UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática Aplicada II

EQUIVALENCIA DE QUASI-NORMAS EN ESPACIOS DE ORLICZ GENERALIZADOS

Trabajo Fin de Máster

presentado por

José Manuel Sánchez Cuadrado

Director: Antonio Fernández Carrión

Sevilla, febrero de 2022

Contenido

Resumen

El marco de trabajo de esta memoria lo constituye el estudio de los espacios generalizados de Luxemburg X_L^Φ y de Orlicz X_O^Φ asociados a un espacio quasi-normado X y una N-función Φ. En particular, estamos interesados en mostrar la relación entre los espacios X_L^Φ y X_O^Φ y la equivalencia de sus quasi-normas naturales.

Los objetivos principales de este trabajo pueden resumirse en tres.

El primero de ellos es construir un ejemplo de espacio de Banach de funciones $(X, \|\cdot\|_X)$ y una N-función Φ con la propiedad Δ_2 para el que se tenga la contención estricta entre los espacios de Luxemburg y Orlicz asociados. Es decir, que

$$X_L^\Phi \subsetneq X_O^\Phi.$$

Logrado este primer objetivo, quedará claro que en general los espacios de Luxemburg y Orlicz no coinciden. Por tanto, el siguiente paso consiste en buscar condiciones generales que garanticen la igualdad entre dichos espacios y, si es posible, obtener además la equivalencia entre las quasi-normas asociadas. Además, cuando no se tenga garantizada la igualdad entre el espacio de Orlicz y Luxemburg, nos interesa saber, al menos, cuándo las quasi-normas son equivalentes en el espacio *pequeño* X_L^Φ. Este problema constituye precisamente nuestro segundo objetivo.

Finalmente, tanto para garantizar, en un caso, la igualdad entre los espacios generalizados de Luxemburg y Orlicz junto con la equivalencias de sus quasi-normas y, en otro caso, la equivalencia de dichas quasi-normas en el espacio de Luxemburg X_L^Φ, comprobaremos que será suficiente que la quasi-norma $\|\cdot\|_X$, del espacio quasi-normado de funciones X, posea un q-renormado estrictamente monótono junto con que X posea la propiedad σ-Fatou, o bien, la N-función Φ tenga la propiedad Δ_2. Por tanto, el tercer y último objetivo será buscar condiciones suficientes que garanticen la existencia de un q-renormado estrictamente monótono.

Introducción

Los espacios clásicos de Lebesgue $L^p(\mu)$, llamados así en honor al matemático francés *Henri León Lebesgue*, están definidos como las clases de funciones μ-a.e. cuya p-ésima potencia es integrables. Es decir, $f \in L^p(\mu)$ si y solo si

$$(\Phi_p \circ |f|) \in L^1(\mu), \tag{1}$$

siendo $\Phi_p(x) := x^p$, con $p > 1$, y μ una medida positiva. Además, se tiene que $\|f\|_{L^p(\mu)} := \|\Phi_p(|f|)\|_{L^1(\mu)}^{1/p}$, para cada $f \in L^p(\mu)$, es una norma en $L^p(\mu)$. Lo que nos muestra (1) es que, en esencia, todos los espacios de Lebesgue $L^p(\mu)$ se construyen a partir del espacio $L^1(\mu)$.

Observamos que la familia de funciones Φ_p es una muy concreta de entre todas las posibles funciones que podríamos haber escogido en (1). Así, de manera general, dada una función $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ y un espacio de medida (Ω, Σ, μ), es posible construir el conjunto

$$O^\Phi = \left\{ f \in L^0(\mu) \ : \|\Phi(|f|)\|_{L^1(\mu)} = \int_\Omega \Phi(|f|) \; d\mu < \infty \right\},$$

que se conoce como la *clase de Orlicz*. Esta construcción es demasiado general para poder extraer buenas propiedades en O^Φ. En primer lugar, la convexidad, en general, se pierde, ya que no estamos exigiendo ninguna restricción a la función Φ. De hecho, tampoco se tiene asegurada la linealidad de la clase de Orlicz y mucho menos su normabilidad. Así, en la teoría clásica, lo habitual es trabajar solamente con *funciones de Young*. Éstas son funciones Φ, convexas verificando $\Phi(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$. Para esta familia de funciones, la clase de Orlicz O^Φ es un conjunto convexo, aunque sigue sin ser lineal. Dicha propiedad se puede lograr exigiendo una hipótesis extra a la función de Young Φ, conocida como *propiedad* Δ_2. Aun así, la normabilidad de la clase de Orlicz sigue sin estar garantizada.

El matemático polaco *Władysław Orlicz*, del cual toma nombre el conjunto O^Φ y el correspondiente espacio que introducimos a continuación, trata de solucionar este problema. Y lo hace de manera original e inteligente. Para ello, introducirá en 1932 el *espacio de Orlicz* $L^{\Phi}(\mu)$ inspirándose en el conocido resultado de Riesz (1910) donde describe el dual de $L^p(\mu)$ y que, por tanto, la norma en el espacio de Lebesgue $L^p(\mu)$, para $p>1$, puede describirse a partir del espacio $L^q(\mu)$, siendo $q>1$ el exponente conjugado de p, como

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup\left\{\|fg\|_{L^1(\mu)} \ : \ g\in L^q(\mu),\ \|g\|_{L^q(\mu)}\leq 1\right\}. \tag{2}$$

Salvando algunas dificultades técnicas, para lo que se introduce una clase especial de funciones de Young, conocidas como *N-funciones*, se define el hoy conocido espacio de Orlicz, asociado a una N-función Φ, como

$$L^{\Phi}(\mu) = \left\{f\in L^0(\mu) \ : \|f\|_{L^{\Phi}(\mu)}<\infty\right\},$$

siendo

$$\|f\|_{L^{\Phi}(\mu)} := \sup\left\{\|fg\|_{L^1(\mu)} \ : \ g\in O^{\hat{\Phi}},\ \|\hat{\Phi}(|g|)\|_{L^1(\mu)}\leq 1\right\} \tag{3}$$

la *norma de Orlicz*. En (3), hemos considerado la función complementaria de Φ definida por

$$\hat{\Phi}(y) = \sup_{x\geq 0}\{xy-\Phi(x)\},$$

que hace el papel del exponente conjugado en (2). Con esta definición, el espacio de Orlicz $L^{\Phi}(\mu)$ es un espacio lineal y normado con la norma de Orlicz (3).

Desarrollada, en parte por el propio Orlicz, la teoría de los espacios de Orlicz, se introduce, en la década de los cincuenta, otras normas en estos espacios. Quizá la más conocida sea la que *W.A.J Luxemburg* considera en su tesis doctoral (1955), definida por

$$|||f|||_{L^{\Phi}(\mu)} := \operatorname{ínf}\left\{c>0 \ : \ \frac{|f|}{c}\in O^{\Phi} \text{ con } \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{L^1(\mu)}\leq 1\right\}, \tag{4}$$

para cada $f\in L^{\Phi}(\mu)$, y que conocemos como *norma de Luxemburg*. Dicha norma no es más que el funcional de Minkowski del conjunto $\{f\in L^0(\mu) : \|\Phi(|f|)\|_{L^1(\mu)}\leq 1\}$.

La equivalencia de estas dos normas es un resultado clásico en la teoría de los espacios de Orlicz. Concretamente, se verifica que

$$|||f|||_{L^{\Phi}(\mu)} \leq \|f\|_{L^{\Phi}(\mu)} \leq 2|||f|||_{L^{\Phi}(\mu)}, \tag{5}$$

para toda $f\in L^{\Phi}(\mu)$.

Es más, como se desprende de la literatura, la equivalencia (5) ha proporcionado herramientas básicas para el análisis de los espacios de Orlicz y constituye una de las razones de la utilidad e importancia de estos espacios.

Quizá sea este uno de los motivos por los que se ha intentado (y sigue intentandose) introducir nuevos espacios y nuevas clases de funciones Φ que, generalizando los espacios de Orlicz, siguen conservando la esencia de sus propiedades. La mayoría de estos esfuerzos se han concentrado en la función Φ y no tanto en el espacio $L^1(\mu)$.

Así, para generalizar la teoría clásica de los espacios de Orlicz, una primera aproximación puede consistir en tratar de buscar familias de funciones Φ lo más generales posibles que sigan manteniendo las buenas propiedades que poseen los espacios $L^\Phi(\mu)$. Sin embargo, en esta memoria, no nos centramos tanto en la función Φ sino en el espacio ambiente con el que se definen los espacios de Orlicz. Así, surgen diferentes espacios generalizados de Orlicz, dependiendo de que consideremos una definición *a la Orlicz* usando (3), o bien lo hagamos *a la Luxemburg* usando (4). Es decir, que en esta memoria, trabajaremos siempre con funciones de Young y N-funciones, pero cambiaremos el espacio $L^1(\mu)$ por un espacio quasi-normado de funciones $(X, \|\cdot\|_X)$ sobre una medida finita μ.

Así, podemos considerar el espacio de Luxemburg generalizado

$$X_L^\Phi = \left\{ f \in L^0(\mu) \ : \Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X \text{ para algún } c > 0 \right\}$$

con la quasi-norma

$$\|f\|_{X_L^\Phi} = \text{ínf} \left\{ c > 0 \ : \ \Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X \text{ con } \left\| \Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \right\|_X \leq 1 \right\},$$

o bien, podemos considerar el espacio de Orlicz generalizado

$$X_O^\Phi = \sup \left\{ \|fg\|_X \ : \ \hat{\Phi}(g) \in X, \ \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1 \right\}$$

con la quasi-norma

$$\|f\|_{X_O^\Phi} = \sup \left\{ \|fg\|_X \ : \ \hat{\Phi}(g) \in X, \ \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1 \right\}.$$

De esta manera, los espacios de Orlicz y Luxemburg generalizados que se obtienen siguen conservando buenas propiedades. De hecho, estos continúan siendo espacios quasi-normados de funciones sobre la misma medida μ.

A la vista de cómo se han introducido los espacios generalizados de Luxemburg y de Orlicz, y teniendo en cuenta la desigualdad de Young, se verifica, en general la inclusión $X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el caso clásico, en el que estos espacios coinciden, es decir,

$$L^1(\mu)_L^\Phi = L^1(\mu)_O^\Phi = L^\Phi(\mu)$$

y las normas de Orlicz y Luxemburg son equivalentes, en esta memoria construiremos un ejemplo para el que se tiene la contención estricta del espacio de Luxemburg en el espacio de Orlicz. A la vista de tal ejemplo surgen las dos siguientes cuestiones.

(1) ¿Cuándo son los espacios X_L^Φ y X_O^Φ iguales? y, cuando lo sean,

(2) ¿Qué relación hay entre sus correspondientes quasi-normas $\|\cdot\|_{X_L^\Phi}$ y $\|\cdot\|_{X_O^\Phi}$?

En este trabajo responderemos a ambas preguntas dando condiciones suficientes muy generales que garantizan la igualdad de los espacios y la equivalencia de las quasi-normas asociadas. Es más, cuando dichos espacios no coinciden, veremos también que, bajo ciertas hipótesis sobre la N-función Φ, se tiene la equivalencia entre las quasi-normas, al menos, en el espacio pequeño X_L^Φ.

El texto se ha dividio en siete capítulos. En el Capítulo 1 introducimos el concepto de espacio quasi-normado de funciones sobre una medida finita μ puesto que constituye el *ambiente* donde trabajaremos. En él, describiremos además los espacios p-potencias asociados y, finalmente, estudiaremos también los espacios de Köthe, que son espacios de funciones ligeramente más generales.

Debido a que los espacios de Orlicz y Luxemburg se construyen a partir de funciones de Young y N-funciones, el Capítulo 2 está dedicado a recoger todos aquellos resultados sobre este tipo de funciones que nos son útiles para este trabajo.

Tras haber recopilado los resultados necesarios sobre funciones de Young, en el Capítulo 3, construimos la clase de Orlicz, el espacio generalizado de Luxemburg y el espacio generalizado de Orlicz asociados a un espacio quasi-normado de funciones X y a una función de Young Φ, o N-función en el caso del espacio de Orlicz. Estudiaremos en profundidad estos espacios, viendo, entre otras cosas, cómo la completitud del espacio quasi-normado de funciones X se traspasa a los espacios de Orlicz y Luxemburg, así como las propiedades σ-Fatou y σ-orden continuidad.

En el Capítulo 4 haremos un breve repaso sobre medidas vectoriales, es decir, una función $m : \Sigma \to Y$ definida en una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω que toma valores en un espacio de Banach Y. De la misma manera, introducimos y estudiamos las principales propiedades de los espacios de funciones integrables $L^1(m)$ y, respectivamente, débil integrables $L^1_w(m)$ asociados a una medida vectorial numerablemente aditiva m.

Una vez conocido con mayor profundidad las propiedades de dichos espacios, en el Capítulo 5 desarrollaremos el mencionado ejemplo de la contención estricta $X_L^\Phi \subsetneq X_O^\Phi$. Este ejemplo se construye precisamente sobre el espacio $L^1(m)$, junto con una N-función Φ con la propiedad Δ_2, y tomando una medida vectorial numerablemente aditiva m que verifica $L^1(m) \subsetneq L^1_w(m)$.

Después de haber comprobado que, en general, los espacios de Orlicz y Luxemburg no coinciden, mostramos en el Capítulo 6 condiciones suficientes que garantizan la igualdad de estos espacios y la equivalencia de las quasi-normas. Estas condiciones involucran a la propiedad σ-Fatou del espacio quasi-Banach X, o bien, la propiedad Δ_2 de la N-función Φ, junto con el hecho de que la quasi-norma $\| \cdot \|_X$ sea *estrictamente monótona*, hecho que rebajaremos posteriormente al final del capítulo exigiendo simplemente que el espacio X posea un *q-renormado estrictamente monótono*.

Así, finalizamos esta memoria en el Capítulo 7, en el que, en vista de lo mostrado al final del capítulo anterior, daremos condiciones suficientes muy generales que garantizan la existencia de un q-renormado estrictamente monótono para el espacio X en términos de convexidad y concavidad.

Capítulo 1

Espacios quasi-Banach de funciones

Para poder definir y trabajar en los espacios de Orlicz generalizados se hace necesario realizar un pequeño estudio sobre los espacios quasi-normados de funciones y, en particular, los espacios quasi-Banach de funciones.

A diferencia de los espacios normados, la topología de los espacios quasi-normados viene descrita por una *quasi-norma*, la cual no verifica la desigualdad triangular, sino que verifica una desigualdad *quasi-triangular*. Por tanto, se pierde, en principio, la convexidad de los entornos del origen.

Los espacios quasi-normados de funciones son espacios quasi-normados cuyos elementos son funciones reales, medibles respecto de una medida μ, verificando además una serie de condiciones adicionales.

1.1. Espacios quasi-normados de funciones

Comenzamos introduciendo la definición de espacio quasi-normado.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial real. Una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ se dice que es una *quasi-norma* si verifica las siguientes tres propiedades.

(1) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todos $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Existe una constante $K \geq 1$ tal que $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$, para todos $x, y \in X$.

La constante K decimos que es una *constante quasi-triangular* de X. En este caso dieremos que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio *quasi-normado*. Si además dicho espacio es completo para la quasi-norma diremos que es un espacio *quasi-Banach*.

Topológicamente hablando, un espacio quasi-normado posee estructura de espacio vectorial topológico que es metrizable. Esto se tiene gracias a que los conjuntos de la forma $B_n = \left\{x \in X \ : \ \|x\|_X < \dfrac{1}{n}\right\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, forman una base numerable de entornos del origen.

A lo largo de esta memoria trabajaremos siempre sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ). Denotaremos por $L^0(\mu)$ al conjunto de funciones μ-medibles identificando aquellas que son iguales μ-en casi todo. A partir de ahora usaremos la notación μ-a.e. en vez de escribir μ-en casi todo. Denotaremos por χ_E a la función característica de un conjunto $E \in \Sigma$.

Hablando ahora del espacio de funciones medibles $L^0(\mu)$, la topología que consideramos en él es la dada por la convergencia en medida. Es decir, que una sucesión $(f_n)_n \subset L^0(\mu)$ converge en medida a $f \in L^0(\mu)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| \geq \varepsilon\}) = 0$$

para todo $\varepsilon > 0$.

La aplicación $|||\cdot||| : L^0(\mu) \to [0, \infty)$ definida por

$$|||f||| = \int_\Omega \frac{|f|}{1 + |f|} \, d\mu$$

es una F-norma que convierte a $L^0(\mu)$ en un F-espacio. No es difícil comprobar que la topología inducida por esta F-norma es equivalente a la topología de la convergencia en medida (ver [33, Cáp. 5, §6, Ejercicio 5]). Por tanto, $L^0(\mu)$ es metrizable y completo, pero no es normable, es decir, la topología de la convergencia en medida no se puede describir por una norma.

Ahora sí, introducimos los *espacios quasi-normados de funciones*, los cuales tienen la propiedad de ser retículos vectoriales quasi-normados.

Definición 1.2. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado, con $X \subseteq L^0(\mu)$. Decimos que X es un *espacio quasi-normado de funciones* sobre μ si se verifican:

(1) Si $f \in L^0(\mu)$ y $g \in X$, con $|f| \leq |g|$ μ-a.e., entonces $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \|g\|_X$.

(2) La función característica $\chi_\Omega \in X$.

Si $\|\cdot\|_X$ resulta ser una norma entonces diremos que X es un *espacio normado de funciones*.

De la misma manera, si la quasi-norma resulta ser completa entonces diremos que X es un *espacio quasi-Banach de funciones*. Cuando la quasi-norma sea además una norma completa diremos que X es un *espacio de Banach de funciones*.

La condición (1) significa que X es un ideal de $L^0(\mu)$ respecto del orden μ-a.e., es decir, $f \leq g$ si y solo si $f(\omega) \leq g(\omega)$ puntualmente μ-a.e. Esto quiere decir que los espacios quasi-normados de funciones son retículos quasi-normados.

Gracias a esto, la condición (2) muestra que $\chi_A \in X$ para todo $A \in \Sigma$ ya que, evidentemente, se tiene que $\chi_A \leq \chi_\Omega$. Además, se puede deducir también de la condición (2) que todas las funciones esencialmente acotadas están también en X.

Proposición 1.3. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Entonces $L^\infty(\mu) \subseteq X$ y esta inclusión es continua.*

Demostración. Basta notar que, dada $f \in L^\infty(\mu)$, la función $\|f\|_{L^\infty(\mu)}\chi_\Omega \in X$ y, como $|f| \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}\chi_\Omega$ μ-a.e., obtenemos que $f \in X$. La continuidad de la inclusión es consecuencia de la desigualdad anterior ya que

$$\|f\|_X \leq \|\|f\|_{L^\infty(\mu)}\chi_\Omega\|_X = \|f\|_{L^\infty(\mu)}\|\chi_\Omega\|_X,$$

es decir, la inclusión es un operador acotado y, por tanto, continuo. □

Recordamos que para una función $f \in X$ podemos considerar su parte positiva $f^+ := f\chi_{\{f\geq 0\}}$ y su parte negativa $f^- := -f\chi_{\{f\leq 0\}}$. Es conocido que las operaciones reticulares $f \mapsto f^+$ y $f \mapsto f^-$ son continuas y, por tanto, se tiene que el cono positivo $X^+ := \{f \in X \ : \ f \geq 0\}$ es un subconjunto cerrado de X.

Con la topología de la convergencia en medida en $L^0(\mu)$, dado X un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ, se puede ver que la inclusión $X \subseteq L^0(\mu)$ es continua (ver [25, Prop 2.2]). Para dar la demostración (las que conocemos resultan extensas y pasan por el teorema de *renormación* de Aoki-Rolewicz) del resultado tendríamos que desviarnos del objetivo que perseguimos en este trabajo. Por ello, aunque usaremos este resultado a lo largo de esta memoria lo dejamos sin demotración. En cualquier caso, recogemos el resultado en la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Entonces la inclusión $X \subseteq L^0(\mu)$ es continua cuando consideramos en este último espacio la topología de la convergencia en medida.*

Introducimos ahora dos propiedades de especial importancia en el estudio de los espacios quasi-normados de funciones.

Definición 1.5. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Se dice que X tiene la propiedad *σ-Fatou* si para toda sucesión positiva y creciente $(f_n)_n \subseteq X$, con $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$, que converge μ-a.e. a f se tiene que $f \in X$ y $\|f\|_X = \sup_n \|f_n\|_X$.

Definición 1.6. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Se dice que X es *σ-orden continuo* si para toda sucesión positiva y creciente $(f_n)_n \subseteq X$ que converge μ-a.e. a $f \in X$ se tiene $\|f - f_n\|_X \to 0$, cuando $n \to \infty$.

El primer resultado a destacar es debido a Amemiya. Para probarlo necesitamos ver antes la siguiente desigualdad, típica de los espacios quasi-normados.

Lema 1.7. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado con constante quasi-triangular $K \geq 1$. Entonces*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} x_n \Big\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} K^n \|x_n\|_X$$

para todos $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$.

Demostración. Procedemos por inducción. El resultado es claro considerando un único elemento. Supuesto cierto para N elementos obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^{N+1} x_n \Big\|_X &\leq K\Big(\|x_1\|_X + \Big\| \sum_{n=2}^{N+1} x_n \Big\|_X \Big) \\ &\leq K\Big(\|x_1\|_X + \sum_{n=2}^{N+1} K^{n-1} \|x_n\|_X \Big) = \sum_{n=1}^{N+1} K^n \|x_n\|_X \end{aligned}$$

como queríamos ver. $\square$

Teorema 1.8 (Amemiya)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Son equivalentes:*

(1) X es completo.

(2) Toda sucesión de Cauchy $(f_n)_n \subset X$, positiva y creciente, es convergente en quasi-norma.

(3) Para cualquier sucesión de Cauchy $(f_n)_n \subset X$, positiva y creciente, existe $\sup_n f_n \in X$.

Demostración. Que (1) $\Rightarrow$ (2) es evidente. Veamos que (2) $\Rightarrow$ (3). Sea $(f_n)_n \subset X$ una sucesión de Cauchy, positiva, y creciente. Por hipótesis, existe $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, con $f \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $f_k - f_n \geq 0$ μ-a.e., para todo $k \geq n$. Como $\lim_{k\to\infty} f_k - f_n = f - f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f - f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debido a que X^+ es cerrado. Por tanto, se tiene que $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, f es una cota superior de $(f_n)_n$. Por otro lado, si $g \in X$ es tal que $f_n \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} g - f_n = g - f$, y como $(g - f_n)_n \subset X^+$ se sigue que $g - f \geq 0$, es decir, que $f \leq g$, luego f es la menor cota superior de $(f_n)_n$, es decir, que $f = \sup_n f_n \in X$.

Para ver que (2) $\Rightarrow$ (1) tomemos $(f_n)_n \subset X$ una sucesión de Cauchy y $K \geq 1$ una constante quasi-triangular. Entonces podemos extraer una subsucesión, que seguimos llamando $(f_n)_n$, de modo que $\|f_n - f_{n+1}\|_X \leq \frac{1}{2^n K^n}$, por lo que podemos suponer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n \|f_{n+1} - f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty. \tag{1.1}$$

Consideramos ahora las sucesiones

$$g_n^+ := \sum_{k=1}^{n} (f_{k+1} - f_k)^+ \quad \text{y} \quad g_n^- := \sum_{k=1}^{n} (f_{k+1} - f_k)^-,$$

donde $f^+ := f\chi_{\{f\geq 0\}}$ y $f^- := -f\chi_{\{f\leq 0\}}$. Entonces las sucesiones $(g_n^+)_n$ y $(g_n^-)_n$ son positivas y crecientes.

Utilizando ahora el Lema 1.7 deducimos que

$$\begin{aligned}
\|g_n^\pm - g_m^\pm\|_X = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} (f_{k+1} - f_k)^\pm \right\|_X &\leq \sum_{k=n+1}^{m} K^{k-n} \|f_{k+1} - f_k\|_X \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} K^k \|f_{k+1} - f_k\|_X.
\end{aligned}$$

Como la serie (1.1) es convergente, su cola converge a cero y, en particular, es de Cauchy, por lo que

$$\sum_{k=n+1}^{m} K^k \|f_{k+1} - f_k\|_X$$

se hace tan pequeño como se quiera cuando n y m son mayores que cierta constante. En definitiva, esto muestra que las sucesiones $(g_n^+)_n$ y $(g_n^-)_n$ son de Cauchy. Entonces, por hipótesis, existen $g^+, g^- \in X$ tales que $\|g_n^\pm - g^\pm\|_X \to 0$. Por tanto,

$$\|(g_n^+ - g_n^-) - (g^+ - g^-)\|_X \leq K\big(\|g_n^+ - g^+\|_X + \|g_n^- - g^-\|_X\big) \to 0,$$

es decir, que $g_n^+ - g_n^- \to g^+ - g^-$. Como

$$g_n^+ - g_n^- = \sum_{k=1}^{n}(f_{k+1} - f_k) = f_{n+1} - f_1$$

deducimos, tras tomar quasi-norma, que $f_n \to g^+ - g^- + f_1 \in X$.

Para ver que (3) $\Rightarrow$ (2) tomamos una sucesión de Cauchy $(f_n)_n \subset X$ positiva y creciente. Por hipótesis, tenemos que existe $f := \sup_n f_n \in X$. Al igual que en la prueba de la parte anterior, podemos suponer, extrayendo una subsucesión adecuada de $(f_n)_n$, que $K^j \|f_{j+1} - f_j\|_X \leq \frac{1}{j^3}$. Consideramos entonces la sucesión $(g_n)_n$ definida por

$$g_n := f_1 + \sum_{j=1}^{n} j(f_{j+1} - f_j)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por construcción, esta sucesión $(g_n)_n$ es positiva y creciente y, si $n < m$, verifica que

$$\begin{aligned}\|g_n - g_m\|_X = \Big\| \sum_{j=n+1}^{m} j(f_{j+1} - f_j) \Big\|_X &\leq \sum_{j=n+1}^{m} K^{j-n} j \|f_{k+1} - f_k\|_X \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{m} K^j j \|f_{j+1} - f_j\|_X \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2},\end{aligned}$$

donde hemos usado de nuevo el Lema 1.7. Como este último término tiende a 0, por ser la cola de una serie convergente, deducimos que $(g_n)_n$ es una sucesión de Cauchy y nuestra hipótesis nos garantiza que existe $g := \sup_n g_n \in X$.

Notamos ahora que se da la igualdad

$$n(f_m - f_n) = \sum_{j=n}^{m} n(f_{j+1} - f_j),$$

para todo $m > n$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos, puesto que $(f_n)_n$ es creciente, que

$$n(f - f_n) = \sup_{m>n} \sum_{j=n}^{m} n(f_{j+1} - f_j) \leq \sup_{m>n} \sum_{j=n}^{m} j(f_{j+1} - f_j) \leq g.$$

En consecuencia $0 \leq f - f_n \leq \frac{g}{n}$ para todo n, y por tanto

$$\|f - f_n\|_X \leq \frac{\|g\|_X}{n} \to 0,$$

luego efectivamente, $f_n \to f$. $\square$

Un resultado clásico de análisis funcional caracteriza los espacios de Banach como aquellos espacios normados en los que la convergencia absoluta de una serie garantiza su convergencia habitual, es decir, que un espacio normado es completo si y solo si posee la propiedad de *Riesz-Fischer* (ver [2, Ejercicio 9.2]). Resulta que los espacios quasi-Banach también se pueden caracterizar con una propiedad análoga, la cual llamamos también como *propiedad de Riesz-Fischer*, que no es más que la generalización de la propiedad habitual de Riesz-Fischer en espacios normados.

Definición 1.9. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado con constante quasi-traingular $K \geq 1$. Diremos que X tiene la *propiedad de Riesz-Fischer* si para toda sucesión $(x_n)_n \subset X$, con $\sum_{n=1}^{\infty} K^n \|x_n\|_X < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$.

Teorema 1.10. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado y $K \geq 1$ una constante quasi-triangular. Entonces X es completo si y solo si posee la propiedad de Riesz-Fischer. Además, si $(x_n)_n \subset X$, con $\sum_{n=1}^{\infty} K^n \|x_n\|_X < \infty$, entonces*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Big\|_X \leq K \sum_{n=1}^{\infty} K^n \|x_n\|_X.$$

Demostración. Supongamos primero que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio quasi-Banach y que $(x_n)_n \subset X$ es tal que $\sum_{j=1}^{\infty} K^j \|x_j\|_X = S < \infty$. Si consdieramos la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$, entonces, utilizando de nuevo el Lema 1.7, deducimos que

$$\|S_m - S_n\|_X = \Big\| \sum_{j=n+1}^{m} x_k \Big\|_X \leq \sum_{j=n+1}^{m} K^{j-n} \|x_j\|_X \leq \sum_{j=n+1}^{m} K^j \|x_j\|_X$$

para $m > n$. Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} K^j \|x_j\|_X$ es convergente, su cola tiende a cero por lo que, en particular, es de Cauchy. Es decir, que $\sum_{j=n+1}^{m} K^j \|x_j\|_X$ puede hacerse tan pequeño como se quiera cuando n y m son más grandes que cierto entero. En definitiva, acabamos de ver que S_n es de Cauchy en X y, por lo tanto, convergente, es decir, que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \in X$. Como el Lema 1.7 nos garantiza que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} x_k \Big\|_X \leq \sum_{j=1}^{n} K^j \|x_j\|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|x_j\|_X,$$

entonces se tiene también que $\limsup_{n\to\infty} \|S_n\|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|x_j\|_X$ y, por tanto,

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \Big\|_X \leq K \limsup_{n\to\infty} \left(\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j - S_n \Big\|_X + \|S_n\|_X \right) \leq K \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|x_j\|_X.$$

Para ver el recíproco, supongamos que $(x_n)_n \subset X$ es una sucesión de Cauchy. Entonces, al igual que en la prueba del teorema de Amemiya, podemos suponer extrayendo una subsucesión adecuada que

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X < \frac{1}{(2K)^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\|x_1\|_X + \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|x_{j+1} - x_j\|_X \leq \|x_1\|_X + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|x_1\|_X + 1 < \infty.$$

Por hipótesis, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ converge en X, es decir, que

$$x_n = x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (x_{n+1} - x_n)$$

es convergente en X. Basta recordar ahora que si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces toda la sucesión es convergente. $\square$

1.2. *p*-potencia de un espacio quasi-normado de funciones

En esta sección estudiamos algunas de las propiedades de las *p*-potencias de un espacio quasi-normado de funciones. Estos son espacios quasi-normados de funciones construidos a partir de un espacio quasi-normado de funciones.

La construcción que haremos nos será de gran utilidad para los resultados finales de esta memoria. En concreto, son claves para probar los principales resultados del Capítulo 7.

Además, como veremos en el Capítulo 5, las p-potencias constituyen un caso particular de espacios generalizados de Orlicz.

Definición 1.11. Dado un espacio quasi-normado de funciones $(X, \|\cdot\|_X)$ sobre una medida μ y dado $0 < p < \infty$, definimos la *p-potencia* de X como

$$X_{[p]} := \left\{ f \in L^0(\mu) \ : \ |f|^{1/p} \in X \right\}.$$

Para cada función $f \in X_{[p]}$ definimos

$$\|f\|_{X_{[p]}} := \||f|^{1/p}\|_X^p,$$

que, como veremos a continuación, terminará siendo una quasi-norma en $X_{[p]}$.

Es decir, la p-potencia de un espacio quasi-normado de funciones X no es más que el conjunto de clases de funciones de $L^0(\mu)$ que son potencias p-ésimas de funciones de X.

