Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

Análisis y control óptimo de las EDPs estacionarias de Stokes y Navier-Stokes

Autor: Javier Candón Cifuentes

Tutor: Enrique Fernández Cara

3 de diciembre de 2021

Índice general

Introducción

Uno de los fenómenos de la Física más complicados de estudiar y analizar es el movimiento de los fluidos. A día de hoy, conocer el comportamiento de éstos para poder predecir el clima, las corrientes oceánicas, el estudio del flujo sanguíneo, el flujo de agua en una tubería o en un reactor, del flujo de aire alrededor de aviones o proyectiles... es de suma importancia en Geofísica, Medicina o Ingeniería.

La dinámica de un fluido real queda descrita en la gran mayoría de situaciones posibles por las ecuaciones de Navier-Stokes, nombradas así en honor al ingeniero y físico francés Claude-Louis Navier y al físico y matemático anglo irlandés George Gabriel Stokes. Se trata de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que expresan la conservación de la cantidad de movimiento (el momento lineal) y de la masa para fluidos Newtonianos (es decir, para fluidos viscosos cuya viscosidad puede considerarse constante).

No existe una solución general para dichas ecuaciones. A excepción de ciertos tipos de fluidos y/o situaciones muy concretas, no se puede encontrar una solución analítica, requiriendo por ello la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales de la ayuda del Análisis Funcional y del Análisis Numérico para determinar una solución aproximada. El objetivo principal de este trabajo es determinar las condiciones sobre las cuales podemos encontrar y controlar (y determinar mediante diferentes algoritmos) soluciones más o menos regulares.

En los dos primeros capítulos haremos un análisis tanto de las ecuaciones estacionarias de Stokes como de las ecuaciones de evolución de Navier-

Stokes. Principalmente, enunciaremos resultados de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones. Además, cuando estudiemos en el primer capítulo las ecuaciones estacionarias de Stokes, trabajaremos con ciertos espacios funcionales (fundamentales en este contexto) y presentaremos aproximaciones basadas en métodos de elementos finitos. El análisis de las ecuaciones de evolución de Navier-Stokes que se muestra en el segundo capítulo es mucho más complejo. Nos centraremos en obtener la formulación variacional del problema y los resultados principales de existencia y unicidad de solución en los casos bidimensional y tridimensional.

Por otro lado, en el tercer capítulo formularemos y resolveremos un problema de control óptimo para las ecuaciones estacionarias de Stokes: existencia, unicidad, caracterización y cálculo de la solución mediante algoritmos de punto fijo.

Introduction

One of the most complicated phenomena in physics to study and analyze is the motion of fluids. Today, to know their behavior to be able to predict the climate, the ocean currents, the study of blood flow, the flow of water in a pipe or in a reactor, the flow of air around planes or projectiles... is of utmost importance in geophysics, medicine or engineering.

The dynamics of a real fluid is described in the vast majority of possible situations by the Navier-Stokes equations, named after the French engineer and physicist Claude-Louis Navier and the Anglo-Irish physicist and mathematician George Gabriel Stokes. It is a system of nonlinear partial differential equations that express the linear momentum and mass conservation for Newtonian fluids (i.e., for viscous fluids whose viscosity can be considered constant).

There is no general explicit solution for such equations. With the exception of certain types of fluids and/or very specific situations, an analytical solution cannot be found, requiring therefore the theory of Partial Differential Equations with the help of Functional Analysis and Numerical Analysis to determine an approximate solution. The main objective of this work is to present some conditions under which we can find and control (and determine through different algorithms) more or less regular solutions.

In the first two chapters, we will analyze both the stationary Stokes equations and the evolution Navier-Stokes equations. Mainly, we will state results on the existence, uniqueness and regularity of solutions. In addition, in the study in the first chapter of the stationary Stokes equations, we will work with certain functional spaces (fundamental in this context) and present aproximations based on Finite Element Methods. The analysis of the Navier-Stokes evolution equations given in the second chapter is much more complex. We will focus on obtaining the variational (weak) formulation of the problem and the main results on existence and uniqueness of solution in the two-dimensional and three-dimensional cases.

Finally, in the third chapter we will formulate and solve an optimal control problem for the stationary Stokes equations: existence, uniqueness, characterization and calculation of the solution (the optimal control-state pair) by some fixed-point algorithms.

Capítulo 1

Las ecuaciones estacionarias de Stokes

En este capítulo, haremos un estudio de las ecuaciones estacionarias de Stokes, el cual nos servirá para introducir varias herramientas necesarias para estudiar las ecuaciones de Navier-Stokes.

En primer lugar, en la Sección 1.1, consideraremos algunos espacios funcionales. Tras ello, en la Sección 1.2, enunciaremos la formulación variacional de las ecuaciones de Stokes y estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones mediante el Teorema de proyección. En la Sección 1.3, mencionaremos algunos resultados sobre la aproximación de un espacio normado con el objetivo de presentar un esquema, por el método de diferencias finitas, para la aproximación del problema de Stokes. Por último, en la Sección 1.4, haremos un estudio análogo usando el método de elementos finitos. Las demostraciones de los resultados que siguen se encuentran en [Temam] y [Brézis].

1.1. Algunos espacios funcionales

1.1.1. Notación

En este apartado, estudiaremos ciertos espacios funcionales fundamentales para el estudio de las ecuaciones de Stokes.

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Será útil definir $\mathscr{D}(\Omega)$ (o $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$) como el espacio de las funciones $\mathscr{C}^\infty$ con soporte compacto contenido en Ω (o en $\overline{\Omega}$). $\mathscr{D}'(\Omega)$ denotará el espacio vectorial de las distribuciones sobre Ω, es decir, de las formas lineales secuencialmente continuas sobre $\mathscr{D}(\Omega)$.

Denotamos por $L^p(\Omega)$, con $1 < p < +\infty$ (o $L^\infty(\Omega)$), al espacio de funciones reales definidas en Ω con la potencia $p-$ésima absolutamente integrable (o funciones reales acotadas) para la medida de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_n$.

$$L^p(\Omega) = \Big\{ \mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ medible}; \quad \int_\Omega |\mathbf{u}|^p \ dx \ < \infty \Big\}$$

Este es un espacio de Banach separable con la norma

$$||\mathbf{u}||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\mathbf{u}(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma Hilbertiana. Para $L^\infty(\Omega)$, tenemos la norma

$$||\mathbf{u}||_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\{M > 0; \ |\mathbf{u}(x)| \leq M \quad \text{c.p.d. en } \Omega\}$$

Para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}(x)\mathbf{v}(x) dx$$

Observación 1.1. Los elementos de $L^p(\Omega)$ no son funciones, sino clases de funciones, ya que funciones que son iguales salvo en un conjunto de medida nula se consideran la misma.

Podemos entonces definir los espacios vectoriales definidos por las funciones localmente integrables:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \Big\{ \mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ medible}; \quad \int_K |\mathbf{u}|^p \ dx \ < \infty \ \ \forall K \subseteq \Omega \text{ compacto} \Big\}$$

El **espacio de Sobolev** $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ es el subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$ formado por las clases de funciones tales que sus derivadas en el sentido débil (o sentido de las distribuciones) hasta orden m (donde m es un entero positivo) pertenecen también a $L^p(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega); \quad D^\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| \leq m\} \text{ [1]}$$

Es un espacio de Banach con la norma

$$||\mathbf{u}||_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)} = ||\mathbf{u}||_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} ||D^\alpha \mathbf{u}||_{L^p(\Omega)}$$

$$||\mathbf{u}||_{\mathcal{W}^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha \mathbf{u}||_{L^p(\Omega)}$$

Si $1 \leq p < +\infty$, se trata de un espacio de Banach separable. Los espacios de Sobolev con $p = 2$, los cuales denotaremos por $H^m(\Omega)$, están dotados de manera natural de la estructura de espacio de Hilbert, al igual que los espacios $L^2(\Omega)$, con el producto escalar

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^m(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})$$

El cierre de $\mathscr{D}(\Omega)$ en $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ se denota por $\mathcal{W}_0^{m,p}(\Omega)$ ($H_0^m(\Omega)$ para $p = 2$).

Generalmente, nos ocuparemos de las funciones vectoriales $n-$dimensionales con componentes en uno de estos espacios. Usaremos la notación

$$\boldsymbol{L}^p(\Omega) = \{L^p(\Omega)\}^n \qquad \boldsymbol{W}^{m,p}(\Omega) = \{W^{m,p}(\Omega)\}^n$$
$$\boldsymbol{H}^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^n \qquad \boldsymbol{\mathscr{D}}(\Omega) = \{\mathscr{D}(\Omega)\}^n$$

y supondremos que estos espacios producto están equipados con la norma producto habitual o con una norma equivalente (excepto $\mathscr{D}(\Omega)$ o $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, pues no son espacios normados). Los espacios con los que más trabajaremos serán

$$L^2(\Omega), \boldsymbol{L}^2(\Omega), H_0^1(\Omega), \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$$

Por último, definamos $\mathscr{V}$ como el espacio

$$\mathscr{V} = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathscr{D}}(\Omega); \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

[1] Un multi-índice α es una n-tupla de números enteros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, cuya medida viene dada por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Se usa frecuentemente para resumir derivadas parciales de una función de n variables

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Los cierres de este espacio en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y en $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ son dos espacios fundamentales para el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Los denotaremos de aquí en adelante por H y V, respectivamente.

1.1.2. Caracterización de los espacios H y V

Caracterización del gradiente de una distribución

Proposición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n\}$, con $\boldsymbol{f}_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$ para $i = 1, ..., n$. Entonces*

$$\boldsymbol{f} = \nabla p \text{ para alguna distribución } p \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V}$$

Proposición 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, de frontera lipschitziana continua y acotado.*

(i) Si una distribución p tiene todas sus primeras derivadas $D_i p$, $1 \leq i \leq n$, en $L^2(\Omega)$, entonces $p \in L^2(\Omega)$, y

$$||p||_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)||\nabla p||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

(ii) Si una distribución p tiene todas sus primeras derivadas $D_i p$, $1 \leq i \leq n$, en $H^{-1}(\Omega)$, entonces $p \in L^2(\Omega)$, y

$$||p||_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)||\nabla p||_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)}$$

Caracterización del espacio H

Tal y como hemos comentado, este espacio es el cierre de $\mathscr{V}$ en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, es decir, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ denota la traza normal sobre $\partial\Omega$,

$$H = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ , \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Teorema 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase $\mathscr{C}^2$. Entonces:*

$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = H \oplus H_1 \oplus H_2$$

donde H, H_1 y H_2 son espacios mutuamente ortogonales, con

$$H_1 = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega); \quad \mathbf{u} = \nabla p, \ \ p \in H^1(\Omega), \ \ \Delta p = 0\}$$
$$H_2 = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega); \quad \mathbf{u} = \nabla p, \ \ p \in H_0^1(\Omega)\}$$

Caracterización del espacio V

Teorema 1.2. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto lipschitziano y acotado. Entonces:*

$$V = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega); \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

1.2. Existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de Stokes

Las ecuaciones de Stokes se pueden obtener linealizando las ecuaciones de Navier-Stokes. En primer lugar, daremos la formulación variacional del problema de Stokes, para acabar demostrando la existencia y unicidad de la solución a través del Teorema de Lax-Milgram. Además, indicaremos algunos resultados sobre la regularidad de la solución.

1.2.1. Formulación variacional del problema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, con frontera Γ, y sea $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$ una función vectorial en Ω. Buscamos una función vectorial $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ que represente la velocidad del fluido en cuestión, y una función escalar p que represente la presión, ambas definidas en Ω, de manera que satisfagan las siguientes ecuaciones y condiciones de contorno.

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{en } \Omega \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma \tag{1.3}$$

donde $\nu > 0$ es una constante que representa el coeficiente de viscosidad cinemática. Si $\boldsymbol{f}, \mathbf{u}$ y p son funciones suaves que satisfacen $(1.1) - (1.3)$, tomando el producto escalar en (1.1) con una función $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$, obtenemos

$$(-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p, \mathbf{v}) = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})$$

e, integrando por partes, el término $(-\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nos da

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla\mathbf{u}_i, \nabla\mathbf{v}_i) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) \tag{1.4}$$

y el término $(\nabla p, \mathbf{v})$ nos da

$$-(p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

resultando entonces

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V} \tag{1.5}$$

Dado que cada término de la igualdad (1.5) depende lineal y continuamente de $\mathbf{v}$ para la topología $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, entonces dicha igualdad es todavía válida, por continuidad, para cada $\mathbf{v} \in V$. Si el conjunto Ω es de clase $\mathscr{C}^2$, entonces por (1.3), la función $\mathbf{u}$ pertenece a $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, y debido a (1.2) y al Teorema 1.2, $\mathbf{u} \in V$. Por todo ello, llegamos a la siguiente conclusión:

$$\mathbf{u} \in V \quad \text{y satisface} \quad \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{1.6}$$

Y ahora, al revés: supongamos que $\mathbf{u}$ satisface (1.6) y demostremos que cumple (1.1) $-$ (1.3) en algún sentido. Dado que $\mathbf{u}$ pertenece únicamente a $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, tendremos menos regularidad que antes, y sólo podemos esperar que $\mathbf{u}$ satisfaga (1.1) $-$ (1.3) en un sentido más débil que el sentido clásico.

En realidad, $\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ implica que las trazas $\gamma_0\mathbf{u}_i$ [2] de sus componentes sean cero en $H^{1/2}(\Gamma)$; $\mathbf{u} \in V$ implica, por el Teorema 1.2, que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en el sentido de las distribuciones, y usando (1.6), tenemos

$$\langle -\mathbf{v}\Delta\mathbf{u} - \boldsymbol{f}, \mathbf{v}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V}$$

Gracias a las Proposiciones 1.1 y 1.2, sabemos que existe alguna distribución $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\mathbf{v}\Delta\mathbf{u} - \boldsymbol{f} = -\nabla p$$

en el sentido de las distribuciones en Ω. Estamos entonces en las condiciones de enunciar el siguiente lema.

[2]Podemos definir la aplicación traza $\gamma_0 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega); L^2(\Gamma))$ (espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$) tal que $\gamma_0\mathbf{u}$ es la restricción de $\mathbf{u}$ a Γ para toda función $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ suficientemente regular.

Lema 1.1. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de clase $\mathscr{C}^2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{u} \in V$ *satisface (1.6).*

(ii) $\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ *y satisface (1.1) − (1.3) en el sentido de las distribuciones:*

$$\textit{Existe } p \in L^2(\Omega) \textit{ tal que } \; -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \textit{en } \Omega \tag{1.7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \;\; \textit{en } \Omega \tag{1.8}$$

$$\gamma_0 \mathbf{u} = 0 \tag{1.9}$$

Definición 1.1. El problema "*determinar* $\mathbf{u} \in V$ *que satisfaga (1.6)*"se denomina la **formulación variacional del problema (1.1) − (1.3)**.

1.2.2. Existencia y unidad de solución para el problema de Stokes

Teorema 1.3. *Para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y acotado en alguna dirección, y para cada $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$ (o $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$), el problema (1.6) posee una única solución* $\mathbf{u}$*. Es más, existe una función $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ tal que satisface (1.7)−(1.8). Y además, si Ω es un conjunto abierto y acotado de clase $\mathscr{C}^2$, entonces $p \in L^2(\Omega)$, y se cumple (1.7)−(1.9).*

Este Teorema es consecuencia directa del Lema 1.1 y del siguiente Teorema clásico:

Teorema 1.4 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sea W un espacio real de Hilbert (con norma $||\cdot||_W$), y sea $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ una forma continua bilineal en $W \times W$ que es coerciva, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha ||\mathbf{u}||_W^2 \qquad \forall \mathbf{u} \in W \tag{1.10}$$

Luego para cada l en W' (el espacio dual de W), existe una y solo una función $\mathbf{u} \in W$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in W \tag{1.11}$$

Observación 1.2. Para aplicar este Teorema a (1.6), tomamos W como el espacio V equipado con la norma asociada a (1.4), $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, y para $\mathbf{v} \to \langle l, \mathbf{v} \rangle$ la forma $\mathbf{v} \to (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})$, que es lineal y continua en V. El espacio V es separable como un subespacio cerrado del espacio separable $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Demostración del Teorema 1.4. En primer lugar, demostremos la unicidad de la solución de (1.11). Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos soluciones, y definamos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Tenemos

$$\begin{aligned} &a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle && \forall \mathbf{v} \in W \\ &a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0 && \forall \mathbf{v} \in W \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, y usando (1.10),

$$\alpha ||\mathbf{u}||_W^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$$

Luego $\mathbf{u} = 0$. Veamos ahora la existencia de la solución. Por simplicidad, daremos la prueba suponiendo que W es separable. Existe una sucesión de elementos $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \ldots$, de W que lo definen en su totalidad. Sea W_m el espacio definido por $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Para cada m entero fijo, definimos una solución aproximada de (1.11):

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} \mathbf{w}_i \qquad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}$$

cumpliendo

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in W_m$$

Demostremos que existe una y solo una $\mathbf{u}_m$ que cumple esta igualdad, la cual es equivalente al conjunto de m ecuaciones

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = \langle l, \mathbf{w}_j \rangle \qquad j = 1, \ldots m$$

Constituyen un sistema lineal para las m componentes $\xi_{i,m}$ de $\mathbf{u}_m$:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = \langle l, \mathbf{w}_j \rangle \qquad j = 1, \ldots, m$$

La existencia y unicidad de $\mathbf{u}_m$ quedaría demostrada si conseguimos ver que el anterior sistema es regular. Para conseguirlo, será suficiente probar que el respectivo sistema homogéneo asociado, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \tag{1.12}$$

tiene una única solución $\xi_1, \ldots, \xi_m = 0$. Pero si $\xi_1, \ldots, \xi_m$ satisfacen (1.12), entonces multiplicando cada ecuación por la correspondiente ξ_j y sumando todas las ecuaciones, obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \xi_j a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = a\Big(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{w}_i, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \mathbf{w}_j\Big) = 0$$

Usando (1.10),

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{w}_i = 0$$

y como $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ son linealmente independientes, $\xi_1 = \ldots = \xi_m = 0$. Ya por último, tomemos límite. Para $\mathbf{v} = \mathbf{u}_m$, tenemos que

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = \langle l, \mathbf{u}_m \rangle$$

y usando (1.10), llegamos a que la sucesión $\mathbf{u}_m$ está acotada, independientemente del valor de m, en W. Como las bolas cerradas de un espacio de Hilbert son débilmente compactas, existe un elemento de W, $\mathbf{u}$, y una sucesión $\mathbf{u}_{m'}$ extraída de $\mathbf{u}_m$, tal que en el límite $m' \longrightarrow \infty$, $\mathbf{u}_{m'} \longrightarrow \mathbf{u}$ para la topología débil de W.

