ULTRAFILTROS Y APLICACIONES

Manuel Camúñez Triguero

ULTRAFILTROS Y APLICACIONES

Manuel Camúñez Triguero

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Máster Universitario en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Mª Ángeles Japón Pineda

Índice general

English Abstract

In this document, we present the notion of ultrafilter and study some of its properties and applications. Firstly, the manuscript begins with a general study of filters and ultrafilters, and compare them with some other more broadly extended mathematical concepts such as topology or nets. Next, ultrafilters are applied as relevant tools in some other areas of Mathematics, such as Analysis or Combinatorics. The last chapter consists of an application of ultrafilters to Social Sciencies and more particularly to the Arrow's Imposibility Theorem.

Introducción

El concepto de ultrafiltro nace a principios del siglo XX introducido por Riesz, y su uso se extendió rápidamente entre los círculos matemáticos, de la mano de figuras como Banach, Tarski o Bourbaki. Los ultrafiltros formalizan una serie de ideas conceptuales, por ejemplo, dado un conjunto establecer cuáles de sus subconjuntos tienen mucho *"peso"*, o cuales son *"muy grandes"*.

Pero la relevancia de los ultrafiltros puede ir mucho más allá. Los ultrafiltros también pueden usarse para generalizar nociones de convergencia topológica. Aquí la palabra *topológica* significa que dicha convergencia se expresa en términos cualitativos. Dígase, un objeto es convergente o no lo es. Aunque a primera vista parezca una limitación, permite el uso de dicha herramienta para el estudio matemático de *"tendencias"* en contextos donde no procede el concepto clásico de convergencia de una sucesión numérica.

Este documento busca introducir al lector a los ultrafiltros (pasando previamente por los filtros), estudiando propiedades generales y comparándolos con otras estructuras matemáticas más extendidas, y posteriormente aplicarlos en ramas y problemas varios de la Matemática, justificando el interés de tal objeto.

El desglose por capítulos es el siguiente:

El capítulo primero es el de mayor extensión. Se definen los ultrafiltros, se demuestran las propiedades principales y se comparan con la topología y las redes.

El capítulo segundo usa los ultrafiltros como herramienta para el estudio de diversas cuestiones del Análisis, en particular generalizar conceptos como el de límite de una sucesión.

El capítulo tercero se vale de los ultrafiltros para construir la llamada *Compactificación de Stone-Čech* de los números naturales, notada $\beta\mathbb{N}$, el cual es un espacio compacto en el que los naturales son densos de tal forma que toda aplicación con dominio los números naturales e imagen contenida en un conjunto compacto (por ejemplo, toda función acotada de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$) se extienda a una continua en todo el espacio $\beta\mathbb{N}$.

El capítulo cuarto lo constituyen algunas aplicaciones a la Combinatoria, y más particularmente a la Teoría de Ramsey en grafos y en los números naturales.

El capítulo quinto ilustra una nueva utilidad de los ultrafiltros aplicándolos a las Ciencias Sociales, probando el conocido como *Teorema de Imposibilidad de Arrow*.

Notación y simbología

$\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales.

El operador lógico de conjunción se escribe mediante el símbolo $\wedge$. La expresión $P \wedge Q$ significa *se dan simultáneamente las premisas P y Q.*

El operador lógico de disyunción se escribe mediante el símbolo $\vee$. La expresión $P \vee Q$ significa *se da la premisa P o la premisa Q.*

Dado un conjunto X se denota por $\boldsymbol{\mathcal{P}(X)}$ al conjunto de sus partes, es decir, al conjunto de los subconjuntos de X.

1 Generalidades

Definición 1.1 (Filtro). *Sea S un conjunto cualquiera. Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de no vacíos de S es un* ***filtro*** *si verifica las siguientes propiedades:*

a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *y* $X \in \mathcal{F}$*;*
b) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$*;*
c) $(F \in \mathcal{F}) \wedge (F \subseteq F') \implies F' \in \mathcal{F}$*.*

Definición 1.2. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro. Una familia de conjuntos $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ es una* ***base del filtro $\mathcal{F}$*** *si:*

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq S \,:\, F_0 \subseteq F \text{ para algún } F_0 \in \mathcal{F}_0\}.$$

Proposición 1.1. Si $\mathcal{C}$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de S entonces $\mathcal{C}$ es un una base de algún filtro si y sólo si:

$$[(C_1, C_2 \in \mathcal{C}) \implies (C_3 \subseteq C_1 \cap C_2 \text{ para algún } C_3 \in \mathcal{C})]$$

Demostración. Considérese la siguiente familia de subconjuntos de S:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq S \,:\, C \subseteq F \text{ para algún } C \text{ elemento de } \mathcal{C}\},$$

es decir, la familia formada por los elementos de $\mathcal{C}$ y todos los conjuntos que contienen a dichos elementos. Veamos que $\mathcal{F}$ es un filtro.

Para probar la propiedad $a)$ de la *Definición 1.1* sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, y sean C_1 y C_2 elementos de $\mathcal{C}$ tales que $C_1 \subseteq F_1$ y $C_2 \subseteq F_2$. Se tiene entonces que existe $C_3 \in \mathcal{C}$ con $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$ y como consecuencia:

$C_3 \subseteq C_1 \cap C_2 \subseteq F_1 \cap F_2,$

de lo que se deduce $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{C}$.

Para probar la propiedad $b)$ de la *Definición 1.1*, sea $F \in \mathcal{F}$ y $F' \supseteq F$. Por hipótesis existe $C \in \mathcal{C}$ con $C \subseteq F$, es decir: $C \subseteq F \subseteq F'$, de donde $F' \in \mathcal{F}$, concluyendo que $\mathcal{F}$ es un filtro.

El filtro $\mathcal{F}$ tiene por base $\mathcal{C}$ de manera inmediata por definición.

∎

Proposición 1.2. Si S es un conjunto y $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de S que verifica la propiedad de la intersección finita, existe un filtro que extiende a la familia.

Demostración. Considérese la familia asociada siguiente:

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \;:\; \textit{los índices } i_k \textit{ definen subconjuntos finitos de } I \right\},$$

es decir, el conjunto de las intersecciones finitas de elementos de la familia $\{F_i\}_{i\in I}$. Entonces $\mathcal{C}$ está en las condiciones de la *Proposición 1.1*, ya que la intersección de elementos de $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathcal{C}$ de manera inmediata, concluyendo la existencia del filtro deseado.

∎

Definición 1.3. *Dados dos filtros $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tales que $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$ se dice:*

- *$\mathcal{F}_1$ es **más fino** que $\mathcal{F}_2$*
- *$\mathcal{F}_2$ es **más grueso** que $\mathcal{F}_2$.*

Definición 1.4 (filtro de Fréchet). *Dado S un conjunto infinito definimos su **filtro de Fréchet** asociado como el siguiente conjunto:*

$$\{F \subseteq S \;:\; S \setminus F \textit{ es finito}\}.$$

Definición 1.5 (filtro de Fréchet real). *Denominamos **filtro de Fréchet real** al filtro de $\mathbb{R}$ que tiene por base:*

$$\mathcal{C} = \{(a, +\infty) \;:\; a \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.6 (filtro principal). *Un filtro $\mathcal{F}$ se dice **principal** si existe $A_0 \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) \ : \ A_0 \subseteq A\}$. En ese caso, se dice que $\mathcal{F}$ es el **filtro principal basado en A_0**. Cuando se conoce de antemano el conjunto A_0 el filtro principal basado en A_0 se denota $\boldsymbol{\mathcal{F}(A_0)}$.*

*En caso contrario se dice que **el filtro $\mathcal{F}$ es no principal** o **el filtro $\mathcal{F}$ es libre**.*

Cuando $A_0 = \{x_0\}$, es decir, que el filtro es principal basado en un conjunto unitario, se escribe $\boldsymbol{\mathcal{F}(x_0)}$ para denotar al filtro $\mathcal{F}(\{x_0\})$.

Una propiedad relativamente directa de los filtros principales es la siguiente:

Observación 1.1. Si $A \subseteq B$ entonces el filtro basado en A es más fino que el filtro basado en B, por lo que se tiene la relación $\mathcal{F}(A) \supseteq \mathcal{F}(B)$

Para probarlo basta con considerar $F \in \mathcal{F}(B)$ y observar que se tiene la cadena de inclusiones $F \subseteq B \subseteq A$, probando $F \in \mathcal{F}(A)$.

La observación previa tiene además una versión recíproca:

Observación 1.2. Si $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{F}(B)$ son dos filtros principales tales que $\mathcal{F}(B)$ es más fino que $\mathcal{F}(A)$, entonces se tiene la relación $B \subseteq A$.

Basta observar que $A \in \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$, y por definición se ha de verificar $B \subseteq A$.

Definición 1.7 (Ultrafiltro). *Un filtro $\mathcal{F}$ se dice que es un **ultrafiltro** si no hay un filtro más fino que lo contenga.*

Un ejemplo fácil de *ultrafiltro* es el siguiente:

Ejemplo 1.1. Dado $x_0 \in X$, si $\mathcal{F}(x_0)$ es el filtro basado en x_0 entonces $\mathcal{F}(x_0)$ es un ultrafiltro. Es más, un filtro principal basado en A es un ultrafiltro si y solo si A es unitario.

Un filtro basado en un conjunto unitario es ultrafiltro porque si hubiese un filtro $\mathcal{G}$ más fino habría de verificarse $\{x_0\} \in \mathcal{F}(x_0) \subseteq \mathcal{G}$, probando que $\{x_0\} \in \mathcal{G}$. Consecuentemente para cada $F \in \mathcal{G}$ se tiene $\{x_0\} \cap F \neq \emptyset$, por lo que $x_0 \in F$ para cada $F \in \mathcal{G}$, probando $\mathcal{G} \subseteq \{F \ : \ x_0 \in F\} = \mathcal{F}(x_0)$ y se sigue que el ultrafiltro principal es más fino que $\mathcal{G}$.

Un filtro principal basado en un conjunto A no unitario no puede ser principal, puesto que si A no es unitario existe B contenido estrictamente en A y gracias a la *Observación 1.1* $\mathcal{F}(B)$ es más fino que $\mathcal{F}(A)$. Como B no puede ser un elemento del filtro $\mathcal{F}(A)$ pero es un elemento de $\mathcal{F}(B)$, la contención es estricta, contradiciendo la maximalidad del ultrafiltro.

El siguiente resultado se le conoce como el **Principio del Ultrafiltro**, y es de mucha importancia en la rama de *Fundamentos de la Matemática*:

Teorema 1.1 (Principio del Ultrafiltro). *Todo filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{G}$ también en X.*

Para demostrarlo serán necesarias las siguientes herramientas algebraicas:

Definición 1.8 (Orden parcial). *en un conjunto $\mathcal{X}$ un orden parcial es una relación $\sim$ que verifica:*

1. $x \sim x$
2. $x \sim y$ *e* $y \sim x$ *implica* $x = y$
3. $x \sim y$ *e* $y \sim z$ *implica* $x \sim z$.

*en tales condiciones se suele denotar por $\leq$ a la relación $\sim$, y al par $(\mathcal{X}, \leq)$ un **conjunto parcialmente ordenado**.*

Definición 1.9 (Cadena). *En un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{X}, \leq)$ un subconjunto $\mathcal{C}$ se dice una **cadena** si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{C}$ se verifica $x \leq y$ ó $y \leq x$.*

Lema 1.1 (Lema de Zorn). Si $(\mathcal{X}, \leq)$ es conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena $\mathcal{C}$ tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en $\mathcal{X}$.

Demostración (Teorema 1.1). Vamos a usar el *Lema de Zorn*. Consideremos el conjunto de los filtros más finos que $\mathcal{F}$ y en dicho conjunto consideramos el orden parcial $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ si se verifican las contenciones $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Sea entonces una cadena $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$. Considérese el conjunto siguiente: $\mathcal{G} := \bigcup_\alpha \mathcal{F}_\alpha$. Es obvio que $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{G}$ para todo α y que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, por tanto sólo falta por probar que $\mathcal{G}$ es efectivamente un filtro.

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ porque por definición no es elemento de ningún filtro de la cadena y $X \in \mathcal{G}$ porque es elementos de $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

2) Sean A y B elementos de $\mathcal{G}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen α_1 y α_2 índices tales que $A \in \mathcal{F}_{\alpha_1}$ y $B \in \mathcal{F}_{\alpha_2}$ con $\mathcal{F}_{\alpha_1} \leq \mathcal{F}_{\alpha_2}$. En particular se verifica que tanto A como B son elementos de $\mathcal{F}_{\alpha_2}$, y por ser este filtro se tiene $A \cap B \in \mathcal{F}_{\alpha_2} \subseteq \mathcal{G}$.

3) Sean $F \in \mathcal{G}$ y $F' \supseteq F$. Entonces existe α con $F \in \mathcal{F}_\alpha$, pero por ser filtro tenemos $F' \in \mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{G}$.

Por tanto $\mathcal{G}$ es un filtro. Como toda cadena tiene un elemento maximal, existe un elemento maximal en el conjunto de los filtros más finos que $\mathcal{F}$, y tal elemento es el ultrafiltro deseado.

∎

Lema 1.2. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal
b) Ningún conjunto finito es un elemento de $\mathcal{F}$

Demostración. El esquema de la demostración es probar *no b)* implica *no a)* seguido de *no a)* implica *no b)*.

Supongamos que $\mathcal{F}$ contiene algún conjunto finito $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$, entonces si $\{s_n\} \in \mathcal{F}$ el ultrafiltro es principal de manera directa. En caso contrario S y $X \setminus \{s_n\}$ son simultáneamente elementos del ultrafiltro y por tanto su intersección también. Como la intersección es el conjunto $\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\}$, aplicando el mismo argumento inductivamente llegamos a que algún conjunto unitario $\{s_i\}$ debe ser un elemento del ultrafiltro, haciéndolo principal.

Si $\mathcal{F}$ es principal, gracias al *Ejemplo 1.1* tiene que estar basado en un conjunto unitario, en particular uno de sus elementos es un conjunto unitario, negando la propiedad b).

∎

Teorema 1.2. *Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X si y sólo si para todo subconjunto E de X se tiene $E \in \mathcal{F}$ ó $X \setminus E \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Sea entonces F un elemento de $\mathcal{F}$ cualquiera (y por tanto ha de ser no vacío). Por ser no vacío tiene intersección no vacía con E ó E^c. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $F \cap E \neq \emptyset$.

Consideremos entonces la familia $\mathcal{G} := \{F \cap E \,:\, F \in \mathcal{F}\}$. Es un ejercicio sencillo comprobar que dicha familia verifica las condiciones de la *Proposición 1.1*, y por tanto es base de un filtro $\mathcal{G}$ que claramente debe de ser más fino que $\mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro necesariamente se tiene $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ y con ello $E \in \mathcal{F}$.

Continuemos con la implicación inversa. Supongamos por reducción al absurdo que existe $\mathcal{G}$ un filtro estrictamente más fino que $\mathcal{F}$. Entonces existe $A \in G$ tal que $A \notin \mathcal{F}$. Por la condición hipótesis tenemos $A^c \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, pero en tal caso A y A^c son simultáneamente elementos del filtro $\mathcal{G}$, contradiciendo la propiedades $a)$ y $b)$ de la *Definición 1.1*.

