

Trabajo Fin de Máster  
Máster de Organización Industrial y Gestión de  
Empresas

Desarrollo de un modelo de optimización para el  
diseño de líneas de transporte público

Autor: Álvaro Morera Mora

Tutor: José David Canca Ortiz

**Dpto. Organización Industrial II**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2022





Trabajo Fin de Máster  
Máster de Organización Industrial y Gestión de Empresas

# **Desarrollo de un modelo de optimización para el diseño de líneas de transporte público**

Autor:

Álvaro Morera Mora

Tutor:

José David Canca Ortiz

Catedrático de universidad

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Máster: Desarrollo de un modelo de optimización para el diseño de líneas de transporte público

Autor: Álvaro Morera Mora

Tutor: David Canca Ortiz

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2022

El Secretario del Tribunal



*A mi familia*

*A mis maestros*



# Agradecimientos

---

Querría comenzar dando las gracias a mis padres por inculcarme la cultura del esfuerzo y el sacrificio para conseguir mis metas. Seguidamente, a mi hermano por aportarme tantos valores tan necesarios hoy en día. A mis amigos por estar en las buenas y animarme en los peores momentos. A David, por mostrarse tan cercano y prestar su ayuda cuando se necesita, tanto en este trabajo como a lo largo del año académico.



En este trabajo se diseñará la red de líneas de autobús para la ciudad de Sevilla. Para ello, se tendrá un conjunto de líneas candidatas que, mediante la resolución de un método de optimización, se elegirán para obtener el diseño que reduzca el tiempo total y que cumpla el servicio deseado.

El conjunto de paradas y calles por las que circularán los autobuses se representará mediante un grafo de nodos y arcos. En este trabajo, existe la particularidad que existirán varias capas o niveles de redes de autobús para la resolución por motivos que se especificarán en el trabajo.



# Abstract

---

In the current research, a network of bus lines will be designed for the city of Seville. To achieve that, it will be given a group of lines considered as candidates. The design that minimizes the total time and achieve the desired service will be chosen through an optimization method.

The set of bus stops and streets in which the buses will run will be represented as a graph of nodes and arcs. In this work, the graph representing the whole transportation system will contain several bus layers. The reason to select this network design will be explained later, when presenting the optimization model.

# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xiv</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xvi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisión de la literatura</b>	<b>3</b>
<b>3 Descripción del modelo propuesto</b>	<b>5</b>
3.1 <i>Subconjuntos del problema</i>	6
3.2 <i>Datos del problema</i>	7
3.3 <i>Descripción de las variables del problema</i>	8
3.3.1 <i>Tratamiento de los datos</i>	8
3.4 <i>Restricciones del problema</i>	9
3.5 <i>Operadores auxiliares</i>	10
3.6 <i>Función objetivo</i>	11
3.7 <i>Escenarios propuestos</i>	12
<b>4 Resultados obtenidos</b>	<b>13</b>
<b>5 Conclusiones</b>	<b>17</b>
<b>Referencias</b>	<b>20</b>
<b>Anexo</b>	<b>24</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1. Representación de la determinación multicapa de dos caminos para dos líneas en una red de 9 nodos	6
Figura 2. Grafo obtenido para Sevilla representado sobre el mapa de la ciudad.	14
Figura 3. Mapa de nodos y arcos de Sevilla	24
Figura 4. Línea 1	25
Figura 5. Línea 2	25
Figura 6. Línea 3	26
Figura 7. Línea 4	26
Figura 8. Línea 5	27
Figura 9. Línea 6	27
Figura 10. Línea 7	28
Figura 11. Línea 8	28
Figura 12. Línea 9	29
Figura 13. Línea 10	29
Figura 14. Línea 11	30
Figura 15. Línea 12	30
Figura 16. Línea 13	31
Figura 17. Línea 14	31
Figura 18. Línea 15	32
Figura 19. Línea 16	32
Figura 20. Línea 17	33
Figura 21. Línea 18	33
Figura 22. Línea 19	34
Figura 23. Línea 20	34
Figura 24. Línea 21	35
Figura 25. Línea 22	35
Figura 26. Línea 23	36
Figura 27. Línea 24	36
Figura 28. Línea 25	37
Figura 29. Línea 26	37
Figura 30. Línea 27	38
Figura 31. Línea 28	38
Figura 32. Línea 29	39
Figura 33. Línea 30	39
Figura 34. Línea 31	40
Figura 35. Línea 32	40

Figura 36. Línea 33	41
Figura 37. Línea 34	41
Figura 38. Línea 35	42
Figura 39. Línea 36	42
Figura 40. Línea 37	43
Figura 41. Línea 38	43
Figura 42. Línea 39	44
Figura 43. Línea 40	44
Figura 44. Línea 41	45
Figura 45. Línea 42	45
Figura 46. Línea 43	46
Figura 47. Línea 44	46
Figura 48. Línea 45	47



# 1 INTRODUCCIÓN

---

**D**urante el siglo XX y el siglo XXI, se ha producido un éxodo masivo hacia las ciudades, provocando que estas hayan crecido de manera exponencial. Además, la cultura occidental siempre se ha apoyado sobre la comodidad del individuo, por tanto, la mayoría de las familias disponen de vehículo propio para sus desplazamientos. Sin embargo, estos desplazamientos masivos en vehículos propios es una de las causas que han llevado a la humanidad a la situación climática actual. Durante los últimos años, se está concienciando a la población sobre este hecho, provocando cambios en los hábitos de los individuos. Uno de estos cambios es la sustitución de los trayectos en vehículo propio por trayectos en transporte público. Para que las personas elijan este medio de transporte, es vital que las ciudades dispongan de una red de transporte público eficiente y económica. Es por ello que, en este trabajo, se va a proponer un método de optimización de las líneas de autobús urbano de tal manera que se minimice el tiempo empleado por los usuarios para llegar a sus destinos, además de aminorar el coste para la empresa de transporte.

El estudio del diseño de la red pública de transporte no aparece hasta mediados del siglo XX. Hasta entonces, el diseño de esta red era de manera rápida y sin tener en cuenta muchos de los factores que hacen que las rutas sean eficientes. Se iban diseñando de manera secuencial, conforme a las necesidades de la población.

El diseño de la red pública de transporte puede considerar numerosos objetivos, ya sean desde el punto de vista del usuario o desde el punto de vista de la empresa. Normalmente, estos objetivos serán opuestos, por tanto, se debe encontrar un equilibrio, ya que, si se maximizan los objetivos de uno de los dos, probablemente el segundo abandone la red. Por ejemplo, si se minimiza el tiempo total empleado por cada usuario de la red, probablemente no sea rentable en términos económicos para la empresa. Al igual que si la empresa maximiza sus beneficios, probablemente numerosos usuarios optarán por otros medios de transporte para llegar a sus destinos.