Se sigue además, de la propia definición, que la p-potencia construida sobre un espacio quasi-normado X, para $p = 1$, coincide precisamente con X. Es decir, que $X_{[1]} = X$.

Antes de continuar dejamos plasmadas tres desigualdades en el siguiente lema, las cuales serán de gran utilidad para probar propiedades sobre las p-potencias. Todas ellas se obtienen de las propiedades de convexidad y concavidad de las funciones potencia.

Lema 1.12. *Sean $a, b \geq 0$ y $0 < p < \infty$. Entonces se tienen la siguientes desigualdades:*

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \qquad si \ \ 0 < p \leq 1 \tag{1.2}$$

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \qquad si \ \ p \geq 1 \tag{1.3}$$

$$|a^p - b^p| \leq p \cdot |a^{p-1} + b^{p-1}| \cdot |a - b| \qquad si \ \ p \geq 1 \tag{1.4}$$

Retomando las p-potencias, lo primero que notamos es que $X_{[p]}$ tiene estructura de espacio vectorial y es un ideal de $L^0(\mu)$ para cualquier $0 < p < \infty$.

Proposición 1.13. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea $0 < p < \infty$. Entonces $X_{[p]}$ tiene estructura de espacio vectorial y es de ideal en $L^0(\mu)$ para cualquier $0 < p < \infty$.*

Demostración. Veamos primero que $X_{[p]}$ es un ideal de $L^0(\mu)$. Dados $f \in L^0(\mu)$ y $g \in X_{[p]}$, con $|f| \leq |g|$ μ-a.e., entonces también $|f|^{1/p} \leq |g|^{1/p}$ μ-a.e. y, como $|g|^{1/p} \in X$ y éste es un ideal de $L^0(\mu)$ se sigue que también $|f|^{1/p} \in X$. Además, observemos que $\||f|^{1/p}\|_X \leq \||g|^{1/p}\|_X$. Es decir, que $f \in X_{[p]}$ con

$$\|f\|_{X_{[p]}} \leq \|g\|_{X_{[p]}}.$$

Veamos ahora que $X_{[p]}$ tiene estructura de espacio vectorial.

Es claro que la multiplicación por escalares es cerrada. Dadas $f, g \in X_{[p]}$, vamos a comprobar que $f + g \in X_{[p]}$. Distinguimos dos casos. Si $0 < p \leq 1$, con lo que $\dfrac{1}{p} \geq 1$, tenemos

$$|f + g|^{1/p} \leq 2^{-1+1/p}(|f|^{1/p} + |g|^{1/p}) \in X$$

gracias a la desigualdad (1.3). Si $p > 1$ entonces $0 < \dfrac{1}{p} < 1$ y

$$|f + g|^{1/p} \leq |f|^{1/p} + |g|^{1/p} \in X$$

ahora por la desigualdad (1.2). $\square$

Como hemos comentado en la demostración anterior, si $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$ fuese una quasi-norma sobre $X_{[p]}$, entonces esta sería reticular y, por lo tanto, $(X_{[p]}, \|\cdot\|_{X_{[p]}})$ sería un espacio quasi-normado de funciones. Los dos primeros axiomas que debe verificar una quasi-norma son inmediatos de comprobar a partir de la definición, ya que $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$ se define a partir de $\|\cdot\|_X$, la cual ya es una quasi-norma. Para probar la desigualdad quasi-triangular necesitamos ver antes el siguiente resultado acerca de la desigualdad de Hölder para p-potencias.

Proposición 1.14 (desigualdad de Hölder)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea $K \geq 1$ una constante quasi-triangular. Sean $q, r, s > 0$ tales que $q = r + s$. Si $f \in X_{[r]}$ y $g \in X_{[s]}$, entonces $fg \in X_{[q]}$. Además, se verifica que*

$$\|fg\|_{X_{[q]}} \leq K^q \|f\|_{X_{[r]}} \|g\|_{X_{[s]}}. \tag{1.5}$$

Recíprocamente, dado $h \in X_{[q]}$ existen $f \in X_{[r]}$ y $g \in X_{[s]}$ tales que $h = fg$. Es decir, que

$$X_{[q]} = X_{[r]} \cdot X_{[s]}.$$

Demostración. Como la desigualdad (1.5) no cambia si dividimos por $\|f\|_{X_{[r]}}\|g\|_{X_{[s]}}$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|f\|_{X_{[r]}} = \|g\|_{X_{[s]}} = 1$ gracias también a la homogeneidad de las quasi-normas. Sea $F := |f|^{1/q} \in X_{[r/q]}$ y $G = |g|^{1/q} \in X_{[s/q]}$. Como $\dfrac{r}{q} + \dfrac{s}{q} = 1$ tenemos que

$$FG = (F^{q/r})^{r/q}(G^{q/s})^{s/q} \leq \frac{r}{q}F^{q/r} + \frac{s}{q}G^{q/s}$$

por la desigualdad de Young clásica. Es claro que $F^{q/r}, Q^{q/s} \in X$, por lo que también $FG \in X$. Tomando quasi-norma deducimos entonces que

$$\|FG\|_X \leq K\left(\frac{r}{q}\|F^{q/r}\|_X + \frac{s}{q}\|G^{q/s}\|_X\right) = K\left(\frac{r}{q}\||f|^{1/r}\|_X + \frac{s}{q}\||g|^{1/s}\|_X\right) = K$$

ya que $\||f|^{1/r}\|_X = \|f\|_{X_{[r]}} = 1$ y $\||g|^{1/s}\|_X = \|g\|_{X_{[s]}} = 1$. Como $FG = |fg|^{1/q}$, entonces $fg \in X_{[q]}$, con

$$\|fg\|_{X_{[q]}} = \|FG\|_X^q \leq K^q,$$

lo que demuestra la desigualdad (1.5) que queríamos ver.

Para la otra parte, tomamos $h \in X_{[q]}$ y consideramos $f := (\operatorname{sg} h)|h|^{r/q}$, donde $\operatorname{sg} x = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ y $\operatorname{sg} 0 = 0$. La función f está en $X_{[r]}$ por construcción, ya que $|f|^{1/r} = |h|^{1/q} \in X$. Si definimos además $g := |h|^{s/q}$ notamos que $g \in X_{[s]}$ debido a que $|g|^{1/s} = |h|^{1/q} \in X$. De nuevo, como $\dfrac{r}{q} + \dfrac{s}{q} = 1$ tenemos que

$$h = (\operatorname{sg} h) \cdot |h| = (\operatorname{sg} h) \cdot |h|^{r/q}|h|^{s/r} = fg \in X_{[r]} \cdot X_{[s]},$$

por lo que hemos descompuesto h como pretendíamos. $\square$

Ahora sí, vamos a la desigualdad quasi-triangular.

Lema 1.15 (desigualdad quasi-triangular)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea $K \geq 1$ una constante quasi-triangular. Entonces*

$$\|f+g\|_{X_{[p]}} \leq K^2\big(\|f\|_{X_{[p]}} + \|g\|_{X_{[p]}}\big)$$

para todos $f, g \in X_{[p]}$ si $0 < p < 1$ y

$$\|f+g\|_{X_{[p]}} \leq 2^{p-1}K^p\big(\|f\|_{X_{[p]}} + \|g\|_{X_{[p]}}\big)$$

si $p \geq 1$.

Demostración. Sean $f, g \in X_{[p]}$ y supongamos primero que $0 < p < 1$. Se tiene, utilizando la Proposición 1.14 para $r = p, s = 1 - p$ y $q = 1$, que

$$\begin{aligned}
\||f+g|^{1/p}\|_X &= \||f+g| \cdot |f+g|^{-1+1/p}\|_X \\
&\leq K\big(\||f| \cdot |f+g|^{-1+1/p}\|_X + \||g| \cdot |f+g|^{-1+1/p}\|_X\big) \\
&\leq K^2\big(\|f\|_{X_{[p]}} + \|g\|_{X_{[p]}}\big) \cdot \Big\||f+g|^{-1+1/p}\Big\|_{X_{[1-p]}} \\
&= K^2\big(\|f\|_{X_{[p]}} + \|g\|_{X_{[p]}}\big) \cdot \Big\||f+g|^{1-p}\Big\|_X^{1-p},
\end{aligned}$$

lo que nos muestra que

$$\|f+g\|_{X_{[p]}} = \||f+g|^{1/p}\|_X^p \leq K^2\big(\|f\|_{X_{[p]}} + \|g\|_{X_{[p]}}\big)$$

como queríamos ver.

Si ahora $p \geq 1$, utilizando las desigualdades (1.2) y (1.3) en el Lema 1.12, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{X_{[p]}} &= \||f+g|^{1/p}\|_X^p \leq \||f|^{1/p} + |g|^{1/p}\|_X^p \\
&\leq K^p\big(\||f|^{1/p}\|_X + \||g|^{1/p}\|_X\big)^p \\
&\leq 2^{p-1}K^p\big(\||f|^{1/p}\|_X^p + \||g|^{1/p}\|_X^p\big) \\
&= 2^{p-1}K^p\big(\|f\|_{X_{[p]}} + \|g\|_{X_{[p]}}\big)
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 1.16. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ, con constante quasi-triangular $K \geq 1$, y sea $0 < p < \infty$. Entonces $(X_{[p]}, \|\cdot\|_{X_{[p]}})$ es un espacio quasi-normado de funciones sobre μ con constante quasi-triangular K^2 si $0 < p < 1$ y $2^{p-1}K^p$ si $p \geq 1$.*

Una de las buenas propiedades que tienen las p-potencias asociadas a un espacio quasi-Banach de funciones es que heredan la completitud de éstos.

Teorema 1.17. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ. Entonces $(X_{[p]}, \|\cdot\|_{X_{[p]}})$ es también un espacio quasi-Banach de funciones sobre μ para cuaquier $0 < p < \infty$.*

Demostración. Por el teorema de Amemiya (ver Teorema 1.8) basta considerar una sucesión de Cauchy $(f_n)_n \subset X_{[p]}$, positiva y creciente y comprobar que es convergente. Distinguimos en la prueba dos casos. En el primero, supongamos que $0 < p < 1$. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, la desigualdad (1.4) aplicada a $\dfrac{1}{p} \geq 1$, nos muestra que

$$\left|f_n^{1/p} - f_k^{1/p}\right| \leq \frac{1}{p}\left|f_n^{-1+1/p} + f_k^{-1+1/p}\right| \cdot |f_n - f_k|\,. \tag{1.6}$$

Como $\left|f_n^{-1+1/p}\right|$ y $\left|f_k^{-1+1/p}\right|$ son funciones de $X_{[1-p]}$, ya que $-1+\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-p}{p}$, deducimos que $\left|f_n^{-1+1/p}+f_k^{-1+1/p}\right|\in X$.

Usando ahora el Lema 1.15, con $0<p<1$, deducimos entonces que

$$\begin{aligned}\left\|f_n^{-1+1/p}+f_k^{-1+1/p}\right\|_{X_{[1-p]}} &\le K^2\Big(\left\|f_n^{(1-p)/p}\right\|_{X_{[1-p]}}+\left\|f_k^{(1-p)/p}\right\|_{X_{[1-p]}}\Big)\\ &= K^2\Big(\left\|f_n^{1/p}\right\|_X^{1-p}+\left\|f_k^{1/p}\right\|_X^{1-p}\Big)\\ &\le 2K^2\sup_j\left\|f_j\right\|_{X_{[p]}}^{(1-p)/p}<\infty,\end{aligned}$$

ya que $(f_n)_n$ es de Cauchy y por lo tanto acotada. Si $C:=2K^2\sup_j\left\|f_j\right\|_{X_{[p]}}^{(1-p)/p}$, usando de nuevo la desigualdad (1.4) y la Proposición 1.14, con $q=1$, $r=1-p$ y $s=p$, se deduce, tras tomar quasi-norma en (1.6), que

$$\left\|f_n^{1/p}-f_k^{1/p}\right\|_X\le\frac{K}{p}\left\|f_n^{-1+1/p}+f_k^{-1+1/p}\right\|_{X_{[1-p]}}\cdot\|f_n-f_k\|_{X_{[p]}}=\frac{KC}{p}\|f_n-f_k\|_{X_{[p]}}.$$

Esta desigualdad nos indica que $\left(f_n^{1/p}\right)_n$ es de Cauchy en X, por lo que existe el límite de esta sucesión que denotamos $g\in X$. Como la inclusión $X\subseteq L^0(\mu)$ es continua (ver Proposición 1.4), entonces también es de Cauchy en $L^0(\mu)$, por lo que necesariamente $g\ge 0$ μ-a.e.

Si usamos la desigualdad (1.3) obtenemos que

$$\left\|f_n-g^p\right\|_{X_{[p]}}=\left\|\left|f_n-g^p\right|^{1/p}\right\|_X^p\le\left\|f_n^{1/p}-g\right\|_X^p\to 0$$

cuando $n\to\infty$. Como $g^p\in X_{[p]}$ se sigue entonces la completitud de $X_{[p]}$.

Si ahora $p\ge 1$, podemos usar la desigualdad (1.2), de donde deducimos que

$$\left\|f_n^{1/p}-f_k^{1/p}\right\|_X=\left\|\left|f_n^{1/p}-f_k^{1/p}\right|\right\|_X\le\|f_n-f_k\|_{X_{[p]}}^{1/p}.$$

Es decir, que $\left(f_n^{1/p}\right)_n$ es de Cauchy en X por lo que existe el límite de esta sucesión que llamamos $h\in X$. Al igual que antes, la inclusión continua de X en $L^0(\mu)$ garantiza que $h\ge 0$. Es claro que $h^p\in X_{[p]}$ y $h^{p-1}\in X_{[p-1]}$ por lo que de nuevo, la desigualdad (1.4) nos muestra que

$$\left|f_n-h^p\right|\le p\left|f_n^{(p-1)/p}+h^{p-1}\right|\cdot\left|f_n^{1/p}-h\right|,$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Utilizando ahora la Proposición 1.14 para $q=p$, $r=p-1$ y $s=1$ obtenemos que

$$p\left\|\left(f_n^{(p-1)/p}+h^{p-1}\right)\left(f_n^{1/p}-h\right)\right\|_{X_{[p]}}\le pK^p\left\|f_n^{(p-1)/p}+h^{p-1}\right\|_{X_{[p-1]}}\left\|f_n^{1/p}-h\right\|_X.$$

Ahora usamos la desigualdad quasi-triangular que satisface la quasi-norma $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$ para deducir que

$$\begin{aligned}\big\|f_n^{(p-1)/p}+h^{p-1}\big\|_{X_{[p-1]}} &\leq \alpha_p\Big(\big\|f_n^{(p-1)/p}\big\|_{X_{[p-1]}}+\big\|h^{p-1}\big\|_{X_{[p-1]}}\Big)\\ &\leq \alpha_p\Big(\big\|f_n^{1/p}\big\|_X^{p-1}+\big\|h\big\|_X^{p-1}\Big),\end{aligned}$$

donde $\alpha_p = \text{máx}\{2^{p-2}K^{p-1}, K^2\}$. Entonces, juntando las desigualdades que acabamos de ver, se obtiene que

$$\|f_n - h^p\|_{X_{[p]}} \leq pK^p\alpha_p\Big[\sup_n \big(\big\|f_n^{1/p}\big\|_X^{p-1}+\big\|h\big\|_X^{p-1}\big)\Big]\cdot\big\|f_n^{1/p}-h\big\|_X$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. De ello deducimos tras tomar límite, cuando $n \to \infty$, que $f_n \to h^p$ en $X_{[p]}$ por lo que $X_{[p]}$ es, efectivamente, completo. $\square$

Corolario 1.18. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones sobre una medida μ y sea $0 < p \leq 1$. Entonces $(X_{[p]}, \|\cdot\|_{X_{[p]}})$ es también un espacio de Banach de funciones sobre μ.*

Demostración. En este caso la constante quasi-triangular es $K = 1$. Por tanto, el Lema 1.15 nos garantiza que $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$ satisface la desigualdad triangular y la completitud se tiene por el teorema anterior. $\square$

Observación 1.19. Este corolario no es cierto en general si $p > 1$. Para ello basta observar que si tomamos $X = L^1(\mu)$, entonces $X_{[p]} = L^{1/p}(\mu)$. Ahora bien, los espacios $L^q(\mu)$ son espacios quasi-Banach de funciones que no son espacios de Banach cuando $0 < q < 1$, por lo que un sencillo contraejemplo se da considerando $L^1(\mu)_{[p]}$ con cualquier $p > 1$.

A continuación se introduce el concepto de *p-convexidad*, el cual nos ayudará a caracterizar las p-potencias que son normables.

Definición 1.20. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea $0 < p < \infty$. Se dice que X es *p-convexo* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^n |f_j|^p\right)^{1/p}\right\|_X \leq C\left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_X^p\right)^{1/p},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todos $f_1, \ldots, f_n \in X$. A la constante C más pequeña que satisface la desigualdad anterior la llamaremos *constante de p-convexidad* y la denotaremos como $M^{(p)}[X]$.

Observación 1.21. Las constantes que satisfacen la desigualdad de p-convexidad deben verificar, en particular, que $\|f\|_X \leq C\|f\|_X$ para toda $f \in X$. Por tanto, todas son mayores o iguales que 1 y $M^{(p)}[X] \geq 1$.

La función candidata a norma para renormar las p-potencias es la que introducimos en la siguiente

Definición 1.22. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea $0 < p < \infty$. Para cada $f \in X_{[p]}$, definimos

$$|||f|||_{X_{[p]}} := \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{X_{[p]}} \ : \ |f| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j|, \ f_1, f_2, \ldots, f_n \in X_{[p]} \right\}.$$

Este funcional resulta ser una norma sobre $X_{[p]}$, equivalente con $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$, cuando X es p-convexo.

Teorema 1.23. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea $0 < p < \infty$. Entonces X es p-convexo si y solo si $X_{[p]}$ posee una norma reticular equivalente con $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$.*

Demostración. Supongamos que X es p-convexo. Veamos que $|||\cdot|||_{X_{[p]}}$ define una norma reticular sobre $X_{[p]}$ equivalente con $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$. Es claro que la multiplicación por escalar es homogénea para $|||\cdot|||_{X_{[p]}}$. Tampoco es complicado comprobar que se verifica la desigualdad triangular. De la misma manera es claro también que $|||f|||_{X_{[p]}} \leq |||g|||_{X_{[p]}}$, cuando $|f| \leq |g|$ μ-a.e., por lo que, a falta de probar que $|||f|||_{X_{[p]}} = 0$ si y solo si $f = 0$ μ-a.e., se tendría que $|||\cdot|||_{X_{[p]}}$ es una norma reticular.

Es evidente que $|||f|||_{X_{[p]}} \leq \|f\|_{X_{[p]}}$ para toda $f \in X_{[p]}$. Vamos a ver que se tiene también, gracias a la p-convexidad de X, que

$$\|f\|_{X_{[p]}} \leq M^{(p)}[X] \cdot |||f|||_{X_{[p]}},$$

para todo $f \in X$. Tomamos $f \in X_{[p]}$ y $\varepsilon > 0$ y seleccionamos $f_1, \ldots, f_n \in X_{[p]}$ con $|f| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j|$ de forma que

$$\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{X_{[p]}} \leq |||f|||_{X_{[p]}} + \varepsilon.$$

Gracias a la p-convexidad del espacio X tenemos entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{X_{[p]}} &= \big\||f|^{1/p}\big\|_X^p \leq \Big\|\Big(\sum_{j=1}^n |f_j|\Big)^{1/p}\Big\|_X^p = \Big\|\Big(\sum_{j=1}^n \big(|f_j|^{1/p}\big)^p\Big)^{1/p}\Big\|_X^p \\ &\leq \big(M^{(p)}[X]\big)^p\Big(\sum_{j=1}^n \big\||f_j|^{1/p}\big\|_X^p\Big) \leq \big(M^{(p)}[X]\big)^p\Big(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_{X_{[p]}}\Big) \\ &\leq \big(M^{(p)}[X]\big)^p\big(|||f|||_{X_{[p]}} + \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Como ε podemos hacerlo arbitrariamente pequeño, obtenemos la desigualdad que queríamos ver. Por tanto, se tiene la equivalencia de $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$ y $|||\cdot|||_{X_{[p]}}$ y, de paso, tenemos que $|||f|||_{X_{[p]}} = 0$ si y solo si $f = 0$, por lo que, ahora sí, podemos afirmar que $|||\cdot|||_{X_{[p]}}$ es una norma reticular en $X_{[p]}$.

Recíprocamente, supongamos que $X_{[p]}$ posee una norma reticular $|||\cdot|||$ equivalente con $\|\cdot\|_{X_{[p]}}$. Entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1\|f\|_{X_{[p]}} \leq |||f||| \leq C_2\|f\|_{X_{[p]}},$$

para todo $f \in X_{[p]}$. Tomando entonces $f_1, \ldots, f_n \in X$, la desigualdad triangular de $|||\cdot|||$ asegura que

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n |f_j|^p\Big)^{1/p}\Big\|_X &= \Big\|\sum_{j=1}^n |f_j|^p\Big\|_{X_{[p]}}^{1/p} \leq \left(\frac{1}{C_1}\Big|\Big|\Big|\sum_{j=1}^n |f_j|^p\Big|\Big|\Big|\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{1}{C_1}\sum_{j=1}^n |||\,|f_j|^p|||\right)^{1/p} \leq \left(\frac{C_2}{C_1}\sum_{j=1}^n \||f_j|^p\|_{X_{[p]}}\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_X^p\Big)^{1/p},\end{aligned}$$

es decir, que X es p-convexo. □

1.3. Espacios de Köthe

En esta sección estudiamos un tipo especial de espacios de funciones ligeramente más general que los espacios normados de funciones. Nos referimos a los *espacios de Köthe*. Al igual que hemos estado haciendo durante todo el capítulo, supondremos que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, aunque las definiciones y resultados que veremos a continuación pueden extenderse sin dificultad a espacios de medida σ-finitos.

Definición 1.24. Un espacio de funciones $X \subseteq L^0(\mu)$ decimos que es un *espacio de Köthe* si es un ideal normado de $L^0(\mu)$.

Es decir, X es un espacio normado (de clases de funciones μ-a.e.) que solo verifica la condición (1) de la Definición 1.2 y, por tanto, a diferencia de los espacios normados de funciones, en los espacios de Köthe no tenemos garantizado que haya funciones características. La condición de saturación que estudiaremos a continuación garantiza precisamente que hay suficientes funciones características en el espacio.

Definición 1.25. Un espacio de Köthe $(X, \|\cdot\|_X)$ decimos que es *saturado* si para todo $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$, existe $F \in \Sigma$, con $F \subseteq E$ y $\mu(F) > 0$, tal que $\chi_F \in X$.

Observemos que un espacio quasi-normado de funciones X es saturado ya que $\chi_\Omega \in X$.

A continuación, vemos condiciones equivalentes a la propiedad de ser saturado. Para verlo, necesitaremos el siguiente lema técnico, del cual, una prueba puede consultarse en [34, Theorem 67.3].

Lema 1.26. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Supongamos que (P) es una propiedad que los conjuntos medibles poseen o no poseen, entendiéndose que si $E, F \in \Sigma$ son iguales μ-a.e., entonces E y F poseen ambos o no poseen ambos la propiedad (P) simultánemente. Supongamos además que se verifcan:*

(a) Si $E, F \in \Sigma$ poseen (P), entonces $E \cup F$ posee (P).

(b) Si $E \in \Sigma$ posee (P), entonces todo $F \subseteq E,\ F \in \Sigma$, posee también (P).

(c) Si $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, entonces existe $F \in \Sigma,\ F \subseteq E$, con $\mu(F) > 0$, que posee (P).

Entonces existe una sucesión $(\Omega_n)_n \subseteq \Sigma$, creciendo a Ω, tal que Ω_n posee (P) para todo $n \in \mathbb{N}$.

La propiedad (P) a la que aplicaremos el Lema 1.26 es la siguiente: un conjunto $E \in \Sigma$ tiene la propiedad (P) si y solo si $\chi_E \in X$.

Proposición 1.27. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthe. Son equivalentes:*

(1) X es saturado.

(2) No existe $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, tal que $f\chi_A = 0$ μ-a.e. para todo $f \in X$.

(3) *Existe una sucesión* $(\Omega_n)_n \subseteq \Sigma$ *tal que* $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ *y* $\chi_{\Omega_n} \in X$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si X es saturado entonces dado $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, podemos encontrar $F \subseteq A$, $F \in \Sigma$ con $\mu(F) > 0$, tal que $\chi_F \in X$. Entonces $\chi_A \cdot \chi_F = \chi_F$ es no nula μ-a.e.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si no existe $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, tal que $f\chi_A = 0$ μ-a.e. para todo $f \in X$, entonces para todo $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$, existe $0 \leq f \in X$ con $f\chi_E$ no nula μ-a.e. Si consideramos los conjuntos $E_n = \left\{ f\chi_E \geq \frac{1}{n} \right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, observamos que $E_n \uparrow E$ por lo que $\mu(E_n) \to \mu(E) > 0$. En consecuencia existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_n) > 0$ para todo $n \geq n_0$ por lo que si denotamos $F = E_{n_0}$ entonces

$$\frac{1}{n_0}\chi_F \leq f\chi_E \leq f.$$

Dado que X es un ideal normado, deducimos entonces que $\chi_F \in X$ y por ello que X es saturado.

(2) $\Rightarrow$ (3) Consideramos la siguiente propiedad (P). Un conjunto $E \in \Sigma$ tiene (P) si y solo si $\chi_E \in X$. Es evidente que los conjuntos medibles o poseen la propiedad o no. Además, es claro que si $E, F \in \Sigma$ son iguales μ-a.e. entonces $\chi_E \in X$ si y solo si $\chi_F \in X$. Veamos que está propiedad verifica las tres hipótesis del Lema 1.26.

(a) Si $E, F \in \Sigma$ son tales que $\chi_E, \chi_F \in X$, entonces por la estructura de espacio vectorial de X también $\chi_E + \chi_F \in X$. Entonces $\chi_{E \cup F} \leq \chi_E + \chi_F \in X$.

(b) Si $E \in \Sigma$ es tal que $\chi_E \in X$, entonces $\chi_F \leq \chi_E$ para todo $F \subseteq E$, $F \in \Sigma$ por lo que también $\chi_F \in X$.

(c) Si $E \in \Sigma$ es tal que $\mu(E) > 0$, por hipótesis, existe $F \in \Sigma$, $F \subseteq E$ con $\mu(F) > 0$, tal que $\chi_F \in X$.

Aplicando entonces el Lema 1.26 a la propiedad (P) deducimos que existe una sucesión creciente $(\Omega_n)_n \in \Sigma$ tal que $\chi_{\Omega_n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, es decir, se tiene (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) Por hipótesis, existe $(\Omega_n)_n \subseteq \Sigma$ con $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y tales que $\chi_{\Omega_n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea ahora $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. Entonces es claro que existe

algún Ω_{n_0} tal que $\mu(E \cap \Omega_{n_0}) > 0$. Si llamamos $F = E \cap \Omega_{n_0}$ es claro que $F \subseteq E$, $F \in \Sigma$ y como $F \subseteq \Omega_{n_0}$ entonces $\chi_F \leq \chi_{\Omega_{n_0}} \in X$, por lo que también $\chi_F \in X$. □

Observación 1.28. Podemos observar de (2) en la Proposición 1.27, que si un espacio de Köthe no es saturado entonces existiría $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, tal que $f\chi_A = 0$ μ-a.e. para todo $f \in X$. Entonces podríamos *eliminar* ese conjunto A de nuestro espacio Ω y seguiríamos teniendo las *mismas funciones* en X. De aquí que la condición de saturación para X sea poco exigente para el espacio. Simplemente, si existiera esa *parte muerta* de Ω bastaría eliminarla, como acabamos de comentar.

La condición (3), de la Proposición 1.27, nos muestra que un espacio de Köthe X es saturado si y solo si se puede recubrir Ω con subconjuntos medibles de forma que sus funciones características pertenecen al espacio de Köthe. Además, como se observa en la prueba, dicha sucesión se puede escoger creciente o disjunta.

De nuevo, gracias a (2) de la Proposición 1.27, se sigue que los espacios normados de funciones son casos particulares de espacios saturados, ya que $\chi_\Omega \in X$ no se anula en ningún conjunto de medida positiva. Este tipo de funciones reciben el siguiente nombre.

Definición 1.29. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthe y $f \in X$. Decimos que f es una función *estrictamente positiva*, y lo denotamos por $f > 0$, si $f \geq 0$ μ-a.e. y $\mu(\{f = 0\}) = 0$.

Al igual que los espacios normados de funciones, aquellos espacios de Köthe X que posean funciones estrictamente positivas (no necesariamente $\chi_\Omega \in X$) son también saturados. Dado que, para este trabajo, nos será necesario caracterizar los espacios de Köthe X que poseen funciones estrictamente positivas dejamos esta condición plasmada en el siguiente resultado.

Proposición 1.30. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthe.*

(1) Si X posee una función estrictamente positiva, entonces es saturado.

(2) Si X es completo y saturado, entonces X posee una función estrictamente positiva.

Demostración. (1) Supongamos que existe $g \in X$ estrictamente positiva, entonces se pueden considerar los conjuntos

$$\Omega_0 = \{g \geq 1\} \quad \text{y} \quad \Omega_n = \left\{\frac{1}{n+1} \leq g < \frac{1}{n}\right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ y que $\chi_{\Omega_n} \leq (n+1)g$, por lo que $\chi_{\Omega_n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, lo que prueba que X es saturado.

(2) Supongamos que X es completo y saturado. Entonces, gracias a (3) de la Proposición 1.27, existe una sucesión $(\Omega_n)_n \subseteq \Sigma$, que podemos suponer disjunta, tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y $\chi_{\Omega_n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mu(\Omega_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos entonces la función

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \|\Omega_{n_k}\|_X} \chi_{\Omega_{n_k}}.$$

Por construcción $g > 0$ ya que $g = 0$ en un conjunto de medida nula. Además, como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^k \|\Omega_{n_k}\|_X} \chi_{\Omega_{n_k}} \right\|_X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

y X tiene la propiedad de Riesz-Fischer por ser completo (ver Teorema 1.10), entonces $g \in X$. Por tanto, hemos encontrado en X una función estrictamente positiva. □

A modo de resumen, dejamos plasmado como corolario las cuatro condiciones de saturación que hemos estudiado.

Corolario 1.31. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthey consideremos las siguientes condiciones:*

(1) X es saturado.

(2) No existe $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, tal que $f\chi_A = 0$ μ-a.e. para todo $f \in X$.

(3) Existe una sucesión $(\Omega_n)_n \subseteq \Sigma$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y $\chi_{\Omega_n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) Existe $0 < f \in X$.

Entonces (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftarrow$ (4). *Si además X es completo, entonces las cuatro condiciones son equivalentes.*

A partir de un espacio de Köthe podemos construir un espacio asociado a este que es conocido como su *espacio dual de Köthe.*

Definición 1.32. Dado un espacio de Köthe $(X, \|\cdot\|_X)$, definimos su *dual de Köthe* como

$$X' := \Big\{ g \in L^0(\mu) \ : \int_\Omega |gf| \ d\mu < \infty, \text{ para todo } f \in X \Big\}.$$

Dado $g \in X'$, definimos también

$$\|g\|_{X'} := \sup \Big\{ \int_\Omega |gf| \ d\mu \ : \ \|f\|_X \leq 1 \Big\}.$$

Observación 1.33. Observamos que si $X = L^p(\mu)$ con $p \geq 1$ entonces $X' = L^q(\mu)$ donde q es el exponente conjugado de p.

