



*Sobre los coeficientes de Taylor de una  
función univalente: de Bieberbach a De  
Branges*

About the Taylor coefficients of a univalent  
function: from Bieberbach to De Branges

Paula Pérez Pacheco

Trabajo Fin de Máster  
Máster en Matemáticas  
Sevilla, 14 de febrero de 2022

DIRIGIDO POR

*Manuel Domingo Contreras Márquez*

*Manuel Domingo Contreras Márquez*  
*Departamento de Matemática*  
*Aplicada II*  
*Universidad de Sevilla*  
*41012 Sevilla, Sevilla*

---

## Resumen • Abstract

---

### *Resumen*

---

*El estudio de las funciones univalentes (holomorfas e inyectivas) en el disco unidad  $\mathbb{D}$ , es un área de investigación ya clásica en Análisis Matemático que continua muy viva a día de hoy. El estudio de este tipo de funciones fue impulsado por la famosa conjetura de Bieberbach de 1916 (demostrada por De Branges en 1984) en la que se centra el presente trabajo.*

*Recordemos que esta conjetura afirma que si  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  es una función analítica e inyectiva en el disco unidad, entonces  $|a_n| \leq n$  para todo número natural  $n$ , alcanzándose la igualdad para algún  $n$  (o equivalentemente para todo  $n$ ) solamente para una rotación de la función de Koebe*

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

*Tras un breve repaso de las propiedades elementales de funciones univalentes, dedicamos un capítulo al desarrollo de la teoría de Loewner, de gran relevancia en esta área y una parte muy fundamental en la demostración de De Branges de la Conjetura de Bieberbach.*

*A continuación, se revisan los polinomios de Jacobi así como numerosas propiedades de los mismos para poder llegar a la demostración del Teorema de Askey-Gasper, un teorema esencial para la prueba de la Conjetura de Bieberbach.*

*Por último, en el cuarto capítulo mostramos que la Conjetura de Milin implica la de Bieberbach y, haciendo uso de las funciones especiales de De Branges, mostramos la veracidad de la Conjetura de Milin.*

**Palabras clave:** *Funciones univalentes – Conjetura de Bieberbach – Teoría de Loewner – Teorema de Askey-Gasper.*

## ***Abstract***

---

*The study of univalent functions (holomorphic and injective) in the unit disk  $\mathbb{D}$ , is a classic area of research in Mathematical Analysis that is still very much alive today. The study of this type of functions was driven by the famous Bieberbach conjecture of 1916 (proved by De Branges in 1984) on which the present work is focused.*

*Recall that this conjecture states that if  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  is an analytic and injective function on the unit disk, then  $|a_n| \leq n$  for every number natural  $n$ , equality being achieved for some  $n$  (or equivalently for all  $n$ ) only for a rotation of the Koebe function*

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

*After a brief review of the elementary properties of univalent functions, we dedicate a chapter to the development of Loewner's theory, of great relevance in this area and a very fundamental part of De Branges' proof of the Bieberbach Conjecture.*

*Next, the Jacobi polynomials are reviewed, as well as numerous properties of them, in order to arrive at the proof of the Askey-Gasper Theorem, an essential theorem for the proof of the Bieberbach Conjecture.*

*Finally, in the fourth chapter we show that the Milin Conjecture implies the Bieberbach Conjecture and, making use of the special De Branges functions, we show the truth of the Milin Conjecture.*

**Keywords:** *Univalent functions – Bieberbach's Conjecture – Loewner's Theory – Askey-Gasper's Theorem.*

---

# Contenido

<b>Resumen/Abstract</b> .....	III
<b>Introducción</b> .....	VII
<b>1. Algunas propiedades elementales de las funciones univalentes en el plano complejo y en el disco unidad</b> .....	1
1.1. La clase $S$ : resultados y ejemplos .....	1
1.1.1. Ejemplos de funciones en la clase $S$ .....	1
1.1.2. Transformaciones que preservan la clase $S$ .....	2
1.2. La clase $\Sigma$ y su relación con la clase $S$ .....	4
1.3. Teorema del área y Teorema de Bieberbach .....	5
1.4. Aplicaciones del Teorema del Bieberbach .....	6
1.4.1. Teorema de recubrimiento .....	6
1.4.2. Teorema de distorsión .....	7
1.4.3. Teorema de crecimiento .....	7
1.5. Funciones convexas y estrelladas .....	8
<b>2. Teoría de Loewner</b> .....	11
2.1. Convergencia del núcleo .....	11
2.2. Densidad de las aplicaciones con un corte simple .....	16
2.3. Cadenas de subordinación y convergencia del núcleo .....	17
2.4. Teoremas de extensión .....	23
2.5. El Teorema de Loewner .....	24
<b>3. Los polinomios de Jacobi y el Teorema de Askey-Gasper</b> .....	29
3.1. Los polinomios de Jacobi .....	29
3.2. El Teorema de Askey-Gasper .....	44
<b>4. El Teorema de De Branges</b> .....	51
4.1. La Conjetura de Milin implica la Conjetura de Bieberbach .....	51
4.2. El sistema de funciones especiales de De Branges .....	58
4.3. Prueba del Teorema de De Branges .....	60
<b>Bibliografía</b> .....	69



---

## Introducción

En el año 1916, Ludwig Bieberbach propuso su famosa conjetura [3]: si  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  es una función analítica e inyectiva en el disco unidad, entonces  $|a_n| \leq n$  para todo número natural  $n$ , alcanzándose la igualdad para algún  $n$  (o equivalentemente para todo  $n$ ) solamente para una rotación de la función de Koebe

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En el artículo [3], Bieberbach usa la notación  $k_n$  para denotar al supremo de  $|a_n|$  en  $S$  (véase la definición de la clase  $S$  en la página 1), probando que  $k_2 = 2$ . En una nota a pie de página escribió: “*Vielleicht ist überhaupt  $k_n = n$* ” (“Quizá, en general,  $k_n = n$ ”). Esta es su famosa conjetura, conocida actualmente como Teorema de De Branges, teorema en que se centra el presente trabajo.

La simple elegancia de este enunciado atrajo el esfuerzo de un número considerable de matemáticos durante gran parte del siglo XX. La Conjetura de Bieberbach pronto se convirtió en uno de los más famosos problemas matemáticos sin resolver. Este problema se enmarca dentro de la teoría geométrica de funciones, un área que *fundó* Riemann alrededor de 1850 con su conocido teorema sobre dominios simplemente conexos en el plano complejo.

Como ya hemos indicado, el propio Bieberbach probó su conjetura para  $n = 2$ , usando el Teorema del área debido a Gronwall (véase el Teorema 1.5). La desigualdad  $|a_2| \leq 2$  pronto se observó que era equivalente a los teoremas de distorsión de Koebe y al Teorema 1/4 de Koebe.

Charles Loewner [12] introdujo en 1923 una nueva herramienta mucho más sofisticada que la usada hasta entonces para atacar la Conjetura de Bieberbach, representando las *funciones univalentes de corte simple* (véase la página 16 para la definición de estas funciones) en términos de ciertas ecuaciones diferenciales. Mostró además que estas funciones son *densas* (en la topología de la convergencia uniforme en compactos) en el conjunto de las aplicaciones univalentes (analíticas e inyectivas), por lo que cualquier cota para los coeficientes de Taylor para esta subclase de funciones univalentes se puede extender al total. Con esta herramienta, Loewner probó la Conjetura de Bieberbach para el tercer coeficiente.

Desde ese año 1923 hasta los años 80, un amplio abanico de matemáticos aportaron nuevos progresos parciales sobre la Conjetura de Bieberbach. Poner aquí la lista

completa sería muy aventurado pero destacamos a algunos de ellos: Littlewood (que obtuvo que  $|a_n| < en$  para todo  $n$ ), Hayman (que probó que existe  $\alpha = \lim_n |a_n|/n$ , que  $\alpha \leq 1$  y con igualdad a 1 solamente para las rotaciones de la función de Koebe), Garabedian and Schiffer (probaron que  $|a_4| \leq 4$ ), Paley, Fekete, Szegö, Jenkins, ...

Otra línea de investigación se centró en buscar otras conjeturas que de ser ciertas implicarían la de Bieberbach. En esta línea trabajaron Robertson, Grunsky o Milin. De hecho, el esquema final de la demostración consistió en probar la Conjetura de Milin que ya era conocido que implicaba la validez de la Conjetura de Robertson, la que a su vez implicaba de la Bieberbach. Pueden verse los detalles de todas estas implicaciones en la sección 4.1.

Finalmente, en un seminario sobre teoría geométrica de funciones celebrado en Leningrado (actual San Petersburgo) en la primavera del año 1984 Louis de Branges anunció que la conjetura de Bieberbach pasaría a ser el *Teorema de De Branges*. En ese momento se distribuyó una síntesis de su argumento por E. G. Emel'anov, G. V. Kuz'mina e I. M. Milin. El camino de su demostración fue completamente inesperado: usaba resultados de teoría de operadores y ciertas funciones especiales. Sin duda, la prueba de De Branges era sorprendentemente *corta* en relación con el gran esfuerzo que se había hecho para intentar probar la Conjetura de Bieberbach. Rápidamente se organizaron jornadas y congresos para el análisis de la demostración celebrados tanto en Europa como en Estados Unidos (destacando en este último el organizado en Purdue University en marzo de 1985 organizado por Baertstein II, Drasin, Duren y Marden). Tras ciertos *retoques* en la demostración de De Branges, ésta fue sometida a publicación en septiembre de 1984 y publicada en 1985 en *Acta Matemática* [6].

En octubre de 1984, Carl H. FitzGerald y Christian Pommerenke enviaron una nueva demostración a la revista *Transactions of the American Mathematical Society* que también salió publicada en 1985 [8]. Esta nueva demostración era sensiblemente más simple que la de De Branges y usaba exclusivamente la teoría de Loewner y ciertas propiedades de los polinomios de Jacobi. El objetivo de esta memoria es presentar una exposición detallada de esta segunda demostración del Teorema de De Branges. Hemos dividido el trabajo en cuatro capítulos. En el primero de ellos enunciamos resultados preliminares de la teoría geométrica de funciones necesarios para poder seguir sin dificultad la construcción de la teoría de Loewner y la demostración del teorema central de nuestro trabajo. Queremos mencionar que todos los resultados que mostramos en este capítulo han sido estudiados por la autora en la asignatura Variable Compleja y Operadores en el Máster en Matemáticas de la Universidad de Sevilla y, por ello, omitimos sus demostraciones.

En los dos siguientes capítulos desarrollamos las herramientas necesarias para entender la demostración del Teorema de De Branges: la teoría de Loewner y los polinomios de Jacobi. Concretamente, en el capítulo 2 presentamos la teoría de *convergencia del núcleo* que relaciona la convergencia de una sucesión de funciones univalentes en la topología de convergencia uniforme en compactos con la geometría de sus imágenes. Estos resultados son fundamentales para el desarrollo de la teoría de Loewner y concluir el capítulo con los resultados que relacionan las cadenas de Loewner con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (véase el Teorema 2.16).

En el capítulo 3, introducimos los polinimios de Jacobi y mostramos las propiedades necesarias para concluir con el Teorema de Askey-Gasper. En este capítulo se concentran los cálculos más tediosos del trabajo.

Finalmente, en el capítulo 4 demostramos el Teorema de De Branges. De hecho, probamos que se verifica la Conjetura de Milin, que a su vez implica la de Roberston y que rápidamente permite concluir que es cierta la Conjetura de Bieberbach. Los detalles de estas relaciones pueden verse en la sección 4.1. Para concluir, las dos últimas secciones del capítulo 4 contienen la demostración de la validez de la Conjetura de Milin haciendo uso de las dos herramientas desarrolladas con anterioridad.

Notación.

Como es habitual denotamos por  $\mathbb{C}$  al plano complejo. Si  $z_0$  un elemento en  $\mathbb{C}$  y  $r$  un número positivo, denotamos por  $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  al disco abierto de radio  $r$  centrado en  $z_0$ . La clausura de  $D(z_0, r)$  la denotaremos por  $\bar{D}(z_0, r)$ . El disco abierto de centro 0 y radio 1 (disco unidad) lo denotaremos por  $\mathbb{D}$ .

Por otro lado, si  $G$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ , denotamos por  $H(G)$  al conjunto de las funciones holomorfas en  $G$  con valores en  $\mathbb{C}$ .

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Una función  $f$  *univalente* es una función  $f \in H(D)$  que es inyectiva en  $D$ . Una función  $f \in H(D)$  es localmente univalente si para cada punto  $z \in D$  tiene un entorno  $V$  tal que  $f$  restringida a  $V$  es univalente. Si  $f$  es holomorfa, la univalencia local es equivalente a la condición  $f'(z) \neq 0$ , para todo  $z \in D$ .

Por lo tanto, una función localmente univalente preserva ángulos y orientación. Por esta razón es costumbre llamar a las funciones univalentes como *aplicaciones conformes* o *equivalencias conformes*.

Uno de los resultados básicos en la teoría de las funciones univalentes en una variable es, sin duda, el *Teorema de Representación de Riemann* que establece la existencia, para cada dominio  $\Omega$  simplemente conexo estrictamente contenido en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , de una función  $f$ , holomorfa e inyectiva en el disco unidad  $\mathbb{D}$  que verifica  $f(\mathbb{D}) = \Omega$ . Más aún, esta aplicación de  $\mathbb{D}$  sobre  $\Omega$  está unívocamente determinada, para cada  $w_0 \in \Omega$ , por las condiciones  $f(0) = w_0$  y  $f'(0) > 0$  (entendiendo que esta segunda condición significa que  $f'(0)$  es un número real positivo). A tal función se la conoce como *la transformación de Riemann sobre el dominio  $\Omega$*  (centrada en  $w_0$ ).

Recordemos que el plano complejo entero no puede ser conformemente equivalente al disco unidad  $\mathbb{D}$  por el Teorema de Liouville, aunque estos dominios son homeomorfos.



# Algunas propiedades elementales de las funciones univalentes en el plano complejo y en el disco unidad

En este capítulo se muestra una breve introducción a las nociones básicas sobre la clase  $S$  de funciones univalentes normalizadas en el disco unidad, algunos ejemplos de funciones en la clase  $S$  y se recogen algunos resultados clásicos y relevantes como el Teorema del área y los Teoremas de crecimiento y distorsión. La mayoría de ellos se han estudiado en la asignatura Variable Compleja y Operadores del Máster en Matemáticas de la Universidad de Sevilla. De ahí que omitamos sus demostraciones. Pueden verse sus demostraciones en una amplia variedad de libros, por ejemplo, [4, 7, 13].

El contenido de este capítulo era bien conocido en el primer tercio del siglo XX.

## 1.1. La clase $S$ : resultados y ejemplos

Siguiendo la notación habitual denotamos por  $S$  al conjunto de funciones  $f$  univalentes en  $\mathbb{D}$ , normalizadas por las condiciones  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 1$ .

Toda función univalente en el disco unidad puede normalizarse de manera que obtengamos una función en la clase  $S$ . En efecto, recordemos que dada una función  $g$  univalente en  $\mathbb{D}$ , la función  $h = (g - g(0))/g'(0) \in S$ . Por ello, las propiedades que mostremos en este y los siguientes capítulos para la clase  $S$  se extienden sin dificultad a cualquier función univalente.

Una función  $f \in S$  cuenta con una expansión de la serie de Taylor de la forma

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots, \quad |z| < 1.$$

### 1.1.1. Ejemplos de funciones en la clase $S$

- (1) La *función identidad*,  $I(z) = z$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , es un ejemplo claro de una función en la clase  $S$ . De hecho, como consecuencia del Lema de Schwarz, resulta ser la única función en la clase  $S$  que transforma el disco unidad en el disco unidad.

- (2) La *función del semiplano*:  $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ,  $z \in \mathbb{D}$  transforma el disco unidad  $\mathbb{D}$  conformemente en el semiplano  $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$  que es un dominio convexo. Siendo una transformación de Möbius (no constante), es claro que  $h$  es univalente en  $\mathbb{D}$ . Puesto que está normalizada, se tiene que  $h \in S$ .
- (3) La *función sobre la banda*:  $s(z) = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{1+z}{1-z} \right]$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , (donde  $\log$  denota el logaritmo principal) también pertenece a la clase  $S$ . Más aún,  $s(\mathbb{D})$  es una banda horizontal por lo que, como en el ejemplo anterior, se tiene un dominio convexo. Concretamente,  $s(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi/4 < \operatorname{Im}\{w\} < \pi/4\}$ .
- (4) Uno de los ejemplos más importantes de una función en  $S$  es la *función de Koebe*:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.1)$$

Esta función transforma conformemente el disco unidad sobre el plano complejo excepto la semirecta en el eje real negativo que va desde  $-\infty$  hasta  $-1/4$ . Por lo tanto,  $K(\mathbb{D}) \supset D(0, \frac{1}{4})$ . Esta función de Koebe también se puede escribir:

$$k(z) = \frac{1}{4} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}.$$

- (5) La función  $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$  es la raíz cuadrada de la función de Koebe. Transforma el disco unidad  $\mathbb{D}$  en el plano complejo menos las dos semirrectas  $\frac{1}{2} \leq x < \infty$  y  $\infty < x \leq -\frac{1}{2}$ . Efectivamente  $f(0) = 1 - f'(0) = 0$ . Veamos que es univalente, para ello sean  $z, w \in \mathbb{D}$ :

$$\frac{z}{1-z^2} = \frac{w}{1-w^2} \Leftrightarrow z - zw^2 = w - z^2w \Leftrightarrow zw(z-w) = w-z$$

de donde si  $z \neq w$ , tenemos que  $zw = -1$  y esto no se da porque  $|z| < 1$  y  $|w| < 1$ .

La suma de dos funciones de  $S$  no es necesariamente univalente. Por ejemplo, sean  $f_1(z) = \frac{z}{1-z}$  y  $f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$ . Veamos que la suma de ambas no es univalente, para ello basta ver que no es localmente univalente justificando que hay un punto del disco unidad donde la función suma se anula:

$$(f_1 + f_2)'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-iz)^2} = 0 \Leftrightarrow (1-iz)^2 = -(1-z)^2 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(1+i)$$

Luego la suma no es univalente.

### 1.1.2. Transformaciones que preservan la clase $S$

Hay varias transformaciones que sí preservan la univalencia (y la normalización) y permiten construir más ejemplos de funciones en la clase  $S$ . Algunas de ellas, son las siguientes:

1. *Conjugación.* Si  $f \in S$ ,  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ , entonces, la *conjugada de  $f$* ,  $\bar{f}$ , definida por  $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{a}_n z^n \in S$ .
2. *Rotación.* Si  $f \in S$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ , la *rotación*  $R_\theta f(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$  pertenece a  $S$ .
3. *Dilatación.* Si  $f \in S$  y  $0 < r < 1$ , la *dilatación*  $D_r f(z) = \frac{1}{r} f(rz) \in S$ .
4. *Transformación del rango.* Si  $f \in S$  y  $\psi$  es una función analítica y univalente en el rango de  $f$ , con  $\psi(0) = 0$  y  $\psi'(0) = 1$ , entonces  $g = \psi \circ f \in S$ . Es evidente que  $g$  es univalente y analítica pues es la composición de funciones univalentes y analíticas, además  $g(0) = \psi(f(0)) = 0$  y  $g'(0) = \psi'(f(0))f'(0) = 1$ .
5. *Transformación del valor omitido.* Si  $f \in S$  y  $f(z) \neq \omega$ , entonces  $g = \frac{\omega f}{\omega - f} \in S$ . De hecho  $g = M \circ f$ , con  $M = \frac{\omega z}{\omega - z}$ . Como  $f(z) \neq \omega$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,  $g$  es holomorfa en el disco unidad, de hecho es univalente.
6. *Automorfismos del disco.* Sea  $f \in S$  y  $a \in \mathbb{D}$ . Consideremos el automorfismo del disco

$$\varphi_a(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

La función

$$f_a(z) = \frac{f \circ \varphi_a(z) - f(a)}{(1 - |a|^2)f'(a)} \in S. \tag{1.2}$$

A las funciones  $f_a$  así definidas (para  $a \in \mathbb{D}$ ), se las llama *transformaciones de Koebe de la función  $f$* .

No tan elemental es el siguiente resultado:

**Teorema 1.1 (Intercambio con  $z^N$  y la clase  $S$ ).** *Sea  $N$  un entero,  $N \geq 2$ , y  $f \in S$ . Entonces existe una función  $g \in S$  tal que*

$$g(z)^N = f(z^N), \quad z \in \mathbb{D}.$$

*Esta función  $g$  satisface*

$$g(e^{2\pi i/N} z) = e^{2\pi i/N} g(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

*La serie de Taylor de  $g$  tiene una expresión de la forma*

$$g(z) = z + a_{N+1} z^{N+1} + a_{2N+1} z^{2N+1} + \dots = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kN+1} z^{kN+1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

*El dominio  $g(\mathbb{D})$  tiene una simetría rotacional de orden  $N$ , es decir,*

$$w \in g(\mathbb{D}) \Leftrightarrow e^{2\pi i/N} w \in g(\mathbb{D}).$$

*Observación 1.2.* La demostración del anterior resultado (con  $N = 2$ ) muestra que si  $g \in S$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $g$  es impar, es decir,  $g(-z) = -g(z)$ , para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

- El dominio  $g(\mathbb{D})$  tiene una simetría rotacional de orden 2, es decir,  $g(\mathbb{D}) = -g(\mathbb{D})$ .
- La serie de Taylor de  $g$  tiene una expresión de la forma

$$g(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

- Existe una función  $f \in S$  tal que

$$g(z)^2 = f(z^2), \quad z \in \mathbb{D}.$$

## 1.2. La clase $\Sigma$ y su relación con la clase $S$

La clase  $\Sigma$  está formada por funciones univalentes en el dominio  $\Delta = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$  con desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1 \zeta^{-1} + b_2 \zeta^{-2} + \dots, \quad \zeta \in \Delta.$$

Como puede observarse las funciones de la clase  $\Sigma$  tienen un polo simple en  $\zeta = \infty$  con residuo igual a 1. También, es claro que, por el Teorema de Liouville, no puede ocurrir que  $g(\Delta) = \mathbb{C}$  para ninguna  $g \in \Sigma$ .