Ahora bien, sea $\mathbf{v}$ un elemento fijo de W_j para algún j. Tan pronto como $m' \geq j$, $\mathbf{v} \in W_{m'}$, y por ello tenemos que

$$a(\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle$$

Usando el siguiente lema, podemos tomar límite y obtenemos entonces

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle$$

Esta igualdad es válida para cada $\mathbf{v} \in \cup_{j=1}^{\infty} W_j$, y como este conjunto es denso en W, la igualdad sigue siendo válida por continuidad para $\mathbf{v} \in W$. Con esto, queda demostrado que $\mathbf{u}$ es solución de (1.11). $\square$

Lema 1.2. *Sea $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ una forma bilineal y continua en un espacio de Hilbert W. Sea ϕ_m (o ψ_m) una sucesión de elementos de W que converge a ϕ (o a ψ) en la topología débil (o fuerte) de W. Entonces:*

$$\lim_{m\to\infty} a(\psi_m, \phi_m) = a(\psi, \phi) \tag{1.13}$$

$$\lim_{m\to\infty} a(\phi_m, \psi_m) = a(\phi, \psi) \tag{1.14}$$

1.2.3. El problema de Stokes no homogéneo

Teorema 1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase $\mathscr{C}^2$. Dados $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega), g \in L^2(\Omega), \phi \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que*

$$\int_\Omega g \ dx = \int_\Gamma \phi \cdot \nu \ d\Gamma \tag{1.15}$$

Entonces existen $\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega), p \in L^2(\Omega)$ soluciones del problema no homogéneo de Stokes:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \textit{en } \Omega \tag{1.16}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = g \qquad \textit{en } \Omega \tag{1.17}$$

$$\gamma_0\mathbf{u} = \phi, \ \ \textit{i.e.}, \ \ \mathbf{u} = \phi \qquad \textit{sobre } \Gamma \tag{1.18}$$

Además, $\mathbf{u}$ es única, y p también salvo constante aditiva.

Demostración. Como $\boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, existe $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ cumpliendo $\gamma_0\mathbf{u}_0 = \phi$. Así, por (1.15) y la fórmula de Stokes,

$$\int_\Omega (g - \nabla \cdot \mathbf{u}_0) \, dx = 0$$

Usando el Lema 1.3, vemos que existe $\mathbf{u}_1 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = g - \nabla \cdot \mathbf{u}_0$. Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1$, (1.16)−(1.18) se reduce al problema homogéneo para

$\mathbf{v}$, de manera que ya se tiene la existencia y unicidad de $\mathbf{v}$ y p (y, por ello, de $\mathbf{u}$ y p). $\square$

Lema 1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, lipschitziano en el espacio de Hilbert y acotado. Entonces el operador divergencia está bien definido y es sobreyectivo de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, es decir,*

$$\left\{ g \in L^2(\Omega) \quad , \quad \int_\Omega g(x)\; dx = 0 \right\}$$

1.2.4. Resultados de regularidad

Proposición 1.3. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de clase $\mathscr{C}^r$, tal que $r = \text{máx}\{m+2, 2\}$ para $m > 0$ entero. Supongamos que*

$$\mathbf{u} \in \boldsymbol{W}^{2,\alpha}(\Omega), \qquad p \in W^{1,\alpha}(\Omega), \qquad 1 < \alpha < +\infty \tag{1.19}$$

son soluciones del problema de Stokes general (1.16) − (1.18). Si $f \in W^{m,\alpha}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ y $\phi \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)$ [3], entonces

$$\mathbf{u} \in \boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega), p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega) \tag{1.20}$$

La existencia de $\mathbf{u}$ y p está asegurada por los Teoremas 1.3 y 1.5 si $\alpha = 2$. La siguiente Proposición nos da un resultado general de existencia y regularidad para $n = 2$ ó 3.

Proposición 1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto ($n = 2, 3$) de clase $\mathscr{C}^r$, con $r = \text{máx}\{m+2, 2\}$ con $m \geq -1$ entero; y sean $f \in W^{m,\alpha}(\Omega), g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$, $\phi \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)$ tal que satisfacen la condición de compatibilidad*

$$\int_\Omega g\; dx = \int_\Gamma \phi \cdot \nu\; d\Gamma \tag{1.21}$$

Entonces existen $\mathbf{u}$ y p funciones únicas (p única salvo constante) soluciones de (1.16) − (1.18) que satisfacen (1.20).

[3] $W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma) = \gamma_0 W^{m+2,\alpha}(\Omega)$

1.3. Discretización de las ecuaciones de Stokes (método de diferencias finitas)

Definición 1.2. Una **aproximación interna** de un espacio vectorial normado W es un conjunto $\{W_h, p_h, r_h\}$, con $h \in \mathcal{H}$ (este conjunto de índices depende del tipo de aproximación), donde

- W_h es un espacio vectorial normado.
- p_h es un operador lineal y continuo de W_h en W.
- r_h es un operador, quizás no lineal, de W en W_h.

Definición 1.3. Una **aproximación externa** de un espacio normado W es un conjunto que consta de

- un espacio normado F y un isomorfismo $\overline{\omega}$ de W en F.
- una familia $\{W_h, p_h, r_h\}$, con $h \in \mathcal{H}$, donde
  - W_h es un espacio normado.
  - p_h es una función lineal de W_h en F.
  - r_h es una función, quizás no lineal, de W en W_h.

Observación 1.3. Para $F = W$, y $\overline{\omega}$ la identidad, tenemos la aproximación interna.

Observación 1.4. Los operadores p_h y r_h se denominan, respectivamente, operadores de prolongación y de restricción.

Cuando trabajamos con diferencias finitas, debemos discretizar el recinto. Para ello, introducimos el vector malla $h = (h_1, ..., h_n)$, donde h_i es la malla en la dirección x_i, y por lo tanto,

$$0 < h_i \leq h_i^0$$

para algunos números estrictamente positivos h_i^0, de manera que

$$\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{n} (0, h_i^0)$$

Para cada $h \in \mathcal{H}$, definimos:

- $\boldsymbol{h_i}$ es el vector $h_i e_i$, donde la $j-$ésima coodenada de e_i es δ_{ij}, la delta de Kronecker.
- R_h es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $j_1\boldsymbol{h_1} + ... + j_n\boldsymbol{h_n}$, con j_i enteros.
- $\sigma_h(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{M} = (\mu_1, ..., \mu_n)$ es el conjunto $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\mu_i - \frac{h_i}{2}, \mu_i + \frac{h_i}{2}\right)$.
- $\sigma_h(\boldsymbol{M}, r)$ es el conjunto $\displaystyle\bigcup_{1\leq i\leq n, -r\leq\alpha\leq+r} \sigma_h(\boldsymbol{M} + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{h_i})$
- w_{hM} es la función característica del bloque $\sigma_h(\boldsymbol{M})$.
- δ_i es el operador de diferencias finitas:

$$(\delta_i\phi)(x) = \frac{\phi(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{h_i}) - \phi(x - \frac{1}{2}\boldsymbol{h_i})}{h_i}$$

- Para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y para cada entero no negativo r, definimos el conjunto $\dot{\Omega}_h^r = \{\boldsymbol{M} \in R_h; \quad \sigma_h(\boldsymbol{M}, r) \subset \Omega\}$
- $\nabla_{ih}\phi(x)$ es otro operador de diferencias finitas:

$$\nabla_{ij}\phi(x) = \frac{\phi(x + \boldsymbol{h_i}) - \phi(x)}{h_i}$$

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto lipschitziano y acotado. Vamos a definir una aproximación del espacio V usando diferencias finitas. Sea $F = L^2(\Omega)^{n+1}$ equipado con el producto escalar Hilbertiano habitual, y sea $\overline{\omega} \in \mathscr{L}(V; F)$ el isomorfismo definido por $u \to \overline{\omega}u = (u, D_1u, ..., D_nu)$.

V_h es el espacio de las funciones escalonadas

$$u_h(x) = \sum_{M\in\dot{\Omega}_h^1} u_h(M)w_{hM}(x), \qquad u_h(M) \in \mathbb{R}^n$$

que son libres de divergencia en el sentido

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih}u_{ih}(x) = 0, \qquad \forall x \in \Omega(h)$$

El espacio V_h está equipado con uno de los siguientes productos escalares.

$$((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \delta_i \mathbf{u}_h(x) \cdot \delta_i \mathbf{v}_h(x)\ dx$$

$$[[\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h]] = \int_\Omega \mathbf{u}_h(x)\mathbf{v}_h(x)\ dx + ((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h$$

El operador de prolongación vendrá definido por

$$p_h u_h = \{\mathbf{u}_h, D_1\mathbf{u}_h, \cdots, D_n\mathbf{u}_h\}$$

El operador de restricción se define solo para $u \in \mathscr{V}$ (subespacio denso de V). $\forall M = (m_1 h_1, \cdots, m_n h_n) \in \dot{\Omega}_h^1$, $(r_h\mathbf{u})(M)$ viene dado por $u_{ih}(M)$ la $i-$ésima componente de $\mathbf{u}_h$.

Usando esta aproximación de V, podemos proponer un esquema de diferencias finitas para la aproximación del problema de Stokes (1.6):

$$\textit{Hallar}\ \ \mathbf{u}_h \in V_h\ \ \textit{tal que}\ \ \nu((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \tag{1.22}$$

Proposición 1.5. *Para todo $h \in \mathcal{H}$, la solución $\mathbf{u}_h$ de (1.22) existe y es única. Además, si $h \to 0$, la solución converge a la solución $\mathbf{u}$ de (1.6) en el siguiente sentido:*

- $\mathbf{u}_h \to \mathbf{u}$ *en* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$
- $\delta_i\mathbf{u}_h \to D_i\mathbf{u}$ *en* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$

1.4. Discretización de las ecuaciones de Stokes (método de elementos finitos)

Ahora estudiaremos la discretización de las ecuaciones de Stokes por el método de los elementos finitos. En primer lugar, consideraremos polinomios a trozos de grado dos en el caso bidimensional (Sección 1.4.2), luego polinomios a trozos de grado tres en el caso tridimensional (Sección 1.4.3), y tras ello polinomios a trozos de grado cuatro en el caso bidimensional (Sección 1.4.4). Además, consideraremos una aproximación externa por elementos finitos no conformes en cualquier dimensión (Sección 1.4.5).

1.4.1. Resultados previos

Coordenadas baricéntricas

Partimos de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$, $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ [4], con coordenadas $a_{1,i}, \ldots$, $1 \leq i \leq n{+}1$, que no están sobre el mismo hiperplano. Esto último es equivalente a decir que los n vectores $A_1A_2, \ldots, A_1A_{n+1}$ son independientes, es decir, que la matriz

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sea no singular. Dado cualquier punto $P \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, existe $n+1$ número reales $\lambda_i = \lambda_i(P)$ tales que

$$OP = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i OA_i, \tag{1.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \tag{1.24}$$

donde O es el origen de $\mathbb{R}^n$. Que se cumplan las condiciones (1.23) y (1.24) es equivalente a decir que el sistema

$$\mathscr{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

tenga una única solución. Las cantidades λ_i se denominan **coordenadas baricéntricas de $\boldsymbol{P}$**, con respecto a los $n{+}1$ puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Por ello, los números λ_i aparecen como funciones lineales no homogéneas de las coordenadas

[4] De aquí en adelante, denotaremos a los puntos del espacio afín $\mathbb{R}^n$ por letras mayúsculas $(A, B, M, P, ...)$. AB, por ejemplo, denotará al vector de $\mathbb{R}^n$ que va de A hacia B.

$x_1, \ldots, x_n$ de P:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j + b_{i,n+1} \qquad 1 \leq i \leq n+1 \tag{1.26}$$

donde la matriz $\mathscr{B} = (b_{i,j})$ es la inversa de la matriz $\mathscr{A}$.

La envolvente convexa de estos $n+1$ puntos es exactamente el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas baricéntricas tales que $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $1 \leq i \leq n+1$. Esta envolvente convexa $\mathscr{S}$ es el *$n-$simplex generado por los puntos A_i*, los cuales se denominan *vértices* del $n-$simplex. El baricentro de $\mathscr{S}$, G, es aquel cuyas coordenadas baricéntricas son todas iguales, y por ello, iguales a $1/n+1$. En el caso bidimensional ($n=2$), $\mathscr{S}$ es un triángulo, y en el caso tridimensional ($n=3$), es un tetraedro.

Proposición 1.6 (Un resultado de interpolación)**.** *Sean $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$ que no están en el mismo hiperplano. Dados $n+1$ números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, existe una y sólo una función lineal u tal que $u(A_i) = \alpha_i$, con $1 \leq i \leq n+1$, y*

$$u(P) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i(P), \quad \forall P \in \mathbb{R}^n$$

donde $\lambda_i(P)$ son las coordenadas baricéntricas de P con respecto a $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Normas de algunas transformaciones lineales

Sean $\mathscr{S}$ y $\overline{\mathscr{S}}$ dos $n-$simplex de vértices $A_1, \cdot, A_{n+1}$ y $\overline{A}_1, \cdots, \overline{A}_{n+1}$ respectivamente. Denotamos por ρ (respectivamente ρ') al diámetro de la bola más pequeña conteniendo a $\mathscr{S}$ (respectivamente, el diámetro de la bola más grande contenida en $\mathscr{S}$). Así, $\overline{\rho}$ y $\overline{\rho}'$ tienen un significado similar. Supondremos que $A_1 = \overline{A}_1 = 0$ son los orígenes de $\mathbb{R}^n$, y denotaremos por Λ a la función lineal tal que

$$A_i = \Lambda \overline{A}_i, \quad 2 \leq i \leq n+1$$

Las normas de Λ y Λ^{-1} se pueden generalizar de la siguiente manera en función de $\rho, \rho', \overline{\rho}, \overline{\rho}'$.

Lema 1.4. *En las condiciones anteriores, tenemos que:*

$$||\Lambda|| \leq \frac{\overline{\rho}}{\rho'} \quad , \quad ||\Lambda^{-1}|| \leq \frac{\rho}{\overline{\rho}'} \tag{1.27}$$

Al trabajar con funciones vectoriales libres de divergencia, el siguiente lema nos será útil:

Lema 1.5. *Sea* $\mathbf{x} \to \mathbf{u}(\mathbf{x})$ *una función vectorial libre de divergencia definida en* $\mathscr{S}$*, y sea* $\overline{\mathbf{x}} \to \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}})$ *una función definida en* $\overline{\mathscr{S}}$ *como*

$$\overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}}) = \Lambda \mathbf{u}(\Lambda^{-1}\overline{\mathbf{x}}), \qquad \forall \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\mathscr{S}}$$

Entonces $\overline{\mathbf{u}}$ *es también una función vectorial libre de divergencia.*

<u>Triangulaciones regulares de un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$</u>

Sea $\mathscr{T}_h$ una familia de $n-$simplexs. Dicha familia se denominará *triangulación admisible de* Ω si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\Omega(h) = \displaystyle\bigcup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \mathscr{S} \subset \Omega$
- Si $\mathscr{S}, \overline{\mathscr{S}} \in \mathscr{T}_h$, entonces $\dot{\mathscr{S}} \cap \dot{\overline{\mathscr{S}}}' = \emptyset$ (donde $\dot{\mathscr{S}}$ es el interior de $\mathscr{S}$ [5]) y, además, o bien $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ es vacío o bien es exactamente una $m-$cara[6] para $\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}'$ (para cualquier m con $0 \leq m \leq n-1$).

Denotaremos por $\{\mathscr{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ a la familia de todas las triangulaciones admisibles de Ω. A cada una de estas triangulaciones $\mathscr{T}_h$ le asociamos los tres siguientes números:

$$\rho(h) = \sup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \rho_{\mathscr{S}} \quad , \quad \rho'(h) = \inf_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \rho'_{\mathscr{S}} \quad , \quad \sigma(h) = \sup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \frac{\rho_{\mathscr{S}}}{\rho'_{\mathscr{S}}}$$

Para el método de elementos finitos, nos ocuparemos del paso al límite $\rho(h) \to 0$.

[5] es decir, los puntos de $\mathscr{S}$ con coordenadas baricéntricas, con respecto a los vértices de $\mathscr{S}$, tales que $0 < \lambda_i < 1, 1 \leq i \leq n+1$

[6] Una $m-$cara de un $n-$simplex $\mathscr{S}$ es cualquier $m-$simplex, con $1 \leq m \leq n+1$, generado por $m+1$ vértices de $\mathscr{S}$.

Una subfamilia de $\{\mathscr{T}_h\}, \mathcal{H}_\alpha$, se denominará una *triangulación regular de* Ω si se satisfacen

$$\sigma(h) \leq \alpha < +\infty, \quad \rho(h) \to 0 \tag{1.28}$$

$$\begin{gathered} \Omega(h) \text{ converge a } \Omega \text{ en el siguiente sentido:} \\ \text{Para cada compacto } K \subset \Omega, \text{ existe } \delta = \delta(K) > 0 \\ \text{tal que } \rho(h) \leq \delta(K) \Rightarrow \Omega(h) \supset K \end{gathered} \tag{1.29}$$

Nuestro objetivo será asociar a una familia regular de triangulaciones $\{\mathscr{T}_h\}_{h\in\mathcal{H}_\alpha}$ de Ω varios tipos de aproximaciones de los espacios funcionales que nos interesan.

1.4.2. Elementos finitos de grado 2 ($n = 2$)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto Lipschtiziano y acotado. En primer lugar, describiremos una aproximación interna de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ (para cualquier n), y luego, daremos una aproximación externa de V (para $n = 2$). Las funciones aproximadas serán cuadráticas a trozos. Sea $\mathscr{T}_h$ una triangulación admisible de Ω.

A) APROXIMACIÓN DE $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$

1. Espacio W_h.

Este es el espacio de funciones vectoriales continuas, que se anula fuera de $\Omega(h)$, cuyas componentes son polinomios de, a lo más, grado dos, en cada simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$. Es un subespacio de dimensión finita de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Está equipado con el producto escalar inducido por $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Si $\mathscr{S}$ es un $n-$simplex, denotaremos a sus vértices por $A_1, \cdots, A_{n+1}$, tal y como hicimos en la anterior sección, y por A_{ij} al punto medio de A_iA_j.

Lema 1.6. *Un polinomio de, a lo más, grado dos, está definido unívocamente por sus valores en los puntos A_i y A_{ij}, $1 \leq i,\ j \leq n+1$. Además, este polinomio se define en términos de las coordenadas baricéntricas con respecto a $A_1, \cdots, A_{n+1}$ por la fórmula*

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n+1}(2(\lambda_i(x))^2 - \lambda_i(x))\phi(A_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i(x)\lambda_j(x)\phi(A_{ij}) \tag{1.30}$$

Demostración. Primero, demostremos que (1.30) cumple con las condiciones del Lema. La función del miembro derecho es un polinomio de grado dos, ya que las $\lambda_i(x)$ son funciones lineales no homogéneas de $x_1, \ldots, x_n$ (véase (1.26)). Además, si $\psi(x)$ denota esta función,

$$\psi(A_k) = \phi(A_k) \quad \text{ya que } \lambda_i(A_k) = \delta_{ik}$$

$$\psi(A_{kl}) = \phi(A_{kl}) \quad \text{ya que } \lambda_i(A_{kl})) = \frac{\delta_{ik} + \delta_{il}}{2}$$

Ahora bien, un polinomio de grado dos tiene la forma

$$\phi(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i + \beta_i x_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

donde ϕ está determinada por $(n+1)(n+2)/2$ coeficientes $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i, \alpha_{ij}$. Hay $(n+1)$ puntos A_i, $n(n+1)/2$ puntos A_{ij}, y por lo tanto, las condiciones en ϕ:

$$\phi(A_i) = \text{ dadas}, \quad \phi(A_{ij}) = \text{ dadas}$$

conforman $(n+1)(n+2)/2$ ecuaciones lineales para los coeficientes desconocidos. De acuerdo a (1.30), este sistema tiene una solución para cualquier conjunto de datos en las condiciones de ϕ. Así, el sistema lineal es regular, y la solución encontrada en (1.30) es única. $\square$

Denotaremos ahora por $\mathscr{U}_h$ al conjunto de vértices y puntos medios de los $n-$simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, y por $\dot{\mathscr{U}}_h$ al conjunto de los puntos de $\mathscr{U}_h$ que pertenecen al interior de $\Omega(h)$.