La desigualdad de Hölder, clásica entre espacios de Lebesgue, se puede extender a un espacio de Köthe y su dual.

Teorema 1.34 (desigualdad de Hölder)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthe. Entonces*

$$\int_\Omega |fg| \ d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}$$

para todas $f \in X$ y $g \in X'$.

Demostración. La desigualdad es evidente si f ó g son la función nula. Si $\|f\|_X > 0$ entonces la función $\dfrac{f}{\|f\|_X}$ tiene norma 1 en X y, por la definición $\|\cdot\|_{X'}$, se tiene que

$$\int_\Omega \left| \frac{f}{\|f\|_X} g \right| \ d\mu \leq \|g\|_{X'}$$

para todo $g \in X'$, de donde se sigue el resultado. □

Es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_{X'}$ define una seminorma sobre X', aunque ésta, por lo general, no es una norma. Como ejemplo trivial, podemos considerar el espacio de medida $([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$. Entonces podemos considerar el espacio normado definido por

$$X = \{ f \in L^1(\lambda) \ : f\chi_{[0,1/2]} = 0 \ \lambda\text{-a.e.} \}$$

con la norma habitual de $L^1(\lambda)$. Claramente, dicho espacio es de Köthe. De hecho, es un subespacio cerrado de $L^1(\lambda)$, y por tanto, un espacio de Köthe completo. Sin embargo, no es saturado, ya que toda función de X es nula en $[0, 1/2]$, que tiene medida positiva. En particular, $\chi_{[0,1/2]} \in X'$, y tenemos que

$$\|\chi_{[0,1/2]}\|_{X'} = \sup\left\{ \int_{[0,1]} |f|\chi_{[0,1/2]}\, d\mu \ : \ \|f\|_X \leq 1\right\} = 0,$$

pero $\chi_{[0,1/2]}$ no es la función nula, luego $\|\cdot\|_{X'}$ no es una norma.

En realidad, el espacio X anterior no es más que el espacio de funciones integrables Lebesgue en $[1/2, 1]$, lo que muestra, como ya se ha comentado, que podemos eliminar la *parte muerta* y seguir teniendo esencialmente el mismo espacio.

Resulta que el hecho de que un espacio de Köthe completo X sea saturado caracteriza precisamente cuándo $(X', \|\cdot\|_{X'})$ es un espacio normado, y por tanto, de Köthe.

Proposición 1.35. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthe completo. Entonces X es saturado si y solo si $\|\cdot\|_{X'}$ define una norma sobre X'.*

Demostración. Supongamos que X es saturado. Para ver que $\|\cdot\|_{X'}$ es una norma basta comprobar que si $g \in X'$ con $\|g\|_{X'} = 0$ entonces $g = 0$ μ-a.e. Gracias al Corolario 1.31, como X es saturado, existe $f \in X$ estrictamente positiva. En particular, la función $f/\|f\|_X$ sigue siendo estrictamente positiva y se encuentra en la bola unidad de X. Puesto que $\|g\|_{X'} = 0$, se tiene que

$$\int_\Omega |f|g\, d\mu = 0. \tag{1.7}$$

Sean $E = \{|g| > 0\}$ y $F = \{|f| > 0\} \cap E$. Como $f > 0$ es claro que $\mu(F) = \mu(E)$ y que en F se tiene que $|g|f > 0$. Por otra parte, de (1.7) se sigue que

$$\int_F |f|g\, d\mu = 0,$$

de donde se deduce que $\mu(F) = 0$, y por tanto, $\mu(E) = 0$, es decir, que $g = 0$ μ-a.e. como queríamos ver.

Para la otra implicación veamos el contrarecíproco. Si X no es saturado entonces, de nuevo por el corolario 1.31, existe $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, tal que $f\chi_A = 0$ para todo $f \in X$. Entonces $\chi_A \in X'$ no es la función nula, puesto que $\mu(A) > 0$, pero $\|\chi_A\|_{X'} = 0$, por lo que $\|\cdot\|_{X'}$ no es una norma X. $\square$

Para ver un estudio más detallado sobre espacios de Köthe puede consultarse [34, Chapter 15]. Gracias a la teoría desarrollada allí, se puede probar que si un espacio de Köthe es saturado, entonces su dual de Köthe también lo es. Recogemos este resultado en el siguiente teorema del que no mostramos su prueba que resultaría demasiado larga para incluirla aquí. En cualquier caso, una prueba puede consultarse en [34, Theorem 71.4].

Teorema 1.36. *Sea* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un espacio de Köthe. Si* X *es saturado entonces* X' *es saturado.*

El recíproco de este teorema también es cierto si asumimos la hipótesis adicional de que X es completo. Para verlo basta observar que en este caso también X' es un espacio de Köthe completo.

Teorema 1.37. *Sea* $(X, \|\cdot\|_X)$ *espacio de Köthe completo y saturado. Entonces* $(X', \|\cdot\|_{X'})$ *es también un espacio de Köthe completo y saturado.*

Demostración. Ya sabemos, dado que X es saturado, por el Teorema 1.36, que X' es saturado. Como además, suponemos que X es completo, la Proposición 1.35 nos garantiza que $(X', \|\cdot\|_{X'})$ es normado. Veamos ahora que X' es un ideal normado en $L^0(\mu)$. Sean $f \in L^0(\mu)$ y $g \in X'$ con $|f| \leq |g|$ μ-a.e., entonces $|fh| \leq |gh|$ μ-a.e. para todo $h \in X$, por lo que

$$\int_\Omega |fh|\ d\mu \leq \int_\Omega |gh|\ d\mu$$

y por tanto $f \in X'$. Además, tomando el supremo en $h \in B(X)$, deducimos que también $\|f\|_{X'} \leq \|g\|_{X'}$, luego X' es un ideal normado de $L^0(\mu)$ y, por tanto, es un espacio de Köthe.

Para ver la completitud tomemos una sucesión de Cauchy $(f_n)_n \subset X'$. Como X es completo y saturado, por el Corolario 1.31, existe $g \in X$ estrictamente positiva, la cual podemos suponer sin pérdida de generalidad con $\|g\|_X = 1$. Como $(f_n)_n$ es de Cauchy en X' es claro que $(f_n g)_n$ es de Cauchy en $L^1(\mu)$ ya que, por la desigualdad de Hölder (Teorema 1.34), se tiene que $\|f_n g\|_{L^1(\mu)} \leq \|f_n\|_{X'}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $L^1(\mu)$ es completo existe entonces $F \in L^1(\mu)$ tal que $f_n g \to F$ en $L^1(\mu)$. Como g es estrictamente positiva podemos definir $f := \dfrac{F}{g}$ por lo que $F = fg$, y como $f_n g \to fg$ en $L^1(\mu)$ podemos suponer, extrayendo una subsucesión, que $f_n g \to fg$ puntualmente μ-a.e. y, como $g > 0$, también $f_n \to f$ puntualmente, por lo que $f_n \to f$ en $L^1(\mu)$. Dada ahora $h \in B(X)$ se tiene entonces que $f_n h \to fh$ puntualmente. Como $\|f_n h\|_{L^1(\mu)} \leq \|f_n\|_{X'}$ también $(f_n h)_n$ es de Cauchy en $L^1(\mu)$ por lo que $\|f_n h - H\|_{L^1(\mu)} \to 0$, cuando $n \to \infty$, para cierta $H \in L^1(\mu)$, la cual es necesariamente fh μ-a.e., es decir, que $f_n h \to fh$ en $L^1(\mu)$. Entonces hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n h - fh\|_{L^1(\mu)} = 0$$

para todo $h \in B(X)$.

Ahora bien, $(f_n)_n$ es de Cauchy en X', lo que significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > m \geq n_n$, entonces

$$\sup_{h \in B(X)} \|(f_n - f_m)h\|_{L^1(\mu)} < \varepsilon.$$

La sucesión $(f_n - f_m)_n$ converge a $f - f_m$ en $L^1(\mu)$ para todo $m \geq n_0$. En particular, $\|(f_n - f_m)h\|_{L^1(\mu)} \leq \varepsilon$ para toda $h \in B(X)$ y, como $(f_n - f_m)h \to (f - f_m)h$ en $L^1(\mu)$ entonces también $\|(f - f_m)h\|_{L^1(\mu)} \leq \varepsilon$, lo que prueba que $\|f - f_m\|_{X'} \leq \varepsilon$ para todo $m \geq n_0$, es decir, que $f_m \to f$ en X'. □

Como ya se comentó, los espacios de Banach de funciones son en particular espacios de Köthe completos y saturados. De este hecho se sigue el siguiente resultado como consecuencia del Teorema 1.37.

Corolario 1.38. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones sobre una medida μ. Entonces X' es un espacio de Köthe completo y saturado.*

No podemos garantizar en general que X' sea también un espacio de Banach de funciones sobre μ, aunque X si lo sea, ya que no podemos asegurar que $\chi_\Omega \in X'$. Sin embargo, si $X \subseteq L^1(\mu)$ entonces sí que X' es también un espacio de Banach de funciones ya que $f\chi_\Omega$ sería integrable para todo $f \in X$.

Corolario 1.39. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones sobre una medida μ contenido en $L^1(\mu)$. Entonces X' es también un espacio de Banach de funciones sobre μ.*

Capítulo 2

Funciones de Young y N-funciones

Los espacios de Orlicz y Luxemburg se construyen a partir de las *funciones de Young*. Éstas son funciones $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ convexas que verifican $\Phi(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$.

Tener un buen manejo de esta clase especial de funciones es clave para probar propiedades de los espacios de Orlicz generalizados.

Dado que muchos de los resultados que veremos a lo largo de este capítulo están basados fundamentelmente en la convexidad de estas funciones comenzamos haciendo un breve repaso de las principales propiedades que verifican las funciones convexas.

2.1. Funciones convexas

A lo largo del capítulo I denotará un intervalo con interior no vacío de la recta real $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. Diremos que una función $\Phi : I \to \mathbb{R}$ es *convexa* si verifica la desigualdad

$$\Phi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\Phi(x) + \lambda\Phi(y) \tag{2.1}$$

para todos $x, y \in I$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$

Observación 2.2. En particular, observemos que si Φ es una función convexa definida en $[0, \infty)$, con $\Phi(0) = 0$, entonces se tiene

$$\begin{cases} \Phi(\lambda x) \leq \lambda\Phi(x) & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \Phi(\lambda x) \geq \lambda\Phi(x) & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

para todo $x \geq 0$.

Es bien conocido, como se desprende de la definición, que una función $\Phi : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si toda cuerda que une dos puntos de la gráfica de Φ queda *por encima* de dicha gráfica.

También es conocido que toda función convexa es continua en todo punto interior de su dominio de definición. Una prueba de este hecho se puede consultar en [24, Theorem 1.1.2].

Resulta que estas dos propiedades caracterizan a las funciones convexas.

Proposición 2.3. *Una función $\Phi : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si verifica:*

(1) Φ es continua en el interior de I.

(2) $\Phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2}$ para todos $x, y \in I$.

Demostración. Si Φ es una función convexa es continua en todo punto interior de I. Además, sustituyendo $\lambda = 1/2$ en (2.1), obtenemos que $\Phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2}$ para todo $x, y \in I$ como queríamos ver.

Para probar el recíproco procedemos por reducción al absurdo. Si Φ no fuera convexa, entonces podemos encontrar dos puntos $(a, \Phi(a))$ y $(b, \Phi(b))$, con $a < b$, tales que el segmento que los une no queda *por encima* de la gráfica de Φ. Esto es, que la función

$$\phi(x) = -\Phi(x) + \Phi(a) + \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b-a}(x-a)$$

toma valores negativos, es decir, que $\gamma := \inf_{x \in [a,b]} \phi(x) < 0$. Por construcción, ϕ es continua y $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Además, se puede comprobar fácilmente que $\phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2}$. Pongamos $c = \inf\{x \in [a,b] \ : \ \phi(x) = \gamma\}$. Entonces, necesariamente, $\phi(c) = \gamma$ y $c \in (a,b)$ y, por lo tanto, para todo $h > 0$ tal que $c \pm h \in (a,b)$, se tiene que $\phi(c-h) > \phi(c)$ y $\phi(c+h) \geq \phi(c)$, por lo que

$$-\phi(c) > \frac{-\phi(c-h) - \phi(c+h)}{2}.$$

Pero hemos dicho que $\phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2}$ para todo $x, y \in [a,b]$ lo que es una contradicción. □

A continuación veremos algunas propiedades de las funciones convexas que nos serán útiles para el resto del trabajo. La primera de ellas es que las funciones convexas están caracterizadas por la desigualdad de Jensen.

Teorema 2.4 (desigualdad de Jensen)**.** *Una función $\Phi : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si se tiene*

$$\Phi\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi(x_k) \tag{2.3}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in I$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ verificando $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Demostración. Es evidente que si se verifica la ecuación (2.3) entonces, en particular, se verifica (2.1) para todo $\lambda \in [0,1]$ y para todos $x, y \in I$.

La otra implicación sigue por inducción. Si Φ es convexa, es evidente el resultado para dos puntos. Si tenemos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ con $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ y $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ y suponemos que se verifica la hipótesis de inducción para n puntos, puesto que $1 - \lambda_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\Big) &= \Phi\Big((1-\lambda_{n+1})\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1})\Phi\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} x_j\Big) + \lambda_{n+1}\Phi(x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \Phi(x_j) + \lambda_{n+1}\Phi(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \Phi(x_k)
\end{aligned}$$

ya que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = 1$. □

Como consecuencia tenemos los siguientes resultados, donde el segundo de ellos nos será de gran utilidad más adelante.

Corolario 2.5. *Sea $\Phi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces*

$$\Phi\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{\Phi(x_1) + \cdots + \Phi(x_n)}{n}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in I$.

Corolario 2.6. *Sea $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función convexa, con $\Phi(0) = 0$. Entonces*

$$\Phi\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(2^k \alpha^k x_k)}{2^k \alpha^k} \tag{2.4}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ y para todo $\alpha \geq 1$.

Demostración. De la desigualdad de Jensen (2.3) tenemos que

$$\Phi\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) = \Phi\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k x^k}{2^k}\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(2^k x_k)}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(2^k \alpha^k x_k)}{2^k \alpha^k},$$

donde en la última desigualdad de la cadena anterior hemos usado la segunda desigualdad de (2.2). □

En cuanto a propiedades sobre derivabilidad tenemos el siguiente conocido resultado. Aquí omitimos su prueba que puede consultarse en [24, Theorem 1.4.2].

Teorema 2.7. *Sea $\Phi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces Φ posee derivadas laterales derecha e izquierda, Φ'_+ y Φ'_- respectivamente, que son funciones monótonas crecientes y finitas en todo punto interior a I. Además, Φ'_+ es continua a la derecha y Φ'_- es continua a la izquierda y se tiene*

$$\Phi'_-(x) \leq \Phi'_+(x) \leq \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} \leq \Phi'_-(y) \leq \Phi'_+(y) \tag{2.5}$$

para todos $x, y \in I$ tales que $x < y$.

Esto nos permite representar cualquier función convexa mediante una expresión integral ([24, Theorem 1.5.2]).

Teorema 2.8. *Sea $\Phi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces*

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'_+(t)\, dt$$

para cada $a < b$ en I.

En consecuencia, deducimos el siguiente resultado de representación de funciones convexas.

Teorema 2.9. *Una función continua $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si*

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \varphi(t)\ dt,$$

siendo φ una función monótona creciente.

Demostración. Si $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y convexa entonces

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \varphi(t)\ dt,$$

para todo $x \in [a,b]$, gracias al Teorema 2.8, siendo $\varphi = \Phi'_+$ la derivada lateral derecha de Φ que es monótona creciente por el Teorema 2.7.

Recíprocamente, si $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ viene definida por

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \varphi(t)\ dt,$$

con φ monótona creciente, entonces Φ es convexa en $[a,b]$. En efecto, debido a que el carácter convexo de Φ no cambia haciendo una traslación de dominio ni sumando o restando una constante, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$ y $\Phi(0) = 0$. Entonces, para todo $x < y$ en $[a,b]$, se tiene que

$$\Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \int_0^{(x+y)/2} \varphi(t)\ dt = \int_0^x \varphi(t)\ dt + \int_x^{(x+y)/2} \varphi(t)\ dt.$$

Como φ es no decreciente, entonces, es claro que

$$\int_x^{(x+y)/2} \varphi(t)\ dt \leq \int_{(x+y)/2}^y \varphi(t)\ dt,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &\leq \int_0^x \varphi(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_x^{(x+y)/2} \varphi(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_{(x+y)/2}^y \varphi(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\ dt + \frac{1}{2}\left[\int_0^x \varphi(t)\ dt + \int_x^{(x+y)/2} \varphi(t)\ dt + \int_{(x+y)/2}^y \varphi(t)\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_0^y \varphi(t)\ dt = \frac{\Phi(x) + \Phi(y)}{2}.
\end{aligned}$$

Sigue entonces, de la Proposición 2.3, que Φ es convexa en $[a,b]$. $\square$

En las siguientes secciones estudiaremos una familia de funciones convexas de gran interés para este trabajo, ya que a partir de ellas se construyen los espacios de Orlicz y Luxemburg, así como la clase de Orlicz.

2.2. Funciones de Young

Definición 2.10. Decimos que una función $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una *función de Young* si es convexa y verifica:

(1) $\Phi(0) = 0$.

(2) $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$.

Observación 2.11. Podemos observar que la condición (1) garantiza que toda función de Young Φ es creciente. Es más, la convexidad garantiza que Φ es estrictamente creciente salvo, quizás, en un intervalo de la forma $[0, a]$, con $a \geq 0$, donde Φ podría valer constantemente 0. Por tanto, existe la función inversa Φ^{-1} en el sentido generalizado.

Los ejemplos más sencillos de funciones de Young son aquellas funciones de la forma $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$, para $p \geq 1$. Es bien conocido que si $q > 1$ es tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, es decir, q es el exponenete conjugado de p, entonces se verifica la desigualdad de Young

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{2.6}$$

para todos $x, y \geq 0$. En términos de las funciones de Young de la familia anterior la desigualdad (2.6) se escribe como

$$xy \leq \Phi_p(x) + \Phi_q(y)$$

para todos $x, y \geq 0$.

Resulta que, dada cualquier función de Young Φ, podemos asociar a ésta otra *función* $\hat{\Phi}$ que hace que se verifique la desigualdad de Young anterior. Esta función $\hat{\Phi}$ es la que se conoce como la *función complementaria* de Φ.

Definición 2.12. Sea Φ una función función de Young. Se define su función *complementaria* como la función $\hat{\Phi}$ definida por

$$\hat{\Phi}(y) = \sup_{x\geq 0}\{xy - \Phi(x)\}, \tag{2.7}$$

para todo $y \geq 0$.

Lo primero que debemos notar es que la función complementaria $\hat{\Phi}$ de una función de Young Φ puede no tomar siempre valores finitos. Esto ocurre con funciones de Young Φ que *crecen* de manera lineal. Por ejemplo, si calculamos la función complementaria $\hat{\Phi}$ de la función de Young $\Phi(x) = x$, para valores $y_0 > 1$, se tiene que

$$\hat{\Phi}(y_0) \geq xy_0 - \Phi(x) = x \cdot (y_0 - 1) > 0$$

para todo $x \geq 0$, por lo que al tomar supremo se deduce que $\hat{\Phi}(y_0) = \infty$ para todo $y_0 > 1$.

Por otro lado, la función complementaria $\hat{\Phi}$ de una función de Young Φ sí verifica $\hat{\Phi}(0) = 0$ y $\lim\limits_{y\to\infty} \hat{\Phi}(y) = \infty$. En efecto, dado que $\Phi(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, se tiene que

$$\hat{\Phi}(0) = \sup_{x\geq 0}\{-\Phi(x)\} \leq 0,$$

de donde se deduce inmediatamente que $\hat{\Phi}(0) = 0$. Además, también es claro que $\hat{\Phi}(y) \geq xy > 0$, para todos $x, y > 0$, por lo que para todo $M > 0$ existe $y_0 > 0$ tal que $\hat{\Phi}(y) > M$, para todo $y \geq y_0$, es decir, que $\lim\limits_{y\to\infty} \hat{\Phi}(y) = \infty$.

Además, cuando la función complementaria $\hat{\Phi}$ toma valores finitos entonces también es convexa.

Proposición 2.13. *Sea Φ una función de Young. Entonces su función complementaria $\hat{\Phi}$ es convexa en el conjunto donde toma valores finitos.*

Demostración. Lo primero que notamos es que el conjunto donde la función complementaria $\hat{\Phi}$ de una función de Young Φ toma valores finitos es $[0, \infty)$ ó un intervalo de la forma $[0, y_0)$ para cierto $y_0 > 0$. En efecto, supongamos que $y_1 > 0$ es tal que $\hat{\Phi}(y_1) = \infty$, entonces $\hat{\Phi}(y) \geq xy_1 - \Phi(x)$ para todo $y \geq y_1$ y para todo $x \geq 0$ por lo que $\hat{\Phi}(y) \geq \hat{\Phi}(y_1) = \infty$ para todo $y \geq y_1$.

Supongamos ahora que $y_1, y_2 \in [0, \infty)$ son tales que $\hat{\Phi}(y_1) < \infty$ y $\hat{\Phi}(y_2) < \infty$. Hemos de ver que se verifica la desigualdad (2.1) para todo $\lambda \in [0, 1]$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $y_1 < y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} x \cdot [(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] - \Phi(x) &= (1-\lambda)[xy_1 - \Phi(x)] + \lambda[xy_2 - \Phi(x)] \\ &\leq (1-\lambda)\hat{\Phi}(y_1) + \lambda\hat{\Phi}(y_2), \end{aligned}$$

de donde, tomando supremo en $x \geq 0$, deducimos que

$$\hat{\Phi}((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \leq (1-\lambda)\hat{\Phi}(y_1) + \lambda\hat{\Phi}(y_2),$$

es decir, que $\hat{\Phi}$ es convexa. □

De este último resultado se sigue que si Φ es una función de Young, tal que su función complementaria $\hat{\Phi}$ es finita, entonces ésta también es una función de Young.

Corolario 2.14. *Sea Φ una función de Young y $\hat{\Phi}$ su función complementaria. Si $\hat{\Phi}(y) < \infty$ para todo $y \geq 0$ entonces $\hat{\Phi}$ es una función de Young.*

Algo que debemos destacar y que será de gran utilidad en los capítulos posteriores es que una función de Young Φ y su función complementaria $\hat{\Phi}$ verifican la desigualdad de Young clásica (2.6).

Proposición 2.15 (desigualdad de Young)**.** *Sean Φ una función de Young y $\hat{\Phi}$ su complementaria. Entonces se tiene*

$$xy \leq \Phi(x) + \hat{\Phi}(y), \tag{2.8}$$

para todos $x, y \geq 0$.

Demostración. Si $y > 0$ es tal que $\hat{\Phi}(y) = \infty$ entonces la desigualdad es clara. Si $\hat{\Phi}(y) < \infty$ entonces, se sigue de la definición de $\hat{\Phi}$ vista en (2.7) que

$$\hat{\Phi}(y) \geq xy - \Phi(x),$$

para todo $x \geq 0$, por lo que

$$xy \leq \Phi(x) + \hat{\Phi}(y),$$

para todo $x \geq 0$, como queríamos probar. □

Gracias al Teorema 2.9 se tiene que toda función de Young Φ puede representarse como

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\ dt, \tag{2.9}$$

para todo $x \geq 0$, siendo φ su derivada lateral derecha. En particular, φ es no decreciente y no negativa. Gracias a ello, es posible ver que en determinados valores de $y \geq 0$ se da la igualdad en (2.8).

Lema 2.16. *Sea Φ una función de Young con derivada lateral derecha φ y $\hat{\Phi}$ la función complementaria de Φ. Entonces*

$$x\varphi(x) = \Phi(x) + \hat{\Phi}(\varphi(x))$$

para todo $x \geq 0$.

Demostración. La desigualdad de Young (2.8) nos garantiza una desigualdad. Para ver la contraria notamos que se tiene, gracias a (2.5), que

$$\begin{cases} \varphi(x) \leq \dfrac{\Phi(t)-\Phi(x)}{t-x} & \text{si } t \geq x, \\ \varphi(x) \leq \dfrac{\Phi(x)-\Phi(t)}{x-t} & \text{si } 0 < t \leq x \end{cases}$$

para todo $x > 0$. Estas desigualdades nos garantizan que

$$\varphi(x)(t-x) \leq \Phi(t) - \Phi(x),$$

para todos $x, t > 0$, la cual es equivalente a

$$t\varphi(x) - \Phi(t) \leq x\varphi(x) - \Phi(x),$$

para todos $x, t > 0$. Ahora basta tomar supremo, en $t \geq 0$, para deducir que

$$\hat{\Phi}(\varphi(x)) = \sup_{t \geq 0}\{t\varphi(x) - \Phi(t)\} \leq x\varphi(x) - \Phi(x).$$

Por tanto, se da la igualdad y se concluye la demostración. □

El Lema 2.16 nos garantiza la igualdad en la desigualdad de Young (2.8) cuando tomamos $y = \varphi(x)$.

2.3. N-funciones

Dentro de las funciones de Young encontramos una subfamilia especial de funciones conocidas como *N-funciones*. Éstas son una clase *amable* de funciones de Young para las que sus funciones complementarias siguen siendo funciones de Young.

Definición 2.17. Una función de Young $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ se dice que es una *N-función* si verifica:

(1) $\Phi(x) = 0$ si y solo si $x = 0$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$.

Observación 2.18. La propiedad (3) nos asegura que la función complementaria $\hat{\Phi}$ de una N-función Φ toma siempre valores finitos. Esto es debido a que dicha propiedad nos asegura que la función $x \mapsto xy - \Phi(x)$ es no positiva para todo $x \geq x_0$ para cierto $x_0 > 0$ y para todo $y > 0$. En efecto, dado $y > 0$, por la propiedad (3) y la continuidad de Φ existe $x_0 > 0$ de modo que $\dfrac{\Phi(x)}{x} \geq y$ para todo $x \geq x_0$. Por tanto $xy - \Phi(x) \leq 0$ para todo $x \geq x_0$. En consecuencia, la función $x \mapsto xy - \Phi(x)$ toma valores positivos en un intervalo de la forma $[0, x_0]$. Entonces un conocido teorema de Weierstrass nos asegura que la función anterior alcanza su supremo en dicho intervalo y es finito, es decir, que $\hat{\Phi}(y) < \infty$ para todo $y \in [0, \infty)$. Este argumento muestra que cuando Φ es una N-función entonces su función complementaria viene dada por

$$\hat{\Phi}(y) = \max_{x \geq 0} \{xy - \Phi(x)\}.$$

Se sigue entonces del Corolario 2.14 que la función complementaria $\hat{\Phi}$ de una N-función Φ vuelve a ser una función de Young.

Corolario 2.19. *Sea Φ una N-función. Entonces su función complementaria $\hat{\Phi}$ es una función de Young.*

Por supuesto, una N-función y su complementaría verifican la desigualdad de Young (2.15) ya que, en particular, son funciones de Young.

Corolario 2.20. *Sean Φ una N-función y $\hat{\Phi}$ su función complementaria. Entonces se tiene*

$$xy \leq \Phi(x) + \hat{\Phi}(y),$$

para todos $x, y \geq 0$.

Observación 2.21. La familia de funciones de Young $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$ son N-funciones para $p > 1$. Además, como cabía esperar, se tiene que $\hat{\Phi}_p = \Phi_q$ siendo $p, q > 1$ exponentes conjugados. Esto se sigue considerando la función $x \mapsto xy - \dfrac{x^p}{p}$ para cada $y \geq 0$ y calculando su máximo. Dicho máximo se alcanza en $x = y^{1/(p-1)}$, lo que nos indica, tras sustituir, que el máximo de la función anterior es precisamente $\dfrac{y^q}{q}$ gracias a la relación que verifican los exponentes conjugados.

Como una N-función Φ es, en particular, una función de Young se tiene también, por (2.9), que

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\ dt,$$

para todo $x \geq 0$, donde φ es su derivada lateral derecha. Al ser Φ una N-función podemos decir algo más sobre su derivada lateral derecha φ.

Proposición 2.22. *Sean Φ una N-función y φ su derivada lateral derecha. Entonces $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$.*

Demostración. Como φ es una función no decreciente y $\Phi(x) \geq 0$, también φ debe ser no negativa. De (2.9) se deduce que

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\ dt \leq x\varphi(x),$$

para todo $x \geq 0$. Entonces se obtiene que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) \geq \lim_{x\to\infty} \dfrac{\Phi(x)}{x} = \infty$. También notamos, para $x \geq 0$, que $\Phi(2x) = \displaystyle\int_0^{2x} \varphi(t)\ dt \geq \int_x^{2x} \varphi(t)\ dt \geq x\varphi(x)$, luego $0 \leq \lim_{x\to 0} \varphi(x) \leq \lim_{x\to 0} \dfrac{\Phi(2x)}{x} = 0$, como queríamos ver. □

Resulta que estas dos condiciones caracterizan a las N-funciones, es decir, el recíproco de la proposición anterior también es cierto.

Proposición 2.23. *Sea $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ dt$, con φ no negativa y no decreciente, verificando $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Entonces Φ es una N-función.*

Demostración. La convexidad de Φ ya se vio en el Teorema 2.9. Veamos los tres axiomas que definen a las N-funciones. Es obvio que $\Phi(0) = 0$ y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t)\ dt = \varphi(0) = 0.$$

También se tiene que

$$\frac{\Phi(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t)\ dt \geq \frac{1}{x} \int_{x/2}^x \varphi(t)\ dt \geq \frac{\varphi(x/2)\cdot(x/2)}{x} = \frac{\varphi(x/2)}{2},$$

de lo que se deduce que $\dfrac{\Phi(x)}{x} \to \infty$, cuando $x \to \infty$, ya que $\varphi(t) \to \infty$, cuando $t \to \infty$. □

Para la teoría de los espacios de Orlicz es importante estudiar las propiedades de las N-funciones y, sobre todo, comparar su crecimiento. Introducimos así la siguiente definición.

Definición 2.24. Dadas dos funciones de Young Φ y Ψ, diremos que Φ es *más fuerte* que Ψ, que notaremos $\Phi \succ \Psi$, si existe $x_0 \geq 0$ y $a > 0$ de modo que

$$\Psi(x) \leq \Phi(ax),$$

para todo $x \geq x_0$. En este caso también se dirá que Ψ es *más débil* que Φ y se denotará como $\Psi \prec \Phi$.

El símbolo $\succ$ no es una relación de orden total en el conjunto de las funciones de Young, ya que no cualquier par de ellas son comparables. Sin embargo cuando varias funciones de Young son comparables dos a dos sí que se trata de un orden, es decir, es un orden parcial, por lo que el conjunto de funciones de Young está parcialmente ordenado por $\succ$.

También es posible que tengamos dos funciones de Young Φ y Ψ verificando que $\Phi \succ \Psi$ y $\Psi \succ \Phi$. En este caso diremos que Φ y Ψ son *equivalentes*. Cuando esto ocurre es claro que existen $a, b > 0$ y $x_0 \geq 0$ de modo que

$$\Psi(ax) \leq \Phi(x) \leq \Psi(bx)$$

para todo $x \geq x_0$.

En el estudio de los espacios de Orlicz y Luxemburg hay ciertas clases de funciones de Young que garantizan buenas propiedades para estos espacios. Una familia de funciones de Young importantes en este sentido son aquellas que verifican la *propiedad* Δ_2.

Definición 2.25. Una función de Young Φ se dice que tiene la *propiedad* Δ_2, que denotaremos como $\Phi \in \Delta_2$, si existe $C > 0$ de modo que

$$\Phi(2x) \leq C\Phi(x) \tag{2.10}$$

para todo $x \geq 0$.