∎

Observación 1.3 (Caracterización de ultrafiltros). Dada $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de algún espacio S tenemos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si verifica las siguientes tres condiciones:

a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
b) Si F_1 y F_2 son elementos de $\mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2$ también lo es.
c) Para todo $E \subseteq S$ o bien $E \in \mathcal{F}$ o bien $E^c \in \mathcal{F}$.

Corolario 1.1. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ es una familia de subconjuntos disjuntos de S tales que su unión es un elemento de un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en S entonces existe exactamente un i en $\{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{F}$.

Demostración. En primer lugar, en tales condiciones, de existir un A_i con $A_i \in \mathcal{F}$ debe de ser único, puesto que si fuesen A_i y A_j elementos diferentes del ultrafiltro, $A_j \subseteq A_i^c$ de donde A_i y A_i^c son simultáneamente elementos del ultrafiltro, contradiciendo el *Teorema 1.1*.

Nos queda por probar que existe al menos un A_i que esté en el ultrafiltro. Procedamos por inducción. Para $n = 1$ el resultado es inmediato puesto que la afirmación *la unión es un elemento del ultrafiltro* se reduce a $A_1 \in \mathcal{F}$.

Supóngase cierto el resultado para un cierto n y veamos que también es cierto para $n + 1$. Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}$ tales que la unión de todos ellos es un elemento del ultrafiltro. Considérese $A = \sqcup_{i=1}^{n} A_n$. Se tiene entonces de forma inmediata $A \sqcup A_{n+1} \in \mathcal{F}$.

Si fuese $A_{n+1} \in \mathcal{F}$ se concluye la prueba. En caso contrario, debe darse $A_{n+1}^c \in \mathcal{F}$ por el *Teorema 1.1*. Se puede comprobar fácilmente la igualdad:

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) \cap \left(A_{n+1}^c \right).$$

Y como son ambos objetos entre paréntesis elementos del ultrafiltro, su intersección A también lo es por el segundo apartado de la *Definición 1.1*. Aplicando la hipótesis de inducción a A se concluye la tesis buscada.

∎

Una cuestión interesante es plantear si es posible caracterizar los ultrafiltros principales. Cuando el conjunto S sobre el que se construye el ultrafiltro es finito es inmediato que todos los ultrafiltros son de la forma $\mathcal{F}(x)$ para algún x de S. Cuando el conjunto es infinito aparecen nuevos ultrafiltros *"no triviales"*.

Observación 1.4. Si S es infinito, entonces existen ultrafiltros no principales.

Efectivamente, consideremos $\mathcal{F}$ el filtro de Frechet. Por el *Teorema 1.1* está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{G}$. Sea $x \in S$, entonces $\{x\} \notin \mathcal{G}$, ya que el conjunto $S \setminus \{x\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ y este está contenido en $\mathcal{G}$.

Lema 1.3. Un ultrafiltro es libre si y solo si contiene al filtro de Frechet.

Demostración. La implicación a derecha se debe a que en caso contrario existiría un conjunto finito $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ tal que $X \setminus S$ no es un elemento del ultrafiltro y gracias a la propiedad $c)$ de la *Observación 1.3* se sigue que S sí es un elemento del ultrafiltro. Hemos llegado a una contradicción con el *Lema 1.2* y la implicación a izquierda es inmediata.

∎

En general, conocer explícitamente un ultrafiltro no principal es difícil. Para ilustrar este hecho, existen resultados de matemática fundacional que establecen la imposibilidad de probar la existencia de ultrafiltros no principales en $\mathbb{N}$ usando sólo la axiomática de Zermelo-Fraekel y el llamado *axioma de elección dependiente*.

Es más, en matemática fundacional se sabe que el principio del ultrafiltro es equivalente al axioma de elección, lo que ilustra que los ultrafiltros son *"altamente no constructivos"*. Dichos resultados se encuentran en [14], p.151. Para una demostración consúltese [11].

Observación 1.5. En general, los ultrafiltros quedan muy binariamente divididos en ultrafiltros *"muy trivales"* (los principales) y ultrafiltros *"nada triviales"* (los no principales).

Sorprendentemente, a pesar de que los ultrafiltros no principales son difíciles de conocer explícitamente, se puede demostrar un resultado que nos da información muy precisa sobre *"cuantos hay"*:

Teorema 1.3. *Si S es un conjunto infinito y βS es el conjunto de los ultrafiltros en S, entonces existe una biyección*

$$\beta S \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)).$$

Dicho resultado se referencia en [14] y se prueba en [3] además de en [1] p. 117.

Dicho teorema presenta el siguiente sorprendente resultado como corolario:

Teorema 1.4. *Sean S un conjunto infinito, βS el conjunto de los ultrafiltros en S y ΩS el conjunto de los filtros en S. Entonces existe una biyección*

$$\beta S \longleftrightarrow \Omega S$$

Será necesario el siguiente resultado:

Teorema 1.5 (Teorema de Schöder-Bernstein:). *Si A y B son conjuntos tales que existen aplicaciones inyectivas (también llamadas inyecciones) de A en B y de B en A, entonces existe una biyección entre A y B.*

Demostración (Teorema 1.4). Se tiene de manera inmediata la siguiente cadena de inyecciones:

$$\beta S \xhookrightarrow{i} \Omega S \xhookrightarrow{i} \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \xhookrightarrow{f} \beta S$$

donde i es la inclusión correspondiente y f es la inyección dada por el *Teorema 1.3*. Se concluye fácilmente que existen inyecciones de βS en ΩS y viceversa, por lo que gracias al *Teorema de Berstein* existe la biyección.

▮

Observación 1.6. El *Teorema 1.4* no es cierto cuando S es finito no vacío. En tal caso sabemos que $|\beta S| = |S|$, ya que todos los ultrafiltros son principales de manera inmediata. Para el caso de los filtros, sabemos que tenemos uno diferente por cada subconjunto de S, de donde $|\Omega S| \geq |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|} > |S|$.

Para concluir la sección, vamos a enunciar dos resultados hermanos de los cuales solo demostraremos el segundo, puesto que como se verá posteriormente, los argumentos de la segunda demostración se pueden *"rescatar"* para la primera.

Proposición 1.3. Sean dos conjuntos X e Y, una aplicación $f : X \to Y$ y $\mathcal{F}$ un filtro en X, entonces la familia:

$$f(\mathcal{F}) = \{f(F) \,:\, F \in \mathcal{F}\}$$

define una base de un filtro en Y, al que en ocasiones nos referiremos como **filtro imagen**.

Proposición 1.4. Sean dos conjuntos X e Y, una aplicación $f : X \to Y$ y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en X, entonces la familia:

$$f(\mathcal{F}) = \{f(F) \,:\, F \in \mathcal{F}\}$$

define un ultrafiltro en $f(X)$, al que en ocasiones nos referiremos como **ultrafiltro imagen**.

Demostración. Usaremos la caracterización de la *Observación 1.3.*

En primer lugar, se verifica fácilmente que $X \in f(\mathcal{F})$ y $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$.

Seguidamente, sean G_1 y G_2 en $f(\mathcal{F})$ y sean F_1 y F_2 dos elementos de $\mathcal{F}$ tales que $f(F_1) = G_1$ y $f(F_2) = G_2$. Entonces por ser $\mathcal{F}$ filtro $F_1 \cap F_2$ es un elemento de $\mathcal{F}$ y consecuentemente un elemento de $f(\mathcal{F})$ es $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = G_1 \cap G_2$, probando que la intersección $G_1 \cap G_2$ es un elemento de $f(F)$ por la propiedad *b)* de la *Definición 1.1*

Para el apartado final sea A un subconjunto de $f(X)$ y sea $A^c := f(X) \setminus A$. Definimos $B := f^{-1}(A)$, teniendo de forma directa $B^c := X \setminus B = f^{-1}(A^c)$. Por ser $\mathcal{F}$ ultrafiltro o bien $B \in \mathcal{F}$ o bien $B^c \in \mathcal{F}$. Debido a las igualdades $f(B) = A$ y $f(B^c) = A^c$ se tiene de forma inmediata $A \in f(\mathcal{F})$ o $A^c \in f(\mathcal{F})$.

∎

Observación 1.7. Observemos que en el resultado para filtros se ha afirmado que el conjunto *filtro imagen* define una **base de filtros** para el conjunto Y **al completo** mientras que en segundo resultado se ha afirmado que el filtro imagen **es un filtro** para la **imagen de la aplicación**. Dichas afirmaciones son intercambiables y los resultados son ciertos, pero se ha incluido *"una de cada una"* para enfatizar la libertad de elección.

Proposición 1.5. Sean dos conjuntos X e Y, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ y $\mathcal{F}$ un (ultra)filtro en X, entonces la familia:

$$f(\mathcal{F}) = \{A \subseteq Y \ : \ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

define un (ultra)filtro en Y, al que en ocasiones nos referiremos como **(ultra)filtro imagen**.

Demostración. Probaremos el caso $\mathcal{F}$ filtro. Bastará con comprobar que dicha familia tiene por base la definida en la *Proposición 1.3*.

Sea $A \in f(\mathcal{F})$. Sea $F = f^{-1}(A)$, que por hipótesis es un elemento de $\mathcal{F}$. Entonces $f(F) = f(F^{-1}(A)) \subseteq A$, luego A es un elemento del filtro definido por la base de la *Proposición 1.3*.

Sólo resta por comprobar que todo elemento del conjunto $\{f(F) \ : \ F \in \mathcal{F}\}$ está en nuestro nuevo $f(\mathcal{F})$. Sabemos $F \subseteq f^{-1}(f(F))$, luego si $F \in \mathcal{F}$ se sigue $f^{-1}(f(F)) \in \mathcal{F}$, de donde $f(F) \in f(\mathcal{F})$, concluyendo la equivalencia.

La demostración para el caso $\mathcal{F}$ ultrafiltro es totalmente análoga. ∎

Observación 1.8. Los argumentos dados en la demostración de la *Proposición 1.5* en realidad demuestran que los filtros imagen de la *Proposición 1.3* y la *Proposición 1.5* son el mismo, y por tanto las definiciones son equivalentes. Lo mismo para el caso de los ultrafiltros imagen.

1.1 Aplicación y relaciones con la Topología

Comenzaremos dando una introducción breve a los conceptos básicos de la Topología y algunos resultados fundamentales.

Definición 1.10. *Sea X un conjunto. Una familia τ de subconjuntos de X se dice que es una* ***topología*** *sobre X si verifica las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset, X \in \tau$;*
2. *Si U y V son elementos de τ entonces $U \cap V$ también lo es;*
3. *Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección arbitraria de elementos de τ entonces $\cup_{i\in I} U_i$ también lo es.*

Si se dan tales condiciones a los elementos de τ se les llama ***conjuntos abiertos de la topología****, y a los complementarios en X de dichos conjuntos de les llama los* ***conjuntos cerrados de la topología****. Al par (X, τ) se le llama* ***espacio topológico****.*

Si (X, τ) es un espacio topológico y el contexto no da lugar a confusión, se hará referencia al espacio como simplemente X.

Algunas de las nociones importantes de la rama son las siguientes:

Definición 1.11 (Conjunto compacto). *Sean X es un espacio topológico y K un subconjunto suyo. Decimos que K es* ***compacto*** *si para cualquier familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de la topología con $K \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ existe una selección finita de elementos de la familia $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\}$ tales que $K \subseteq \cup_{k=1}^{n} U_{i_k}$.*

Definición 1.12 (Punto interior). *Sea X un espacio topológico y sea x un elemento del mismo. Decimos que un conjunto E es un* ***entorno de x*** *si existe un abierto U con $x \in U \subseteq E$. Al conjunto $\{x \in E \,:\, E \text{ es entorno de } x\}$ se le denomina el* ***interior de E****, y se denota* ***int(E)****.*

Definición 1.13. *Si X es un espacio topológico, denotamos por $\boldsymbol{\mathcal{U}_x}$ a la familia de conjuntos que son entornos abiertos de x.*

Observación 1.9. La familia de los entornos de x es un filtro que tiene por base $\mathcal{U}_x$.

Definición 1.14. *Sea X un espacio topológico y F un subconjunto cualquiera del mismo. Denotamos por $\overline{\boldsymbol{F}}$ y denoninamos por* ***clausura de F*** *al conjunto:*

$$\{x \in X \,:\, \forall U \in \mathcal{U}_x,\, U \cap F \neq \emptyset\}.$$

Un resultado importante de equivalencia de compacidad es el siguiente:

Proposición 1.6. Sea X un espacio topológico y K un subconjunto suyo. Entonces K es compacto si y solo si toda colección $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados contenidos en K que verifica la *propiedad de la intersección finita* tiene intersección no vacía.

Una topología sobre un conjunto es habitualmente percibida como una de las estructura más generales posibles sobre la que estudiar nociones como la convergencia de sucesiones o la continuidad de una aplicación, que admiten la siguiente expresión en términos de la topología:

Definición 1.15 (Límite de una sucesión). *Sea X un espacio topológico y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en dicho conjunto. Decimos que x es un límite de la sucesión si para cada U entorno abierto de x, existe n_0 (que depende de U) tal que $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ está contenido en U. En tales condiciones se dice que* ***la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x****.*

Definición 1.16 (Aplicación continua). *Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos y sea $f: X\to Y$ una aplicación entre ambos. Sea $x\in X$, decimos que f es* ***continua en x*** *si para cada V abierto de τ_Y con $f(x)\in V$ existe $U\in\tau_X$ con $f(U)\subseteq V$. Decimos que f es* ***continua*** *si para cada V abierto de τ_Y existe $U\in\tau_X$ con $f(U)\subseteq V$.*

Proposición 1.7. Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos y sea $f: X\to Y$ una aplicación entre ambos. Entonces f es continua en x si y solo si para cada $V\in\tau_Y$ con $f(x)\in V$ se verifica que $f^{-1}(V)$ es entorno abierto de x. Además, f es continua si y solo si para cada $V\in\tau_Y$ se verifica $f^{-1}(V)\in\tau_X$.

De ahora en adelante para referirnos a una aplicación continua haremos referencia a la definición que más cómoda resulte en el contexto.

Finalmente, pasamos a definir nociones de convergencia usando filtros y ultrafiltros, para ilustrar las similitudes con la topología, e incluso se demostrarán algunos resultados de *"paralelismo"* entre ambas estructuras.

Definición 1.17. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ decimos que $\mathcal{F}$* ***converge a x*** *si $\mathcal{U}_x\subseteq\mathcal{F}$. Cuando es así escribimos $\mathcal{F}\to x$.*

Un buen resultado para mostrar el interés de los ultrafiltros es la siguiente equivalencia de la compacidad, noción topológica de importancia difícil de exagerar:

Teorema 1.6. *Sea X un espacio topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es compacto;*

b) Todo ultrafiltro en X es convergente.

Demostración. Usaremos la caracterización proporcionada por la *Proposición 1.6.*

Supongamos cierto $a)$. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro y sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ elementos del mismo. Tenemos de forma directa $\cap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \supseteq \cap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Es decir, la familia $\left(\overline{A}\right)_{A\in\mathcal{F}}$ verifica la propiedad de la intersección finita, y por compacidad de X, tienen intersección no vacía. Sea $x \in \cap_{A\in\mathcal{F}}\overline{A}$. Por ser $x \in \overline{A}$ para todo A del ultrafiltro, para cada V entorno abierto de x se tiene $A \cap V \neq \emptyset$. Consecuentemente tiene sentido considerar la base de filtros:

$$\mathcal{B} = \{A \cap V \ : \ A \in \mathcal{F},\, V \in \mathcal{U}_x\}$$

Debido a la inclusión $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, el ultrafiltro debe de estar contenido en el filtro generado por la base, pero la condición de ser filtro maximal implica que han de coincidir, concluyendo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Lo anterior justifica que todo abierto V entorno de x verifica $V = X \cap V \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, probando la convergencia del ultrafiltro.