En efecto, si suponemos que existe  $g \in \Sigma$  tal que  $g(\Delta) = \mathbb{C}$ , tendríamos que la función  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  definida por

$$\varphi(z) = \frac{1}{g^{-1}(z)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

es una función holomorfa en el plano complejo (es decir, una función entera) y acotada. Por tanto, sería constante. Esto no es posible ya que  $g$  es univalente en  $\Delta$ .

Al conjunto  $E = E(g)$  de los valores omitidos por una función  $g \in \Sigma$  se le llama *conjunto excepcional*. Nótese que  $E$  es un compacto ya es que es cerrado y acotado puesto que  $g(\Delta)$  es un abierto y  $g$  tiene un polo en  $\infty$ .

**Lema 1.3.** *Para cada  $f \in S$ , la función*

$$g(z) = \{f(1/z)\}^{-1} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \dots$$

*pertenece a  $\Sigma$ . Esta transformación se llama inversión.*

El siguiente resultado muestra que, dado que las funciones de la clase  $\Sigma$  pueden tener ceros, no se puede establecer una correspondencia biyectiva entre la clase  $\Sigma$  y la clase  $S$  a través de la inversión. Sin embargo, una modificación sencilla sí que permite crear funciones en la clase  $S$  a partir de funciones de la clase  $\Sigma$ .

**Lema 1.4.** *Si  $g \in \Sigma$  y  $c \in E(g)$ , entonces*

$$f(z) = \frac{1}{g(1/z) - c}, \quad z \in \mathbb{D},$$

*pertenece a  $S$ .*

### 1.3. Teorema del área y Teorema de Bieberbach

La univalencia de las funciones en la clase  $\Sigma$ , es decir, de funciones holomorfas e inyectivas  $g$  en  $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta| > 1\}$ , con desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}, \quad |\zeta| > 1, \quad (1.3)$$

da lugar a una fuerte restricción en el tamaño de los coeficientes de Laurent  $b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Esto se expresa mediante el *Teorema del área*, el cual es fundamental para la teoría de las funciones univalentes de la clase  $S$ , como veremos en las secciones siguientes. Gronwall [10] demostró el Teorema del área en 1914.

**Teorema 1.5 (Teorema del área).** *Si  $g \in \Sigma$  con desarrollo en serie de Laurent de la forma (1.3). Entonces,*

$$0 \leq \text{Area}(\mathbb{C} \setminus g(\Delta)) = \pi \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right).$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1.$$

*Observación 1.6.* El Teorema del área implica que  $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 1$ . Esta desigualdad no es óptima si  $n \geq 2$ , dado que, si  $g \in \Sigma$  es de la forma (1.3) con  $|b_n| = 1$ , entonces, necesariamente

$$g(\zeta) = \zeta + \lambda n^{-1/2} \zeta^{-n},$$

con  $|\lambda| = 1$ . Pero entonces, su derivada

$$g'(\zeta) = 1 - \lambda n^{1/2} \zeta^{-n-1}$$

es igual a 0 en ciertos puntos de  $\Delta$  si  $n \geq 2$ , luego  $g$  no es univalente y, por tanto, no pertenece a  $\Sigma$ .

No obstante, la desigualdad  $|b_1| \leq 1$  sí es óptima para las funciones de la clase  $\Sigma$ , como se muestra a continuación.

**Corolario 1.7.** *Si  $g \in \Sigma$  como en (1.3), entonces  $|b_1| \leq 1$ , con igualdad si y solo si  $g$  tiene la forma*

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + \lambda/\zeta, \quad |\lambda| = 1.$$

Así,  $E(g)$  es, necesariamente, un segmento rectilíneo de longitud 4.

La principal consecuencia del Teorema del área (y su Corolario 1.7), en relación con el estudio de las funciones en la clase  $S$  es el siguiente teorema, probado por Bieberbach en 1916.

**Teorema 1.8 (Teorema de Bieberbach).** *Sea*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

*una función de la clase  $S$ . Entonces,  $|a_2| \leq 2$ . La igualdad  $|a_2| = 2$  se tiene si y solo si  $f$  es una rotación de la función de Koebe  $k$  definida en (1.1). De hecho, la única función en la clase  $S$  con  $a_2 = 2$  es  $k$ .*

## 1.4. Aplicaciones del Teorema del Bieberbach

El Teorema de Bieberbach (Teorema 1.8) además de darnos una cota para el módulo del segundo coeficiente de Taylor de las funciones de la clase  $S$ , tiene múltiples e importantes aplicaciones como por ejemplo el Teorema de recubrimiento, el Teorema de crecimiento y el Teorema de distorsión.

### 1.4.1. Teorema de recubrimiento

Como primera aplicación del Teorema de Bieberbach, mostraremos un famoso teorema de cobertura debido a Koebe. Cada función  $f \in S$  es una aplicación abierta con  $f(0) = 0$  por lo que su rango contiene un disco centrado en el origen. Ya en 1907, Koebe [11] descubrió que los rangos de todas las funciones en  $S$  contienen un disco común  $|w| < \rho$ , donde  $\rho$  es una constante absoluta. La “función de Koebe” muestra que  $\rho \leq \frac{1}{4}$ . Fue Bieberbach [3] quien, como consecuencia de su Teorema 1.8, probó que, de hecho, se tiene que el disco abierto  $D(0, 1/4)$ , centrado en el origen y con radio  $\frac{1}{4}$ , está contenido en  $f(\mathbb{D})$  para toda  $f \in S$ .

**Teorema 1.9 (Teorema de un cuarto de Koebe.).** *Si  $f \in S$ , entonces  $D(0, \frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$ .*

Nótese que la función de Koebe y sus rotaciones son las únicas funciones en  $S$  que omiten un valor de módulo  $\frac{1}{4}$ . Por lo tanto, el rango de cualquier otra función en  $S$  contiene a un disco de mayor radio.

Debe observarse también que la univalencia en la demostración del Teorema de un cuarto de Koebe es fundamental. Por ejemplo, las funciones analíticas

$$f_n(z) = \frac{1}{n}(e^{nz} - 1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

tienen las propiedades de que  $f_n(0) = 0$  y  $f'_n(0) = 1$ , pero omiten el valor  $-\frac{1}{n}$ , que puede elegirse arbitrariamente cerca del origen.

### 1.4.2. Teorema de distorsión

Una consecuencia importante de la desigualdad de Bieberbach  $|a_2| \leq 2$  es el *Teorema de distorsión de Koebe*, que proporciona cotas superior e inferior para  $|f'(z)|$  cuando  $f \in S$ .

**Teorema 1.10.** *Para toda función  $f \in S$  y todo  $z \in \mathbb{D}$ , se cumple*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}. \quad (1.4)$$

**Teorema 1.11 (Teorema de distorsión).** *Para toda  $f \in S$ ,*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1. \quad (1.5)$$

*Para cada  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq 0$ , la igualdad se da si y solo si  $f$  es una rotación adecuada de la función de Koebe.*

### 1.4.3. Teorema de crecimiento

El Teorema de distorsión se aplicará ahora para obtener cotas superior e inferior para  $|f(z)|$ .

**Teorema 1.12 (Teorema de crecimiento).** *Para toda  $f \in S$ ,*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1. \quad (1.6)$$

*Para cada  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq 0$ , la igualdad se da si y solo si  $f$  es una rotación de la función de Koebe.*

**Teorema 1.13.** *Para cada  $f \in S$*

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r < 1. \quad (1.7)$$

*Para cada  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq 0$ , la igualdad se da si y solo si  $f$  es una rotación de la función de Koebe.*

## 1.5. Funciones convexas y estrelladas

Un conjunto  $E \subset \mathbb{C}$  se dice *estrellado con respecto a un punto*  $w_0 \in E$  si el segmento lineal que une  $w_0$  con cualquier otro punto  $w \in E$  queda dentro de  $E$ . Una función *estrellada* es una aplicación conforme que lleva el disco unidad en un dominio estrellado con respecto al origen.

El conjunto  $E$  se dice *convexo* si es estrellado con respecto a cada uno de sus puntos; esto es, si el segmento lineal que une dos puntos cualesquiera de  $E$  queda totalmente dentro de  $E$ . Una función *convexa* es aquella que lleva el disco unidad conformemente en un dominio convexo.

La subclase de  $S$  compuesta por las funciones convexas la denotaremos por  $C$ , mientras que la subclase de  $S$  formada por las funciones estrelladas la denotaremos por  $S^*$ . Así,  $C \subset S^* \subset S$ . Nótese que la función de Koebe es estrellada pero no es convexa, pues esta lleva el disco unidad en el plano complejo menos la semirrecta  $(-\infty, -\frac{1}{4})$ .

Estrechamente relacionada con las clases  $C$  y  $S^*$ , encontramos la clase  $P$  de todas las funciones  $\varphi$  analíticas con parte real positiva en  $\mathbb{D}$  y cumpliendo  $\varphi(0) = 1$ . De acuerdo con la fórmula de Herglotz, toda  $\varphi \in P$  puede ser representada con una integral de Poisson-Stieltjes:

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t), \quad (1.8)$$

donde  $d\mu(t) \geq 0$  y  $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$ .

Una consecuencia inmediata de la anterior fórmula es la siguiente estimación del crecimiento de las funciones con parte real no negativa:

$$|\varphi(z)| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right| d\mu(t) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \int_0^{2\pi} d\mu(t) = \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \quad (1.9)$$

Haremos uso de esta desigualdad en el desarrollo de la teoría de Loewner. Igualmente, se prueba sin dificultad el siguiente resultado.

**Lema 1.14 (Lema de Carathéodory).** *Si  $\varphi \in P$  y*

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

*entonces  $|c_n| \leq 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Esta desigualdad es óptima para cada  $n$ .*

El siguiente teorema da una descripción analítica de las funciones estrelladas.

**Teorema 1.15.** *Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{D}$ , con  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 1$ . Entonces  $f \in S^*$  si y solo si  $zf'(z)/f(z) \in H(\mathbb{D})$  y  $\operatorname{Re} \{zf'(z)/f(z)\} > 0$ .*

**Teorema 1.16.** *Sea  $f \in H(\mathbb{D})$  con  $f'(0) \neq 0$ . Entonces,  $f \in C$  si y solo si  $1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in H(\mathbb{D})$  y  $\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$ ,  $z \in \mathbb{D}$ .*

Los dos siguientes teoremas nos dan una conexión entre las aplicaciones convexas y estrelladas.

**Teorema 1.17 (Teorema de Alexander).** *Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{D}$ , con  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 1$ . Entonces  $f \in C$  si y solo si  $zf'(z) \in S^*$ .*

Cerca del origen cada función  $f \in S$  está cerca de la aplicación identidad. Es de esperar que  $f$  lleve círculos pequeños  $|z| = \rho$  a curvas con dominios conexos acotados. El siguiente teorema expresa esta noción en términos cuantitativos.

**Teorema 1.18.** *Para todo número positivo  $\rho \leq 2 - \sqrt{3}$ , cada función  $f \in S$  transforma el disco  $|z| < \rho$  en un dominio convexo. Esto es falso para todo  $\rho > 2 - \sqrt{3}$ .*

Ahora volvemos a la Conjetura de Bieberbach para la clase  $S^*$ .

**Teorema 1.19.** *Los coeficientes de cada función  $f \in S^*$  satisfacen  $|a_n| \leq n$  para  $n = 2, 3, \dots$ . La desigualdad estricta se da para todos los  $n$  salvo que  $f$  sea una rotación de la función de Koebe.*

**Corolario 1.20.** *Si  $f \in C$ , entonces  $|a_n| \leq 1$  para  $n = 2, 3, \dots$ . La desigualdad estricta se da para todo  $n$  a menos que  $f$  sea una rotación de la función  $l$  definida por  $l(z) = z(1 - z)^{-1}$ .*

**Teorema 1.21.** *El rango de toda función  $f \in C$  contiene el disco  $|\omega| < \frac{1}{2}$ .*



## Teoría de Loewner

Una de las técnicas más poderosas en la teoría de las funciones univalentes es la *teoría de Loewner* [12], desarrollada a principios de la década de 1920. Loewner fue influenciado por el trabajo de S. Lie en semigrupos asociados a ecuaciones diferenciales. Desde el principio, una de las principales aplicaciones del método de Loewner fue el estudio de la Conjetura de Bieberbach.

A continuación vamos a presentar algunos de los resultados básicos de la teoría de Loewner.

La mayoría de las demostraciones están basadas en los textos [5, 7].

### 2.1. Convergencia del núcleo

Comenzamos esta sección con algunas ideas básicas sobre la *convergencia del núcleo*, un concepto fundamental en el desarrollo de la teoría de Loewner.

**Definición 2.1.** Sea  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de dominios simplemente conexos en el plano, ninguno de ellos igual a  $\mathbb{C}$  y tales que  $0 \in D_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Denotemos por  $\text{Int}(\{D_n\})$  al interior de  $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ .

- Si  $0 \in \text{Int}(\{D_n\})$ , el núcleo,  $D$ , de esta sucesión de dominios se define como el mayor dominio simplemente conexo (con respecto a la inclusión) que contiene a 0 y cumple que si  $K$  es un subconjunto compacto de  $D$ , entonces existe un número natural,  $n_0$ , tal que  $K \subseteq D_n$  para  $n \geq n_0$ .
- Si  $0 \notin \text{Int}(\{D_n\})$ , el núcleo  $D = \{0\}$ .

Veamos que el núcleo está bien definido. Sea  $\varsigma$  el conjunto de dominios  $D$  tales que  $0 \in D$  y todo subconjunto compacto  $K$  de  $D$  está contenido en todos menos un número finito de conjuntos  $G_n$ . Afirmamos que  $G = \bigcup_{D \in \varsigma} D$  pertenece a  $\varsigma$ . Podemos suponer que  $G \neq \{0\}$ .

Ciertamente,  $G$  es un dominio que contiene al 0. Por las definiciones de  $\varsigma$  y  $G$ , sabemos que para cada  $z \in G$  hay un dominio  $D_z \in \varsigma$  tal que  $z \in D_z$ , y hay un disco  $D(z, \rho_z)$  centrado en  $z$  y de radio  $\rho_z$  cuya clausura está contenida en  $D_z$ . Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $G$ , podemos cubrir  $K$  por un número finito de discos  $D(z_j, \rho_{z_j})$ ,  $j = 1, \dots, k$ , tal que  $\overline{D}(z_j, \rho_{z_j}) \subset D_j$  para algunos  $D_j \in \varsigma$ . De nuevo

usando la definición de  $\varsigma$ , tenemos para  $j = 1, \dots, k$ ,  $\overline{D}(z_j, \rho_{z_j}) \subset D_n$ , para todos menos un número finito de enteros  $n$ . Por lo tanto,  $K \subset D_n$  para todos menos un número finito de conjuntos  $D_n$ .

Así, hemos demostrado que  $G \in \varsigma$ , y es evidente que ningún dominio más grande puede pertenecer a  $\varsigma$ .

El Teorema 2.4 permitirá calcular el núcleo  $D$  de una sucesión de dominios simplemente conexos con relativa facilidad. Antes de pasar a enunciarlo y demostrarlo, es necesario introducir la siguiente noción de convergencia.

**Definición 2.2.** *Decimos que la sucesión de dominios simplemente conexos distintos del plano  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $\{0\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$  y núcleo  $D$  converge (en la convergencia de núcleo) a  $D$  si cada subsucesión de  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene también núcleo  $D$ . En este caso, utilizamos la notación  $D_n \rightarrow_N D$ .*

Un ejemplo particularmente sencillo y que nos será de utilidad más adelante es el siguiente:

*Ejemplo 2.3.* Sea  $\{D_n\}$  una sucesión de dominios simplemente conexos en el plano complejo tal que  $0 \in D_n$  y  $D_n \subset D_{n+1}$  para todo  $n$ . Entonces  $D_n \rightarrow_N \bigcup_n D_n$ .

Otra noción de convergencia necesaria para el desarrollo de los contenidos en esta sección es la de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de funciones analíticas en el disco unidad. Para simplificar la notación escribiremos  $f_n \rightrightarrows_{K \in \Omega} f$  para indicar que  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones analíticas en  $\Omega$  que converge uniformemente a  $f$  en cada compacto de  $\Omega$ . Recordemos que esta convergencia implica la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de las derivadas de las funciones a la derivada de la función límite.

Ambas nociones de convergencia quedan relacionadas por el siguiente teorema.

**Teorema 2.4 (Teorema del núcleo de Carathéodory).** *Sean  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de dominios simplemente conexos distintos de  $\mathbb{C}$  que cumplen  $\{0\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ . Sea  $D$  su núcleo. Denotemos por  $f_n$  a la aplicación de Riemann del disco sobre  $D_n$  con  $f_n(0) = 0$  y  $f'_n(0) > 0$ . Entonces,  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$  si y solo si  $D_n \rightarrow_N D \neq \mathbb{C}$ . En este caso,  $D = f(\mathbb{D})$ .*

Observemos que, en el caso de convergencia  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ , se tiene, por el Teorema de Hurwitz (véase la sección 5.1 de [1]), que o bien  $f \equiv 0$  (en cuyo caso,  $D = \{0\}$ ), o bien  $f$  es una aplicación *univalente* de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ , por lo que  $D \neq \{0\}$  es un dominio simplemente conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ .

Tenemos entonces dos posibilidades.

- *La función  $f \equiv 0$ .* En este caso, hemos de probar  $D_n \rightarrow_N \{0\}$ . Observemos que cualquier subsucesión de  $\{f_n\}$  también converge uniformemente en subconjuntos compactos del disco a  $f$ . Por lo tanto, basta comprobar que el núcleo de  $D_n$  es  $\{0\}$ .

Supongamos por contradicción que  $D \neq \{0\}$ . Entonces, existe un disco cerrado  $\overline{D}(0, r)$  centrado en el origen y con radio  $0 < r < 1$  contenido en  $D$ . Pero, en este caso, se tiene que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , se cumple  $\overline{D}(0, r) \subset D_n$ .

Así, podemos considerar las funciones  $g_n(z) = f_n^{-1}(rz)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , que resultan ser holomorfas en  $\mathbb{D}$ , fijan el origen y cumplen  $g_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Una aplicación directa del Lema de Schwarz da lugar a la desigualdad  $|g_n'(0)| = r/|f_n'(0)| \leq 1$ , por lo tanto,  $|f_n'(0)| \geq r$  para todo  $n \geq n_0$ . Pero esto implica que  $f'(0) \neq 0$ , lo que es una contradicción puesto que  $f \equiv 0$  y, por lo tanto,  $f' \equiv 0$ .

El mismo argumento prueba que cualquier subsucesión de  $\{D_n\}$  tiene núcleo  $\{0\}$ , luego  $D_n \rightarrow_N \{0\}$ .

• *La función  $f \not\equiv 0$ .* Sea  $\Omega = f(\mathbb{D})$ . Siendo  $f$  una función holomorfa e inyectiva, se tiene que  $\Omega$  es un dominio simplemente conexo en el plano distinto de  $\mathbb{C}$  (por el Teorema de Liouville aplicado a  $f^{-1}$ ). Tenemos que demostrar que  $D = \Omega$  y que  $D_n \rightarrow_N \Omega$ . Dividimos esta demostración en cinco pasos.

**Primer paso.** Veamos que  $\Omega \subseteq D$ . Para este fin, tenemos que demostrar que si  $K$  es un subconjunto compacto arbitrario de  $\Omega$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , se cumple  $K \subset D_n$ .

Para hacerlo, encerramos  $K$  dentro de una curva suave cerrada y simple  $\gamma$  contenida en  $\Omega \setminus K$ . Dicha curva  $\gamma$  existe pues como  $f^{-1}(K)$  es compacto en  $\mathbb{D}$  basta tomar  $R = \max\{|w| : w \in f^{-1}(K)\} < 1$  y  $\gamma = f(C(0, \frac{R+1}{2}))$ . Sea  $\eta > 0$  la distancia entre  $\gamma$  y  $K$ , de manera que se tiene que si  $w \in K$  y si  $z \in f^{-1}(\gamma)$ , entonces

$$|f(z) - w| \geq \eta.$$

Usando que  $f^{-1}(\gamma)$  es un compacto en  $\mathbb{D}$  y que  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ , concluimos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n \geq n_0$ , entonces, para todo  $z \in f^{-1}(\gamma)$ ,

$$|f_n(z) - f(z)| < \eta.$$

Consecuentemente, se obtiene que, para  $n \geq n_0$  y para todo  $z \in f^{-1}(\gamma)$ ,

$$|f_n(z) - f(z)| = |[f(z) - w] - [f_n(z) - w]| < \eta \leq |f(z) - w|. \quad (2.1)$$

Observemos que, para  $w \in K$ , el número de ceros de la función  $f(z) - w$  es 1, por ser  $f$  univalente. Entonces, usando (2.1) y el Teorema de Rouché (véase la sección 5.2 de [1]), se sigue que el número de ceros de  $f_n(z) - w$  es también 1 para todo  $n \geq n_0$ . Así, para estos valores de  $n$ , se tiene que  $K \subset D_n$ . Por lo tanto,  $\Omega \subset D$ .

**Segundo paso.** Como  $\Omega \subset D$ , se tiene que dado cualquier compacto  $K$  contenido en  $\Omega$ , se cumple que  $K \subset f_n(\mathbb{D})$  para  $n \geq n_K$ , donde  $n_K$  depende solo del compacto  $K$ . Así, si  $n$  es suficientemente grande, la sucesión  $\{f_n^{-1}\}$  está bien definida en subconjuntos compactos de  $\Omega$  y cumple  $|f_n^{-1}| \leq 1$  en el conjunto compacto  $K$ .