Resulta que la propiedad Δ_2 se puede definir análogamente cambiando el 2 en la desigualdad (2.10) por cualquier $a > 1$, como vemos en el siguiente resultado.

Proposición 2.26. *Sea Φ una función de Young. Son equivalentes:*

(1) Φ tiene la propiedad Δ_2.

(2) Para todo $a > 1$ existe una constante $C_a > 0$ tal que $\Phi(ax) \leq C_a\Phi(x)$.

(3) Existen $a > 1$ y una constante $C_a > 0$ tales que $\Phi(ax) \leq C_a\Phi(x)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que Φ satisface la condición Δ_2 y fijemos $a > 1$. Podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ de modo que $2^n > a$, por lo que entonces se tendrá que

$$\Phi(ax) \leq \Phi(2^n x) \leq C^n \Phi(x),$$

para todo $x \geq 0$. Basta tomar $C_a = C^n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existen $a > 1$ y C_a con $\Phi(ax) \leq C_a \Phi(x)$, para todo $x \geq 0$. Al ser $a > 1$ existirá también $m \in \mathbb{N}$ de modo que $a^m > 2$, y por tanto, se tendrá que

$$\Phi(2x) \leq \Phi(a^m x) \leq C_a^m \Phi(x)$$

para todo $x \geq 0$, luego Φ satisface la condición Δ_2 con constante $C = C_a^m$. □

A continuación vemos que la propiedad Δ_2 nos garantiza una desigualdad para la derivada lateral derecha de una N-función que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 2.27. *Sea Φ una N-función y sea φ su derivada lateral derecha. Si $\Phi \in \Delta_2$, entonces existe $c > 1$ de modo que $x\varphi(x) \leq c\Phi(x)$, para todo $x \geq 0$.*

Demostración. Si $C > 0$ es tal que $\Phi(2x) \leq C\Phi(x)$, para todo $x \geq 0$, entonces

$$C\Phi(x) \geq \Phi(2x) = \int_0^{2x} \varphi(t)\ dt \geq \int_x^{2x} \varphi(t)\ dt \geq x\varphi(x)$$

ya que φ es no decreciente. Entonces, tomando $c > \max\{1, C\}$, se tiene lo que queremos. □

Las N-funciones Φ que tienen la propiedad $\Phi \in \Delta_2$ y $\hat{\Phi} \in \Delta_2$ nos servirán para construir un ejemplo en el que el espacio de Orlicz y Luxemburg no coinciden. Este tipo de N-funciones existen. Por ejemplo, las funciones $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$ para $p > 1$ verifican claramente la propiedad Δ_2, pero ya vimos que $\hat{\Phi}_p = \Phi_q$, siendo $p, q > 1$ exponentes conjugados. Por lo que tanto una función como su conjugada verifican la propiedad Δ_2.

Capítulo 3

Espacios de Orlicz y Luxemburg generalizados

En este capítulo se introducen y estudian los principales resultados sobre la clase de Orlicz, el espacio de Luxemburg y el espacio de Orlicz generalizados. La construcción de dichos espacios la realizaremos sobre un espacio X quasi-normado de funciones y una función de Young Φ. En concreto, exigiremos que Φ sea una N-función cuando vayamos a construir el espacio de Orlicz generalizado, ya que, para éste, necesitamos que la función complementaria, $\hat{\Phi}$, de Φ sea de nuevo una función de Young.

Como siempre, a lo largo de este capítulo trabajaremos sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ).

3.1. La clase de Orlicz

Definición 3.1. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Definimos la *clase de Orlicz* como el conjunto

$$\widetilde{X}^{\Phi} = \{f \in L^0(\mu) \;:\; \Phi(|f|) \in X\}.$$

Lo primero que vamos a comprobar es que la clase de Orlicz $\widetilde{X}^{\Phi}$, construida sobre un espacio quasi-normado de funciones X, es un subconjunto sólido de $L^0(\mu)$. Además, la clase de Orlicz $\widetilde{X}^{\Phi}$ está contenida siempre en el propio X, independientemente de la función de Young Φ escogida.

Proposición 3.2. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre* *una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces la clase de Orlicz $\widetilde{X}^\Phi$ es un subconjunto sólido de $L^0(\mu)$. Además, $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X$.*

Demostración. Dado que Φ es, en particular, una función monótona creciente, es claro que si $f \in \widetilde{X}^\Phi$ y $g \in L^0(\mu)$ son tales que $|g| \leq |f|$ μ-a.e., entonces también $\Phi(|g|) \leq \Phi(|f|) \in X$, por lo que $g \in \widetilde{X}^\Phi$.

Como Φ es una función convexa, existe $C > 0$ de modo que $\Phi(x) \geq Cx$ para todo $x > 1$. Entonces, dado $f \in \widetilde{X}^\Phi$, se tiene que

$$|f| = |f|\chi_{\{|f|>1\}} + |f|\chi_{\{|f|\leq 1\}} \leq \frac{1}{C}\Phi\Big(|f|\chi_{\{|f|>1\}}\Big) + \chi_\Omega \leq \frac{1}{C}\Phi(|f|) + \chi_\Omega \in X,$$

luego $f \in X$. □

Podemos observar que, en la demostración anterior, la clave para probar la contención $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X$ ha sido el hecho de que cualquier función convexa Φ es más fuerte que la función $x \mapsto x$. En base a esto, podemos garantizar la contención entre dos clases de Orlicz cuando una de las funciones de Young utilizadas es más fuerte que la otra.

Proposición 3.3. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Sean Φ y Ψ dos funciones de Young. Si $\Phi \succ \Psi$ entonces $\widetilde{X}^\Phi \subseteq \widetilde{X}^\Psi$.*

Demostración. Sean $a > 0$ y $x_0 \geq 0$ tales que $\Psi(x) \leq a\Phi(x)$ para todo $x \geq x_0$. Sea $f \in \widetilde{X}^\Phi$. Entonces

$$\Psi(|f|) = \Psi(|f|)\chi_{\{|f|<x_0\}} + \Psi(|f|)\chi_{\{|f|\geq x_0\}} \leq \Psi(t_0)\chi_\Omega + a\Phi(|f|) \in X,$$

luego $f \in \widetilde{X}^\Psi$. □

Otra inclusión que es fácil de comprobar es que $L^\infty(\mu) \subseteq \widetilde{X}^\Phi$.

Proposición 3.4. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces $L^\infty(\mu) \subseteq \widetilde{X}^\Phi$.*

Demostración. Dada $f \in L^\infty(\mu)$ tenemos, por la monotonía de Φ, que

$$\Phi(|f|) \leq \Phi(\|f\|_{L^\infty(\mu)})\chi_\Omega \in X.$$

Puesto que X es un ideal concluimos que $\Phi(|f|) \in X$ y, por tanto, $f \in \widetilde{X}^\Phi$. □

Aunque el espacio quasi-normado X, sobre el que estamos trabajando, tiene estructura de espacio de vectorial, la clase de Orlicz $\widetilde{X}^{\Phi}$ no posee dicha estructura de manera general. Sin embargo, sí podemos comprobar que se trata de un espacio absolutamente convexo y, en particular, convexo.

Proposición 3.5. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces $\widetilde{X}^{\Phi}$ es absolutamente convexo, en particular, convexo.*

Demostración. Sean $f, g \in \widetilde{X}^{\Phi}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que $\gamma := |\alpha| + |\beta| \leq 1$. Como Φ es convexa se tiene, por las desigualdades (2.2), que

$$\begin{aligned}\Phi(|\alpha f + \beta g|) &\leq \Phi\left(\gamma\left(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|\right)\right) \leq \gamma\ \Phi\left(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|\right) \\ &\leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|) \in X,\end{aligned}$$

por lo que la clase de Orlicz es absolutamente convexa. □

A pesar de que, como se ha comentado, la clase de Orlicz no es por lo general lineal, sí podemos dar una condición suficiente para garantizar la estructura de espacio vectorial. Esta condición es precisamente la propiedad Δ_2 de la función Φ.

Proposición 3.6. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young con la propiedad Δ_2. Entonces la clase de Orlicz $\widetilde{X}^{\Phi}$ tiene estructura de espacio vectorial.*

Demostración. Supongamos que $\Phi \in \Delta_2$. Para ver que la clase de Orlicz es lineal nos basta ver que para cualquier $f \in \widetilde{X}^{\Phi}$ también $2f \in \widetilde{X}^{\Phi}$. Esto, en particular, nos garantiza que $nf \in \widetilde{X}^{\Phi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así $\alpha f \in \widetilde{X}^{\Phi}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ahora tomáramos $f, g \in \widetilde{X}^{\Phi}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y llamamos $\gamma = |\alpha| + |\beta|$ entonces podríamos escribir

$$\alpha f + \beta g = \gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}f + \frac{\beta}{\gamma}g\right).$$

Como $\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| + \left|\frac{\beta}{\gamma}\right| = 1$, la Proposición 3.5 nos garantiza que $\gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}f + \frac{\beta}{\gamma}g\right)$ está en la clase de Orlicz. Veamos pues que $2f \in \widetilde{X}^{\Phi}$. Como $\Phi \in \Delta_2$, existe $C > 0$ tal que $\Phi(2x) \leq C\Phi(x)$ para todo $x \geq 0$, por lo que

$$\Phi(2|f|) \leq C\Phi(|f|) \in X.$$

Luego efectivamente $2f \in \widetilde{X}^{\Phi}$ y, por lo que acabamos de probar, $\alpha f + \beta g \in \widetilde{X}^{\Phi}$ y, por tanto, $\widetilde{X}^{\Phi}$ es lineal. □

3.2. El espacio de Luxemburg X_L^Φ

En esta sección estudiamos el espacio de Luxemburg generalizado, asociado a un espacio de funciones quasi-normado y una función de Young. Así, definimos el espacio de Luxemburg de la siguiente manera.

Definición 3.7. Dado $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y dada Φ una función de Young, definimos el *espacio de Luxemburg* como

$$X_L^\Phi = \Big\{ f \in L^0(\mu) \ : \frac{|f|}{c} \in \widetilde{X}^\Phi \text{ para algún } c > 0 \Big\}.$$

De la definición es directo comprobar que $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X_L^\Phi$. Es más, como $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X$, si $f \in X_L^\Phi$ quiere decir que $\dfrac{|f|}{c} \in \widetilde{X}^\Phi \subseteq X$ por lo que $\dfrac{|f|}{c} \in X$. Como X es lineal se sigue que también $f \in X$, por lo que tenemos las contenciones $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X_L^\Phi \subseteq X$.

También podemos comprobar que el espacio de Luxemburg tiene estructura de espacio vectorial.

Proposición 3.8. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces el espacio de Luxemburg X_L^Φ tiene estructura de espacio vectorial.*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in X_L^\Phi$. Es claro que $\lambda f \in X_L^\Phi$. Si $f, g \in X_L^\Phi$ y $c_1, c_2 > 0$ son tales que $\dfrac{|f|}{c_1}, \dfrac{|g|}{c_2} \in \widetilde{X}^\Phi$, entonces, tomando $c = \text{máx}\{c_1, c_2\}$, se tiene que

$$\Phi\left(\frac{|f+g|}{2c}\right) \leq \Phi\left(\frac{|f|}{2c_1} + \frac{|g|}{2c_2}\right) \leq \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{|g|}{c_2}\right) \in X,$$

luego $f + g \in X_L^\Phi$. □

Al estar trabajando sobre un espacio de funciones quasi-normado, lo natural será construir una quasi-norma que de estructura de espacio quasi-normado al espacio de Luxemburg. Definimos así la quasi-norma de Luxemburg de la siguiente manera.

Definición 3.9. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Dada $f \in X_L^\Phi$, definimos la *quasi-norma de Luxemburg* de f como

$$\|f\|_{X_L^\Phi} := \text{ínf}\Big\{ c > 0 \ : \ \frac{|f|}{c} \in \widetilde{X}^\Phi \text{ con } \Big\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\Big\|_X \leq 1 \Big\}.$$

Antes de continuar comprobemos que $\|\cdot\|_{X_L^\Phi}$ es efectivamente una quasi-norma sobre X_L^Φ.

Proposición 3.10. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces $\|\cdot\|_{X_L^\Phi}$ es una quasi-norma en X_L^Φ.*

Demostración. Veamos primero que $\|f\|_{X_L^\Phi} < \infty$ para toda $f \in X_L^\Phi$. Dada una función $f \in X_L^\Phi$, tomemos $c > 0$ de modo que $\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X$. Nombramos entonces $M := \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X < \infty$ y distinguimos dos casos. Si $M \leq 1$, entonces se sigue de la definición de quasi-norma de Luxemburg que $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq c < \infty$. Si $M > 1$, entonces se tiene, por la desigualdad (2.2), que $\Phi\left(\frac{1}{Mc}\right) \leq \frac{1}{M}\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X$ y, por tanto,

$$\left\|\Phi\left(\frac{1}{Mc}\right)\right\|_X \leq \frac{1}{M}\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X = 1,$$

lo que garantiza que $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq Mc < \infty$.

Si $f = 0$, entonces es claro que $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X = 0 \leq 1$ para todo $c > 0$, luego $\|f\|_{X_L^\Phi} = 0$. Recíprocamente, si $f \in X_L^\Phi$ es tal que $\|f\|_{X_L^\Phi} = 0$ y $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$, entonces $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X \leq 1$ para todo $c > 0$ y además existe $\varepsilon > 0$ y $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$ de manera que $|f|\chi_E \geq \varepsilon\chi_E$. Entonces, dado $c > 0$, tenemos que $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)\chi_E \leq \Phi\left(\frac{|f|\chi_E}{c}\right) \leq \Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)$. Por tanto,

$$1 \geq \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X \geq \left\|\Phi\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)\chi_E\right\|_X = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)\|\chi_E\|_X. \tag{3.1}$$

Como las funciones de Young Φ verifican que $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$, podemos tomar $c > 0$ de modo que $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)\|\chi_E\|_X > 1$, lo que contradice la desigualdad (3.1).

Para ver la homogeneidad de la quasi-norma de Luxemburg basta notar que

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{X_L^\Phi} &= \inf\left\{c > 0 \;:\; \left\|\Phi\left(\frac{|\lambda f|}{c}\right)\right\|_X \leq 1 = \inf\left\{c > 0 \;:\; \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c/|\lambda|}\right)\right\|_X \leq 1\right\}\right.\\ &= |\lambda| \inf\left\{\frac{c}{|\lambda|} > 0 \;:\; \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c/|\lambda|}\right)\right\|_X \leq 1\right\} = |\lambda|\|f\|_{X_L^\Phi}.\end{aligned}$$

Finalmente veamos que también se satisface una desigualdad quasi-triangular. Para ello nos apoyamos en una constante quasi-triangular, $K \geq 1$, de la quasi-norma de X. Dados $f, g \in X_L^\Phi$, sean $c_1, c_2 > 0$ tales que $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right)\right\|_X \leq 1$ y $\left\|\Phi\left(\frac{|g|}{c_2}\right)\right\|_X \leq 1$. Entonces, denotando por $c = c_1 + c_2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{|f+g|}{Kc}\right) &\leq \frac{1}{K}\Phi\left(\frac{|f+g|}{c}\right) \leq \frac{1}{K}\Phi\left(\frac{c_1}{c}\frac{|f|}{c_1} + \frac{|c_2|}{c}\frac{|g|}{c_2}\right) \\ &\leq \frac{1}{Kc}\left[c_1\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right) + c_2\Phi\left(\frac{|g|}{c_2}\right)\right] \in X.\end{aligned}$$

Por tanto, se tienen también las desigualdades tras tomar quasi-norma, deduciendo así que

$$\begin{aligned}\left\|\Phi\left(\frac{|f+g|}{Kc}\right)\right\|_X &\leq \frac{1}{Kc}\left\|c_1\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right) + c_2\Phi\left(\frac{|g|}{c_2}\right)\right\|_X \\ &\leq \frac{K}{Kc}\left[c_1\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right)\right\|_X + c_2\left\|\Phi\left(\frac{|g|}{c_2}\right)\right\|_X\right] \leq 1.\end{aligned}$$

Esto nos muestra que $\|f+g\|_{X_L^\Phi} \leq K(c_1+c_2)$, lo cual tomando ínfimo en c_1 y c_2 nos conduce a que $\|f+g\|_{X_L^\Phi} \leq K(\|f\|_{X_L^\Phi} + \|g\|_{X_L^\Phi})$ como queríamos demostrar. $\square$

En consecuencia, el espacio de Luxemburg junto con la quasi-norma de Luxemburg es un espacio quasi-normado con la misma constante quasi-triangular que el espacio de funciones X. En particular, si X es un espacio normado, también X_L^Φ lo es.

Es más, el espacio de Luxemburg, además de ser quasi-normado, es también un espacio quasi-normado de funciones sobre μ.

Proposición 3.11. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces el espacio de Luxemburg $(X_L^\Phi, \|\cdot\|_{X_L^\Phi})$ es un espacio quasi-normado de funciones sobre μ.*

Demostración. Ya hemos visto que el espacio de Luxemburg es un espacio quasi-normado. Veamos que es un ideal de $L^0(\mu)$.

Si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in X_L^\Phi$ con $|f| \leq |g|$ μ-a.e., entonces $\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \leq \Phi\left(\frac{|g|}{c}\right) \in X$ para toda $c > 0$, por lo que también $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X \leq \left\|\Phi\left(\frac{|g|}{c}\right)\right\|_X$. Por tanto,

$f \in X_L^\Phi$. Observemos entonces que

$$\left\{c > 0 \ : \frac{|f|}{c} \in \widetilde{X}^\Phi,\ \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X \leq 1\right\} \supseteq \left\{c > 0 \ : \frac{|g|}{c} \in \widetilde{X}^\Phi,\ \left\|\Phi\left(\frac{|g|}{c}\right)\right\|_X \leq 1\right\}.$$

Entonces, tomando ínfimos, deducimos que $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \|g\|_{X_L^\Phi}$. Es decir, X_L^Φ es un ideal de $L^0(\mu)$.

Por otro lado, es claro que $\chi_\Omega \in X_L^\Phi$ ya que $\Phi(\chi_\Omega) = \Phi(1)\chi_\Omega \in X$. En consecuencia, el espacio de Luxemburg es efectivamente un espacio quasi-normado de funciones sobre μ. $\square$

Sobre las funciones características podemos decir más. En concreto, podemos calcular el valor de su quasi-norma de Luxemburg en términos de su quasi-norma en X. Es más, en general, para cualquier función acotada $f \in X_L^\Phi$ podemos obtener una cota explícita de $\|f\|_{X_L^\Phi}$ en términos de su supremo esencial.

Proposición 3.12. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces:*

(1) $\|\chi_E\|_{X_L^\Phi} = \dfrac{1}{\Phi^{-1}(1/\|\chi_E\|_X)}$ *para todo $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$.*

(2) $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \dfrac{\|f\|_{L^\infty(\mu)}}{\Phi^{-1}(1/\|\chi_\Omega\|_X)}$ *para toda $f \in L^\infty(\mu)$.*

Demostración. (1) Sea $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$, y definamos $M := \dfrac{1}{\Phi^{-1}(1/\|\chi_E\|_X)}$. Por la homogeneidad de $\|\cdot\|_X$, tenemos que

$$\left\|\Phi\left(\frac{\chi_E}{M}\right)\right\|_X = \Phi\left(\frac{1}{M}\right)\|\chi_E\|_X = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\|\chi_E\|_X}\right)\right)\|\chi_E\| = 1,$$

por lo que $\|\chi_E\|_{X_L^\Phi} \leq M$. Si ahora $c > 0$ es tal que $\dfrac{\chi_E}{c} \in \widetilde{X}^\Phi$, con $\left\|\Phi\left(\dfrac{\chi_E}{c}\right)\right\|_X \leq 1$, entonces $\Phi\left(\dfrac{1}{c}\right)\|\chi_E\|_X \leq 1$, es decir, que $\Phi\left(\dfrac{1}{c}\right) \leq \dfrac{1}{\|\chi_E\|_X}$, que es lo mismo que $\dfrac{1}{c} \leq \Phi^{-1}\left(\dfrac{1}{\|\chi_E\|_X}\right)$, lo que muestra que $M \leq c$ y, por tanto, que $M \leq \|\chi_E\|_{X_L^\Phi}$, luego $\|\chi_E\|_{X_L^\Phi} = \dfrac{1}{\Phi^{-1}(1/\|\chi_E\|_X)}$.

(2) Sea $f \in L^\infty(\mu)$. Como $|f| \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}\chi_\Omega$, entonces, tomando quasi-norma, deducimos que $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}\|\chi_\Omega\|_{X_L^\Phi}$. Basta ahora aplicar el apartado anterior para obtener que

$$\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mu)}}{\Phi^{-1}(1/\|\chi_\Omega\|_X)}$$

como queríamos ver. □

3.2.1. Completitud de X_L^Φ

Los espacios quasi-normados de funciones decimos (ver la Definición 1.2) que son completos cuando toda sucesión de Cauchy converge en la quasi-norma. A estos espacios los hemos nombrado como espacios quasi-Banach de funciones. Hemos visto que el espacio de Luxemburg resulta ser también un espacio quasi-normado de funciones con la quasi-norma de Luxemburg gracias a que también X lo es. Como cabía esperar, la completitud del espacio X se traspasa al espacio de Luxemburg como veremos a continuación.

Para probar este hecho necesitamos ver algunos resultados previos.

Lema 3.13. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Para cada función $f \in X_L^\Phi$ se verifica que:*

(1) Si $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq 1$, entonces $f \in \widetilde{X}^\Phi$ y $\|\Phi(|f|)\|_X \leq \|f\|_{X_L^\Phi}$.

(2) Si $\|f\|_{X_L^\Phi} > 1$ y $f \in \widetilde{X}^\Phi$, entonces $\|\Phi(|f|)\|_X \geq \|f\|_{X_L^\Phi}$.

Demostración. (1) Sea $0 < c \leq 1$ tal que $\dfrac{|f|}{c} \in \widetilde{X}^\Phi$ con $\left\|\Phi\left(\dfrac{|f|}{c}\right)\right\|_X \leq 1$. Por la convexidad de Φ se tiene, por la desigualdad (2.2), que

$$\Phi(|f|) \leq c\,\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X,$$

por lo que también $\Phi(|f|) \in X$, con

$$\|\Phi(|f|)\|_X \leq c\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_X \leq c.$$

Entonces, basta tomar ínfimo en c para deducir que $\|\Phi(|f|)\|_X \leq \|f\|_{X_L^\Phi}$.

(2) Para la segunda afirmación escribimos $\|f\|_{X_L^\Phi} = 1+\delta$, con $\delta > 0$. Entonces, para cualquier $0 < \varepsilon < \delta$, se tiene de nuevo por la desigualdad (2.2), que

$$\Phi(|f|) \geq (\|f\|_{X_L^\Phi} - \varepsilon)\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi} - \varepsilon}\right),$$

ya que $\|f\|_{X_L^\Phi} - \varepsilon > 1$. Deducimos finalmente, gracias a la homogeneidad de la quasi-norma $\|\cdot\|_X$ que

$$\|\Phi(|f|)\|_X \geq (\|f\|_{X_L^\Phi} - \varepsilon)\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi} - \varepsilon}\right)\right\|_X \geq \|f\|_{X_L^\Phi} - \varepsilon,$$

de donde sigue, haciendo ε arbitrariamente pequeño, que $\|\Phi(|f|)\|_X \geq \|f\|_{X_L^\Phi}$ como queríamos probar. □

Ahora sí podemos demostrar que el espacio de Luxemburg hereda la completitud del espacio quasi-normado de funciones sobre el que está definido.

Teorema 3.14. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Entonces X_L^Φ es también completo.*

Demostración. Ya que X_L^Φ es un espacio quasi-normado de funciones, para ver la completitud basta comprobar, por el tercer apartado del teorema de Amemiya (Teorema 1.8), que para cualquier sucesión de Cauchy, positiva y creciente existe su supremo. Sean, entonces, $(f_n)_n \subset X_L^\Phi$ una sucesión de este tipo y $K \geq 1$, una constante quasi-triangular de X. Podemos extraer una subsucesión de $(f_n)_n$, que seguimos denotando de la misma manera, de modo que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{X_L^\Phi} < \frac{1}{(2K)^{2n}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que

$$\|2^n K^n (f_{n+1} - f_n)\|_{X_L^\Phi} < \frac{1}{2^n K^n} < 1,$$

por lo que el Lema 3.13 nos garantiza que

$$\|\Phi(2^n K^n (f_{n+1} - f_n))\|_X \leq \|2^n K^n (f_{n+1} - f_n)\|_{X_L^\Phi} < \frac{1}{2^n K^n}, \tag{3.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces podemos definir $f = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2^n K^n (f_{n+1} - f_n))$ que, por el Teorema 1.10, está en X ya que por la desigualdad (3.2) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n \|\Phi(2^n K^n (f_{n+1} - f_n))\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Podemos observar además que la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2^n K^n (f_{n+1} - f_n))$ es también μ-a.e. puesto que la inclusión $X \subseteq L^0(\mu)$ es continua.

Definimos ahora $g_N := \sum_{n=1}^{N} (f_{n+1} - f_n)$, para cada $N \in \mathbb{N}$, y pongamos también $g := \sup_N g_N$ puntualmente μ-a.e. Tenemos, por el Corolario 2.6 aplicado para $\alpha = K$, que

$$\begin{aligned}\Phi(g_N) = \Phi\Big(\sum_{n=1}^{N} (f_{n+1} - f_n) \Big) &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n K^n} \Phi(2^n K^n (f_{n+1} - f_n)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \Phi(2^n K^n (f_{n+1} - f_n(x))) \leq f.\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $0 \leq g_N \leq \Phi^{-1}(f)$. Además, por la continuidad de Φ, la función $\Phi^{-1}(f)$ es μ-medible, por lo que g también lo es y, como tenemos que

$$0 \leq g \leq \Phi^{-1}(f) \in X_L^{\Phi},$$

concluimos que también $g \in X_L^{\Phi}$. Como tenemos la igualdad

$$f_{N+1} = f_1 + \sum_{n=1}^{N} (f_{n+1} - f_n) = g_N + f_1,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, deducimos que $\sup_n f_n = g + f_1 \in X_L^{\Phi}$. En realidad $(f_n)_n$ es una subsucesión de la sucesión de Cauchy original, pero la existencia del supremo de una subsucesión garantiza que el supremo de la sucesión completa (al ser ésta creciente) existe y es el mismo que éste. Por ello, concluimos que X_L^{Φ} es completo gracias al teorema de Amemiya. $\square$

Usando este último resultado podemos ver que el espacio de Luxemburg construido sobre un ideal cerrado (que contiene a χ_Ω) de un espacio quasi-Banach de funciones X sigue siendo cerrado en X_L^{Φ}. De forma precisa.

Lema 3.15. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young. Sea $Z \subseteq X$ un ideal cerrado de $(X, \|\cdot\|_X)$ que contiene a χ_Ω. Entonces $Z_L^{\Phi} \subseteq X_L^{\Phi}$ es cerrado en $(X_L^{\Phi}, \|\cdot\|_{X_L^{\Phi}})$.*

Demostración. En primer lugar, observemos que $(Z, \|\cdot\|_X)$ es un espacio quasi-Banach de funciones sobre μ y, por tanto, podemos construir el espacio de Luxemburg Z_L^{Φ}. Es evidente que se tiene la contención $Z_L^{\Phi} \subseteq X_L^{\Phi}$, ya que, si $f \in Z_L^{\Phi}$

entonces existe $c > 0$ de modo que $\dfrac{f}{c} \in \widetilde{Z}^\Phi$, pero, dado que la quasi-norma que estamos considerando en Z es la heredada de X, resulta claro que $\widetilde{Z}^\Phi \subseteq \widetilde{X}^\Phi$, luego también $f \in X_L^\Phi$.

Notamos también que si $f \in Z_L^\Phi$, entonces dado $c > 0$ se tiene, de nuevo debido a que la norma en Z es $\|\cdot\|_X$, que $\left\|\Phi\left(\dfrac{|f|}{c}\right)\right\|_Z \leq 1$ si y solo si $\left\|\Phi\left(\dfrac{|f|}{c}\right)\right\|_X \leq 1$, lo que prueba la igualdad $\|f\|_{Z_L^\Phi} = \|f\|_{X_L^\Phi}$, para toda $f \in Z_L^\Phi$.

Sea ahora $(f_n)_n \subset Z_L^\Phi$ una sucesión que converge a $f \in X_L^\Phi$. Entonces $(f_n)_n$ es de Cauchy en X_L^Φ. Como $\|g\|_{Z_L^\Phi} = \|g\|_{X_L^\Phi}$, para toda $g \in Z_L^\Phi$, entonces también $(f_n)_n$ es de Cauchy en Z_L^Φ. Ahora bien, como $(Z, \|\cdot\|_X)$ es completo, ya que es un subespacio cerrado de $(X, \|\cdot\|_X)$ y este es completo, entonces, por el Teorema 3.14, se tiene que $(Z, \|\cdot\|_{Z_L^\Phi})$ también es completo, luego existe $g \in Z_L^\Phi$ tal que $f_n \to g$ en Z_L^Φ. Entonces, necesariamente, $f = g$ y $f \in Z_L^\Phi$ como queríamos ver. $\square$

3.2.2. Propiedades σ-Fatou y σ-orden continuidad

Para finalizar con esta introducción al espacio de Luxemburg, veremos a continuación algunos resultados que se tienen en este espacio, cuando el espacio quasi-normado de funciones sobre el que se trabaja tiene la propiedad σ-Fatou (1.5) o quasi-norma σ-orden continua (1.6).

Ya hemos visto que la completitud del espacio de Luxemburg X_L^Φ se hereda de la completitud del espacio ambiente X sobre el que está construido. Podemos ver que, con la propiedad σ-Fatou, ocurre lo mismo.

Teorema 3.16. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ, con la propiedad σ-Fatou, y sea Φ una función de Young. Entonces:*

(1) Si $f \in X_L^\Phi$ no es la función nula, entonces $\dfrac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}} \in \widetilde{X}^\Phi$, con

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right)\right\|_X \leq 1. \tag{3.3}$$

(2) Si $f \in X_L^\Phi$ está en la bola unidad, es decir $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq 1$, entonces $f \in \widetilde{X}^\Phi$, con $\|\Phi(|f|)\|_X \leq \|f\|_{X_L^\Phi}$.

(3) El espacio de Luxemburg X_L^Φ posee la propiedad σ-Fatou.

Demostración. (1) Comenzamos tomando una sucesión $(c_n)_n$ decreciendo a $\|f\|_{X_L^\Phi}$ y tal que $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_n}\right)\right\|_X \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la sucesión de funciones $\left(\frac{|f|}{c_n}\right)_n$ crece a $\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}$, por lo que, por la continuidad y monotonía de las funciones de Young, también $\Phi\left(\frac{|f|}{c_n}\right)$ crece a $\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right)$. Como tenemos que $\sup_n \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_n}\right)\right\|_X \leq 1$, la propiedad σ-Fatou de X garantiza que $\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right) \in X$, es decir, que $\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}} \in \widetilde{X}^\Phi$, y además

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right)\right\|_X = \sup_n \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_n}\right)\right\|_X \leq 1,$$

como queríamos ver.