Este trabajo de fin de máster se desarrollará comentando previamente la literatura previa relacionada con la temática en cuestión en el punto 2. Se verán diferentes metodologías usadas hasta ahora y repasando los diferentes objetivos que se han marcado los autores. Seguidamente, se describirá el modelo propuesto en el punto 3. Para ello, se determinarán los datos que son necesarios, los índices, las variables y restricciones del problema. A continuación, se detallarán los resultados obtenidos en el punto 4. En el punto 5 se detallarán las conclusiones obtenidas en este trabajo. Finalmente, en el Anexo, se mostrarán las figuras obtenidas que representan las líneas de autobús de la solución dada.



## 2 REVISIÓN DE LA LITERATURA

---

En la literatura, uno de los primeros artículos que trata el diseño de la red pública de transporte es el de (Mandl, 1980). En él, se presenta un algoritmo de evaluación y optimización de redes de transporte público cuyo principal objetivo es el de minimizar el tiempo total empleado por los usuarios de la red para llegar a sus destinos. El algoritmo parte de una red de calles o railes dada, además de conocer los datos de demanda de los usuarios desde cada origen a cada destino. Para la optimización de las rutas, divide el problema en tres. En primer lugar, conociendo las rutas y headways<sup>1</sup>, asigna los pasajeros a las distintas rutas, asignando los pasajeros a la ruta que en menor tiempo cubra su demanda. En segundo lugar, se asignan los vehículos a las distintas rutas. Para ello, se asignan en primer lugar los vehículos a las rutas de manera aleatoria y, posteriormente, se introducen los datos de los flujos de viajeros para mejorar la asignación. Por último, busca las rutas que deben seguir los vehículos en la red dada mediante una heurística que minimice el coste temporal.

En 2002, (Chakroborty & Wivedi, 2002) buscan mediante el uso de metaheurísticas, en concreto mediante un algoritmo genético, un conjunto de rutas eficientes. La definición de una ruta eficiente, según este artículo, es una ruta que cumpla tres requisitos:

- La ruta debe satisfacer la mayoría de la demanda.
- La ruta debe satisfacer la mayoría de la demanda sin apoyarse en los trasbordos.
- La ruta debe satisfacer la demanda en un bajo tiempo de viaje. Aquí se incluye también el tiempo de espera en la parada.

En 2004, (Borndörfer, Grötschel, & Pfetsch, 2004) proponen dos métodos de resolución, basados en dos objetivos completamente diferentes. Por un lado, propone una solución desde el punto de vista favorable de la empresa, minimizando la cantidad de líneas. Para ello, busca eliminar las líneas que pudieran quedar “aisladas” con pocos pasajeros. Adicionalmente, minimiza el tiempo que los viajeros pasan en un arco, pudiendo solventar problemas de capacidad. Por otro lado, desde el punto de vista del usuario, intenta minimizar el tiempo total de viaje y el coste de este. Para la minimización del coste, emplea un método de relajación de las restricciones, ya que se trata de un problema *NP-Hard*. En el artículo, concluyen que el modelo es válido para una ciudad de tamaño medio, pero no para una gran ciudad.

En 2006, (Goossens, van Hoesel, & Kroon, 2006) propone un modelo de diseño de ruta para trenes en los que introduce como novedad la opción de que el tren no pare en todas las paradas de su ruta. En su modelo, centrarán los esfuerzos en encontrar un diseño de líneas que minimice el coste operativo. Para cada línea se debe decidir su ruta, su frecuencia y su capacidad (número de vagones). En su artículo, desarrollan varios modelos de planificación de diferentes tipos de línea al mismo tiempo.

En 2008, (Zhao & Zeng, Optimization of transit route network, vehicle headways and timetables for large-scale transit networks, 2008) Zhao y Zeng propusieron un método metaheurístico para optimizar una red de rutas de tránsito urbano de gran tamaño. Esta metaheurística combina métodos como *Simulated Annealing*, *Tabu Search*

---

<sup>1</sup> Headway: intervalo de tiempo desde la salida de un vehículo de transporte público en una estación o parada hasta que llega el siguiente.

y *Greedy Search*. El objetivo era el de minimizar el coste de viaje para el pasajero. Se busca minimizar el coste temporal, en referencia al tiempo en ruta y el tiempo de espera. Por tanto, este problema está centrado en el objetivo del usuario, que no es otro que reducir el tiempo para realizar el desplazamiento deseado sobre la red. Para poder realizar la optimización, se necesita la red de calles de la población y la demanda de tránsito de un área a otra de la población. Adicionalmente, se consideran restricciones de presupuesto y de fiabilidad del servicio, es decir, restricciones de frecuencia de las líneas.

En 2012, (Hadas & Shnaiderman, 2012) presentan un modelo con el objetivo de minimizar los costes totales para el operador. Para ello, en la función objetivo tienen en cuenta la utilización de la flota, buscando una utilización de los vehículos lo más eficiente posible. En su modelo, las variables son la capacidad del vehículo y el *headway*. Para el cálculo del coste, tienen en cuenta un coste por demanda no cubierta, es decir, cuando la capacidad del autobús es menor que la demanda, y también tiene en cuenta el coste por asientos vacíos. De esta manera, en el modelo se debe buscar una frecuencia óptima en función de los costes operativos.

En 2019, (Zhou, Yang, Wang, & Yan, 2019), definieron un problema de optimización de la planificación de líneas urbanas con dos objetivos opuestos. Por un lado, desde el punto de vista de la empresa, que busca minimizar los costes de operación o maximizar los beneficios. Por otro lado, desde el punto de vista del usuario, que busca viajar en el menor tiempo posible. Así, en primer lugar, se busca la configuración de líneas más barata que cubra todos los puntos de demanda del grafo. Para ello, se debe minimizar la longitud de las líneas, ya que es directamente proporcional al coste. También se debe tener en cuenta la frecuencia de las líneas, ya que, a mayor flota, mayor coste. Posteriormente, se asignan los pasajeros a las líneas. Se supone que los viajeros elegirán la ruta más corta desde el punto de vista temporal, es decir, la que menor tiempo consuma teniendo en cuenta el tiempo de trayecto, tiempo de espera, de trasbordo y tiempo final necesario para llegar a destino. Para la resolución se linealiza el modelo y se ejecuta un método de aproximación con un error controlado.

En 2019, (Canca, De Los Santos, Laporte, & Mesa, 2019), solucionan un problema de diseño de red integrada y de planificación de líneas de metro mediante metaheurísticas y mediante el algoritmo Branch-and-cut, con el objetivo de maximizar el beneficio de la empresa. Una particularidad de este problema es la existencia de competidores a la hora de ofrecer el mismo servicio. La dificultad del problema radica en los múltiples factores a tener en cuenta. Se pretende optimizar el diseño de la red, planificando las líneas, estableciendo las frecuencias, teniendo en cuenta el mantenimiento de la flota y vías, considerando también costes debidos a los horarios de los trabajadores. El problema no se puede resolver a priori utilizando métodos exactos, por lo tanto, los autores recurren a metaheurísticas considerando caminos “todo o nada”. Se incluye una metaheurística que resuelve el problema del diseño de la red y el problema de planificación, además de incorporar la asignación de los pasajeros y las operaciones de red necesarias para maximizar la función objetivo. Así, el problema se divide en dos, siendo la primera parte la correspondiente al diseño de la red, resuelto mediante un algoritmo ANLS y la segunda, correspondiente a la asignación de los pasajeros y operaciones de red, mediante Branch-and-cut.