Supóngase ahora que se verifica $b)$. Sea $\{C_i\}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. En particular se verifican las hipótesis de la *Proposición 1.2*, existe un filtro $\mathcal{F}$ que contiene a la familia y en virtud del *Teorema 1.1* podemos imponer que $\mathcal{F}$ sea ultrafiltro. En particular cada C_i de la familia es un elemento del ultrafiltro.

La hipótesis $b)$ nos asegura que existe $x \in X$ con $U \in \mathcal{F}$ para cada U entorno de x. Se ha de verificar $x \in C_i$ para cada C_i de la familia. Si no fuese así, existiría C_i con $x \notin C_i$, es decir, $x \in C_i^c$. Como los C_i son cerrados, los C_i^c son abiertos y por tanto entornos de x, lo que implicaría $C_i^c \in \mathcal{F}$, contradiciendo $C_i \in \mathcal{F}$.

Como $x \in C_i$ para cada i, se sigue de forma directa que la familia tiene intersección no vacía.

▎

Definición 1.18 (Punto de acumulación). *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto S decimos que $x \in S$ es un* ***punto de acumulación*** *si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall U \in \mathcal{U}_x$ se tiene $F \cap U \neq \emptyset$. Alternativamente:*

$$x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}.$$

Observación 1.10. Nótese que $\mathcal{F} \to x$ implica que x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$, pero el recíproco no es cierto en general.

Teorema 1.7. *El filtro $\mathcal{F}$ tiene a x como punto de acumulación si y solo si existe $\mathcal{G}$ un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x*

Demostración. Supongáse en primer lugar que $\mathcal{F}$ tiene a x como punto de acumulación. Entonces por definición $U \cap F \neq \emptyset$ para todo U entorno de x y todo F elemento del filtro. Se puede comprobar fácilmente entonces que

$$\{U \cap F \,:\, U \in \mathcal{U}_x,\ F \in \mathcal{F}\}$$

es una base de un filtro $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$. Efectivamente, todos los entornos del punto son elementos del filtro al ser $U = U \cap X \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{F}$ un elemento de la base, todo $F \in \mathcal{F}$ verifica $F = X \cap F \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{F}$ y la caracterización de la *Proposición 1.1* es fácil de comprobar.

Supóngase ahora que existe $\mathcal{G}$ un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x. Por definición de ser más fino todo F elemento del filtro $\mathcal{F}$ es elemento de $\mathcal{G}$. Por definición de convergente a x todo U entorno del punto también es un elemento de $\mathcal{G}$. Por la propiedad $b)$ de la *Definición 1.1* la intersección $U \cap F \in \mathcal{G}$ es no vacía. Por la generalidad de U y F ha de ser x punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Observación 1.11. Si $\mathcal{F} \to x$ entonces el $\mathcal{G}$ al que hace referencia el teorema es el propio $\mathcal{F}$, puesto que un conjunto siempre es más fino que él mismo. Es cuando $\mathcal{F}$ no converge a x cuando obtenemos un filtro *"estrictamente"* más fino.

La siguiente batería de tres resultados justifica el interés de los conceptos previos y valida el uso de los filtros como herramienta para el estudio de propiedades topológicas tales como la continuidad o la clausura.

Teorema 1.8. *Si E es un subconjunto de X entonces:*

$$x \in \overline{E} \iff [\exists\, \mathcal{F} \text{ filtro tal que } (E \in \mathcal{F}) \wedge (\mathcal{F} \to x)]$$

Demostración. Supongamos que x es un elemento de la clausura de E, definimos entonces la base de filtros:

$$\{U \cap E \,:\, U \in \mathcal{U}_x\}$$

el filtro $\mathcal{F}$ asociado a dicha base ha de verificar de forma directa $E \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.

Para la implicación recíproca, supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro que converge a x y verifica $E \in \mathcal{F}$. Por la *Observación 2.1* sabemos que x es un punto cluster de $\mathcal{F}$, lo que por definición implica en particular $x \in \overline{E}$.

Teorema 1.9. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función del primero en el segundo. Entonces, dado $x_0 \in X$ se tiene:*

$$f \text{ es continua en } x_0 \iff [\forall \mathcal{F} \text{ filtro se tiene } (\mathcal{F} \to x_0) \Rightarrow (f(\mathcal{F}) \to f(x_0))]$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es continua en x_0. Sean entonces $\mathcal{F}$ un filtro que converge a x y $V \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$. Por la continuidad de la aplicación se tiene $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x en X, implicando que es un elemento de $\mathcal{F}$. Entonces por la *Proposición 1.5* el entorno V es un elemento del filtro imagen $f(\mathcal{F})$, y por tanto dicho filtro converge a $f(x_0)$.

Probemos el recíproco. Sea $\mathcal{F}$ el filtro en X que tiene por base los entornos abiertos de x_0. Por hipótesis $f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$, es decir, (usando la definición de la *Proposición 1.3*) dado cualquier V entorno de $f(x_0)$ existe un elemento F de $\mathcal{F}$ con $f(F) \subseteq V$, y por tanto, dado U un entorno abierto de x con $U \subseteq F$ tenemos $f(U) \subseteq V$, lo que prueba la continuidad de f en el punto.

Proposición 1.8. Sean $\{X_\alpha\}_\alpha$ una colección de conjuntos arbitraria y $\mathcal{F}$ un filtro en el producto formal $\prod_\alpha X_\alpha$. Entonces:

$$[\mathcal{F} \to x_0 \text{ en } \Pi_\alpha X_\alpha] \iff [\Pi_\alpha(\mathcal{F}) \to \Pi_\alpha(x_0) \text{ en } X_\alpha \text{ para todo } \alpha]$$

Demostración. La implicación de izquierda a derecha es una mera aplicación del *Teorema 1.9* recién demostrado, considerando f como la aplicación proyección pertinente.

Para la implicación inversa, consíderese un entorno abierto básico de x_0 en $\Pi_\alpha X_\alpha$, que son de la forma $\cap_{k=1}^{n} \Pi_{\alpha_k}^{-1}(U_k)$ donde U_k es un entorno abierto de $\Pi_{\alpha_k}(x_0)$. Por hipótesis $\Pi_{\alpha_k}(\mathcal{F}) \to \Pi_{\alpha_k}(x_0)$ *en* X_{α_k}, lo que se traduce en $U_k \in \Pi_{\alpha_k}(\mathcal{F})$ para todo k, es decir, para cada k existe algún $F_k \in \mathcal{F}$ con $\Pi_{\alpha_k}(F_k) \subseteq U_k$. En tal caso se tienen:

1.
$$\bigcap_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{F}$$

2.
$$\bigcap_{k=1}^{n} F_k \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \Pi_{\alpha_k}^{-1}(U_k)$$

concluyendo $\cap_{k=1}^{n} \Pi_{\alpha_k}^{-1}(U_k) \in \mathcal{F}$. Es decir, nuestro entorno abierto original es un elemento del filtro. Por la generalidad de dicho entorno básico se deduce que todo conjunto abierto que contenga a x_0 es un elemento del filtro y con ello $\mathcal{F} \to x_0$.

Definición 1.19 (Límite de una función por un filtro). *Sea X un conjunto sobre el que tenemos definido un filtro $\mathcal{F}$, Y un espacio topológico, $f : X \to Y$ una aplicación e $y_0 \in Y$. Se dice que **y_0 es un límite de f por el filtro $\mathcal{F}$** y se denota*

$$f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow \mathcal{F}]{} y_0$$

si $f^{-1}(V)$ es un elemento del filtro $\mathcal{F}$ para todo V entorno de y_0. En los casos en los que dicho límite es único se denota

$$\lim_{x \to \mathcal{F}} f(x) = y_0.$$

Observación 1.12. Con la *Definición 1.19* si interpretamos una sucesión $\{x_n\}_n$ como una función $f : \mathbb{N} \to X$ tal que $f(n) = x_n$, el **límite de la sucesión por el filtro $\mathcal{F}$** consiste en un punto x_0 verificando que para cada V entorno de x_0 el conjunto $\{n : x_n \in V\}$ ha de ser un elemento del filtro.

Cuando $\{x_n\}_n$ es una sucesión en un espacio topológico X tal que $f : \mathbb{N} \to X$ definida por $f(n) = x_n$ verifica que $x \in X$ es su límite por un ultrafiltro, escribimos:

$$\lim_{n \to \mathcal{F}} x_n = x.$$

Como consecuencia del *Teorema 1.6* y la *Observación 1.12* se sigue de forma directa el siguiente corolario:

Corolario 1.2. Si $\{x_n\}_n$ es una sucesión en un conjunto compacto X y $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en los naturales, siempre existe el límite de la sucesión por el ultrafiltro.

Observación 1.13. Si $\mathcal{F}(n_0)$ es un ultrafiltro principal, el límite de la sucesión $\{x_n\}_n$ por el ultrafiltro es x_{n_0}.

La *Observación 1.13* se reduce a observar que para cada V entorno de x_{n_0} tenemos $n_0 \in \{n : x_n \in V\}$, y por tanto dicho conjunto es un elemento del ultrafiltro.

Observación 1.14. Como consecuencia de la *Observación 1.13*, los ultrafiltros que hacen *"interesante"* el estudio de la convergencia de sucesiones son los ultrafiltros no principales.

Lema 1.4. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en un espacio topológico X con límite x. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal en los naturales. Entonces x es el límite de la sucesión por el ultrafiltro $\mathcal{F}$.

Demostración. Sea V un entorno de x. Por definición de límite en el sentido usual se verifica que existe n_0 con $x_n \in V$ para cada $n \geq n_0$. Es decir, que el conjunto $A := \{n : n \geq n_0\}$ es un subconjunto de $B := \{n : x_n \in V\}$. El complementario de A es claramente finito y por tanto A es un elemento del filtro de Frechet. Por la *Observación 1.5* A es también un elemento del ultrafiltro $\mathcal{F}$, y con ello $B \in \mathcal{F}$, probando la convergencia.

El siguiente resultado es una formalización de la afirmación *la convergencia vía filtros generaliza la convergencia estándar*:

Teorema 1.10. *Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal en $\mathbb{N}$, $\{x_n\}_n$ es una sucesión en un espacio topológico X y x es un límite de la sucesión por el ultrafiltro, entonces existe una subsucesión convergiendo a x con la definición estándar.*

Demostración. Sea V entorno de x. Por definición de convergencia $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ no contiene elementos finitos gracias al *Lema 1.3*, tenemos que $f^{-1}(V)$ es un conjunto infinito para cada V entorno de x. Se sigue que x es un punto de acumulación de la sucesión y por tanto es límite de alguna subsucesión de $\{x_n\}$.

El siguiente resultado es consecuencia nuevamente del *Teorema 1.6*:

Corolario 1.3. Supongamos que existe una aplicación $f : X \longrightarrow Y$, donde Y es un espacio topológico compacto y X es un conjunto con un ultrafiltro $\mathcal{F}$ definido.

Entonces existe un $y_0 \in Y$ que es el límite de f por el ultrafiltro $\mathcal{F}$. Es más, si Y es Hausdorff dicho límite es único.

Demostración. Considérese en Y el ultrafiltro $f(\mathcal{F})$ dado por la construcción de la *Proposición 1.3*. Gracias al *Teorema 1.6* el ultrafiltro es convergente a algún punto $y_0 \in Y$. Es decir, para cada V entorno de y_0 se tiene $V \in f(\mathcal{F})$, pero por construcción ello equivale a la existencia de un elemento U del ultrafiltro $\mathcal{F}$ tal que $f(U) \subseteq V$, lo que implica $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$, es decir, que $f^{-1}(V)$ es un elemento de $\mathcal{F}$.

Para la unicidad será suficiente el siguiente argumento: supóngase que un filtro que por comodidad se denotará también $\mathcal{F}$ convergiese a dos puntos x, y diferentes en un espacio X de Hausdorff. Entonces existen dos entornos U_x y U_y de ambos puntos tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$. En tal caso al menos uno de los dos entornos no puede ser elemento del filtro $\mathcal{F}$, contradiciendo que el filtro converga a ambos puntos simultáneamente.

∎

Observación 1.15. En particular, si $\{x_n\}_n$ es una sucesión en un conjunto compacto y fijamos un ultrafiltro definido sobre los números naturales, existe un único límite de la sucesión por el ultrafiltro.

Observación 1.16. Los argumentos aportados para probar que si Y es Hausdorff el límite de la función por el ultrafiltro es único se trasladan sin dificultad para probar que si X es un espacio topológico de Hausdorff sobre el que fijamos un ultrafiltro convergente entonces el límite es único.

Proposición 1.9. Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro en X, Y y Z dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. Considérese el producto topológico habitual $Y \times Z$ y la aplicación $F : X \longrightarrow Y \times Z$ dada por $F(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in X$. Si existen $y_0 \in Y$ tal que y_0 es el límite de f por el filtro $\mathcal{F}$ y $z_0 \in Z$ tal que z_0 es el límite de g por el filtro $\mathcal{F}$, entonces $(y_0, z_0) \in Y \times Z$ es el límite de F por el filtro $\mathcal{F}$.

Demostración. Sea $W \subseteq Y \times Z$ un entorno del punto (y_0, z_0). Por definición de topología producto existen U entorno de y_0 y V entorno de z_0 tales que $U \times V \subseteq W$. Por ser y_0 un límite de f por el filtro se tiene $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$, y análogamente $g^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Entonces ha de ser $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, de donde concluimos $F^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ y $F^{-1}(W) \in \mathcal{F}$.

∎

Proposición 1.10. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Sean Y y Z dos espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación tal que $y_0 \in Y$ es un límite de f por el filtro y $g : Y \longrightarrow Z$ una aplicación continua en y_0. Entonces $z_0 = g(y_0)$ es un límite de $g \circ f$ para el filtro $\mathcal{F}$.

Demostración. Sea $W \subseteq Z$ un entorno de z_0. Por la continuidad de g existe $V \subseteq Y$ un entorno de y_0 tal que $g(V) \subseteq W$. Por ser y_0 límite de f por el filtro $\mathcal{F}$ se tiene $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, y al ser $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \supseteq f^{-1}(V)$ obtenemos que $(g \circ f)^{-1}(W)$ es un elemento del filtro y por tanto z_0 es límite por f de $\mathcal{F}$.

Proposición 1.11. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Sean $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones tales que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para cada $x \in X$. Supongamos que existen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 = \lim_{x \to \mathcal{F}} f_1(x)$ e $y_2 = \lim_{x \to \mathcal{F}} f_2(x)$. Entonces $y_1 \leq y_2$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que fuese $y_1 > y_2$. Sea $r := (y_1 - y_2)/3$ y considérense los abiertos $V_1 = (y_1 - r, y_1 + r)$ y $V_2 = (y_2 - r, y_2 + r)$. Por construcción $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Por definición de límite se han de verificar $f_1^{-1}(V_1) \in \mathcal{F}$ y $f_2^{-1}(V_2) \in \mathcal{F}$. Por definición de filtro se tiene $f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \neq \emptyset$. Sea x un elemento de la intersección $f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2)$. Debe de verificarse $f_2(x) < y_2 + r < y_1 - r < f_1(x)$, contradiciendo $f_1(x) \leq f_2(x)$.