(2) Basta usar el apartado anterior teniendo en cuenta que

$$\Phi(|f|) = \Phi\left(\|f\|_{X_L^\Phi}\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right) \leq \|f\|_{X_L^\Phi}\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right)$$

por la desigualdad (2.2) que satisface Φ. Entonces $\Phi(|f|) \in X$, con

$$\|\Phi(|f|)\|_X \leq \|f\|_{X_L^\Phi}\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_L^\Phi}}\right)\right\|_X \leq \|f\|_{X_L^\Phi}.$$

(3) Tomemos $(f_n)_n \subset X_L^\Phi$ una sucesión de funciones positivas creciendo a f de forma que $M := \sup_n \|f_n\|_{X_L^\Phi} < \infty$. De nuevo, por la monotonía y continuidad de Φ, también $\Phi\left(\frac{f_n}{M}\right)$ crece a $\Phi\left(\frac{f}{M}\right)$ y, $\left\|\Phi\left(\frac{f_n}{M}\right)\right\|_X \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el segundo apartado que acabamos de probar tenemos entonces que $\Phi\left(\frac{f_n}{M}\right) \in X$ y que $\left\|\Phi\left(\frac{f_n}{M}\right)\right\|_X \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que, aplicando la propiedad σ-Fatou de X a la sucesión de funciones $\left(\Phi\left(\frac{f_n}{M}\right)\right)_n$, deducimos que $\Phi\left(\frac{f}{M}\right) \in X$, con lo que $f \in X_L^\Phi$. Además

$$\left\|\Phi\left(\frac{f}{M}\right)\right\|_X = \sup_n \left\|\Phi\left(\frac{f_n}{M}\right)\right\|_X \leq 1$$

y, en consecuencia, $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq M$. Pero $f_n \leq f$, por lo que tomando la quasi-norma de Luxemburg y supremo, también $M \leq \|f\|_{X_L^\Phi}$. Así que $M = \|f\|_{X_L^\Phi}$, y X_L^Φ tiene la propiedad σ-Fatou. $\square$

Recuperamos a continuación la condición Δ_2, la cual, entre otras cosas, nos garantiza la coincidencia entre la clase de Orlicz y el espacio de Luxemburg como veremos a continuación.

Teorema 3.17. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una función de Young verificando la condición Δ_2. Entonces:*

(1) Se tiene que $X_L^\Phi = \widetilde{X}^\Phi$.

(2) $\|f_n\|_{X_L^\Phi} \to 0$ si y solo si $\|\Phi(|f_n|)\|_X \to 0$, para toda sucesión $(f_n)_n \subset X_L^\Phi$.

(3) Si X es σ-orden continuo, entonces X_L^Φ también lo es.

Demostración. (1) Como de manera general $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X_L^\Phi$, tan solo hemos de ver que $X_L^\Phi \subseteq \widetilde{X}^\Phi$. Entonces, dada $f \in X_L^\Phi$ escogemos $c > 0$ de modo que $\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X$. Si $c \leq 1$, entonces utilizando la desigualdad (2.2), se tiene que

$$\Phi(|f|) = \Phi\left(c\frac{|f|}{c}\right) \leq c\,\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X$$

por la convexidad de Φ y la linealidad de X. Si $c > 1$, entonces $\Phi(cx) \leq C\Phi(x)$ para todo $x \geq 0$ por la propiedad Δ_2 (ver la Proposición 2.26). Entonces deducimos que

$$\Phi(|f|) = \Phi\left(c\frac{|f|}{c}\right) \leq C\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in X.$$

En consecuencia, independientemente del valor de c, se tiene que $f \in \widetilde{X}^\Phi$.

(2) Si $\|f_n\|_{X_L^\Phi} \to 0$ entonces, por el primer apartado del Lema 3.13, también $\|\Phi(|f_n|)\|_X \to 0$. Para la otra implicación vemos el contrarecíproco. Supongamos que $\|f_n\|_{X_L^\Phi}$ no converge a 0. Entonces existe $\varepsilon > 0$ de modo que, tomando una subsucesión adecuada, podemos suponer que $\|f_n\|_{X_L^\Phi} > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. También podemos suponer que $\varepsilon < 1$, de forma que $\frac{1}{\varepsilon} > 1$. Entonces, como $\Phi \in \Delta_2$, de nuevo la Proposición 2.26 nos garantiza que existe $C > 1$ tal que

$$\Phi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) \leq C\Phi(|f_n|). \tag{3.4}$$

Como $(f_n)_n \subset X_L^\Phi$ tenemos también que $\Phi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) \in X$ gracias a la desigualdad anterior y, como por hipótesis $\frac{\|f_n\|_{X_L^\Phi}}{\varepsilon} > 1$, el Lema 3.13 garantiza que

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right)\right\|_X \geq \left\|\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right\|_{X_L^\Phi} > 1.$$

En consecuencia, de (3.4) deducimos que

$$\|\Phi(|f_n|)\|_X \geq \frac{1}{C}\left\|\Phi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right)\right\|_X > \frac{1}{C} > 0,$$

por lo que $\|\Phi(|f_n|)\|_X$ tampoco converge a 0.

(3) Supongamos que $(f_n)_n \subset X_L^\Phi$ es una sucesión de funciones positivas creciendo a $f \in X_L^\Phi$. Entonces $\Phi(f - f_n)$ decrece a 0. Como X tiene la propiedad σ-orden continuo entonces $\|\Phi(f - f_n)\|_X \to 0$. Ahora, basta utilizar el apartado anterior para deducir que también $\|f - f_n\|_{X_L^\Phi} \to 0$, es decir, que también X_L^Φ posee la propiedad σ-orden continuo. □

Finalmente, vamos a probar que se tiene, de manera general, una *desigualdad de Hölder* en el espacio de Luxemburg.

Teorema 3.18 (desigualdad de Hölder)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Sea $K \geq 1$ una constante quasi-triangular de X, entonces*

$$\|fg\|_X \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}\|g\|_{X_L^{\hat{\Phi}}}$$

para todos $f \in X_L^\Phi$ y $g \in X_L^{\hat{\Phi}}$.

Demostración. Dados $f \in X_L^\Phi$ y $g \in X_L^{\hat{\Phi}}$, sean $c_1, c_2 > 0$ tales que $\frac{|f|}{c_1} \in \widetilde{X}^\Phi$ y $\frac{|g|}{c_2} \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$, con $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right)\right\|_X \leq 1$ y $\left\|\hat{\Phi}\left(\frac{|g|}{c_2}\right)\right\|_X \leq 1$. Aplicando la desigualdad de Young (Proposición 2.15) se tiene que

$$\frac{|f|}{c_1}\frac{|g|}{c_2} \leq \Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{|g|}{c_2}\right) \in X.$$

Tomando ahora quasi-norma deducimos por homogeneidad que

$$\frac{\|fg\|_X}{c_1c_2} \leq K\left[\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c_1}\right)\right\|_X + \left\|\hat{\Phi}\left(\frac{|g|}{c_2}\right)\right\|_X\right] \leq 2K.$$

De aquí deducimos que $\|fg\|_X \leq 2Kc_1c_2$ de donde, tomando ínfimo en c_1 y c_2, obtenemos $\|fg\|_X \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}\|g\|_{X_L^{\hat{\Phi}}}$ como queríamos ver. □

3.3. El espacio de Orlicz X_O^Φ

Veamos ahora cómo se construye el espacio de Orlicz sobre un espacio quasi-normado de funciones y una N-función. Esta construcción se hace, como veremos, a partir de la función complementaria $\hat{\Phi}$.

Definición 3.19. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Definimos el *espacio de Orlicz* como

$$X_O^\Phi = \left\{ f \in L^0(\mu) \ : \|f\|_{X_O^\Phi} < \infty \right\}$$

siendo

$$\|f\|_{X_O^\Phi} := \sup \left\{ \|fg\|_X \ : \ g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}, \ \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1 \right\} \tag{3.5}$$

la *quasi-norma de Orlicz.*

Seguidamente, comprobaremos que realmente $\|\cdot\|_{X_O^\Phi}$ es una quasi-norma. Lo primero es ver que, así definido, el espacio de Orlicz posee estructura de espacio vectorial.

Proposición 3.20. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces, el espacio de Orlicz X_O^Φ es lineal.*

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in X_O^\Phi$ y sea $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ tal que $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Entonces, si $K \geq 1$ es una constante quasi-triangular de X, tenemos

$$\|(f_1 + f_2)g\|_X \leq K\big(\|f_1 g\|_X + \|f_2 g\|_X\big) \leq K\big(\|f_1\|_{X_O^\Phi} + \|f_2\|_{X_O^\Phi}\big) < \infty,$$

luego $\|f_1 + f_2\|_{X_O^\Phi} < \infty$ y, por tanto, $f_1 + f_2 \in X_O^\Phi$. Sean ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in X_O^\Phi$. Entonces se sigue, de la homogeneidad de $\|\cdot\|_X$, que

$$\|(\lambda f)g\|_X = |\lambda| \|fg\|_X$$

para toda $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$, con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Se deduce entonces que $\|\lambda f\|_{X_O^\Phi} < \infty$, luego $\lambda f \in X_O^\Phi$. □

Veamos ahora que la quasi-norma de Orlicz es efectivamente una quasi-norma.

Proposición 3.21. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces $\|\cdot\|_{X_O^\Phi}$ define una quasi-norma sobre X_O^Φ.*

Demostración. Si $f = 0$ es evidente que $\|f\|_{X_O^\Phi} = 0$. Recíprocamente, si f es tal que $\|f\|_{X_O^\Phi} = 0$, consideramos los conjuntos $E_n = \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que todos ellos son de medida nula. Supongamos que n es tal que $\mu(E_n) > 0$. Entonces, por la continuidad de $\hat{\Phi}$, existe $\alpha > 0$ de modo que $0 < \hat{\Phi}(\alpha) \leq \frac{1}{\|\chi_{E_n}\|_X}$. Notamos entonces que la función $g := \alpha\chi_{E_n} > 0$ verifica

$$\hat{\Phi}(g) = \hat{\Phi}(\alpha)\chi_{E_n} \leq \frac{1}{\|\chi_{E_n}\|_X}\chi_{E_n},$$

por lo que, tomando quasi-norma, tenemos que $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq \frac{1}{\|\chi_{E_n}\|_X}\|\chi_{E_n}\|_X = 1$. Sin embargo, $|fg| = \alpha|f|\chi_{E_n} \geq \frac{\alpha}{n}\chi_{E_n}$ por lo que, al tomar la quasi-norma de X, se tendría que $\|fg\|_X \geq \frac{\alpha}{n}\|\chi_{E_n}\|_X > 0$ y, por tanto, que $\|f\|_{X_O^\Phi} > 0$.

La homogeneidad de la quasi-norma de Orlicz es directa gracias a la homogeneidad de la quasi-norma de X.

La desigualdad quasi-triangular se tiene gracias a la propia de $\|\cdot\|_X$. En efecto, dados $f_1, f_2 \in X_O^\Phi$ y $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ se tiene que

$$\|(f_1 + f_2)g\|_X \leq K(\|f_1 g\|_X + \|f_2 g\|_X),$$

siendo $K \geq 1$ una constante quasi-triangular de X. Entonces, tomando supremo reiteradamente en las g, con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$, se deduce la desigualdad quasi-triangular para la quasi-norma $\|\cdot\|_{X_O^\Phi}$ con la misma constante quasi-triangular que X. $\square$

Ahora que hemos visto que el espacio de Orlicz, junto con su quasi-norma, es un espacio quasi-normado veamos que también es un espacio quasi-normado de funciones.

Proposición 3.22. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces el espacio de Orlicz $(X_O^\Phi, \|\cdot\|_{X_O^\Phi})$ es también un espacio quasi-normado de funciones sobre μ.*

Demostración. Si tomamos $f_1, f_2 \in X_O^\Phi$ con $|f_1| \leq |f_2|$ μ-a.e. entonces, para toda $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$, se tiene que $\|f_1 g\|_X \leq \|f_2 g\|_X$ ya que $|f_1 g| \leq |f_2 g|$ μ-a.e. Se deduce entonces, tras tomar supremo, que

$$\|f_1 g\|_{X_O^\Phi} \leq \|f_2 g\|_{X_O^\Phi}.$$

Considerando de nuevo g en las condiciones anteriores, se tiene, gracias a la desigualdad de Young (2.15), que

$$|g| \leq \Phi(\chi_\Omega) + \hat{\Phi}(|g|),$$

luego, tomando quasi-norma, se sigue que

$$\|\chi_\Omega g\|_X \leq K\big[\|\Phi(\chi_\Omega)\|_X + \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X\big] \leq K\big[\Phi(1)\|\chi_\Omega\|_X + 1\big].$$

Por tanto, tomado supremo en las g anteriores, deducimos que

$$\|\chi_\Omega\|_{X_O^\Phi} \leq K\big[\Phi(1)\|\chi_\Omega\|_X + 1\big],$$

lo que prueba que el espacio de Orlicz con su quasi-norma es efectivamente un espacio quasi-normado de funciones sobre μ. □

Al igual que ocurre con el espacio de Luxemburg, también el espacio de Orlicz verifica las contenciones $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X_O^\Phi \subseteq X$.

Proposición 3.23. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X_O^\Phi \subseteq X$ y la segunda inclusión es continua. Es más, se tienen*

(1) $\|f\|_{X_O^\Phi} \leq K(\|\Phi(|f|)\|_X + 1)$, para toda $f \in \widetilde{X}^\Phi$, siendo $K \geq 1$ una constante quasi-triangular de X.

(2) $\|f\|_X \leq \dfrac{1}{\hat{\Phi}^{-1}(1/\|\chi_\Omega\|_X)}\|f\|_{X_O^\Phi}$, para toda $f \in X_O^\Phi$.

Demostración. Sea $f \in \widetilde{X}^\Phi$. Entonces, por la desigualdad de Young (2.15), se tiene que

$$|fg| \leq \Phi(|f|) + \hat{\Phi}(|g|),$$

para toda $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$, con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Por tanto, si $K \geq 1$ es una constante quasi-triangualar de X, entonces

$$\|fg\|_X \leq K\big[\|\Phi(|f|)\|_X + \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X\big],$$

de donde, tomando supremo en g, se obtiene la desigualdad (1). Es claro que esta desigualdad garantiza que $\widetilde{X}^\Phi \subseteq X_O^\Phi$.

Para ver (2) basta notar que la función $g := \hat{\Phi}^{-1}\left(\dfrac{1}{\|\chi_\Omega\|_X}\right)\chi_\Omega$ está en $\widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ y verifica $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Se sigue entonces, de la definición de la quasi-norma de Orlicz (3.5), que

$$\|f\|_X \leq \frac{1}{\hat{\Phi}^{-1}(1/\|\chi_\Omega\|_X)}\|f\|_{X_O^\Phi}.$$

Esta desigualdad garantiza que $X_O^\Phi \subseteq X$ y que dicha inclusión es continua. □

También tenemos las siguientes desigualdes, las cuales nos serán de gran utilidad en el Capítulo 6.

Lema 3.24. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y Φ una N-función. Sean $f \in X_O^\Phi$ y $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$.*

(1) Si $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$, entonces $\|fg\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$.

(2) Si $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X > 1$, entonces $\|fg\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi} \cdot \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X$.

En consecuencia, $\|fg\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi} \cdot \max\left\{1, \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X\right\}$, para todas $f \in X_O^\Phi$ y $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$.

Demostración. (1) Esta desigualdad es consecuencia de la definición de la norma de Orlicz (3.5).

(2) Como $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X > 1$, tenemos por la convexidad de $\hat{\Phi}$, que

$$\hat{\Phi}\left(\frac{|g|}{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X}\right) \leq \frac{\hat{\Phi}(|g|)}{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X}.$$

Entonces, tomando quasi-norma, tenemos que

$$\left\|\hat{\Phi}\left(\frac{|g|}{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X}\right)\right\|_X \leq \frac{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X}{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X} = 1.$$

Por tanto, la función $\dfrac{g}{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X}$ verifica que

$$\left\| f \frac{g}{\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X} \right\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$$

por definición de la norma de Orlicz, lo que, por homogeneidad, nos conduce a

$$\|fg\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi} \cdot \|\hat{\Phi}(|g|)\|_X$$

como queríamos ver. □

3.3.1. Completitud y propiedad σ-Fatou de X_O^Φ

Al igual que ocurría en el espacio de Luxemburg, la completitud y la propiedad σ-Fatou se traspasan de X a X_O^Φ.

Proposición 3.25. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces $(X_O^\Phi, \|\cdot\|_{X_O^\Phi})$ es también un espacio quasi-Banach de funciones sobre μ.*

Demostración. Para ver la completitud nos basta comprobar, gracias al teorema de Amemiya (Teorema 1.8), que para toda sucesión de Cauchy $(f_n)_n$, positiva y creciente, de X_O^Φ existe $\sup_n f_n \in X_O^\Phi$. Gracias a (2) de la Proposición 3.23 tenemos que

$$\|f_n - f_m\|_X \leq \frac{1}{\hat{\Phi}^{-1}(1/\|\chi_\Omega\|_X)} \|f_n - f_m\|_{X_O^\Phi}$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que también $(f_n)_n$ es de Cauchy en X. Dado que éste es completo por hipótesis, existe $f \in X$ tal que $\|f_n - f\|_X \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por tanto $f = \sup_n f_n$ al ser $(f_n)_n$ creciente.

Tomamos ahora $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Entonces, la sucesión $(f_n|g|)_n$ crece a $f|g|$ μ-a.e. Por cómo se ha tomado g, se tiene, por definición de la quasi-norma de Orlicz, que

$$\|f_m|g| - f_n|g|\|_X = \|(f_n - f_m)|g|\|_X \leq \|f_n - f_m\|_{X_O^\Phi}$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$, por lo que $(f_n g)_n$ es también de Cauchy en X. De nuevo, por la completitud de X, existe $h_g \in X$ de modo que $\|f_n|g| - h_g\|_X \to 0$, cuando $n \to \infty$. Como la inclusión de $X \subseteq L^0(\mu)$ es continua entonces tomando, una subsucesión adecuada, podemos suponer que $f_n|g| \to h_g$ μ-a.e., pero $f_n|g| \to f|g|$ también μ-a.e. por lo que $h_g = f|g|$ μ-a.e. y, por tanto,

$$\|f_n|g| - f|g|\|_X \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\|f_n|g| - f|g|\|_X \leq 1$, para todo $n \geq n_0$, por lo que, si $K \geq 1$ es una constante quasi-triangular de X, deducimos que

$$\begin{aligned} \|fg\|_X = \|f|g|\|_X &\leq K\big(\|f|g| - f_n|g| + \|f_n|g|\|_X\big) \\ &\leq K\big(1 + \|f_n\|_{X_O^\Phi}\big) \leq K\Big(1 + \sup_n \|f_n\|_{X_O^\Phi}\Big) < \infty \end{aligned}$$

ya que como $(f_n)_n$ es de Cauchy en X_O^Φ está acotada. Por tanto $f \in X_O^\Phi$, luego X_O^Φ es completo. $\square$

Veamos ahora que, al igual que ocurre con el espacio de Luxemburg, la propiedad σ-Fatou de X también es heredada por X_O^Φ.

Proposición 3.26. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ, con la propiedad σ-Fatou, y sea Φ una N-función. Entonces X_O^Φ también posee la propiedad σ-Fatou.*

Demostración. Tomemos $(f_n)_n \subset X_O^\Phi$ una sucesión de funciones, positivas y creciente, que convergen μ-a.e. a f, con $M := \sup_n \|f_n\|_{X_O^\Phi} < \infty$. Utilizando (2) de la Proposición 3.23 vemos entonces que

$$\sup_n \|f_n\|_X \leq \frac{M}{\hat{\Phi}^{-1}(1/\|\chi_\Omega\|_X)}.$$

Como X posee, por hipótesis la propiedad σ-Fatou, entonces se tiene que $f \in X$ con $\sup_n \|f_n\|_X = \|f\|_X$. Si tomamos ahora $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$, con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$, entonces la sucesión $(f_n|g|)_n$ es positiva y crece a $f|g|$ μ-a.e., por lo que

$$\|fg\|_X \leq \|f_n\|_{X_O^\Phi} \leq M,$$

luego $f|g| \in X$, con $\|fg\|_X = \sup_n \|f_n g\|_X \leq M$, por la propiedad σ-Fatou que X posee. Tomando ahora el supremo, en las g de la forma anterior, deducimos entonces que

$$\|f\|_{X_O^\Phi} \leq M = \sup_n \|f_n\|_{X_O^\Phi}$$

y como, evidentemente $f_n \leq f$ μ-a.e., entonces

$$M = \sup_n \|f_n\|_{X_O^\Phi} \leq \|f\|_{X_O^\Phi},$$

luego $\sup_n \|f_n\|_{X_O^\Phi} = \|f\|_{X_O^\Phi}$ y, por tanto X_O^Φ, posee la propiedad σ-Fatou. $\square$

Una de las primeras cuestiones que se plantean tras introducir los espacios de Luxemburg y de Orlicz es si existe alguna relación de contención entre ambos. Lo cierto es que el primero se encuentra siempre contenido en el segundo.

Proposición 3.27. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces el espacio de Luxemburg está contenido en el espacio de Orlicz, es decir, que $X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$. Además, esta inclusión es continua.*

Demostración. Gracias a la desigualdad de Hölder (3.18) para el espacio de Luxemburg, tenemos que
$$\|fg\|_X \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}\|g\|_{X_L^{\hat{\Phi}}}$$
para todas $f \in X_L^\Phi$ y $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$, con $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Como la condición $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$ garantiza que $\|g\|_{X_L^{\hat{\Phi}}} \leq 1$ deducimos que $\|fg\|_X \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}$ por lo que, tomando supremo en g, obtenemos que

$$\|f\|_{X_O^\Phi} \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}.$$

Lo que prueba que $X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$ y la continuidad de la inclusión. □

En consecuencia, se tiene la siguiente cadena de contenciones.

Corolario 3.28. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función. Entonces*

$$L^\infty(\mu) \subseteq \widetilde{X}^\Phi \subseteq X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi \subseteq X. \tag{3.6}$$

En el Teorema 3.17 vimos que, cuando Φ es una función de Young que posee la propiedad Δ_2, entonces se tiene la igualdad entre la clase de Orlicz y el espacio de Luxemburg.

En vista de este hecho y de la cadena de contenciones (3.6), es natural hacerse la siguiente pregunta. ¿Se tiene siempre que $X_L^\Phi = X_O^\Phi$? Como veremos en el Capítulo 5, la respuesta es negativa. De hecho, ni siquiera es cierto aunque el espacio quasi-normado X sea σ-orden continuo ni aunque la función de Young Φ posea la propiedad Δ_2.

Ciertamente, en la mayoría de los casos se da la igualdad $X_L^\Phi = X_O^\Phi$. De hecho, esto es lo que ocurre en los espacios de Orlicz clásicos. Lo que nos preguntamos entonces es, ¿cuándo son iguales? y, cuando lo son, ¿qué relación hay entre sus quasi-normas? En el Capítulo 6 daremos condiciones suficientes que garantizan, en un caso, la igualdad $X_L^\Phi = X_O^\Phi$ y la equivalencia de las quasi-normas y, en otro caso, la equivalencia de las quasi-normas en el espacio *pequeño*, es decir, en X_L^Φ.

Capítulo 4

Medidas vectoriales

Para encontrar un ejemplo de espacio quasi-normado de funciones en el que los espacios generalizados de Orlicz y Luxemburg no coinciden, debemos buscar en los espacios de funciones integrables sobre una medida vectorial. Por ello, en este capítulo veremos aquellos resultados necesarios sobre medidas vectoriales y sus espacios de funciones asociados para contruir tal ejemplo. Dicho ejemplo se construirá en el Capítulo 5.

4.1. Preliminares sobre medidas vectoriales

Comenzamos ahora con un breve recordatorio sobre medidas vectoriales. Como viene siendo habitual, a lo largo de este capítulo Σ denotará una σ-álgebra de conjuntos sobre Ω. De la misma manera, Y representará un espacio de Banach cuya norma notaremos como $\|\cdot\|_Y$.

Definición 4.1. Sea $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach. Una función $m : \Sigma \to Y$ se dice que es una *medida vectorial* si $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ para todos $E, F \in \Sigma$ con $E \cap F = \emptyset$. Se dirá que m es una *medida vectorial numerablemente aditiva* si además

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

para toda sucesión $(E_n)_n \subseteq \Sigma$ de elementos disjuntos dos a dos, donde la convergencia de la serie anterior es en la norma de Y. Entendemos que las medidas vectoriales que consideraremos a continuación son todas numerablemente aditivas.

Observación 4.2. Podemos observar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ converge incondicionalmente, ya que, si $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una permutación, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_{\pi(n)}) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\pi(n)}\Big) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Recordamos ahora que la variación de una medida real λ es la medida positiva $|\lambda| : \Sigma \to [0, \infty)$ definida por

$$|\lambda|(E) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}(E)} \sum_{A \in \pi} |\lambda(A)|$$

para todo $E \in \Sigma$, siendo $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de particiones de E en un número finito de elementos de Σ disjuntos dos a dos.

A continuación, dejamos recogidos en forma de proposición las propiedades básicas que necesitamos saber sobre la variación de una medida real para esta memoria. Una prueba puede encontrarse en [28, Theorem I.1],

Proposición 4.3. *Sea $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ un espacio de medida, con λ una medida real. Entonces:*

(1) $|\lambda|(\Omega) < \infty$.

(2) $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$.

(3) $\sup\{|\lambda(F)| \ : E \supseteq F \in \Sigma\} \leq |\lambda|(E) \leq 2 \sup\{|\lambda(F)| \ : E \supseteq F \in \Sigma\}$, *para todo $E \in \Sigma$.*

A partir del concepto de variación, se define la semivariación de una medida vectorial de la siguiente manera.

Definición 4.4. Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial. Para cada $y^* \in Y^*$ consideramos las medidas reales $\langle m, y^* \rangle : A \in \Sigma \to \langle m, y^* \rangle(A) = \langle m(A), y^* \rangle \in \mathbb{R}$. Se llama *semivariación* de m a la función $\|m\| : \Sigma \to [0, +\infty]$, definida como

$$\|m\|(E) = \sup\big\{|\langle m, y^* \rangle|(E) \ : \ y^* \in B(Y^*)\big\},$$

siendo $B(Y^*)$ la bola unidad del espacio dual de Y. Diremos también que $E \in \Sigma$ es *m-nulo* si $\|m\|(E) = 0$.

La semivariación de una medida vectorial no es, en lo general, finitamente aditiva. Sin embargo, sí que es sencillo comprobar que es monótona y subaditiva. Al igual que para una medida positiva tenemos el concepto *en casi todo*, la definición de conjunto m-nulo permite dar el concepto análogo en el caso de medidas vectoriales.

Definición 4.5. Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial. Decimos que una propiedad se verifica *m-en casi todo*, y lo denotaremos como m-a.e., si dicha propiedad se verifica salvo en un conjunto m-nulo.

Se define también $L^0(m)$ como el conjunto de las clases m-a.e. de funciones reales medibles.

Para la semivariación de una medida vectorial, se tiene el resultado análogo al tercer apartado de la Proposición 4.3. Una prueba de ello puede verse en [28, Proposition I.2].

Proposición 4.6. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial. Entonces*

$$\sup\{\|m(F)\|_Y : E \supseteq F \in \Sigma\} \leq \|m\|(E) \leq 2\sup\{\|m(F)\|_Y \ : E \supseteq F \in \Sigma\}, \quad (4.1)$$

para todo $E \in \Sigma$.

Como hemos comentado previamente, trabajamos siempre con medidas vectoriales numerablemente aditivas. Tales medidas verifican siempre que $\|m\|(\Omega) < \infty$. Una prueba de este hecho puede encontrarse en [10, Chapter 1, Corollary 18]. No incluimos esta prueba en esta memoria dado que para verla es necesario utilizar algunos resultados extras que no nos son necesarios en este trabajo. En cualquier caso, dejamos el resultado plasmado en la siguiente proposición.

Proposición 4.7. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces $\|m\|(\Omega) < \infty$.*

La semivariación de una medida vectorial posee también la siguiente propiedad, la cual nos será útil más adelante.

Proposición 4.8. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sea $(E_n)_n \subseteq \Sigma$ tal que $E_n \downarrow \emptyset$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|m\|(E_n) \to 0.$$

Demostración. Sea $(E_n)_n \subseteq \Sigma$, con $E_n \downarrow \emptyset$, es decir, $E_n \supseteq E_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Procedemos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\lim_{n\to\infty} \|m\|(E_n) \neq 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\|m\|(E_n) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n_1 = 1$. Entonces debe existir $y^* \in B(Y^*)$ tal que $|\langle m, y^*\rangle|(E_{n_1}) > \varepsilon$. Como $|\langle m, y^*\rangle|(E_n) \downarrow 0$, existe $n_2 > n_1$ de modo que $|\langle m, y^*\rangle|(E_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, gracias a (3) de la Proposición 4.3 y a la Proposición 4.6, se tiene

$$2\sup\{\|m(F)\|_Y \ : F \in \Sigma,\ F \subseteq (E_{n_1} \setminus E_{n_2})\} \geq |\langle m, y^*\rangle|(E_{n_1} \setminus E_{n_2}).$$

También se tiene que

$$|\langle m, y^* \rangle|(E_{n_1} \setminus E_{n_2}) = |\langle m, y^* \rangle|(E_{n_1}) - |\langle m, y^* \rangle|(E_{n_2}) > \frac{\varepsilon}{2},$$

ya que $|\langle m, y^* \rangle|(E_{n_1}) > \varepsilon$ y $|\langle m, y^* \rangle|(E_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, existe $F_1 \in \Sigma$, con $F_1 \subseteq (E_{n_1} \setminus E_{n_2})$ tal que $\|m(F_1)\|_Y < \frac{\varepsilon}{8}$.

De nuevo, como $\|m\|(E_{n_2}) > \varepsilon$, existe $y_1^* \in B(Y^*)$ tal que $|\langle m, y_1^* \rangle|(E_{n_2}) > \varepsilon$. Como $|\langle m, y_1^* \rangle|(E_n) \downarrow 0$, existe $n_3 > n_2$ de modo que $|\langle m, y_1^* \rangle|(E_{n_3}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Siguiendo el mismo razonamiento que antes, tenemos que

$$2 \sup\{\|m(F)\|_Y \ : F \in \Sigma,\ F \subseteq (E_{n_2} \setminus E_{n_3})\} > \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde se sigue que existe $F_2 \in \Sigma$ con $F_2 \subseteq (E_{n_3} \setminus E_{n_2})$ tal que $\|m(F_2)\|_Y > \frac{\varepsilon}{8}$. Continuando esta construcción inductivamente obtenemos una sucesión creciente $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión de conjuntos $(F_k)_k \subseteq \Sigma$, con $F_k \subseteq (E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}})$, tales que $\|m(F_k)\|_Y > \frac{\varepsilon}{8}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por construcción, los F_k son disjuntos dos a dos, lo que contradice el hecho de que m es numerablemente aditiva. $\square$

Resulta también que toda medida vectorial numerablemente aditiva queda *controlada* por la variación de una medida de la forma $\langle m, y^* \rangle$, con $y^* \in B(Y^*)$. Este resultado es debido a Rybakov y, de nuevo, no incluimos su demostración debido a su extensión. De todas maneras, una prueba puede encontrarse en [10, Chapter 9, Theorem 2].

Teorema 4.9 (Rybakov)**.** *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces existe $y^* \in B(Y^*)$, de modo que la medida positiva $\mu := |\langle m, y^* \rangle|$ es equivalente a m, es decir, $\|m\|(E) \to 0$ si y solo si $\mu(E) \to 0$ para todo $E \in \Sigma$.*

Definición 4.10. Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Si $\mu = |\langle m, y^* \rangle|$ es una medida equivalente con m diremos que es una *medida de control de Rybakov* de m.