Lema 1.7. *Existe una y solo una función $\mathbf{u}_h \in W_h$ que toma valores dados en los puntos $M \in \dot{\mathscr{U}}_h$.*

Demostración. Por el Lema 1.6, sabemos que existe una función $\mathbf{u}_h$ cuyas componentes son funciones polinómicas definidas a trozos de grado dos, que toma valores en los puntos $M \in \dot{\mathscr{U}}_h$ y que se anula en los puntos $M \in \mathscr{U}_H - \dot{\mathscr{U}}_h$ y fuera de $\Omega(h)$. Sólo tenemos que ver que esta función es continua.

En cada $(n-1)-$cara $\mathscr{S}'$ de un simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, cada componente u_{ih} de $\mathbf{u}_h$ es un polinomio de grado dos que tiene dos valores (quizás diferentes) u_{ih}^+

y u_{ih}^-. Ahora bien, u_{ih}^+ y u_{ih}^- son polinomios de, a lo más, grado dos en $(n-1)$ variables, que son iguales en los vértices y los puntos medios de las aristas de $\mathscr{S}'$. Aplicando entonces el Lema 1.6 a una simplex $(n-1)-$dimensional muestra que $u_{ih}^+ = u_{ih}^-$ en $\mathscr{S}'$. Por lo tanto, $\mathbf{u}_h$ es continua, y pertenece a W_h. $\square$

Además, existe una única función escalar continua, polinómica de grado dos, en cada simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, que toma valores dados en los puntos $M \in \dot{\mathscr{U}}_h$ y que se anula fuera de $\Omega(h)$. Denotaremos a esta función por w_{hM}, quedando definida por

$$w_{hM}(M) = 1, \quad w_{hM}(P) = 0, \quad \forall P \in \dot{\mathscr{U}}_h, P \neq M$$

Lema 1.8. *Las funciones* $w_{hM}e_i$[7] $M \in \dot{\mathscr{U}}_h, i = 1, \cdots, n$, *forman una base de* W_h.

2. Operador p_h.

Es el operador identidad.

$$p_h \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h, \qquad \forall \mathbf{u} \in W_h$$

3. Operador r_h.

Para cada $\mathbf{u} \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$(r_h \mathbf{u})(M) = \mathbf{u}(M), \qquad \forall M \in \dot{\mathscr{U}}_h$$

B) APROXIMACIÓN DE $\boldsymbol{V}$

Partimos de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado, y $\mathscr{T}_h$ una triangulación admisible de $\Omega(h)$.

1. Espacio F. Operador $\overline{\omega}$.

El espacio F es $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, y $\overline{\omega}$ es la identidad: $\overline{\omega}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V$.

[7] En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, escribimos la base canónica como $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

2. Espacio V_h.

Es el espacio de las funciones vectoriales continuas que se anulan fuera de $\Omega(h)$, cuyas componentes son polinomios de grado dos en cada simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, y tal que

$$\int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, dx = 0, \qquad \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h \tag{1.31}$$

Las funciones $\mathbf{u}_h \in V_h$ pertenecen a $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, pero no a V ($V_h \not\subset V$). De acuerdo al Lema 1.8, estas funciones pueden escribirse como

$$\mathbf{u}_h = \sum_{M \in \dot{\mathscr{U}}_h} \mathbf{u}_h(M) w_{hM}$$

Dotamos al espacio V_h del producto escalar de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, tal y como hicimos con W_h.

3. Operador p_h. Es el operador identidad.

4. Operador r_h.

Sea $\mathbf{u}$ un elemento de $\mathscr{V}$. Tomemos

$$r_h \mathbf{u} = \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^1 + \mathbf{u}_h^2 \tag{1.32}$$

donde $\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2 \in W_h$. $\mathbf{u}_h^1$ se define como

$$\mathbf{u}_h^1(M) = \mathbf{u}(M), \qquad \forall M \in \dot{\mathscr{U}}_h \tag{1.33}$$

y $\mathbf{u}_h^2$ es un "pequeño corrector" de manera que $\mathbf{u}_h^1 + \mathbf{u}_h^2 \in V_h$. Definimos $\mathbf{u}_h^2$ por sus valores en los puntos $M \in \dot{\mathscr{U}}_h$: si $M = A_i$ es el vértice de un triángulo, entonces $\mathbf{u}_h^2(A_i) = 0$; y si $M = A_{ij}$ es el punto medio del segmento que une los vértices A_i y A_j, entonces denotando por ν_{ij} a uno de los dos vectores ortogonales al segmento $A_i A_j$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^2(A_{ij}) \cdot A_i A_j &= 0, \\ \mathbf{u}_h^2(A_{ij}) \cdot \nu_{ij} &= -\left[\mathbf{u}(A_{ij}) + \frac{1}{4}\mathbf{u}(A_i) + \frac{1}{4}\mathbf{u}(A_j)\right] \cdot \nu_{ij} \ + \\ &\quad \frac{3}{2}\int_0^1 \mathbf{u}(tA_i + (1-t)A_j) \cdot \nu_{ij} \ dt \end{aligned} \tag{1.34}$$

Lema 1.9. $\mathbf{u}_h$ *definido por (1.32) − (1.34) pertenece a* V_h.

Demostración. La idea principal en (1.34) es escoger $\mathbf{u}_h^2$ de manera que

$$\int_{A_i}^{A_j} \mathbf{u}_j \cdot \nu_{ij}\, dl = \int_{A_i}^{A_j} \mathbf{u} \cdot \nu_{ij}\, dl \tag{1.35}$$

Si vemos que esto se cumple, entonces tendremos para cualquier triángulo $\mathscr{S}$,

$$\int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h\, dx = \int_{\partial\mathscr{S}} \mathbf{u}_h \cdot \nu\, dl = \int_{\partial\mathscr{S}} \mathbf{u} \cdot \nu\, dl = \int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}\, dx = 0$$

donde ν es el vector normal a $\partial\mathscr{S}$ que apunta hacia afuera con respecto a $\mathscr{S}$. La función $\mathbf{u}_h^2$ es igual a

$$\mathbf{u}_h^2 = \sum_{\substack{M \in \dot{\mathscr{U}}_h \\ M = A_{kl}}} \mathbf{u}_h^2(M) w_{hM}$$

En el segmento $\overline{A_iA_j}$, la función $w_{hA_{ij}}$ es la única función w_{hM} en la anterior suma que no es idénticamente igual a cero. Según la definición de $w_{hA_{ij}}$ podemos comprobar que

$$w_{hA_{ij}}(tA_i + (1-t)A_j) = 4t(1-t), \quad 0 < t < 1$$

Igualmente,

$$\mathbf{u}_h^1 = \sum_{M \in \dot{\mathscr{U}}_h} \mathbf{u}_h^1(M) w_{hM}$$

donde las únicas funciones w_{hM} que no se anulan en A_iA_j son w_{hA_i}, w_{hA_j} y $w_{hA_{ij}}$. Se ve fácilmente que

$$w_{hA_i}(tA_i + (1-t)A_j) = (t-1)(2t-1)$$

$$w_{hA_j}(tA_i + (1-t)A_j) = t(2t-1)$$

Luego por (1.34),

$$\frac{1}{|A_iA_j|} \int_{A_i}^{A_j} \mathbf{u}_h(x) \cdot \nu_{ij}\, dl = \int_0^1 \mathbf{u}_h(tA_i + (1-t)A_j) \cdot \nu_{ij}\, dt =$$

$$\frac{2}{3}\mathbf{u}_h^2(A_{ij}) \cdot \nu_{ij} + \frac{2}{3}\mathbf{u}_h^1(A_{ij}) \cdot \nu_{ij} + \frac{1}{6}[\mathbf{u}_h^1(A_i) + \mathbf{u}_h^1(A_j)] \cdot \nu_{ij} =$$

$$\textstyle\int_0^1 \mathbf{u}(tA_i + (1-t)A_j) \cdot \nu_{ij}\, dt = \dfrac{1}{|A_iA_j|} \int_{A_i}^{A_j} \mathbf{u}(x) \cdot \nu_{ij}\, dl$$

□

C) APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES

Usando la anterior aproximación de V, podemos plantear una esquema de elementos finitos para la aproximación del problema de Stokes en el caso bidimensional:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tal que } \nu((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)) = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

La solución $\mathbf{u}_h$ de dicho esquema existe y es única; y además,

Proposición 1.7. *Si $\rho(h) \longrightarrow 0$, con $h \in \mathcal{H}_\alpha$, la solución $\mathbf{u}_h$ converge a la solución $\mathbf{u}$ de (1.6) con la norma de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.*

1.4.3. Elementos finitos de grado 3 ($n = 3$)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, lipschitziano y acotado. Tal y como hemos hecho en el caso bidimensional, describiremos una aproximación interna de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, y luego daremos una aproximación externa de V. Las funciones aproximadas serán cúbicas a trozos.

A) APROXIMACIÓN DE $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$

Si $\mathscr{S}$ es un $2-$simplex (es decir, un tetraedro), denotaremos por $A_1, \ldots, A_4$ a sus vértices, y por $B_1, \ldots, B_4$ al baricentro de las $2-$caras $\mathscr{S}_1', \ldots, \mathscr{S}_4'$. Denotemos además por $\mathscr{E}_h^1$ al conjunto de vértices de los simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$ y por $\mathscr{E}_h^2$ al conjunto de baricentros de las $2-$caras de los simplex $\mathscr{S}$.

Lema 1.10. *Un polinomio de grado 3 en $\mathbb{R}^3$ está definido unívocamente por sus valores en los puntos A_i, B_i $(1 \leq i \leq 4)$ y por los valores de las primeras derivadas en los puntos A_i. Es más, dicho polinomio viene dado en términos de las coordenadas baricéntricas con respecto a $A_1, \ldots, A_4$ por la expresión:*

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{4} [1 - 2(\lambda_i(x))^3 + 3(\lambda_i(x))^2] \phi(A_i) +$$
$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_1(x) \cdots \lambda_4(x)}{\lambda_i(x)} \Big[27\phi(B_i) - 7 \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^{4} \phi(A_\alpha) \Big] +$$
$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{4} (\lambda_i(x))^2 \lambda_j(x) [D\phi(A_i) \cdot A_i A_j] - \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_1(x) \cdots \lambda_4(x)}{\lambda_i(x)} [D\phi(A_i) \cdot A_i A_j]$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del Lema 1.6. Los coeficientes de ϕ son las soluciones de un sistema lineal con tantas ecuaciones como incógnitas; sólo tenemos que comprobar que el polinomio del miembro de la derecha cumple todas las condiciones requeridas para cualquier conjunto de datos dados $\phi(A_i), \phi(B_i), D\phi(A_i)$. $\square$

De este lema se deduce que una función escalar ϕ_h que se define en $\Omega(h)$ y es un polinomio de grado tres en cada simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$ está completamente definida si los valores de ϕ_h están dados en los puntos $A_i \in \mathscr{E}_h^1$ y $B_i \in \mathscr{E}_h^2$, y también los valores de $D\phi_h$ en los puntos A_i. Esta función es diferenciable en cada simplex, pero no hay motivo para decir que lo sea en todo $\Omega(h)$ (ni tampoco que sea continua). Realmente, al menos, es continua: en una $2-$cara $\mathscr{S}'$ de un tetraedro $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, la función tiene dos valores (quizás diferentes) ϕ_h^+ y ϕ_h^-; pero ϕ_h^+ y ϕ_h^- son polinomios de grados tres que toman los mismos valores en los vértices y en los baricentros de $\mathscr{S}'$; y las primeras derivadas de ϕ_h^+ y ϕ_h^- en los vértices de $\mathscr{S}'$ son también iguales. Por ello, gracias a los Lemas 1.6 y 1.7, concluimos que $\phi_h^+ = \phi_h^-$.

Denotemos por $w_{hM}, M \in \mathscr{E}_h$ a la función escalar que es un polinomio de grado tres definido a trozos en $\Omega(h)$, con

$$w_{hM}(M) = 1, w_{hM}(P) = 0, \quad \forall P \in \mathscr{E}_h, P \neq M$$
$$Dw_{hM}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h^1$$

Para $M \in \mathscr{E}_h,\ i = 1, 2, 3,\ w_{hM}^{(i)}$ es la función escalar que es un polinomio de grado tres definido a trozos en $\Omega(h)$ tal que

$$w_{hM}^{(i)}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h$$
$$Dw_{hM}^{(i)}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h^1, P \neq M$$
$$Dw_{hM}^{(i)}(M) = e_i \quad i = 1, 2, 3$$

Todas estas funciones w_{hM} y $w_{hM}^{(i)}$ son continuas en $\Omega(h)$.

1. Espacio W_h.

Será el espacio de funciones vectoriales continuas $\mathbf{u}_h$ de Ω en $\mathbb{R}^3$ del tipo

$$\mathbf{u}_h = \sum_{M \in \mathscr{E}_h} \mathbf{u}_h(M) w_{hM} + \sum_{M \in \mathscr{E}_h^1} \sum_{i=1}^{3} D_i \mathbf{u}_h(M) w_{hM}^{(i)}$$

que se anulan fuera de $\Omega(h)$. Es un subespacio de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ de dimensión finita. Así, está dotado del producto escalar inducido por $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$:

$$((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h = ((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)) \qquad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in W_h$$

2. Operador p_h. Es el operador identidad.

3. Operador r_h.

Para cada $\mathbf{u} \in \mathscr{D}(\Omega)$, definimos $\mathbf{u}_h = r_h \mathbf{u}$ como $\mathbf{u}_h = 0$ si el soporte de $\mathbf{u}$ no está incluido en $\Omega(h)$, y si lo estuviera,

$$\mathbf{u}_h(M) = \mathbf{u}(M), \qquad \forall M \in \mathscr{E}_h \tag{1.36}$$

$$D\mathbf{u}_h(M) = D\mathbf{u}(M) \qquad \forall M \in \mathscr{E}_h^2 \tag{1.37}$$

B) APROXIMACIÓN DE $\boldsymbol{V}$

Partimos de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado, y $\mathscr{T}_h$ una triangulación admisible de $\Omega(h)$.

1. Espacio F. Operador $\overline{\omega}$.

El espacio F es $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, y $\overline{\omega}$ es la identidad: $\overline{\omega}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V$.

2. Espacio V_h.

Es un subespacio de W_h. Es el espacio de las funciones $\mathbf{u}_h \in W_h$ tales que

$$\int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, dx = 0, \qquad \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h \tag{1.38}$$

Lo dotamos con el producto escalar inducido por $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ y W_h.

3. Operador p_h. Es el operador identidad.

4. Operador r_h.

Sea $\mathbf{u}$ un elemento de $\mathscr{V}$. Tomemos

$$r_h\mathbf{u} = \mathbf{u}_h^1 + \mathbf{u}_h^2 \tag{1.39}$$

donde $\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2 \in W_h$. $\mathbf{u}_h^1$ se define tal y como hicimos en la aproximación de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, es decir, cumpliendo (1.36)−(1.37), y $\mathbf{u}_h^2$ es un "pequeño corrector" definido como

$$\mathbf{u}_h^2(M) = 0, \quad D\mathbf{u}_h^2(M) = 0, \qquad \forall M \in \mathscr{E}_h^1$$

y en los puntos $M \in \mathscr{E}_h^2$, la componente tangencial de $\mathbf{u}_h^2(M)$ a la cara $\mathscr{S}'$, cuyo baricentro es M, es cero. La componente normal $\mathbf{u}_h^2(M) \cdot \nu$ se caracteriza por la condición

$$\int_{\mathscr{S}'} \mathbf{u}_h(x) \cdot \nu \, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}'} \mathbf{u}(x) \cdot \nu \, d\Gamma$$

Es directo afirmar que $\mathbf{u}_h$ pertenece a V_h, ya que para cada $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$,

$$\int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, dx = \int_{\partial\mathscr{S}} \mathbf{u}_h \cdot \nu \, d\Gamma = \int_{\partial\mathscr{S}} \mathbf{u} \cdot \nu \, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = 0$$

C) APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES

Su estudio es el mismo que el ya visto en el caso bidimensional.

1.4.4. Una aproximación interna de V

Ahora partimos de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ conjunto abierto y acotado, con frontera lipschitziana [8], y además simplemente conexo.

En el caso bidimensional, la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ es

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_2} = 0$$

[8] Esto signica que en el entorno de cualquier punto de la frontera, $x \in \Gamma$, Γ admite una representación como una superficie $y_n = \theta(y_1, \ldots, y_{n-1})$ donde θ es una función Lipschitziana, y $(y_1, \ldots, y_n)$ son coordenadas rectangulares en $\mathbb{R}^n$ en una base que puede ser diferente de la canónica.

y, por ello, existe una función ψ (la llamada *función de flujo*) tal que

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{1.40}$$

La función se define localmente para cualquier conjunto Ω y globamente para un conjunto simplemente conexo Ω.

Podemos asociar a cada función $\mathbf{u}$ en V la correspondiente función de flujo ψ. La condición $\mathbf{u} = 0$ en $\partial\Omega$ equivale a decir que las derivadas tangenciales y normales de ψ en $\partial\Omega$ se anulan. Por ello, ψ es constante en $\partial\Omega$ y, como ψ está definida unívocamente salvo constante aditiva, podemos suponer que $\psi = 0$ en Γ y, por ello, $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Así, la función

$$\psi \longrightarrow \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\}$$

es un isomorfismo de $H_0^2(\Omega)$ en V. Nuestro objetivo ahora es construir una aproximación de $H_0^2(\Omega)$ mediante funciones polinómicas de grado 5 definidas a trozos, para luego obtener gracias al anterior isomorfismo una aproximación interna de V.

A) APROXIMACIÓN INTERNA DE $H_0^2(\Omega)$

Sea $\mathscr{T}_h$ una triangulación admisible de Ω. Un 2-simplex es un triángulo. De esta manera, sea $\mathscr{S}$ un triángulo de vértices A_1, A_2 y A_3; denotaremos por B_1, B_2, B_3 o por A_{23}, A_{13}, A_{12} a los puntos medios de las aristas A_2A_3, A_1A_3 y A_1A_2, respectivamente, y por ν_{ij} a los vectores unitarios normales a las aristas A_iA_j.

Lema 1.11. *Un polinomio ϕ de grado 5 en $\mathbb{R}^2$ está definido únicamente por los siguientes valores de ϕ y de sus derivadas:*

$$D^\alpha \phi(A_i), \qquad 1 \leq i \leq 3, \quad [\alpha] \leq 2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu_{ij}}(A_{ij}), \qquad 1 \leq i, j \leq 3, \quad i \neq j$$

Demostración. La prueba es análoga a la ya mostrada en el Lema 1.6. En este caso, tenemos 21 coeficientes para ϕ y 21 condiciones que corresponden a los diferentes valores de ϕ y de sus derivadas enunciados en el Lema. $\square$

De este lema se deduce que una función escalar ϕ_h que se define en $\Omega(h)$ y es un polinomio de grado cinco en cada triángulo $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$ está completamente definida si los valores de ϕ_h están dados en los puntos $A_i \in \mathscr{E}_h^1$ y $B_i \in \mathscr{E}_h^2$, y también los valores de las primeras y segundas derivadas en los puntos A_i. Esta función es diferenciable en cada simplex, pero no hay motivo para decir que lo sea en todo $\Omega(h)$. Veamos que en realidad es diferenciable y continua en tal conjunto ($\phi_h \in \mathscr{C}^1$). Sean ϕ_h^+ y ϕ_h^- los valores de ϕ_h en los dos lados de la arista A_1A_2 de un triángulo $\mathscr{S}$. Son polinomios de, a lo más, grado cinco en A_1A_2, y son iguales junto con sus primeras y segundas derivadas en los puntos A_1 y A_2 (seis condiciones independientes) y, por tanto, $\phi_h^+ = \phi_h^-$. Las derivadas tangenciales $\partial\phi_h^+/\partial\tau$ y $\partial\phi_h^-/\partial\tau$, con $\tau = A_1A_2/|A_1A_2|$, también son necesariamente iguales. Veamos que las derivadas normales $\partial\phi_h^+/\partial\nu_{12}$ y $\partial\phi_h^-/\partial\nu_{12}$ son iguales en A_1A_2: estas derivadas son polinomios de grado, a lo más, cuatro en A_1A_2. Son iguales en A_1 y A_2 junto con sus primeras derivadas, y también serán iguales en A_{12}. Por lo tanto, también lo serán en A_1A_2. Esto nos indica que $\phi_h \in \mathscr{C}^1$ en $\Omega(h)$.