1.2 Comparación y relaciones con las redes

De manera análoga a la sección anterior, comenzaremos dando un repaso general por el concepto de *red* y algunos de los resultados más troncales.

Definición 1.20 (Conjunto dirigido). *Un conjunto Λ se dice que es un **conjunto dirigido** si existe una relación $\leq$ definida sobre Λ que verifica:*

a) *$\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$;*
b) *Si λ_1, λ_2 y λ_3 son elementos de Λ tales que $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \leq \lambda_2$;*
c) *Si λ_1 y λ_2 son elementos de Λ existe $\lambda_3 \in \Lambda$ con $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.*

Definición 1.21 (Red). *Una **red** en un conjunto X es una aplicación $f : \Lambda \to X$ donde Λ es un conjunto dirigido. Normalmente, si $\lambda \in \Lambda$ se denotará por $\boldsymbol{x_\lambda}$ al elemento $f(\lambda)$ y la red per se se denotará por $\boldsymbol{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}$.*

Cuando el contexto no dé lugar a confusión se denotará (x_λ) para hacer referencia a la red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Definición 1.22 (Subred). *Una **subred** asociada a una red $f : \Lambda \to X$ es una aplicación $g : M \to X$ tal que $g = f \circ \varphi$, donde $\varphi : M \to \Lambda$ es una aplicación con dominio un conjunto dirigido que es creciente y cofinal. Es decir:*

1. *$\varphi(m_1) \leq \varphi(m_2)$ en Λ si $m_1 \leq m_2$ en M;*
2. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $m \in M$ con $\lambda \leq \varphi(m)$.*

Normalmente, si $\mu \in M$ se denotará por $\boldsymbol{x_{\lambda_\mu}}$ para denotar al elemento $g(\mu) = f(\varphi(\mu))$, y denotaremos a la subred per se como $\boldsymbol{(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}}$.

Cuando el contexto no dé lugar a confusión denotaremos (x_{λ_μ}) para denotar a la subred $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$.

El siguiente paso será definir una noción de convergencia en términos de redes:

Definición 1.23 (Red convergente). *Sea (x_λ) una red en un espacio topológico X y sea $x \in X$. Decimos que (x_λ) es una **red convergente a $\boldsymbol{x}$**, y lo denotamos por $\boldsymbol{x_\lambda \to x}$, si para cada U entorno abierto de x existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para cada $\lambda \geq \lambda_0$.*

*En estas circunstancias se dice que tenemos una **red residual en U**.*

Definición 1.24 (Punto de acumulación de una red). *Dada una red (x_λ) en un espacio topológico X y $x \in X$, decimos que x es un **punto de acumulación de la red** si para cada U entorno abierto de x y para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\lambda_0 \geq \Lambda$ con $x_{\lambda_0} \in U$.*

Finalmente, pasamos a enunciar una serie de resultados que exponen la similitud entre las redes y los filtros. Dichos resultados se enunciarán sin demostración, pero pueden encontrarse con prueba incluida en [15].

Teorema 1.11. *Una red (x_λ) un punto de acumulación en x si y sólo si posee una subred convergente a x.*

Teorema 1.12. *Si E es un subconjunto de X entonces:*

$$x \in \overline{E} \Longleftrightarrow [\textit{Existe una red } (x_\lambda) \textit{ en } E \textit{ con } x_\lambda \to x].$$

Teorema 1.13. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función del primero en el segundo. Entonces dado $x_0 \in X$ se tiene:*

$$f \textit{ es continua en } x_0 \Longleftrightarrow [(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ converge a } x_0 \textit{ implica que } (f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \textit{ converge a } f(x_0)].$$

Proposición 1.12. Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en un producto $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$. Entonces la red converge al punto x si y sólo si para cada α de A la red proyección $(\pi_\alpha(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\pi_\alpha(x_0)$.

Definición 1.25. *Una red (x_λ) en un conjunto X se dice una* ***ultrared*** *si para cada subconjunto E de X se tiene que la red es residual en E o bien es residual en $X \setminus E$.*

Teorema 1.14. *Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una ultrared en X y existe una aplicación $f : X \to Y$ entonces $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es una ultrared en Y.*

Dadas las fuertes similitudes entre las redes y los filtros es natural preguntarse si existe una equivalencia entre ambos conceptos. La respuesta es parcialmente afirmativa y se expondrán relaciones explícitas entre ambos:

Definición 1.26 (filtro generado por una red). *Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en un conjunto X. Definimos el* ***filtro generado por la red*** *a aquel que tiene por base el conjunto formado por los siguientes elementos:*

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}.$$

Dicho conjunto se comprueba fácilmente que verifica las condiciones de la *Proposición 1.1* simplemente recordando que Λ es un conjunto dirigido. Por ejemplo, cuando la red consiste en una sucesión, el conjunto base consiste en las *colas* de la sucesión, y de hecho cuando la sucesión es la trivial $(x_n = n)$ el filtro que obtenemos es el *filtro de Frechet.*

Existe una construcción *"recíproca"* por la cual dado un filtro obtenemos una red en algún conjunto dirigido, dada de la siguiente forma:

Definición 1.27 (red basada en un filtro). *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un conjunto X. Definimos la* ***red basa en el filtro*** *como aquella construida sobre el conjunto dirigido*

$\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$ *con la relación* $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ *si y solo si* $F_2 \subseteq F_1$ *y definida mediante la aplicación:*

$$\begin{aligned} P : \Lambda_{\mathcal{F}} &\longrightarrow X \\ (x, F) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Dichas definiciones verifican el siguiente resultado de *"intercambio"*:

Teorema 1.15 (de equivalencia entre filtro y red).

a) Un filtro $\mathcal{F}$ *converge al punto* x *si y solo si la red basada en el filtro converge a* x.
b) Una red (x_λ) *converge a* x *si y solo si el filtro generado por la red converge a* x.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro convergiendo a x. Sea entonces U un entorno cualquiera de x y p un punto cualquiera del entorno. El elemento (p, U) es parte del conjunto dirigido, y si (q, V) es tal que $(p, U) \leq (q, V)$ entonces $q \in V \subseteq U$, es decir, para todo elemento en el conjunto dirigido en la cola a partir de (p, U) se verifica $P(q, V) \in U$, lo que demuestra la convergencia.

Sea ahora (x_λ) una red que converge a x. Sea entonces U un entorno de x cualquiera. Por la convergencia de la red existe λ_0 con $x_\lambda \in U$ para todo λ mayor o igual a λ_0, lo que implica $B_{\lambda_0} \subseteq U$, concluyendo que U es un elemento del filtro y por tanto que el filtro converge a x.

Dichas transformaciones no son arbitrarias, sino que son *"casi inversas"* en el siguiente sentido:

Lema 1.5. Si $\mathcal{F}$ es un filtro, el filtro generado por la red basada en $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}$.

Demostración. Por comodidad vamos a denotar por $\mathcal{G}$ al filtro generado por la red basada en $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} F \in \mathcal{G} &\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \text{ con } \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq F \\ &\Leftrightarrow \exists (x_0, F_0) \text{ con } x_0 \in F_0 \in \mathcal{F} \text{ y } \{\tilde{x} : (\tilde{x}, \tilde{F}) \geq (x_0, F_0)\} \subseteq F \\ &\Leftrightarrow \exists (x_0, F_0) \text{ con } x_0 \in F_0 \in \mathcal{F} \text{ y } \{\tilde{x} : \tilde{x} \in \tilde{F} \subseteq F_0\} \subseteq F \\ &\Leftrightarrow \exists F_0 \in \mathcal{F} \text{ con } F_0 \subseteq F \\ &\Leftrightarrow F \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Sin embargo, existen redes diferentes que generan el mismo filtro. Por ejemplo, las sucesiones (vistas como redes) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n = 1/n$ e $(y_m)_{m\geq 2}$ con $y_m = 1/m$. Debido a que la condición dada por los B_λ son una condición *"en alguna cola"* ese elemento inicial de diferencia se puede comprobar que no afecta a la construcción del filtro.

Sabemos que existe una inyección de los filtros en X en las redes en X que no puede tener inversa, sin embargo, ello no implica que no exista una correspondencia unívoca entre filtros y redes.

Pensemos en la siguiente inyección basada en el *Hotel infinito de Hilbert*:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n+1, \end{aligned}$$

dicha aplicación es claramente inyectiva pero sabemos que no puede ser invertible, ya que no es sobreyectiva, sin embargo, claramente se ha de verificar que los naturales son biyectivos a sí mismos. El problema es que hemos hecho una *mala elección de inyección.*

Lo mismo ocurre con la correspondencia entre filtros y redes. O bien existe una correspondencia inequívoca o bien se verifica que el cardinal de los filtros es estrictamente menor al de las redes (en el sentido algebraico formal). Para concluir la cuestión gracias al *Teorema de Bernstein* bastaría con encontrar una inyección del conjunto de las redes en el de los filtros o bien demostrar la imposibilidad de tal inyección, pero se desconoce cual de ambas opciones es cierta.

2 Aplicación al Análisis

Un resultado clásico del Análisis es el llamado *Teorema de Hahn-Banach*, el cual presenta fuertes conexiones con los ultrafiltros por dos motivos principales. Comencemos enunciando dicho resultado:

Teorema 2.1 (de Hahn-Banach). *Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{k}$, donde $\mathbb{k}$ denotará o bien al cuerpo de los números reales o al de los números complejos. Sobre dicho espacio vectorial sea $p : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una seminorma, y sean M un subespacio vectorial de X y $f : M \longrightarrow \mathbb{k}$ un funcional lineal tal que $|f(m)| \leq p(m)$ para cada $m \in M$. Entonces existe $\tilde{f}$ una extensión del funcional a todo el espacio, que también es lineal y tal que $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in X$.*

Observación 2.1. La aplicación definida sobre el subespacio de las sucesiones convergente, contenido en el espacio vectorial de las sucesiones acotadas, que a cada sucesión le asocia su límite es un funcional lineal de norma uno. Por tanto, gracias al Teorema de Hanh-Banach ha de existir una *generalización* del concepto de límite de una sucesión que se aplique a todas las sucesiones acotadas (pero no tiene por qué ser único).

El Teorema de Hahn-Banach es usualmente demostrado usando el *Lema de Zorn* (ver por ejemplo [13, capítulo 3]), que recordemos es equivalente al Principio del Ultrafiltro como comentamos en el capítulo uno ([14, p.151], [11]).

A continuación vamos a usar la existencia de ultrafiltros no principales como herramienta alternativa al Teorema de Hahn-Banach para la construcción de un límite generalizado invariante por traslaciones, y por tanto un **Límite de Banach**, concepto que pasamos a definir.

Definición 2.1. *Un límite de Banach se define como una aplicación lineal de ℓ^∞ en $\mathbb{R}$ tal que si la sucesión es convergente con la definición estándar el límite de Banach de la sucesión coincide con el límite habitual, que sea invariante por traslaciones y que la* *imagen de una sucesión de ℓ^∞ cuyos elementos sean no negativos sea no negativa a su vez.*

Denotaremos por lím^* a un límite generalizado. Es decir, una aplicación de ℓ^∞ en $\mathbb{R}$ que verifique las siguientes propiedades:

(A) Si $\{x_n\}$ es convergente entonces $\text{lím}^* x_n = \text{lím}\, x_n$;
(B) $\text{lím}^*(x_n + y_n) = \text{lím}^* x_n + \text{lím}^* y_n$;
(C) $\text{lím}^*(c\, x_n) = c\ \text{lím}^* x_n$.

Definamos ahora las siguientes tres propiedades:

(D) $|\,\text{lím}^* x_n| \leq A$ si $|x_m| \leq A$ para cada $m = 1, 2, \cdots$.

(E) $|\,\text{lím}^* x_n| \leq \sup_n |x_n|$

(F) Si $\{x_n\}$ es una secuencia de números no negativos entonces $\text{lím}^* x_n \geq 0$.

A continuación probamos el siguiente lema técnico:

Lema 2.1. En presencia de (A), (B) y (C) las propiedades (D), (E) y (F) son equivalentes entre sí.

Demostración. Para probar probar (D) implica (E) basta con tomar $A = \sup_n |x_n|$.

Supongáse ahora (E) y sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no negativos acotados. Sea entonces B un número real verificando simultáneamente:

1. $B > \text{lím}^* x_n$,
2. $B > x_m$ para todo m.

Dicho B existe puesto que el límite de Banach siempre existe y es finito y la sucesión es acotada. Entonces aplicamos (E) a la sucesión $\{y_n\} = \{B - x_n\}$:

$$|\,\text{lím}^* y_n| \leq \sup_n |B - x_n| = \sup_n (B - x_n) = B - \text{ínf}\, x_n.$$

Paralelamente, operando con el miembro más a la izquierda:

$$\begin{aligned}
|\text{lím}^* y_n| &= |\text{lím}^*(B - x_n)| \\
&= |\text{lím}^* B + \text{lím}^*(-x_n)|^1 \\
&= |B + \text{lím}^*(-x_n)|^2 \\
&= |B - \text{lím}^* x_n|^3 \\
&= B - \text{lím}^* x_n.
\end{aligned}$$

En resumen, $B - \text{lím}^* x_n \leq B - \inf x_n$, lo que prueba $0 \leq \inf x_n \leq \text{lím}^* x_n$, concluyendo el aserto.

Para probar (F) implica (D), sea A en las condiciones del enunciado y considérese $y_n = A - x_n \geq 0$. Entonces:

$$0 \leq \text{lím}^* y_n = \text{lím}^*(A - x_n) = \text{lím}^* A - \text{lím}^* x_n = A - \text{lím}^* x_n,$$

de donde se sigue fácilmente $\text{lím}^* x_n \leq A$. Aplicando el mismo razonamiento a la sucesión $y_n = A + x_n$ se comprueba la desigualdad $-\text{lím}^* x_n \leq A$, concluyendo (D).

Recordemos que en el capítulo uno probamos que, dado un ultrafiltro no principal en los números naturales, toda sucesión de números reales acotada tiene límite por el ultrafiltro (véanse *Corolario 1.2*, *Observación 1.15* y *Lema 1.4*). Este límite será el candidato a ser límite generalizado como probaremos a continuación (nótese que el límite depende del ultrafiltro escogido).

Teorema 2.2. *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal definido en los naturales. Definimos la aplicación de ℓ^∞ en $\mathbb{R}$ dada por:*

$$\text{lím}^* x_n = \lim_{n \to \mathcal{F}} x_n$$

si $\{x_n\}_n \in \ell^\infty$. Entonces lím^* es un límite generalizado que además verifica (F).

Obsérvese que $\text{lím}^* x_n = x$ si y solo si para cada ϵ positivo se verifica:

$$\{n : |x_n - x| < \epsilon\} \in \mathcal{F}$$

[1] Aplicando la propiedad (B)
[2] Aplicando la propiedad (A)
[3] Aplicando la propiedad (C)

El *Teorema 2.2* se demostrará valiéndonos de tal equivalencia, y dicha demostración se incluye a continuación como el *Lema 2.2* y el *Lema 2.3*.

Lema 2.2. La aplicación lím^* es lineal en las sucesiones.