Cuando tenemos una medida de control de Rybakov μ de una medida vectorial m se tiene entonces que $L^0(m) = L^0(\mu)$. En el contexto en el que trabajamos siempre tendremos una medidad de control ya que, como se ha mencionado, supondremos que m es numerablemente aditiva. A continuación definimos los conceptos relacionados con la integración respecto de una medida vectorial.

Antes de ello, recordamos que una función simple $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es aquella que puede ser escrita como $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$ para ciertos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y conjuntos $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos. A partir de ahora denotamos al conjunto de funciones simples con soporte en Σ como $\mathscr{S}(\Sigma)$.

Definición 4.11. Dada $f \in L^0(m)$, decimos que es *débil m-integrable* si f es integrable respecto de la medida $|\langle m, y^* \rangle|$, para todo $y^* \in Y^*$. Una función f débil m-integrable se dice que es *m-integrable* si para cada $E \in \Sigma$ existe un vector de Y, que denotamos $\int_E f \; dm$, verificando

$$\left\langle \int_E f \; dm, y^* \right\rangle = \int_E f \; d\langle m, y^* \rangle$$

para todo $y^* \in Y^*$.

Denotamos por $L^1_w(m)$ al conjunto de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ débil m-integrables y $L^1(m)$ al conjunto de funciones m-integrables. Como siempre, identificaremos aquellas funciones que son iguales m-a.e.

Observación 4.12. Observamos que $L^1_w(m)$ no es más que la intersección de los espacios $L^1(|\langle m, y^* \rangle|)$ cuando $y^* \in Y^*$. Es decir,

$$L^1_w(m) = \bigcap_{y^* \in Y^*} L^1(|\langle m, y^* \rangle|).$$

Debido a que el dual de Y separa puntos de Y tenemos que si f es m-integrable entonces, para cada $E \in \Sigma$, el vector $\int_E f \; dm \in Y$ es único.

A partir de una función $f \in L^1(m)$ podemos construir otra medida vectorial, dada por la aplicación $m_f : \Sigma \to Y$, cuyos valores vienen definidos por

$$m_f(E) = \int_E f \; dm, \tag{4.2}$$

para todo $E \in \Sigma$. Esta aplicación resulta ser también una medida vectorial.

Definición 4.13. Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial y sea $f \in L^1(m)$. Llamamos *integral indefinida de f respecto de m* a la medida vectorial definida por m_f en la ecuación (4.2)

Veamos que, efectivamente, la integral indefinida de una función m-integrable es una medida vectorial.

Teorema 4.14. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sea $f \in L^1(m)$. Entonces m_f es una medida vectorial numerablemente aditiva.*

Demostración. Sean $f \in L^1(m)$ y $(E_n)_n \subseteq \Sigma$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. Es claro que la aditividad numerable de m garantiza la aditivad numerable de la medida real $\langle m, y^* \rangle$, para todo $y^* \in B(Y^*)$. Entonces, para cada $f \in L^1(m)$, la medida con densidad f respecto de $\langle m, y^* \rangle$, que denotamos como $\langle m, y^* \rangle_f$, es una medida real, y por tanto, numerablemente aditiva. Como

$$\langle m, y^* \rangle_f(E) = \int_E f \; d\langle m, y^* \rangle = \langle m_f(E), y^* \rangle,$$

para cada $E \in \Sigma$, se sigue, de la aditividad numerable de $\langle m, y^* \rangle_f$, que

$$\Big\langle m_f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big), y^* \Big\rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} m_f(E_n), y^* \Big\rangle$$

para todo $y^* \in B(Y^*)$.

Es decir, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m_f(E_n)$ es débil incondicionalmente convergente. El Teorema de Orlicz-Pettis (ver [10, I.4. Corollary 4]) nos asegura entonces que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m_f(E_n)$ converge incondicionalmente en Y, por lo que

$$m_f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m_f(E_n),$$

es decir, que m_f es numerablemente aditiva. □

4.2. Los espacios normados $L^1_w(m)$ y $L^1(m)$

Si μ es una medida de control de Rybakov de una medida vectorial m, resulta que podemos definir sobre $L^1_w(m)$, una norma que convierte a éste en un espacio de Banach de funciones sobre μ con la propiedad σ-Fatou.

Dicha norma viene definida por

$$\|f\|_{L^1_w(m)} := \sup\Big\{ \int_\Omega |f| \; d|\langle m, y^* \rangle| \;:\; y^* \in B(Y^*) \Big\},$$

para toda $f \in L^1_w(m)$.

Antes de continuar comprobamos que $\|f\|_{L^1_w(m)} < \infty$, para cada $f \in L^1_w(m)$. Este hecho es consecuencia del siguiente resultado, que nos muestra que $\|\cdot\|_{L^1_w(m)}$ se puede ver como la norma de un operador acotado.

Proposición 4.15. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial y sea μ una medida de control de Rybakov de m. Sea $f \in L^1_w(m)$, entonces el operador $T_f : Y^* \to L^1(\mu)$ definido por*

$$T_f(y^*) = |f|\frac{d\langle m, y^*\rangle}{d\mu},$$

para cada $y^* \in B(Y^*)$, donde $\dfrac{d\langle m, y^*\rangle}{d\mu}$ es la derivada de Radon-Nykodim de $\langle m, y^*\rangle$ respecto de μ, es acotado.

Es más, se tiene que

$$\|T_f\| = \|f\|_{L^1_w(m)}.$$

Demostración. Comenzamos considerando la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas por $f_n := |f|\chi_{\{|f|\le n\}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y definimos los operadores $T_n : Y^* \to L^1(\mu)$ dados por $T_n(y^*) = f_n\dfrac{d\langle m, y^*\rangle}{d\mu}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente se tiene que

$$\|T_n(y^*)\|_{L^1(\mu)} = \int_\Omega f_n\Big|\frac{d\langle m, y^*\rangle}{d\mu}\Big|\ d\mu \le \int_\Omega |f|\ d|\langle m, y^*\rangle| < \infty,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $y^* \in Y^*$, ya que, por construcción, $f_n \le |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^1_w(m)$. Es decir, que la sucesión de operadores $(T_n)_n$ está puntualmente acotada. Además, es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(y^*) = T_f(y^*)$, para todo $y^* \in Y^*$. Por tanto, se sigue del principio de acotación uniforme que T_f es acotado. Además, se tiene que

$$\begin{aligned}\|T_f\| &= \sup\{\|T_f(y^*)\|_{L^1(\mu)}\ : y^* \in B(Y^*)\}\\ &= \sup\Big\{\int_\Omega |f|\ d|\langle m, y^*\rangle|\ : y^* \in B(Y^*)\Big\} = \|f\|_{L^1_w(m)},\end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Proposición 4.16. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces el espacio $(L^1_w(m), \|\cdot\|_{L^1_w(m)})$ es un espacio de Banach de funciones sobre μ, siendo μ una medida de control de Rybakov de m.*

Demostración. Es sencillo comprobar, a partir de la definición, que $L^1_w(m)$ es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_{L^1_w(m)}$ define una norma sobre éste. Veamos ahora que es un ideal normado de $L^0(\mu)$.

Si tenemos $g \in L_w^1(m)$ y $f \in L^0(\mu)$ con $|f| \leq |g|$ μ-a.e., entonces también $|f| \leq |g|$ m-a.e. y, como $|\langle m, y^*\rangle| \ll \|m\|$, para todo $y^* \in B(Y^*)$ también tenemos que $|f| \leq |g|$ $|\langle m, y^*\rangle|$-a.e., por lo que $\|f\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq \|g\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)}$, para todo $y^* \in Y^*$, de donde se sigue que $f \in L_w^1(m)$, con $\|f\|_{L_w^1(m)} \leq \|g\|_{L_w^1(m)}$.

Como $|\langle m, y^*\rangle|$ es una medida finita, para cada $y^* \in Y^*$, entonces $\chi_\Omega \in L_w^1(m)$. Es decir, el espacio normado $(L_w^1(m), \|\cdot\|_{L_w^1(m)})$ es efectivamente un espacio normado de funciones sobre μ.

Para la completitud tomemos $(f_n)_n \subset L_w^1(m)$ una sucesión de Cauchy. Entonces es claro que $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$ para cada $y^* \in B(Y^*)$. En particular, la medida μ de Rybakov es de la forma $|\langle m, y_0^*\rangle|$ para cierto $y_0^* \in B(Y^*)$, por lo que también $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L^1(\mu)$ y, por lo tanto, existe $f_0 \in L^1(\mu)$ tal que $\|f_n - f_0\|_{L^1(\mu)} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Entonces, extrayendo una subsucesión, podemos suponer que $f_n \to f_0$ puntualmente μ-a.e., es decir, que $f_n(\omega) \to f_0(\omega)$ para todo $\omega \notin E_0$, donde $E_0 \in \Sigma$ es tal que $\mu(E_0) = 0$.

De la misma manera, dado $y^* \in B(Y^*)$ podemos encontrar $f_{y^*} \in L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$ con $f_n \to f_{y^*}$ en $L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$ y, de nuevo extrayendo una subsucesión, podemos suponer que $f_n \to f_{y^*}$ $|\langle m, y^*\rangle|$-a.e., es decir, que $f_n(\omega) \to f_{y^*}(\omega)$ para todo $\omega \notin E_*$, donde $E_* \in \Sigma$ es tal que $|\langle m, y^*\rangle|(E_*) = 0$. En definitiva, hemos visto que

$$f_n(\omega) \to f_0(\omega) \quad \text{y} \quad f_n(\omega) \to f_*(\omega)$$

para todo $\omega \notin E_0 \cup E_*$, el cual tiene $|\langle m, y^*\rangle|$-medida nula. Es decir, que $f_0 = f_*$ $|\langle m, y^*\rangle|$-a.e., luego $f_n \to f_0$ en $L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$. Como esto lo hemos hecho para $y^* \in B(Y^*)$ arbitrario, entonces deducimos que $f_0 \in L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$ para cualquier $y^* \in B(Y^*)$, es decir, que $f_0 \in L_w^1(m)$ con $\|f_n - f_0\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \to 0$ para todo $y^* \in Y^*$.

Ahora bien, la sucesión $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L_w^1(m)$, por lo que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, si $n \geq m \geq n_0$, entonces $\|f_n - f_m\|_{L_w^1(m)} < \varepsilon$. Esto es lo mismo que decir que $f_n - f_m \in \varepsilon B(L_w^1(m))$ para todo $n \geq m \geq n_0$. Es sencillo comprobar que la bola $B(L_w^1(m))$ es cerrada para la topología donde la convergencia está definida por $g_n \to g$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} = 0$ para todo $y^* \in Y^*$. Entonces, como la sucesión $(f_n - f_m)_n$ converge a $f - f_m$ en dicha topología para todo $m \geq n_0$, se sigue que $f - f_m \in \varepsilon B(L_w^1(m))$ para todo $m \geq n_0$. Esto quiere decir que la sucesión $(f_m)_m$ también converge a f en $L_w^1(m)$, como queríamos probar. $\square$

Proposición 4.17. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial. Entonces $L_w^1(m)$ posee la propiedad σ-Fatou.*

Demostración. Sea $(f_n)_n \subset L_w^1(m)$ una sucesión, positiva y creciendo a f μ-a.e.

con $\sup_n \|f_n\|_{L^1_w(m)} < \infty$. En particular, tenemos que $f_n \to f$ $|\langle m, y^*\rangle|$-a.e. para cada $y^* \in B(Y)^*$. Entonces podemos aplicar el lema de Fatou con cada medida positiva $|\langle m, y^*\rangle|$ para obtener

$$\int_\Omega f \ d|\langle m, y^*\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \ d|\langle m, y^*\rangle| \leq \sup_n \|f_n\|_{L^1_w(m)} < \infty,$$

de donde deducimos que $f \in L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$ para todo $y^* \in B(Y^*)$. Entonces tenemos que $f \in L^1_w(m)$ y, tras tomar el supremo en $y^* \in B(Y^*)$, concluimos que $\|f\|_{L^1_w(m)} \leq \sup_n \|f_n\|_{L^1_w(m)}$. Por otro lado, se sigue, de la monotonía de la sucesión $(f_n)_n$, que

$$\int_\Omega f_n \ d|\langle m, y^*\rangle| \leq \int_\Omega f \ d|\langle m, y^*\rangle|$$

donde, tomando primero supremo en $y^* \in B(Y^*)$ y luego en n, se deduce la otra desigualdad que nos lleva a $\sup_n \|f_n\|_{L^1_w(m)} = \|f\|_{L^1_w(m)}$. Es decir, $L^1_w(m)$ tiene la propiedad σ-Fatou. $\square$

Como $L^1(m) \subseteq L^1_w(m)$, dicho espacio hereda la norma definida en $L^1_w(m)$, que denotaremos como $\|\cdot\|_{L^1(m)}$ cuando estemos tratando con funciones m-integrables. Al igual que $L^1_w(m)$, también $L^1(m)$ posee propiedades interesantes que vemos a continuación.

Lo primero, es notar que la norma de las funciones f de $L^1(m)$ coincide con $\|m_f\|(\Omega)$.

Proposición 4.18. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial y sea $f \in L^1(m)$. Entonces $\|f\|_{L^1(m)} = \|m_f\|(\Omega)$ para toda $f \in L^1(m)$.*

Demostración. Tomemos $f \in L^1(m)$. En la demostración del Teorema 4.14 vimos que $\langle m_f, y^*\rangle$ es la medida con densidad f respecto de $\langle m, y^*\rangle$, para todo $y^* \in Y^*$. Si sigue entonces que su variación viene dada por

$$|\langle m, y^*\rangle_f|(E) = \int_E |f| \ d|\langle m, y^*\rangle|,$$

para todo $E \in \Sigma$ (ver [30, Thm. 6.13]) por lo que también

$$|\langle m_f, y^*\rangle|(E) = \int_E |f| \ d|\langle m, y^*\rangle|,$$

para todo $E \in \Sigma$. De esta igualdad deducimos finalmente que

$$\|f\|_{L^1(m)} = \sup_{y^*\in B(Y^*)} \int_\Omega |f| \ d|\langle m, y^*\rangle| = \sup_{y^*\in B(Y^*)} |\langle m_f, y^*\rangle|(\Omega) = \|m_f\|(\Omega)$$

como queríamos ver. $\square$

Corolario 4.19. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial y sea $f \in L^1(m)$. Entonces $\|f\chi_E\|_{L^1(m)} = \|m_f\|(E)$ para toda $f \in L^1(m)$ y para todo $E \in \Sigma$.*

La Proposición 4.18, junto con la Proposición 4.6, nos dice que

$$\sup\Big\{\Big\|\int_E f\ dm\Big\|_Y \ : E \in \Sigma\Big\} \le \|f\|_{L^1(m)} \le 2\sup\Big\{\Big\|\int_E f\ dm\Big\|_Y \ E \in \Sigma\Big\},$$

para cada $f \in L^1(m)$, de donde se deduce directamente el siguiente

Lema 4.20. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial y sea $(f_n)_n \subset L^1(m)$ una sucesión de funciones m-integrables. Entonces $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L^1(m)$ si y solo si $\Big(\int_E f_n\ dm\Big)_n \subset Y$ es de Cauchy uniformemente en $E \in \Sigma$.*

Al igual que ocurre con $L^1_w(m)$, también $L^1(m)$ es completo y, en consecuencia, es un espacio de Banach de funciones sobre μ.

Teorema 4.21. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial. Entonces $L^1(m)$ es completo.*

Demostración. Para ver la completitud, tomemos $(f_n)_n \subset L^1(m)$ de Cauchy. En la Proposición 4.16 vimos que $L^1_w(m)$ es completo. Por tanto, dado que $L^1(m) \subseteq L^1_w(m)$, existe $f \in L^1_w(m)$ de modo que $f_n \to f$ en $L^1_w(m)$. Veamos que $f \in L^1(m)$. Por el Lema 4.20, se tiene que $\Big(\int_E f_n\ dm\Big)_n$ es de Cauchy uniformemente en $E \in \Sigma$. Se sigue, de la completitud de Y, que, para cada $E \in \Sigma$, existe $y_E \in Y$ de modo que

$$y_E = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\ dm$$

para todo $E \in \Sigma$. Como $f_n \to f$ en $L^1_w(m)$, entonces $f_n \to f$ en $L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$, para todo $y^* \in Y^*$. Por tanto, se tien que

$$\langle y_E, y^*\rangle = \lim_{n\to\infty}\Big\langle \int_E f_n\ dm, y^*\Big\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\ d\langle m, y^*\rangle = \int_E f\ d\langle m, y^*\rangle,$$

para todo $E \in \Sigma$ y para todo $y^* \in Y^*$, por lo que $f \in L^1(m)$. □

Al igual que ocurre en el espacio $L^1(\lambda)$ clásico, en $L^1(m)$ también se tiene el resultado análogo al teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Teorema 4.22 (de la convergencia dominada)**.** *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial y sea $(f_n)_n \subset L^1(m)$ tal que $f_n \to f$ m-a.e. Supongamos que existe $g \in L^1(m)$ tal que $|f_n| \le |g|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in L^1(m)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^1(m)$.*

Demostración. Como $L^1(m)$ es completo, basta probar que $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, ya que, si $f_0 \in L^1(m)$ es tal que $\|f_n - f_0\|_{L^1(m)} \to 0$, cuando $n \to \infty$, entonces $\|f_n - f_0\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \to 0$, cuando $n \to \infty$, para todo $y^* \in B(Y^*)$. En particular, extrayendo una subsucesión, $f_n \to f_0$ m-a.e., luego necesariamente $f_0 = f$ m-a.e.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y fijemos $y^* \in B(Y^*)$. Consideramos la sucesión de conjuntos $(E_n)_n \subseteq \Sigma$ definidos por $E_n = \{|f - f_n| \geq \varepsilon\}$. Como $f_n \to f$ m-a.e., entonces $f_n \to f$ en la topología de la convergencia en medida, luego $E_n \downarrow \emptyset$. Notamos, gracias a la Proposición 4.18 y al Corolario 4.19, que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f - f_n|\, d|\langle m, y^*\rangle| &= \int_{E_n} |f - f_n|\, d|\langle m, y^*\rangle| + \int_{\Omega\setminus E_n} |f - f_n|\, d|\langle m, y^*\rangle| \\ &\leq \int_{E_n} |f|\, d|\langle m, y^*\rangle| + \int_{E_n} |f_n|\, d|\langle m, y^*\rangle| \\ &\quad + \varepsilon \cdot |\langle m, y^*\rangle|(\Omega \setminus E_n) \\ &\leq 2\int_{E_n} |g|\, d|\langle m, y^*\rangle| + \varepsilon \cdot |\langle m, y^*\rangle|(\Omega \setminus E_n) \\ &\leq 2\|m_g\|(E_n) + \varepsilon \cdot \|m\|(\Omega),\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\|f_n - f_k\|_{L^1(m)} &= \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega |f_n - f_k|\, d|\langle m, y^*\rangle| \\ &\leq \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega |f - f_n|\, d|\langle m, y^*\rangle| + \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega |f - f_k|\, d|\langle m, y^*\rangle| \\ &\leq 2\|m_g\|(E_n) + 2\|m_g\|(E_k) + 2\varepsilon \cdot \|m\|(\Omega).\end{aligned}$$

Como $E_n \downarrow \emptyset$, la Proposición 4.8 nos muestra que $\|m_g\|(E_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\|m_g\|(E_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$, lo que muestra que $(f_n)_n$ es de Cauchy en $L^1(m)$. □

Como consecuencia, se sigue que $L^1(m)$ es un espacio de Banach de funciones sobre μ y que es σ-orden continuo. Además, se tiene que $L^1(m)$ es la clausura de las funciones simples en $L^1_w(m)$.

Corolario 4.23. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial. Entonces:*

(1) $L^1(m)$ es un espacio de Banach de funciones sobre μ.

(2) $L^1(m)$ es σ-orden continuo.

(3) Se tiene que $L^1(m) = \overline{\mathscr{S}(\Sigma)}^{L^1_w(m)}$.

Demostración. (1) Ya hemos visto, en el Teorema 4.21, la completitud de $L^1(m)$. Además, es claro que $\chi_\Omega \in L^1(m)$. Si $f \in L^0(\mu)$ y $g \in L^1(m)$ son tales que $|f| \le |g|$ μ-a.e. entonces $f_n := f\chi_{\{|f| \le n\}} \in L^1(m)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Clararemente $f_n \to f$ m-a.e. y $|f_n| \le |g|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el Teorema 4.22 nos muestra que $f \in L^1(m)$. En particular, $f, g \in L^1_w(m)$, y como $L^1_w(m)$ es un ideal de $L^0(\mu)$, entonces también se tiene $\|f\|_{L^1(m)} \le \|g\|_{L^1(m)}$.

(2) La σ-orden continuidad es una aplicación directa del Teorema 4.22.

(3) Sea $f \in L^1(m)$ y tomemos $(\varphi_n)_n \subset \mathscr{S}(\Sigma)$ una sucesión de funciones simples que crecen a $|f|$ m-a.e. Entonces de nuevo, el Teorema 4.22 nos asegura que $\varphi_n \to f \in L^1(m)$. Como $L^1(m)$ es completo, entonces es cerrado en $L^1_w(m)$. Por tanto, como $\mathscr{S}(\Sigma) \subseteq L^1(m)$, se sigue, tomando clausura en $L^1_w(m)$, que $L^1(m) = \overline{\mathscr{S}(\Sigma)}^{L^1_w(m)}$ como queríamos ver. $\square$

Capítulo 5

Ejemplos. Inclusión estricta de X_L^Φ en X_O^Φ

En este capítulo vamos a particularizar lo que sabemos de los espacios de Orlicz generalizados cuando escogemos X un espacio quasi-normado concreto. Además, como indica el título, el objetivo fundamental de este capítulo es construir un espacio de Banach de funciones X y una N-función Φ (con la propiedad Δ_2) de forma que $X_L^\Phi \subsetneq X_O^\Phi$.

5.1. El espacio de Orlicz clásico: $X = L^1(\mu)$

Cuando construimos los espacios de Orlicz y Luxemburg sobre $L^1(\mu)$ se obtienen los espacios clásicos. En este caso, siguiendo la notación utilizada en el Capítulo 3, la clase de Orlicz la denotaremos como $\widetilde{L^1(\mu)}^{\Phi}$ y a los espacios de Orlicz y Luxemburg los denotaremos como $L^\Phi(\mu)$, ya que ambos espacios coinciden. Además, las normas de Orlicz y Luxemburg son equivalentes, teniendose que

$$\|f\|_{L^1(\mu)_L^\Phi} \leq \|f\|_{L^1(\mu)_O^\Phi} \leq 2\|f\|_{L^1(\mu)_L^\Phi},$$

para toda $f \in L^\Phi(\mu)$, siendo $\|\cdot\|_{L^1(\mu)_L^\Phi}$ y $\|\cdot\|_{L^1(\mu)_O^\Phi}$ las normas de Luxemburg y Orlicz respectivamente. Este hecho es un resultado clásico que puede consultarse en [27, Chapter 3, Proposition 4].

A continuación veamos qué ocurre cuando construimos el espacio de Orlicz sobre $L^1(\mu)$ y nos restringimos a la familia de N-funciones de la forma $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$, para $p > 1$.

Como es de esperar, las normas de Orlicz y Luxemburg en este caso son iguales a la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$, salvo una constante.

Teorema 5.1. *Sea $X = L^1(\mu)$ y sea $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$, con $p > 1$ y q su exponente conjugado. Entonces:*

(1) $L^1(\mu)_L^{\Phi_p} = L^p(\mu)$ y $\|f\|_{L^1(\mu)_L^{\Phi_p}} = \dfrac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mu)}$, para toda $f \in L^p(\mu)$.

(2) $L^1(\mu)_O^{\Phi_p} = L^p(\mu)$ y $\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_p}} = q^{1/q}\|f\|_{L^p(\mu)}$, para toda $f \in L^p(\mu)$.

Demostración. (1) Como Φ_p tiene la propiedad Δ_2, entonces, gracias a (1) del Teorema 3.17, se tiene que $\widetilde{L^1(\mu)}^{\Phi_p} = L^1(\mu)_L^{\Phi_p}$. Por tanto, $f \in L^1(\mu)_L^{\Phi_p}$ si y solo si $\Phi(|f|) \in L^1(\mu)$, lo que significa que

$$\int_\Omega \frac{|f|^p}{p}\, d\mu < \infty,$$

es decir, $f \in L^1(\mu)_L^{\Phi_p}$ si y solo si $f \in L^p(\mu)$. Sea entonces $f \in L^p(\mu)$ y sea $c > 0$ tal que $\left\|\Phi_p\left(\dfrac{|f|}{c}\right)\right\|_{L^1(\mu)} \le 1$. Entonces, sustituyendo y despejando, se sigue que $\dfrac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mu)} \le c$, luego, tras tomar ínfimo en $c > 0$, se deduce que $\dfrac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mu)} \le \|f\|_{L^1(\mu)_L^{\Phi_p}}$.

Por otro lado, es claro que $c = \dfrac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mu)}$ verifica $\left\|\Phi_p\left(\dfrac{|f|}{c}\right)\right\|_{L^1(\mu)} = 1$. Por tanto, se sigue que $\dfrac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mu)} \ge \|f\|_{L^1(\mu)_L^{\Phi_p}}$, obteniéndose así la igualdad $\|f\|_{L^1(\mu)_L^{\Phi_p}} = \dfrac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mu)}$.

(2) Es bien conocido el resultado de Riesz que describe la norma del espacio de Lebesgue $L^p(\mu)$ a partir del espacio $L^q(\mu)$ cuando $p, q > 1$ son exponentes conjugados. A saber,

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup\Big\{\|fg\|_{L^1(\mu)} \ : \ g \in L^q(\mu),\ \|g\|_{L^q(\mu)} \le 1\Big\}. \tag{5.1}$$

Por la definición del espacio de Orlicz, $f \in L^1(\mu)_O^{\Phi_p}$ si y solo si

$$\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_p}} = \sup\Big\{\|fg\|_{L^1(\mu)} \ : g \in \widetilde{L^1(\mu)}^{\Phi_q},\ \|\Phi_q(|g|)\|_{L^1(\mu)} \le 1\Big\} < \infty.$$

Entonces, dado que que Φ_q tiene la propiedad Δ_2 y en (1) hemos visto que $L^1(\mu)_L^{\Phi_q} = L^q(\mu)$, se tiene que

$$\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_p}} = \sup\left\{\|fg\|_{L^1(\mu)} \ : g \in L^q(\mu),\ \|g\|_{L^1(\mu)} \leq q\right\},$$

lo que, teniendo en cuenta la igualdad (5.1), muestra que $f \in L^1(\mu)_O^{\Phi_p}$ si y solo si $f \in L^p(\mu)$.

Tomemos entonces $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^1(\mu)_O^{\Phi_q}$ tal que $\|\Phi_q(|g|)\|_{L^1(\mu)} \leq 1$. Tras despejar, se llega a que $\|g\|_{L^q(\mu)} \leq q^{1/q}$. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder clásica de los espacios $L^p(\mu)$, deducimos que

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}\|g\|_{L^q(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}q^{1/q},$$

de donde se sigue que $\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_q}} \leq q^{1/q}\|f\|_{L^p(\mu)}$.

Si tomamos $g = q^{1/q}\dfrac{|f|^{p-1}}{\|f\|^{p-1}_{L^p(\mu)}}$, es sencillo comprobar que $\|\Phi_q(|g|)\|_{L^1(\mu)} = 1$. Además, se tiene que $\|fg\|_{L^1(\mu)} = q^{1/q}\|f\|_{L^p(\mu)}$, por lo que $\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_p}} \geq q^{1/q}\|f\|_{L^p(\mu)}$ y, por tanto, se obtiene la igualdad $\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_p}} = q^{1/q}\|f\|_{L^p(\mu)}$. □

Corolario 5.2. *Sean $p, q > 1$ exponentes conjugados. Entonces*

$$\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_p}} = p^{1/p}q^{1/q}\|f\|_{L^1(\mu)_L^{\Phi_p}},$$

para toda $f \in L^p(\mu)$. En particular

$$\|f\|_{L^1(\mu)_O^{\Phi_2}} = 2\|f\|_{L^1(\mu)_L^{\Phi_2}}.$$

5.2. Los casos $X = L^1_w(m)$ y $X = L^1(m)$

De la misma manera que antes, podemos construir los espacios de Orlicz y Luxemburg a partir de una medida vectorial m numerablemente aditiva. Durante el resto de la sección μ denotará una medida de control de Rybakov de una medida vectorial numerablemente aditiva $m : \Sigma \to Y$ siendo Y un espacio de Banach.

Dada una función de Young Φ, denotaremos entonces $L^\Phi_w(m)$ al espacio de Luxemburg que se obtiene poniendo $X = L^1_w(m)$. Es decir,

$$L^\Phi_w(m) = L^1_w(m)^\Phi_L = \left\{f \in L^0(m) \ : \ \Phi(|f|/c) \in L^1_w(m) \text{ para algún } c > 0\right\}.$$

Sin embargo, podemos ver este espacio de una manera alternativa. Para verlo necesitamos probar antes el siguiente resultado.

Lema 5.3. *Sea Φ una función de Young y sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Supongamos que $f \in L^\Phi(|\langle m, y^*\rangle|)$ para todo $y^* \in Y^*$. Entonces*

$$\sup_{y^* \in B(Y^*)} \|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} < \infty.$$

Demostración. Consideramos la sucesión de funciones definidas por $f_n = |f|\chi_{\{|f|\leq n\}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y definimos los operadores (no lineales) $T_n : Y^* \to [0, \infty)$ como

$$T_n(y^*) := \|f_n\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} = \text{ínf}\left\{c > 0 \ : \ \left\|\Phi\left(\frac{|f_n|}{c}\right)\right\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1\right\}.$$

Es fácil ver que estos operadores son subaditivos y verifican $T_n(\alpha y^*) = |\alpha| T_n(y^*)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que además son continuos.

Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $f_n \leq n\chi_\Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\Phi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} &\leq \left\|\Phi\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\chi_\Omega\right\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} = \Phi\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)|\langle m,y^*\rangle|(\Omega)\\ &= \Phi\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\left|\left\langle m, \frac{y^*}{\|y^*\|_{Y^*}}\right\rangle\right|(\Omega)\|y^*\|_{Y^*}\\ &\leq \Phi\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\|m\|(\Omega)\|y^*\|_{Y^*}.\end{aligned}$$

Entonces, para todo $y^* \in Y^*$, con $\|y^*\|_{Y^*} \leq \delta_\varepsilon := \dfrac{1}{\Phi(n/\varepsilon)\|m\|(\Omega)}$ se tiene que $\left\|\Phi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1$, luego $T_n(y^*) \leq \varepsilon$ para todo $\|y^*\|_{Y^*} \leq \delta_\varepsilon$. Es decir, que T_n es continuo en $y^* = 0$. Entonces, gracias a la subaditividad y homogeneidad de T_n se tiene que $|T_n(y_1^*) - T_n(y_2^*)| \leq T_n(y_1^* - y_2^*)$, para todo $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ello, la continuidad de T_n en $y^* = 0$ garantiza la continuidad de T_n en todo Y^*. Entonces T_n verifica:

(a) T_n es subaditivo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $T_n(\alpha y^*) = |\alpha| T_n(y^*)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) T_n es continuo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $T_n(y^*) \leq \|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} < \infty$, para todo $y^* \in Y^*$, es decir, la familia $(T_n)_n$ está puntualmente acotada.