En 2021, (Lee & Nair, 2021) proponen un algoritmo de planificación de las líneas de transporte en dos niveles. En primer lugar, se buscará obtener las frecuencias de las líneas para reducir el tiempo total de viaje y, posteriormente, se buscará el camino más corto para estas líneas.

El trabajo desarrollado, se inspira en el propuesto por (Canca, De los Santos, Zarzo, & Villa, 2022) en el que se diseña un problema con dos grafos, uno representando la red urbana para el viaje andando y la red urbana para el viaje en autobús. Ambos grafos están conectados entre sí para el diseño de las rutas, en las que un salto de una capa a otra llevará implícito un coste temporal para el viajante. El objetivo es obtener el máximo nivel de servicio. Para ello, se buscan las rutas de menor distancia posible para los viajantes y, por ende, de menor coste tiempo

### 3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

---

**E**n este trabajo, se desea desarrollar un modelo de optimización para el diseño de las rutas de autobús para Sevilla. Para ello, se realizará un grafo representativo de la ciudad, donde los nodos serán las paradas de autobús y, los arcos, las calles que conectan dichas paradas.

Una de las principales diferencias del trabajo actual respecto a otros trabajos académicos es que se trabaja con una red multicapa, que guarda en una capa la red peatonal y en otras capas la red de líneas candidatas de autobús. Las diferentes capas que guardan las líneas de autobús forman a su vez una supercapa. Cada una de estas capas dentro de la supercapa de autobuses corresponderá a una línea de autobús que estará conectada a la red peatonal. Es decir, un peatón, desde una misma parada, podrá elegir entre acceder a una capa de autobús u otra (una línea u otra de entre las líneas candidatas), siempre y cuando por esa parada pase la línea del autobús en cuestión. Estos arcos de conexión entre la capa peatonal y la de autobús serán los arcos de subida y bajada de los pasajeros al modo autobús.

En cada una de las capas de autobús aparecerán las paradas por las que pase la línea proyectada sobre la capa peatonal. Si desde un nodo peatonal es posible acceder a diferentes nodos de las capas de autobús (diferentes líneas de autobús usan la parada o nodo de la capa base), el pasajero, puede elegir entre “acceder” a la primera capa o a la segunda para tomar la línea deseada (siempre que finalmente estas líneas se active, ya que lo que se almacena en las capas de la supercapa de autobuses son las líneas candidatas, es decir, líneas potenciales, de entre las que el modelo de optimización escogerá algunas de ellas para conformar la red final de líneas de autobús). La conexión entre la red peatonal y la segunda capa es equivalente a la de la primera, es decir, mediante arcos de subida y bajada. En la Figura 1 se representa un ejemplo de una red multicapa. En ella se aprecia una red peatonal y dos líneas de autobús, cada una almacenada en una capa diferente. El peatón puede elegir tomar el autobús de la línea que circula por la capa 1 o la de la capa 2. En esta figura, se ve representado como un peatón que desea ir desde el nodo 1 al 9, tiene varias opciones. En primer lugar, puede ir andando, cuestión que no se evaluará. En segundo lugar, el peatón puede tomar el autobús correspondiente a la línea de la capa 1. Para montarse en el autobús, tendrá que pasar por el arco de subida de 1 a 1'. Finalmente, se bajará en el nodo 9', pasando por el arco de bajada hacia el nodo 9. Lo mismo ocurre si decide tomar el autobús de la línea de la capa 2.

La elección de esta metodología multicapa para la búsqueda de caminos se debe a la facilidad con la que opera el software de optimización. El fin es el de encontrar resultados rápidamente, en contraposición con otras metodologías de resolución. Esta metodología, para el software, simplemente aumenta el tamaño de la red, imponiendo restricciones sobre los nodos y arcos que en ella se encuentran. La clave de la facilidad y rapidez con la que opera el software de optimización es que se cuenta con un conjunto de líneas candidatas, no teniendo que realizar la labor de búsqueda de rutas para las líneas.

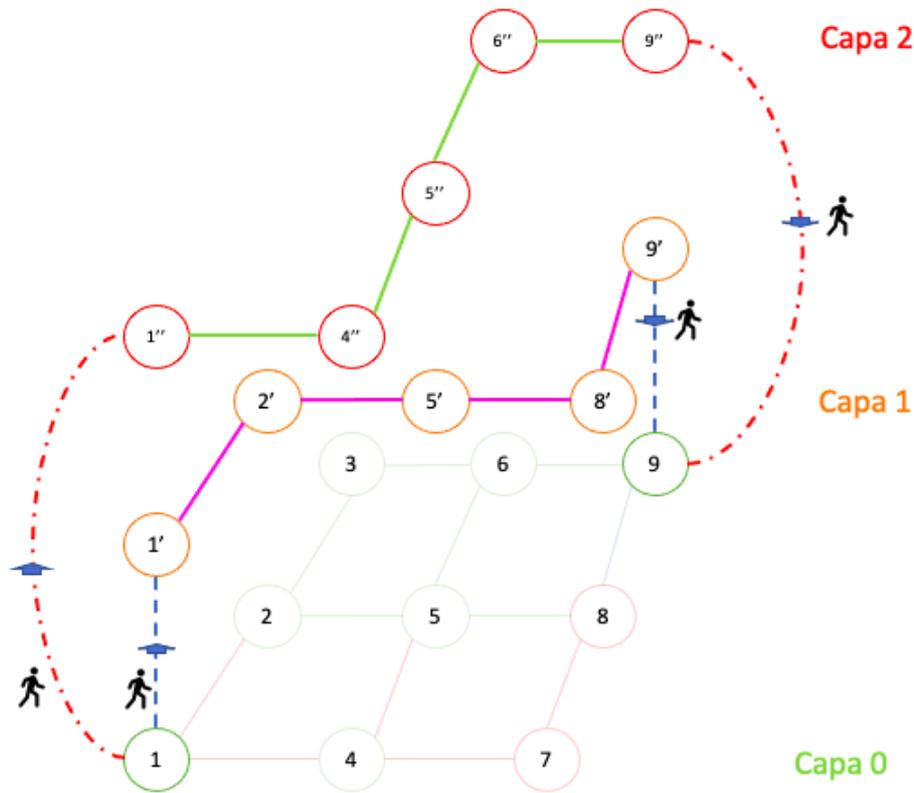


Figura 1. Representación de la determinación multicapa de dos caminos para dos líneas en una red de 9 nodos

### 3.1 Subconjuntos del problema

Debido a las características del problema, en el que se definen un conjunto de paradas y calles por las que puede establecerse una línea de autobús, se debe definir un conjunto que representarán las paradas, a las que se denominarán nodos, representado por  $N$ , y un subconjunto que representará las calles de unión entre paradas, que se denominarán arcos, representado por  $A$ . Igualmente, pueden existir nodos que pertenezcan a la red peatonal exclusivamente, haciendo referencia simplemente a un punto en la ciudad por el que no pasará una línea de autobús.