Observemos que  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ , donde  $K_n = f(\overline{D}(0, \frac{n-1}{n}))$  son subconjuntos compactos de  $\Omega$  que cumplen  $K_n \subset K_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto, si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\Omega$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset \bigcup_{n=1}^N K_n$ . Usando un argumento diagonal, se sigue que existe una subsucesión  $\{f_{n_k}^{-1}\}$  de  $\{f_n^{-1}\}$  bien definida en  $K$  y una función analítica  $g \in \Omega$  tales que  $f_{n_k}^{-1}$  converge a  $g$  uniformemente en cada conjunto compacto de  $\Omega$ . Es claro que  $g(0) = 0$ . Además,  $g'(0) > 0$  ya que

$$0 < \frac{1}{f'(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{f'_{n_k}(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} g'_{n_k}(0) = g'(0).$$

Así  $g$  no es constante, y por tanto, usando de nuevo el Teorema de Hurwitz se tiene que  $g$  es univalente.

**Tercer paso.** Ahora probaremos que  $g = f^{-1}$ . Para este fin, sea  $z_0 \in \mathbb{D}$  y  $w_0 = f(z_0)$ . Sea  $\delta > 0$  suficientemente pequeño para que el disco cerrado  $\overline{D}(z_0, \delta)$  esté contenido en  $\mathbb{D}$ . Sean  $\gamma = \partial D(z_0, \delta)$  y  $\Gamma = f(\gamma)$ .

Si  $\eta$  denota la distancia entre  $w_0$  y  $\Gamma$ , entonces, claramente,  $|f(z) - w_0| \geq \eta$  para todo  $z \in \gamma$ . Dado que  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ , un argumento similar al usado en el primer paso muestra que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que ambas ecuaciones  $f_n(z) - w_0 = 0$  y  $f(z) - w_0 = 0$  tienen el mismo número de soluciones (que resulta ser 1) en  $D(z_0, \delta)$ .

Concluimos entonces que para cada  $n_k \geq n_0$ , existe un punto  $z_k \in D(z_0, \delta)$  tal que  $f_{n_k}(z_k) = w_0$ . Por lo tanto, usando la sucesión  $\{g_{n_k}\} = \{f_{n_k}^{-1}\}$  en el segundo paso, y el hecho de que  $g_{n_k}$  converge a  $g$  uniformemente en compactos, se tiene que

$$|g_{n_k}(w_0) - g(w_0)| < \delta.$$

Consecuentemente, obtenemos

$$|g(w_0) - z_0| \leq |g(w_0) - g_{n_k}(w_0)| + |z_k - z_0| < 2\delta.$$

Dado que  $\delta$  puede tomarse arbitrariamente pequeño,  $g(w_0) = z_0$ . Puesto  $z_0$  es arbitrario, se deduce que  $g = f^{-1}$ .

Nótese que los argumentos utilizados pueden aplicarse a cualquier subsucesión de  $f_n^{-1}$ , por lo tanto, se tiene que  $f_n^{-1} \rightrightarrows_{K \in \Omega} f^{-1}$ .

**Cuarto paso.** Veamos que  $f(\mathbb{D}) = D$ .

Exactamente el mismo argumento que el utilizado en los pasos segundo y tercero, muestra que existe una función analítica y univalente  $\psi$  en  $D$  con  $|\psi(z)| \leq 1$  para todo  $z \in D$  y tal que  $f_n^{-1} \rightrightarrows_{K \in D} \psi$ . Pero, entonces,  $\psi|_{\Omega} = f^{-1}$ . El principio de unicidad de funciones analíticas muestra que, entonces,  $f^{-1}$  puede extenderse de forma analítica a  $D$  y  $f^{-1} = \psi$  en  $D$ .

Supongamos, para llegar a contradicción, que existe  $w_0 \in D \setminus \Omega$ . Entonces, existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  tal que  $\psi(w_0) = z_0$ . Pero, entonces,  $f(z_0) = w_0$ , luego  $w_0 \in f(\mathbb{D}) = \Omega$ . Esto es una contradicción que muestra que  $\Omega = D$ .

**Quinto paso.** Podemos repetir los argumentos presentados en los pasos anteriores aplicándolos a cualquier subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  de  $\{f_n\}$  y obtener que el núcleo de cualquier subsucesión de  $\{D_n\}$  es  $D = f(\mathbb{D})$ , lo que prueba que  $D_n \rightarrow_N D$ .

Esto concluye la demostración de que si  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ , entonces  $D_n \rightarrow_N D \neq \mathbb{C}$ .

Supongamos, ahora, que  $D_n \rightarrow_N D \neq \mathbb{C}$ . De nuevo, surgen dos posibilidades.

- Si  $D = \{0\}$ , entonces es sencillo demostrar que  $f'_n(0) \rightarrow 0$ . En efecto, si no fuese el caso, existirían  $\rho > 0$  y una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $f'_{n_k}(0) \rightarrow \rho$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Aplicando el Teorema 1/4 de Koebe (Teorema 1.9) a las funciones  $F_k = f_{n_k}/f'_{n_k}(0)$ , que pertenecen a la clase  $S$ , se seguiría que cada dominio  $D_{n_k}$  contiene el disco  $D(0, f'_{n_k}(0)/4)$ , con radio mayor o igual que  $\rho/2$  si  $k$  es suficientemente grande. Por lo tanto, existiría un disco abierto contenido en  $D$ , lo que es una contradicción.

Por otro lado, usando el Teorema de crecimiento (Teorema 1.12) para las funciones  $F_n = f_n/f'_n(0)$  y teniendo en cuenta que si  $K$  es un compacto del disco unidad, entonces existe  $0 < R < 1$  tal que  $|z| \leq R$  para todo  $z \in K$ , obtenemos que, para todo  $z \in K$

$$|f_n(z)| \leq |f'_n(0)| \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \leq |f'_n(0)| \frac{R}{(1 - R)^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, se sigue que  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} 0$ .

- Supongamos, ahora, que  $D$  es un dominio simplemente conexo distinto de  $\mathbb{C}$ .

Veamos, en primer lugar, que la sucesión  $\{f'_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada.

Para ello, argumentamos por contradicción suponiendo que existe una subsucesión para la que se verifica que  $f'_{n_k}(0) \geq k$  para  $k \geq 1$ . De nuevo, una aplicación del Teorema 1/4 de Koebe, implica que  $D(0, k/4) \subset D_{n_k}$ . Por lo tanto, la sucesión  $\{D_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tiene núcleo igual a  $\mathbb{C}$ , lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, existe una constante  $M > 0$  tal que  $f'_n(0) \leq M$  para todo número natural  $n$ .

Considerando las funciones  $F_n = f_n/f'_n(0) \in S$  y aplicando el Teorema de crecimiento, se sigue, como antes, que para todo subconjunto compacto  $K$  del disco unidad y todo  $z \in K$

$$|f_n(z)| \leq M \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \leq M \frac{R}{(1 - R)^2},$$

siendo  $R = \max\{|z| : z \in K\}$ .

Aplicando el Teorema de Montel, se sigue que existen una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y una función analítica  $f$  en el disco unidad que cumplen que  $f_{n_k} \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ .

Basta aplicar la primera parte de la demostración para concluir que  $D_{n_k}$  tiene núcleo  $D = f(\mathbb{D})$ .

El mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier otra subsucesión convergente de  $\{f_n\}$ . Si ocurriese que, para otra subsucesión  $\{f_{n_j}\}$  tal que  $f_{n_j} \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} g$ , donde  $g \neq f$ , se tendría que  $D = f(\mathbb{D}) = g(\mathbb{D})$ . Pero ambas funciones  $f$  y  $g$  son las inversas de las transformaciones de Riemann de  $D$  sobre  $\mathbb{D}$  ( $f(0) = g(0) = 0$  y  $f'(0), g'(0) > 0$ ). Luego  $f = g$  y, por tanto,  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ , donde  $f(\mathbb{D}) = D$ .



Observamos que el Teorema 2.4 no es válido para las aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}$ . De hecho, si  $f_n(z) = z/n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $G_n = f_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , pero  $f_n \rightarrow 0$  la cual no es una función univalente.

## 2.2. Densidad de las aplicaciones con un corte simple

Recordemos que una función  $f \in S$  se denomina *aplicación con cortes* (“slit mapping”, en inglés) si  $f(\mathbb{D})$  es el plano complejo menos una serie de arcos de Jordan (es decir, curvas analíticas simples). Estos arcos deben tender a  $\infty$  porque  $f(\mathbb{D})$  es un dominio simplemente conexo. La función  $f$  se denomina *aplicación con un corte simple* (“single-slit mapping”) si el complementario de  $f(\mathbb{D})$  es un solo arco de Jordan.

El Teorema 2.4 del núcleo de Carathéodory, enunciado y demostrado en la sección anterior, nos permite probar el siguiente resultado que afirma que, con respecto a la convergencia uniforme en conjuntos compactos, el conjunto de aplicaciones con un corte simple es denso en  $S$ . Este resultado tiene una importancia fundamental en el estudio de las propiedades de la clase  $S$  y es un punto de partida en el desarrollo de la teoría de Loewner.

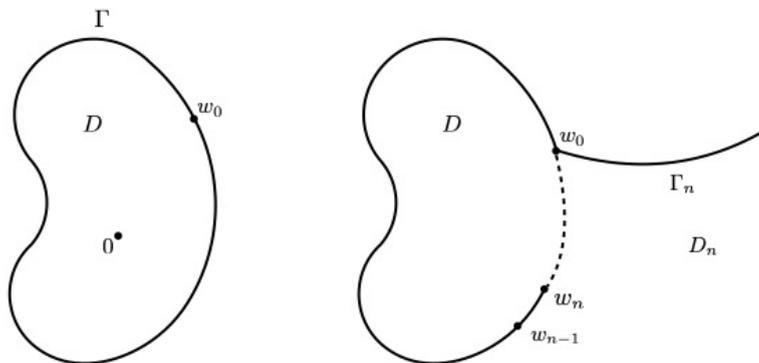
**Teorema 2.5.** *Sea  $f \in S$ . Entonces existe una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$  de aplicaciones con un corte simple tal que  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ .*

*Demostración.* Al considerar dilataciones de  $f$ , es decir, las funciones  $f_r(z) = f(rz)/r$ ,  $0 < r < 1$ , podemos reducirnos al caso en que  $f$  es univalente en  $\overline{\mathbb{D}}$  y, de hecho, podemos suponer que en este caso  $f(\mathbb{D})$  es un dominio acotado por una curva de Jordan  $\Gamma$  (curva cerrada y simple) analítica. Denotemos  $D = f(\mathbb{D})$ .

Tomemos un punto  $w_0 \in \Gamma$  y parametricemos la curva mediante una transformación  $\Gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $w_0 = \Gamma(a) = \Gamma(b)$ .

Sea  $\{t_n\}$  una sucesión creciente en  $[a, b]$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$  y sean  $w_n = \Gamma(t_n)$ .

Consideremos ahora los arcos  $\Gamma_n$  que consisten en un arco contenido en  $\mathbb{C} \setminus D$  de  $\infty$  a  $w_0$ , seguido del arco  $\Gamma([a, t_n])$ ,  $n \geq 1$ .



Es claro que  $\Omega_n = \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$  son dominios simplemente conexos en el plano y, por tanto, podemos considerar las aplicaciones  $f_n$ , univalentes en el disco unidad, con  $f_n(\mathbb{D}) = \Omega_n$ ,  $f_n(0) = 0$  y  $f'_n(0) > 0$ , para cada número natural  $n$ .

De esta construcción, queda geoméricamente claro que  $\Omega = f(\mathbb{D})$  es el núcleo de  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Por lo tanto, por el Teorema 2.4, se tiene que  $f_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ . Puesto que  $f'_n(0) \rightarrow f'(0) = 1$ , se sigue que las funciones  $g_n = f_n/f'_n(0)$  son funciones en la clase  $S$  con un corte simple y cumplen  $g_n \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} f$ .

■

La densidad de las funciones de corte simple del resultado anterior permite reducir algunos problemas de la clase  $S$  a esta subclase densa. Supongamos que  $\psi : S \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua en  $S$ , en el sentido de que si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  y  $f_n \rightarrow f$  localmente uniformemente en  $\mathbb{D}$ , entonces  $\psi(f_n) \rightarrow \psi(f)$ . Obtener información de  $\psi(f)$  para  $f$  de corte simple permitirá obtener información de  $\psi(f)$  para cualquier función de la clase  $S$ . Un ejemplo que será particularmente importante en esta memoria es la función  $\psi(f) = \gamma_n$  siendo  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$ . Veamos que esta función  $\psi$  es continua. Para ello sea  $f_p \rightarrow f$  en la topología de la convergencia uniforme en compactos con  $f_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^p z^n$ . Entonces

$$\gamma_n^p = \frac{f_p^n(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)^+} \frac{f_p(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)^+} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \gamma_n,$$

ya que  $C(0,r)$  es un conjunto compacto. Por tanto, cualquier cota de  $\psi(f) = \gamma_n$  válida para todas las funciones de corte simple será válida para cualquier función de  $S$ .

Esta observación y el Teorema 2.5 reduce probar la Conjetura de Bieberbach a obtener la cota buscada para las funciones de corte simple. Es decir, si como hasta ahora denotamos mediante  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , entonces para cada  $n \geq 2$  se tiene

$$\sup\{|a_n| : f \in S\} = \sup\{|a_n| : f \text{ es una función de corte simple}\}. \quad (2.2)$$

### 2.3. Cadenas de subordinación y convergencia del núcleo

En esta sección se presenta el concepto de *cadena de Loewner* (también llamada *cadena de subordinación univalente*) y se estudian algunas de sus propiedades. Los contenidos están basados en el capítulo 3 de [7].

En la teoría de las cadenas de Loewner, si  $h$  es una función que depende de manera holomorfa de la variable  $z \in \mathbb{D}$  y es también una función de otra variable (real), es costumbre escribir  $h'(z, \cdot)$  en lugar de  $\frac{\partial h}{\partial z}(z, \cdot)$ .

**Definición 2.6.** *La función  $f : \mathbb{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  es una cadena de Loewner si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo  $t \in [0, \infty)$ , la función  $f(\cdot, t)$  es univalente (holomorfa e inyectiva) en  $\mathbb{D}$  y fija el origen.*

2. La función  $f'(0, t)$  es continua en  $[0, \infty)$  y cumple que  $|f'(0, t)|$  es una función estrictamente creciente de  $t$  con  $|f'(0, 0)| > 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} |f'(0, t)| = \infty$ .
3. Para dos números reales cualesquiera  $s$  y  $t$  con  $0 \leq s \leq t < \infty$ , existe una función  $v_{s,t}$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  que cumple  $v_{s,t}(0) = 0$  y tal que  $|v_{s,t}(z)| \leq 1$  para todo  $|z| < 1$ , de manera que

$$f(z, s) = f(v_{s,t}(z), t). \quad (2.3)$$

Nótese que de la anterior propiedad se deduce que  $f(\mathbb{D}, s) \subseteq f(\mathbb{D}, t)$  si  $s \leq t$ .

A las funciones  $v_{s,t}$ ,  $s < t$ , en la definición anterior, se las llama *funciones de transición* o *familia de evolución asociada a la cadena de Loewner*. Formalmente, están definidas por

$$v_{s,t}(z) = f^{-1}(f(z, s), t), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Todas ellas son univalentes en el disco unidad y verifican las hipótesis del Lema de Schwarz. Es habitual utilizar la notación  $f(z, s) \prec f(z, t)$  para denotar que ocurre (2.3) y es equivalente, en términos geométricos, a que  $f(\mathbb{D}, s) \subset f(\mathbb{D}, t)$ . Nótese que, de hecho,  $f(\mathbb{D}, s) = f(\mathbb{D}, t)$  si y solo si  $v_{s,t}(z) = \lambda z$  para algún  $|\lambda| = 1$  (si y solo si  $|v'_{s,t}(0)| = 1$ ). En este caso, se sigue que  $|f'(0, s)| = |f'(0, t)|$ , lo que no puede ocurrir por la condición 2. Por lo tanto,  $|v'_{s,t}(0)| \neq 1$  y  $f(\mathbb{D}, s) \subsetneq f(\mathbb{D}, t)$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ .

Antes de mostrar un ejemplo de una cadena de Loewner, necesitamos hacer una serie de observaciones y enunciar (y demostrar) el Teorema 2.8.

Notemos, en primer lugar, que no hay pérdida de generalidad al suponer que las funciones en una cadena de subordinación satisfacen la siguiente normalización:

$$f(0, t) = 0, \quad f'(0, t) = e^t, \quad t \geq 0,$$

de manera que

$$f(z, t) = e^t [z + a_{2(t)}z^2 + a_{3(t)}z^3 + \dots], \quad z \in \mathbb{D}.$$

De hecho, si  $f(z, t) = a_1(t)z + \dots$  es una cadena de subordinación general y  $t^* = \log \left| \frac{a_1(t)}{a_1(0)} \right|$  y  $\theta(t) = \arg \left[ \frac{a_1(t)}{a_1(0)} \right]$ , entonces

$$f_*(z, t^*) = \frac{1}{a_1(0)} f(e^{-i\theta(t)} z, t)$$

es en una cadena de subordinación normalizada.

Dada una cadena de Loewner  $f(z, t)$ , sea  $f_t$  la función univalente definida por  $f_t(z) = f(z, t)$ . Podemos, entonces, pensar en la cadena de Loewner como una familia parametrizada de funciones univalentes  $\{f_t\}_{t \geq 0}$  en  $\mathbb{D}$ , indexada por tiempo  $t$ :  $f_0$  es el primer elemento de la cadena y cuando  $t$  crece, los dominios simplemente conexos  $f_t(\mathbb{D})$  se expanden para completar  $\mathbb{C}$ . Esto es consecuencia del Teorema 1/4 de Koebe. En efecto, dicho resultado muestra que  $D(0, 1/4) \subseteq e^{-t} f_t(\mathbb{D})$ , por lo que  $D(0, e^t/4) \subseteq f_t(\mathbb{D})$  y  $\bigcup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D}) \supseteq \bigcup_{t \geq 0} D(0, e^t/4) = \mathbb{C}$ .

Ahora enunciaremos y demostramos el anunciado Teorema 2.8 en el que se relacionan los conceptos de cadena Loewner y convergencia del núcleo de Caratheódory. Para este propósito, sea  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  una familia de dominios simplemente conexos distintos de  $\mathbb{C}$  que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para todo  $s \geq 0$ ,

$$0 \in G(s), \quad (2.4)$$

2. Para  $0 \leq s < t < \infty$ ,

$$G(s) \subsetneq G(t). \quad (2.5)$$

3. Se verifican las siguientes condiciones de convergencia en núcleo:

$$\begin{cases} G(t_n) \rightarrow_N G(t_0), & t_n \rightarrow t_0 < \infty, \\ G(t_n) \rightarrow_N \mathbb{C}, & t_n \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.6)$$

Las siguientes estimaciones son muy útiles en muchas situaciones. Entre otras cosas, implican que una cadena Loewner (normalizada) es localmente Lipschitz en  $t$ , localmente uniforme en  $z$ .

**Lema 2.7.** *Si  $f(z, t)$  es una cadena de Loewner normalizada entonces*

$$e^t \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z, t)| \leq e^t \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad |z| < 1, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

$$e^t \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z, t)| \leq e^t \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad |z| < 1, \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

$$|f(z, t) - f(z, s)| \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4} (e^t - e^s), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \quad (2.9)$$

*Demostración.* Obviamente las relaciones (2.7) y (2.8) son consecuencias simples de los Teoremas de crecimiento y distorsión para la clase  $S$ , debido a que  $e^{-t}f(\cdot, t) \in S$  para todo  $t \geq 0$ . Véanse los Teoremas 1.12 y 1.11. Para probar (2.9), sea  $v_{s,t}(z)$  la familia de funciones de transición definidas por  $f(z, t)$ , es decir,

$$f(z, s) = f(v_{s,t}(z), t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

También sea

$$p(z, s, t) = \frac{1 + e^{s-t}}{1 - e^{s-t}} \cdot \frac{z - v_{s,t}(z)}{z + v_{s,t}(z)}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad 0 \leq s < t < \infty \text{ y } p(0, s, t) = 1.$$

Esta función es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y tiene parte real positiva. Obsérvese que

$$\lim_{z \rightarrow 0} p(z, s, t) = p(0, s, t).$$

Por lo tanto se tiene que

$$\frac{1 + e^{s-t}}{1 - e^{s-t}} \cdot \frac{z - v_{s,t}(z)}{z + v_{s,t}(z)} = |p(z, s, t)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

(véase (1.9)) y de esta inecuación anterior se sigue que

$$|z - v_{s,t}(z)| \leq \left| \frac{z + v_{s,t}(z)}{1 + e^{s-t}} \right| \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - e^{s-t}),$$

Esto implica que

$$|z - v_{s,t}(z)| \leq 2|z| \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - e^{s-t}).$$

donde hemos utilizado que  $|v_{s,t}(z)| \leq |z|$  (por el Lema de Schwarz) y que como  $s \leq t$ ,  $|1 - e^{s-t}| = 1 - e^{s-t}$  y  $|1 + e^{s-t}| \geq 1$ .

