs. 51-76.

[42] Q. Menet. «Inverse of frequently hypercyclic operators». En: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* (feb. de 2021), págs. 1-20.

[43] J. C. Oxtoby. *Measure and Category*. 1.ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971. ISBN: 978-1-4615-9964-7.

[44] A. Peris. «Multi-hypercyclic operators are hypercyclic». En: *Mathematische Zeitschrift* 236.4 (2001), págs. 779-786.

[45] G. Polya. *Mathematics discovery: An understanding, learning, and teaching problem solving (combined edition)*. New York: John Wiley & Son, 1981.

[46] C.J. Read. «A Solution to the Invariant Subspace Problem». En: *Bulletin of the London Mathematical Society* 16.4 (jul. de 1984), págs. 337-401.

[47] C.J. Read. «The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: Hypercyclic operators». En: *Israel Journal of Mathematics* 63 (1988), págs. 1-40.

[48] S. Rolewicz. «On orbits of elements». En: *Studia Mathematica* 32.1 (1969), págs. 17-22.

[49] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[50] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991. ISBN: 9780070542365.

[51] F.L. Saavedra y V. Müller. «Hypercyclic sequences of operators». En: *Studia Math* 175.1 (2006), págs. 1-18.

[52] S. Shkarin. «On the spectrum of frequently hypercyclic operators». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 137.1 (2009), págs. 123-134.

[53] I. Stewart. *Does God Play Dice?* 2.ª ed. 1989. ISBN: 978-0631232513.

[54] J. Wengenroth. «Hypercyclic operators on non-locally convex spaces». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 131.6 (2003), págs. 1759-1761.