Estas cuatro propiedades nos permiten repetir la prueba del Teorema de Banach-Steinhaus de [29, Theorem 2.2.1], y por ello, deducir que existe $M > 0$ de modo que

$$\sup_{y^*\in B(Y^*)} \|f_n\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} = \sup_{y^*\in B(Y^*)} T_n(y^*) \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, como se tiene que $\|f_n\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \uparrow \|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)}$, para cada $y^* \in Y^*$, entonces existe $n_{y^*} \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq \|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} - \|f_n\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1$$

para todo $n \geq n_{y^*}$. Por tanto, se tiene que

$$\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1 + \|f_{n_{y^*}}\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1 + M,$$

para todo $y^* \in B(Y^*)$ y, en consecuencia, que

$$\sup_{y^*\in B(Y^*)} \|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1 + M < \infty,$$

como queríamos probar. □

Proposición 5.4. *Sea Φ una función de Young y sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces*

$$L^\Phi_w(m) = \left\{f \in L^0(m) : f \in L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|),\ \forall y^* \in Y^*\right\} = \bigcap_{y^*\in Y^*} L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|) \quad (5.2)$$

con

$$\|f\|_{L^\Phi_w(m)} = \sup\left\{\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \ : y^* \in B(Y^*)\right\}$$

para todo $f \in L^\Phi_w(m)$.

Demostración. Sea que $f \in L^\Phi_w(m)$ y sea $c > 0$ tal que que $\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in L^1_w(m)$, con $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{L^1_w(m)} \leq 1$. Dado $y^* \in B(Y^*)$, se tiene que $\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \in L^1(|\langle m,y^*\rangle|)$ y

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{L^1_w(m)} \leq 1.$$

Esta desigualdad nos muestra que $f \in L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)$, con $\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq c$, por lo que $\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq \|f\|_{L^\Phi_w(m)}$, para todo $y^* \in B(Y^*)$. Entonces, tomando supremo en $y^* \in B(Y^*)$, deducimos que

$$\sup\left\{\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \ : y^* \in B(Y^*)\right\} \leq \|f\|_{L^\Phi_w(m)}.$$

Recíprocamente, si $f \in L^\Phi(|\langle m, y^*\rangle|)$, para todo $y^* \in Y^*$, denotamos por

$$M = \sup\left\{\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \ : y^* \in B(Y^*)\right\},$$

que es finito por el Lema 5.3. Entonces tenemos que $\dfrac{f}{M} \in L^\Phi(|\langle m, y^*\rangle|)$, con $\left\|\dfrac{f}{M}\right\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1$, ya que $\|f\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq M$, para cada $y^* \in B(Y^*)$. Usando ahora el segundo apartado del Teorema 3.16, aplicado a $X = L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$, deducimos que $\Phi\left(\dfrac{|f|}{M}\right) \in L^1(|\langle m, y^*\rangle|)$, con

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{M}\right)\right\|_{L^1(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq \left\|\frac{f}{M}\right\|_{L^\Phi(|\langle m,y^*\rangle|)} \leq 1.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $y^* \in B(Y^*)$, se tiene entonces que $\Phi\left(\dfrac{|f|}{M}\right) \in L^1_w(m)$, con $\left\|\Phi\left(\dfrac{|f|}{M}\right)\right\|_{L^1_w(m)} \leq 1$. En consecuencia, se obtiene que $f \in L^\Phi_w(m)$, con $\|f\|_{L^\Phi_w(m)} \leq M$. $\square$

El espacio $L^\Phi_w(m)$ fue introducido por Delgado en [9] usando la igualdad (5.2). En el mismo trabajo también introduce el espacio $L^\Phi(m)$ como la clausura de $\mathscr{S}(\Sigma)$, las funciones simples, en $L^\Phi_w(m)$. A continuación veremos la relación que existe entre $L^\Phi(m)$ y el espacio de Luxemburg $L^1(m)^\Phi_L$.

Proposición 5.5. *Sea Φ una función de Young y sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces $L^\Phi(m) \subseteq L^1(m)^\Phi_L$. Si además, Φ posee la propiedad Δ_2, entonces se tiene la igualdad $L^\Phi(m) = L^1(m)^\Phi_L$.*

Demostración. Como $L^1(m)$ es un subespacio de $L^1_w(m)$, completo y, por lo tanto, cerrado, se tiene gracias al Lema 3.15 que $L^1(m)^\Phi_L$ es cerrado en $L^\Phi_w(m)$. Entonces, como también $L^1(m)^\Phi_L$ es un espacio de Banach de funciones, se tiene que

$$\mathscr{S}(\Sigma) \subseteq L^1(m)^\Phi_L. \tag{5.3}$$

Dado que $L^1(m)^\Phi_L$ es cerrado en $L^\Phi_w(m)$, se sigue, tomando clausura en (5.3), que $L^\Phi(m) \subseteq L^1(m)^\Phi_L$.

Si además $\Phi \in \Delta_2$, entonces el Teorema 3.17 nos muestra que $L^1(m)^\Phi_L$ es σ-orden continuo, ya que $L^1(m)$ lo es (ver Corolario 4.23). Tomemos entonces $f \in L^1(m)^\Phi_L$ y una sucesión $(\varphi_n)_n \subset \mathscr{S}(\Sigma)$ tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow |f|$ m-a.e. Entonces, por la σ-orden continuidad, se tiene que $\varphi_n \to |f|$ en $L^1(m)^\Phi_L$, por lo que también $\varphi_n \to |f|$ en $L^\Phi_w(m)$ y por tanto, se tiene que

$$|f| \in \overline{\mathscr{S}(\Sigma)}^{L^\Phi_w(m)} = L^\Phi(m),$$

por lo que también $f \in L^\Phi(m)$, probándose así la contención $L^1(m)^\Phi_L \subseteq L^\Phi(m)$ y, en consecuencia, la igualdad $L^\Phi(m) = L^1(m)^\Phi_L$ que queríamos ver. $\square$

5.2.1. $L^p(m)$ y $L^p_w(m)$

En el caso de los espacios $L^1(m)$ y $L^1_w(m)$ podemos construir también espacios análogos a los espacios $L^p(\mu)$ clásicos. Para ello, consideremos también la familia de N-funciones de la forma $\Phi_p(x) := \dfrac{x^p}{p}$, para $p > 1$.

En este caso, la clase de Orlicz asociada a la N-función Φ_p para el espacio $L^1(m)$ es

$$\widetilde{L^1(m)}^{\Phi_p} = \Big\{ f \in L^0(m) \ : \ \frac{|f|^p}{p} \in L^1(m) \Big\}.$$

Además, como $\Phi_p \in \Delta_2$, por la Proposición 5.5, la clase de Orlicz coincide con el espacio de Luxemburg y con $L^{\Phi_p}(m)$, por lo que, en este caso, nombraremos a estos espacios simplemente como $L^p(m)$. Es decir, que

$$L^p(m) := L^{\Phi_p}(m) = L^1(m)^{\Phi_p}_L = \widetilde{L^1(m)}^{\Phi_p}.$$

En el caso de $L^1_w(m)$ tenemos, por la Proposición 5.4, que

$$L^{\Phi_p}_w(m) = \big\{ f \in L^0(m) \ : f \in L^{\Phi_p}(|\langle m, y^* \rangle|), \ \forall y^* \in Y^* \big\}.$$

Ahora bien, hemos visto en el Teorema 5.1 que $L^{\Phi_p}(\lambda) = L^p(\lambda)$ para cualquier medida positiva λ. Por lo que, en realidad,

$$L^{\Phi_p}_w(m) = \big\{ f \in L^0(m) \ : f \in L^p(|\langle m, y^* \rangle|), \ \forall y^* \in Y^* \big\}.$$

Debido a este hecho denotaremos a este espacio como $L^p_w(m)$.

A continuación vemos la relación que existe entre las normas de Luxemburg $\|\cdot\|_{L^p_w(m)}$ y $\|\cdot\|_{L^1_w(m)}$.

Proposición 5.6. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$, con $p > 1$. Entonces*

$$\|f\|_{L^p_w(m)} = \frac{1}{p^{1/p}} \sup_{y^* \in B(Y^*)} \|f\|_{L^p(|\langle m, y^* \rangle|)} = \frac{1}{p^{1/p}} \||f|^p\|^{1/p}_{L^1_w(m)} \tag{5.4}$$

para toda $f \in L^p_w(m)$.

Demostración. No hay nada que probar en la segunda igualdad. Para la primera, por la Proposición 5.4, tenemos que

$$\|f\|_{L_w^{\Phi_p}(m)} = \sup\left\{\|f\|_{L^{\Phi_p}(|\langle m,y^*\rangle|)} \ : y^* \in B(Y^*)\right\}.$$

El Teorema 5.1 nos muestra, además, que

$$\|f\|_{L^{\Phi_p}(\lambda)} = \frac{1}{p^{1/p}}\|f\|_{L^p(\lambda)}$$

para toda medida positiva λ. De estas dos igualdades se sigue entonces que

$$\|f\|_{L_w^p(m)} = \frac{1}{p^{1/p}} \sup_{y^*\in B(Y^*)} \|f\|_{L^p(|\langle m,y^*\rangle|)},$$

como queríamos ver. □

Dado que es un poco más cómodo trabajar con esta última norma, a partir de estemos momento, usaremos $\|\cdot\|_{L_w^p(m)}$ para referirnos a

$$\|f\|_{L_w^p(m)} = \sup_{y^*\in B(Y^*)} \|f\|_{L^p(|\langle m,y^*\rangle|)} = \||f|^p\|_{L_w^1(m)}^{1/p}, \tag{5.5}$$

para cada $f \in L_w^p(m)$. De la misma forma, nos referimos a la norma $\|\cdot\|_{L^p(m)}$ cuando nos restringimos al espacio $L^p(m)$.

Observación 5.7. La ecuación (5.4) muestra que el espacio $L_w^p(m)$ se identifica isométricamente con la $\frac{1}{p}$-potencia de $L_w^1(m)$ tal y como lo hemos definido en la Sección 1.2. Análogamente, también se verifica que $L^p(m)$ es la $\frac{1}{p}$-potencia del espacio $L^1(m)$.

Dado que, en los espacios $L^p(\mu)$ clásicos con μ una medida finita, se tienen las inclusiones $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ si $p \geq q \geq 1$, entonces también se tiene para los espacios $L_w^p(m)$ y $L^p(m)$. Es decir, se tiene la cadena de contenciones

$$L^p(m) \subseteq L^q(m) \subseteq L^1(m) \quad \text{y} \quad L_w^p(m) \subseteq L_w^q(m) \subseteq L_w^1(m).$$

Lo que es más sorprendente es que se tiene también la inclusión del espacio $L_w^p(m)$ en $L^1(m)$, si $p > 1$.

Proposición 5.8. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sea $p > 1$. Entonces $L_w^p(m) \subset L^1(m)$. Además la inclusión es continua.*

Demostración. Dada $f \in L^p_w(m)$, consideramos los conjuntos $\Omega_n := \{|f| \leq n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y consideramos también $f_n := f\chi_{\Omega_n}$. Cada f_n es, por construcción, una función acotada, por tanto $f_n \in L^1(m)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. También es evidente que $f_n \to f$ m-a.e. cuando $n \to \infty$. Para probar que $f \in L^1(m)$ basta ver, gracias al Lema 4.20 y al Teorema 4.22, que $\Big(\displaystyle\int_E f_n\, dm\Big)_n \subset Y$ es de Cauchy, uniformemente en $E \in \Sigma$.

Sea q es el exponenente conjugado de p. Entonces, gracias a la desigualdad de Hölder y considerando en $L^p(m)$ la norma de Luxemburg dada por (5.5), se tiene, para $n > k$, que

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_E f_n\, dm - \int_E f_k\, dm \Big\|_Y &= \Big\| \int_E (f_n - f_k)\, dm \Big\|_Y \\
&= \sup_{y^* \in B(Y^*)} \Big| \Big\langle \int_E (f_n - f_k)\, dm, y^* \Big\rangle \Big| \\
&\leq \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega |f_n - f_k|\, d|\langle m, y^* \rangle| \\
&= \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega |f| \chi_{\Omega_n \setminus \Omega_k}\, d|\langle m, y^* \rangle| \\
&\leq \sup_{y^* \in B(Y^*)} \|f\|_{L^p(|\langle m, y^* \rangle|)} [|\langle m, y^* \rangle|(\Omega_n \setminus \Omega_k)]^{1/q} \\
&\leq \sup_{y^* \in B(Y^*)} \|f\|_{L^p(|\langle m, y^* \rangle|)} [|\langle m, y^* \rangle|(\Omega \setminus \Omega_k)]^{1/q} \\
&\leq \|f\|_{L^p(m)} [\|m\|(\Omega \setminus \Omega_k)]^{1/q}.
\end{aligned}$$

Ahora basta tomar límte y usar la Proposición 4.8, aplicada a la sucesión $(\Omega \setminus \Omega_k)_k$, que garantiza que $\|m\|(\Omega \setminus \Omega_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Usando de nuevo la desigualdad de Hölder (Proposición 1.14), sabiendo ahora que $f \in L^1(m)$, deducimos que

$$\|f\|_{L^1(m)} \leq \|f\|_{L^p(m)} \|m\|(\Omega)^{1/q} = \|f\|_{L^p_w(m)} \|m\|(\Omega)^{1/q},$$

lo que garantiza la continuidad de la inclusión $L^p_w(m) \subset L^1(m)$. □

A continuación vamos a ver que el espacio $L^1(m)$ factoriza como el producto del espacio débil $L^p_w(m)$ y del espacio $L^q(m)$, para todos $p, q > 1$ exponentes conjugados.

Lema 5.9. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sean $p, q > 1$ exponentes conjugados. Entonces*

$$L^p_w(m) \cdot L^q(m) = L^1(m).$$

Demostración. Veamos primero que $L_w^p(m) \cdot L^q(m) \subseteq L^1(m)$. Sean $f \in L^q(m)$ y $g \in L_w^p(m)$, entonces, por la definición de $L^q(m)$, existe una sucesión de funciones simples $(\varphi_n)_n \subset \mathscr{S}(\Sigma)$ convergiendo a f en la norma de $L^q(m)$, es decir, que $\|f - \varphi_n\|_{L^q(m)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $L^q(m) \subseteq L_w^q(m)$, podemos aplicar ahora la desigualdad de Hölder (Proposición 1.14) para deducir que

$$\begin{aligned}\|gf - g\varphi_n\|_{L_w^1(m)} &= \|g(f - \varphi_n)\|_{L_w^1(m)} \leq \|g\|_{L_w^p(m)} \|f - \varphi_n\|_{L_w^q(m)} \\ &= \|g\|_{L_w^p(m)} \|f - \varphi_n\|_{L^q(m)}.\end{aligned}$$

Basta tomar límite, cuando $n \to \infty$, para obtener que $\|gf - g\varphi_n\|_{L_w^1(m)} \to 0$, es decir, que gf es el límite de la sucesión $(g\varphi_n)_n \subset L_w^p(m) \subseteq L^1(m)$, como sabemos por la Proposición 5.8. Como este espacio es cerrado en $L_w^1(m)$ se sigue entonces que $gf \in L^1(m)$.

Para la otra contención, si $f \in L^1(m)$ entonces

$$f = \mathrm{sg}(f)|f| = \mathrm{sg}(f)|f|^{1/q} \cdot |f|^{1/p} = \big(\mathrm{sg}(f)|f|^{1/q}\big) \cdot |f|^{1/p}.$$

Como $L^q(m)$ y $L^p(m)$ son las $\dfrac{1}{q}$-potencia y $\dfrac{1}{p}$-potencia de $L^1(m)$, respectivamente, entonces resulta claro que $\big(\mathrm{sg}(f)|f|^{1/q}\big) \in L^q(m)$ y $|f|^{1/p} \in L^p(m)$, lo que prueba que $L^1(m) \subseteq L_w^q(m) \cdot L^p(m)$ y por tanto la igualdad. □

Hablando en términos de espacios de multiplicadores, el Lema 5.9 nos muestra que $L_w^q(m) \subseteq \mathscr{M}(L^p(m), L^1(m))$, donde este último espacio está formado por aquellas funciones $g \in L^0(m)$ tales que $gf \in L^1(m)$ para todo $f \in L^p(m)$. Resulta que no sólo se tiene la contención anterior sino también la igualdad.

Teorema 5.10. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sean $p, q > 1$ exponentes conjugados. Entonces*

$$\mathscr{M}(L^q(m), L^1(m)) = L_w^p(m),$$

es decir, $g \in L^0(m)$ verifica que $gf \in L^1(m)$, para todo $f \in L^q(m)$, si y solo si $g \in L_w^p(m)$.

Demostración. Si $g \in L_w^p(m)$ y $f \in L^q(m)$ ya hemos visto, en el Lema 5.9, que $gf \in L^1(m)$, por lo que $L_w^p(m) \subseteq \mathscr{M}(L^q(m), L^1(m))$.

Para obtener la contención contraria hemos de ver que si $g \in L^0(m)$ es tal que $gf \in L^1(m)$, para todo $f \in L^p(m)$, entonces $g \in L_w^q(m)$. Para ello consideramos de nuevo los conjuntos $\Omega_n = \{|g| \leq n\}$ y la sucesión de funciones $g_n = |g|\chi_{\Omega_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $g_n \uparrow |g|$ m-a.e., cuando $n \to \infty$ y, por ello, que

$|g_n f| \uparrow |gf| \in L^1(m)$, para todo $f \in L^q(m)$. Cada $g_n \in L_w^p(m)$ puesto que es una función acotada y, por tanto, $g_n f \in L^1(m)$, para todo $f \in L^q(m)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $L^1(m)$ es σ-orden continuo, entonces tenemos garantizado que $\|g_n f - gf\|_{L^1(m)} \to 0$.

En términos de operadores de multiplicación, esto quiere decir que para el operador de multiplicación $M_{g_n} : L^q(m) \to L^1(m)$, definido por $M_{g_n}(f) = g_n f$, y el operador de multiplicación $M_{|g|} : L^q(m) \to L^1(m)$, definido por $M_{|g|}(f) = |g|f$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} M_{g_n}(f) = M_{|g|}(f)$ en $L^1(m)$, para toda $f \in L^q(m)$. Además, se tiene que $\|M_{g_n}\| = \|g_n\|_{L_w^p(m)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí que M_{g_n} sea un operador continuo. En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder (Proposición 1.14) deducimos, para cada $f \in L^q(m)$, que

$$\|g_n f\|_{L^1(m)} = \|g_n f\|_{L_w^1(m)} \leq \|g_n\|_{L_w^p(m)} \|f\|_{L_w^q} = \|g_n\|_{L_w^p(m)} \|f\|_{L^q(m)},$$

por lo que

$$\|M_{g_n}\| = \sup_{f \in B(L^p(m))} \|g_n f\|_{L^1(m)} \leq \|g_n\|_{L_w^p(m)}.$$

Si ahora consideramos las funciones $f_n := \dfrac{|g_n|^{p-1}}{\|g_n\|_{L_w^p(m)}^{p-1}}$, es claro que están en $L^q(m)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que siguen siendo funciones acotadas. Entonces notamos que

$$\begin{aligned} \|M_{g_n}(f_n)\|_{L^1(m)} = \|g_n f_n\|_{L^1(m)} &= \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega \frac{|g_n|^p}{\|g_n\|_{L_w^p(m)}^{p-1}} \, d|\langle m, y^* \rangle| \\ &= \frac{\|g_n\|_{L_w^p(m)}}{\|g_n\|_{L_w^p(m)}^p} \cdot \sup_{y^* \in B(Y^*)} \int_\Omega |g_n|^p \, d|\langle m, y^* \rangle| = \|g_n\|_{L_w^p(m)} \end{aligned}$$

y, por tanto, deducimos que $\|M_{g_n}\| = \|g_n\|_{L_w^p(m)}$ como queríamos ver.

Los operadores de multiplicación M_{g_n} son continuos y $M_{g_n}(f) \to M_{|g|}(f)$ en $L^1(m)$, para toda $f \in L^q(m)$. Entonces, el teorema de Banach-Steinhaus nos asegura que $\|M_{|g|}\| = \sup_n \|M_{g_n}\| < \infty$ y, como $g_n \uparrow |g|$, entonces la propiedad σ-Fatou de $L_w^p(m)$, la cual se hereda de $L_w^1(m)$ (ver Teorema 3.16), nos muestra que, efectivamente, $g \in L_w^p(m)$ como queríamos ver, teniéndose además que $\|g\|_{L_w^p(m)} = \sup_n \|g_n\|_{L_w^p(m)} = \sup_n \|M_{g_n}\| = \|M_{|g|}\|$. □

5.3. La inclusión estricta. $X_L^\Phi \subsetneq X_O^\Phi$

Hemos visto en el Capítulo 3 que siempre se tiene la contención $X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$. Es más, en el Capítulo 6 veremos condiciones suficientes que garantizan la otra inclusión y, por tanto, la igualdad de ambos espacios. Como veremos a continuación, el espacio $L^p(m)$ nos proporciona precisamente un contraejemplo que muestra que no siempre se tiene la igualdad entre el espacio de Orlicz y el espacio de Luxemburg.

En [20, Theorem 5.1], Lewis da una caracterización de cuándo se verifica la igualdad $L^1(m) = L^1_w(m)$. Este resultado lo dejamos por escrito sin demostrar, ya que no nos es necesario, puesto que, para construir el ejemplo que buscamos necesitamos tomar precisamente una medida vectorial numerablemente aditiva m para la que se tenga la inclusión estricta $L^1(m) \subsetneq L^1_w(m)$. Aun así, el resultado de Lewis nos indica cómo hemos de buscar dicha medida m.

Teorema 5.11 (Lewis)**.** *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en un espacio de Banach Y. Si Y no tiene una copia de c_0 entonces $L^1(m) = L^1_w(m)$.*

Además, en [8, Proposition 3], se prueba que los espacios $L^1(m)$ y $L^1_w(m)$ coinciden si y solo si $L^1(m)$ tiene la propiedad σ-Fatou.

Teorema 5.12. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en un espacio de Banach Y. Entonces $L^1(m) = L^1_w(m)$ si y solo si $L^1(m)$ tiene la propiedad σ-Fatou.*

Ejemplo. Vamos a mostrar ahora un ejemplo sencillo de una medida vectorial $m : \Sigma \to Y$ de forma que $L^1(m) \subsetneq L^1_w(m)$. Para ello, consideramos el espacio medible $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ y $m : \mathbb{N} \to c_0$ la medida definida por $m(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n} e_n \in c_0$, donde $e_n(n) = 1$ y $e_n(k) = 0$ para todo $k \neq n$. Veamos quién es $L^1_w(m)$.

Es bien conocido que el dual de c_0 se identifica isométricamente con ℓ^1, el espacio de sucesiones absolutamente sumables, asociando a cada $y \in \ell^1$ el funcional $y^* : c_0 \to \mathbb{R}$ definido como $y^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$, para todo $x \in c_0$. Por tanto, se tiene que

$$\langle m(E), y^* \rangle = \sum_{n\in E} \frac{1}{n} \cdot y(n),$$

para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y para todo $y \in \ell^1$. También es sencillo ver que la variación es precisamente

$$|\langle m, y^* \rangle|(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n} \cdot |y(n)|.$$

En vista de ello, si $f \in L^1_w(m)$ entonces

$$\int_{\mathbb{N}} |f| \; d|\langle m, y^* \rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n} \cdot |y(n)| < \infty, \tag{5.6}$$

para todo $y \in \ell^1$. También es conocido que el dual de ℓ^1 se identifica isométricamente con ℓ^∞, asociando a cada $z \in \ell^\infty$ el funcional $z^* : \ell^1 \to \mathbb{R}$ definido por $z^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)z(n)$, para cada $y \in \ell^1$. Entonces, se sigue de (5.6) que $L^1_w(m) = \ell_\infty\left(\frac{1}{n}\right)$, ya que dicha ecuación nos indica que la sucesión $\left(\frac{|f(n)|}{n}\right)_n$ está en el dual de ℓ^1, es decir, que $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_n \in \ell^\infty$.

Sin embargo, se tiene que

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\langle m, y^*\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \cdot y(n) = \left\langle \left(\frac{f(n)}{n}\right)_n, y^* \right\rangle,$$

para todo $y \in \ell^1$, de donde se sigue que $f \in L^1(m)$ si y solo si $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_n \in c_0$, es decir, que

$$L^1(m) = c_0\left(\frac{1}{n}\right) \subsetneq \ell_\infty\left(\frac{1}{n}\right) = L^1_w(m).$$

Para continuar con la construcción de nuestro ejemplo, hemos de probar antes el siguiente resultado.

Lema 5.13. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva que verifica $L^1(m) \subsetneq L^1_w(m)$ y sea Φ una función de Young con la propiedad Δ_2. Entonces*

$$L^1(m)^\Phi_L \subsetneq L^\Phi_w(m).$$

Demostración. Como $\Phi \in \Delta_2$, la Proposición 5.5 nos garantiza que

$$L^\Phi(m) = L^1(m)^\Phi_L = \widetilde{L^1(m)}^\Phi$$

y que

$$L^\Phi_w(m) = \widetilde{L^1_w(m)}^\Phi$$

por lo que nos basta ver que

$$\widetilde{L^1(m)}^\Phi \subsetneq \widetilde{L^1_w(m)}^\Phi.$$

Tomemos entonces $f \in L^1_w(m) \setminus L^1(m)$ no negativa y $g := \Phi^{-1}(f)$. Entonces es claro que

$$g \in \widetilde{L^1_w(m)}^\Phi \setminus \widetilde{L^1(m)}^\Phi = L^\Phi_w(m) \setminus (L^1(m))^\Phi_L$$

ya que $\Phi(g) = f \in L^1_w(m) \setminus L^1(m)$. $\square$

En particular, podemos aplicar este lema a la familia de N-funciones de la forma $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p}$, para $p > 1$.

Corolario 5.14. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva que verifica $L^1(m) \subsetneq L^1_w(m)$. Entonces*

$$L^p(m) \subsetneq L^p_w(m),$$

para todo $p > 1$.

En cuanto a lo que ocurre con la clase de Orlicz y Luxemburg, construidas sobre $L^1_w(m)$, se verá como consecuencia del Teorema 6.10 que siempre coinciden (ver Corolario 7.3). En el caso particular que estamos tratando tenemos las igualdades

$$L^p_w(m) = L^1_w(m)_O^{\Phi_p}. \tag{5.7}$$

Vamos a demotrar que, de hecho, tenemos una igualdad más fuerte.

Proposición 5.15. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces*

$$L^1_w(m)_O^{\Phi_p} = L^1(m)_O^{\Phi_p}$$

para todo $p > 1$, o lo que es lo mismo, que

$$L^p_w(m) = L^1(m)_O^{\Phi_p}.$$

Demostración. Tomemos $f \in L^p_w(m)$ y $g \in L^q(m) = \widetilde{L^1(m)}^{\Phi_q}$, donde q es el exponente conjutado de p, verificando $\|\Phi_q(|g|)\|_{L^1(m)} \leq 1$. El Lema 3.13 nos garantiza, en este caso, que $\|g\|_{L^q(m)} \leq 1$. Como, en particular, $g \in L^q_w(m)$, el Lema 5.9 nos muestra que $fg \in L^1(m)$. Entonces podemos usar la desigualdad de Hölder (Teorema 3.18) para obtener

$$\|fg\|_{L^1(m)} = \|fg\|_{L^1_w(m)} \leq 2\|f\|_{L^p_w(m)}\|g\|_{L^q_w(m)} \leq 2\|f\|_{L^p_w(m)},$$

lo que muestra que $f \in L^1(m)_O^{\Phi_p}$.

Para ver la otra inclusión tomamos $f \in L^1(m)_O^{\Phi_p}$. Para probar que $f \in L^p_w(m)$, en vista del Teorema 5.10, basta comprobar que si $g \in L^q(m)$, entonces se tiene $fg \in L^1(m)$, pero esto se sigue de la definición del espacio de Orlicz $L^1(m)_O^{\Phi_p}$ porque $fg \in L^1(m)$ para toda $g \in \widetilde{L^1(m)}^{\Phi_q} = L^q(m)$. $\square$

5.3: La inclusión estricta. $X_L^\Phi \subsetneq X_O^\Phi$

Con todos estos resultados podemos ver ya que el espacio de Orlicz y Luxemburg contruido sobre $L^1(m)$ y las N-funciones Φ_p, con $p > 1$, no coinciden de manera general.

Teorema 5.16. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva vericando $L^1(m) \subsetneq L^1_w(m)$. Entonces*

$$L^1(m)_L^{\Phi_p} \subsetneq L^1(m)_O^{\Phi_p}$$

para todo $p > 1$.

Demostración. Tebemos, por la Proposición 5.5, que $L^1(m)_L^{\Phi_p} = L^p(m)$, ya que Φ_p tiene la propiedad Δ_2. El Corolario 5.14 nos muestra que $L^p(m) \subsetneq L^p_w(m)$ y, finalmente, el Teorema 5.16 que acabámos de demostrar, nos da la igualdad $L^p_w(m) = L^1(m)_O^{\Phi_p}$. Juntando todos estos resultados deducimos entonces que

$$L^1(m)_L^{\Phi_p} = L^\Phi(m) \subsetneq L^p_w(m) = L^1(m)_O^{\Phi_p},$$

lo que concluye la demostración. $\square$

En cualquier caso, hemos visto que existe un espacio de Banach X que no tiene la propiedad σ-Fatou y una N-función Φ, con la propiedad Δ_2, de forma que $X_L^\Phi \subsetneq X_O^\Phi$.

Capítulo 6

Equivalencia de las quasi-normas de Orlicz y Luxemburg

Ya hemos visto que siempre se tiene la inclusión $X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$ para cualquier N-función Φ. Además se verifica que $\|f\|_{X_O^\Phi} \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}$ para cualquier $f \in X_L^\Phi$. Vimos además en el capítulo anterior que, por lo general, no se tiene la igualdad de estos espacios. Por tanto, nos proponemos buscar ahora hipótesis extras sobre X y sobre Φ que nos aseguren la inclusión que buscamos y la equivalencia de las quasi-normas.

6.1. Propiedad σ-Fatou y quasi-norma estrictamente monótona

En esta sección veremos que la propiedad σ-Fatou junto con la *monotonía estricta* de la quasi-norma del espacio ambiente es condición suficiente para que los espacios de Orlicz y Luxemburg coincidan y sus quasi-normas sean equivalentes. En vista del ejemplo construido en el Capítulo 5, la propiedad σ-Fatou parece necesaria para la igualdad $X_L^\Phi = X_O^\Phi$.

En todos los enunciados que escribimos a continuación se asume que estamos trabajando sobre un espacio quasi-Banach de funciones sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y una N-función Φ. Introducimos a continuación el concepto de quasi-norma estrictamente monótona.

Definición 6.1. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Decimos que $\|\cdot\|_X$ es *estrictamente monótona* si para toda pareja de funciones positivas $f, g \in X$ tales que $f < g$ se tiene que $\|f\|_X < \|g\|_X$.

Entendemos que $f < g$ si $f \leq g$ y $\mu(\{f \neq g\}) > 0$.

Para poder probar la equivalencia entre las quasi-normas de Orlicz y Luxemburg hemos de ver primero algunos resultados que se tienen en el espacio de Orlicz. La mayoría de ellos son análogos a los ya vistos en el espacio de Luxemburg. El primero de ellos es el siguiente.