Usando (2.8) y la relación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} |f(z, t) - f(z, s)| &= |f(z, t) - f(v_{s,t}(z), t)| = \left| \int_{v_{s,t}(z)}^z f'(\zeta, t) d\zeta \right| \\ &\leq |z - v_{s,t}(z)| \frac{2e^t}{(1 - |z|)^3} \leq \frac{8|z|}{(1 - |z|)^4} (e^t - e^s), \end{aligned}$$

probando así (2.9). ■

**Teorema 2.8. (i)** *Sea  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  una familia de dominios simplemente conexos distintos de  $\mathbb{C}$  que satisfacen las condiciones (2.4), (2.5) y (2.6). Para cada  $t \geq 0$ , sea  $g_t(z) = g(z, t)$  la aplicación de Riemann de  $\mathbb{D}$  sobre  $G(t)$  (tal que  $g_t(0) = 0$  y  $g'_t(0) = \alpha(t) > 0$ ). Sea  $\alpha_0 = \alpha(0)$ . Entonces,*

- (a) *La función  $\alpha$  es continua en  $[0, \infty)$ , estrictamente creciente y verifica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$ .*
- (b) *Si  $\beta(t) = \log[\alpha(t)/\alpha_0]$  entonces  $f(z, t) = \alpha_0^{-1}g(z, \beta^{-1}(t))$  es una cadena de Loewner normalizada y  $f(\mathbb{D}, t) = \alpha_0^{-1}G(\beta^{-1}(t))$ .*

**(ii)** *Recíprocamente, sea  $f(z, t)$  una cadena de Loewner normalizada y sean  $G(t) = f(\mathbb{D}, t)$ ,  $t \geq 0$ . Entonces la sucesión de dominios simplemente conexos  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  satisface las condiciones (2.4), (2.5) y (2.6).*

*Demostración.* Para probar (i), sea

$$g(z, t) = \alpha(t)[z + b_2(t)z^2 + \dots], \quad z \in \mathbb{D}.$$

Utilizando el Teorema 2.4 y la condición (2.6), se tiene que  $g_{t_n} \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} g_{t_0}$  cuando  $t_n \rightarrow t_0 < \infty$ . Por lo tanto,  $\lim_{t_n \rightarrow t_0} \alpha(t_n) = \lim_{t_n \rightarrow t_0} g'_{t_n}(0) = g'_{t_0}(0) = \alpha(t_0)$ . Es decir, la función  $\alpha$  es continua en  $[0, \infty)$ .

Usando la relación (2.5), tenemos  $g(z, s) \prec g(z, t)$  para  $0 \leq s \leq t < \infty$ . Por lo tanto, hay una familia de funciones de transición  $v_{s,t}$  para las que se cumple

$$g(z, s) = g(v_{s,t}(z), t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Luego, tomando derivadas con respecto a  $z$ , resulta

$$\alpha(s) = g'(0, s) = g'(0, t)v'_{s,t}(0) = \alpha(t)v'_{s,t}(0). \quad (2.10)$$

Recordando que las funciones de transición son univalentes en  $\mathbb{D}$  y verifican las hipótesis del Lema de Schwarz, se tiene que  $0 < |v'_{s,t}(0)| \leq 1$ . Puesto que la función  $\alpha$  es positiva en  $[0, \infty)$ , por (2.10) se tiene que  $0 < v'_{s,t}(0) \leq 1$ . Pero si  $v'_{s,t}(0) = 1$ , entonces  $v_{s,t}(z) = z$  y  $G(s) = G(t)$ , lo que contradice (2.5). Así,  $0 < v'_{s,t}(0) < 1$  y, por (2.10), concluimos que  $\alpha$  es una función estrictamente creciente en  $[0, \infty)$ .

Supongamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = L < \infty$ . Entonces, las funciones  $g_t/\alpha(t) \in S$  para todo  $t > 0$  y, siendo  $S$  compacta, se sigue que existe  $G \in S$  tal que

$$g_{t_n}/\alpha(t_n) \rightrightarrows_{K \in \mathbb{D}} G$$

para alguna sucesión  $t_n \rightarrow \infty$ . Esto contradice (2.6) ya que, entonces, tendríamos  $G(\mathbb{D}) \neq \mathbb{C}$ . Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$ . Estos argumentos prueban (a).

Probaremos ahora (b). Para este fin, es suficiente observar que  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [\alpha_0, \infty)$  es una función continua estrictamente creciente y cumple  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$ .

Consecuentemente  $\beta$  cumple las mismas condiciones. Utilizando que  $g(z, s) \prec g(z, t)$ , se concluye que  $f(z, t) = \alpha_0^{-1}g(z, \beta^{-1}(t))$  es una cadena de Loewner. Además, si  $\tau = \beta^{-1}(t)$ , entonces  $t = \beta(\tau)$  y  $e^t = \alpha(\tau)/\alpha_0$ . Por lo tanto, obtenemos  $f'(0, t) = \alpha_0^{-1}g'(0, \tau) = \alpha_0^{-1}\alpha(\tau) = e^t$ . Concluimos que  $f(z, t)$  está normalizada y además  $f(\mathbb{D}, t) = \alpha_0^{-1}G(\beta^{-1}(t))$ . Esto completa la prueba de (i).

Veamos ahora (ii). Como se ha mencionado en el párrafo posterior a la definición 2.6, los dominios  $G(t) = f(\mathbb{D}, t)$  cumplen (2.4) y (2.5).

La demostración de que se cumple la primera condición en (2.6), es una consecuencia directa del Lema 2.7. Para concluir que  $G(t_n) \rightarrow_N \mathbb{C}$  cuando  $t_n \rightarrow \infty$ , observemos que las funciones  $e^{-t}f(z, t)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , pertenecen a la clase  $S$ . Por el Teorema 1/4 de Koebe, se tiene que

$$D\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset \frac{f(\mathbb{D}, t)}{e^t}.$$

Por lo tanto,  $f(\mathbb{D}, t) = G(t)$  contiene un disco centrado en el origen y de radio  $e^t/4$ , de modo que  $G(t_n) \rightarrow_N \mathbb{C}$  cuando  $t_n \rightarrow \infty$ , como queríamos demostrar. ■

*Ejemplo 2.9.* Sea  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  un arco de Jordan que no contiene al origen, tal que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Consideremos los dominios  $G(t) = \mathbb{C} \setminus \gamma([t, \infty))$ ,  $0 \leq t < \infty$ . La familia  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  satisface las condiciones (2.4), (2.5) y (2.6) y, por lo tanto, usando el Teorema 2.8, se tienen que las correspondientes aplicaciones de Riemann del disco sobre  $G(t)$  forman una cadena de Loewner (en general no normalizada).

Este ejemplo muestra que cualquier aplicación con un corte simple es el elemento inicial de una cadena Loewner. Por ejemplo,  $f(z, t) = \frac{e^t z}{(1-z)^2}$  es una cadena de Loewner cuyo elemento inicial es la función de Koebe. (Está claro geoméricamente que  $f(z, t) = e^t f(z)$  es una cadena de Loewner si  $f$  es estrellada). De hecho, tenemos el siguiente resultado, que afirma que cualquier función en  $S$  puede ser el elemento inicial de una cadena Loewner.

Necesitamos previamente el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.** *Cualquier sucesión de cadenas normalizadas de Loewner  $\{f_n(z, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  contiene un subsucesión que converge localmente uniformemente en  $\mathbb{D}$  para cada  $t \geq 0$  fijo a una cadena de Loewner.*

*Demostración.* Usando la relación (2.9), deducimos que para cada  $r \in (0, 1)$  y  $z$  tal que  $|z| < r$ ,

$$|f_n(z, t) - f_n(z, s)| \leq \frac{8r}{(1-r)^4} (e^t - e^s), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

La desigualdad superior en (2.8) implica que

$$\begin{aligned} |f_n(z, t) - f_n(w, t)| &\leq |z - w| \int_0^1 |f'((1-\tau)z + \tau w, t)| d\tau \\ &\leq e^t \frac{1+r}{(1-r)^3} |z - w|, \quad |z| \leq r, \quad |w| \leq r, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Las estimaciones anteriores implican que las funciones  $f_n(z, t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son equicontinuas en  $\{(z, t) : |z| \leq 1 - 1/k, 0 \leq t \leq k\}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Aplicando el Teorema de Arzelà-Ascoli en el espacio compacto  $\overline{\mathbb{D}}_{1-1/k} \times [0, k]$ , se concluye que para  $k$  fijo, hay una subsucesión  $\{f_{n_p^k}(z, t)\}_{p \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente en  $\Delta_k = \{(z, t) : |z| \leq 1 - 1/k, 0 \leq t \leq k\}$  a un límite  $\tilde{f}_k(z, t)$  y además

$$\left| f_{n_p^k}(z, t) - \tilde{f}_k(z, t) \right| \leq \frac{1}{k},$$

para todo  $(z, t)$  en  $\Delta_k$ . Tomando en el paso  $k + 1$  una subsucesión de la obtenida en el paso  $k$  obtenemos la subsucesión  $\{f_{n_p}\}_p = \{f_{n_p^p}\}_p$ , que converge puntualmente en  $\{|z| < 1, 0 \leq t < \infty\}$ , y además la convergencia es localmente uniforme en este espacio. En particular, la convergencia es localmente uniforme en  $\mathbb{D}$  para cada  $t \geq 0$  fijo. Dado que la función límite  $f(z, t)$  satisface las condiciones  $f(0, t) = 0$  y  $f'(0, t) = e^t$ , se sigue que  $f(z, t)$  no puede ser constante, y por lo tanto es univalente en  $\mathbb{D}$ , para cada  $t \geq 0$ . También dado que  $f_{n_p}(z, s) \prec f_{n_p}(z, t)$  para  $p = 1, 2, \dots, 0, 0 \leq s \leq t < \infty$ , deducimos que

$$f_{n_p}(z, s) = f_{n_p}(v_{n_p}(z, s, t), t), \quad p = 1, 2, \dots,$$

donde  $v_{n_p}(z, s, t)$  son funciones de Schwarz univalentes. Dado que el conjunto

$$\{v_{n_p}(\cdot, s, t)\}_{p \in \mathbb{N}}$$

es localmente uniforme acotado en  $\mathbb{D}$ , hay una subsucesión de  $\{n_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ , que denotamos de nuevo por  $\{n_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ , tal que  $\{v_{n_p}(z, s, t)\}_{p \in \mathbb{N}}$  converge localmente uniforme en  $\mathbb{D}$  a una función analítica  $v(z, s, t)$  que se ve fácilmente como una función de Schwartz. Además, tomando límites para esta subsucesión, deducimos que  $f(z, s) = f(v(z, s, t), t)$ , que es  $f(z, s) \prec f(z, t)$ . Hemos probado por lo tanto que  $f(z, t)$  es una cadena de Loewner. ■

**Teorema 2.11.** *Para cada función  $f$  en  $S$  hay una cadena de Loewner  $f(z, t)$  tal que  $f(z, 0) = f(z)$  en  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Primero asumimos que  $f$  es holomorfa e inyectiva en un abierto que contiene a  $\overline{\mathbb{D}}$ . Entonces la imagen del círculo unidad es una curva de Jordan cerrada  $C$ . Sea  $G$  el dominio interno de  $C$  y sea  $H$  el dominio externo de  $C$ . Sea  $\hat{\mathbb{C}}$  el plano complejo extendido y  $g$  una aplicación conforme de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  en  $H$  tal que  $g(\infty) = \infty$ . Para  $t \geq 0$  consideramos la curva de Jordan cerrada  $C_t = \{g(e^t e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  y su dominio interno  $G(t)$ . Entonces  $G(0) = G$  y la familia  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  satisface (2.5) y (2.6). Sea  $h(z, t)$  la aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  en  $G(t)$  con  $h(0, t) = 0$ ,  $h'(0, t) = \alpha(t) > 0$ . La unicidad en el Teorema de la aplicación de Riemann implica que  $h(z, 0) = f(z)$ . Por lo tanto, tomando  $\beta(t) = \log[\alpha(t)]$ , deducimos del Teorema 2.8(i)(b) que  $f(z, t) = h(z, \beta^{-1}(t))$  es una cadena de Loewner satisfaciendo  $f(z, 0) = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ .

En el caso general sea  $f \in S$  y sea  $f_n(z) = f(r_n z)/r_n$ , donde  $r_n = 1 - 1/n$  y  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Entonces  $f_n \in S$  y es analítica e inyectiva en un abierto que contiene a  $\overline{\mathbb{D}}$ . Usando el argumento anterior concluimos que  $f_n$  puede integrarse como el elemento inicial de una cadena Loewner  $f_n(z, t)$ . El resultado es ahora una consecuencia del Teorema 2.10. ■

## 2.4. Teoremas de extensión

Una familia de resultados clásicos en teoría geométrica de funciones analizan la posibilidad de extender funciones analíticas a la frontera del dominio donde están definidas. En esta línea destaca el siguiente resultado de Carathéodory. No incluimos las demostraciones de los resultados de esta sección porque haría demasiado extenso este trabajo. Damos referencias concretas para cada una de las afirmaciones que mencionamos y que necesitamos con posterioridad.

**Teorema 2.12 (Teorema de extensión Carathéodory).** *[4, Theorem 4.3.1] Sea  $\Omega$  un dominio acotado y simplemente conexo y sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  la aplicación de Riemann de  $\Omega$  con  $f(0) = 0$  y  $f'(0) > 0$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) la frontera de  $\Omega$  en la esfera de Riemann,  $\partial_\infty \Omega$ , es un conjunto localmente conexo;
- (2)  $\partial_\infty \Omega$  es un camino continuo, es decir, existe una función continua y sobreyectiva  $g : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$ ;
- (3)  $f$  tiene una extensión continua en la clausura de  $\mathbb{D}$ ;
- (4)  $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$  es localmente conexo.

En cuanto a la continuidad de la inversa de una aplicación de Riemann nos hará falta el siguiente resultado:

**Proposición 2.13.** *Sea  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  un arco de Jordan tal que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y sea  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$ . Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  la aplicación de Riemann de  $\Omega$  con  $f(0) = \alpha$  y  $f'(0) > 0$ . Entonces*

1. [4, Proposition 4.3.5] *Si seguimos denotando como  $f$  a la extensión continua de  $f$  al disco unidad cerrado, entonces existe un único punto  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  tal que  $f(\zeta) = \gamma(0)$ .*
2. [5, Proposition 15.3.8] *La función  $g = f^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  puede extenderse continuamente a  $\Omega \cup \{\gamma(0)\}$ .*

## 2.5. El Teorema de Loewner

En esta sección se estudia la ecuación diferencial de Loewner y la caracterización asociada a las cadenas de Loewner en términos de una cierta ecuación en derivadas parciales. Existe una versión de la ecuación diferencial de Loewner válida para todas las cadenas de Loewner, pero aquí solo veremos la versión para una cadena como en el Ejemplo 2.9. Esto es todo lo que se necesita para demostrar el Teorema de De Branges.

Sea entonces  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  un arco de Jordan que no contiene al origen, tal que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para  $0 \leq t < \infty$ , sea  $\gamma_t$  la restricción de  $\gamma$  a  $[t, \infty)$  y consideremos  $\Omega(t) = \mathbb{C} \setminus \gamma_t$ . Como vimos en el Ejemplo 2.9 existe una cadena de Loewner  $f$  tal que  $f_t(\mathbb{C}) = \Omega(t)$  para todo  $t \geq 0$ . En general esta cadena de Loewner no está normalizada. Sea  $v_{s,t}$  la función de transición para la cadena  $f$  y sea  $g_t = f_t^{-1} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{D}$  con  $g_t(\zeta, t) = g_t(\zeta)$ . Recordemos que  $v_{s,t}(z) = f_t^{-1} \circ f_s$ .

Las funciones  $f_s$  y  $f_t$  tienen extensiones continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$  por el Teorema 2.12. Además, por la Proposición 2.13,  $g_t$  tiene una extensión continua a  $\Omega(t) \cup \{\gamma(t)\}$ . Sea  $\lambda(t)$  el único punto en el círculo unidad tal que  $f_t(\lambda(t)) = \gamma(t)$  (aplíquese ahora el primer apartado de la Proposición 2.13). Sea  $C_{s,t}$  el arco cerrado en  $\partial\mathbb{D}$  definido por  $C_{s,t} = \{z \in \partial\mathbb{D} : f_s(z) \in \gamma([s, t])\}$  y sea  $J_{s,t} = g_t(\gamma([s, t]))$ . Entonces  $J_{s,t}$  es un arco de Jordan que se encuentra en  $\mathbb{D}$  excepto su punto final  $\lambda(t)$ . Así  $v_{s,t}$  lleva  $\mathbb{D}$  conformemente en  $\mathbb{D} \setminus J_{s,t}$ . Además, por el Teorema de extensión de Carathéodory 2.12  $v_{s,t}$  tiene una extensión continua a  $\overline{\mathbb{D}}$  que lleva  $C_{s,t}$  en  $J_{s,t}$  y el complementario de  $C_{s,t}$  en el círculo en  $\partial\mathbb{D} \setminus \{\lambda(t)\}$ .

Observemos que  $\lambda(s)$  es un punto interior del arco  $C_{s,t}$  y  $C_{s,t}$  decrece a  $\lambda(s)$  cuando  $t \rightarrow s$ . Similarmente, si  $t$  es fijo y  $s \rightarrow t$ , entonces  $J_{s,t}$  decrece a  $\lambda(t)$ .

**Proposición 2.14.** *Con la notación anterior, la función  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{D}$  es continua.*

*Demostración.* Por el principio de reflexión de Schwarz, la función  $v_{s,t}$  tiene una continuación analítica a  $\mathbb{C} \setminus C_{s,t}$ . Esta continuación, también denotada por  $v_{s,t}$ , es una equivalencia conforme de  $\mathbb{C} \setminus C_{s,t}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{J_{s,t} \cup J_{s,t}^*\}$ , donde  $J_{s,t}^*$  es la reflexión de  $J_{s,t}$  a través del círculo unidad.

Observemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{v_{s,t}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{v_{s,t}(z)} = \frac{1}{v'_{s,t}(0)} = e^{t-s}.$$

El Teorema 1/4 de Koebe implica que dado que  $J_{s,t}$  está contenido en el complementario de  $v_{s,t}(\mathbb{D})$ ,  $J_{s,t} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\zeta : |\zeta| < e^{s-t}/4\}$ . Así  $J_{s,t}^* \subseteq \{\zeta : |\zeta| < 4e^{t-s}\}$ . Por tanto, aplicando el principio del módulo máximo  $|z^{-1}\phi_{st}(z)| \leq 4e^{t-s}$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C} \setminus C_{s,t}$ . Por consiguiente, para cualquier  $T \geq s$ ,  $\{z^{-1}v_{s,t} : s \leq t \leq T\}$  es una familia normal.

Si  $t_k \rightarrow s$  y  $\{v_{s,t_k}\}$  converge a una función analítica  $v$ , entonces  $v$  está acotada en  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\}$ . Por eso,  $\lambda(s)$  es una singularidad evitable y  $v$  es constante. Pero  $v(0) = \lim_{t \rightarrow s} v'(0, s, t) = 1$ . Dado que toda sucesión convergente de esta familia normal debe converger a la función constante 1, tenemos que  $z^{-1}v_{s,t}(z) \rightarrow 1$  en  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\}$  cuando  $t \rightarrow s$ . Así  $v_{s,t}(z) \rightarrow z$  en  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\}$  cuando  $t \rightarrow s$ .

Fijemos  $s \geq 0$ . Ahora mostraremos que  $\lambda$  es continua por la derecha a  $s$ . Si  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\delta > 0$  tal que para  $s < t < s + \delta$ ,  $C_{s,t} \subseteq D(\lambda(s); \varepsilon)$ . Sea  $C$  el círculo  $\partial D(\lambda(s); \varepsilon)$  y sea  $\chi = v_{s,t}(C)$ , una curva de Jordan. Notemos que el interior de  $\chi$  contiene los arcos  $J_{s,t}$  y  $J_{s,t}^*$ ; en particular  $\lambda(t)$  se encuentra en el interior de  $\chi$ . Ahora  $\delta$  se puede elegir lo suficientemente pequeño tal que para  $s < t < s + \delta$ ,  $|v_{s,t}(z) - z| < \varepsilon$  para todo  $z$  en  $C$ . De aquí se sigue que el diámetro de  $\chi$  es menor que  $3\varepsilon$ . Entonces si tomamos un punto  $z$  en  $C$ ,  $|\lambda(s) - \lambda(t)| \leq |\lambda(s) - z| + |z - v_{s,t}(z)| + |v_{s,t}(z) - \lambda(t)| < \varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon$ . Esto prueba la continuidad por la derecha.

La prueba de que  $\lambda$  es continua por la izquierda es similar. ■

**Teorema 2.15.** *Con la notación anterior, la función  $g$  tiene derivadas parciales continuas y, para  $t \geq 0$  y  $\zeta$  en  $\Omega(t)$ , satisface*

$$\frac{\partial g(\zeta, t)}{\partial t} = -g(\zeta, t) \frac{1 + \kappa(t)g(\zeta, t)}{1 - \kappa(t)g(\zeta, t)}, \tag{2.11}$$

donde  $\kappa(t) = \overline{\lambda(t)}$ .

*Demostración.* Veamos en primer lugar que  $g'$  existe y es continua. Dado que  $f$  es una cadena de Loewner,  $g'(\zeta, t)$  existe y es igual a  $[f'(g(\zeta, t), t)]^{-1}$ . Dado que la convergencia de una sucesión de funciones analíticas implica la convergencia de sus derivadas,  $f' : \mathbb{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  es continua. Por tanto  $g'$  es continua.

Manteniendo la notación introducida a lo largo de la sección, recordemos que para  $s \leq t$ ,  $v_{s,t}$  tiene una extensión continua a  $\overline{\mathbb{D}}$  y  $v_{s,t}(C_{s,t}) = J_{s,t}$ . Por otro lado,  $z^{-1}v_{s,t}$  no se anula en  $\mathbb{D}$  y esto permite probar que existe una rama del logaritmo tal que la función

$$\Phi(z) = \log \left[ \frac{v_{s,t}(z)}{z} \right],$$

es analítica y  $\Phi(0) = s - t$ .