- A cada punto $M \in \mathscr{E}_h^2$ le asociamos la función ψ_{hM}^0, que es un polinomio de grado cinco definido a trozos en $\Omega(h)$ de manera que:

  $\dfrac{\partial\psi_{hM}^0}{\partial\nu}(M) = 1$, y todos los demás valores nodales de ψ_{hM}^0 son cero, i.e.,

$$\frac{\partial\psi_{hM}^0}{\partial\nu}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h^2,\ \ P \neq M$$

$$D^\alpha\psi_{hM}^0(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h^1,\ \ [\alpha] \leq 2$$

- A cada punto $M \in \mathscr{E}_h^1$ le asociamos las seis funciones $\psi_{hM}^1, \ldots, \psi_{hM}^6$ definidas como siguen: son polinomios de grado cinco definidos a trozos en $\Omega(h)$ y

$$\psi_{hM}^1(M) = 1 \quad \text{y todos los demás valores nodales de } \psi_{hM}^1 \text{ son cero.}$$

Para $i = 1$ o 2:

$$D_j\psi_{hM}^{i+1}(M) = \delta_{ij} \quad \text{y todos los demás valores nodales de } \psi_{hM}^{i+1} \text{ son cero.}$$

$$D_1^2\psi_{hM}^4(M) = 1,\ \ D_1D_2\psi_{hM}^5(M) = 1,\ \ D_2^2\psi_{hM}^6 = 1,$$

y todos los demás valores nodales de ψ_{hM}^4, ψ_{hM}^5 y ψ_{hM}^6 son cero.

Todas estas funciones son diferenciables y continuas en $\Omega(h)$.

1. Espacio X_h.

Es el espacio de las funciones escalares diferenciables y continuas en Ω del tipo:

$$\psi_h = \sum_{M \in \mathscr{E}_h^2} \xi_M^0 \psi_{hM}^0 + \sum_{i=1}^{6} \sum_{M \in \mathscr{E}_h^1} \xi_M^i \psi_{hM}^i \qquad \xi_M^i \in \mathbb{R}$$

Estas funciones se anulan fuera de $\Omega(h)$. Es un subespacio de $H_0^2(\Omega)$ de dimensión finita, y lo dotamos con el producto escalar inducido por $H_0^2(\Omega)$:

$$((\psi_h, \phi_h))_h = ((\psi_h, \phi_h))_{H_0^2(\Omega)} \qquad \forall \psi_h, \phi_h \in X_h.$$

2. Operador p_h. Es el operador identidad.

3. Operador r_h. Para $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, definimos $r_h \psi = \psi_h$ por sus valores nodales:

$$D^\alpha \psi_h(M) = D^\alpha \psi(M) \qquad \forall M \in \mathscr{E}_h^1, \;\; [\alpha] \leq 2 \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial \nu_{ij}}(A_{ij}) = \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{ij}}(A_{ij}) \qquad \forall A_{ij} \in \mathscr{E}_h^2 \tag{1.42}$$

B) APROXIMACIÓN INTERNA DE *V*

Sea $\mathscr{T}_h$ una triangulación admisible de Ω.

1. Espacio V_h.

Es el espacio de las funciones vectoriales continuas $\mathbf{u}_h$ definidas en Ω del tipo:

$$\mathbf{u}_h = \left\{ \frac{\partial \psi_h}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi_h}{\partial x_1} \right\}$$

con $\psi_h \in X_h$. Es obvio que $\mathbf{u}_h$ se anula fuera de $\Omega(h)$, y es continua ya que $\phi_h \in \mathscr{C}^1$ y $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{u}_h \in V$, y V_h es un subespacio de V de dimensión finita. De esta manera, lo dotamos con el producto escalar inducido por V:

$$((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

2. Operador p_h. Es el operador identidad.

3. Operador r_h. Sea $u \in \mathscr{V}$, y ψ la correspondiente función de flujo. Claramente, $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, y podemos definir $\psi_h \in X_h$ por (1.41) $-$(1.42). De esta manera, definimos el operador como:

$$\mathbf{u}_h = r_h \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial \psi_h}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi_h}{\partial x_1} \right\} \in V_h$$

C) APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES

El problema aproximado asociado a (1.6) es:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tal que } \nu((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)) = \langle \boldsymbol{f}, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

La solución $\mathbf{u}_h$ de dicho esquema existe y es única; y además,

Proposición 1.8. *Si $\rho(h) \longrightarrow 0$, con $h \in \mathcal{H}_\alpha$, la solución $\mathbf{u}_h$ converge fuertemente a la solución $\mathbf{u}$ de (1.6) en V.*

Observación 1.5. Si Ω es un conjunto múltiplemente conexo [9] de $\mathbb{R}^2$, y $\mathbf{u} \in V$, entonces existe una función ψ que cumple (1.40). Supongamos que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \dots$ es la descomposición de $\partial\Omega$ en sus componentes conexas, con Γ_0 por ejemplo la frontera exterior de Ω si estuviera acotado. De esta manera, $\mathbf{u}$ y $\partial\phi/\partial\nu$ se anulan en $\partial\Omega$, y ψ se anula en Γ_0 y es constante en las componentes internas de $\partial\Omega$. La función

$$\psi \longrightarrow \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\}$$

nos da un isomoformo entre el espacio

$$X = \left\{ \phi \in H^2(\Omega), \quad \phi = 0 \text{ en } \Gamma_0, \phi = \text{cte en los } \Gamma_i, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$$

y V.

[9] Un conjunto múltiplemente conexo es un conjunto conexo con numerosos agujeros o subconjuntos de elementos no pertenecientes al conjunto conexo inicial.

1.4.5. Elementos finitos no conformes

Debido a la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, no es posible aproximar V por los elementos finitos más simples, las funciones lineales continuas definidas a trozos. Nuestro objetivo ahora es describir una aproximación de V por elementos finitos lineales no conformes, que en este caso serán funciones lineales definidas a trozos, pero discontinuas. Tras ello, asociaremos junto con esta aproximación de V un nueva esquema de aproximación para el problema de Stokes.

A) APROXIMACIÓN DE $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, lipschitziano y acotado, y sea $\mathscr{T}_h$ una triangulación admisible de Ω. Si $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, denotaremos por $A_1, \ldots, A_{n+1}$ a sus vértices, por $\mathscr{S}_i$ a la $(n-1)-$cara que no contiene a A_i, y por B_i al baricentro de la cara $\mathscr{S}_i$. Si G denota el baricentro de $\mathscr{S}$, entonces dado que las coordenadas baricéntricas de B_i con respecto a A_j, $j \neq i$, son iguales a $1/n$, tenemos

$$GB_i = \sum_{j \neq i} \frac{GA_j}{n} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{GA_j}{n} - \frac{GA_i}{n} = -\frac{1}{n} GA_i$$

Deducimos entonces que

$$nB_iB_j = n(GB_j - GB_i) = GA_i - GA_j = -A_iA_j$$

y por tanto, los vectores $B_1B_j, j = 2, \ldots, n+1$, son linealmente independientes (tal y como lo son los vectores A_1A_j). Por ello, las coordenadas baricéntricas de un punto P con respecto a $B_1, \ldots, B_{n+1}$ se pueden definir, y las denotaremos por $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$. Observamos también que para cada conjunto dado de $(n+1)$ número $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$, existe una y solo una función lineal que toma en los puntos $B_1, \ldots, B_{n+1}$ los valores $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$, y esta función $\mathbf{u}$ (ver Proposición 1.6) es

$$\mathbf{u}(P) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \mu_i(P)$$

1. Espacio W_h.

Es el espacio de funciones vectoriales $\mathbf{u}_h$ que son lineales en cada $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$. que se anulan fuera de $\Omega(h)$ y que, además, son tales que su valor en el baricentro B_i de alguna $(n-1)-$cara $\mathscr{S}_i$ de un simplex $\mathscr{S}$ es cero si perteneciera a la frontera de $\Omega(h)$; si esta cara interseca el interior de $\Omega(h)$, entonces los valores de $\mathbf{u}_h$ en B_i son los mismos cuando B_i se considera como un punto de dos simplex adyacentes diferentes.

Sea $\mathscr{U}_h$ el conjunto de puntos B_i que son baricentros de una $(n-1)-$cara de un simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, y que pertenecen al interior de $\Omega(h)$. Una función $\mathbf{u}_h \in W_h$ está completamente caracterizada por sus valores en los puntos $B_i \in \mathscr{U}_h$.

Denotemos por w_{hB}, siendo B un punto de $\mathscr{U}_h$, la función escalar que es lineal en cada simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, que satisface todas las condiciones que cumplen las funciones de W_h y, además,

$$w_{hB}(B) = 1, \;\; w_{hB}(M) = 0 \;\; \forall M \in \mathscr{U}_h, M \neq B$$

Tal función tiene un soporte igual a los dos simplex adyacentes a B.

Lema 1.12. *Las funciones $w_{hB}e_i$ de W_h, con $B \in \mathscr{U}_h$ y $1 \leq i \leq n$, conforman una base de W_h.*

El espacio W_h no está incluido en $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; realmente, la derivada $D_i\mathbf{u}_h$ de alguna función $\mathbf{u}_h \in W_h$ es la suma de las distribuciones de Dirac localizadas en las caras de los simplex y de una función escalonada $D_{ih}\mathbf{u}_h$ definida c.p.d. por

$$D_{ih}\mathbf{u}_h(x) = D_i\mathbf{u}_h(x) \qquad \forall x \in \mathscr{S}, \;\; \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$$

Como $\mathbf{u}_h$ es lineal en $\mathscr{S}$, $D_{ih}\mathbf{u}_h$ es constante en cada simplex. Dotamos al espacio W_h con el producto escalar

$$[[\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h]]_h = (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=1}^{n}(D_{ih}\mathbf{u}_h, D_{ih}\mathbf{v}_h)$$

2. Espacio F. Operador ϖ.
El espacio F es $F = \boldsymbol{L}^2(\Omega)^{n+1}$, y ϖ es el isomorfismo

$$\varpi\mathbf{u} = (\mathbf{u}, D_1\mathbf{u}, \ldots, D_n\mathbf{u}) \in F \qquad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$$

3. Operador p_h. Se define como el anterior isomorfismo, para $\mathbf{u}_h \in W_h$.

4. Operador r_h. Definimos $r_h\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$, para $\mathbf{u} \in \mathscr{D}(\Omega)$, como

$$\mathbf{u}_h(B) = \mathbf{u}(B) \qquad \forall B \in \mathscr{U}_h$$

La siguiente desigualdad discreta de Poincaré nos permitirá dotar al espacio W_h de otro producto escalar $((.,.))_h$, el análogo discreto del producto escalar $((.,.))$ de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Proposición 1.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Entonces existe una constante $c(\Omega, \alpha)$ que depende solo de Ω y la constante α en (1.28) tal que la desigualdad*

$$|\mathbf{u}_h|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega, \alpha) \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}\mathbf{u}_h|^2_{L^2(\Omega)}$$

es cierta para cualquier función escalar del tipo

$$\mathbf{u}_h = \sum_{B \in \mathscr{U}_h} \mathbf{u}_h(b) w_{hB}$$

Así, podemos dotar al espacio W_h con el producto escalar

$$((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h = \sum_{i=1}^{n} (D_{ih}\mathbf{u}_h, D_{ih}\mathbf{v}_h)$$

B) APROXIMACIÓN DE $\boldsymbol{V}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y lipschitziano.

1. Espacio F y operador $\overline{\omega}$. Como antes, $F = \boldsymbol{L}^2(\Omega)^{n+1}$, y $\overline{\omega} \in \mathscr{L} \in (V, F)$ como $\overline{\omega}\mathbf{u} = \{\mathbf{u}, D_1\mathbf{u}, \ldots, D_n\mathbf{u}\} \quad \forall \mathbf{u} \in V$.

2. Espacio V_h.

Es un subespacio de W_h.

$$V_h = \left\{ \mathbf{u}_h \in W_h \quad ; \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} D_{ih}\mathbf{u}_{ih} = 0 \right\}$$

La condición relativa a la divergencia de $\mathbf{u}_h$ es equivalente a

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0 \text{ en } \mathscr{S}, \quad \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h \tag{1.43}$$

Dotamos al espacio V_h con el producto escalar $((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h$ inducido por W_h.

3. Operador p_h. Como antes, $p_h\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_h, D_{1h}\mathbf{u}_h, \ldots D_{nh}\mathbf{u}_h\}$.

4. Operador r_h.

Tenemos que definir $r_h\mathbf{u} = \mathbf{u}_h \in V_h$, para $\mathbf{u} \in \mathscr{V}$. Como $\mathbf{u}_h$ debe cumplir (1.43), el operador r_h usado para la aproximación de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ no cumple con todas las condiciones. De esta manera, escogemos entonces el siguiente operador: $\mathbf{u}_h = r_h\mathbf{u}$ definido por los valores de $\mathbf{u}_h(B), B \in \mathscr{U}_h$. De esta manera, como B es el baricentro de alguna $(n-1)-$cara $\mathscr{S}'$ de algún $n-$simplex $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, fijamos

$$\mathbf{u}_h(B) = \frac{1}{\mathrm{m}_{n-1}(\mathscr{S}')}\int_{\mathscr{S}'} \mathbf{u}\, d\Gamma^{10}$$

Veamos que $\mathbf{u}_h \in V_h$. Como $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$ es constante en cada simplex, la condición (1.43) es equivalente a

$$\int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h\, dx = 0 \quad \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h \tag{1.44}$$

Aplicando la fórmula de Green,

$$\int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h\, dx = \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+\mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} \mathbf{u}_h \cdot \nu_{\mathscr{S}'}\, d\Gamma$$

donde $\partial^+\mathscr{S}$ es el conjunto de las $(n-1)-$caras de $\mathscr{S}$. Por (**??**),

$$\sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+\mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} \mathbf{u} \cdot \nu_{\mathscr{S}'}\, d\Gamma = \int_{\partial\mathscr{S}} \mathbf{u} \cdot \nu\, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}} \nabla \cdot \mathbf{u}\, dx$$

y esta última integral es cero ya que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

C) APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES

Usando la aproximación de V, podemos proponer otro esquema para el problema de Stokes (1.6). Sea $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $\nu > 0$, el esquema será:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tal que } \nu((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)) = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

La solución $\mathbf{u}_h$ de dicho esquema existe y es única; y además,

Proposición 1.10. *Si $\rho(h) \longrightarrow 0$, con $h \in \mathcal{H}_\alpha$, entonces*

- $\mathbf{u}_h \longrightarrow \mathbf{u}$ *fuertemente en* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.
- $D_{ih}\mathbf{u}_h \longrightarrow D_i\mathbf{u}$ *fuertemente en* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\quad 1 \le i \le n$.

[10] m(A) denota medida del conjunto A.

Capítulo 2

Las ecuaciones de evolución de Navier-Stokes

En este capítulo, trataremos el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes completas (es decir, el caso de evolución no lineal).

El análisis es mucho más complicado. Conduce a problemas abiertos de gran dificultad. Hay mucha literatura sobre el tema. Por ejemplo, aparte de [Temam], tenemos [Lemarié-Rieusset], [Lions-2] y [Robinson].

En primer lugar, en la Sección 2.1, examinaremos las ecuaciones lineales de evolución (también llamadas ecuaciones de Stokes). Gracias a su análisis, podremos obtener algunos lemas útiles para el estudio de las ecuaciones completas. En la Sección 2.2 obtendremos algunos teoremas de compacidad que nos permitirán conseguir resultados de convergencia fuerte en el caso de evolución y pasar al límite en términos no lineales. Por último, en la Sección 2.3, examinaremos la formulación variacional del problema y los resultados principales de existencia y unicidad de la solución para los casos bidimensional y tridimensional.

2.1. El caso lineal. Ecuaciones de Stokes

2.1.1. Notación

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, lipschitziano y acotado. Recordemos, por la Sección 1.1, que H es la clausura de $\mathscr{V}$ en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, luego llevará asociado su producto escalar; y recordemos también que V es la clausura de $\mathscr{V}$ en $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, de manera que el producto escalar asociado a dicho espacio de Hilbert será

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^{n} (D_i \mathbf{u}, D_i \mathbf{v})$$

Gracias al Teorema de Representación de Riesz, podemos afirmar que

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

donde H' y V' son los espacios duales de H y V, respectivamente. En esta concatenación de espacios, afirmamos que cada uno es denso en el siguiente. Por ello, el producto escalar en H de $\boldsymbol{f} \in H$ y $\mathbf{u} \in V$ es el mismo que el producto escalar de $\boldsymbol{f}$ y $\mathbf{u}$ en la dualidad entre V' y V:

$$\langle \boldsymbol{f}, \mathbf{u} \rangle = (\boldsymbol{f}, \mathbf{u}) \qquad \forall \boldsymbol{f} \in H, \quad \forall \mathbf{u} \in V \tag{2.1}$$

Para cada $\mathbf{u}$ en V, la forma

$$\mathbf{v} \in V \quad \longrightarrow \quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua en V, luego existe un elemento de V', que denotaremos por $A\mathbf{u}$, tal que

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) \qquad \forall \mathbf{v} \in V \tag{2.2}$$

Ahora bien, por otro lado, supongamos que a y b son dos números reales tales que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, y supongamos que X es un espacio de Banach. Para un α dado, con $1 \leq \alpha < +\infty$, denotamos por $L^\alpha(a, b; X)$ al espacio de funciones $L^\alpha-$integrables de $[a, b]$ en X. Resulta ser un espacio de Banach con la norma

$$\left[\int_a^b ||f(t)||_X^\alpha \, dt \right]^{1/\alpha}$$

El espacio $\mathscr{C}([a,b];X)$ es el espacio de funciones continuas de $[a,b]$ en X, y si $-\infty < a < b < +\infty$, entonces está equipado con la norma de Banach

$$\sup_{t\in[a,b]} ||f(t)||_X$$

Normalmente, tomaremos el intervalo $[a,b] = [0,T]$, con $T > 0$, y reduciremos en tal caso la notación de los anteriores espacios:

$$L^\alpha(X) = L^\alpha(0,T;X)$$
$$\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}([0,T];X)$$

Lema 2.1. *Sea X un espacio de Banach, y sean $\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{g}$ dos funciones de $L^1(a,b;X)$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función primitiva de $\boldsymbol{g}$.

$$\mathbf{u}(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds \qquad \xi \in X, \quad c.p.d.\ t \in [a,b] \tag{2.3}$$

(ii) Para cada función test $\phi \in \mathscr{D}((a,b))$,

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\phi'(t)\,dt = -\int_a^b \boldsymbol{g}(t)\phi(t)\,dt \tag{2.4}$$

(iii) Para cada $\eta \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \eta\rangle = \langle \boldsymbol{g}, \eta\rangle \tag{2.5}$$

en el sentido de las distribuciones en (a,b).

Bajo estas condiciones, la función $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función continua de $[a,b]$ en X.