Además, se definirá el conjunto de pares origen-destino (posibles movimientos de pasajeros en la red, identificados por su nodo de salida y nodo de llegada), representado por  $W$ . Cada elemento de  $W$  es un par  $w = (m, n)$  donde  $m$  es el nodo de salida y  $n$  el de llegada. Un par origen-destino (OD, para simplificar) representará el conjunto de nodos y arcos incluidos en un camino o path desde  $m$  a  $n$ . Por otro lado, se utilizará un conjunto de líneas candidatas  $L$ . Cada línea dentro de este conjunto vendrá identificada igualmente por un par de nodos que representan las paradas terminales. Así, la línea  $(r, s)$  definirá un conjunto secuencial de nodos y arcos que interconectan los nodos comenzando en el nodo  $r$  y terminando en el nodo  $s$ .

Adicionalmente, a la hora de diseñar la red de líneas de transporte público, puede existir, ya sea por criterios de los organismos públicos o por otro motivo, un conjunto de nodos por los que deba pasar un número determinado de líneas de autobús. Este conjunto se definirá como “nodos importantes”.

Dado que el modelo trabajará con la red base peatonal y las líneas candidatas, se va a construir una estructura multicapa de manera que a cada parada en la red peatonal le puedan corresponder varios nodos en la supercapa de líneas. Es decir, los nodos de la red peatonal por los que pasen líneas candidatas se multiplicarán tantas veces como líneas candidatas existan, de forma que en cada una de estas capas (líneas) se identificarán con un código diferente. Es por ello por lo que, para cada nodo de la capa peatonal, se define un conjunto de nodos asociados, que representa las repeticiones de este nodo en las diferentes líneas candidatas. Además, para poder resolver escenarios de tamaño realista, a cada par  $w$  se le asignará un subgrafo de trabajo que contendrá un subconjunto de arcos y nodos de la red que los usuarios del par  $w$  podrán utilizar para desplazarse desde su origen a su destino.

Para un determinado par OD  $w$ , el total de arcos que conforman el problema será la unión del conjunto de arcos de cada tipo de red y el conjunto de arcos que asocian una red con otra. Así, la red de arcos peatonal total del par  $w$  se denominará " $A_{wp}$ ", la de autobús será " $A_{wb}$ ", la de arcos de subida será " $A_{ws}$ " y la de bajada " $A_{wa}$ ". Por tanto, el conjunto de arcos de trabajo del par  $w$  vendrá dado por:

$$A_w = \{A_{wp} \cup A_{wb} \cup A_{ws} \cup A_{wa}\}$$

Y el conjunto total de arcos de la red multicapa será:

$$A = \bigcup_w A_w$$

### 3.2 Datos del problema

En primer lugar, se obtiene la demanda de personas que van de un nodo a otro de cada par de nodos pertenecientes a la red. En la práctica, esta información no es sencilla de obtener ya que el estudio de la demanda requiere un esfuerzo económico importante. En lo que se refiere a este trabajo fin de máster, supondremos que se dispone de la matriz de demanda. Esta se obtiene del trabajo fin de máster (Torrent & Canca, 2022).

$$d_{m,n}, \quad \forall w = (m, n) \in W$$

Uno de los datos importantes del problema es el de la capacidad de los autobuses. Se puede suponer que toda la flota de autobuses dispone de la misma capacidad o que dependerá del autobús o la línea. Para una mayor simplicidad, en este caso se supondrá que todos los autobuses tendrán la misma capacidad. Este parámetro afectará directamente a la flota de autobuses, ya que, dependiendo de la demanda para una línea en concreto, se deberá disponer de un mayor número de vehículos si estos tienen una baja capacidad. La capacidad, en número de personas (independientemente de si viajan sentados o de pie) se representará mediante el parámetro  $Cap$ .

Se puede suponer que por motivos económicos (el coste de operación de la línea es proporcional a la frecuencia) o de otro ámbito normalmente relacionado con la capacidad de las vías, las líneas de autobuses no deben superen cierta frecuencia máxima. A este dato lo denominaremos  $F_{MAX}$ . Por ejemplo, una frecuencia máxima de 12 autobuses/hora significará que en la línea se lanza desde una terminal un autobús cada 5 minutos en dirección hacia el otro extremo de la línea (este intervalo temporal entre dos autobuses consecutivos se denomina headway. Nótese que la frecuencia el headway están relacionados de forma que  $frecuencia \times headway$  es igual a 60 si la frecuencia se mide en vehículos/hora y el headway en minutos).

Al igual que existe una frecuencia máxima de una línea, puede ocurrir que por motivos de calidad de servicio se

establezca una frecuencia mínima en caso de poner una línea en funcionamiento. A este valor lo denominaremos  $F_{min}$ .

Habitualmente a la hora de diseñar la red de transporte público se suele establecer un número máximo de líneas. En este caso este límite se denominará  $N_{max\ lin}$ .

### 3.3 Descripción de las variables del problema

En primer lugar, se deberá definir un conjunto de variables que representen el flujo de personas que circulan por cada arco del grafo. La variable flujo se denotará por la letra  $x$ . Así, para cada par OD  $w = (m, n)$  y para cada uno de los arcos  $(i, j) \in A_w$ , la variable  $x_{i,j}^{m,n}$  representará el flujo de personas que viajan de  $m$  a  $n$  que se desplazan desde el nodo  $i$  al nodo  $j$ .

$$x_{i,j}^{m,n}, \quad \forall (i, j) \in A(m, n), \forall w = (m, n) \in W$$

Donde  $A(m, n)$  corresponde al conjunto de arcos accesibles a los usuarios del par  $w = (m, n)$ . En segundo lugar, se debe definir el headway, este es el tiempo que transcurre desde que sale un autobús de la parada hasta que llega el siguiente. Esta variable dependerá directamente de la flota de autobuses que se disponga en cada línea, es decir, dependerá de la frecuencia de la línea. El headway de cada línea candidata  $l \in L$  se representará mediante la variable  $h_l, \forall l \in L$ .