Así  $\Phi$  es continua en  $\overline{\mathbb{D}}$  y analítica en  $\mathbb{D}$ . Si  $z \in \partial\mathbb{D} \setminus C_{s,t}$ , entonces  $v_{s,t}(z) \in \partial\mathbb{D} \setminus \{\lambda(t)\}$  y entonces  $\operatorname{Re} \Phi(z) = \log |z^{-1}v_{s,t}(z)| = 0$ . Así la fórmula de Poisson nos da que

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} [\operatorname{Re} \Phi(e^{i\theta})] P_z(e^{i\theta}) d\theta,$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son elegidos para que  $e^{i\alpha}$  y  $e^{i\beta}$  sean los puntos finales de  $C_{s,t}$ . Por la elección de la rama del logaritmo,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} [\operatorname{Re} \Phi(e^{i\theta})] \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta. \quad (2.12)$$

Tenemos también que

$$s - t = \Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \Phi(e^{i\theta}) d\theta.$$

Ahora  $f_t \circ v_{s,t} = f_s$  y entonces  $g_t = v_{s,t} \circ g_s$ . Tomando  $z = g_s(\zeta)$  en (2.12) tenemos que

$$\log \frac{g_t(\zeta)}{g_s(\zeta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \Phi(e^{i\theta}) \left[ \frac{e^{i\theta} + g_s(\zeta)}{e^{i\theta} - g_s(\zeta)} \right] d\theta.$$

Ahora aplicamos el Teorema del valor medio para integrales a las partes real e imaginaria de este integrando para obtener números  $u$  y  $v$  con  $\alpha \leq u, v \leq \beta$  y tal que

$$\begin{aligned} \log \left[ \frac{g_t(\zeta)}{g_s(\zeta)} \right] &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \Phi(e^{i\theta}) d\theta \right] \left[ \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{iu} + g_s(\zeta)}{e^{iu} - g_s(\zeta)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{iu} + g_s(\zeta)}{e^{iu} - g_s(\zeta)} \right\} \right] \\ &= (s - t) \left[ \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{iu} + g_s(\zeta)}{e^{iu} - g_s(\zeta)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{iu} + g_s(\zeta)}{e^{iu} - g_s(\zeta)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Dividamos ambos lados de la ecuación anterior por  $t - s$  y hagamos tender  $t$  a  $s$ . Observemos que  $e^{iu}$  y  $e^{iv}$  convergen ambas a  $\lambda(s)$ . Así

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \log \left[ \frac{g_t(\zeta)}{g_s(\zeta)} \right] &= - \frac{\lambda(s) + g_s(\zeta)}{\lambda(s) - g_s(\zeta)} \\ &= - \frac{1 + \kappa(s)g_s(\zeta)}{1 - \kappa(s)g_s(\zeta)}. \end{aligned}$$

Pero el lado izquierdo es precisamente la derivada por la derecha de  $\log [g_t(\zeta)/g_s(\zeta)]$  con respecto a  $t$ , evaluada con  $t = s$ . Tomando exponenciales y multiplicando por  $g_s(\zeta)$ , se sigue que  $t \rightarrow f_t(\zeta)$  tiene derivada por la derecha en  $t = s$ . Luego, por operaciones del cálculo elemental, tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -g \frac{1 + \kappa g}{1 - \kappa g},$$

donde en la anterior expresión la derivada se entiende que es la derivada por la derecha. La prueba de que la derivada por la izquierda también existe y satisface la anterior ecuación es similar. ■

Finalizamos la sección con el Teorema de Loewner:

**Teorema 2.16 (Teorema de Loewner).** *Si  $f$  es una cadena de Loewner tal que  $f_0$  es una aplicación en una región con un corte simple, entonces existe una función continua  $\kappa : [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{D}$  tal que*

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z} z f'(z, t). \tag{2.13}$$

La ecuación (2.13) se conoce como la ecuación diferencial de Loewner.

*Demostración.* La existencia y continuidad de  $f'$  la tenemos porque dado que  $f$  es una cadena de Loewner y dado que la convergencia de una sucesión de funciones analíticas implica la convergencia de sus derivadas,  $f'$  es continua. Ahora, como  $f_t$  y  $g_t$  son inversas una de la otra, la diferenciabilidad de  $f$  respecto de  $t$  se tiene por el Teorema de la función inversa. Veámoslo.

Definamos  $F : \mathbb{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  por  $F(z, t) = (f(z, t), t)$ . Es fácil ver que  $F(\mathbb{D} \times (0, \infty))$  es el conjunto abierto  $\Lambda = \bigcup_{t>0} (\mathbb{C} \setminus \gamma_t) \times (t, \infty)$  y que  $F$  es una aplicación inyectiva con inversa dada por  $F^{-1}(\zeta, t) = (g(\zeta, t), t)$ . Así  $F^{-1}$  es una función continuamente diferenciable y su Jacobiano es

$$\det \begin{bmatrix} g'(\zeta, t) & 0 \\ \frac{\partial g(\zeta, t)}{\partial t} & 1 \end{bmatrix} = g'(\zeta, t),$$

que nunca se anula. Por tanto,  $F$  es continuamente diferenciable, de lo que se sigue que  $\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}$  existe y es continua.

Ahora sea  $\kappa$  como en el Teorema 2.15 anterior. Nótese que  $\zeta = f(g_t(\zeta), t)$ , luego diferenciando con respecto a  $t$  tenemos que  $0 = f'(g_t(\zeta), t) \frac{\partial g(\zeta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(g_t(\zeta), t)}{\partial t}$ .

Tomando  $z = g_t(\zeta)$ , tenemos que  $0 = f'(z, t) \frac{\partial g(\zeta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(z, t)}{\partial t}$  para todo  $z$  en  $\mathbb{D}$ . Por lo tanto, aplicando (2.11),

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} &= -f'(z, t) \frac{\partial g(\zeta, t)}{\partial t} \\ &= f'(z, t) g(\zeta, t) \left[ \frac{1 + \kappa(t)g(\zeta, t)}{1 - \kappa(t)g(\zeta, t)} \right] \\ &= f'(z, t) z \left[ \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z} \right].\end{aligned}$$

■

## Los polinomios de Jacobi y el Teorema de Askey-Gasper

### 3.1. Los polinomios de Jacobi

En esta sección mostraremos los resultados preliminares para poder demostrar el Teorema de Askey-Gasper, del cual se obtiene la positividad de las sumas de los polinomios de Jacobi, resultado que se utiliza en la prueba del Teorema de De Branges. Incorporar adecuadamente esta propiedad de los polinomios de Jacobi a la teoría de Loewner fue la clave para desbloquear los intentos fallidos hasta los años 80 para obtener una prueba de la Conjetura de Bieberbach.

Un texto clásico de consulta sobre esta familia de polinomios ortogonales es el libro de Szegő [14]. No obstante, el contenido de esta sección lo hemos extraído esencialmente de [9].

Para tratar el teorema en el que se centra esta sección antes debemos incluir la definición de polinomios de Jacobi y algunos resultados relacionados con ellos.

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones medibles definidas en el intervalo  $(-1, 1)$ , definamos el producto interno de  $f$  y  $g$  por

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

Si  $(f, g) = 0$ , decimos que  $f$  y  $g$  son *ortogonales*, y lo denotaremos por  $f \perp g$ .

Para  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$ ,  $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n \geq 0}$  denota la familia de los *polinomios de Jacobi*. Recordemos que cada  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  es un polinomio de grado  $n$  satisfaciendo la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x)P_m^{(\alpha, \beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \delta_{n,m}. \quad (3.1)$$

y la condición de normalidad

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n},$$

donde  $\delta_{n,m}$  es la delta de Kronecker.

Fijados  $\alpha$  y  $\beta$ , un argumento estándar de inducción muestra que tales polinomios existen y que son únicos. Tal construcción proporciona además que la familia  $\{P_j^{(\alpha,\beta)} : j = 0, \dots, n\}$  forman una base de los polinomios de grado menor o igual que  $n$ .

Los polinomios de Jacobi tienen las siguientes propiedades:

**Proposición 3.1.** *Fijemos  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$ .*

(1) *Si  $\pi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  es un polinomio arbitrario ortogonal a  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ , entonces  $\pi_n = c \cdot P_n^{(\alpha,\beta)}$ , donde  $c$  es una constante.*

(2)  *$P_n^{(\alpha,\beta)}$  satisface la siguiente ecuación diferencial*

$$(1 - x^2) y'' + [(\beta - \alpha) - (\alpha + \beta + 2)x] y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0. \quad (3.2)$$

(3) *La solución de la ecuación (3.2) es única en el siguiente sentido: Si  $y$  y  $z$  son dos soluciones linealmente independientes de (3.2), entonces al menos una de ellas no es regular en  $x = -1$  (o en  $x = 1$ ). En particular, si  $y$  y  $z$  son soluciones polinomiales, entonces son linealmente dependientes.*

*Demostración.* (1) Si reescribimos  $\pi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  como  $\sum_{k=0}^n c_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ , entonces  $\pi_n \perp P_0^{(\alpha,\beta)}, \dots, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ , ya que  $\pi_n \perp 1, x, \dots, x^{n-1}$ . Así,  $(\pi_n, P_j) = c_j = 0$ , donde  $0 \leq j \leq n-1$ , y  $\pi_n = c \cdot P_n^{(\alpha,\beta)}$ .

(2) La ecuación (3.2) es equivalente a

$$[y'(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}]' = -n(n+\alpha+\beta+1)y(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \quad (3.3)$$

ya que

$$\begin{aligned} & [y'(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}]' \\ &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta [y''(1-x^2) + y'((\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x)]. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  en el lado izquierdo de (3.3) tenemos una expresión de la forma  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta z$ . Es fácil ver que  $z$  es un polinomio de grado  $n$ . Si probamos que  $z = -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , entonces habremos probado que  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  satisface (3.2).

Primero, probemos que  $z \perp P_j^{(\alpha,\beta)}(x)$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ . Tenemos que

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta x^j z(x) dx = \int_{-1}^1 [y'(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}]' x^j dx.$$

Usando integración por partes en el lado derecho de la igualdad, tenemos

$$- \int_{-1}^1 y'(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} j x^{j-1} dx,$$

e integrando por partes de nuevo, obtenemos

$$j \int_{-1}^1 y \frac{d}{dx} ((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} x^{j-1}) dx = \int_{-1}^1 y (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \pi_j(x) dx$$

donde  $\pi_j(x)$  es un polinomio de grado  $j$ . Dado que  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  es ortogonal a  $1, x, \dots, x^{n-1}$ , la integral en el lado derecho de la ecuación previa es igual a 0 cuando  $0 \leq j \leq n-1$ , esto es,  $z \perp x^j$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ . Por la propiedad (1) tenemos que  $z(x) = c P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , donde  $c$  es una constante. Ahora determinemos la constante  $c$ . Dado que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dx} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} \right]' &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta z \\ &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta c P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \end{aligned}$$

tenemos que

$$c P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) (1-x^2) + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x] \frac{d}{dx} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)).$$

Tomando  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  en la ecuación anterior, tenemos que  $ca_n = -n(n-1)a_n - (\alpha+\beta+2)na_n$  cuando comparamos los coeficientes de  $x^n$  en ambos lados de la ecuación. Es decir,  $c = -n(n+\alpha+\beta+1)$ . Así,  $z = -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ .

(3) En general, si

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0, \quad P_2 z'' + P_1 z' + P_0 z = 0$$

entonces

$$P_2 (y''z - z''y) + P_1 (y'z - z'y) = 0,$$

esto es,

$$P_2 (y'z - z'y)' + P_1 (y'z - z'y) = 0.$$

Tenemos, por tanto, que

$$y'z - z'y = c \exp \left[ - \int_0^x \frac{P_1}{P_2} dt \right],$$

donde  $c$  es una constante. Específicamente, si tomamos  $P_1 = (\beta - \alpha) - (\alpha + \beta + 2)x$ ,  $P_2 = 1 - x^2$ , entonces

$$\begin{aligned} y'z - z'y &= c \exp \left[ - \int_0^x \left( \frac{\beta - \alpha}{1 - t^2} - \frac{(\alpha + \beta + 2)t}{1 - t^2} \right) dt \right] \\ &= c(1 + x)^{-\beta-1}(1 - x)^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

donde  $c$  es una constante, esto es,

$$(1 + x)^{\beta+1} (1 - x)^{\alpha+1} (y'z - z'y) = c.$$

Si  $y$  y  $z$  son regulares en  $x = -1$  (o  $x = 1$ ), entonces  $c = 0$ , es decir,  $y'z - z'y \equiv 0$ . Esto implica que  $y = c_1 z$  donde  $c_1$  es una constante. ■

Puede obtenerse una expresión explícita de los polinomios de Jacobi. Concretamente,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n - k} \binom{n + \beta}{k} \left( \frac{x - 1}{2} \right)^k \left( \frac{x + 1}{2} \right)^{n-k} \quad x \in [-1, 1]. \quad (3.4)$$

Comprobar esta fórmula es largo y tedioso. Nosotros solamente la usaremos en nuestro desarrollo para el caso en que  $\beta = 0$  y  $\alpha$  es un número natural. Por consiguiente, para simplificar la exposición nos limitamos a este caso particular. Fijemos, por tanto,  $\alpha, n \in \mathbb{N}$  y denotemos

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n - k} \binom{n}{k} \left( \frac{x - 1}{2} \right)^k \left( \frac{x + 1}{2} \right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n + \alpha)!}{(n - k)! (\alpha + k)!} \frac{n!}{(n - k)! k!} \left( \frac{x - 1}{2} \right)^k \left( \frac{x + 1}{2} \right)^{n-k} \\ &= \frac{(n + \alpha)! n!}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{((n - k)!)^2 (\alpha + k)! k!} (x - 1)^k (x + 1)^{n-k}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Es claro que  $Q(1) = \binom{n + \alpha}{n} \binom{n}{n} = \binom{n + \alpha}{n}$ . Por tanto, en virtud de los apartados (2) y (3) de la Proposición 3.1 comprobar que  $Q = P_n^{(\alpha, \beta)}$  equivale a comprobar que  $Q$  es una solución de la ecuación (3.2). De hecho, vamos a comprobar que  $Q$  es solución de (3.3). Para no arrastrar tantas constantes como aparecen en la expresión de  $Q$  y simplificar la exposición denotamos

$$R(x) = \sum_{k=0}^n a(k) (x - 1)^k (x + 1)^{n-k}, \quad x \in [-1, 1],$$

siendo  $a(k) = \frac{1}{((n - k)!)^2 (\alpha + k)! k!}$ . La homogeneidad de la ecuación (3.3), justifica que si  $R$  la satisface, también lo hará  $Q$ .

Puesto que

$$R'(x) = \sum_{k=1}^n a(k)k(x-1)^{k-1}(x+1)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} a(k)(n-k)(x-1)^k(x+1)^{n-k-1}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (-1)^{\alpha+1}[R'(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)]' &= \sum_{k=1}^n a(k)k(\alpha+k)(x-1)^{\alpha+k-1}(x+1)^{n+1-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n a(k)k(n+1-k)(x-1)^{\alpha+k}(x+1)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} a(k)(n-k)(\alpha+k+1)(x-1)^{\alpha+k}(x+1)^{n+k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} a(k)(n-k)(n-k)(x-1)^{\alpha+k+1}(x+1)^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo por  $(1-x)^\alpha$  y ajustando los coeficientes en el primer y último sumatorio tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{[R'(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)]'}{-(1-x)^\alpha} &= \sum_{k=1}^n a(k)k(\alpha+k)(x-1)^{k-1}(x+1)^{n+1-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n a(k)k(n+1-k)(x-1)^k(x+1)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} a(k)(n-k)(\alpha+k+1)(x-1)^k(x+1)^{n+k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} a(k)(n-k)(n-k)(x-1)^{k+1}(x+1)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a(k+1)(k+1)(\alpha+k+1)(x-1)^k(x+1)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n a(k)k(n+1-k)(x-1)^k(x+1)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} a(k)(n-k)(\alpha+k+1)(x-1)^k(x+1)^{n+k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n a(k-1)(n-k+1)^2(x-1)^k(x+1)^{n-k}. \end{aligned}$$

Agrupando los sumandos con la misma potencia de  $x - 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{[R'(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)]'}{-(1-x)^\alpha} &= (a(1)(\alpha+1) + a(0)n(\alpha+1))(1+x)^n + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left( (a(k+1)(k+1)(\alpha+k+1) + a(k)(k(n+1-k) + (n-k)(\alpha+k+1)) + \right. \\ &\quad \left. + a(k-1)(n-k+1)^2) (x-1)^k (x+1)^{n+k} \right) + \\ &+ (a(n)n + a(n-1))(x-1)^n. \end{aligned}$$

Finalmente, se comprueba sin dificultad que

$$\begin{aligned} a(1)(\alpha+1) + a(0)n(\alpha+1) &= n(n+\alpha+1)a(0); \\ a(k+1)(k+1)(\alpha+k+1) + a(k)(k(n+1-k) + (n-k)(\alpha+k+1)) \\ &\quad + a(k-1)(n-k+1)^2 = a(n)n(n+\alpha+1) \\ a(n)n + a(n-1) &= n(n+\alpha+1)a(n). \end{aligned}$$

Por tanto,  $R$  es una solución de (3.3) como queríamos demostrar.

En particular, si  $\alpha$  es un número natural se tiene que (3.4) implica que

$$P_n^{(\alpha,0)}(-1) = (-1)^n. \quad (3.5)$$

Los polinomios de Jacobi se pueden expresar en términos de las funciones hipergeométricas. Una *función hipergeométrica* se define como sigue. Para  $|t| < 1$  y  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ,

$${}_2F_1(a, b; c; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{t^k}{k!}, \quad (3.6)$$

si  $d, e \neq 0, -1, -2, \dots$ ,

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(d)_k (e)_k} \frac{t^k}{k!}, \quad (3.7)$$

...

donde  $(m)_k = \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)}$ . De la propiedad  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ , se obtiene que  $(m)_k = m(m+1)\cdots(m+k-1)$ . En particular, si  $m$  es un número entero negativo se tiene que  $(m)_k = 0$  si  $k > -m$ . Esto implica que si en las definiciones anteriores  $a$  es un número entero negativo, entonces las funciones  ${}_2F_1$  y  ${}_3F_2$  son polinomios. Usaremos más adelante esta propiedad.

Es fácil verificar que  ${}_2F_1(a, b; c; t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$t(1-t)y'' + [c - (a+b+1)t]y' - aby = 0, \quad (3.8)$$

y  ${}_3F_2(a, b, c; d, e; t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$t^2(1-t)z''' - [(3+a+b+c)t^2 - (1+d+e)t]z'' + [de - (1+a+b+c+ab+ac+bc)t]z' - abc z = 0. \quad (3.9)$$

En efecto, consideremos el operador  $p = t \frac{d}{dt}$ . Entonces  $p(t^k) = kt^k$ . Sea  $y = {}_2F_1(a, b; c; t)$ . Obviamente,

$$\begin{aligned} p(p+c-1)y &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+c-1)(a)_k(b)_k}{k!(c)_k} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k t^k}{(k-1)!(c)_{k-1}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{s+1}(b)_{s+1} t^{s+1}}{s!(c)_s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a+s)(b+s)(a)_s(b)_s t^{s+1}}{s!(c)_s} \\ &= t(p+a)(p+b)y, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  para todo  $z$ . Así  ${}_2F_1(a, b; c; t)$  satisface la ecuación diferencial

$$[p(p+c-1) - t(p+a)(p+b)]y = 0$$

con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = \frac{ab}{d}$ . Es decir,  ${}_2F_1(a, b; c; t)$  satisface la ecuación diferencial (3.8) con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = \frac{ab}{d}$ .

Similarmente, sea  $z = {}_3F_2(a, b, c; d, e; t)$ , entonces podemos probar que  $z$  satisface la ecuación diferencial

$$[p(p+d-1)(p+e-1) - t(p+a)(p+b)(p+c)]z = 0$$

con  $z(0) = 1$ ,  $z' = \frac{abc}{de}$  y  $z''(0) = \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(d+1)(e+1)}$ . Es decir,  ${}_3F_2(a, b, c; d, e; t)$  satisface la ecuación diferencial (3.9) con  $z(0) = 1$ ,  $z' = \frac{abc}{de}$ , y  $z''(0) = \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(d+1)(e+1)}$ .

Argumentando como en la Proposición 3.1, puede obtenerse que las soluciones de las ecuaciones diferenciales (3.8) y (3.9) que son regulares en cero son múltiplos de las funciones  ${}_2F_1$  y  ${}_3F_2$ . Este hecho será usado repetidas veces en lo que sigue.

**Teorema 3.2.** *Dados  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ ,  $n \geq 1$ , se verifica que*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (3.10)$$

*Demostración.* Como acabamos de ver,  ${}_2F_1(a, b; c; t)$  satisface la ecuación (3.8). Haciendo el cambio de variable  $t = \frac{1-x}{2}$  en (3.8), tenemos

$$(1-x^2)G''(x) - [2c - (a+b+1) + (a+b+1)x]G'(x) - abG(x) = 0$$

donde  $G(x) = {}_2F_1(a, b; c; t)$ . Comparando esta ecuación con (3.2), tenemos que

$$\begin{aligned} ab &= -n(n + \alpha + \beta + 1), \\ a + b &= \alpha + \beta + 1, \\ a + b + 1 - 2c &= \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Una solución de este sistema viene dada por  $a = -n$ ,  $b = n + \alpha + \beta + 1$  y  $c = \alpha + 1$ . Por tanto,

$${}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

es solución de (3.8). Por el tercer apartado de la Proposición 3.1, existe una constante  $c$  tal que

$${}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right) = cP_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

La constante  $c$  se determinada usando que  $F(a, b; c; 0) = 1$  y  $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$ . Luego el teorema está probado. ■

Para  $\lambda > -\frac{1}{2}$ , consideremos ahora la familia de funciones

$$G^{(\lambda)}(x, w) = \frac{1}{(1 - 2xw + w^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x)w^n \quad (3.11)$$

con  $-1 \leq x \leq 1$  y  $|w| < 1$ . Los polinomios  $\left\{P_n^{(\lambda)}\right\}_{n=0}^{\infty}$  se llaman *polinomios ultrasféricos* o *polinomios de Gegenbauer*. Para  $x = 1$  tenemos

$$G^{(\lambda)}(1, w) = \frac{1}{(1-w)^{2\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(1)w^n$$

cuando  $|w| < 1$ . Esto implica que  $P_n^{(\lambda)}(1) = \binom{-2\lambda}{n} = \frac{(2\lambda)_n}{n!}$ .