2.1.2. El teorema de existencia y unicidad

Sigamos suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, lipschitziano y acotado, y fijemos $T > 0$. Denotemos por Q al cilindro $\Omega \times (0,T)$. Las ecuaciones lineales de Navier-Stokes son las ecuaciones de evolución correspondientes al problema de Stokes: hallar una función vectorial

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que represente la velocidad de un fluido, y una función escalar

$$p : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que sea la presión, tal que para $\boldsymbol{f} \in \Omega \times [0, T]$ y $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ funciones vectoriales dadas, se cumpla

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{en } Q \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{en } Q \tag{2.7}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \tag{2.8}$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \qquad \text{en } \Omega \tag{2.9}$$

Supongamos que $\mathbf{u}$ y p son soluciones clásicas de $(2.6) - (2.9)$, con $\mathbf{u} \in \mathscr{C}^2(Q)$ y $p \in \mathscr{C}^1(Q)$. Si $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$, es fácil ver que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\boldsymbol{f}, \mathbf{v})$$

Por continuidad, la anterior igualdad también es válida para cada $\mathbf{v} \in V$, y observamos además que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{2.10}$$

Esto nos lleva a la siguiente formulación débil del problema $(2.6) - (2.9)$.

Problema 2.1. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$ dados, hallar $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \langle \boldsymbol{f}, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in V \tag{2.11}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{2.12}$$

Por (2.1) y (2.2), podemos reescribir (2.11) como

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{f} - \nu A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in V \tag{2.13}$$

Como A es lineal y continua de V en V', y $\mathbf{u} \in L^2(V)$, $A\mathbf{u} \in L^2(V')$, de manera que $\boldsymbol{f} - \nu A\mathbf{u} \in L^2(V')$, y gracias a (2.13) y al Lema 2.1, podemos afirmar que $\mathbf{u}' \in L^2(V')$, y que $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función continua de $[0, T]$ en V'.

Ahora volvamos a suponer que $\boldsymbol{f} \in L^2(V')$ es una función vectorial dada. Si $\mathbf{u} \in L^2(V)$ satisface (2.11), entonces como hemos visto $\mathbf{u} \in L^2(V')$ y también satisface (2.13). Teniendo en cuenta el Lema 2.1, la igualdad (2.13) es equivalente a

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \boldsymbol{f} \tag{2.14}$$

Por el contrario, si $\mathbf{u} \in L^2(V')$ cumple que $\mathbf{u} \in L^2(V)$ y (2.14), entonces claramente $\mathbf{u}$ satisface (2.11) $\forall \mathbf{v} \in V$. Así, otra formulación alternativa del problema sería la siguiente:

Problema 2.2. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$ dados, hallar $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ tal que para $u' \in L^2(0,T;V')$*

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \boldsymbol{f} \qquad \textit{en } (0,T) \tag{2.15}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{2.16}$$

De esta manera, cualquier solución de (2.15) $-$ (2.16) lo es de (2.11) $-$ (2.12) y viceversa. En cuanto a la existencia y unicidad de la solución de estos problemas, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V)$ y $\mathbf{u}_0 \in H$ dados, existe una única solución $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ tal que satisface (2.15) $-$ (2.16). Además, $\mathbf{u} \in \mathscr{C}(H)$.*

Demostración. Demostremos en primer lugar la existencia de la solución. Para ello, usaremos el método Faedo-Galerkin.

Como V es separable, existe una sucesión de elementos linealmente independientes $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \dots$ que conforman, en su totalidad, V. Para cada m definimos una solución aproximada $\mathbf{u}_m$ de (2.11) o (2.15) de la forma

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_{im}(t)\mathbf{w}_i$$

y

$$(\mathbf{u}_m', \mathbf{w}_j) + \nu((\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j)) = \langle \boldsymbol{f}, \mathbf{w}_j \rangle \qquad j = 1, \dots, m \tag{2.17}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} \tag{2.18}$$

Las funciones $\boldsymbol{g}_{im}, 1 \leq i \leq m$, son funciones escalares definidas en $[0,T]$, y (2.17) es un sistema diferencial lineal para estas funciones:

$$\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)\boldsymbol{g}'_{im}(t) + \nu \sum_{i=1}^{m}((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j))\boldsymbol{g}_{im}(t) = \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle \quad j = 1, \ldots, m \tag{2.19}$$

Como $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ son elementos linealmente independientes, la matriz definida por los elementos $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$ $(1 \leq i, j \leq m)$ es no singular. Por ello, al invertir esta matriz, reducimos (2.19) a un sistema lineal con coeficientes constantes.

$$\boldsymbol{g}'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\boldsymbol{g}_{jm}(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.20}$$

donde $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$. La condición (2.18) equivale a m ecuaciones:

$$\boldsymbol{g}_{im}(0) = \text{i}-\text{ésima componente de } \mathbf{u}_{0m}$$

Así, el sistema diferencial (2.20) junto con estas condiciones iniciales definen unívocamente $\boldsymbol{g}_{im}$ en todo el intervalo $[0,T]$. Así, como las funciones escalares $t \longrightarrow \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle$ son de cuadrado integrable, también lo serán las funciones $\boldsymbol{g}_{im}$ y, por lo tanto, para cada m,

$$\mathbf{u}_m \in L^2(V), \quad \mathbf{u}'_m \in L^2(V') \tag{2.21}$$

Obtendremos estimaciones a priori (independientes de m) para las soluciones aproximadas y, tras ello, pasaremos al límite. Empezamos multiplicando (2.17) por $\boldsymbol{g}_{jm}$ y sumamos estas ecuaciones para $j = 1, \ldots, m$. De esta manera, obtenemos

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu ||\mathbf{u}_m(t)||^2 = \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle$$

Teniendo en cuenta (2.21),

$$2(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = \frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2$$

Luego

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu ||\mathbf{u}_m(t)||^2 = 2\langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle \tag{2.22}$$

Y teniendo en cuenta la siguiente acotación

$$2||\boldsymbol{f}(t)||_{V'}||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \nu ||\mathbf{u}_m(t)||^2 + \frac{1}{\nu}||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \frac{1}{\nu}||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'} \tag{2.23}$$

En particular, integrando lo anterior, obtenemos para $0 < s < T$

$$|\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^s ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\ dt \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\ dt$$

Por ello,

$$\sup_{s\in[0,T]} |\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\ dt$$

El miembro derecho es finito e independiente de m, luego la sucesión $\mathbf{u}_m$ permanece en un conjunto acotado de $L^\infty(H)$. Integrando (2.23) de 0 a T,

$$|\mathbf{u}_m(T)|^2 + \nu\int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||^2\ dt \leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\ dt \leq$$
$$|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\ dt$$

De manera que la sucesión $\mathbf{u}_m$ permanece en un conjunto acotado de $L^2(V)$.

Veamos ahora el paso al límite. Por un lado, que la sucesión $\mathbf{u}_m$ permanezca en un conjunto acotado de $L^\infty(H)$ nos corrobora la existencia de un elemento $\mathbf{u}$ en el mismo espacio y de una subsucesión $\mathbf{u}_{m'}$ que converge, para $m' \longrightarrow \infty$, a $\mathbf{u}$ para la topología débil de $L^\infty(H)$. Esto nos dice que para cada $\mathbf{v} \in L^1(H)$, con $m' \longrightarrow \infty$,

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))\ dt \longrightarrow 0 \tag{2.24}$$

Por otro lado, de manera análoga, como la sucesión $\mathbf{u}_{m'}$ permanece en un conjunto acotado de $L^2(V)$, afirmamos la existencia de un elemento $\mathbf{u}^*$ en el mismo espacio y de una subsucesión que aún denotaremos por $\mathbf{u}_{m'}$ que converge a $\mathbf{u}^*$ para la topología débil de $L^2(V)$. Así, para $m' \longrightarrow \infty$,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{u}^*(t), \mathbf{v}(t)\rangle\ dt \longrightarrow 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in L^2(V')$$

En particular, por (2.1), para cada $\mathbf{v} \in L^2(H)$,

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}(t))\ dt \longrightarrow \int_0^T (\mathbf{u}^*(t), \mathbf{v}(t))\ dt$$

Comparando con (2.24),

$$\int_0^T (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*(t), \mathbf{v}(t))\ dt \longrightarrow 0$$

Por ello,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$$

Consideremos ahora funciones escalares ψ continuas y diferenciables en $[0, T]$ con $\psi(T) = 0$. Multiplicando (2.17) por dicha función, e integrando,

$$\int_0^T (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\ dt = -\int_0^T (\mathbf{u}_m(t)\psi'(t), \mathbf{w}_j)\ dt - (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{w}_j)\psi(0)$$

De manera que

$$-\int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \psi'(t)\mathbf{w}_j)\ dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}_m(t), \psi(t)\mathbf{w}_j))\ dt =$$
$$(\mathbf{u}_{0m}(t), \mathbf{w}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle \psi(t)\ dt$$

El paso al limite para $m = m' \longrightarrow \infty$ en las integrales del miembro izquierdo es fácil porque, tal y como hemos deducido,

- $\mathbf{u}_{m'}$ converge a $\mathbf{u}$ para la topología débil estrella de $L^\infty(H)$.
- $\mathbf{u}_{m'}$ converge a $\mathbf{u}^*$ para la topología débil de $L^2(V)$.
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$.

Observamos además que $\mathbf{u}_{0m} \longrightarrow \mathbf{u}_0$. Así, en el límite,

$$-\int_0^T (\mathbf{u}(t), \psi'(t)\mathbf{w}_j)\ dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \psi(t)\mathbf{w}_j))\ dt =$$
$$(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{w}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle \psi(t)\ dt \tag{2.25}$$

Por linealidad, como (2.25) es cierta para cada j,

$$-\int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi'(t)\ dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))\psi(t)\ dt =$$
$$(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{v}\rangle \psi(t)\ dt \tag{2.26}$$

para cada $\mathbf{v}$ que sea una combinación lineal finita de los $\mathbf{w}_j$. Como cada término de (2.26) depende lineal y continuamente de $\mathbf{v}$, para la norma de V, dicha igualdad sigue siendo válida para cada $\mathbf{v}$ de V. Particularizando (2.26) para $\psi = \phi \in \mathscr{D}((0,T))$, en el sentido de las distribuciones en $(0,T)$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u},\mathbf{v})) = \langle \boldsymbol{f},\mathbf{v}\rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in V$$

que es exactamente (2.11). Como se demostró antes de enunciar el teorema, gracias a esta igualdad, y como $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$, tenemos que $\mathbf{u}' \in L^2(V')$, y

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \boldsymbol{f}$$

Por último, nos queda comprobar que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Para ello, multiplicamos (2.11) por ψ e integramos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t) = -\int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)\;dt + (\mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0)$$

Luego

$$-\int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)\;dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t),\mathbf{v}))\psi(t)\;dt = \\ (\mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\mathbf{v}\rangle\psi(t)\;dt$$

Comparando con (2.26),

$$(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0) = 0$$

para cada $\mathbf{v} \in V$. Tomando ψ tal que $\psi(0) \neq 0$, tenemos

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

Con esto queda demostrado la existencia de la solución. Veamos ahora la continuidad y unicidad. Para ello, nos basaremos en el siguiente lema:

Lema 2.2. *Si* $\mathbf{u}$ *pertenece a* $L^2(V)$ *y su derivada* $\mathbf{u}'$ *a* $L^2(V')$*, entonces* $\mathbf{u}$ *es igual, c.p.d., a una función continua de* $[0,T]$ *en* H*; y además tenemos la siguiente igualdad, que se cumple en el sentido de las distribuciones, en* $(0,T)$*:*

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 = 2\langle \mathbf{u}',\mathbf{u}\rangle \tag{2.27}$$

Asumiendo este lema, es obvio que

$$\mathbf{u} \in \mathscr{C}(H)$$

Sólo nos queda ver la unicidad. Supongamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos soluciones diferentes de (2.15) $-$ (2.16), y definamos $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Entonces:

$$\mathbf{w}' - \nu A\mathbf{w} = 0 \tag{2.28}$$

$$\mathbf{w}(0) = 0 \tag{2.29}$$

Tomando producto escalar en (2.28) para $\mathbf{w}(t)$,

$$\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}(t)\rangle + \nu||\mathbf{w}(t)||^2 = 0 \qquad \text{c.p.d.}$$

Usando entonces (2.27),

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{w}(t)||^2 = 0$$

y

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq |\mathbf{w}(0)|^2 = 0 \qquad t \in [0, T]$$

Tenemos entonces que para cada t, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$. $\square$

2.2. Teoremas de compacidad

Ahora demostraremos un teorema de compacidad en el marco de los espacios de Banach y otros dos teoremas de compacidad en el de los espacios de Hilbert.

2.2.1. Resultado preliminar

Lema 2.3. *Sean X_0, X y X_1 tres espacios de Banach tales que $X_0 \subset X \subset X_1$, la inyección de X en X_1 es continua, y la inyección de X_0 en X es compacta. Entonces para cada $\eta > 0$ existe una constante c_η que depende de η (y de los tres espacios) tal que $\forall \mathbf{v} \in X_0$:*

$$||\mathbf{v}||_X \leq \eta||\mathbf{v}||_{X_0} + c_\eta||\mathbf{v}||_{X_1} \tag{2.30}$$

Demostración. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que (2.30) no es cierto, es decir, existe $\eta > 0$ tal que para cada c en $\mathbb{R}$,

$$||\mathbf{v}||_X \geq \eta||\mathbf{v}||_{X_0} + c||\mathbf{v}||_{X_1}$$

para al menos una $\mathbf{v}$. Tomando $c = m$, obtenemos una sucesión de elementos $\mathbf{v}_m$ cumpliendo

$$||\mathbf{v}_m||_X \geq \eta ||\mathbf{v}_m||_{X_0} + m||\mathbf{v}_m||_{X_1} \qquad \forall m$$

Consideramos entonces la sucesión normalizada

$$\mathbf{w}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{||\mathbf{v}_m||_{X_0}}$$

que satisface

$$||\mathbf{w}_m||_X \geq \eta + m||\mathbf{w}_m||_{X_1} \qquad \forall m \tag{2.31}$$

Como la sucesión está normalizada, está acotada en X, y por (2.31),

$$||\mathbf{w}_m||_{X_1} \longrightarrow 0 \qquad m \longrightarrow \infty \tag{2.32}$$

Además, gracias a que $X_0 \subset X \subset X_1$, la sucesión $\mathbf{w}_m$ es relativamente compacta en X; y por ello, podemos extraer de $\mathbf{w}_m$ una subsucesión $\mathbf{w}_\mu$ fuertemente convergente en X. Por (2.32), el límite de esta subsucesión debe ser cero, pero esto resulta ser contradictorio con (2.31):

$$||\mathbf{w}_\mu||_X \geq \eta > 0 \qquad \forall \mu$$

□

2.2.2. Teorema de compacidad en los espacios de Banach

Sean X_0, X y X_1 tres espacios de Banach tales que $X_0 \subset X \subset X_1$, donde las inyecciones son continuas, los espacios X_i (para $i = 0, 1$) son reflexivos, y la inyección de X_0 en X es compacta. Fijemos además $T > 0$ y consideremos α_0 y α_1 dos números finitos tales que $\alpha_i > 1$ (para $i = 0, 1$).

Definamos el espacio $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}(0, T; \alpha_0, \alpha_1; X_0, X_1)$ como

$$\mathscr{Y} = \left\{ \mathbf{v} \in L^{\alpha_0}(0, T; X_0) \ ; \ \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^{\alpha_1}(0, T; X_1) \right\}$$

Es un espacio de Banach y está equipado con la norma

$$||\mathbf{v}||_{\mathscr{Y}} = ||\mathbf{v}||_{L^{\alpha_0}(X_0)} + ||\mathbf{v}'||_{L^{\alpha_1}(X_1)}$$

Teorema 2.2. *En las condiciones anteriores, la inyección de* $\mathscr{Y}$ *en* $L^{\alpha_0}(0,T;X_0)$ *es compacta.*

Demostración. Sea $\mathbf{u}_m$ una sucesión acotada en $\mathscr{Y}$. Tenemos que probar que esta sucesión contiene una subsucesión $\mathbf{u}_\mu$ fuertemente convergente en $L^{\alpha_0}(0,T;X)$. Como los espacios X_i son reflexivos, y $1 < \alpha_i < +\infty$, los espacios $L^{\alpha_i}(0,T;X_i)$ son también reflexivos y, por ello, $\mathscr{Y}$ también lo será. Por lo tanto, existe alguna $\mathbf{u}$ en $\mathscr{Y}$ y alguna subsucesión $\mathbf{u}_\mu$ converge débilmente a $\mathbf{u}$ en $\mathscr{Y}$ (para $\mu \longrightarrow \infty$), y esto es:

- $\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}$ débilmente en $L^{\alpha_0}(0,T;X_0)$.
- $\mathbf{u}'_\mu \longrightarrow \mathbf{u}'$ débilmente en $L^{\alpha_1}(0,T;X_1)$.

Basta probar que

$$\mathbf{v}_\mu = \mathbf{u}_\mu - \mathbf{u} \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } L^{\alpha_0}(0,T;X) \tag{2.33}$$

El teorema queda demostrado si conseguimos ver que

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } L^{\alpha_0}(0,T;X_1) \tag{2.34}$$

Debido al Lema 2.2,

$$||\mathbf{v}_\mu||_{L^{\alpha_0}(X)} \leq \eta ||\mathbf{v}_\mu||_{L^{\alpha_0}(X_0)} + c_\eta ||\mathbf{v}_\mu||_{L^{\alpha_0}(X_1)}$$

y como la sucesión $\mathbf{v}_\mu$ está acotada en $\mathscr{Y}$,

$$||\mathbf{v}_\mu||_{L^{\alpha_0}(X)} \leq c\eta + c_\eta ||\mathbf{v}_\mu||_{L^{\alpha_0}(X_1)}$$

Pasando al límite, vemos por (2.34) que

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} ||\mathbf{v}_\mu||_{L^{\alpha_0}(X)} \leq c\eta$$

y dado que $\eta > 0$ es arbitrariamente pequeño, dicho límite superior es cero y, por lo tanto, (2.33) queda demostrado. Para probar (2.34), nos damos cuenta que $\mathscr{Y} \subset \mathscr{C}(X_1)$ (con inyección continua) gracias al Lema 2.1. Deducimos entonces

$$||\mathbf{v}_\mu(t)||_{X_1} \leq c \qquad \forall t \in [0,T] \ \ \forall \mu$$

De acuerdo al Teorema de Lebesgue, (2.34) queda demostrado si vemos que, para casi todo t en $[0, T]$,

$$\mathbf{v}_\mu(t) \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } X_1 \text{ para } \mu \longrightarrow \infty \tag{2.35}$$

Lo probamos para $t = 0$ (la prueba es similar para cualquier otro valor de t). Escribimos

$$\mathbf{v}_\mu(0) = \mathbf{v}_\mu(t) - \int_0^t \mathbf{v}'_\mu(\tau)\, d\tau = \frac{1}{s}\Big[\int_0^s \mathbf{v}_\mu(t)\, dt - \int_0^s \int_0^t \mathbf{v}'_\mu(\tau)\, d\tau dt\Big] = \mathbf{a}_\mu + \mathbf{b}_\mu$$

donde

$$\mathbf{a}_\mu = \frac{1}{s}\int_0^s \mathbf{v}'_\mu(t)\, dt \qquad \mathbf{b}_\mu = -\frac{1}{s}\int_0^s \int_0^t (s-t)\mathbf{v}'_\mu(\tau)\, d\tau dt$$

Para $\epsilon > 0$ dado, escogemos s tal que

$$||\mathbf{b}_\mu||_{X_1} \leq \int_0^s ||\mathbf{v}'_\mu(t)||_{X_1}\, dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Luego, para tal s fijo, observamos que si $\mu \longrightarrow \infty$, $\mathbf{a}_\mu \longrightarrow 0$ débilmente en X_0 y, por ello, fuertemente en X_1; para μ suficientemente grande,

$$||\mathbf{a}_\mu||_{X_1} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

□

2.2.3. Teoremas de compacidad en los espacios de Hilbert

Sean X_0, X y X_1 tres espacios de Hilbert tales que $X_0 \subset X \subset X_1$, donde las inyecciones son continuas y la inyección de X_0 en X es compacta. Si $\mathbf{v}$ es una función de $\mathbb{R}$ en X_1, denotamos por $\hat{\mathbf{v}}$ a la correspondiente transformada de Fourier:

$$\hat{\mathbf{v}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau}\mathbf{v}(t)\, dt$$

La derivada en t de orden γ de $\mathbf{v}$ es la transformada inversa de Fourier de $(2i\pi\tau)^\gamma \hat{\mathbf{v}}$ o

$$\widehat{D_t^\gamma \mathbf{v}(\tau)} = (2i\pi\tau)^\gamma \hat{\mathbf{v}}(\tau)$$

Para $\gamma > 0$ dado, definimos el espacio

$$\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \big\{\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}; X_0), D_t^\gamma \mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\big\}$$

Es un espacio de Hilbert con la norma

$$||\mathbf{v}||_{\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};X_0,X_1)} = \left[||\mathbf{v}||^2_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + ||\,|\tau|^\gamma \hat{\mathbf{v}}||^2_{L^2(\mathbb{R};X_1)}\right]^{1/2}$$

Asociamos a cualquier conjunto $K \subset \mathbb{R}$ el subespacio $\mathscr{H}^\gamma_K$ definido como el conjunto de funciones $\mathbf{u}$ en $\mathscr{H}^\gamma$ con soporte contenido en K.