Asimismo, al igual que se dispone del headway, dependiente de cada línea, se dispone de la frecuencia de la línea. La frecuencia es el número de autobuses que pasan por un mismo punto en un periodo de tiempo. Su valor determina completamente el tamaño de la flota. A mayor frecuencia, menor es el headway y mayor será la flota de autobuses requerida para prestar servicio en una línea. En lo sucesivo, para cada línea candidata  $l \in L$  su frecuencia se representará mediante la variable  $freq_l, \forall l \in L$

Como se dispondrá de una serie de líneas candidatas, la labor del modelo que se propondrá será la de selección de las mejores combinaciones de un subconjunto de líneas en base a ciertos criterios. Para la selección de las líneas que efectivamente se pondrán en funcionamiento en el modelo propuesto, se propone una variable binaria. Esta será positiva en el caso de la selección de la línea y nula en caso contrario.

$$y_l \begin{cases} 1 & \text{si línea } l \text{ es seleccionada,} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}, \quad \forall l \in L$$

#### 3.3.1 Tratamiento de los datos

Para poder alcanzar un resultado, debemos obtener la siguiente información: los puntos potenciales para colocar una parada de bus en la red peatonal, con sus coordenadas para el posterior cálculo de las distancias y la unión de estos puntos entre sí. En el caso de la red de autobuses ocurre de la misma manera.

También se va a obtener una lista de nodos o puntos que se clasifiquen como importantes. Esto quiere decir que, por indicaciones externas, el punto tiene unas obligaciones de paso de líneas específicas respecto a otros puntos.

Como un nodo aparecerá en varias capas, ya que una parada de autobús, es decir, un nodo, aparecerá tanto en la

red peatonal como la de autobús, es necesario codificarlo para que tenga una referencia única. La codificación usada en este trabajo es numérica, siendo los nodos de la red peatonal valores ascendentes desde el nodo 1. Los valores de ese mismo nodo y los correspondientes a los nodos de esa capa, serán valores significativamente mayores que los de la red peatonal, evitando cualquier repetición. De esta manera, se consigue que el software considere cada nodo existente como único.

### 3.4 Restricciones del problema

En primer lugar, se establece que el flujo de personas que partan del nodo origen y circulen por el conjunto de arcos de toda la red debe ser exactamente la cantidad de personas que deseen ir de un nodo a otro, es decir, la demanda total. Esta restricción es obvia, no puede haber más flujo total que demanda, porque no sería real, ni tampoco menos, porque no se cumplirían los objetivos del problema.

$$\sum_{(m,n)} x_{m,j}^{m,n} = d_{m,n}, \quad (m,n) \in W \quad (1)$$

En segundo lugar, la restricción complementaria a la anterior correspondiente al destino de los usuarios, es decir, el total de personas que circulen por la red hasta llegar a los nodos destino debe ser exactamente la demanda total.

$$\sum_{(m,n)} x_{i,n}^{m,n} = d_{m,n}, \quad (m,n) \in W \quad (2)$$

Para el conjunto de nodos que no son ni origen ni destino, y para cada par OD, se debe cumplir que el número de personas que lleguen al nodo sea exactamente el mismo que los que salen del nodo. Esta restricción es comúnmente conocida como restricción o ecuación de balance.

$$\sum_{i \in A(j)} x_{i,j}^{m,n} - \sum_{k \in D(j)} x_{j,k}^{m,n} = 0, \quad \forall j \in N_w, \forall w \in W \quad (3)$$

Siendo  $N_w$  el conjunto de nodos correspondiente al grafo que permite el movimiento de pasajeros para el par  $w$ . Se establece adicionalmente una restricción que proporciona regularidad a la frecuencia de la línea. Establecemos que el headway solo puede ser de un valor equivalente a divisores de 60 minutos. Como la frecuencia y el headway son inversamente proporcionales, como ya se ha comentado, su producto debe ser igual a 60 minutos, siempre y cuando la línea a la que se está refiriendo esté activa. Como se ha indicado en el apartado de variables, una línea estará activa cuando la variable  $y_l$  tome valor 1.

$$h_l * freq_l = 60 * y_l, \quad \forall l \in L \quad (4)$$

Además, debe ocurrir que el flujo de personas que circulan por un arco perteneciente al camino entre un par de nodos no pueda superar la capacidad de los autobuses para la línea que pasa por este arco.

$$\sum_{(m',n')} x_{i,j}^{m',n'} \leq Cap * freq_l, \quad \forall (i,j) \in l, \forall l \in L \quad (5)$$

Por supuesto, la frecuencia de una línea no puede superar la frecuencia máxima estipulada para una línea.

$$freq_l \leq F_{max} * y_l, \forall l \in L \quad (6)$$

Seguidamente, se establece que la frecuencia de cada línea debe, al menos, superar un mínimo preestablecido,

siempre y cuando la línea se active.

$$F_{min} * y_l \leq freq_l, \quad \forall l \in L \quad (7)$$

Puede ocurrir que haya ciertos puntos, o nodos, en la ciudad que por motivos ajenos a lo que se investiga en este trabajo, requieran que pasen un mínimo número de líneas diferentes por ellos. Estos nodos se denominan “nodos importantes”. En estos nodos se debe imponer que el número de líneas sea mayor o igual que cierto valor requerido, representado por la letra  $n$ .

$$\sum_{l \in l(i')} y_l \geq n_i, \quad i' \in Asoc(i) \quad (8)$$

Se debe establecer también un límite superior respecto al número de líneas.

$$\sum_{l \in L} y_l \leq N_{maxlin} \quad (9)$$

Puede ocurrir que, si varias líneas circulan por el mismo arco, la frecuencia conjunta de estas no supere determinado valor máximo. Quizás con un ejemplo sea más clarificador: si se tuviera una calle (arco) muy estrecha por la que deben pasar varias líneas, una frecuencia alta podría causar un problema, debido a la congestión ocasionada o, simplemente, que no puedan circular a la vez varios autobuses.

$$\sum_{l \in l(i',j'): (i',j') \in Asoc((i,j))} freq_l \leq F_{max} \quad (10)$$

Por último, para poder escribir la función del objetivo, es necesario calcular el tiempo que se emplea en cada arco de transbordo o de subida a una línea. Este tiempo es la mitad del headway para cada uno de este tipo de arcos. Esto se debe a que los arcos de transbordo unen las paradas en la red peatonal con cada una de las líneas candidatas, y dado que el headway representa el tiempo de paso entre dos autobuses consecutivos, en promedio un pasajero deberá esperar la mitad de ese tiempo.

$$t_{i,j} = \frac{h_{(i,j)}}{2}, (i,j) \in A_{ws} \quad (11)$$

### 3.5 Operadores auxiliares

Debido al planteamiento del problema en varias capas, es necesario un operador que, a partir de un nodo o arco de la red peatonal, lo codifique para su identificación en la red de autobuses. Por ello se definen los siguientes operadores.