Demostración. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones con límites x e y respectivamente. Fijemos ϵ positivo. Queremos probar que $c_x x + c_y y$ es un límite de $\{c_x x_n + c_y y_n\}$. En otras palabras, para cada ϵ real positivo buscamos probar que si Z es el conjunto $\{n : |(c_x x_n + c_y y_n) - (c_x x + c_y y)| < \epsilon\}$ entonces $Z \in \mathcal{F}$.

Por convergencia de las sucesiones $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ sabemos que los conjuntos $X = \{n : |x_n - x| < \epsilon/2|c_x|\}$ e $Y = \{n : |y_n - y| < \epsilon/2|c_y|\}$ son elementos del ultrafiltro. Se sigue $X \cap Y \in \mathcal{F}$. Veamos $X \cap Y \subseteq Z$.

Sea $n \in X \cap Y$. Entonces $|(c_x x_n + c_y y_n) - (c_x x + c_y y)| \leq |c_x||x_n - x| + |c_y||y_n - y| \leq \epsilon$, de donde $n \in Z$, como queríamos demostrar.

∎

Lema 2.3. La aplicación lím^* verifica (F) y por tanto (D) y (E).

Demostración. Sea $\{x_n\}$ no negativa. Sea $x < 0$. Si $\epsilon = |x/2|$ se tiene $|x_n - x| \geq \epsilon$ para todo n, de donde $X_\epsilon = \{n : |x_n - x| < \epsilon\} = \emptyset \notin \mathcal{F}$. Como para un valor de ϵ el conjunto X_ϵ no es un elemento de $\mathcal{F}$, x no puede ser límite de $\{x_n\}$, probando que el límite generalizado tiene que ser no negativo.

∎

Observación 2.2. Los límites generalizados, si bien altamente satisfactorios, no tienen por qué ser invariantes por traslaciones, y por tanto no son límites de Banach en general. Por ejemplo, supongamos que el ultrafiltro considerado posee el conjunto $\{1, 3, 5, \cdots\}$ como elemento. Considérense entonces las sucesiones $\{x_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \cdots\}$ e $\{y_m\} = \{0, 1, 0, 1, 0, \cdots\}$. Se comprueba fácilmente que $\text{lím}^* x_n = 1$ pero $\text{lím}^* y_m = 0$.

Para construir un límite de Banach, realizamos la siguiente modificación en el *Teorema 2.2*:

Teorema 2.3 (Límite de Banach). *Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales acotadas. Sea $\{z_n\}_n$ la sucesión definida por $z_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$. Definimos el* ***Límite de Banach*** *de la sucesión, notado* $\mathbf{lím^{**}}\, \boldsymbol{x_n}$ *como:*

$$\text{lím}^{**} x_n = \text{lím}^* z_n,$$

Demostración. Se comprueba fácilmente que dicha definición además de verificar las propiedades (A) a (D) verifica invariancia por traslaciones.

Los límites de Banach no son la única aplicación de los ultrafiltros al Análisis, sino que además dar ultrafiltros en un conjunto está ampliamente relacionado con dar medidas finitamente aditivas. Más aún, tenemos el siguiente resultado de equivalencia:

Lema 2.4. Si X es un conjunto existe una biyección entre los ultrafiltros de X y las medidas finitamente aditivas $\{0,1\}$*-valuadas.*

A modo de recordatorio, incluimos a continuación la definición de *medida finitamente aditiva* $\{0,1\}$*-valuada*:

Definición 2.2. *Una aplicación* $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ *se dice que es una* ***medida finitamente aditiva*** $\{0,1\}$***-valuada*** *si se verifica:*

1. $\mu(X) = 1$
2. *Si* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *son disjuntos dos a dos entonces* $\mu(\cup_1^n A_i) = \sum_1^n \mu(A_i)$.

Demostración (Lema 2.4). Denotemos por βX al conjunto de los ultrafiltros en X y γX al conjunto de las medidas finitamente aditivas $\{0,1\}$-valuadas en X. Consideremos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} F : \beta X &\longrightarrow \gamma X \\ \mathcal{F} &\longmapsto F(\mathcal{F}) = \mu_{\mathcal{F}} \\ G : \gamma X &\longrightarrow \beta X \\ \mu &\longmapsto G(\mu) = \mathcal{F}_\mu \end{aligned}$$

definidas por:

$$\mu_{\mathcal{F}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{si } A \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_\mu = \{A \subseteq X \,:\, \mu(A) = 1\}.$$

Comprobemos que la aplicación F está bien definida:

Sea $\mathcal{F}$ un filtro. Veamos que $F(\mathcal{F}) = \mu_{\mathcal{F}}$ verifica las condiciones de la *Definición 2.2.*

(I) $X \in \mathcal{F}$, luego por definición $\mu_{\mathcal{F}}(X) = 1$. Se verifica la condición 1.

(II) Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ disjuntos dos a dos, y sea $A = \cup A_i$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Por el *Corolario 1.1* existe exactamente un A_i que es un elemento del ultrafiltro. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que tal A_i es A_1. Entonces $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$ y $\sum \mu_{\mathcal{F}}(A_i) = \mu_{\mathcal{F}}(A_1) + \sum_2^n \mu_{\mathcal{F}}(A_i) = 1 + 0 = 1$, verificando la condición 2. cuando $A \in \mathcal{F}$.

(III) Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ disjuntos dos a dos, y sea $A = \cup A_i$ tal que $A \notin \mathcal{F}$. Si fuese $A_i \in \mathcal{F}$ para algún i, por ser $A_i \subseteq A$ se tendría $A \in \mathcal{F}$. Concluimos $A_i \notin A$ para cada i. Se sigue $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$ y $\sum \mu_{\mathcal{F}}(A_i) = \sum 0 = 0$, verificando la condición 2. en el caso restante.

Sea μ una medida finitamente aditiva $\{0,1\}$-valuada. Veamos que $G(\mu) = \mathcal{F}_\mu$ verifica las condiciones de la *Observación 1.3*:

a) $\mu(\emptyset) = 0$, luego $\emptyset \notin \mathcal{F}_\mu$.

b) Sean $A, B \in \mathcal{F}_\mu$. Por definición $\mu(A) = \mu(B) = 1$. Veamos que $\mu(A \cap B) = 1$. Si no fuese así, sería $\mu(A \cap B) = 0$, de donde por la aditividad finita $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 1$. Por ser $A \setminus B$ y $B \setminus A$ disjuntos se seguiría $\mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 2$, contradiciendo que μ sea $\{0,1\}$-valuada. Luego $\mu(A \cap B) = 1$ y por definición se ha de tener $A \cap B \in \mathcal{F}_\mu$.

c) Sea E tal que $E \notin \mathcal{F}_\mu$. Por definición $\mu(E) = 0$, y por esr μ finitamente aditiva $1 = \mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c) = \mu(E^c)$. Se sigue $E^c \in \mathcal{F}_\mu$.

Sólo resta comprobar que son mutuamente inversas.

$F(G(\mu)) = \mu$ si y sólo si para cada $A \subseteq X$ se tiene $F(G(\mu))(A) = \mu(A)$. Supongamos $\mu(A) = 0$. Entonces $A \notin F(\mu)$, de donde $G(F(\mu))(A) = 0$. Si $\mu(A) = 1$ se sigue $A \in F(\mu)$ y por tanto $G(F(\mu))(A) = 0$.

$G(F(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ si y solo si para cada $A \subseteq X$ se tiene $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \in G(F(\mathcal{F}))$. Supongamos $A \in \mathcal{F}$, entonces $F(\mathcal{F})(A) = 1$, de donde $A \in G(F(\mathcal{F}))$. Supongamos $A \notin \mathcal{F}$, entonces $F(\mathcal{F})(A) = 0$, de donde $A \notin G(F(\mathcal{F}))$, concluyendo la demostración.

∎

3 La compactificación de Stone-Čech

Una noción importante en topología general es la de **compactificación**. La idea *grosso modo* es que si un espacio topológico verifica ciertas condiciones entonces podemos encontrar otro espacio que lo contiene, que sea compacto y en el que el espacio original sea denso. Un ejemplo clásico es la *Esfera de Riemann*, un espacio topológico compacto en el que los números complejos son densos y que se construye añadiendo a dicho cuerpo un punto del infinito.

La idea de este capítulo es realizar una construcción parecida sobre los números naturales, que recibe el nombre de **Compactificación de Stone-Čech**. Dicha extensión, además de contener a los naturales de forma densa y ser compacta, verifica una propiedad de extensión muy interesante: toda aplicación definida sobre los números naturales e imagen contenida en un espacio topológico compacto K se extiende a una aplicación continua definida sobre todo el espacio dado por la *Compactificación de Stone-Čech*, cuya imagen también está contenida en K.

Comencemos considerando el conjunto de todos los ultrafiltros construidos sobre los naturales, y denotémoslo $\beta\mathbb{N}$.

Es importante notar que existe una biyección *"natural"* entre $\mathbb{N}$ y los ultafiltros principales de $\beta\mathbb{N}$ dada por $x \longmapsto \mathcal{F}(x)$. Identificando los números naturales con su ultrafiltro principal asociado se deduce de forma inmediata $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$, que era la primera de las propiedades que le exigíamos a nuestra compactificación.

El siguiente paso consiste en definir una base de abiertos que nos permita dotar al conjunto $\beta\mathbb{N}$ de una topología bien definida y estudiar las propiedades que verifique.

Prefijado $A \subseteq \mathbb{N}$ definimos su abierto asociado de la siguiente forma:

$$A^* = \{\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{F}\}.$$

Dicho de otra manera, el conjunto A^* consiste en todos los ultrafiltros que tengan a A como elemento. Obsérvese que fijados $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{F}$ se verifica $\mathcal{F} \in A^*$, es decir, $\mathcal{F}$ es un elemento de algún A^*. Por la generalidad de $\mathcal{F}$ se deduce fácilmente que la unión de todos los posibles A^* coincide con $\beta\mathbb{N}$. En resumen, hemos definido una colección de conjuntos que recubren nuestro espacio objetivo. Con estos ingredientes podemos finalmente enunciar y demostrar el primer resultado del capítulo:

Teorema 3.1. *El conjunto $\mathcal{B} = \{A^* : A \subseteq \mathbb{N}\}$ forma una base de abiertos que dota a $\beta\mathbb{N}$ de estructura de espacio topológico compacto de Hausdorff. Además, en este espacio el conjunto de los números naturales es denso y los abiertos básicos son cerrados.*

La demostración de dicho resultado es tediosa e incluye muchas propiedades de demostración paralela, así que se segmentará en varios lemas.

Lema 3.1. El conjunto $\mathcal{B}$ forma una base de abiertos válida, y sus elementos son abiertos y cerrados.

Demostración. Para probar que efectivamente tenemos una base para la topología válida necesitamos probar que dados A^* y B^* abiertos básicos su intersección es abierta. Para ello, sea $\mathcal{F} \in A^* \cap B^*$, queremos encontrar C^* con $\mathcal{F} \in C^* \subseteq A^* \cap B^*$. Tomamos entonces $C = A \cap B$, afirmamos $C^* = A^* \cap B^*$.

Sea $\mathcal{F} \in A^* \cap B^*$. Es decir, se verifican simultáneamente $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, de donde $C = A \cap B \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \in C^*$.

Para la contención inversa, sea $\mathcal{F} \in C^*$, entonces por ser $C \subseteq A$ tenemos $A \in \mathcal{F}$ y con ello $\mathcal{F} \in A^*$. Por un motivo totalmente análogo concluimos $\mathcal{F} \in A^* \cap B^*$.

Para probar que los abiertos básicos son también cerrados probaremos la siguiente propiedad: $(A^*)^c = (A^c)^*$.

Un ultrafiltro $\mathcal{F}$ es un elemento de $(A^*)^c$ si y sólo si $A \notin \mathcal{F}$, condición que se verifica si y sólo si $A^c \in \mathcal{F}$, que a su vez se da si y sólo si $\mathcal{F} \in A^c$, completando la demostración.

Observación 3.1. Es interesante recalcar que se ha demostrado una propiedad más restrictiva que la deseada, puesto que se ha concluido que la intersección de conjuntos abiertos básicos es un abierto básico, propiedad más *"fuerte"* que ser abierto.

Lema 3.2. La topología generada por el conjunto $\mathcal{B}$ hace al espacio topológico $\beta\mathbb{N}$ compacto.

Demostración. Nos valdremos de la caracterización dada por la *Proposición 1.6.*

Sea F un cerrado de $\beta\mathbb{N}$. Entonces, $F = (\bigcup B_j)^c = \bigcap(B_j^c)$ para unos abiertos básicos B_j. Es decir, el conjunto cerrado F tiene asociada una familia $\mathcal{F}_F$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que F consiste en todos los ultrafiltros que contienen a tal familia como elementos.

Extendiendo el estudio previo a familias de cerrados, si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una colección de cerrados con la *Propiedad de la Intersección Finita* en $\beta\mathbb{N}$, cada F_i consiste en la agrupación de todos los ultrafiltros que contienen a una colección $\mathcal{F}_{F_i}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

La *Propiedad de la Intersección Finita* significa exactamente que para cualquier colección finita de subíndices $\{i_k\}_k$ se tiene:

$$F = \bigcap_{i_k} F_{i_k} \neq \emptyset,$$

por tanto existe un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en la intersección de los F_{i_k}. En particular $\mathcal{F} \in F_{i_k}$ para todo k, lo que es equivalente a la afirmación *existe un ultrafiltro que contiene como elementos a toda una familia de subconjuntos naturales prefijada* y dicho ultrafiltro extiende a la familia formada por la unión de los $\cup\mathcal{F}_{F_{i_k}}$. Se deduce que los elementos de $\cup\mathcal{F}_{F_{i_k}}$ han de verificar la PIF en $\mathbb{N}$ para cualquier subconjunto finito de índices $\{i_k\}$. En particular la familia $\{\mathcal{F}_{F_i}\}_{i\in I}$ verifica la *Propiedad de la Intersección Finita* en $\mathbb{N}$.

Aplicamos entonces la *Proposición 1.2*, concluyendo la existencia de un filtro que extiende a la familia $\cup_{i\in I}\mathcal{F}_{F_i}$. Sea entonces $\mathcal{G}$ un ultrafiltro más fino que dicho filtro. Como dicho ultrafiltro extiende a la familia, en particular para cada $i \in I$ se tiene $\mathcal{F}_{F_i} \in \mathcal{G}$, de donde $\mathcal{G} \in F_i$ por construcción. Deducimos que $\mathcal{G}$ está en la intersección de todos los F_i y por tanto la intersección es no vacía, probando la compacidad. ∎

Lema 3.3. El espacio $\beta\mathbb{N}$ con la topología generada por $\mathcal{B}$ verifica la propiedad de Hausdorff.

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos ultrafiltros distintos, y sean $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$ con $A \cap B = \emptyset$. Han de existir puesto que en caso contrario, cualesquiera dos elementos de ambos filtros tendrían intersección no vacía y podemos definir la base de filtros:

$$\{A \cap B \,:\, A \in \mathcal{F},\, B \in \mathcal{G}\}$$

y dicha base nos permite construir un filtro más fino que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, por ser ambos ultrafiltros dicho filtro más fino coincide simultáneamente con $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, contradiciendo que sean estos ultrafiltros diferentes.

Finalmente, $A \cap B = \emptyset$ implica que $A^* \cap B^* = \emptyset$, por los mismos argumentos que se presentaron en el segundo párrafo de la demostración del *Lema 3.1*. En resumen, $\mathcal{F} \in A^*$ y $\mathcal{G} \in B^*$ y dichos conjuntos son abiertos con intersección vacía, demostrando el aserto.