Teorema 2.3. *En las condiciones anteriores, para cualquier conjunto acotado K y para cualquier $\gamma > 0$, la inyección de $\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R};X_0,X_1)$ en $L^2(\mathbb{R};X)$ es compacta.*

Demostración. En primer lugar, fijemos $\gamma > 0$ y el conjunto K. Sea $\mathbf{u}_m$ una sucesión acotada en $\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R};X_0,X_1)$. Tenemos que probar que esta sucesión contiene una subsucesión fuertemente convergente en $L^2(\mathbb{R};X)$).
Como $\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R};X_0,X_1)$ es un espacio de Hilbert, la sucesión $\mathbf{u}_\mu$ contiene una subsucesión que converge débilmente en este espacio a algún elemento $\mathbf{u}$. Es obvio que $\mathbf{u}$ debe pertenecer también a $\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R};X_0,X_1)$, luego definiendo

$$\mathbf{v}_\mu = \mathbf{u}_\mu - \mathbf{u},$$

es acotada en $\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R};X_0,X_1)$, y converge débilmente a 0 en $\mathscr{H}^\gamma$; esto es:

- $\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0$ débilmente en $L^2(\mathbb{R};X_0)$.
- $|\tau|^\gamma \hat{\mathbf{v}_{mu}} \longrightarrow 0$ débilmente en $L^2(\mathbb{R};X_1)$.

Basta probar que $\mathbf{u}_\mu$ converge fuertemente a $\mathbf{u}$ en $L^2(\mathbb{R};X)$, es decir,

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } L^2(\mathbb{R};X) \tag{2.36}$$

Vamos a ver que esto lo tenemos si antes vemos que

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } L^2(\mathbb{R};X_1) \tag{2.37}$$

Debido al Lema 2.2,

$$||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq \eta||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + c_\eta||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_1)}$$

y como la sucesión $\mathbf{v}_\mu$ está acotada en $L^2(\mathbb{R};X_0)$,

$$||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq c\eta + c_\eta||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_1)}$$

Si asumimos (2.37), entonces para $\mu \longrightarrow \infty$,

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq c\eta$$

y dado que $\eta > 0$ es arbitrariamente pequeño, dicho límite superior es cero y, por lo tanto, (2.31) queda demostrado. Nos queda probar (2.32). De acuerdo al Teorema de Parseval,

$$I_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{v}_\mu(t)||_{X_1}^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{v}\hat{_mu}(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau$$

Tenemos que ver que $I_\mu \longrightarrow 0$ para $\mu \longrightarrow \infty$. Como $\mathbf{v}_\mu$ está acotada en $\mathscr{H}^\gamma$,

$$I_\mu = \int_{|\tau|\leq M} ||\hat{\mathbf{v}_\mu}(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau + \int_{|\tau|>M} (1+|\tau|^{2\gamma})||\hat{\mathbf{v}_\mu}(\tau)||_{X_1}^2 \cdot \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{2\gamma})} \leq$$
$$\frac{c}{1+M^{2\gamma}} + \int_{|\tau|\leq M} ||\hat{\mathbf{v}_\mu}(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau$$

Para un $\epsilon > 0$ dado, escogemos M de manera que

$$\frac{c}{1+M^{2\gamma}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

De esta manera,

$$I_\mu \leq \int_{|\tau|\leq M} ||\hat{\mathbf{v}_\mu}(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau + \frac{\epsilon}{2}$$

Si conseguimos anular la integral en el límite, tenemos lo que queríamos probar. Esto lo podemos ver a través del Teorema de Lebesgue. Si χ denota la función característica de K, entonces $\mathbf{v}_\mu \chi = \mathbf{v}_\mu$, y

$$\hat{\mathbf{v}}_\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau} \chi(t)\mathbf{v}_\mu(t) \, dt$$

Luego

$$||\hat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||_{X_1} \leq ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_1)} ||e^{-2i\pi t\tau}\chi||_{L^2(\mathbb{R})}$$

Por otro lado, para cada σ en X_0, con τ fijado,

$$((\hat{\mathbf{v}}_\mu(\tau), \sigma))_{X_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} ((\mathbf{v}_\mu, e^{-2i\pi t\tau}\chi(t)\sigma))_{X_0} \, dt$$

que se anula en el límite porque $\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0$ débilmente en $L^2(\mathbb{R}; X_0)$. La sucesión $\hat{\mathbf{v}}_\mu$ converge débilmente a 0 en X_0 y, por ello, fuertemente en X y X_1. Por todo ello, aplicando el Teorema de Lebesgue en el límite,

$$\int_{|\tau|\leq M} ||\hat{\mathbf{v}_\mu}(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau \longrightarrow 0$$

que era lo que queríamos probar. □

Teorema 2.4. *En las condiciones anteriores, la inyección de* $\mathscr{Y}(0,T;2,1;X_0,X_1)$ *en* $L^2(0,T;X)$ *es compacta.*

Demostración. Sea $\mathbf{u}_m$ una sucesión acotada en $\mathscr{Y}$. Denotemos por $\bar{\mathbf{u}}_m$ a la función que es igual a $\mathbf{u}_m$ en $[0,T]$ y a 0 fuera de este intervalo. Por el Teorema 2.3, para probar el resultado, nos basta ver que la sucesión $\bar{\mathbf{u}}_m$ permanece acotada en $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};X_0,X_1)$ para algún $\gamma > 0$.

Por el Lema 2.1, cada función $\mathbf{u}_m$ es continua de $[0,T]$ en X_1; es más, la inyección de $\mathscr{Y}$ en $\mathscr{C}(X_1)$ también es continua. Véase que

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\boldsymbol{g}}_m + \mathbf{u}_m(0)\delta_0 - \mathbf{u}_m(T)\delta_T \tag{2.38}$$

donde δ_0 y δ_T son las distribuciones de Dirac en 0 y T, respectivamente, y $\bar{\boldsymbol{g}}_m$ denota la derivada de $\mathbf{u}_m$ en $[0,T]$. Tras una transformación de Fourier, (2.38) queda como

$$2i\pi\tau\hat{\mathbf{u}}_m(\tau) = \hat{\boldsymbol{g}}_m(\tau) + \mathbf{u}_m(0) - \mathbf{u}_m(T)e^{-2i\pi\tau T} \tag{2.39}$$

donde $\hat{\boldsymbol{g}}_m$ y $\hat{\mathbf{u}}_m$ denotan las transformadas de Fourier de $\boldsymbol{g}_m$ y $\mathbf{u}_m$ respectivamente. Como las funciones $\boldsymbol{g}_m$ permanecen acotadas en $L^1(0,T;X_1$, las funciones $\bar{\boldsymbol{g}}_m$ permanecerán acotada en $L^1(\mathbb{R};X_1)$, y las funciones $\hat{\boldsymbol{g}}_m$ en $L^\infty(\mathbb{R};X_1)$.

Como la inyección de $\mathscr{Y}$ en $\mathscr{C}(X_1)$ es continua,

$$||\mathbf{u}_m(0)||_{X_1} \leq \text{cte.} \qquad ||\mathbf{u}_m(T)||_{X_1} \leq \text{cte.}$$

y por (2.39),

$$|\tau|^2||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||^2_{X_1} \leq \mathrm{c} \qquad \forall m\ \forall\tau\in\mathbb{R} \tag{2.40}$$

Para $\gamma < \frac{1}{2}$ fijo, observamos que

$$|\tau|^{2\gamma} \leq c_0(\gamma)\frac{1+\tau^2}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}} \qquad \forall\tau\in\mathbb{R}$$

Así, por (2.40),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} ||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau \leq c_0(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\tau^2}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}} ||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau \leq$$
$$c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}} + c_0(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} ||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau$$

Como $\gamma < \frac{1}{2}$, la primera integral es convergente. Por otro lado, por la igualdad de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau = \int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||_{X_1}^2 \, dt$$

y estas integrales están acotadas. Por todo ello,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} ||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{X_1}^2 \, d\tau \leq c_2$$

donde c_2 depende de γ. Ahora está claro que la sucesión $\mathbf{u}_m$ está acotada en $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)$. $\square$

2.3. Teoremas de existencia y unicidad

2.3.1. Un teorema de existencia en $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 4$)

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, lipschitziano y acotado. Como $n \leq 4$, podemos definir en $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, y en particular en V, una forma trilineal continua:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \mathbf{u}_i (D_i \mathbf{v}_j) \mathbf{w}_j \, dx$$

Si $\mathbf{u} \in V$, entonces

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$$

Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, denotamos por $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ al elemento de V' definido como

$$\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{w} \in V$$

En la formulación clásica, el problema correspondiente a las ecuaciones completas de Navier-Stokes es: hallar una función vectorial

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que represente la velocidad de un fluido, y una función escalar

$$p : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que sea la presión, tal que para $\boldsymbol{f} \in \Omega \times [0, T]$ y $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ funciones vectoriales dadas, se cumpla

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{en } Q \tag{2.41}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{en } Q \tag{2.42}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \tag{2.43}$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \qquad \text{en } \Omega \tag{2.44}$$

Supongamos que $\mathbf{u}$ y p son soluciones clásicas de (2.41) $-$ (2.44), con $\mathbf{u} \in \mathscr{C}^2(\bar{Q})$ y $p \in \mathscr{C}^1(\bar{Q})$. Obviamente, $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, y si $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$, podemos ver que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \mathbf{v} \rangle \tag{2.45}$$

Por continuidad, la anterior igualdad también es válida para cada $\mathbf{v} \in V$. Esto nos lleva a la siguiente formulación débil del problema (2.41) $-$ (2.45).

Problema 2.3. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$ dados, hallar $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in V \tag{2.46}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{2.47}$$

Podemos dar una formulación alternativa del problema. Para ello, será necesario introducir previamente el siguiente lema.

Lema 2.4. *Si $n \leq 4$ y $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, entonces la función $B\mathbf{u}$ definida como*

$$\langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in V \;\; \textit{c.p.d. en } t \in [0, T]$$

pertenece a $L^1(0, T; V')$.

Ahora bien, si $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ cumple (2.46), de acuerdo con (2.1), (2.2) y el anterior lema, podemos reescribir (2.46) como

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{2.48}$$

Como $A\mathbf{u} \in L^2(V')$, al igual que en el caso lineal, $\boldsymbol{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u} \in L^1(V')$, y gracias a (2.48) y al Lema 2.1, podemos afirmar que

$$\mathbf{u}' \in L^1(V')$$

y que $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función continua de $[0, T]$ en V'. Por ello, una formulación alternativa al problema (2.41)-(2.45) será la siguiente.

Problema 2.4. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$ dados, hallar $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ tal que para $u' \in L^2(0, T; V')$*

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} + B\mathbf{u} = \boldsymbol{f} \qquad \text{en } (0, T) \tag{2.49}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{2.50}$$

De esta manera, cualquier solución de $(2.49) - (2.50)$ lo es de $(2.46) - (2.47)$ y viceversa. La existencia de soluciones de estos problemas está garantizada por el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Para $n \leq 4$, y dadas $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$, existe al menos una función $\mathbf{u}$ que satisface $(2.49) - (2.50)$. Además,*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H)$$

y es débilmente continua [1] de $[0, T]$ en H.

Demostración. Usaremos el método Faedo-Galerkin, al igual que hicimos en el caso lineal.

Como V es separable, y $\mathscr{V}$ es denso en V, existe una sucesión de elementos linealmente independientes $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \ldots$ elementos de $\mathscr{V}$ que conforman, en su totalidad, V. Para cada m definimos una solución aproximada $\mathbf{u}_m$ de (2.46) o (2.49) de la forma

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_{im}(t)\mathbf{w}_i$$

y

$$(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j) + \nu((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle \qquad j = 1, \ldots, m \;\; t \in [0, T] \tag{2.51}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} \tag{2.52}$$

[1] es decir, $\forall \mathbf{v} \in H$, $t \longrightarrow (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})$ es una función escalar.

donde $\mathbf{u}_{0m}$ es la proyección ortogonal en H de $\mathbf{u}_0$ sobre el espacio generado por $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$. Las ecuaciones (2.51) conforman un sistema diferencial no lineal para las funciones $\boldsymbol{g}_{i1}, \cdots \boldsymbol{g}_{1m}$:

$$\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)\boldsymbol{g}'_{im}(t)+\nu\sum_{i=1}^{m}((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j))\boldsymbol{g}_{im}(t)+\sum_{i,l=1}^{m} b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j)\boldsymbol{g}_{ij}(t)\boldsymbol{g}_{lm}(t) = \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle \tag{2.53}$$

Invirtiendo la matriz definida por los elementos $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$ $(1 \leq i, j \leq m)$, podemos escribir las ecuaciones diferenciales como

$$\boldsymbol{g}'_{im}(t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\boldsymbol{g}_{jm}(t)+\sum_{j,k=1}^{m}\alpha_{ijk}\boldsymbol{g}_{jm}(t)\boldsymbol{g}_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.54}$$

donde $\alpha_{ij}, \alpha_{ijk}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$. La condición (2.52) equivale a m ecuaciones:

$$\boldsymbol{g}_{im}(0) = \text{i}-\text{ésima componente de } \mathbf{u}_{0m}$$

Así, el sistema diferencial (2.54) junto con estas condiciones iniciales tienen una solución maximal definida en $[0, t_m]$. Si $t_m < T$, $|\mathbf{u}_m(t)|$ debe tender a $+\infty$ para $t \longrightarrow t_m$. La estimación a priori que demostraremos más adelante nos indicará que esto no puede suceder y, por lo tanto, $t_m = T$.

La primera estimación a priori la obtendremos tal y como hicimos en el caso lineal. Multiplicamos (2.51) por $\boldsymbol{g}_{jm}$ y sumamos estas ecuaciones para $j = 1, \ldots, m$. Teniendo en cuenta que si $\mathbf{u} \in V$, entonces $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ $\forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, obtenemos

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 = \langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle$$

Luego

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 = 2\langle \boldsymbol{f}(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle \leq 2||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})||_{V'}||\mathbf{u}_m(t)|| \leq \nu||\mathbf{u}_m(t)|| + \frac{1}{\nu}||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}$$

Luego

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \frac{1}{\nu}||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'} \tag{2.55}$$

En particular, integrando lo anterior, obtenemos para $0 < s < T$

$$|\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^s ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\, dt \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||^2_{V'}\, dt$$

Por ello,

$$\sup_{s\in[0,T]} |\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||_{V'}^2 \, dt \tag{2.56}$$

El miembro derecho es finito e independiente de m, luego la sucesión $\mathbf{u}_m$ permanece en un conjunto acotado de $L^\infty(H)$. Integrando (2.55) de 0 a T,

$$|\mathbf{u}_m(T)|^2 + \nu\int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||^2 \, dt \leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||_{V'}^2 \, dt \leq$$
$$|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\boldsymbol{f}(t)||_{V'}^2 \, dt$$

De manera que la sucesión $\mathbf{u}_m$ permanece en un conjunto acotado de $L^2(V)$.

Denotemos por $\bar{\mathbf{u}}_m$ a la función que es igual a $\mathbf{u}_m$ en $[0,T]$ y a 0 fuera de este intervalo. Además de las desigualdades anteriores, que son similares a las estimaciones en el caso lineal, queremos ver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, dt \leq \text{cte.} \tag{2.57}$$

para algún $\gamma > 0$. Esto, junto con que $\mathbf{u}_m$ permanezca en un conjunto acotado de $L^2(V)$, implicará que la sucesión $\bar{\mathbf{u}}_m$ permanece en un conjunto acotado de $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R}; V, H)$, y nos permitirá aplicar el resultado de compacidad del Teorema 2.3. En vistas a demostrar (2.57), observemos antes que podemos reescribir (2.51), para $j = 1, \cdots, m$, como

$$\frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_j) = \langle \bar{\boldsymbol{f}}_m, \mathbf{w}_j \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j)\delta_0 - (\mathbf{u}_m(T), \mathbf{w}_j)\delta_T \tag{2.58}$$

donde δ_0 y δ_T son las distribuciones de Dirac en 0 y T, respectivamente, y

$$\boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{f} - \nu A\mathbf{u}_m - B\mathbf{u}_m$$
$$\bar{\boldsymbol{f}}_m = \boldsymbol{f}_m \text{ en } [0,T], \text{ 0 fuera del intervalo} \tag{2.59}$$

Tras una transformación de Fourier, (2.58) queda como

$$2i\pi\tau(\hat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_j) = \langle \hat{\boldsymbol{f}}_m, \mathbf{w}_j \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j) - (\mathbf{u}_m(T), \mathbf{w}_j)e^{-2i\pi\tau T} \tag{2.60}$$

donde $\hat{\boldsymbol{f}}_m$ y $\hat{\mathbf{u}}_m$ denotan las transformadas de Fourier de $\boldsymbol{f}_m$ y $\mathbf{u}_m$ respectivamente.

Multiplicando (2.58) por $\hat{\boldsymbol{g}}_{jm}(\tau)$ (transformada de Fourier de $\bar{\boldsymbol{g}}_{jm}$), y sumando para $j = 1, \cdots, m$, obtenemos

$$2i\pi\tau|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 = \langle \hat{\boldsymbol{f}}_m, \hat{\mathbf{u}}_m \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \hat{\mathbf{u}}_m(\tau)) - (\mathbf{u}_m(T), \hat{\mathbf{u}}_m(\tau))e^{-2i\pi\tau T} \tag{2.61}$$

Por (2.56),

$$|\mathbf{u}_m(0)| \leq \text{cte.} \quad |\mathbf{u}_m(T)| \leq \text{cte.}$$

y deducimos por (2.61) que

$$|\tau||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \leq c_2||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|| + c_3|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|$$

o

$$|\tau||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \leq c_4||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||$$

Para $\gamma < \frac{1}{4}$ fijo, observamos que

$$|\tau|^{2\gamma} \leq c_5(\gamma)\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

y teniendo en cuenta lo anterior,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau \leq c_5(\gamma)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau \leq$$
$$c_6\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau + c_7\int_{-\infty}^{+\infty} ||\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)||^2 \, d\tau$$

Como $\mathbf{u}_m$ permanece en un conjunto acotado de $L^2(0,T;V)$, por la igualdad de Parseval, la segunda integral está acotada para $m \longrightarrow \infty$. De esta manera, el resultado queda probado si vemos que la primera integral está también acotada. Por la desigualdad de Schwarz y la igualdad de Parseval, podemos acotar estas integrales por

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2}\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||^2 \, dt\Big)^{1/2}$$

finita si $\gamma < \frac{1}{4}$ y acotada para $m \longrightarrow \infty$. Ya podemos decir que $\bar{\mathbf{u}}_m$ pertenece a un conjunto acotado de $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R}; V, H)$.