- Codificador de nodos:

$$\Gamma(i) = \{ \gamma_l(i), \quad \forall l \in L \}$$

Donde  $\gamma_l$  representa los nodos codificados de las líneas de autobús. El valor  $i$  representa el nodo en la red peatonal desde donde se “conectan” la red peatonal y la línea. Por lo tanto, para un nodo  $i$  el conjunto  $\Gamma(i)$  puede contener muchos nodos, cada uno de ellos correspondiente a una de las capas de autobús que almacenan las diferentes líneas. Cada uno de los elementos de este conjunto  $\gamma_l(i)$  corresponde al código del nodo  $i$  en la capa de bus que almacena la línea  $l$ . Este valor tendrá una codificación distinta para no confundir con la red peatonal. Así,  $\gamma_l$  puede ser considerado como un operador que transforma

el código del nodo de la red peatonal en otro diferente en función de la línea concreta a que nos estemos refiriendo.

- Codificador de arcos:

$$\Gamma(i, j) = \{ (\gamma_l(i), \gamma_l(j)), \quad \forall l \in L \}$$

En este caso  $\Gamma(i, j)$  representa el conjunto de arcos codificados para un arco de la red peatonal  $(i, j)$ . Cada arco  $(i, j)$  tendrá tantas réplicas en  $\Gamma(i, j)$  como líneas de autobuses candidatas contengan al arco  $(i, j)$ .

La codificación de los nodos es numérica. Así, cada nodo de cada capa tendrá asignado un código único.

### 3.6 Función objetivo

Es posible modelar diferentes funciones objetivo. En este caso, el objetivo será el de minimizar el tiempo total empleado en el total de los trayectos de los pasajeros y el coste para la empresa que presta los servicios de transporte. Mediante la elección de este objetivo, la selección de las líneas y rutas de autobuses se centrarán en la voluntad de los pasajeros, que no es otra que llegar a su destino lo antes posible y en la voluntad de la empresa, que es la de incurrir en el menor coste posible. Este último objetivo está representado de forma simple mediante la minimización del número de líneas puestas en funcionamiento. A menor número de líneas, en general menor será el coste para la empresa operadora.

Los tiempos que se deben computar en la función objetivo son, básicamente, los empleados para circular por cada arco del grafo, ya sea un arco perteneciente a la red de autobuses o a la red peatonal, y el tiempo empleado en subir y bajar de los autobuses. Al minimizar los tiempos de viaje empleados por los usuarios, se busca minimizar los tiempos de espera en las paradas, tanto en el acceso a las líneas de autobús al inicio del viaje como los tiempos de transbordo entre líneas. Ambos tiempos, acceso y transferencia, se pueden medir a partir de las restricciones (11) que corresponden a los tiempos incurridos en los arcos de subida, aquellos que conectan las paradas con los nodos en cada una de las capas de autobuses.

De esta manera, en primer lugar, se debe minimizar el tiempo total empleado por los peatones en la red de arcos peatonales. Este cálculo será básicamente el cociente entre la longitud de cada arco y la velocidad media empleada en recorrerlos. Esta velocidad media se considera un dato del problema. El cálculo del tiempo total empleado en la red de autobuses se realiza de la misma manera, es decir, teniendo en cuenta la longitud de los arcos y la velocidad media del autobús. Por último, se debe tener en cuenta el tiempo de subida y bajada de los autobuses. En el caso de este problema, solo se tiene en cuenta el tiempo de subida, ya que se asume el de bajada como nulo. Por lo tanto, el tiempo de subida será el total empleado por los pasajeros para recorrer los arcos de unión entre la red de autobuses y la peatonal.

En el segundo término de la ecuación, es decir, el relativo al número de líneas a activar, es esencial hacer una buena elección del coeficiente multiplicador, ya que, dependiendo del valor de este, se le dará mayor o menor importancia respecto al objetivo de minimizar tiempos.

$$\text{Min} \sum_{(m,n)} \left[ \sum_{(i,j) \in A_{wb}} \frac{\text{long}_{i,j}}{v_{bus}} + \sum_{(i,j) \in A_{wp}} \frac{\text{long}_{i,j}}{v_{peat}} + \sum_{(i,j) \in A_{ws}} t_{i,j} \right] + \alpha * \sum_{l \in L} y_l \quad (12)$$

### 3.7 Escenarios propuestos

Para la resolución de este trabajo, se han elaborado cuatro escenarios, de menor a mayor complejidad resolutive para poder evaluar las fortalezas y debilidades del método de resolución. Para cada escenario se dispone de la descripción de los nodos y arcos, su codificación y coordenadas, un factor de escala y un listado de nodos importantes, junto con el número de líneas que deben pasar por ellos.

Los dos primeros escenarios son escenarios artificiales pequeños de 6 y 9 nodos respectivamente. Su finalidad es la de realizar pruebas a medida que se va programando el modelo de optimización. Su reducida dimensión permite una trazabilidad del modelo completo, siendo posible realizar un seguimiento de los usuarios que siguen cada uno de los caminos de cada uno de los pares OD de la red.

En el tercer escenario se toma como referencia la red propuesta por (Mandl, 1980), que consta de 15 nodos y 42 arcos orientados, y que se ha usado tradicionalmente en la literatura científica como un escenario de trabajo. De esta forma es posible comparar los resultados con los obtenidos por otros investigadores.

El último escenario corresponde a la parte central de la ciudad de Sevilla, en el que se consideran 139 nodos y casi 20.000 pares origen-destino. El número total de variables se acerca a 900.000, al igual que el número de restricciones. Este escenario, de dimensiones más realistas, permitirá comprobar la capacidad de la metodología propuesta para enfrentarse a escenarios reales.

## 4 RESULTADOS OBTENIDOS

---

Los resultados pueden ser medidos de varias maneras y desde puntos de vista diferentes. Puede interesar estudiar los resultados en base a los costes o bien, en base al servicio. En el trabajo fin de máster que se está desarrollando, el objetivo está relacionado con el servicio prestado. Los resultados obtenidos son positivos desde el punto de vista de la demanda capturada. En el caso de estudio, la demanda total es de 107.780 personas, de las cuales se captura de manera directa un 36,63%. La demanda capturada cuando se mira en base a la demanda indirecta (teniendo en cuenta los trasbordos) mejora sustanciosamente, al alcanzar el 97,27% de la demanda total. Finalmente, si se tiene en cuenta los nodos cercanos, es decir, que el peatón se desplace por la red a una parada cercana para tomar el autobús, la demanda capturada es del 100%, siendo este dato inmejorable.

Otro dato interesante es el tiempo promedio empleado por el usuario para realizar su trayecto. Este es de casi 40 minutos. Quizás ésta pueda ser una vía de mejora en el futuro. Por otro lado, se puede catalogar la demanda capturada. Si se hace referencia al porcentaje de demanda captada de manera directa, es decir, la que cuya partida y destino en el grafo coinciden con paradas de autobús y, además, no necesita hacer trasbordos, es del 36,6%. Si a este se le incluyen los trasbordos (sin incluir trasbordos que necesite realizar un tramo peatonal para tomar el siguiente autobús), se captura el 97,3%. Si además se incluye que la salida o llegada se realice a un nodo cercano al de la ruta de autobús que debe tomar, se alcanza el 100%.