**Proposición 3.3.** *La función  $G(x, t) = G^{(\lambda)}(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\lambda}$  satisface la ecuación diferencial parcial*

$$(1 - x^2)G_{xx} - x(2\lambda + 1)G_x + t(tG)_t + (2\lambda t)G_t = 0, \quad (3.12)$$

y, por tanto, el polinomio de Gegenbauer  $y = P_n^{(\lambda)}$  satisface la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0. \quad (3.13)$$

*Demostración.* Es inmediato que  $G$  satisface (3.12). Por la definición de  $P_n^{(\lambda)}$ ,  $G(x, t) = G^{(\lambda)}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x)t^n$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} G_x &= \sum_{n=0}^{\infty} (P_n^{(\lambda)}(x))' t^n, & G_{xx} &= \sum_{n=0}^{\infty} (P_n^{(\lambda)}(x))'' t^n, \\ tG_t &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n^{(\lambda)}(x)t^n, & t(tG_t)_t &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n^{(\lambda)}(x)t^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (3.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \{ (1-x^2) (P_n^{(\lambda)}(x))'' - (2\lambda+1)x(P_n^{(\lambda)}(x))' \\ + n^2 P_n^{(\lambda)}(x) + 2\lambda n P_n^{(\lambda)}(x) \} = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $P_n^{(\lambda)}(x)$  satisface la ecuación (3.13). ■

**Teorema 3.4.** Si  $\lambda > \frac{-1}{2}$ ,  $n \geq 1$  y  $-1 \leq x \leq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{(2\lambda)_n P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)}{n! P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1)} \\ &= \frac{(2\lambda)_n}{n!} {}_2F_1 \left( -n, n+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2} \right). \end{aligned}$$

*Demostración.* Tomando  $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$  en el Teorema 3.2, encontramos

$$\frac{P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)}{P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1)} = {}_2F_1 \left( -n, n+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2} \right).$$

Entonces  $P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)$  satisface la ecuación (3.2) cuando  $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ ,

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0$$

Esta es la ecuación (3.13). Por el tercer apartado de la Proposición 3.1, existe una constante  $c$  tal que

$$P_n^{(\lambda)}(x) = c \cdot P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x).$$

La constante  $c$  es determinada por  $P_n^{(\lambda)}(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!}$  y  $P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1) = \binom{n+\lambda-\frac{1}{2}}{n}$ . Esto concluye el teorema. ■

**Teorema 3.5.** *Para  $c < e$ , se tiene que*

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; t) = \frac{\Gamma(e)t^{1-e}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} \int_0^t {}_2F_1(a, b; d; y)(t-y)^{e-c-1}y^{e-1} dy. \quad (3.14)$$

*Demostración.* Fijemos  $t$ . Sea  $y = tY$ , entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^t {}_2F_1(a, b; d; y)(t-y)^{e-c-1}y^{e-1} dy \\ &= \int_0^1 {}_2F_1(a, b; d; tY)(t-tY)^{e-c-1}(tY)^{e-1}t dY \\ &= t^{e-c-1+c-1+1} \int_0^1 (1-Y)^{e-c-1}Y^{e-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(d)_k} \frac{(tY)^k}{k!} dY \\ &= t^{e-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{k!(d)_k} t^k \int_0^1 (1-Y)^{e-c-1}Y^{e+k-1} dY \\ &= t^{e-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{k!(d)_k} t^k \frac{\Gamma(e-c)\Gamma(c+k)}{\Gamma(e+k)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la siguiente relación entre las funciones  $\beta$  y  $\Gamma$ :

$$\beta(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Multiplicando por  $\frac{\Gamma(e)t^{1-e}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)}$  tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(e)t^{1-e}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} \int_0^t {}_2F_1(a, b; d; y)(t-y)^{e-c-1}y^{e-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(e)t^{1-e}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} t^{e-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(e-c)\Gamma(c+k)}{\Gamma(e+k)} \frac{(a)_k(b)_k}{(d)_k k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k(c)_k}{(d)_k(e)_k} t^k = {}_3F_2(a, b, c; d, e; t). \end{aligned}$$

Así hemos probado el teorema. ■

En cierto momento de la demostración del Teorema de Askey y Gasper necesitaremos usar que la función  ${}_3F_2$  toma valores no negativos para ciertos parámetros. Esto vendrá garantizado por la Fórmula de Clausen:

**Teorema 3.6 (Fórmula de Clausen).**

$$\left[ {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; t\right) \right]^2 = {}_3F_2\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta; 2\alpha + 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}; t\right).$$

*Demostración.* Para simplificar la exposición notaremos  $\gamma = \alpha + \beta$ ,  $y = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma + 1/2; t)$  y  $z = {}_3F_2(2\alpha, 2\beta, \gamma; 2\gamma, \gamma + 1/2; t)$ .

Por otro lado, consideremos los funcionales

$$L[f] = t(1-t)f'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)t]f' - \alpha\beta f$$

y

$$\begin{aligned} M[f] = & t^2(1-t)f''' + 3[(1+\gamma)t^2 - (\gamma + 1/2)t]f'' \\ & + [\gamma(2\gamma + 1) - (1 + 3\gamma + 2\gamma^2 + 4\alpha\beta)t]f' - 4\alpha\beta\gamma f. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por (3.9),  $M[z] = 0$  y, de hecho, es la única solución de esta ecuación diferencial de tercer orden que es regular en cero y tal que  $z(0) = 1$ . Por otro lado, sabemos que  $L[y] = 0$  (véase (3.8)) y, por tanto,  $(tL[y])' = 0$ . Un cálculo sencillo, aunque largo y cuyos detalles dejamos sin hacer, muestra que dada una función  $f$  de clase  $C^3$  se verifica

$$M[f^2] = (2(2\gamma - 1)f + 6tf')L[f] + 2f(tL[f])'.$$

Por tanto,  $M[y^2] = 0$ . Puesto que  $y(0) = 1$ , concluimos que  $z = y^2$ . ■

**Teorema 3.7 (Fórmula de Gegenbauer-Hua).<sup>1</sup>**

$$P_n^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k P_{n-2k}^{(\lambda)}(x)$$

donde  $\nu > \lambda > -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  es el mayor entero menor o igual que  $\frac{n}{2}$ , y

$$c_k = c_k(\nu, \lambda) = \frac{(n - 2k + \lambda)\Gamma(\lambda)(\nu - \lambda)_k \Gamma(n + \nu - k)}{k! \Gamma(\nu) \Gamma(n + \lambda - k + 1)}.$$

*Demostración.* Cuando  $t$  es suficientemente pequeño, tal que  $|2xt - t^2| < 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!} (2xt - t^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu)_n (2x)^{n-k}}{k!(n-k)!} t^{n+k}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

<sup>1</sup> Este resultado es cierto con el único requerimiento de que  $\nu > \lambda > -\frac{1}{2}$  sin necesidad de ser un número natural. No obstante su prueba es algo más larga y nos restringimos a los valores de  $\lambda$  que nos harán falta posteriormente. La dificultad para obtener el resultado para  $\lambda$  real y no natural radica en obtener la validez de (3.23) para esos valores.

En una expresión como la anterior  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n d_{n,k} t^{n+k}$  podemos agrupar todos los sumandos con una misma potencia para obtener una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n d_{n,k} t^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} b_0 &= d_{0,0}, \\ b_1 &= d_{1,0}, \\ b_2 &= d_{2,0} + d_{1,1}, \\ b_3 &= d_{3,0} + d_{2,1}, \\ b_4 &= d_{4,0} + d_{3,1} + d_{2,2}, \\ b_5 &= d_{5,0} + d_{4,1} + d_{3,2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Puede verse que al agrupar todas los sumandos con potencia  $t^m$  los coeficientes  $d_{n,k}$  que sumamos son aquellos cuyos dos subíndices suman exactamente  $m$  y con la particularidad de que el segundo subíndice es menor o igual que el primero. Esto hace que si empezamos sumando por  $d_{m,0}$  continuamos con  $d_{m-1,1}, d_{m-2,2}, \dots$  llegamos hasta que  $k \leq m - k$ . Es decir, hasta que  $k \leq m/2$  o lo que es lo mismo  $k \leq [m/2]$ . Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n d_{n,k} t^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^{[m/2]} d_{m-k,k}.$$

Aplicando esto a nuestra expresión (3.16) queda

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

Así

$$P_n^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}. \tag{3.17}$$

De esta expresión, se obtiene por inducción que, fijado  $\nu > -1/2$ , la función  $x^n$  es una combinación lineal de  $P_m^{(\nu)}(x)$  con  $m = 0, 1, \dots, [n/2]$ .

Diferenciando ambos lados de la siguiente igualdad

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x) t^n$$

con respecto a  $x$ , donde  $\nu > \lambda > -\frac{1}{2}$ , obtenemos

$$\frac{2t\lambda}{(1-2xt+t^2)^{\lambda+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) \right) t^n.$$

Por otro lado,

$$\frac{2t\lambda}{(1-2xt+t^2)^{\lambda+1}} = 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda+1)}(x) t^{n+1}.$$

Comparando los correspondientes coeficientes de los términos  $t^n$ , tenemos que

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) = 2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x). \quad (3.18)$$

Por (3.17), podemos expresar  $\frac{(2x)^n}{n!}$  como

$$\frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{k,n}(\lambda) P_{n-2k}^{(\lambda)}(x). \quad (3.19)$$

Diferenciando ambos lados de la igualdad

$$\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{k,n+1}(\lambda) P_{n+1-2k}^{(\lambda)}(x)$$

con respecto a  $x$ , tenemos

$$\frac{2(2x)^n}{(n)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{k,n+1}(\lambda) \frac{d}{dx} P_{n+1-2k}^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{k,n+1}(\lambda) \frac{d}{dx} P_{n+1-2k}^{(\lambda)}(x),$$

donde hemos usado que si  $k = (n+1)/2$  es entero, entonces  $P_{n+1-2k}^{(\lambda)}$  es constante y su derivada es cero. Por (3.19), aplicado a  $\lambda+1$ , el término izquierdo de la igualdad previa es igual a

$$2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{k,n}(\lambda+1) P_{n-2k}^{(\lambda+1)}(x)$$

Usando (3.18), el término derecho es igual a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{k,n+1}(\lambda) 2\lambda P_{n-2k}^{(\lambda+1)}(x)$$

Así tenemos

$$a_{k,n}(\lambda+1) = \lambda a_{k,n+1}(\lambda) \quad (3.20)$$

Considerando

$$\frac{1}{1 - 2 \cos \theta \cdot t + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(\cos \theta) t^n.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sin((n+1)\theta) t^n &= \operatorname{Im} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+1)\theta i} t^n \right] = \operatorname{Im} \left[ e^{\theta i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\theta i} t^n \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t} \right] = \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{i\theta}(1 - e^{-i\theta} t)}{|1 - e^{i\theta} t|^2} \right] = \frac{\sin \theta}{1 - 2 \cos \theta \cdot t + t^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{1 - 2 \cos \theta \cdot t + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} t^n.$$

Identificando coeficientes de Taylor, tenemos que  $P_n^{(1)}(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ .

Por el Teorema 3.4,  $P_n^{(\lambda)}(x)$  es el polinomio de Jacobi  $P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)$  multiplicado por una constante. Por tanto,  $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}$  es un sistema ortogonal con las función de peso  $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ .

Es fácil evaluar

$$\int_{-1}^1 P_n^{(1)}(x) P_m^{(1)}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin[(n+1)\theta] \sin[(m+1)\theta] d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad (3.21)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(2x)^n}{n!} P_{n-2k}^{(1)}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cos \theta)^n}{n!} \sin[(n-2k+1)\theta] \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{n-2k+1}{k!(n-k+1)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De (3.19) y (3.21), tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{(2x)^n}{n!} P_{n-2k}^{(1)}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{p,n}(1) \int_{-1}^1 P_{n-2k}^{(1)}(x) P_{n-2p}^{(1)}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = a_{k,n} \frac{\pi}{2}.$$

Uniendo esta información a (3.22), tenemos

$$a_{k,n}(1) = \frac{n - 2k + 1}{k!(n - k + 1)!}.$$

Veamos por inducción que

$$a_{k,n}(\lambda) = \frac{n - 2k + \lambda}{k!(\lambda)_{n-k+1}} \quad (3.23)$$

Ya sabemos que es cierto para  $\lambda = 1$  y supongamos que se verifica (3.23) para  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Por (3.20), tenemos

$$\begin{aligned} a_{k,n}(\lambda + 1) &= \lambda a_{k,n+1}(\lambda) \\ &= \lambda \frac{n + 1 - 2k + \lambda}{k!(\lambda)_{n+1-k+1}} = \lambda \frac{n + 1 - 2k + \lambda}{k! \frac{\Gamma(\lambda+n1-k+1)}{\Gamma(\lambda)}} \\ &= \frac{n + 1 - 2k + \lambda}{k!(\lambda)_{n+1-k+1}} = \lambda \frac{n + 1 - 2k + \lambda}{k! \frac{\Gamma(\lambda+n1-k+1)}{\Gamma(\lambda+1)}} = \frac{n - 2k + (\lambda + 1)}{k!(\lambda + 1)_{n+1-k}}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, se verifica (3.23) para todo natural  $\lambda$ .

Sustituyendo (3.23) en (3.19), tenemos

$$\frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n - 2k + \lambda}{k!(\lambda)_{n-k+1}} P_{n-2k}^{(\lambda)}(x). \quad (3.24)$$

Sustituyendo lo anterior en (3.17), obtenemos que

$$\begin{aligned} P_n^{(\nu)}(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!(n - 2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k}}{k!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} \frac{n - 2k - 2j + \lambda}{j!(\lambda)_{n-2k-j+1}} P_{n-2k-2j}^{(\lambda)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{p=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k}}{k!} \frac{n - 2p + \lambda}{(p - k)!(\lambda)_{n-k-p+1}} P_{n-2p}^{(\lambda)}(x) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n - 2p + \lambda}{p!} \left( \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k}}{(\lambda)_{n-k-p+1}} \binom{p}{k} \right) P_{n-2p}^{(\lambda)}(x) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_p P_{n-2p}^{(\lambda)}(x), \end{aligned}$$

donde

$$c_p = \frac{n - 2p + \lambda}{p!} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k (\nu)_{n-k}}{(\lambda)_{n-k-p+1}} \binom{p}{k}.$$

Por tanto,

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda)} c_k = \frac{\lambda + n - 2k}{k!} \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} \frac{\Gamma(\nu + n - p)}{\Gamma(\lambda + n - p + k + 1)}.$$

Sea  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ , entonces

$$\Delta^k \left[ \frac{f(a+k)}{f(b+k)} \right] = \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} \frac{f(a+x+k-p)}{f(b+x+k-p)}.$$

Sea  $x = n$ ,  $a = \nu - k$  y  $b = \lambda - 2k + 1$ , tenemos

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda)} c_k = \frac{\lambda + n - 2k}{k!} \Delta^k \left[ \frac{\Gamma(\nu - k + n)}{\Gamma(\lambda - 2k + 1 + n)} \right].$$

Además,  $\Delta \left[ \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \right] = \frac{(a-b)\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n+1)}$  y

$$\Delta^k \left[ \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \right] = \frac{\Gamma(a-b+1)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b-k+1)\Gamma(b+n+k)}.$$

Así obtenemos finalmente que

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda)} c_k = \frac{\lambda + n - 2k}{k!} \frac{\Gamma(\nu - \lambda + k)\Gamma(\nu - k + n)}{\Gamma(\nu - \lambda)\Gamma(\lambda - k + n + 1)}.$$

■

### 3.2. El Teorema de Askey-Gasper

Estamos ya en condiciones de probar el resultado sobre los polinomios de Jacobi que se usa en el Teorema de De Branges: el Teorema de Askey y Gasper [2]. Necesitamos previamente el siguiente lema.

**Lema 3.8.**

$$(2a)_{2j} = 2^{2j} (a)_j \left( a + \frac{1}{2} \right)_j, \quad (3.25)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(a)_k}{k!} = \frac{(a+1)_n}{n!}. \quad (3.26)$$

*Demostración.* La fórmula (3.25) es obvia teniendo en cuenta que  $(a)_j = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$  y usando la propiedad de la función  $\Gamma$  que nos dice que si  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(a+j) = a \cdot (a+1) \cdots (a+j-1)\Gamma(a)$ . Luego solo tenemos que probar (3.26). Obviamente, es cierta cuando  $n = 0$ . Si

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a)_k}{k!} = \frac{(a+1)_{n-1}}{(n-1)!}.$$

se tiene, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a)_k}{k!} + \frac{(a)_n}{n!} = \frac{(a+1)_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(a)_n}{n!} = \frac{(a+1)_{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(a+1)_n}{n!}.$$

Luego (3.26) es cierta por inducción. ■

**Teorema 3.9 (Askey y Gasper (1976)).** <sup>2</sup> Si  $\alpha$  es un número natural par y  $-1 \leq x \leq 1$ , entonces

$$\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) \geq 0, \quad (3.27)$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.2, sabemos que

$$P_k^{(\alpha,0)}(x) = \frac{(\alpha+1)_k}{k!} {}_2F_1\left(-k, k+\alpha+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)_j (n+\alpha+1)_j}{(\alpha+1)_j j!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (n+\alpha+1)_j}{(\alpha+1)_j j!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^j. \end{aligned}$$

Sea  $a_k = \frac{(\alpha+1)_k}{k!}$  y sea

$$b_{k,j} = \begin{cases} \frac{(-k)_j (k+\alpha+1)_j \left(\frac{1-x}{2}\right)^j}{j! (\alpha+1)_j}, & 0 \leq j \leq k; \\ 0, & j > k. \end{cases}$$

<sup>2</sup> Este resultado es cierto para todo  $\alpha > -1$ . Su prueba es literalmente la misma pero se requiere la versión general la Fórmula de Gegenbauer-Hua (Teorema 3.7), que no hemos incluido. En cualquier caso, la versión que damos aquí es suficiente para nuestro objetivo.

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^n b_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_k b_{k,j} \\
&= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n a_k b_{k,j} \right) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} a_{k+j} b_{k+j,j} \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(\alpha+1)_{k+j}}{(k+j)!} \frac{(-k-j)_j (k+j+\alpha+1)_j}{j! (\alpha+1)_j} \left( \frac{1-x}{2} \right)^j \\
&= \sum_{j=0}^n \left( \frac{x-1}{2} \right)^j \frac{(\alpha+1)_{2j}}{j! (\alpha+1)_j} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{1}{k!} \frac{(\alpha+1)_{k+j} (k+j+\alpha+1)_j}{(\alpha+1)_{2j}}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Es fácil verificar que

$$\frac{(\alpha+1)_{k+j} (\alpha+1+k+j)_j}{k! (\alpha+1)_{2j}} = \frac{(\alpha+1+2j)_k}{k!}. \tag{3.29}$$

Usando esta ecuación y (3.26), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) &= \sum_{j=0}^n \left( \frac{x-1}{2} \right)^j \frac{(\alpha+1)_{2j}}{j! (\alpha+1)_j} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(\alpha+1+2j)_k}{k!} \\
&= \sum_{j=0}^n \left( \frac{x-1}{2} \right)^j \frac{(\alpha+1)_{2j} (\alpha+2j+2)_{n-j}}{j! (\alpha+1)_j (n-j)!}.
\end{aligned}$$

Tomando  $a = \frac{\alpha+1}{2}$  en (3.25),

$$(\alpha+1)_{2j} = 2^{2j} \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)_j \left( \frac{\alpha+2}{2} \right)_j.$$

Sustituyendo esta última igualdad en la ecuación previa a ella, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{\left( \frac{x-1}{2} \right)^j 2^{2j} \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)_j \left( \frac{\alpha+2}{2} \right)_j (\alpha+2j+2)_{n-j}}{j! (\alpha+1)_j (n-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{[2(x-1)]^j \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)_j \left( \frac{\alpha+2}{2} \right)_j (\alpha+2j+2)_{n-j}}{j! (\alpha+1)_j (n-j)!}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

El siguiente paso es relacionar la suma de los polinomios de Jacobi con la función hipergeométrica  ${}_3F_2$ . Concretamente vamos a probar que

$$\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) = \frac{(\alpha+2)_n}{n!} {}_3F_2 \left( -n, n+\alpha+2, \frac{\alpha+1}{2}; \alpha+1, \frac{\alpha+3}{2}; \frac{1-x}{2} \right). \quad (3.31)$$

Obtener esta igualdad equivale a probar que

$$\begin{aligned} & \frac{(2(x-1))^j \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_j (\alpha+2j+2)_{n-j}}{j!(\alpha+1)_j(n-j)!} \\ &= \frac{(\alpha+2)_n (-n)_j (n+\alpha+2)_j \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_j}{n! (\alpha+1)_j \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_j} \left(\frac{1-x}{2}\right)^j. \end{aligned}$$

Equivalentemente, necesitamos probar la igualdad

$$\frac{1}{(n-j)!} 2^{2j} (-1)^j \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_j (\alpha+2j+2)_{n-j} = \frac{(\alpha+2)_n (-n)_j (n+\alpha+2)_j}{n! \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_j}.$$

Tomando  $a = \frac{\alpha+2}{2}$  en (3.25). Tenemos

$$(\alpha+2)_{2j} = 2^{2j} \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_j,$$

así la ecuación previa es equivalente a

$$\frac{1}{(n-j)!} (-1)^j (\alpha+2)_{2j} (\alpha+2j+2)_{n-j} = \frac{(\alpha+2)_n (-n)_j (n+\alpha+2)_j}{n!}.$$

Obviamente, las igualdades  $(a)_{2j}(a+2j)_{n-j} = (a)_n(a+n)_j$  y  $(-1)^j(-n)_j = \frac{n!}{(n-j)!}$  se dan. Usando estas igualdades para  $a = \alpha+2$ , podemos verificar que la ecuación previa se verifica. Esto prueba (3.31).