Las estimaciones de que $\mathbf{u}_m$ permanezca en un conjunto acotado de $L^\infty(0,T;H)$ y de que también permanezca en un conjunto acotado de $L^2(0,T;V)$ nos permiten afirmar la existencia de un elemento $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ y de una subsucesión $\mathbf{u}_{m'}$ tal que, para $m \longrightarrow \infty$, $\mathbf{u}_{m'}$ converge débilmente a $\mathbf{u}$ para la topología débil de $L^2(0,T;V)$ y fuertemente para la topología débil estrella de $L^\infty(0,T;H)$.

Debido a que $\bar{\mathbf{u}}_m$ permanece en un conjunto acotado de $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};V,H)$, y por el Teorema 2.3, también podemos afirmar que $\mathbf{u}_{m'} \longrightarrow \mathbf{u}$ fuertemente en $L^2(0,T;H)$. Estos resultados de convergencia nos permiten pasar al límite. Lo haremos igual que en el caso lineal, pero previamente, debemos introducir el siguiente lema.

Lema 2.5. *Si $\mathbf{u}_\mu$ converge débilmente a $\mathbf{u}$ en $L^2(0,T;V)$ y fuertemente en $L^2(0,T;H)$, entonces también lo hace para cualquier función vectorial $\mathbf{w}$ con componentes en $\mathscr{C}^1(\bar{Q})$,*

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{w}(t))\,dt \longrightarrow \int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{w}(t))\,dt$$

Consideremos ahora funciones escalares ψ continuas y diferenciables en $[0,T]$ con $\psi(T)=0$. Multiplicando (2.51) por dicha función, e integrando,

$$-\int_0^T (\mathbf{u}_m(t),\psi'(t)\mathbf{w}_j)\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}_m(t),\psi(t)\mathbf{w}_j))\,dt +$$
$$\int_0^T b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j\psi(t))\,dt = (\mathbf{u}_{0m}(t),\mathbf{w}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\mathbf{w}_j\psi(t)\rangle\psi(t)\,dt$$

Si pasamos al límite, y tenemos en cuenta el Lema 2.5, entonces se da que

$$\begin{aligned}-\int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\psi'(t))\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\psi(t)))\,dt \\ +\int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\psi(t))\,dt = (\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\mathbf{v}\psi(t)\rangle\,dt\end{aligned} \tag{2.62}$$

para cada $\mathbf{v}$ que sea una combinación lineal finita de los $\mathbf{w}_j$. Como cada término de (2.62) depende lineal y continuamente de $\mathbf{v}$, para la norma de V, dicha igualdad sigue siendo válida para cada $\mathbf{v}$ de V. Particularizando (2.62) para $\psi=\phi\in\mathscr{D}((0,T))$, vemos que $\mathbf{u}$ satisface (2.46) en el sentido de las distribuciones.

Finalmente, queda por demostrar (2.47). Para ello, multiplicamos (2.46) por ψ e integramos:

$$-\int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\psi(t))\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\psi(t)))\,dt + \int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\psi(t))\,dt =$$
$$(\mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\mathbf{v}\psi(t)\rangle\,dt$$

Comparando con (2.62),

$$(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0), \mathbf{v})\psi(0) = 0$$

para cada $\mathbf{v} \in V$. Tomando ψ tal que $\psi(0) = 1$, tenemos

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

Con esto queda demostrado la existencia de la solución. $\square$

2.3.2. Regularidad y unicidad para $n = 2$

Cuando la dimensión del espacio es $n = 2$, la solución de los Problemas 2.3 − 2.4 satisface más propiedades de regularidad y, además, es única. Para demostrarlo, introduciremos previamente dos lemas.

Lema 2.6. *Si $n = 2$, para Ω cualquier conjunto abierto, se cumple*

$$||\mathbf{v}||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}||\mathbf{v}||^{1/2}_{L^2(\Omega)}||\nabla\mathbf{v}||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}^1_0(\Omega)$$

Lema 2.7. *Si $n = 2$,*

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 2^{1/2}|\mathbf{u}|^{1/2}||\mathbf{u}||^{1/2}||\mathbf{v}||\ |\mathbf{w}|^{1/2}||\mathbf{w}||^{1/2} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{H}^1_0(\Omega)$$

Si $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, entonces $B\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, y

$$||B\mathbf{u}||_{L^2(V')} \leq 2^{1/2}|\mathbf{u}|_{L^\infty(H)}||\mathbf{u}||_{L^2(V)}$$

Teorema 2.6. *Para $n = 2$, la solución $\mathbf{u}$ de los Problemas 2.3 − 2.4 dada por el Teorema 2.5 es única. Es más, $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función continua de $[0, T]$ en H, y $\mathbf{u}(t) \longrightarrow \mathbf{u}_0$ en H para $t \longrightarrow 0$.*

Demostración. Primero, veamos el resultado de regularidad. De acuerdo con el Lema 2.7 y (2.15), $\mathbf{u}' = \boldsymbol{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u}$, y dado que el miembro de la derecha pertenece a $L^2(0, T; V')$, $\mathbf{u}'$ también pertenecerá a $L^2(0, T; V')$. Esta observación mejora que $\mathbf{u}' \in L^1(0, T; V')$ (tal y como dedujimos en el Problema 2.4), y nos permite aplicar el Lema 2.2, que afirma que $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función continua de $[0, T]$ en H (es decir, $\mathbf{u} \in \mathscr{C}([0, T]; H)$), consiguiendo por ello directamente el resultado de convergencia.

Veamos ahora la unicidad. Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos soluciones de (2.15) $-$ (2.16), y sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u_2}$. Tal y como hemos visto antes, las tres funciones pertenecen a $L^2(0,T;V')$. Además, para $\mathbf{u}$ se da

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = -B\mathbf{u}_1 + B\mathbf{u}_2 \tag{2.63}$$

$$\mathbf{u}(0) = 0 \tag{2.64}$$

Tomamos en (2.63) producto escalar y, usando el Lema 2.2, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 = 2b(\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) - 2b(\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t)) \tag{2.65}$$

Como $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0\ \forall\mathbf{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ si $\mathbf{u} \in V$, entonces el miembro de la derecha es igual a

$$-2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t))$$

Por el Lema 2.7, podemos acotar esta expresión por

$$2^{3/2}|\mathbf{u}(t)|\,||\mathbf{u}(t)||\,||\mathbf{u}_2(t)|| \leq 2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 + \frac{1}{\nu}|\mathbf{u}(t)|^2||\mathbf{u}_2(t)||^2$$

De manera que (2.65) queda como

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}|\mathbf{u}(t)|^2||\mathbf{u}_2(t)||^2$$

Como la función $t \longrightarrow ||\mathbf{u}_2(t)||^2$ es integrable, entonces

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{1}{\nu}\int_0^t ||\mathbf{u}_2(s)||^2\,ds}|\mathbf{u}(t)|^2\right] \leq 0$$

Integrando y aplicando (2.64), llegamos a que $|\mathbf{u}(t)|^2 \leq 0\ \ \forall t \in [0,T]$. De esta manera, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, es decir, la solución es única. $\square$

Observación 2.1. Como consecuencia del Lema 2.6, la única solución de las ecuaciones de Navier-Stokes cumple que

$$\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}^4(Q) \tag{2.66}$$

Por el contrario, si $n = 3$, tan solo se puede demostrar que $\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}^{10/3}(Q)$.

2.3.3. Regularidad y unicidad para $n = 3$

Los resultados vistos para el caso bidimensional no pueden extenderse a dimensiones superiores, pues falta información sobre la regularidad de las soluciones débiles dadas por el Teorema 2.5. Sin embargo, demostraremos algunas propiedades de regularidad adicionales de las soluciones, que serán más débiles que las del caso $n = 2$. Tras ello, daremos un teorema de unicidad para una clase de funciones donde no se conoce la existencia. No obstante, este resultado muestra cómo la información relativa a la regularidad de las soluciones débiles está relacionada con la unicidad.

Lema 2.8. *Si $n = 3$, para Ω cualquier conjunto abierto, se cumple*

$$||\mathbf{v}||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2}||\mathbf{v}||_{L^2(\Omega)}^{1/4}||\nabla\mathbf{v}||_{L^2(\Omega)}^{3/4} \quad \forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$$

Teorema 2.7. *Si $n = 3$, la solución $\mathbf{u}$ de (2.15)–(2.16) dada por el Teorema 2.5 cumple*

$$\mathbf{u} \in L^{8/3}(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)) \tag{2.67}$$

$$\mathbf{u}' \in L^{4/3}(0, T; V') \tag{2.68}$$

Demostración. Para casi todo t, por el Lema 2.8,

$$||\mathbf{u}(t)||_{L^4(\Omega)} \leq c_0|\mathbf{u}(t)|^{1/4}||\mathbf{u}(t)||^{3/4}$$

La función del miembro de la derecha pertenece a $L^{8/3}(0, T)$, luego la función del miembro de la izquierda también. Usando la desigualdad de Hölder,

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| = |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})| \leq c_1||\mathbf{u}||_{L^4(\Omega)}^2||\mathbf{v}|| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \tag{2.69}$$

Por lo tanto, si $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $B\mathbf{u} \in L^{4/3}(0, T; V')$, ya que para casi todo t,

$$||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq c_1||\mathbf{u}(t)||_{L^4(\Omega)}^2 \tag{2.70}$$

$$||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq c_2|\mathbf{u}(t)|^{1/2}||\mathbf{u}(t)||^{3/2} \tag{2.71}$$

□

Para el caso bidimensional obtuvimos que cualquier solución $\mathbf{u}$ de (2.15)–(2.16) cumplía que $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V')$ y (2.66), y esta fue la propiedad fundamental que nos permitía demostrar la unicidad. Para el caso tridimensional, que la solución cumpla $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;V')$ y (2.66) son condiciones reemplazadas por (2.67) y (2.68) (más débiles). Ahora veremos que existe como mucho una solución en una clase de funciones más pequeña que aquella en la que obtuvimos la existencia.

Teorema 2.8. *Si $n = 3$, existe como máximo una solución del Problema 2.4 tal que*

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{2.72}$$

$$\mathbf{u} \in L^8(0,T;\boldsymbol{L}^4(\Omega)) \tag{2.73}$$

Tal solución debería ser continua de $[0,T]$ en H.

Demostración. Las desigualdades (2.70) y (2.71) implican que, si $\mathbf{u}$ cumple (2.73), entonces al menos $B\mathbf{u} \in L^2(0,T;V')$. Por lo tanto, si $\mathbf{u}$ cumple (2.72) – (2.73) y (2.15), entonces $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;V')$ y, de acuerdo con el Lema 2.2, $\mathbf{u}$ es igual, c.p.d., a una función continua de $[0,T]$ en H.

Por la desigualdad de Hölder y el Lema 2.8,

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq c_0||\mathbf{u}||_{L^4(\Omega)}||\mathbf{v}||_{L^4(\Omega)}||\mathbf{u}||$$

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq c_1|\mathbf{u}|^{1/4}||\mathbf{u}||^{7/4}||\mathbf{v}||_{L^4(\Omega)} \tag{2.74}$$

Supongamos ahora que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son soluciones de (2.15)-(2.16) que cumplen (2.72) y (2.73), y sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Tal y como vimos en la demostración del Teorema 2.6 (caso $n = 2$),

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 = 2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t))$$

y por (2.74), podemos acotar el miembro de la derecha por

$$2c_1|\mathbf{u}(t)|^{1/4}||\mathbf{u}(t)||^{7/4}||\mathbf{u}_2(t)||_{L^4(\Omega)} \leq \nu||\mathbf{u}(t)||^2 + c_2|\mathbf{u}(t)|^2||\mathbf{u}_2(t)||^8_{L^4(\Omega)}$$

Así, obtenemos

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq c_2||\mathbf{u}_2(t)||^4_{L^4(\Omega)}|\mathbf{u}(t)|^2$$

Como la función $t \longrightarrow |\mathbf{u}_2(t)|^8_{L^4(\Omega)}$ es integrable, la unicidad quedaría demostrada de manera análoga a como hicimos en el caso bidimensional (Teorema 2.6). $\square$

Observación 2.2. Se puede probar también un resultado de unicidad para $n = 3$ en la clase de las funciones que verifican (2.72) y

$$\mathbf{u} \in L^r(0, T; L^s(\Omega)) \quad \text{con } \frac{2}{r} + \frac{3}{s} \leq 1, \; s > 3$$

Véase por ejemplo [Lions-1].

2.3.4. Soluciones más regulares

Ahora nuestro objetivo es ver que, partiendo de datos con mas regularidad, podemos obtener soluciones más regulares para el caso bidimensional. En el caso tridimensional, probaremos la existencia de soluciones más regulares en intervalos de tiempo arbitrarios siempre que supongamos que los datos de partida $\mathbf{u}_0, \boldsymbol{f}$ sean "suficientemente pequeños.º que ν sea suficientemente grande.

CASO BIDIMENSIONAL

Teorema 2.9. *Supongamos $n = 2$, y partimos de $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}' \in L^2(0, T; V'), \boldsymbol{f}(0) \in H$ y $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap V$. Entonces la única solución del Problema 2.4 dada por los Teoremas 2.5 y 2.6 cumple que*

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

Teorema 2.10. *Supongamos $n = 2$, con Ω un conjunto acotado de clase $\mathscr{C}^2$, y partimos de $\boldsymbol{f} \in L^\infty(0, T; H), \boldsymbol{f}' \in L^2(0, T; V'), \boldsymbol{f}(0) \in H$ y $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap V$. Entonces la única solución del Problema 2.4 dada por los Teoremas 2.5 y 2.6 cumple que*

$$\mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{H}^2(\Omega))$$

CASO TRIDIMENSIONAL

Teorema 2.11. *Supongamos $n = 3$, y partimos de $\boldsymbol{f} \in L^\infty(0, T; H), \boldsymbol{f}' \in L^1(0, T; H)$ y $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap V$ "suficientemente pequeños" o para ν suficientemente grande. Entonces existe una única solución $\mathbf{u}$ del Problema 2.4 que cumple*

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

Teorema 2.12. *Supongamos $n = 3$, con Ω conjunto de clase $\mathscr{C}^\infty$, y partimos de $\boldsymbol{f} \in L^\infty(0,T;H), \boldsymbol{f}' \in L^1(0,T;H)$ y $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap V$ "suficientemente pequeños" o para ν suficientemente grande. Entonces la única solución del Problema 2.4 cumple que*

$$\mathbf{u}' \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^2(\Omega))$$

Propiedades de la presión (para $n \leq 4$)

Definamos

$$\mathbf{U}(t) = \int_0^t \mathbf{u}(s)\, ds \qquad \beta(t) = \int_0^t B\mathbf{u}(s)\, ds \qquad \mathbf{F}(t) = \int_0^t \boldsymbol{f}(s)\, ds$$

Si $\mathbf{u}$ es solución de $(2.15) - (2.16)$, entonces para $n \leq 4$,

$$\mathbf{U}, \beta, \mathbf{F} \in \mathscr{C}^\infty([0,T];V')$$

Integrando (2.15), vemos que

$$\mathbf{v}((\mathbf{U}(t), \mathbf{v})) = \langle \boldsymbol{g}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V \ \ \forall t \in [0,T]$$

donde $\boldsymbol{g} \in \mathscr{C}([0,T];V')$ es

$$\boldsymbol{g}(t) = \mathbf{F}(t) - \beta(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0$$

Gracias a las Proposiciones 1.1 y 1.2, aseguramos para cada $t \in [0,T]$ la existencia de alguna función $p(t) \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 - \nu\Delta\mathbf{U}(t) + \beta(t) + \nabla p(t) = \mathbf{F}(t) \tag{2.75}$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla p = \boldsymbol{g} - \nu\Delta\mathbf{U}$$

llegamos a que $\nabla p \in \mathscr{C}([0,T];\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ y, por lo tanto

$$p \in \mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.76}$$

De esta manera, podemos derivar (2.75) en el sentido de las distribuciones en Q. Así, estableciendo

$$p = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.77}$$

obtenemos en Q

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

La presión aparece generalmente como una distribución en Q definida por (2.76) y (2.77). Bajo las hipótesis de los Teoremas 2.10 ($n = 2$) y 2.12 ($n = 3$), y teniendo en cuenta la Proposición 1.5, concluimos con que $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

2.3.5. Relaciones entre los problemas de existencia y unicidad para $n = 3$

Denominaremos

- Soluciones débiles a aquellas funciones $\mathbf{u}$ solución de (2.46) $-$ (2.47) tal que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap (0, T; H)$ y, por ello (aplicando el Teorema 2.6), $\mathbf{u} \in L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega))$ y $\mathbf{u}' \in L^{4/3}(0, T; V')$.
- Soluciones fuertes a aquellas funciones $\mathbf{v}$ solución de (2.46) $-$ (2.47) tal que, además de lo anterior, cumplen que $\mathbf{v} \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$.

Por los Teoremas 2.5, 2.6, 2.8 y 2.11, sabemos de la existencia pero no de la unicidad de las soluciones débiles y, por e contrario, sabemos de la unicidad pero no de la existencia de las soluciones fuertes.

Para las soluciones débiles dadas por el Teorema 2.5 se cumple la denominada desigualdad de la energía:

$$|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t ||\mathbf{u}(s)||^2 \, ds \leq |\mathbf{u}_0|^2 + 2 \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \mathbf{u}(s) \rangle \, ds \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.78}$$

y de acuerdo al Teorema 2.8 y al Lema 2.2, las soluciones fuertes (si existen) cumplen la igualdad de la energía:

$$|\mathbf{v}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t ||\mathbf{v}(s)||^2 \, ds = |\mathbf{v}_0|^2 + 2 \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \mathbf{v}(s) \rangle \, ds \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.79}$$

Los problemas de la unicidad de las soluciones débiles y de la existencia de las soluciones fuertes se relacionan por el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *Supongamos que* $n = 3$ *y partimos de* $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; H), \mathbf{u}_0 \in H$ *datos arbitrarios. Si existe una solución fuerte* $\mathbf{v}$ *de (2.46)–(2.47), entonces no puede existir otra solución débil* $\mathbf{u}$ *que satisfaga la desigualdad de la energía.*

2.3.6. El caso $\boldsymbol{f} = 0$

El siguiente teorema nos muestra que, si $\boldsymbol{f} = 0$, el fluido tiende al equilibrio para $t \longrightarrow +\infty$.

Teorema 2.14. *Supongamos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ *es un conjunto abierto y acotado, y sean* $\boldsymbol{f} = 0, \mathbf{u}_0 \in V$ *dados.*

- *Si* $n = 2$, $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \infty; V)$ *y tiende a 0 para* $t \longrightarrow +\infty$.
- *Si* $n = 3$, $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_2; V), \mathbf{u} \in L^\infty(T_3, \infty; V)$ *para algún* T_2, T_3 *(con* $0 < T_2 \leq T_3$*); y* $\mathbf{u}$ *tiende a 0 para* $t \longrightarrow +\infty$.