En este escenario, se alcanza esta solución mediante 45 líneas de autobús. El número total de líneas de autobús en la actualidad en Sevilla es de 47, por tanto, se consigue reducir y, además, mejorar la demanda capturada y el tiempo total empleado por los usuarios en el trayecto. El recorrido de cada línea se puede ver representado en el Anexo. De cada línea se obtiene, además de su recorrido, la frecuencia de autobuses a la hora.

La Línea 1 parte del nodo 1 y llega al 30, pasando por 11 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 2 y Línea 3 parten y llegan a los mismos nodos que la anterior, aunque ambas tienen una frecuencia de 3 autobuses a la hora y pasan por 13 y 9 paradas, respectivamente. La Línea 4 también parte del nodo 1 y llega al 47, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 5 parte del nodo 1 igualmente, y llega al 48, con hasta 10 autobuses a la hora y pasando por 20 paradas. La Línea 6 parte del nodo 1 y llega al 59, pasando por 18 paradas y con una frecuencia de 5 vehículos a la hora. La Línea 7 sale desde el nodo 1 y llega al 60, pasando por 18 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 8 empieza en el nodo 1 y llega al 63, pasando por 19 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 9 sale desde el nodo 1 y llega al 81, pasando por 14 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. En total, hasta 9 líneas parten del nodo 1 para dirigirse a múltiples destinos, encontrándose líneas con un gran número de paradas y con una frecuencia elevada en muchos casos.

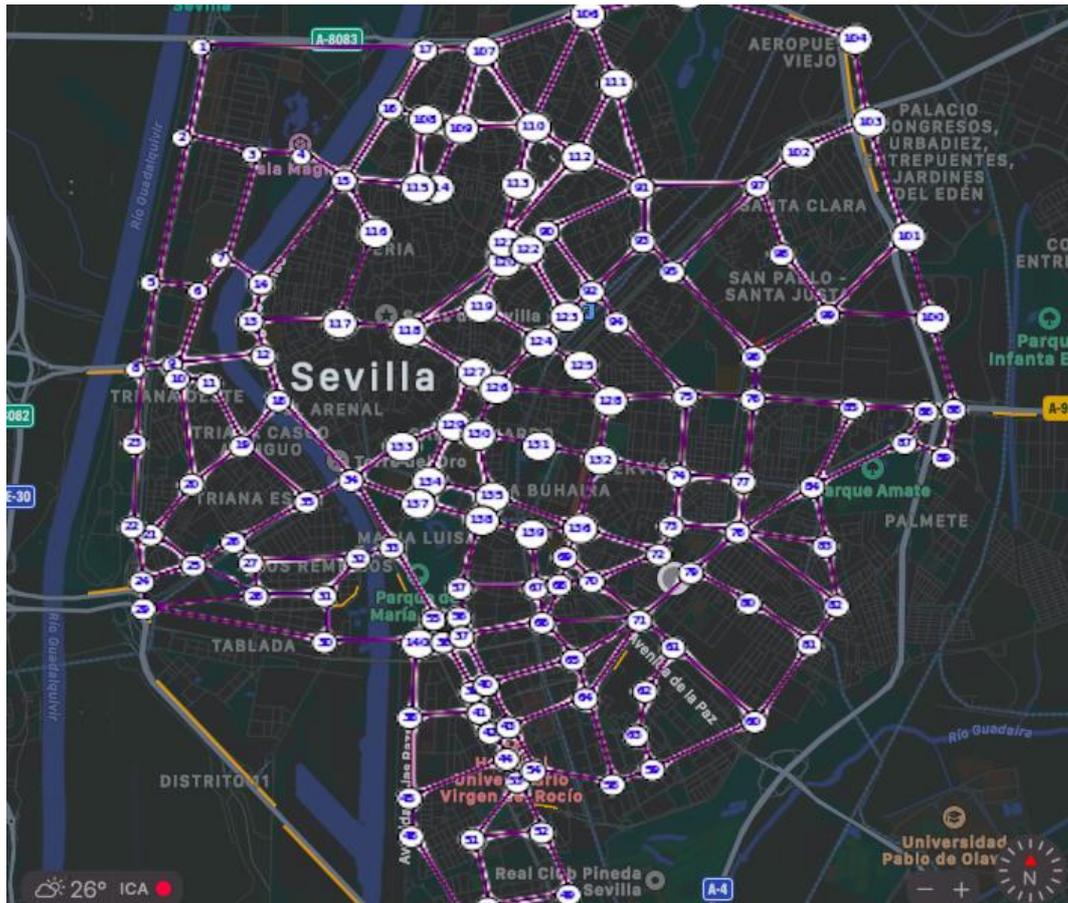


Figura 2. Grafo obtenido para Sevilla representado sobre el mapa de la ciudad.

La Línea 10 sale desde el nodo 2 y llega al 81, pasando por 18 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 11 comienza en el nodo 2 y llega al 87, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 6 autobuses a la hora. La Línea 12 inicia su ruta en el nodo 2 y llega al 89, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. Se han obtenido hasta tres líneas que parten del nodo 2, con prácticamente idéntico número de paradas.

La Línea 13 sale desde el nodo 4 y llega al 59, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 14 parte desde el nodo 5 y llega al 48, pasando por 19 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 15 sale desde el nodo 5 y llega al 89, pasando por 16 paradas y con una frecuencia de 3 autobuses a la hora. La Línea 16 inicia su camino en el nodo 6 y llega al 46, pasando por 16 paradas y con una frecuencia de 2 autobuses a la hora. En este punto se observan que no hay excesivas repeticiones en el nodo de salida de estas líneas.

La Línea 17 empieza en el nodo 10 y llega al 88, pasando por 15 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 18 sale desde el nodo 16 y llega al 59, pasando por 20 paradas y con una frecuencia de 10 autobuses a la hora. La Línea 19 sale desde el nodo 16 y llega al 89, pasando por 12 paradas y con una frecuencia de 12 autobuses a la hora.

La Línea 20 sale desde el nodo 17 y llega al 30, pasando por 14 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 21 parte del nodo 17 y llega al 44, pasando por 20 paradas y con una frecuencia de 10 autobuses a la hora. La Línea 22 sale desde el nodo 17 y llega al 46, pasando por 20 paradas y con una frecuencia de 10 autobuses a la hora. La Línea 23 sale desde el nodo 17 y llega al 59, pasando por 19 paradas y con una frecuencia

de 6 autobuses a la hora. En este caso, se detecta que el nodo 17 es uno de los nodos de origen con más líneas, con hasta cuatro, siendo la frecuencia de estas líneas muy elevada.

La Línea 24 sale desde el nodo 22 y llega al 88, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 25 empieza en el nodo 22 y llega al 104, pasando por 19 paradas y con una frecuencia de 10 autobuses a la hora. La Línea 26 sale desde el nodo 22 y llega al 104, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora.