Proposición 6.2. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ con la propiedad σ-Fatou y con quasi-norma estrictamente monótona. Sea Φ una N-función con derivada lateral derecha φ. Sea $f \in X_O^\Phi$ con $\|f\|_{X_O^\Phi} \leq 1$. Entonces $g := \varphi(|f|) \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ y verifica $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$.*

Demostración. Consideramos la sucesión de funciones $f_n := f\chi_{\{|f|\leq n\}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por construcción $(f_n)_n \subset L^\infty(\mu)$ y, en consecuencia, $\varphi(|f_n|) \in L^\infty(\mu) \subseteq \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$, por lo que $\hat{\Phi}(\varphi(|f_n|)) \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como tanto $\hat{\Phi}$ como φ son monótonas no decrecientes deducimos que $\hat{\Phi}(\varphi(|f_n|))$ crece a $\hat{\Phi}(\varphi(|f|))$ μ-a.e. debido a que $|f_n|$ crece a $|f|$.

Pueden darse las siguientes dos situaciones:

(1) $\|\hat{\Phi}(\varphi(|f_n|))\|_X \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|))\|_X > 1$.

Si se da (1) ya hemos terminado ya que la propiedad σ-Fatou de X nos garantiza que $g := \varphi(|f|) \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ y $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Si ocurre (2), se tiene que, en particular, $f_{n_0} \neq 0$, por lo que $|f_{n_0}| > 0$, y por ello, también $\Phi(|f_{n_0}|) > 0$. Entonces, el Lema 2.16 nos garantiza que

$$\hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|)) < \Phi(|f_{n_0}|) + \hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|) = |f_{n_0}|\varphi(|f_{n_0}|).$$

Tras tomar quasi-norma y usar el Lema 3.24, junto con la hipótesis de que $\|\cdot\|_X$ es estrictamente monótona, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|))\|_X &< \||f_{n_0}|\varphi(|f_{n_0}|)\|_X \leq \|f_{n_0}\|_{X_O^\Phi} \cdot \left\|\hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|))\right\|_X \\ &\leq \|f\|_{X_O^\Phi}\left\|\hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|))\right\|_X \leq \left\|\hat{\Phi}(\varphi(|f_{n_0}|))\right\|_X,\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. □

A continuación vemos el resultado análogo a los dos primeros apartados del Teorema 3.16 en el espacio de Orlicz. La diferencia es que para que sea cierto con la quasi-norma de Orlicz necesitamos, a parte de la propiedad σ-Fatou, que $\|\cdot\|_X$ sea estrictamente monótona.

Proposición 6.3. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ, con la propiedad σ-Fatou, y supongamos que $\|\cdot\|_X$ es estrictamente monótona. Sea Φ una N-función. Entonces:*

(1) Si $f \in X_O^\Phi$, con $\|f\|_{X_O^\Phi} \leq 1$, entonces $\|\Phi(|f|)\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$.

(2) Si $f \in X_O^\Phi$ no es la función nula, entonces

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}}\right)\right\|_X \leq 1.$$

En particular $f \in X_L^\Phi$.

Demostración. (1) De nuevo, consideramos φ la derivada lateral derecha de Φ y definimos $g := \varphi(|f|) \geq 0$. Por la Proposición 6.2 tenemos que $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$. Usando de nuevo el Lema 2.16 deducimos que

$$|f|g = |f|\varphi(|f|) = \Phi(|f|) + \hat{\Phi}(\varphi(|f|)) = \Phi(|f|) + \hat{\Phi}(|g|).$$

Como $\Phi(|f|) \leq \Phi(|f|) + \hat{\Phi}(|g|)$, obtenemos tomando quasi-norma y utilizando la igualdad anterior que

$$\|\Phi(|f|)\|_X \leq \left\|\Phi(|f|) + \hat{\Phi}(|g|)\right\|_X = \|fg\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$$

como queríamos ver.

(2) Si f no es la función nula, entonces podemos considerar la función $\dfrac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}}$, la cual tiene por homogeneidad quasi-norma de Orlicz 1. Entonces, por el apartado anterior, tenemos directamente

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}}\right)\right\|_X \leq \left\|\frac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}}\right\|_X \leq 1.$$

Evidentemente, esto garantiza que $\dfrac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}} \in \widetilde{X}^{\Phi}$, por lo que $f \in X_L^\Phi$. $\square$

Gracias a estos resultados estamos ya en condiciones de establecer la equivalencia entre las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg, cuando X posee la propiedad σ-Fatou y $\|\cdot\|_X$ es estrictamente monótona.

Teorema 6.4. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ, con la propiedad σ-Fatou, y supongamos que $\|\cdot\|_X$ es estrictamente monótona. Sean $K \geq 1$ una constante quasi-triangular de X y Φ una N-función. Entonces $X_L^\Phi = X_O^\Phi$ con quasi-normas equivalentes. En concreto, se tiene*

$$\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \|f\|_{X_O^\Phi} \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}$$

para toda $f \in X_L^\Phi = X_O^\Phi$.

Demostración. La segunda desigualdad ya se vio en la Proposición 3.27. La otra desigualdad es consecuencia de la Proposición 6.3 ya que

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}}\right)\right\|_X \leq 1$$

garantiza, por la definición de la norma de Luxemburg, que $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$. □

Como ya comentamos en el Capítulo 4, cuando tomamos $X = L^1(\mu)$ los espacios de Orlicz y Luxemburg coinciden y sus normas son equivalentes. Esto se sigue del hecho de que $L^1(\mu)$ posee la propiedad σ-Fatou gracias al lema de Fatou y que la norma $\|\cdot\|_{L^1(\mu)}$ es, por supuesto, estrictamente monótona.

6.2. Propiedad Δ_2 y quasi-norma estrictamente monótona

Ya vimos que cuando la función de Young Φ tiene la propiedad Δ_2 entonces $\widetilde{X}^\Phi = X_L^\Phi$. Como veremos en esta sección, la propiedad Δ_2 junto con una quasi-norma estrictamente monótona hace que las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg sean de nuevo equivalentes, solo que esta vez, esta equivalencia se da en el espacio pequeño X_L^Φ.

Para ello vemos a continuación resultados análogos a los vistos en la sección anterior donde la hipótesis σ-Fatou se ha sustituido por $\Phi \in \Delta_2$.

Proposición 6.5. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ con $\|\cdot\|_X$ estrictamente monótona. Sea $\Phi \in \Delta_2$ una N-función y φ su derivada lateral derecha. Sea $f \in X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$, con $\|f\|_{X_O^\Phi} \leq 1$. Entonces la función $g := \varphi(|f|) \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$ y $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X \leq 1$.*

Demostración. Para la prueba vemos primero que $fg \in X$. Como $\Phi \in \Delta_2$ tenemos, por la Proposición 2.27, que existe $c > 1$ de modo que $x\varphi(x) \leq c\Phi(x)$, para todo $x \geq 0$. Entonces

$$|fg| = |f|\varphi(|f|) \leq c\Phi(|f|) \in X$$

ya que $X_L^\Phi = \widetilde{X}^\Phi$ por la propiedad Δ_2 y $f \in \widetilde{X}^\Phi$, por lo que $\Phi(|f|) \in X$. Entonces $fg \in X$ por la propiedad de ideal de X.

Utilizando de nuevo el Lema 2.16 tenemos la igualdad

$$|fg| = \Phi(|f|) + \hat{\Phi}(|g|), \tag{6.1}$$

la cual nos garantiza que $\hat{\Phi}(|g|) \leq |fg| \in X$ por lo que también $\hat{\Phi}(|g|) \in X$. Es decir, que $g \in \widetilde{X}^{\hat{\Phi}}$. Para terminar la prueba procedemos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\|\hat{\Phi}(|g|)\|_X > 1$. Como f no es la función nula entonces $\Phi(|f|) > 0$. Este hecho, junto con la igualdad (6.1), garantiza que

$$|fg| > \hat{\Phi}(|g|).$$

Gracias a la monotonía estricta de la quasi-norma de X deducimos entonces, utilizando el Lema 3.24, que

$$\begin{aligned} \left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_X < \|fg\|_X &\leq \|f\|_{X_O^\Phi} \cdot \text{máx}\left\{1, \left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_X\right\} \\ &= \|f\|_{X_O^\Phi}\left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_X \leq \left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_X, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. □

Proposición 6.6. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ con quasi-norma estrictamente monótona. Sea Φ una N-función con la propiedad Δ_2. Entonces:*

(1) Si $f \in X_L^\Phi \subseteq X_O^\Phi$, con $\|f\|_{X_O^\Phi} \leq 1$, entonces $\|\Phi(|f|)\|_X \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$.

(2) Si $f \in X_L^\Phi$ no es la función nula, entonces

$$\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{X_O^\Phi}}\right)\right\|_X \leq 1.$$

Demostración. Basta repetir la prueba de la Proposición 6.3 ya que es ahora la propieda Δ_2 la que nos permite usar la Proposición 6.5 que tiene la misma tesis que la Proposición 6.2. □

Concluimos entonces, de las Proposiciones 6.5 y 6.6, que si $\Phi \in \Delta_2$ y $\|\cdot\|_X$ es estrictamente monótona, entonces $\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \|f\|_{X_O^\Phi}$, lo que dejamos plasmado como teorema a continuación.

Teorema 6.7. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ con quasi-norma estrictamente monótona y sea $K \geq 1$ una constante quasi-triangular. Sea Φ una N-función con la propiedad Δ_2. Entonces las quasi-normas de Orlicz y Luxemburg son equivalentes en X_L^Φ. De hecho*

$$\|f\|_{X_L^\Phi} \leq \|f\|_{X_O^\Phi} \leq 2K\|f\|_{X_L^\Phi}$$

para toda $f \in X_L^\Phi$.

6.3. Propiedad σ-Fatou y q-renormado estrictamente monótono

En esta sección vamos a ver que con la propiedad σ-Fatou se puede rebajar la hipótesis de que la norma sea estrictamente monótona. Esto se consigue con el concepto de *q-renormado estrictamente monótono.*

Antes de ver esto observamos que cuando tenemos dos quasi-normas equivalentes en X, entonces las respectivas quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg asociadas también lo son.

Proposición 6.8. *Sea Φ una N-función y X un ideal de $L^0(\mu)$. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos quasi-normas equivalentes definidas sobre X. Denotemos por X_1 y X_2 a los espacios quasi-normados de funciones $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ respectivamente. Entonces:*

(1) Las quasi-normas de Luxemburg $\|\cdot\|_{X_1{}_L^\Phi}$ y $\|\cdot\|_{X_2{}_L^\Phi}$ son equivalentes.

(2) Las quasi-normas de Orlicz $\|\cdot\|_{X_1{}_O^\Phi}$ y $\|\cdot\|_{X_2{}_O^\Phi}$ son equivalentes.

Demostración. Dado que las quasi-normas dadas en X son equivalentes tomemos $M \geq 1$ tal que $M^{-1}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq M\|\cdot\|_1$. De la definición es claro que se tiene $\widetilde{X_1}^\Phi = \widetilde{X_2}^\Phi = \widetilde{X}^\Phi$ y $X_1{}_L^\Phi = X_2{}_L^\Phi = X_L^\Phi$, es decir, que las quasi-normas equivalentes nos dan clases de Orlicz y espacios de Luxemburg iguales.

(1) Tomemos $f \in X_L^\Phi$ y $c > 0$ de modo que $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{X_2} \leq 1$. Entonces, por (2.2), tenemos que

$$\left\|\Phi\left(\frac{1}{M}\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{X_1} \leq \left\|\frac{1}{M}\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{X_1} = \frac{1}{M}\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{X_1} \leq \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{X_2} \leq 1,$$

por lo que $\|f\|_{X_{1L}^{\Phi}} \leq Mc$. Tomando el ínfimo, en las $c > 0$ anteriores, se obtiene entonces que $\|f\|_{X_{1L}^{\Phi}} \leq M\|f\|_{X_{2L}^{\Phi}}$. Sea ahora $c > 0$, con $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\|_{X_1} \leq 1$. Podemos repetir el mismo argumento que antes teniendo en cuenta ahora que $M^{-1}\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$, lo que nos lleva a $\|f\|_{X_{2L}^{\Phi}} \leq M\|f\|_{X_{1L}^{\Phi}}$ quedando probada la equivalencia entre las quasi-normas de Luxemburg. Observamos que en la demostración de este apartado tan solo necesitamos que Φ sea una función de Young.

(2) Ahora consideramos $f \in X_O^{\Phi}$ y $g \in \widetilde{X_1}^{\hat{\Phi}}$, con $\left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_{X_1} \leq 1$. De nuevo, por (2.2), se tiene que

$$\left\|\hat{\Phi}\left(\frac{|g|}{M}\right)\right\|_{X_2} \leq \left\|\frac{1}{M}\hat{\Phi}(|g|)\right\|_{X_2} = \frac{1}{M}\left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_{X_2} \leq \left\|\hat{\Phi}(|g|)\right\|_{X_1} \leq 1.$$

Entonces

$$\|fg\|_{X_1} \leq M\|fg\|_{X_2} = M^2\left\|f\frac{g}{M}\right\|_{X_2} \leq M^2\|f\|_{X_{2O}^{\Phi}}$$

por la definición de la norma de Orlicz en X_2. Tomando ahora el supremo en las g de la forma anterior, se tiene que $\|f\|_{X_{1O}^{\Phi}} \leq M^2\|f\|_{X_{2O}^{\Phi}}$. Como también $\|\cdot\|_2 \leq M\|\cdot\|_1$ podemos repetir el argumento anterior intercambiando los papeles de X_1 y X_2 para obtener que $\|f\|_{X_{2O}^{\Phi}} \leq M^2\|f\|_{X_{1O}^{\Phi}}$. En consecuencia, se tiene la equivalencia entre las quasi-normas de Orlicz con

$$\frac{1}{M^2}\|f\|_{X_{1O}^{\Phi}} \leq \|f\|_{X_{2O}^{\Phi}} \leq M^2\|f\|_{X_{1O}^{\Phi}}$$

para toda $f \in X_O^{\Phi}$. □

Motivados por este hecho se introduce la siguiente definición.

Definición 6.9. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-normado de funciones sobre una medida μ. Decimos que $\|\cdot\|_X$ tiene un *q-renormado estrictamente monótono* si existe una quasi-norma estrictamente monótona $|||\cdot|||_X$ que convierte a X en un espacio quasi-normado de funciones y que es equivalente con $\|\cdot\|_X$. Es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1\|f\|_X \leq |||f|||_X \leq C_2\|f\|_X$, para todo $f \in X$.

Gracias a la Proposición 6.8 y a lo que sabemos que ocurre con los espacios quasi-normados con quasi-norma estrictamente monótona con la propiedad σ-Fatou o con una N-función con la propiedad Δ_2, podemos dar versiones más débiles de los Teoremas 6.4 y 6.7.

Teorema 6.10. *Sean Φ una N-función y $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ, con la propiedad σ-Fatou, y tal que $\|\cdot\|_X$ posee un q-renormado estrictamente monótono. Entonces $X_L^{\Phi} = X_O^{\Phi}$ y las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes.*

Teorema 6.11. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ tal que $\|\cdot\|_X$ posee un q-renormado estrictamente monótono. Sea Φ una N-función con la propiedad Δ_2. Entonces las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes en el espacio X_L^Φ.*

Capítulo 7

Condiciones suficientes para el q-renormado estrictamente monótono

Los Teoremas 6.10 y 6.11 del capítulo anterior nos muestran la importancia de caracterizar cuándo un espacio quasi-Banach de funciones posee un q-renormado estrictamente monótono. Este problema que sepamos, no está resuelto, aunque sí podemos dar condiciones suficientes muy generales que nos garanticen la existencia de un q-renormado estrictamente monótono.

7.1. Condición suficiente con p-convexidad

Comenzamos observando lo siguiente. Si $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y $T : X \to \mathbb{R}$ es un operador lineal, acotado y estrictamente positivo, es decir, que $T(|f|) > 0$ para toda $0 \neq f \in X$, entonces se tiene siempre un q-renormado estrictamente monótono de $\|\cdot\|_X$.

Proposición 7.1. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea $T : X \to \mathbb{R}$ es un operador lineal, acotado y estrictamente positivo. Entonces*

$$|||f|||_X := \|f\|_X + T(|f|)$$

es un q-renormado estrictamente monótono de $\|\cdot\|_X$.

Demostración. La equivalencia entre $\|\cdot\|_X$ y $|||\cdot|||_X$ es clara ya que

$$\|f\|_X \leq |||f|||_X \leq (1 + \|T\|)\|f\|_X,$$

para todo $f \in X$. Para ver la monotonía estricta consideramos $f, g \in X$ con $|f| < |g|$. Entonces $T(|f|) < T(|g|)$ ya que $T(|g|) - T(|f|) = T(|g| - |f|) > 0$ por ser el operador lineal y estrictamente positivo. $\square$

Antes de continuar, volvamos al espacio $L^1_w(m)$ asociado a una medida vectorial numerablemente aditiva $m : \Sigma \to Y$. Dicho espacio posee la propiedad σ-Fatou, como ya vimos en la Proposición 4.16. Sin embargo, la norma $\|\cdot\|_{L^1_w(m)}$ no es por lo general estrictamente monótona. Si tomamos μ una medida de control de Rybakov de m, notamos que el operador $T : L^1_w(m) \to \mathbb{R}$, definido por $Tf = \int_\Omega f \, d\mu$, es acotado y estrictamente positivo. En consecuencia, la norma $\|\cdot\|_{L^1_w(m)}$ posee un q-renormado estrictamente monótono.

Corolario 7.2. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Entonces $\|\cdot\|_{L^1_w(m)}$ tiene un q-renormado estrictamente monótono dado por*

$$|||f|||_{L^1_w(m)} = \|f\|_{L^1_w(m)} + \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Demostración. Basta notar que $T(|f|) = \|f\|_{L^1(\mu)}$ siendo $Tf = \int_\Omega f \, d\mu$, para todo $f \in L^1_w(m)$. $\square$

En consecuencia, dada una N-función Φ se deduce la igualdad de los espacios de Orlicz y Luxemburg construidos sobre $L^1_w(m)$, como ya comentamos justamente antes de la Proposición 5.15.

Corolario 7.3. *Sea $m : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva y sea Φ una N-función. Entonces*

$$L^\Phi_w(m) = L^1_w(m)^\Phi_O$$

con normas equivalentes.

Demostración. Basta usar el Teorema 6.10. $\square$

A continuación recuperamos las p-potencias de un espacio quasi-Banach de funciones consideradas en el Capítulo 1. Gracias a ellas podemos probar que la p-convexidad de un espacio quasi-Banach de funciones garantiza la existencia de un q-renormado estrictamente monótono.

Proposición 7.4. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ que es p-convexo para algún $0 < p < \infty$. Entonces $\|\cdot\|_X$ tiene un q-renormado estrictamente monótono.*

Demostración. Como X es p-convexo sabemos entonces que $(X_{[p]}, \|\!| \cdot \|\!|_{[p]})$ es un espacio de Banach de funciones (ver Sección 1.2). Recordemos que $\|\!|\cdot\|\!|_{X_{[p]}}$ es la norma definida en la Definición 1.22. Por tanto, el Corolario 1.38 nos muestra que su dual de Köthe es saturado. Entonces podemos encontrar $f_0 \in (X_{[p]})'$ estrictamente positiva. Por tanto, tenemos que

$$\left|\int_\Omega h f_0 \, d\mu\right| \leq \int_\Omega |h| f_0 \, d\mu \leq \|\!|h\|\!|_{X_{[p]}} \|f_0\|_{(X_{[p]})'} \leq \|h\|_{X_{[p]}} \|f_0\|_{(X_{[p]})'}, \tag{7.1}$$

para toda $h \in X_{[p]}$ gracias a la desigualdad de Hölder (Teorema 1.34) y al hecho de que $\|\!| \cdot \|\!|_{X_{[p]}} \leq \| \cdot \|_{X_{[p]}}$ (ver Teorema 1.23). Entonces, dada $f \in X$, la desigualdad (7.1) nos muestra, tomando $h = |f|^{1/p} \in X_{[p]}$, que

$$\left(\int_\Omega |f|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\||f|^p\|_X \|f_0\|_{(X_{[p]})'}\right)^{1/p} = \|f\|_X \|f_0\|^{1/p}_{(X_{[p]})'}. \tag{7.2}$$

Como f_0 es estrictamente positiva entonces

$$\int_\Omega |f|^p f_0 \, d\mu > 0,$$

para cualquier $f \in X$ no nula μ-a.e. Se sigue entonces que

$$\|\!|f\|\!|_X := \|f\|_X + \left(\int_\Omega |f|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p}$$

define una quasi-norma estrictamente monótona sobre X que es equivalente a $\|\cdot\|_X$ ya que la desigualdad de Minkowski para los espacios $L^p(\mu)$ nos garantiza que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |f+g|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p} &\leq \left(\int_\Omega |f|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq K \left[\left(\int_\Omega |f|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p f_0 \, d\mu\right)^{1/p}\right]\end{aligned}$$

para cualquier $K \geq 1$, deduciéndose así que $\|\!| \cdot \|\!|_X$ es una quasi-norma con la misma constante quasi-triangular que $\| \cdot \|_X$. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que todos los espacios de Banach de funciones X sobre una medida μ admiten un q-renormado estrictamente monótono ya que la desigualdad triangular que satisface la norma de X quiere decir que X es 1-convexo.

7.2. Condición suficiente con p-concavidad

También podemos dar una condición suficiente para la existencia de un q-renormado estrictamente monótono en términos de *p-concavidad*.

Definición 7.5. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea $0 < p < \infty$. Se dice que X es $(p,1)$-*cóncavo* si existe una constante $C \geq 1$ de modo que

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_X^p\Big)^{1/p} \leq C \Big\|\sum_{j=1}^{n} |f_j|\Big\|_X$$

para todos $f_1, \ldots, f_n \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 7.6. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ que es $(p,1)$-cóncavo. Entonces $\|\cdot\|_X$ tiene un q-renormado estrictamente monótono.*

Demostración. Sea $K \geq 1$ una constante quasi-triangular de $\|\cdot\|_X$. Si X es $(p,1)$-cóncavo entonces podemos definir

$$|||f|||_X := \sup\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_X^p\Big)^{1/p} : \sum_{j=1}^{n} |f_j| = |f|,\ f_1, \ldots, f_n \in X\Big\},$$

para cada $f \in X$. Este funcional es evidentemente homogéneo para la multiplicación por escalar. Por un lado, es claro que $\|f\|_X \leq |||f|||_X$. Por otro lado, la $(p,1)$-concavidad nos garantiza que

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_X^p\Big)^{1/p} \leq C \Big\|\sum_{j=1}^{n} |f_j|\Big\|_X$$

por lo que, tomando el supremo en las $f_1, \ldots, f_n \in X$, con $\sum_{j=1}^{n} |f_j| = |f|$, deducimos que

$$|||f|||_X \leq C\|f\|_X.$$

Es decir, que $\|\cdot\|_X$ y $|||\cdot|||_X$ son equivalentes. De aquí se deduce entonces que $|||f|||_X = 0$ si y solo si $f = 0$. También se sigue la desigualdad quasi-triangular ya que dadas $f, g \in X$ tenemos que

$$|||f+g|||_X \leq C\|f+g\|_X \leq C\,K\big(\|f\|_X + \|g\|_X\big) \leq C\,K\big(|||f|||_X + |||g|||_X\big).$$

También resulta claro de la definición que si $|f| \leq |g|$ μ-a.e., entonces se tiene $|||f|||_X \leq |||g|||_X$. Por lo tanto, acabamos de ver que $|||\cdot|||_X$ define una quasi-norma reticular en X equivalente con $\|\cdot\|_X$.

Veamos ahora que esta quasi-norma es estrictamente monótona. Supongamos que $f, g \in X$ con $0 \leq f < g$. Entonces $h = g - f$ es estrictamente positiva y está en X ya que, en particular, $h \leq g \in X$. Como esta función h es no nula entonces su quasi-norma es positiva. Podemos tomar entonces $\varepsilon > 0$ verificando $0 < \varepsilon < \|h\|_X^p$. Como $|||f|||_X$ está definida a través del supremo en las descomposiciones de $|f|$, podemos encontrar unas funciones $f_1, \ldots, f_n \in X$, con $|f| = \sum_{j=1}^{n} |f_j|$, verificando que

$$|||f|||_X^p < \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_X^p.$$

Como $0 \leq f < g$ podemos escribir $|g| = |f| + |g - f| = |g - f| + \sum_{j=1}^{n} |f_j|$. De ello deducimos que

$$|||f|||_X^p < \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_X^p < \|h\|_X^p + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_X^p \leq |||g|||_X^p,$$

por lo que, efectivamente, $|||f|||_X < |||g|||_X$. $\square$

Hemos visto en el capítulo anterior que, si X es un espacio quasi-Banach de funciones que posee un q-renormado estrictamente monótono, entonces se tiene garantizada la igualdad de los espacios generalizados de Orlicz y de Luxemburg, teniéndose además la equivalencia de sus respectivas quasi-normas siempre que X tenga la propiedad σ-Fatou. Si X no tiene dicha propiedad pero tomamos una N-función Φ con la propiedad Δ_2, entonces se tiene garantizada, al menos, la equivalencia de las quasi-normas en el espacio pequeño X_L^Φ.

Entonces, ahora que hemos establecido dos condiciones suficientes, en las Proposiciones 7.4 y 7.6, para que un espacio quasi-Banach de funciones tenga un q-renormado estrictamente monótono, obtenemos como corolarios los siguientes resultados.

Corolario 7.7. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio quasi-Banach de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función.*

(1) Si X tiene la propiedad σ-Fatou y es p-convexo para algún $0 < p < \infty$, entonces $X_L^\Phi = X_O^\Phi$ y las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes.

(2) Si X tiene la propiedad σ-Fatou y es $(p,1)$-cóncavo para algún $0 < p < \infty$, entonces $X_L^\Phi = X_O^\Phi$ y las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes.

(3) Si $\Phi \in \Delta_2$ y X es p-convexo para algún $0 < p < \infty$, entonces las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes cuando las restringimos a X_L^Φ.

(4) Si $\Phi \in \Delta_2$ y X es $(p,1)$-cóncavo para algún $0 < p < \infty$, entonces las quasi-normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes cuando las restringimos a X_L^Φ.

En particular, dado que todo espacio de Banach de funciones es 1-convexo, obtenemos también el siguiente resultado como caso particular.

Corolario 7.8. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach de funciones sobre una medida μ y sea Φ una N-función.*

(1) Si X tiene la propiedad σ-Fatou entonces $X_L^\Phi = X_O^\Phi$ y las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes.

(2) Si $\Phi \in \Delta_2$ entonces las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes cuando las restringimos a X_L^Φ.

Finalmente, hemos de mencionar que los espacios quasi-Banach de funciones p-convexos, para algún $p > 0$, son bastante naturales. De hecho, no se conoce, que sepamos, ningún espacio quasi-Banach de funciones que sea no p-convexo para todo $p > 0$. Sin embargo, es cierto que si buscamos entre retículos quasi-Banach sí que es posible encontrar este tipo de ejemplos, como el dado por Kalton en [14, Example 2.4]. De hecho, en el citado artículo están caracterizados los retículos quasi-Banach que son p-convexos para algún $p > 0$. Sin embargo, estos espacios no son el objeto de estudio de este trabajo, y distan mucho de ser espacios quasi-Banach de funciones.

De la misma manera, tampoco es conocida la existencia de un espacio quasi-Banach de funciones que no posea un q-renormado estrictamente monótono, aunque de nuevo, en [23, Example 4] podemos encontrar un retículo quasi-Banach que no posee un q-renormado estrictamente monótono.

Por tanto, si ocurriera que no existen espacios quasi-Banach de funciones que sean no p-convexos para todo $p > 0$ entonces poseer la propiedad σ-Fatou garantizaría siempre la igualdad entre los espacios de Orlicz y Luxemburg con quasi-normas equivalentes. De hecho, aunque no se tuviera la propiedad σ-Fatou siempre tendríamos garantizada la equivalencia entre las quasi-normas en el espacio de Luxemburg cada vez que tomáramos una N-función Φ con la propiedad Δ_2.

Bibliografía

[1] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces*, Academic Press, Londres, 1978.

[2] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis*, Dover Publications Inc, Mineola, Nueva York, 2000.

[3] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press Inc, Nueva York, 1988.

[4] R. del Campo, A. Ferández, I. Ferrando, F. Mayoral, F. Naranjo, *Multiplication operators on spaces of integrable functions with respect to a vector measure*, J. Math. Anal. Appl. 343 (1), (2008), 514-524.

[5] R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, *Orlicz spaces associated to a quasi-Banach function space: applications to vector measures and interpolation*, Collect. Math. 72 (2021), no. 3, 481-499.

[6] R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, E.A. Sánchez-Pérez, *When and where the Orlicz and Luxemburg (quasi-) norms are equivalent?*, J. Math. Anal. Appl. 491 (2020), no. 1, 124302.

[7] G.P. Curbera, *Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices*, Math. Ann. 293, (1992), 317-330.

[8] G.P. Curbera, W.J. Ricker, *The Fatou property in p-convex Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. 328, (2007), 287-294.

[9] O. Delgado, *Banach functions subspaces of L1 of a vector measure and related Orlicz spaces*, Indag. Math. Vol 15(4), (2004), 485-495.

[10] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[11] A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, C. Sáez, E.A. Sánchez-Pérez, *Spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure*, Positivity 10 (2006), 1-16.

[12] I. Ferrando, F. Galaz-Fontes, *Multiplication operators on vector measure Orlicz spaces*, Indag. Math. (N.S.) Vol 20(1), (2009), 57-71.

[13] N.J. Kalton, N.T. Peck, J.W. Roberts, *An F-space Sampler*, Cambridge University Press, Cambridge 1984.

[14] N.J. Kalton, *Convexity conditions for nonlocally convex lattices*, Glasg. Math. J. 23 (2), (1984), 141-152.

[15] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

[16] I. Kluvánek, G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[17] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Nueva York, 1983.

[18] M.A. Krasnosel'skii, Ja.B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, translated from the first Russian edition by Leo F. Boron, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[19] D.R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. 33, (1970), 157-165.

[20] D.R. Lewis. *On integrability and summability in vector spaces*, Illinois J. Math. 16, (1972), 294-307.

[21] W.A.J. Luxemburg, *Banach Function Spaces*, Ph. D. Dissertation, Delft, 1955.

[22] L. Maligranda, *Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Functions Spaces, (2003), 83-120.

[23] L.C. Moore Jr., *Strictly increasing Riesz norms*, Pac. J. Math. 37 (1971), 171-180.

[24] C.P. Niculescu, L-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*, 2nd Edition, Springer International Publishing AG, part of Springer Nauter, 2018.

[25] S. Okada, W.J. Ricker, E.A. Sánchez-Pérez, *Optimal Domain and Integral Extension of Operators Acting in Function Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 180, Birkhäuser Verlag, Basilea, 2008.

[26] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. int'l de l'Acad. Pol. série A 8, (1932), 207-220.

[27] M.M. Rao, Z.D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and applied Mathematics, vol 146, Marcel Dekker, Inc., Nueva York, 1991.

[28] W. Ricker, *Operator algebras generated by commuting projections: A vector measure approach*, Lecture Notes in Mathematics 1711, Springer, Berlin, 1991.

[29] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, D. Reidel Publ. Co. Dordrecht, 1985.

[30] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw Hill, Third Edition, 1987.

[31] A.R. Schep, *Products and factors of Banach function spaces*, Positivity 14 (2), (2010), 301-319.

[32] G.F. Stefansson, *L^1 of a vector measure*, Le Matematiche (Catania) Vol. 48, (1993), 219-234.

[33] A.E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration*, Blaisdell Publ. Co. Nueva York, 1965.

[34] A.C. Zaanen, *Integration*, 2nd rev. ed., North Holland, Amsterdam; Interscience, Nueva York, 1967.