Antes de continuar merece la pena observar que no podemos aplicar directamente la Fórmula de Clausen (Teorema 3.6) para deducir que

$${}_3F_2 \left( -n, n+\alpha+2, \frac{\alpha+1}{2}; \alpha+1, \frac{\alpha+3}{2}; \frac{1-x}{2} \right)$$

es no negativa. Necesitamos aún reescribir este valor de otra forma.

Sean  $c = \frac{\alpha+1}{2}$  y  $e = 2c = \alpha+1$ . Entonces

$$\frac{\Gamma(e)t^{1-e}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} = \frac{\Gamma(2c)t^{1-e}}{(\Gamma(c))^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}}{[\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})]^2}, \quad (3.32)$$

$e-c = \frac{\alpha+1}{2}$ , y (3.14) queda de la forma

$$\begin{aligned} & {}_3F_2\left(a, b, \frac{\alpha+1}{2}; d, \alpha+1; t\right) \\ &= t^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]^{-2}\int_0^t [(t-y)y]^{\frac{\alpha-1}{2}} {}_2F_1(a, b; d; y)dy. \end{aligned}$$

La integral existe dado que  $\alpha > -1$ . Si definimos el operador lineal  $L$  mediante

$$Lg \equiv t^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]^{-2}\int_0^t [(t-y)y]^{\frac{\alpha-1}{2}} g(y)dy, \quad \alpha > -1, \quad t > 0,$$

entonces

$${}_3F_2\left(a, b, \frac{\alpha+1}{2}; d, \alpha+1; t\right) = L({}_2F_1(a, b; d; t)). \quad (3.33)$$

Tomando  $2\lambda = \alpha + 2$  y  $x = 1 - 2t$  en el Teorema 3.4, se tiene

$$P_n^{(\lambda)}(x) = P_n^{\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}(1-2t) = \frac{(\alpha+2)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+2; \frac{\alpha+3}{2}; t\right). \quad (3.34)$$

Sea  $\mu = \frac{\alpha+2}{2}$  y  $\lambda = \frac{\alpha+1}{2}$  en el Teorema 3.7 (Teorema de Gegenbauer-Hua), entonces

$$P_n^{\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}(1-2t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-2j}}{j! \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n-2j}} P_{n-2j}^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(1-2t). \quad (3.35)$$

Del Teorema 3.2, sabemos que

$$P_n^{\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}(1-2t) = \frac{(\alpha+1)_{n-2j}}{(n-2j)!} F\left(-n+2j, n-2j+\alpha+1; \frac{\alpha+2}{2}; t\right). \quad (3.36)$$

Combinando (3.34), (3.35) y (3.36), tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha+2)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+2; \frac{\alpha+3}{2}; t\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-2j} (\alpha+1)_{n-2j}}{j! \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n-2j} (n-2j)!} {}_2F_1\left(-n+2j, n-2j+\alpha+1; \frac{\alpha+2}{2}; t\right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por la definición de  $L$  y (3.33), tenemos que

$${}_3F_2\left(-n, n + \alpha + 2, \frac{\alpha + 1}{2}; \frac{\alpha + 3}{2}, \alpha + 1; t\right) = L\left[{}_2F_1\left(-n, n + \alpha + 2; \frac{\alpha + 3}{2}; t\right)\right]$$

y

$${}_3F_2\left(-n + 2j, n - 2j + \alpha + 1, \frac{\alpha + 1}{2}; \frac{\alpha + 2}{2}, \alpha + 1; t\right) = L\left[F\left(-n + 2j, n - 2j + \alpha + 1; \frac{\alpha + 2}{2}; t\right)\right].$$

Por (3.31), (3.37) y las dos fórmulas previas, se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) &= \frac{(\alpha + 2)_n}{n!} L\left[F\left(-n, n + \alpha + 2; \frac{\alpha + 3}{2}; t\right)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-2j} (\alpha + 1)_{n-2j}}{j! \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n-2j} (n - 2j)!} \\ &\quad \cdot {}_3F_2\left(-n + 2j, n - 2j + \alpha + 1; \frac{\alpha + 1}{2}; \frac{\alpha + 2}{2}, \alpha + 1; t\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

porque  $L$  es un operador lineal. Sea  $2a = -n + 2j$  y  $2b = n - 2j + \alpha + 1$  en el Teorema 3.6 (Fórmula de Clausen):

$$\left[{}_2F_1\left(a, b; a + b + \frac{1}{2}; t\right)\right]^2 = {}_3F_2\left(2a, 2b, a + b; 2a + 2b, a + b + \frac{1}{2}; t\right).$$

se convierte en

$$\begin{aligned} &\left[{}_2F_1\left(\frac{-n + 2j}{2}, \frac{n - 2j + \alpha + 1}{2}; \frac{\alpha + 2}{2}; t\right)\right]^2 \\ &= {}_3F_2\left(n - 2j, n - 2j + \alpha + 1, \frac{\alpha + 1}{2}; \alpha + 1, \frac{\alpha + 2}{2}; t\right). \end{aligned}$$

Dado que  $\alpha > -1$ , los coeficientes de cada término en (3.38) son positivos, lo que implica que

$$\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) \geq 0.$$

■



## El Teorema de De Branges

### 4.1. La Conjetura de Milin implica la Conjetura de Bieberbach

Hemos visto que cada función

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

de la clase  $S$  tiene la propiedad de que  $|a_2| \leq 2$ , con igualdad solamente para las rotaciones de las funciones de Koebe

$$K(z) = z(1 - z)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Esto sugiere el problema general para encontrar

$$A_n = \sup_{f \in S} |a_n|, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Debido a que la función de Koebe juega un papel extremo en tantos problemas para la clase  $S$ , es natural sospechar que maximiza  $|a_n|$  para cada  $n$ . Esta es la famosa Conjetura de Bieberbach [3] como ya hemos comentado.

**Conjetura de Bieberbach.** *Los coeficientes de cada función  $f \in S$  satisfacen  $|a_n| \leq n$  para todo  $n = 2, 3, \dots$ . La desigualdad estricta se da para todo  $n$  a menos que  $f$  sea una rotación de la función de Koebe.*

Durante muchos años, esta conjetura fue un desafío para todos los matemáticos y ha inspirado el desarrollo de nuevos métodos importantes en el Análisis Complejo.

Es fácil ver que el supremo  $A_n$  es finito para cada  $n$ . Se deduce de la compacidad de  $S$  como un subconjunto del espacio  $H(\mathbb{D})$  de todas las funciones analíticas en  $\mathbb{D}$ , y de la continuidad de la función  $S \ni f \mapsto a_n$ , se deduce que el supremo se alcanza realmente para alguna función en  $S$ . Alternativamente, una estimación ordinaria de la fórmula integral de Cauchy para  $a_n$ , combinada con el Teorema de crecimiento, da una desigualdad del tipo  $A_n \leq Cn^2$ , para alguna constante  $C$ , como una primera cota elemental de  $A_n$ . En cualquier caso, nosotros no haremos uso de estas estimaciones.

En esta sección probaremos que la Conjetura de Bieberbach es cierta de serlo la Conjetura de Milin. De hecho, mostraremos que la Conjetura de Robertson está en medio de ambas.

Recordemos que una función  $g$  en la clase  $S$  es impar si y solo si  $g(-z) = -g(z)$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  y que esto equivale a que exista una función  $f$  en  $S$  tal que  $g(z)^2 = f(z^2)$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  (véase la observación 1.2). Denotemos por  $S_-$  a la familia de funciones impares en  $S$ . Si  $g \in S_-$ , entonces  $g$  es de la forma

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \cdots. \quad (4.1)$$

Establezcamos entonces la Conjetura de Robertson.

**Conjetura de Robertson.** Si  $g \in S_-$  entonces para cada  $n \geq 1$

$$1 + |c_3|^2 + \cdots + |c_{2n-1}|^2 \leq n.$$

Si hay un número  $n$  tal que se da la igualdad, entonces  $g(z)^2 = f(z^2)$ , donde  $f$  es una rotación de la función de Koebe.

**Teorema 4.1.** La conjetura de Robertson implica la Conjetura de Bieberbach.

*Demostración.* Sea  $f \in S$ . Entonces, por el Teorema 1.1, existe  $g \in S_-$  tal que  $g(z)^2 = f(z^2)$ . Notando  $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$  y  $g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \cdots$ , obtenemos

$$z^2 + a_2 z^4 + \cdots = (z + c_3 z^3 + \cdots)^2. \quad (4.2)$$

De esto último tenemos entonces que para  $n \geq 1$

$$a_n = c_1 c_{2n-1} + c_3 c_{2n-3} + \cdots + c_{2n-1} c_1. \quad (4.3)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz muestra que

$$|a_n| \leq \left( \sum_{k=1}^n |c_{2k-1}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |c_{2n-k}|^2 \right)^{1/2} = \sum_{k=1}^n |c_{2k-1}|^2. \quad (4.4)$$

Esto concluye que la Conjetura de Robertson implica la Conjetura de Bieberbach.

Si se da la igualdad en la Conjetura de Bieberbach, entonces la desigualdad precedente muestra que la igualdad ocurre en la Conjetura de Robertson. Esto completa la prueba. ■

A continuación introduciremos la Conjetura de Milin y veremos cómo esta implica que la Conjetura de Robertson.

Sea  $f \in S$  y sea  $g$  la correspondiente función en  $S_-$  con  $g(z)^2 = f(z^2)$  en  $\mathbb{D}$ . Es fácil ver que  $z^{-1}f$  es una función analítica sin ceros en  $\mathbb{D}$ , ya que tiene una singularidad evitable en 0,  $f$  no se anula en  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  y  $f'(0) = 1 \neq 0$ . Así hay una rama analítica de  $(1/2)\log[z^{-1}f(z)]$  definida en  $\mathbb{D}$ ; denotemos esta función por  $h$ . Escogemos la rama de  $(1/2)\log[z^{-1}f(z)]$  que satisface  $h(0) = 0$  (esto se puede conseguir porque la función  $\frac{f(z)}{z}$  toma el valor 1 en cero) y con esta estipulación,  $h$  es única. Sea

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \quad (4.5)$$

su representación en serie de potencias en  $\mathbb{D}$ .

**Conjetura de Milin.** Si  $f \in S$ ,  $h$  es la rama de  $(1/2)\log[z^{-1}f(z)]$  con  $h(0) = 0$ , y  $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$ , entonces

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0.$$

Si se da la igualdad para algún número entero  $n$ , entonces  $f$  es una rotación de la función de Koebe.

Para mostrar que la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson (y por tanto la Conjetura de Bieberbach), es necesario demostrar la Segunda desigualdad de Lebedev-Milin. Esta es la segunda de una colección de tres desigualdades que relacionan los coeficientes de la serie de potencias de una función analítica con los de su exponencial. Vemos a continuación la segunda de las tres desigualdades para finalmente ver que la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson.

Sea  $\phi$  una función analítica en un entorno del 0 con  $\phi(0) = 0$  y sea

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

su desarrollo en serie de potencias. Sea

$$\psi(z) = e^{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k.$$

**Segunda desigualdad de Lebedev-Milin.** Si  $\phi$  y  $\psi$  están definidas como anteriormente, entonces para todo  $n \geq 1$  se verifica

$$\sum_{k=0}^n |\beta_k|^2 \leq (n+1) \exp \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\}. \quad (4.6)$$

La igualdad se da para un número dado  $n$  si y solo si hay un número complejo  $\gamma$  con  $|\gamma| = 1$  y  $\alpha_k = \gamma^k/k$  para  $1 \leq k \leq n$ .

Antes de comenzar la prueba observemos que  $\psi = e^\phi$ ,  $\psi' = \phi' e^\phi = \phi' \psi$  y así se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k z^{k-1} &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k z^{k-1} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k \right) \\ &= \alpha_1 \beta_0 + (\alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_0)z + (\alpha_1 \beta_2 + 2\alpha_2 \beta_1 + 3\alpha_3 \beta_0)z^2 \\ &\quad + \cdots + (\alpha_1 \beta_m + \cdots + m\alpha_m \beta_0)z^m + \cdots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Igualando los coeficientes correspondientes tenemos que

$$m\beta_m = \sum_{k=1}^m k \alpha_k \beta_{m-k}. \quad (4.8)$$

*Demostración (de la Segunda desigualdad de Lebedev-Milin).* Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a (4.8) obtenemos

$$\begin{aligned} m^2 |\beta_m|^2 &\leq \left( \sum_{k=1}^m k^2 |\alpha_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m |\beta_{m-k}|^2 \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^m k^2 |\alpha_k|^2 \right) \left( \sum_{k=0}^{m-1} |\beta_k|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sean

$$A_m = \sum_{k=1}^m k^2 |\alpha_k|^2, \quad B_m = \sum_{k=0}^m |\beta_k|^2. \quad (4.10)$$

Puesto que  $\beta_0 = 1$ , tenemos que  $B_0 = 1$ . Con esta notación (4.9) se convierte en  $m^2 |\beta_m|^2 \leq A_m B_{m-1}$  para todo  $m \geq 1$ . Ahora fijemos  $n \geq 1$ . Así

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n-1} + |\beta_n|^2 \\ &\leq B_{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{n^2} A_n \right] \\ &= \frac{n+1}{n} \left[ 1 + \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right] B_{n-1} \\ &\leq \frac{n+1}{n} \exp \left\{ \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right\} B_{n-1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde hemos usado la desigualdad elemental  $1 + x \leq e^x$ . Veamos por inducción que

$$B_n \leq (n+1) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right\}. \quad (4.12)$$

Para  $n = 1$ , usando (4.11), es claro pues

$$B_1 \leq 2 \exp \left\{ \frac{A_1 - 1}{2} \right\} = 2 \exp \left\{ \frac{A_1}{2} + 1 - 1 - \frac{1}{2} \right\}.$$

Luego (4.12) es cierto para  $n = 1$ . Supongamos que (4.12) es cierto para  $n$  y veamos que se cumple para  $n + 1$ . Usando (4.11),

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\leq \frac{n+2}{n+1} \exp \left\{ \frac{A_{n+1} - (n+1)}{(n+1)(n+2)} \right\} B_n \\ &\leq \left( \frac{n+2}{n+1} \right) \exp \left\{ \frac{A_{n+1} - (n+1)}{(n+1)(n+2)} \right\} (n+1) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right\} \\ &\leq (n+2) \exp \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Esto justifica que (4.12) es cierto.

Tomando ahora  $X_n = \sum_{k=1}^n [k(k+1)]^{-1} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - (n+1)^{-1}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} X_k (A_k - A_{k+1}) + X_n A_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right) (A_k - A_{k+1}) + \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) A_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} A_k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} A_{k+1} + \frac{n}{n+1} A_n \\ &= \frac{1}{2} A_1 + \sum_{k=2}^n \frac{k}{k+1} A_k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} A_{k+1} \\ &= \frac{1}{2} A_1 + \sum_{k=2}^n \frac{k}{k+1} A_k - \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k} A_k \\ &= \frac{1}{2} A_1 + \sum_{k=2}^n \frac{k^2 - k^2 + 1}{k(k+1)} A_k = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} X_k (A_k - A_{k+1}) + X_n A_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[ 1 - \frac{1}{k+1} \right] (-(k+1)^2 |\alpha_{k+1}|^2) + \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right] \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n (n+1)k |\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 + n+1 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{k} \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left\{ (n+1)k |\alpha_k|^2 - k^2 |\alpha_k|^2 + 1 - \frac{n+1}{k} \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \left( k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Combinando esto con (4.12), obtenemos (4.6). Es decir, concluimos la desigualdad buscada.

Analicemos la igualdad en (4.6). Dos factores contribuyeron a la desigualdad en el argumento anterior: la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad  $1+x \leq e^x$ . Entonces, si ocurre la igualdad, debe ser que la igualdad se dio siempre que se usaron estos dos hechos. El primero de esos casos fue cuando se aplicó la desigualdad de Cauchy-Schwarz a (4.8) para obtener (4.9). Recordemos que para la igualdad en la segunda desigualdad de Lebedev-Milin para un número entero  $n$ , necesitamos igualdad en (4.9) para  $1 \leq m \leq n$ . Así deben existir constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que para cada  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ ,

$$\beta_{m-k} = \lambda_m k \overline{\alpha_k} \tag{4.14}$$

para  $1 \leq k \leq m$ . Dado que  $1+x = e^x$  solo cuando  $x = 0$ , se tiene que  $A_m = m$  para  $1 \leq m \leq n$ .

Sustituyendo (4.14) en (4.8) tenemos que  $m\beta_m = \lambda_m \sum_{k=1}^m k^2 |\alpha_k|^2 = \lambda_m A_m = m\lambda_m$ . Así  $\beta_m = \lambda_m$  para  $1 \leq m \leq n$ . Dado que  $\beta_0 = 1$ , la ecuación (4.14) para  $k = m$  nos dice que  $\lambda_m m \overline{\alpha_m} = 1$  para  $1 \leq m \leq n$ . Así para  $m \geq 2$ ,  $\lambda_1 = \beta_1 = \lambda_m (m-1) \overline{\alpha_{m-1}} = \lambda_m / \lambda_{m-1}$ . De hecho  $\lambda_m = \lambda_1 \lambda_{m-1}$ , de donde obtenemos que  $\beta_m = \lambda_m = \lambda_1^m = \gamma^m$ , con  $\gamma = \lambda_1$ . La ecuación (4.14) para  $k = m$  implica que  $m\alpha_m = \overline{\gamma^m}$ . Pero para  $1 \leq k \leq n$ ,  $k = A_k = \sum_{m=1}^k m^2 |\alpha_m|^2 = \sum_{m=1}^k |\gamma|^{2m}$ . En particular se da para  $k = 1$  por lo que  $|\gamma| = 1$ . De hecho (4.14) implica que para  $1 \leq k \leq n$ ,  $\gamma^{n-k} = \beta_{n-k} = \gamma^n k \overline{\alpha_k}$ , por lo tanto  $\alpha_k = \gamma^k / k$  para  $1 \leq k \leq n$ . ■

Veamos ahora entonces que la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson.

**Teorema 4.2.** *La Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson.*

*Demostración.* Sean  $f \in S$  y  $g \in S_-$  tal que  $g(z)^2 = f(z^2)$ . Sea  $h(z) = (1/2)\log[z^{-1}f(z)]$  con  $h(0) = 0$  y con la notación introducida en (4.5). Tengamos en cuenta que si  $z \in \mathbb{D} \setminus (-1, 0]$ ,  $[g(\sqrt{z})/\sqrt{z}]^2 = f(z)/z$ , siendo  $\sqrt{z} = \exp\{\frac{1}{2}\text{Log}(z)\}$  con  $\text{Log}(z)$  el logaritmo principal. Por otro lado,  $g(\sqrt{z})/\sqrt{z} = 1 + c_3z + c_5z^2 + \dots$ , por eso  $g(\sqrt{z})/\sqrt{z}$  es analítica en  $\mathbb{D}$ . Así  $h$  es una rama del  $\log[g(\sqrt{z})/\sqrt{z}]$  y notando  $c_1 = 1$  tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}z^n = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n\right\}.$$

De acuerdo con la Segunda desigualdad de Lebedev-Milin, para cada  $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n |c_{2k+1}|^2 \leq (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Así si la Conjetura de Milin es cierta, se tiene,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0.$$

Esto implica que para todo  $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n |c_{2k+1}|^2 \leq (n+1),$$

esto último es lo que reconocemos como Conjetura de Robertson.

Supongamos que  $n \geq 1$  y que la igualdad se da en la Conjetura de Robertson. De nuevo asumiento cierta la Conjetura de Milin, esto implica que

$$\begin{aligned} n+1 &= \sum_{k=0}^n |c_{2k+1}|^2 \\ &\leq (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\} \\ &\leq n+1 \end{aligned}$$

Pero esto implica la igualdad en la Conjetura de Milin y entonces  $f$  debe ser una rotación de la función de Koebe. ■

Para esta sección hemos seguido la línea expositiva de [5].

## 4.2. El sistema de funciones especiales de De Branges

Fijemos un número entero positivo  $n$ . Para  $k = 1, 2, \dots, n$ , sea

$$\tau_k(t) = k \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu \frac{(2k + \nu + 1)_\nu (2k + 2\nu + 2)_{n-k-\nu}}{(k + \nu) \nu! (n - k - \nu)!} e^{-(\nu+k)t}. \quad (4.15)$$

En particular, se tiene que  $\tau_n(t) = e^{-nt}$ .

Obsérvese que  $\tau_k$  depende de  $n$ , aunque para no complicar excesivamente la notación no lo ponemos explícitamente.