Lema 3.4. En el espacio $\beta\mathbb{N}$ con la topología generada por $\mathcal{B}$ los números naturales son densos.

Demostración. Bastará con probar que todos los abiertos básicos no vacíos tienen intersección no vacía con los números naturales.

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y A^* el abierto básico asociado. Sea $n \in A$, entonces A es un elemento del ultrafiltro principal $\mathcal{F}(n)$, y por tanto $\mathcal{F}(n) \in A^*$. Como el ultrafiltro $\mathcal{F}(n)$ es un elemento del subconjunto de $\beta\mathbb{N}$ que identificamos con los números naturales, hemos concluido el resultado.

La compactificación de *Stone-Čech* verifica además la siguiente propiedad de extensión universal:

Teorema 3.2. *Para cada f aplicación definida sobre los naturales con imagen contenida en un compacto K existe βf una extensión continua de f definida sobre $\beta\mathbb{N}$, resumido en el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \beta\mathbb{N} \arrow[d, dashed, "\beta f"] \\
 & K
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sabemos que tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow K \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

que es continua por estar considerando el conjunto dominio con la topología discreta. Definimos entonces la siguiente función análoga para los naturales identificados como los ultrafiltros principales:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \{\mathcal{F}(n) \, : \, n \in \mathbb{N}\} &\longrightarrow K \\ \mathcal{F}(n) &\longmapsto f(n). \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro elemento de $\beta\mathbb{N}$. Nuestro objetivo es definir $\beta f(\mathcal{F})$. De manera análoga a lo estudiado en el capítulo tercero, estamos en las condiciones del *Corolario 1.2* y existe un único elemento, que denotaremos y, tal que y es el límite de la función f por el ultrafiltro $\mathcal{F}$. Definimos $\beta f(\mathcal{F}) = y$.

En primer lugar, probaremos que dicha definición extiende a la función estándar. Efectivamente, sea n_0 un número natural, y sea $\mathcal{F}(n_0)$ el ultrafiltro de $\beta\mathbb{N}$ que identificamos con dicho elemento. Gracias a la *Observación 1.13* el límite de la sucesión es $\beta f(\mathcal{F}(n_0)) = x_{n_0} = f(n_0)$, probando que nuestra extensión coincide con f en la restricción a los naturales.

Sea V un abierto en K. Veamos que anteimagen por nuestro candidato a extensión es abierta.

Sea $\mathcal{F} \in \beta f^{-1}(V)$. Si $\mathcal{F}$ es principal ya sabemos que es un elemento del interior de $\beta f^{-1}(V)$, puesto que $\mathcal{F} \in \{n\}^*$ para algún n, y el único elemento de $\{n\}^*$ es el ultrafiltro $\mathcal{F}$. Se sigue $\beta f(\{n\}^*) = \beta f(\mathcal{F}) \in V$.

Si $\mathcal{F}$ no es principal buscamos $A \subseteq \mathbb{N}$ con $\mathcal{F} \in A^*$ y $\beta f(A^*) \subseteq V$. Denotemos por z al límite de $\{f(n)\}$ por $\mathcal{F}$, entonces z ha de ser un punto de acumulación de $\{f(n)\}$. Sea δ un real positivo tal que $\overline{B(z,\delta)} \subseteq V$. Ha de verifcarse $A = f^{-1}(B(z,\delta))$ es infinito para cada δ.

Por definición de límite por un filtro $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \in A^*$. Además si $\mathcal{G} \in A^*$ se tiene $A \in \mathcal{G}$, de donde el límite del ultrafiltro debe de ser un elemento de $\overline{f(A)}$. Es decir, $\beta f(\mathcal{G}) \in \overline{f(A)} \subseteq V$. Deducimos que $\mathcal{F}$ tiene un entorno cuya imagen por βf está contenida en V, con ello $\mathcal{F}$ es un elemento del interior de $\beta f^{-1}(V)$ para cada $\mathcal{F}$

elemento de tal conjunto, probando que la aplicación es continua.

∎

Dichas propiedades topológicas no son lo único destacable de la Compactificación de Stone-Čech. Por ejemplo, es posible además dotar al conjunto $\beta\mathbb{N}$ de una operación binaria interna, asociativa y con un elemento idempotente. Es más, dicha operación es continua al fijar uno de los argumentos.

Procedamos paso a paso. La definición de la operación es la siguiente:

$$\begin{aligned} + : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} &\longrightarrow \beta\mathbb{N} \\ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) &\longmapsto \mathcal{F} + \mathcal{G}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ viene dada por:

$$\{A \subseteq \mathbb{N} \,:\, \{n \in \mathbb{N} \,:\, A - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}\},$$

y donde $A - n = \{a - n \,:\, a \in A\}$.

Ejemplo 3.1. Considérense dos ultrafiltros principales $\mathcal{F}(n)$ y $\mathcal{F}(m)$, entonces su suma es el ultrafiltro $\mathcal{F}(n+m)$. Efectivamente:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}(n) + \mathcal{F}(m) &\Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \,:\, A - n \in \mathcal{F}(m)\} \in \mathcal{F}(n) \\ &\Longleftrightarrow n \in \{n \in \mathbb{N} \,:\, A - n \in \mathcal{F}(m)\} \\ &\Longleftrightarrow A - n \in \mathcal{F}(m) \\ &\Longleftrightarrow m \in A - n \\ &\Longleftrightarrow n + m \in A \\ &\Longleftrightarrow A \in \mathcal{F}(n+m). \end{aligned}$$

El siguiente lema nos dicen que la operación está bien definida:

Lema 3.5. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son ultrafiltros en $\mathbb{N}$ entonces $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ también lo es. Dicho de otra forma, la suma de ultrafiltros es un ultrafiltro en el mismo conjunto y por tanto la operación binaria es interna.

Demostración. Comencemos demostrando que $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ es una familia no vacía de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que $\emptyset \notin \mathcal{F} + \mathcal{G}$.

$$\{n \,:\, \mathbb{N} - n \in \mathcal{G}\} = \{n \,:\, \mathbb{N} \in \mathcal{G}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F},$$

de donde $\mathbb{N} \in \mathcal{F} + \mathcal{G}$. De manera similar:

$$\{n : \emptyset - n \in \mathcal{G}\} = \{n : \emptyset \in \mathcal{G}\} = \emptyset \notin \mathcal{F},$$

de donde $\emptyset \notin \mathcal{F} + \mathcal{G}$.

Veamos ahora que la intersección de elementos de la familia está en la familia:

Sean A y B elementos de $\mathcal{F} + \mathcal{G}$. Por definición $A' := \{n : A - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}$ y $B' := \{n : B - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}$. Tenemos de forma directa $A' \cap B' \in \mathcal{F}$. Si probásemos $A' \cap B' \subseteq \{n : (A \cap B - n) \in \mathcal{G}\}$ hemos terminado. Efectivamente:

$$\begin{aligned} m \in A' \cap B' &\Longrightarrow A - m, B - m \in \mathcal{G} \\ &\Longrightarrow ((A \cap B) - m) \in \mathcal{G}^1 \\ &\Longrightarrow m \in \{n : ((A \cap B) - n) \in \mathcal{G}\}. \end{aligned}$$

Finalicemos el lema probando que si A no es un elemento de la suma de ultrafiltros entonces A^c sí lo es.

Efectivamente, si $A \notin \mathcal{F} + \mathcal{G}$ entonces $X := \{n : A - n \in \mathcal{G}\} \notin \mathcal{F}$, de donde por ser $\mathcal{F}$ ultrafiltro $X = \{n : A - n \notin \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}$. Valiéndonos de la propiedad $(A - n)^c = A^c - n$ concluimos $X = \{n : A^c - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}$, lo que por definición significa $A^c \in \mathcal{F} + \mathcal{G}$.

∎

Lema 3.6. La operación aditiva considerada es asociativa.

Demostración. Sean tres ultrafiltros $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$. Observemos que por definición se tienen:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F} + (\mathcal{G} + \mathcal{H}) &\Longleftrightarrow \{n : A - n \in (\mathcal{G} + \mathcal{H})\} \in \mathcal{F} \\ &\Longleftrightarrow \{n : A - n \in \{B \subseteq \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : B - n \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \\ &\Longleftrightarrow \{n : \{m : (A - n) - m \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

así como:

$$\begin{aligned} A \in (\mathcal{F} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} &\Longleftrightarrow \{m : A - m \in \mathcal{H}\} \in (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \\ &\Longleftrightarrow \{n : (\{m : A - m \in \mathcal{H}\}) - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

[1]Gracias a la igualdad de conjuntos $(A - m) \cap (B - m) = (A \cap B) - m$, que es fácil de comprobar.

En resumen, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F} + (\mathcal{G} + \mathcal{H}) &\iff \{n : \{m : (A - n) - m \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}, \\ A \in (\mathcal{F} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} &\iff \{n : (\{m : A - m \in \mathcal{H}\} - n) \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Por tanto, los conjuntos coinciden si se da la igualdad $\{m : A - n - m \in \mathcal{H}\} = \{m : A - m \in \mathcal{H}\} - n$. Finalmente:

$$\begin{aligned} x \in \{m : A - m \in \mathcal{H}\} - n &\iff x + n \in \{m : A - m \in \mathcal{H}\} \\ &\iff A - x - n \in \mathcal{H} \\ &\iff x \in \{m : A - n - m \in \mathcal{H}\}; \end{aligned}$$

concluyendo la demostración.

∎

Nuestra operación aditiva es *"suave"* en el siguiente sentido:

Lema 3.7. Para cada $\mathcal{G}$ fijado, la aplicación $+_{\mathcal{G}} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ dada por $+_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} + \mathcal{G}$ es continua.

Demostración. Para probar la continuidad será suficiente con probar que la anteimagen de un abierto básico es abierto básico. Efectivamente:

$$\begin{aligned} +_{\mathcal{G}}^{-1}(A^*) &= \{\mathcal{F} : \mathcal{F} + \mathcal{G} \in A^*\} \\ &= \{\mathcal{F} : A \in \mathcal{F} + \mathcal{G}\} \\ &= \{\mathcal{F} : \{n : A - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}\} \\ &= \{n : A - n \in \mathcal{G}\}^*. \end{aligned}$$

∎

Lema 3.8 (de idempotencia). Existe un ultrafiltro idempotente, i.e existe $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N}$ con $\mathcal{F} + \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de los semigrupos topológicos compactos no vacíos que están contenidos en $\beta\mathbb{N}$. Por ser $\beta\mathbb{N} \in \mathcal{A}$ se tiene que no es vacío.

$\mathcal{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado cuyo orden parcial es la contención. Consideremos una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$. Se comprueba de forma inmediata que $\mathcal{C}$ verifica la propiedad de la intersección finita, y por ser $\beta\mathbb{N}$ compacto la intersección $\cap_{C \in \mathcal{C}} C$

no es vacía gracias a la *Proposición 1.6* (cada $C \in \mathcal{C}$ es cerrado por ser un conjunto compacto en un espacio topológico de Hausdorff).

Se verifica que tal intersección es cerrada por ser interesección arbitraria de conjuntos cerrados, y por tanto es compacta por estar contenida en un compacto. Además se verifica fácilmente que es semigrupo por serlo cada $C \in \mathcal{C}$ y por ser cada elemento de la intersección elemento de todos los compactos de la cadena.

Por el *Lema de Zorn* existe un elemento minimal A. Veamos que todo $\mathcal{F} \in A$ es idempotente.

En primer lugar, $A+\mathcal{F}$ es compacto para cada A por ser la operación $+_{\mathcal{F}}$ continua. Además es un semigrupo, ya que si $\mathcal{F}_1+\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_2+\mathcal{F}$ son elementos de $A+\mathcal{F}$ entonces:

$$(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}) + (\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}) = (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}) + (\mathcal{F}) \in A + \mathcal{F},$$

por ser $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}$ elementos de A, un semigrupo.

Por ser A grupo se tiene $A+\mathcal{F} \subseteq A$, y por la minimalidad de A se sigue $A+\mathcal{F} = A$.

Considérese ahora $B = \{\mathcal{G} \in A : \mathcal{G} + \mathcal{F} = \mathcal{F}\}$. Por ser $\mathcal{F} \in A = A + \mathcal{F}$ debe de existir $\mathcal{G} \in A$ con $\mathcal{G} + \mathcal{F} = \mathcal{F}$, por tanto B es no vacío.

B es semigrupo puesto que la suma de dos elementos del conjunto verifica:

$$(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) + \mathcal{F} = \mathcal{G}_1 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{F}) = \mathcal{G}_1 + \mathcal{F} = \mathcal{F}.$$

Como claramente $B \subseteq A$, por la minimalidad del segundo es $B = A$, y por tanto en particular $\mathcal{F} \in B$ y con ello $\mathcal{F} + \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

∎

Una referencia general para el estudio del álgebra de $\beta\mathbb{N}$ y sus elementos idempotentes es [5].

Observación 3.2. Los argumentos usados para probar el *Lema de Idempotencia* son válidos para cualquier semigrupo topológico compacto cuya suma al fijar uno de los argumentos sea continua.

Observación 3.3. Tal elemento $\mathcal{F}$ idempotente ha de ser no principal, puesto que por el *Ejemplo 3.1* si $\mathcal{F} = \mathcal{F}(n)$ entonces $\mathcal{F} + \mathcal{F} = \mathcal{F}(2n) \neq \mathcal{F}(n)$.

La existencia de elementos idempotentes y el hecho de que tal elemento no es un ultrafiltro principal se utilizará fuertemente en el siguiente capítulo, donde estudiaremos aplicaciones de los ultrafiltros a la Teoría de Ramsey en los números naturales.

4 Algunas aplicaciones a la Teoría de Ramsey

En este capítulo se van a estudiar algunos resultados clásicos de Teoría de Ramsey cuya demostración puede ser dada he incluso simplificada usando ultrafiltros. La Teoría de Ramsey, en términos generales, estudia la aparición de estructuras *"notables"* para conjuntos lo suficientemente grandes. Nos centraremos en los números naturales y sus subconjuntos.

Un ejemplo de los problemas a estudiar es el siguiente: supongamos que tenemos una propiedad de interés, y supongamos que coloreamos $\mathbb{N}$ con una cantidad finita de colores. ¿Existe algún subconjunto *monocromático* tal que todos sus elementos verifiquen dicha propiedad?

Usando ultrafiltros no principales se demostrarán el *Teorema de Schur* (1912) y su generalización, el *Teorema de Hindman* [6]. Otros teoremas clásicos de Teoría de Ramsey sobre los números naturales pueden encontrarse por ejemplo en [9] y [12].

La idea en varios de dichos casos es valernos los ultrafiltros como herramienta de filtro literal, dígase, dado un conjunto potencialmente grande, considerar un ultrafiltro en dicho conjunto y usarlo para cribar elementos verificando propiedades *"buenas"*.

Teorema 4.1 (de Ramsey). *Sea G un grafo infinito completo. Si sus aristas están coloreadas con un número finito de colores, entonces G posee un subgrafo monocromático con un número infinito numerable de vértices y completo.*

Demostración. Denotemos por V al conjunto de vértices de G. Por comodidad vamos a denotar $\{1, 2, \cdots, r\}$ al conjunto de los colores. Sea entonces $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal en V. Sea $v \in V$ un vértice cualquiera. Si denotamos por $\chi(x, y)$ al color de la arista $\{x, y\}$, para cada color k podemos considerar los conjuntos asociados:

$$A^k(v) = \{w \in V \ : \ \chi(v, w) = k\}.$$

Los conjuntos de dicha familia son claramente disjuntos dos a dos y su unión es $V \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$.