Capítulo 3

Control óptimo de las EDPs estacionarias de Stokes

En este capítulo formularemos un problema de control óptimo de las EDPs de Stokes para su posterior resolución, estudiando en la Sección 3.1 la existencia, unicidad y caracterización de la solución. En la Sección 3.2 podremos calcular dicha solución gracias a algoritmos iterados de tipo punto fijo. Las demostraciones de este Capítulo se han adaptado a partir del estudio de ejemplos análogos que podemos encontrar, por ejemplo, en [Fernández-Cara]. Para más detalles, podemos consultar tanto esta referencia como [Brezzi] y [Gunzburger].

Volvamos a considerar el problema de Stokes estacionario:

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{en } \Omega \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma \tag{3.3}$$

Ahora $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ es un **control** (tenemos que decidir qué $\boldsymbol{f}$ tomar) y la solución asociada $(\mathbf{u}, p)$ es el **estado** correspondiente. Fijemos un conjunto $\mathscr{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)$ no vacío de controles admisibles. El problema que nos interesa resolver, llamado

problema de control óptimo, es

$$\begin{cases} \text{Hallar } \boldsymbol{f} \in \mathscr{U}_{ad} \text{ tal que} \\ J(\boldsymbol{f}) \leq J(\bar{\boldsymbol{f}}) \quad \forall \bar{\boldsymbol{f}} \in \mathscr{U}_{ad}, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde $J : \mathscr{U}_{ad} \longmapsto \mathbb{R}$ es la función

$$J(\boldsymbol{f}) := \frac{a}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_d|^2 \; + \frac{b}{2} \int_{\Omega} |\boldsymbol{f}|^2$$

con $a, b > 0$ y $\mathbf{u}_d \in H$ dadas. A esta función, de aquí en adelante, la llamaremos **funcional objetivo** o **funcional de coste**.

3.1. Existencia, unicidad y caracterización

Teorema 3.1. *Si $\mathscr{U}_{ad}$ es un convexo cerrado no vacío de $L^2(\Omega)$, con $a, b > 0$ y $\mathbf{u}_d \in H$, entonces existe una única solución de (3.4).*

Demostración. Primero veamos que el problema tiene al menos una solución. Consideremos una sucesión minimizante $\{\boldsymbol{f}_n\}$ en $\mathscr{U}_{ad}$, es decir, una sucesión tal que

$$\lim_{n \to \infty} J(\boldsymbol{f}_n) = \inf_{\mathscr{U}_{ad}} J$$

Esta sucesión está acotada, dado que, para todo n,

$$||\boldsymbol{f}_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{b} J(\boldsymbol{f}_n)$$

luego podemos suponer (si hiciera falta, podríamos extraer una subsucesión) que converge débilmente hacia un control $\hat{\boldsymbol{f}}$[1]. Además, $\hat{\boldsymbol{f}} \in \mathscr{U}_{ad}$, pues al ser $\mathscr{U}_{ad}$ convexo cerrado, es secuencialmente cerrado para la convergencia débil.

Ahora queremos probar que $J : \mathscr{U}_{ad} \longmapsto \mathbb{R}$ sea secuencialmente semi-continua inferiormente para la convergencia débil, es decir,

$$\boldsymbol{f}_n \to \hat{\boldsymbol{f}} \text{ débilmente en } L^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad J(\hat{\boldsymbol{f}}) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(\boldsymbol{f}_n)$$

[1]Como $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, toda sucesión acotada posee subsucesiones débilmente convergentes.

para así poder afirmar que

$$J(\hat{\boldsymbol{f}}) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(\boldsymbol{f}_n) = \inf_{\mathscr{U}_{ad}} J$$

de manera que $\hat{\boldsymbol{f}}$ sea un control óptimo.

Por un lado, tenemos que $\boldsymbol{f} \mapsto (\mathbf{u}, \boldsymbol{f})$ es una aplicación lineal y continua de $L^2(\Omega)$ en V [2]. Por otro lado, el funcional J es cuadrático y estrictamente convexo, es decir, para $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{g}$,

$$J(\alpha\boldsymbol{f} + (1-\alpha)\boldsymbol{g}) < \alpha J(\boldsymbol{f}) + (1-\alpha)J(\boldsymbol{g}) \quad \forall\alpha \in (0,1), \;\; \forall \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$$

De manera que, teniendo en cuenta ambos resultados, podemos afirmar que J es secuencialmente semi-continua inferiormente para la convergencia débil.

Veamos ahora que el control óptimo es único. Dados dos controles óptimos distintos $\hat{\boldsymbol{f}}$ y $\bar{\boldsymbol{f}}$, como J es estrictamente convexa,

$$J\Big(\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{f}} + \bar{\boldsymbol{f}})\Big) < \frac{1}{2}(J(\hat{\boldsymbol{f}}) + J(\bar{\boldsymbol{f}})) = \inf_{\mathscr{U}_{ad}} J$$

pero esto es absurdo, ya que $\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{f}} + \bar{\boldsymbol{f}}) \in \mathscr{U}_{ad}$. Tenemos entonces la unicidad. □

Teorema 3.2. *En las condiciones del Teorema 3.1, la única solución de (3.4) verifica la siguiente propiedad: existe un par* $(\mathbf{w}, q) \in V \times L^2(\Omega)$ *tal que* $\boldsymbol{f}$*, el estado asociado* $(\mathbf{u}, p)$ *y* $(\mathbf{w}, q)$ *verifican el sistema de optimalidad*

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \textit{en } \Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & \textit{en } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \textit{sobre } \Gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{u} - \mathbf{u}_d & \textit{en } \Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{w} = 0 & \textit{en } \Omega \\ \mathbf{w} = 0 & \textit{sobre } \Gamma \end{cases} \tag{3.6}$$

$$(a\mathbf{w} + b\boldsymbol{f}, \bar{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}) \geq 0 \quad \forall\bar{\boldsymbol{f}} \in \mathscr{U}_{ad}, \;\; \boldsymbol{f} \in \mathscr{U}_{ad} \tag{3.7}$$

[2] Se tiene gracias a la linealidad del problema de Stokes, cuya resolución se detalló en el Capítulo 1.

Demostración. La función $J : \mathscr{U}_{ad} \mapsto \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable (es composición de una aplicación lineal continua y una función cuadrática bien definida). Como $\boldsymbol{f}$ es la solución de (3.4), se tiene necesariamente que

$$\frac{d}{d\epsilon} J(\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}))\Big|_{\epsilon=0} \geq 0 \qquad \forall \hat{\boldsymbol{f}} \in \mathscr{U}_{ad}$$

Calculemos esta derivada. Véase que

$$\frac{d}{d\epsilon} J(\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}))\Big|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f})) - J(\boldsymbol{f})}{\epsilon}$$

Ahora bien,

$$J(\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f})) = \frac{a}{2} \int_\Omega |\mathbf{z}_\epsilon - \mathbf{u}_d|^2 \; + \; \frac{b}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f})|^2$$

donde hemos llamado $\mathbf{z}_\epsilon$ al campo de velocidades asociado a $\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f})$. Como las EDPs de Stokes son lineales, es inmediato que $\mathbf{z}_\epsilon = \mathbf{u} + \epsilon \mathbf{z}$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{z}$ son las velocidades asociadas a $\boldsymbol{f}$ y a $\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}$, respectivamente. Por ello,

$$\frac{d}{d\epsilon} J(\boldsymbol{f} + \epsilon(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}))\Big|_{\epsilon=0} =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{a}{2} \int_\Omega |\mathbf{z}|^2 \; + \; \frac{b}{2} \int_\Omega |\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}|^2 \right] + a \int_\Omega (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)\mathbf{z} \; + \; b \int_\Omega \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}) =$$

$$a \int_\Omega (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)\mathbf{z} \; + \; b \int_\Omega \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f})$$

Para tener una expresión explícita de la derivada de J, introducimos el nuevo par $(\mathbf{w}, q)$, el estado adjunto, cumpliendo:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{u} - \mathbf{u}_d & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{w} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Pasando a la formulación débil y haciendo lo mismo con la ecuación de estado que relaciona $\mathbf{z}$ con $\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}$, llegamos a la condición de optimalidad:

$$\int_\Omega (a\mathbf{w} + b\boldsymbol{f}, \hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}) \geq 0 \qquad \forall \hat{\boldsymbol{f}} \in \mathscr{U}_{ad}$$

$\square$

La solución de (3.4) se denomina control óptimo y $(\mathbf{w}, q)$ es el estado adjunto asociado. Obsérvese que resolver (3.7) equivale a resolver un nuevo problema de mínimos en $\mathscr{U}_{ad}$:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \boldsymbol{f} \in \mathscr{U}_{ad} \ \text{ tal que} \\ K_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{f}) \leq K_{\mathbf{w}}(\bar{\boldsymbol{f}}) \quad \forall \bar{\boldsymbol{f}} \in \mathscr{U}_{ad}, \end{cases} \tag{3.8}$$

donde hemos usado la notación

$$K_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{f}) = \frac{b}{2} \int_{\Omega} |\boldsymbol{f}|^2 + a \int_{\Omega} \mathbf{w} \boldsymbol{f} \quad \forall \boldsymbol{f} \in \mathscr{U}_{ad}$$

A su vez, esto equivale a calcular

$$\boldsymbol{f} = \mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}} \Big(-\frac{a}{b} \mathbf{w} \Big),$$

donde $\mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}}$ es el operador de proyección ortogonal habitual sobre $\mathscr{U}_{ad}$. En efecto, es bien conocido que esta última igualdad y (3.7) son equivalentes.

3.2. Cálculo del control óptimo

La caracterización (3.5)$-$(3.7) conduce de manera natural a un **algoritmo** iterado de tipo punto fijo:

ALG 1:

Paso 1.- Fijar $\boldsymbol{f}^0 \in \mathscr{U}_{ad}$.

Paso 2.- Para $n \geq 0$ y $\boldsymbol{f}^n \in \mathscr{U}_{ad}$ dados, hallar $(\mathbf{u}^n, p^n)$ (solución de (3.5) con $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^n$), $(\mathbf{w}^n, q^n)$ (solución de (3.6) con $\mathbf{u} = \mathbf{u}^n$) y $\boldsymbol{f}^{n+1}$ (solución de (3.7) con $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^n$ y $\mathbf{w} = \mathbf{w}^n$).

Teorema 3.3. *En las condiciones del Teorema 3.1, existe $c_0 = c_0(\Omega)$ tal que, si $\frac{b}{a} > c_o(\Omega)$, el algoritmo precedente converge.*

Demostración. Sabemos que la aplicación que a cada control le asocia un estado es lineal y continua. De manera análoga, la aplicación que asocia a cada estado su correspondiente estado adjunto también lo será. Por ello, la composición de ambas aplicaciones también será lineal y continua. Si llamamos M a dicha composición, existirá una constante $c_0 = c_0(\Omega)$ (dependiente de Ω debido al uso intermedio de desigualdades de Poincaré) tal que

$$||M\boldsymbol{f}_1 - M\boldsymbol{f}_2|| \leq c_0(\Omega)||\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2|| \quad \forall \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$$

Las iteraciones de **ALG 1** se pueden escribir en la forma

$$\boldsymbol{f}^{n+1} = \mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}}\Big(-\frac{a}{b}M\boldsymbol{f}^n \Big), \qquad n \geq 0$$

Por ello, usando la no expansividad del operador proyección, si miramos **ALG 1** como un algoritmo de punto fijo asociado al operador resultante de la composición $\mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}} \circ \Big(-\frac{a}{b}M \Big)$ llegamos a que, si se cumple que

$$\frac{a}{b}c_0(\Omega) < 1$$

esta composición es contractiva y, por el Teorema de Punto Fijo de Banach, el método de aproximaciones sucesivas converge. $\square$

Para terminar, estamos interesados en formular un nuevo algoritmo de punto fijo teniendo en cuenta alguna de las aproximaciones descritas en el Capítulo 1. Nos centraremos en la aproximación por elementos finitos del problema.

En líneas generales, para llegar a **ALG 1** partimos del problema de control (3.4) definido por una EDP de estado, un funcional de coste J y un conjunto de controles admisibles $\mathscr{U}_{ad}$. A partir de la solución de (3.4), definimos el sistema de optimalidad caracterizado por (3.5) −estado asociado $(\mathbf{u}, p)$−, (3.6) −estado adjunto asociado $(\mathbf{w}, q)$− y (3.7) −condición adicional que, gracias a la proyección sobre $\mathscr{U}_{ad}$, nos permite calcular $\boldsymbol{f}$ teniendo en cuenta el problema de mínimos (3.8)−. Para llegar a un algoritmo **ALG 2** que sea computacionalmente practicable, tenemos dos posibles vías:

- Podemos aproximar el problema de control (3.4) por un problema en dimensión finita (usando la aproximación por elementos finitos), obteniendo así una ecuación de estado aproximada, un nuevo funcional de coste aproximado y un nuevo conjunto aproximado de controles admisibles. A partir de ello, podemos entonces definir un nuevo sistema de optimalidad aproximado y reformular **ALG 1**.
- Podemos partir del sistema de optimalidad definido por (3.5) − (3.7) y cambiar el problema a resolver por una aproximación en dimensión finita,

de tal manera que el nuevo método resuelva, en cada etapa, diferentes problemas con diferentes aproximaciones.

Nosotros seguiremos la segunda vía para llegar a **ALG 2**.

Observación 3.1. Generalmente, los dos algoritmos que se pueden obtener por estas vías no coinciden.

Por fijar ideas, consideremos aproximaciones de las ecuaciones de estado y estado adjunto basadas en elementos finitos mixtos. De esta manera, llegamos a la ecuación de estado aproximada

$$\left\{\begin{array}{ll} \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \; - \int_\Omega p_h(\nabla \cdot \mathbf{v}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{f}_h \mathbf{v}_h & \forall \mathbf{v}_h \in W_h \\ \displaystyle\int_\Omega \bar{p}_h(\nabla \cdot \mathbf{u}_h) = 0 & \forall \bar{p}_h \in P_h \end{array}\right. \tag{3.9}$$

donde W_h es un subespacio de dimensión finita de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ y P_h es un subespacio de dimensión finita de $L^2(\Omega)$. Supondremos que el par (W_h, P_h) verifica la condición inf-sup uniforme

$$\operatorname*{ínf}_{p_h \in P_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in W_h} \frac{\int p_h(\nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{||p_h||_{L^2}||\mathbf{v}_h||_{H_0^1}} \geq \beta > 0$$

Esta condición permite asegurar la existencia y unicidad de solución de (3.9) (p_h es única salvo una constante aditiva). Para los detalles, véase por ejemplo [Brezzi].

De manera análoga, también llegamos a la ecuación de estado adjunto aproximada

$$\left\{\begin{array}{ll} \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{w}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \; - \int_\Omega q_h(\nabla \cdot \mathbf{v}_h) = \int_\Omega (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{dh})\mathbf{v}_h & \forall \mathbf{v}_h \in W_h \\ \displaystyle\int_\Omega \bar{q}_h(\nabla \cdot \mathbf{w}_h) = 0 & \forall \bar{q}_h \in P_h \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Por último, la condición de optimalidad (3.7) se reduce a calcular

$$\boldsymbol{f}_h = \mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}}\Big(-\frac{a}{b}\mathbf{w}_h\Big) \tag{3.11}$$

Con estos elementos, ya tenemos las herramientas necesarias para formular nuestro nuevo algoritmo de punto fijo.

<u>**ALG 2:**</u>

Paso 1.- Fijar $\boldsymbol{f}_h^0 \in \mathscr{U}_{ad}$.

Paso 2.- Para $n \geq 0$ y $\boldsymbol{f}_h^n \in \mathscr{U}_{ad}$ dados, hallar $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n)$ (solución de (3.9) con $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}_h^n$), $(\mathbf{w}_h^n, q_h^n)$ (solución de (3.10) con $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^n$) y $\boldsymbol{f}_h^{n+1}$ (solución de (3.11) con $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}_h^n$ y $\mathbf{w}_h = \mathbf{w}_h^n$).

Estudiemos dos casos particulares:

(1) Si $\mathscr{U}_{ad} = L^2(\Omega)$, entonces $\mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}}$ es la identidad, de manera que

$$\boldsymbol{f}_h^{n+1} = -\frac{a}{b}\mathbf{w}_h^n$$

(2) Un caso con mayor interés práctico es si definimos el conjunto de controles admisibles como

$$\mathscr{U}_{ad} = \{\boldsymbol{f}_h \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \quad ; \quad \alpha_i \leq (\boldsymbol{f}_h)_i \leq \beta_i \ \ , \ \ 1 \leq i \leq d\},$$

es decir, la $i-$ésima componente de $\boldsymbol{f}_h$ está acotada entre dos números reales α_i y β_i, donde i varía entre 1 y d (dimensión del espacio). En estas condiciones, la proyección de una función $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ queda definida como

$$\mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^* \quad , \quad z_i^* = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } z_i < \alpha_i \\ z_i & \text{si } z_i \in [\alpha_i, \beta_i] \\ \beta_i & \text{si } z_i > \beta_i \end{cases}$$

En consecuencia, $\boldsymbol{f}_h^{n+1}$ queda determinada teniendo en cuenta (3.11).

Por último, veamos un resultado de convergencia similar al enunciado en el Teorema 3.3.

Teorema 3.4. *En las condiciones precedentes, para un valor de* $\dfrac{a}{b}$ *suficientemente pequeño, el algoritmo precedente converge.*

Idea de la demostración. Consideremos la aplicación lineal

$$\Lambda_h : \mathscr{U}_{ad} \to \mathscr{U}_{ad}$$

donde, para cada $\boldsymbol{f} \in \mathscr{U}_{ad}$,

$$\Lambda_h \boldsymbol{f} = \mathbb{P}_{\mathscr{U}_{ad}}(-\frac{a}{b}\mathbf{w}_h)$$

donde $\mathbf{w}_h$ es (junto con q_h) la solución de (3.10), y $\mathbf{u}_h$ es (junto con p_h) la solución de (3.9). Para que esta aplicación sea contractiva, por un razonamiento análogo al usado en el Teorema 3.3, bastará con que $\dfrac{a}{b}$ sea suficientemente pequeño. $\square$

Observación 3.2. Si los W_h y P_h se eligen asociados (por ejemplo) a las aproximaciones P_l-Lagrange correspondientes a una familia regular de triangulaciones $\mathscr{T}_h$ y se cumple la condición inf-sup uniforme, se puede probar que el tamaño de a/b se puede elegir suficientemente pequeño independientemente de h. Por ejemplo, esto se puede conseguir si W_h y P_h son, respectivamente, aproximaciones P_2-Lagrange y P_1-Lagrange. Para los detalles, véase [Brezzi].

Bibliografía

[Brézis] Brézis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, U.S.A., 2010.

[Brezzi] Brezzi, F.; Fortin, M., *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer Series in Computational Mathematics, 15. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Fernández-Cara] Fernández-Cara, E., *Complementos de modelización y optimización numérica.* Notas de curso, Universidad de Sevilla, 2018.

[Gunzburger] Gunzburger, M.D., *Perspectives in flow control and optimization, Advances in design and control, 5.* SIAM, Philadelphia, 2003.

[Lemarié-Rieusset] Lemarié-Rieusset, P.G., *The Navier-Stokes problem in the 21st century.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[Lions-1] Lions, J.L., *Optimal control of systems governed by partial differential equations.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 170 Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[Lions-2] Lions, J.L., *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[Robinson] Robinson, J.C.; Rodrigo, J.L.; Sadowski, W., *The three-dimensional Navier-Stokes equations. Classical theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 157, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[Temam] TEMAM, R., *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1979.