Recordemos que en (3.30) se mostró que

$$\sum_{k=0}^n P_k^{(\alpha,0)}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_j (2j + \alpha + 2)_{n-j}}{j!(n-j)!(\alpha+1)_j} [2(x-1)^j]. \quad (4.16)$$

Se deduce fácilmente de (4.15) que

$$\frac{\tau'_k(t)}{k} = - \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^v \frac{(2k + v + 1)_v (2k + 2v + 2)_{n-k-v}}{v!(n-k-v)} e^{-(k+v)t}.$$

De hecho

$$- \frac{\tau'_k(t)}{k} e^{kt} = \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^v \frac{(2k + v + 1)_v (2k + 2v + 2)_{n-k-v}}{v!(n-k-v)} e^{-vt}.$$

Ahora usando (4.16) con  $\alpha = 2k$  obtenemos

$$\sum_{v=0}^{n-k} P_v^{(2k,0)}(1 - 2e^{-t}) = \sum_{v=0}^{n-k} \frac{\left[\frac{2k+1}{2}\right]_v \left[\frac{2k+2}{2}\right]_v (2k + 2v + 2)_{n-k-v}}{v!(2k+1)_v (n-k-v)!} [2(-2e^{-t})]^v.$$

Pero  $2^{2v} \left[k + \frac{1}{2}\right]_v (k+1)_v = (2k+1)_{2v}$  y  $(2k+1)_{2v}/(2k+1)_v = (2k+v+1)_v$ . Por lo tanto,

$$\sum_{v=0}^{n-k} P_v^{(2k,0)}(1 - 2e^{-t}) = \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^v \frac{(2k + v + 1)_v (2k + 2v + 2)_{n-k-v}}{v!(n-k-v)!} e^{-vt} = - \frac{\tau'_k(t)}{k} e^{kt}.$$

Y finalmente obtenemos,

$$\tau'_k(t) = -k e^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(1 - 2e^{-t}). \quad (4.17)$$

**Teorema 4.3.** Para las funciones  $\tau_1, \dots, \tau_n$  definidas en (4.15) y denotando  $\tau_{n+1} \equiv 0$ , se tiene

- (a)  $\tau_k - \tau_{k+1} = - \left[ \frac{\tau'_k}{k} + \frac{\tau'_{k+1}}{k+1} \right];$
- (b)  $\tau_k(0) = n + 1 - k;$
- (c)  $\tau_k(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty;$
- (d)  $\tau'_k < 0.$

*Demostración.* (a) Puesto que  $\tau_n(t) = e^{-nt}$  y  $\tau_{n+1} \equiv 0$ , si tiene claramente (a) para  $k = n$ . Para facilitar la prueba, definamos  $g_k(t) = k^{-1}\tau_k(t)e^{kt}$  y  $h_k(t) = k^{-1}\tau_k(t)e^{-kt}$  para  $1 \leq k \leq n$ . Observemos que

$$g'_k(t) = \left[ \frac{\tau'_k}{k} + \tau_k \right] e^{kt}, \quad h'_k(t) = \left[ \frac{\tau'_k}{k} - \tau_k \right] e^{-kt}.$$

Luego para probar (a) es suficiente probar que

$$g'_k(t)e^{-kt} = -h'_{k+1}(t)e^{(k+1)t} \quad (4.18)$$

para  $1 \leq k \leq n$ .

De las definiciones de  $\tau_k$ ,  $g_k$  y  $h_k$  tenemos que

$$g_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^v \frac{(2k+v+1)_v (2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(n-k-v)!} e^{-vt},$$

$$h_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^v \frac{(2k+v+1)_v (2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(n-k-v)!} e^{-vt-2kt}.$$

Así

$$e^{-kt}g'_k(t) = \sum_{v=1}^{n-k} (-1)^{v+1} \frac{(2k+v+1)_v (2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)(v-1)!(n-k-v)!} e^{-(k+v)t},$$

$$e^{kt}h'_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k} (-1)^{v+1} \frac{(v+2k)(2k+v+1)_v (2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(n-k-v)!} e^{-(k+v)t}.$$

Como  $(2k+v)(2k+v+1)_v = (2k+v)_{v+1}$ , reemplazando adecuadamente  $k$  por  $k+1$ , la última ecuación queda de la forma

$$\begin{aligned} e^{(k+1)t}h'_{k+1}(t) &= \sum_{v=0}^{n-k-1} (-1)^{v+1} \frac{(2k+2+v)_{v+1} (2k+2v+4)_{n-k-v-1}}{(k+v+1)v!(n-k-v-1)!} e^{-(k+v+1)t} \\ &= \sum_{v=1}^{n-k} (-1)^v \frac{(2k+v)_v (2k+2v+4)_{n-k-v}}{(k+v)(v-1)!(n-k-v)!} e^{-(k+v)t} \\ &= e^{-kt}g'_k(t). \end{aligned}$$

Esto demuestra (4.18) y, por tanto, (a).

(b) Recordemos que  $P_j^{(\alpha,0)}(-1) = (-1)^j$  (véase (3.5)). De esto se sigue que

$$\tau'_k(0) = -k \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(-1) = -k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j,$$

entonces

$$-\frac{\tau'_k(0)}{k} = \begin{cases} 1, & \text{si } n - k \text{ par,} \\ 0, & \text{si } n - k \text{ impar.} \end{cases}$$

Sustituyendo esto en la ecuación de (a) tenemos que  $\tau_k(0) - \tau_{k+1}(0) = 1$ . Puesto que  $\tau_n(0) = 1$ , (b) se deduce de la anterior ecuación.

(c) Esta propiedad es clara por la propia definición de  $\tau_k$ .

(d) Esta propiedad se obtiene de (4.17) y del Teorema 3.9 de Askey y Gasper. ■

### 4.3. Prueba del Teorema de De Branges

**Teorema 4.4.** *La Conjetura de Milin es cierta. Esto es, si  $f \in S$ ,  $h$  es la rama de  $(1/2) \log[z^{-1}f(z)]$  con  $h(0) = 0$ , y*

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \tag{4.19}$$

entonces para todo  $n \geq 2$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0. \tag{4.20}$$

Si se da la igualdad para algún número entero  $n$ , entonces  $f$  es una rotación de la función de Koebe.

Antes de comenzar la prueba del Teorema de De Branges establezcamos la siguiente notación: para el resto de la sección,  $f$  es una aplicación con un corte simple en  $S$  y  $F$  es la cadena de Loewner con  $F_0 = f$ . Así la ecuación diferencial de Loewner (2.13) se da para  $F$ . Observemos que  $e^{-t}F_t \in S$  para todo  $t \geq 0$ . Así podemos definir

$$\begin{aligned} h_t(z) &= \frac{1}{2} \log \left[ \frac{F_t(z)}{e^t z} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) z^k, \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde la rama del logaritmo es elegida con  $h_t(0) = 0$ .

La estrategia de la prueba es introducir la función

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^n \left[ k |\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k} \right] \tau_k(t) \quad (4.22)$$

para  $t \geq 0$ , donde  $\tau_1, \dots, \tau_n$  son las funciones especiales introducidas en la sección anterior. La dificultad en la demostración del Teorema de De Branges se centra esencialmente en probar el siguiente resultado sobre la función  $\phi$ .

**Lema 4.5.** *Si  $\phi$  es la función definida en (4.22), entonces  $\phi'(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ .*

Antes de entrar de lleno en la demostración de este lema, mostramos algunos resultados preliminares.

**Lema 4.6.** *Sea  $T < \infty$ .*

(a) *Si  $0 < r < 1$ , entonces  $\sup \{|h_t(z)| : |z| \leq r \text{ y } 0 \leq t \leq T\} < \infty$ .*

(b) *Para cada  $k \geq 1$ ,  $\sup \{|\gamma_k(t)| : 0 \leq t \leq T\} < \infty$ .*

*Demostración.* (a) Es suficiente obtener la acotación para  $|z| < r$ . Usando (2.7) y que el argumento de  $\frac{F_t(z)}{ze^t}$  depende continuamente de  $t$  y  $z$ , tenemos que para algún número  $N$  independiente de  $r$

$$\begin{aligned} |h_t(z)| &= \frac{1}{2} \left[ \log \left| \frac{F_t(z)}{ze^t} \right| + 2\pi N \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2\pi N - \log r + \log \left| \frac{F_t(z)}{e^t} \right| \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ 2\pi N - \log r + \log \frac{r}{(1-r)^2} \right] \\ &= M_r. \end{aligned}$$

Luego (a) se tiene.

(b) Si  $0 < r < 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \gamma_k(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h_t(z)}{z^{k+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} h_t(re^{i\theta}) e^{ik\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Así  $|\gamma_k(t)| \leq r^{-k} M_r$  por (a). ■

**Lema 4.7.** *Para cada  $K \geq 1$  la función  $\gamma_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  es continuamente diferenciable y*

$$\gamma'_k(t) = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} h'_t(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta. \quad (4.23)$$

*Demostración.* De hecho, esto es una consecuencia inmediata de la fórmula para  $\gamma_k(t)$  obtenida en la demostración anterior y la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral. ■

**Lema 4.8.** *Si  $T < \infty$  y  $0 < r < 1$ , entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma'_k(t)z^k$  converge absolutamente y uniformemente para  $|z| \leq r$  y  $0 \leq t \leq T$ .*

*Demostración.* Sea  $\rho = \frac{1+r}{2}$ . Existe un número  $M$  tal que  $|h'_t(w)| \leq M$  para  $0 \leq r \leq \rho$ ,  $|w| \leq r$  ya que usando la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$|h'_t(w)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{C(0,\rho)} \frac{h_t(\xi)}{\xi - w} d\xi \right| \leq \frac{M_1 \rho}{\rho - r} = M,$$

siendo  $M_1$  la cota proporcionada en el apartado (a) del lema anterior.

La ecuación (4.23) implica que si  $|h'_t(w)| \leq M$  para  $0 \leq t \leq T$ ,  $|w| = \rho$  entonces para todo  $|z| \leq r$ ,  $|\gamma'_k(t)z^k| \leq M(r/\rho)^k$ . Por el Criterio mayorante de Weierstrass se sigue lo que queríamos probar. ■

Veamos ahora la prueba del Lema 4.5.

*Demostración.* (Lema 4.5). El lema anterior nos permite diferenciar la serie (4.21) para  $h_t(z)$  término por término con respecto a  $t$ . Por tanto, utilizando la ecuación diferencial de Loewner (2.13),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma'_k(t)z^k &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \log \left( \frac{F_t(z)}{ze^t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{F'_t(z)}{F_t(z)} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ z \frac{1 + x(t)z \frac{\partial F_t(z)}{\partial z}}{1 - x(t)z F_t(z)} - 1 \right]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Pero  $|x(t)z| = |z| < 1$  y entonces

$$\frac{1 + x(t)z}{1 - x(t)z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x(t)^k z^k.$$

Ahora tenemos también que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k(t) z^{k-1} = \frac{\partial h_t(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{\partial F_t(z)}{\partial z}}{F_t(z)} - \frac{1}{z} \right].$$

Así

$$\frac{\frac{\partial F_t(z)}{\partial z}}{F_t(z)} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k(t) z^{k-1}.$$

Sustituyendo esto en (4.24) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma'_k(t) z^k = \frac{1}{2} \left\{ z \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x(t)^k z^k \right] \left[ \frac{1}{z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k(t) z^{k-1} \right] - 1 \right\}.$$

Por lo tanto

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma'_k(t) z^k = \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x(t)^k z^k \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k(t) z^k \right].$$

Igualando coeficientes tenemos

$$\gamma'_k(t) = k \gamma_k(t) + x(t)^k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} j x(t)^{k-j} \gamma_j(t).$$

Omitiendo la dependencia de  $t$ , esto implica que

$$\gamma'_k = x^k - k \gamma_k + 2 \sum_{j=1}^k j x^{k-j} \gamma_j = x^k - k \gamma_k + 2x^k b_k,$$

donde  $b_k(t) = \sum_{j=1}^k j x^{-j}(t) \gamma_j(t)$  para  $k \geq 1$  (y  $b_0 \equiv 0$ ). Ahora el hecho de que  $k \gamma_k x^{-k} = b_k - b_{k-1}$  implica

$$\gamma'_k = x^k [1 + b_k + b_{k-1}]. \quad (4.25)$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k |\gamma_k(t)|^2 &= \frac{d}{dt} k \gamma_k(t) \overline{\gamma_k(t)} = 2 \operatorname{Re} k \gamma'_k \bar{\gamma}_k \\ &= 2 \operatorname{Re} k x^k [1 + b_k + b_{k-1}] \bar{\gamma}_k. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $b_k - b_{k-1} = k x^{-k} \gamma_k$  tenemos que  $k x^k \bar{\gamma}_k = (\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})$ . Por tanto, podemos expresar la derivada enteramente en términos de las funciones  $b_k$  por

$$\frac{d}{dt} k |\gamma_k(t)|^2 = 2 \operatorname{Re} [(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})(1 + b_k + b_{k-1})]. \quad (4.26)$$

Ahora consideremos la función  $\phi$  definida en (4.22). Omitiendo la dependencia de  $t$ ,

$$\phi' = \sum_{k=1}^n \tau_k \frac{d}{dt} [k |\gamma_k|^2] + \sum_{k=1}^n \tau'_k \left[ k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right]. \quad (4.27)$$

De (4.26) tenemos que

$$\psi = \sum_{k=1}^n \tau_k \frac{d}{dt} [k |\gamma_k|^2] = \sum_{k=1}^n 2\operatorname{Re} [(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})(1 + b_k + b_{k-1})] \tau_k.$$

Ahora aplicamos la suma por partes para obtener que

$$\psi = \sum_{k=1}^n X_k(\tau_k - \tau_{k+1}), \quad (4.28)$$

donde

$$\begin{aligned} X_m &\equiv \sum_{k=1}^m 2\operatorname{Re} [(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})(1 + b_k + b_{k-1})] \\ &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^m (\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1}) + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^m (\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})(b_k + b_{k-1}). \end{aligned}$$

Para cualesquiera números complejos  $z$  y  $w$ ,  $(\bar{z} - \bar{w})(z + w) = |z|^2 - |w|^2 - 2i\operatorname{Im}(z\bar{w})$ . Por tanto,

$$X_m = 2\operatorname{Re} b_m + 2 \sum_{k=1}^m (|b_k|^2 - |b_{k-1}|^2) = 2[\operatorname{Re} b_m + |b_m|^2].$$

De (4.28) tenemos que

$$\psi = 2 \sum_{k=1}^n [\operatorname{Re} b_k + |b_k|^2](\tau_k - \tau_{k+1}).$$

Usando (4.27) tenemos ahora que

$$\phi' = 2 \sum_{k=1}^n [\operatorname{Re} b_k + |b_k|^2](\tau_k - \tau_{k+1}) + \sum_{k=1}^n \tau'_k \left[ k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right]. \quad (4.29)$$

Centrándonos en el segundo sumando, tengamos en cuenta que

$$\sum_{k=1}^n \tau'_k \left[ k |\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\tau'_k}{k} [k^2 |\gamma_k|^2 - 1] = \sum_{k=1}^n \frac{\tau'_k}{k} [|b_k - b_{k-1}|^2 - 1].$$

Para el primer sumando de (4.29) usamos la propiedad (a) del Teorema 4.3 de las funciones  $\tau_k$  para obtener

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re} b_k + |b_k|^2] (\tau_k - \tau_{k+1}) &= -[\operatorname{Re} b_k + |b_k|^2] \left[ \frac{\tau'_k}{k} + \frac{\tau'_{k+1}}{k+1} \right] \\ &= - \left[ (\operatorname{Re} b_k) \frac{\tau'_k}{k} + |b_k|^2 \frac{\tau'_k}{k} + (\operatorname{Re} b_k) \frac{\tau'_{k+1}}{k+1} + |b_k|^2 \frac{\tau'_{k+1}}{k+1} \right]. \end{aligned}$$

Ahora sumamos estos términos para  $1 \leq k \leq n$  y recordando que  $\tau_{n+1} = b_0 = 0$ . Así

$$\sum_{k=1}^n [\operatorname{Re} b_k + |b_k|^2] (\tau_k - \tau_{k+1}) = - \sum_{k=1}^n \frac{\tau'_k}{k} [\operatorname{Re} b_k + |b_k|^2 + \operatorname{Re} b_{k-1} + |b_{k-1}|^2].$$

Observemos que dados dos números complejos  $z$  y  $w$  se verifica que

$$2\operatorname{Re} z + 2|z|^2 + 2\operatorname{Re} w + 2|w|^2 - |z - w|^2 + 1 = |z + w + 1|^2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \phi' &= - \sum_{k=1}^n \frac{\tau'_k}{k} [2\operatorname{Re} b_k + 2|b_k|^2 + 2\operatorname{Re} b_{k-1} + 2|b_{k-1}|^2 - |b_k - b_{k-1}|^2 + 1] \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{\tau'_k}{k} |b_k + b_{k-1} + 1|^2. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Recordando que el Teorema 4.3 garantizaba que  $\tau'_k$  es una función negativa, finalizamos la prueba. ■

Pasamos a probar el Teorema de De Branges. En primer lugar, usando el Teorema 2.5 probado en el Capítulo 2, observemos que es suficiente obtenerlo para funciones de corte simple:

**Proposición 4.9.** *Si la desigualdad (4.20) en la Conjetura de Milin es cierta para funciones con un corte simple en  $S$ , entonces es cierta para toda función en  $S$ .*

*Demostración.* Si  $f \in S$ , sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones con un corte simple en  $S$  tal que  $f_n \rightarrow f$  en la topología de la convergencia uniforme en compactos (véase Teorema 2.5). Para cada  $n$  sea  $h_n(z) = (1/2) \log[z^{-1}f(z)]$  y sea  $h$  como en el enunciado del Teorema de De Branges. Por definición es claro que  $h_n \rightarrow h$  en la topología de la convergencia uniforme en compactos dado que  $f_n \rightarrow f$  en la topología de la convergencia uniforme en compactos. Notando  $h_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,n} z^n$  se tiene que  $\gamma_{k,n} \rightarrow \gamma_k$  para todo  $k$  ya que la serie de potencias de  $h_n$  converge a la serie de potencias de  $h$  tal y como se ha demostrado en la sección 2.2. Luego si se verifica la Conjetura de Milin para funciones de corte simple, se tiene también para las funciones de la clase  $S$ . ■

*Demostración.* (Teorema 4.4). Comenzamos probando la desigualdad (4.20). Por la proposición anterior podemos suponer que  $f$  es una función de corte simple. De acuerdo con la propiedad (b) del Teorema 4.3,  $\tau_k(0) = n + 1 - k$  y entonces

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \sum_{k=1}^n (n + 1 - k) \left( k |\gamma_k(0)|^2 - \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k(0)|^2 - \frac{1}{k} \right) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right).\end{aligned}$$

Además de (c) en el Teorema 4.3 sabemos que  $\tau_k(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y así  $\phi(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) = - \int_0^\infty \phi'(t) dt \leq 0. \quad (4.31)$$

por el Lema 4.5. Concluimos así (4.20).

Mostraremos ahora que si  $f \in S$  y  $f$  no es una rotación de la función de Koebe, entonces se da la desigualdad estricta en (4.20) para todo  $n \geq 2$ .

Empezamos probándolo para funciones de corte simple. Si este es el caso y  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ , entonces  $|a_2| < \alpha < 2$  (véase el Teorema 1.8). Seguiremos usando la notación introducida para demostrar el Lema 4.5. En particular, definamos las función  $h$  como en (4.21) y las funciones  $b_k$  como en (4.25). Sea  $F_t(z)$  con serie de potencias  $e^t(z + a_2(t)z^2 + \dots)$ . Entonces  $|a_2(t)| \leq 2$  para todo  $t \geq 0$ . Luego se tiene que  $\gamma_1(t) = a_2(t)/2$  y  $b_1(t) = x(t)^{-1}\gamma_1(t)$ . Así (4.25) implica que

$$|\gamma_1'| = \left| 1 + \frac{1}{2}x^{-1}a_2 \right| \leq 2$$

y entonces

$$|\gamma_1(t)| = \left| \gamma_1(0) + \int_0^t \gamma_1'(s) ds \right| \leq \frac{\alpha}{2} + 2t.$$

La ecuación (4.30) y la propiedad (d) del Teorema 4.3 implican que

$$\phi'(t) \geq (-\tau_1') |b_1 + 1|^2 = (-\tau_1') |x^{-1}\gamma_1 + 1|^2 \geq (-\tau_1') \left( 1 - \frac{\alpha}{2} - 2t \right)^2$$

para  $0 \leq t \leq 4^{-1}(2 - \alpha)$ . De (4.31) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) &= - \int_0^\infty \phi'(t) dt \leq - \int_0^{(2-\alpha)/8} \phi'(t) dt \\ &\leq - \int_0^{(2-\alpha)/8} (-\tau_1'(t)) \left( 1 - \frac{\alpha}{2} - 2t \right)^2 dt \\ &\leq \left[ \frac{2 - \alpha}{4} \right] \int_0^{(2-\alpha)/8} \tau_1'(t) dt.\end{aligned} \quad (4.32)$$

Dado que  $\tau_1' < 0$ , tenemos la desigualdad estricta en (4.20). Es importante observar que puesto que  $\tau_1$  no depende de  $f$ , la anterior cota es válida para todas las funciones de corte simple tales que el módulo de su segundo coeficiente de Taylor esté acotado por  $\alpha$ .

Ahora sea  $f$  una función arbitraria en la clase  $S$  que no sea una rotación de la función de Koebe. De nuevo por el Teorema 1.8 existe  $\alpha < 2$  tal que  $|a_2| < \alpha < 2$ . Sea  $\{f_j\}$  una sucesión de funciones con un corte simple en  $S$  que convergen a  $f$  en la topología de la convergencia uniforme en compactos. Debido a que  $|a_2| < \alpha < 2$ , podemos asumir que  $|a_{j,2}| < \alpha$  para todo  $j \geq 1$  (siendo  $a_{j,2} = f_j''(0)/2$ ). Así la desigualdad en (4.32) se da para cada función  $f_j$  (con  $\gamma_k$  remplazado por el correspondiente coeficiente  $\gamma_{j,k}$ ). Esta acotación uniforme para la suma (4.20) para las funciones  $f_j$  implica la desigualdad estricta para la función límite  $f$ .

■



---

## Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, Mc Grad-Hill, New York, 1973.
- [2] R. Askey y G. Gaspar, *Positive Jacobi polynomial sums. II*, Amer. J. Math. 98 (1976), 709-737.
- [3] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1916, 940–955.
- [4] F. Bracci, M.D. Contreras y S. Díaz-Madrigal, *Continuous semigroups of holomorphic self-maps of the unit disk*, Springer, Berlin, 2020.
- [5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [6] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154 (1985), 137–152.
- [7] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] C.H. FitzGerald y Ch. Pommerenke, *The de Branges theorem on univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985), 683–690.
- [9] S. Gong, *The Bieberbach Conjecture*, Amer. Math. Soc. Intern. Press, Providence, R.I., 1999.
- [10] Gronwall, T. H. *Some remarks on conformal representation*. Ann, of Math., 16 (1914-1915), 72–76.
- [11] Koebe, P. *Über die Uniformierung beliebiger analytischer Kurven*. Nachr. Akad. Diss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1907, 191-210.
- [12] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, I, Math. Ann., 89 (1923), 103–121.
- [13] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [14] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc, Providence, R. I., 1959.