Al ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal, tenemos que $\{v\}$ no puede ser un elemento suyo y como consecuencia $V \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$.

Gracias al *Corolario 1.1* existe exactamente un k_v tal que $A^{k_v}(v)$ es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{F}$.

A continuación vamos a seguir una línea de razonamiento parecida para otra partición diferente. Para cada color k consideramos el conjunto:

$$B^k = \{v \ : \ A^k(v) \in \mathcal{F}\}$$

Sean k_1 y k_2 dos colores diferentes. Entonces B^{k_1} y B^{k_2} son disjuntos entre ellos. Efectivamente, si existiese un vértice v con $v \in B^{k_1} \cap B^{k_2}$ entonces serían $A^{k_1}(v)$ y $A^{k_2}(v)$ simultáneamente elementos del ultrafiltro, contradiciendo la discusión previa.

Sigamos con la demostración probando que la unión de los B^k considerando todos los colores (que es un conjunto finito) es el espacio V.

Sea $v \in V$ cualquiera. Gracias a lo demostrado al inicio, sabemos que existe un color k_v con $A^{k_v}(v) \in \mathcal{F}$, pero entonces $v \in B^{k_v}$, es decir, pertenece a un elemento de la unión.

En resumen, los B^k definen una partición disjunta de $V \in \mathcal{F}$, y por tanto existe exactamente un B^k con $B^k \in \mathcal{F}$.

A continuación vamos a construir explícitamente nuestro subgrafo objetivo coloreado con el color k mediante el siguiente algoritmo inductivo: escogemos $v_1 \in B^k$ cualquiera. Vamos a razonar por inducción: supongamos escogidos $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de tal manera que $A^k(v_l) \in \mathcal{F}$ para todo $1 \leq l \leq n$ y $\chi(v_s, v_t) = k$ siempre que $1 \leq s \neq t \leq n$. Consideremos entonces el conjunto:

$$S = B^k \cap \left(\bigcap_{l=1}^{n} A^k(v_l) \right)$$

Entonces S es una intersección finita de conjuntos de $\mathcal{F}$, y por tanto, $S \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ no es principal, S ha de ser infinito. En particular, debe de existir un elemento en $S \setminus \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, que será el que escojamos como v_{n+1}. Para concluir falta probar $A^k(v_{n+1}) \in \mathcal{F}$ y $\chi(v_l, v_{n+1}) = k$ para todo $1 \leq l \leq n$.

La condición $A^k(v_{n+1}) \in \mathcal{F}$ se tiene por hipótesis, puesto que $v_{n+1} \in S$ implica $v_{n+1} \in B^k$. Sea $1 \leq l \leq n$, la condición $\chi(v_l, v_{n+1}) = k$ se tiene por ser $v_{n+1} \in A^k(v_l)$, concluyendo la demostración.

∎

La conexión entre la Teoría de Ramsey y los ultrafiltros va más allá, con resultados como el siguiente:

Lema 4.1. Sea $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Dada una coloración de X, existe un $G \in \mathcal{G}$ monocromático;
b) Existe un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en X con la propiedad de que para cada $A \in \mathcal{F}$ existe $G \in \mathcal{G}$ con $G \subseteq A$.

Demostración. En primer lugar, supóngase $b)$ como hipótesis. Sea la partición finita de X dada por la coloración, dígase, $X = \sqcup_{i=1}^n A_i$, donde A_i es el conjunto de los elementos de X coloreados con el color i. Usando el *Corolario 1.1* existe exactamente un A_i con $A_i \in \mathcal{F}$. Por ser cualquier $G \subseteq A_i$ monocromático y existir un conjunto de $\mathcal{G}$ verificando tal contención, se sigue el resultado.

Para la implicación recíproca, sea la siguiente familia:

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq X \ : \ A \cap G \neq \emptyset \textit{ para cada } G \in \mathcal{G}\}.$$

Sea entonces $\mathcal{B}^+$ la familia formada por todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Se verifica claramente que si $A, B \in \mathcal{B}^+$ entonces $A \cap B \in \mathcal{B}^+$ y $X \in \mathcal{B}^+$. Sólo resta probar $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$. Sean $A_1, A_2, \cdots A_k$ elementos de $\mathcal{B}$ cualesquiera. Construimos $\{C_S\}_{S \subseteq \{1,2,\cdots,k\}}$ una partición de X en 2^k conjuntos disjuntos dada por:

$$x \in C_{S_0} \Leftrightarrow x \in \big(\cap_{i \in S_0} A_i \big) \cap \big(\cap_{i \notin S_0} A_i^c \big).$$

Por hipótesis existe C_{S_0} y $G \in \mathcal{G}$ con $G \subseteq C_{S_0}$. Se verifica $A_i \cap G \neq \emptyset$ para cada i, por lo que en particular $S_0 = \{1, 2, \cdots, k\}$ y $G \subseteq \cap_{i=1}^k A_i$. Se deduce $\cap_{i=1}^k A_i$ no puede ser vacía y con ello existe un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que extiende a $\mathcal{B}^+$. Fijemos $A \in \mathcal{F}$. Se sigue $A^c \notin \mathcal{F}$ y por tanto $A^c \notin \mathcal{B}$. Por definición ha de existir $G \in \mathcal{G}$ con $A^c \cap G = \emptyset$, lo que concluye $G \subseteq A$.

∎

Con tal equivalencia es posible probar el Teorema de Schur:

Teorema 4.2 (Teorema de Schur). *Dada cualquier partición de los naturales en un número finito de subconjuntos, es posible encontrar números naturales x e y tales que x, y y $z = x + y$ están todos en el mismo conjunto de la partición.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ una coloración de los naturales que defina la partición considerada. Podemos entonces construir una coloración de $\mathbb{N}^2$ dada por $\mathcal{X}'(x, y) = \mathcal{X}(|x - y|)$. Por el Teorema de Ramsey existe un subconjunto infinito $\{x_1, x_2, \cdots\}$ tal que $\mathcal{X}(|x_i - x_j|) = c$ para cada $i \neq j$ y c prefijado. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $x_1 < x_2 < x_3$. Tomamos $x = x_3 - x_2$ e $y = x_2 - x_1$, completando la demostración.

∎

Dicho resultado admite una generalización conocida como Teorema de Hindman. Dado A un subconjunto infinito de los números naturales se define:

$$FS(A) = \left\{ \sum_{x \in B} x \, : \, B \subseteq A, |B| < \infty \right\}$$

el conjunto de las sumas finitas de elementos de A. Se puede demostrar el siguiente resultado asociado:

Teorema 4.3 (Teorema de Hindman). *Dada una partición de los números naturales en un número finito de subconjuntos, existe A un subconjunto infinito de los números naturales tal que $FS(A)$ está contenido en uno de los elementos de tal partición.*

Demostración. Fijemos una coloración finita del grafo $\mathcal{X}$. Vamos a construir dos secuencias: una de conjuntos no vacíos tales que $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ y otra de elementos $a_i \in A_i$ para cada $i \geq 1$ tales que $a_i + A_i \subseteq A_{i-1}$ para cada $i \geq 1$ que además verifique $\mathcal{X}$ es constante en A_0.

Fijemos un elemento idempontente $\mathcal{F}$ en $\beta\mathbb{N}$ (podemos gracias al *Lema 3.8* y que recordemos no es principal por la *Observación 3.3*). Existe A_0 infinito con $\mathcal{X}$ constante en A_0. Por ser $\mathcal{F}$ idempotente:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} + \mathcal{F} = \big\{ B \subseteq \mathbb{N} \, : \, \{n \in \mathbb{N} \, : \, B - n \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{F} \big\},$$

es decir, que para cada $B \in \mathcal{F}$ se sigue $B' = \{n \in \mathbb{N} : B - n \in \mathcal{F}\}$ es también un elemento de $\mathcal{F}$. Por tanto $B \cap B' \in \mathcal{F}$.

Sea $a_1 \in A_0 \cap A_0'$, y sea $A_1 = \big(A_0 \cap (A_0 - a_1)\big) - \{a_1\}$. Se deduce $A_1 \subseteq A_0$ de manera directa y $a_1 + A_1 \subseteq A_0$.

Se verifica $A_1 \in \mathcal{F}$, puesto que en caso contrario $\{a_1\} \in \mathcal{F}$ pero $\mathcal{F}$ no es principal.

Repitiendo el argumento de manera inductiva, dado A_n encontramos $a_{n+1} \in A_n \cap A_n'$ tal que definiendo $A_{n+1} = A_n \cap (A_n - a_{n+1}) - \{a_{n+1}\}$ se sigue $A_{n+1} \subseteq A_n$, $a_{n+1} + A_{n+1} \subseteq A_n$ y $A_{n+1} \in \mathcal{F}$.

Tomamos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. Para ver que $\mathcal{X}$ es constante en $FS(A)$ basta con comprobar $FS(A) \subseteq A_0$, que será demostrado por inducción.

Por construcción, si m es estrictamente mayor que n se verifica $a_m + a_n \in A_{m-1} + a_n \subseteq A_n + a_n \subseteq A_{n-1} \subseteq A_0$.

Sean $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_{k+1}}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que verifican $n_1 > n_2 > \dots > n_k > n_{k+1}$. Por hipótesis de inducción $a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_k} \in A_{n_k - 1}$. Se sigue por tanto $a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_k} + a_{n_{k+1}} \in A_{n_k-1} + a_{n_{k+1}} \subseteq A_{n_{k+1}} + a_{n_{k+1}} \subseteq A_{n_{k+1}-1} \subseteq A_0$, completando la inducción.

∎

Otros resultados clásicos de teoría de Ramsey en $\mathbb{N}$ donde la aplicación de los ultrafiltros ha permitido simplificar las pruebas originales puede encontrarse en [5, capítulo I.5].

Una fuente interesante de información puede consultarse en el siguiente enlace:

https://joelmoreira.wordpress.com/2012/11/14/properties-of-ultrafilters-and-a-theorem-of-hindman-on-arithmetic-combinatorics/

5 Aplicación al Teorema de Arrow

Kenneth Arrow fue un economista de alto prestigio durante el siglo XX y laureado con el *Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel*. Estudió Ciencias Sociales y Matemáticas, pero acabó especializándose en Economía. Es conocido por el llamado **Teorema de Imposibilidad de Arrow**. Dicho teorema establece que dadas ciertas condiciones *"razonables"* sobre un sistema democrático irremediablemente surge la figura de un *dictador*. El resultado es generelmente percibido como antiintuitivo y presenta una gran piedra en el zapato para los filósofos demócratas. Si bien Arrow no conocía la existencia de los ultrafiltros (o al menos no los usó para su demostración), estos se pueden usar para demostrar el Teorema de Arrow y de hecho generalizarlo, con interesantes consecuencias.

Figura 5.1: Kenneth Arrow.

Más específicamente, un sistema democrático (con la definición de Arrow) consiste en un conjunto de candidatos C de al menos tres elementos, un conjunto de votantes V (que generalmente se supone finito) y un algoritmo de elección de candidatos por parte de los votantes. Cada votante se dice que *presenta*, *vota* o *jerarquiza* una *preferencia*, *votación* o *jerarquización*, que no es más que una enumeración ordenada de los candidatos, de forma que dados dos candidatos cualesquiera o bien uno ha sido jerarquizado sobre otro o bien el otro sobre el uno.

Sobre dichos conceptos se contruye el de **función de bienestar social**, abreviada **FBS** y también denotada $\boldsymbol{f}$, que es lo que interpretamos como el resultado global de la votación. Arrow se plantea cuáles son las propiedades que habría de verificar un sistema de votación de tal manera que fuese lo más *"perfecto"* posible y estudiar la viabilidad de tal sistema. Entre tales propiedades se encuentran la imposibilidad de empates, que el resultado de la votación presente una jerarquización de todos los candidatos (y no sólo el ganador) y algunas que podríamos considerar más básicas. Formalmente, se exige que f sea función, que su imagen esté compuesta por jerarquizaciones y que además verifique las siguientes tres propiedades:

- Unanimidad (**U**): si todos los individuos presentan la misma preferencia, entonces f también produce dicha preferencia.
- Alternativas irrelevantes (**AI**): la jerarquización relativa de dos candidatos c_1 y c_2 en la jerarquización salida de f sólo depende de la jerarquización relativa de c_1 y c_2 en cada votación.
- Unanimidad Local (**UL**): si todos los individuos presentan preferencias tales que c_1 está jerarquizado sobre c_2 entonces f produce una jerarquización tal que c_1 está jerarquizado sobre c_2.

Con estos ingredientes pasamos a un análisis de los posibles agentes que generen problemas en nuestra votación:

Definición 5.1. *Sea V un conjunto de votantes (no necesariamente finito). Dado $D \subseteq V$ decimos que es* ***decisivo*** *si cuando todos los $x \in D$ presentan una votación π la función de bienestar social f presenta la misma jerarquización π.*

En otras palabras, si D es un conjunto decisivo el resultado de la votación puede ser determinado únicamente por D, sin que afecte al resultado la valoración de los votantes fuera del conjunto.

Lo deseable es que existan los menos conjuntos decisivos posibles, más allá del conjunto total. Un caso particularmente patológico es el siguiente:

Definición 5.2 (Dictador). *Un elemento* ***d*** *de un conjunto de votantes V se dice que es un* ***dictador*** *si al presentar d una jerarquización π la función de bienestar social también presenta π.*

En otras palabras, que el resultado de la votación depende de una persona unilateralmente. Es importante destacar que el conjunto de candidatos no se restringe a potenciales gobernantes exclusivamente, sino que en el contexto adecuado podría venir dado por un conjunto de medidas politicas y se busca votar cuales de dichas medidas van a ser aprobadas.

El resultado más importante del capítulo es el siguiente:

Teorema 5.1. *Sea V un conjunto de votantes (posiblemente infinito). Sea f una función de bienestar social que satisface las propiedades de Unanimidad y de Alternativas Irrelevantes y supóngase que existen al menos tres candidatos. Entonces $\mathcal{F} := \{D \subseteq V : D \text{ es decisivo}\}$ define un ultrafiltro.*

El cual admite el Teorema de Arrow como corolario directo:

Teorema 5.2 (de Arrow). *Sea V un conjunto de votantes finito. Sea f una función de bienestar que satisface las propiedades de Unanimidad y Alternativas Irrelevantes y supongáse que existen al menos tres candidatos en la votación. Entonces uno de los elementos de V es un dictador.*

Para demostrar la versión general nos remitiremos a la caracterización de la *Observación 1.3* y probaremos cada una de las condiciones como un resultado por separado. Dichos resultados serán el *Lema 5.1*, el *Lema 5.2* y el *Lema 5.3*.

Para la demostración serán importantes los siguientes objetos:

Definición 5.3. *Decimos que D es un* ***conjunto decisivo por bloques*** *si cuando todos los $x \in D$ presentan la misma votación π y todos los $x \in D^c$ presentan la misma votación τ (donde π no es necesariamente igual a τ) entonces f presenta como valor π.*

Definición 5.4. *Decimos que D es un conjunto ij-decisivo si cuando para cualesquiera dos permutaciones π y τ tales que π jerarquiza c_j sobre c_i y τ jerarquiza c_i sobre c_j, si todo $x \in D$ presenta π y todo $x \in D^c$ presenta τ entonces f jerarquiza c_j sobre c_i.*

Observación 5.1. Nótese que no se ha probado que si D es *ij-decisivo* entonces también sea *ji-decisivo*. Dicho de otra manera, no se ha probado la propiedad *ij-decisivo* es conmutativo en el par (i, j). Dicho detalle es relevante en las siguientes demostraciones y por tanto es importante tenerlo presente.

Proposición 5.1. Si D es decisivo por bloques entonces es decisivo.

Demostración. Supongamos que D es decisivo por bloques pero no es decisivo. Por definición se tendría que existe una votación π tal que π jerarquiza c_i sobre c_j y si todos los votantes de D presentan π, f jerarquiza c_j sobre c_i. Sea ahora V_1 el conjunto de votantes que no son de D que también han jerarquizado c_i sobre c_j y V_2 el resto de votantes (que por descarte han de haber jerarquizado c_j sobre c_i). Tenemos el siguiente esquema de votación:

Presentante	Votación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_j
V_1	-	c_i sobre c_j
V_2	-	c_j sobre c_i
f	-	c_j sobre c_i

Podemos reordenar las jerarquizaciones de los elementos de V_1 de tal manera que se siga verificando que todos los votantes de V_1 sigan jerarquizando c_i sobre c_j, y por *Alternativas Irrelevantes* el resultado de la votación no es alterado. En particular podemos imponer que todos los votantes de V_1 presenten π, obteniendo la siguiente modificación de la tabla:

Presentante	Votación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_j
V_1	π	c_i sobre c_j
V_2	-	c_j sobre c_i
f	-	c_j sobre c_i

Por exactamente el mismo motivo la jerarquización de c_j sobre c_i de la función de bienestar social no se ve afectada si todos los votantes de V_2 presentan una determinada votación τ tal que τ jerarquiza c_j sobre c_i. Dicho de otra forma, tenemos el siguiente esquema derivado:

Presentante	Votación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_j
V_1	π	c_i sobre c_j
V_2	τ	c_j sobre c_i
f	-	c_j sobre c_i

Supongamos ahora que tomamos c_k distinto de c_i y c_j. Nuevamente, gracias a la propiedad de Alternativas Irrelevantes podemos modificar las votaciones de tal manera que al no alterar el orden relativo de c_j y c_i el resultado relativo de ambas tampoco es alterado. En particular vamos a suponer que π presenta c_i sobre c_k sobre c_j, que V_1 presenta τ_1, una votación que jerarquiza c_i sobre c_j sobre c_k, y que V_2 presenta una votación τ_2 que jerarquiza c_j sobre c_i sobre c_k. Por la propiedad de *Unanimidad Local*, al presentar todas las votaciones c_i sobre c_k la función de bienestar social también lo hará. Nuestro nuevo resumen de votaciones es el siguiente:

Presentante	Votación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_k sobre c_j
V_1	τ_1	c_i sobre c_j sobre c_k
V_2	τ_2	c_j sobre c_i sobre c_k
f	-	c_j sobre c_i sobre c_k

Procedamos a ignorar la información relativa a c_i en la tabla anterior:

Presentante	Votación	Jerarquización
D	π	c_k sobre c_j
V_1	τ_1	c_j sobre c_k
V_2	τ_2	c_j sobre c_k
f	-	c_j sobre c_k

Gracias a la propiedad de Alternativas Irrelevantes podemos modificar las permutaciones τ_1 y τ_2 de tal forma que ambas coincidan, sigan presentando c_j sobre c_k y dichas modificaciones no afectan a la jerarquización de c_j y c_k en el resultado:

Presentante	Votación	Jerarquización
D	π	c_k sobre c_j
V_1	τ	c_j sobre c_k
V_2	τ	c_j sobre c_k
f	-	c_j sobre c_k

Pero dicho esquema contradice la premisa D *decisivo por bloques*, finalizando la demostración.

∎

Observación 5.2. Si D es decisivo, entonces es obviamente D es decisivo por bloques. Consecuentemente, D es decisivo si y sólo si es decisivo por bloques.

Lema 5.1. El conjunto total de votantes es decisivo pero el vacío no. Es decir, $V \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Dicha propiedad es muy elemental y no requiere demostración. Sin embargo, la siguiente sí requerirá de un cierto trabajo:

Lema 5.2. La intersección de dos conjuntos decisivo es decisivo, i.e. si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in F$.

Demostración. Háganse dos observaciones:

1. Si $M \subseteq V$ es decisivo entonces todo $N \subseteq V$ con $M \subseteq N$ también lo es.
2. Un subconjunto de votantes y su complementario no pueden ser simultáneamente decisivos.

La primera observación es inmediata. La segunda es cierta puesto que en tal caso, si D es conjunto de votantes que es decisivo simultáneamente a su complementario, al presentar D una votación que jerarquice c_j sobre c_i y D^c una votación que jerarquice c_i sobre c_j, f debe jerarquizar simultáneamente c_j sobre c_i y c_i sobre c_j.

Usando el **Lema 5.3** de manera inductiva, tenemos que dada una partición disjunta $V = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \cdots \sqcup D_n$ ha de ser exactamente un D_i decisivo. Consecuentemente, si hacemos la descomposición:

$$V = (A \cup B)^c \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \setminus B) \sqcup (A \cap B),$$

exactamente uno de los cuatro conjuntos es decisivo. Hagamos un estudio de cada uno de los candidatos a conjunto decisivo por separado:

1. Gracias a la observación primera $A \subseteq A \cup B$ implica $A \cup B$ decisivo. Debido a la segunda observación $(A \cup B)^c$ no es decisivo.
2. $B \setminus A$ tampoco puede ser decisivo pues $A \subseteq (B \setminus A)^c$, de donde $(B \setminus A)^c$ es decisivo.
3. Análogamente $A \setminus B$ no es decisivo.
4. Por descarte $A \cap B$ es necesariamente decisivo.

∎

Lema 5.3. Si F no es decisivo entonces F^c lo es. Dicho de otra manera, para todo $F \subseteq V$ se tiene $F \in \mathcal{F}$ ó $F^c \in \mathcal{F}$.

Demostración. Comencemos suponiendo que existen al menos tres candidatos distintos. Considérese la siguiente expresión equivalente para $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{D \subseteq V \;:\; D \textit{ es decisivo por bloques}\},$$

validada por la *Observación 5.2*. Valiéndonos de dicha formulación de $\mathcal{F}$ podremos probar que si $D \notin \mathcal{F}$ necesariamente $D^c \in \mathcal{F}$.

La afirmación $\mathcal{F}$ es *decisivo por bloques* equivale a la siguiente lista de propiedades para cada i, j, k tres índices de candidatos:

1. D^c es ij*-decisivo*
2. D^c es kj*-decisivo* para cada $k \neq i, j$
3. D^c es ik*-decisivo* para cada $k \neq i, j$
4. D^c es jk*-decisivo* para cada $k \neq i, j$
5. D^c es ji*-decisivo*
6. D^c es ki*-decisivo* para cada $k \neq i, j$

D no decisivo por bloques significa que existen $i \neq j$ y dos votaciones π y τ tales que π jerarquiza el candidato c_i sobre el candidato c_j mientras que τ jerarquiza el candidato c_j sobre el candidato c_i y si todos los votantes de D presentan π y todos los votantes de D^c presentan τ entonces la FBS jerarquiza el candidato c_j sobre el candidato c_i.

Por **AI** siempre que todos los $x \in D$ jerarquizan c_i sobre c_j y todos los $x \in D^c$ jerarquizan c_j sobre c_i, la salida por f jerarquiza c_j sobre c_i. Es decir, ***D^c* es ij*-decisivo***, lo que se resume en la siguiente tabla:

Presentante	Permutación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_j
D^c	τ	c_j sobre c_i
Resultado	-	c_j sobre c_i

Con lo anterior hemos probado la primera propiedad y pasamos a la segunda. Sea $k \neq i, j$ cualquiera, entonces ***D^c* kj-decisivo**.

Efectivamente, si no fuese así, existirían votaciones π jerarquizando c_j sobre c_k, τ jerarquizando c_k sobre c_j tales que si todos los $x \in D^c$ presentan π y todos los $x \in D$ presentan τ entonces f presenta c_k sobre c_j. Por el mismo argumento que en el párrafo anterior, D *es jk-decisivo*. Veamos que hemos llegado a una contradicción:

Supóngase que todos los $x \in D^c$ presentan una votación π que jerarquiza c_j sobre c_i sobre c_k y que todos los $x \in D$ presentan una votación τ que jerarquiza c_i sobre c_k sobre c_j. En resumen, tenemos el siguiente esquema de votación:

Votantes	Permutación	Jerarquización
D	τ	c_i sobre c_k sobre c_j
D^c	π	c_j sobre c_i sobre c_k

Entonces por ser D jk-*decisivo* tenemos que:

(1) f presenta c_k sobre c_j.

Paralelamente, por ser D^c ij-*decisivo*:

(2) f jerarquiza c_j sobre c_i.

gracias a **UL**, al ser tanto π como τ votaciones que jerarquizan c_i sobre c_k:

(3) f jerarquiza c_i sobre c_k.

Concatenando los tres órdenes relativos:

f jerarquiza c_k sobre c_j por *(1)*, c_j sobre c_i por *(2)*, y c_i sobre c_k por *(3)*, lo que es una contradicción.

Concluimos que D^c es kj-*decisivo* para todo $k \neq i, j$.

Hasta ahora hemos probado las primeras dos afirmaciones de la lista.

Las siguientes propiedades, por similitud como las anteriores, se demostrarán con mucha más brevedad.

Continuamos probando siguiente: $\boldsymbol{D^c}$ **es ik-decisivo**. Si no fuese así, D sería *ki-decisivo* y entonces, si se da la siguiente votación:

Votantes	Votación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_k sobre c_j
D^c	τ	c_k sobre c_j sobre c_i

Por ser D^c *ij-decisivo* se sigue que f jerarquiza c_j sobre c_i, por ser D *ki-decisivo* la FBS presenta c_i sobre c_k y por jerarquizar tanto π como τ c_k sobre c_j el resultado de la votación también, llegando a contradicción.

La siguiente propiedad de la lista afirma $\boldsymbol{D^c}$ **es jk-decisivo**. Efectivamente, si no fuese así sería D kj*-decisivo*. Si se da la siguiente votación:

Votantes	Votación	Jerarquización
D	π	c_i sobre c_j sobre c_k
D^c	τ	c_k sobre c_i sobre c_j

La FBS jerarquizaría c_j sobre c_k por ser D kj*-decisivo*, c_k sobre c_i por ser D^c ik*-decisivo* y c_i sobre c_j por presentar todos los votantes c_i sobre c_j.

Afirmamos $\boldsymbol{D^c}$ **es ji-decisivo**. Efectivamente, si no fuese así, se comprueba que D sería ij-decisivo. Sean entonces π una votación que presente c_j sobre c_i sobre c_k y τ una votación que presente c_i sobre c_k sobre c_j y supongamos que todos los votantes de D presentan π y todos los votantes de D^c presentan τ. Es decir, que tenemos el siguiente esquema de votación:

Votantes	Votación	Jerarquización
D	π	c_j sobre c_i sobre c_k
D^c	τ	c_i sobre c_k sobre c_j

entonces por ser D ij-decisivo se tiene que (1), f presenta c_j sobre c_i. Paralelamente, por presentar ambos una votación que jerarquiza c_i sobre c_k tenemos que (2) el resultado presenta c_i sobre c_k. Finalmente, como ya sabemos que D^c es jk-decisivo y τ presenta c_k sobre c_j (3) la FBS presenta c_k sobre c_j, llegando a una contradicción.

Para acabar la demostración, al ser D^c tanto *ij-decisivo* como *ji-decisivo*, tenemos que las variables i y j son mudas, y con ello los argumentos usados para demostrar las propiedades $1)$ a $5)$ se adaptan fácilmente para probar la propiedad $6)$, concluyendo la demostración.

∎

Entrando en el pantanoso terreno de las conclusiones e implicaciones, este último resultado tiene algunas de las más interesantes.

Por ejemplo, el resultado rígido (hay un dictador absoluto) sólo es cierto las reglas del sistema democrático son igualmente rígidas. Esto podría explicar por qué en las democracias actuales nunca hay una correspondencia absoluta entre el número de diputados y el porcentaje de votos, llegando a darse el caso de que un partido con más votos pierda frente a otro con menos. Al flexibilizar las condiciones en el sistema de votación se flexibiliza la naturaleza dictatorial.

También sabemos que en numerosos países occidentales ciertas regiones disfrutan de una mejor relación voto-representación que otras. Una posible explicación es que debido a la naturaleza de ultrafiltro de los conjuntos decisivos, al ser un sector de la población un conjunto que no es parte del ultrafiltro, se le añade un peso *"artifialmente"*.

Más aún, la existencia de dictadores sólo es veraz en conjuntos de votantes finitos. Sin embargo, un sistema de votantes muy grande podría *"falsear"* su naturaleza finita para obtener resultados propios de sistemas de infinitos votantes. Algo similar al caso de los ordenadores y sus sistemas de cálculo real usando racionales de *"muchos decimales"*. Dicho argumento explica el porqué no ha sido hasta la viabilidad tecnológica de votaciones en masa que la humanidad ha vivido bajo dominio de regímenes absolutos. Al ser el número de votantes *"pequeño"* no se puede *"trucar"* la naturaleza del sistema de votantes, dando lugar de forma natural a figuras dictatoriales.

Bibliografía

[1] J. L. Bell, A. B. Slomson. *Models and Ultraproducts: an introduction.* North-Holland Publishing Company, (1969).

[2] Tullio Ceccherini-Silberstein, Michael Coornaert. *Cellular Automata and Groups.* Springer, (2010).

[3] W. Gähler. *Grundstrukturen der Analysis I.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1977.

[4] David Galvin. *Ultrafilters, with applications to analysis, social choice and combinatorics.* https://www3.nd.edu/ dgalvin1/pdf/ultrafilters.pdf

[5] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech Compactification.* Walter de Gruyter & Co., 2012.

[6] Neil Hindman. *Finite Sums from Sequences Within Cells of a Partition of* $\mathbb{N}$. Journal of Combinatorial Theory (A) 17, 1-11 (1974).

[7] Alan P. Kirman and Dieter Sondermann. *Arrow's Theorem, Many Agents, and Invisible Dictators.* Journal of Economic Theory 5, 267-277 (1972).

[8] Péter Komjáth & Vilmos Totik. *Ultrafilters.* The American Mathematical Monthly, 115:1, 33-44 (2018).

[9] Bruce M. Landman, Aaron Robertson. *Ramsey Theory on the Integers.* American Mathematical Society, (2004).

[10] W. A. J. Luxemburg *Two Applications of the Method of Construction by Ultrapowers to Analysis.* (1962)

[11] David Pincus and Robert Solovay. *Definability of measures and ultrafilters.* J. Symbolic Logic **42** (1977), 179-190.

[12] Graham, Ronald L.,; Rothschild, Bruce L.,; Spencer, Joel H. *Ramsey theory.* New York : Wiley; 1990

[13] W. Rudin. *Functional Analysis.* Mc Graw Hill, (1991)

[14] Eric Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations.* Academic Press, (1997).

[15] Stephen Willard. *General Topology.* Addison Wesley Publishing Company, (1970)