La Línea 27 sale desde el nodo 23 y llega al 81, pasando por 15 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 28 parte del nodo 29 y llega al 100, pasando por 14 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 29 sale desde el nodo 29 y llega al 105, pasando por 16 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 30 empieza en el nodo 29 y llega al 105, pasando por 16 paradas y con una frecuencia de 6 autobuses a la hora.

La Línea 31 parte del nodo 27 y llega al 89, pasando por 15 paradas y con una frecuencia de 6 autobuses a la hora. La Línea 32 sale desde el nodo 30 y llega al 104, pasando por 19 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 33 empieza en el nodo 30 y llega al 105, pasando por 15 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 34 sale desde el nodo 38 y llega al 104, pasando por 15 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora.

La Línea 35 sale desde el nodo 47 y llega al 90, pasando por 18 paradas y con una frecuencia de 6 autobuses a la hora. La Línea 36 comienza en el nodo 47 y llega al 100, pasando por 15 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 37 empieza desde el nodo 47 y llega al 102, pasando por 17 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 38 sale desde el nodo 47 y llega al 105, pasando por 22 paradas y con una frecuencia de 3 autobuses a la hora. La Línea 39 parte del nodo 48 y llega al 100, pasando por 16 paradas y con una frecuencia de 2 autobuses a la hora. La Línea 40 sale desde el nodo 48 y llega al 105, pasando por 24 paradas y con una frecuencia de 3 autobuses a la hora. Se encuentra que el nodo 47 y 48 tienen varias líneas que parten desde ellos, aunque con frecuencias bajas y una gran cantidad de paradas.

La Línea 41 comienza desde el nodo 58 y llega al 105, pasando por 18 paradas y con una frecuencia de 5 autobuses a la hora. La Línea 42 sale desde el nodo 59 y llega al 104, pasando por 13 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 43 empieza desde el nodo 59 y llega al 105, pasando por 16 paradas y con una frecuencia de 4 autobuses a la hora. La Línea 44 sale desde el nodo 105 y llega al 139, pasando por 13 paradas y con una frecuencia de 2 autobuses a la hora. La Línea 45 parte del nodo 105 y llega al 139, pasando por 13 paradas y con una frecuencia de 3 autobuses a la hora.

Es importante matizar que todas las líneas son idénticas en ambos sentidos, siendo todas las calles (arcos) por los que pasa de doble sentido.

Desde el punto de vista computacional, los resultados son bastante alentadores comparados con los de otros estudios. Una vez preparados los datos, que es lo que conlleva más tiempo, el tiempo para resolver el problema de optimización por parte de Gurobi es de, aproximadamente, 1500 segundos usando un ordenador que cuenta con procesador Intel i7 a 3.12 GHz y 32 GB de memoria RAM. Teniendo en cuenta que el total de variables y restricciones son cercanas a las 900.000, es significativamente rápido. La resolución del modelo de optimización se realiza mediante el software de optimización Gurobi.



## 5 CONCLUSIONES

---

A lo largo de este trabajo fin de máster se ha desarrollado un modelo de optimización con el fin de obtener el diseño de la red de líneas de transporte público de una ciudad de acuerdo con el objetivo propuesto en primera instancia: una solución adecuada desde el punto de vista económico de la empresa (menor número de líneas posible) y desde el del usuario (menor tiempo total de viaje posible).

Para el desarrollo del modelo, se han debido preparar los datos, adaptándolos para posteriormente poder formular las restricciones y variables propuestas en el trabajo. Se han generado los conjuntos de variables y restricciones. Finalmente, una vez definidas las restricciones, se ha propuesto una función objetivo, en la que, dependiendo de los intereses del decisor, es importante decidir el valor del coeficiente por el que se multiplica el número de líneas, ya que determinará la importancia de este término respecto al tiempo total empleado por los usuarios.

Gracias a la particularidad de este problema, al generar un grafo multicapa, se consigue disminuir la dificultad computacional del mismo, facilitando la obtención de la solución por parte del solver. Adicionalmente, contar con un conjunto reducido de líneas candidatas facilita la labor del software empleado para la resolución.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se mejora de manera parcial la solución diseñada en la ciudad de Sevilla, reduciendo el número de líneas y, a priori, reduciendo el tiempo empleado por los usuarios. Además, la metodología utilizada ha permitido obteniendo un diseño de manera relativamente rápida, simplificando la resolución de otros modelos de planificación de líneas propuestos en la literatura.

Finalmente, como propuesta de mejora, se podría considerar la inclusión de otros medios de transporte en distintas capas de la red, para, de esta manera, englobar todo el transporte público de una ciudad en un mismo problema de optimización, lo que permitiría obtener mejores resultados globales para la ciudad. Si esto fuera posible, podríamos hacer frente a uno de los principales retos del transporte en la actualidad, reducir el transporte mediante vehículos de uso compartido para reducir la contaminación atmosférica.





---

# REFERENCIAS

---

- Borndörfer, R., Grötschel, M., & Pfetsch, M. (2004). Models for Line Planning in Public Transport. *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*.
- Canca, D., De Los Santos, A., Laporte, G., & Mesa, J. (2019). Integrated Railway Rapid Transit Network Design and Line Planning problem with maximum profit. *Transportation Research Part E*, 1-30.
- Canca, D., De los Santos, A., Zarzo, A., & Villa, G. (2022). A multilayer line planning model for the design/expansion of public transportation networks. *Proceedings of the Euro Working Group on Locational Analysis XXVII*.
- Chakroborty, P., & Wivedi, T. (2002). Optimal Route Network Design for Transit Systems Using Genetic Algorithms. *Engineering Optimization, 2002, Vol. 34(1)*, 83-100.
- Goossens, J.-W., van Hoesel, S., & Kroon, L. (2006). On solving multi-type railway line planning problems. *European Journal of Operational Research 168*, 403-424.
- Hadas, Y., & Shnaiderman, M. (2012). Public-transit frequency setting using minimum-cost approach with stochastic demand and travel time. *Transportation Research Part B 46*, 1068-1084.
- Lee, C., & Nair, R. (2021). Robust transit line planning based on demand estimates obtained from mobile phones. *EURO Journal on Transportation and Logistics*.
- Mandl, C. E. (1980). Evaluation and optimization of urban public transportation networks. *European Journal of Operational Research, 5*, 396-404.
- Torrent, M., & Canca, J. (2022). *Desarrollo de una metodología para el diseño de líneas de transporte público*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Zhao, F., & Zeng, X. (2007). Optimization of transit route network, vehicle headways and timetables for large-scale transit networks. *Department of Civil and Environmental Engineering*, 841-855.
- Zhao, F., & Zeng, X. (2008). Optimization of transit route network, vehicle headways and timetables for large-scale transit networks. *European Journal of Operational Research 186*, 841-855.
- Zhou, Y., Yang, H., Wang, Y., & Yan, X. (2019). Integrated line configuration and frequency determination with passenger path assignment in urban rail transit networks. *MOT Key Laboratory of Transport Industry of Big Data Application Technologies for Comprehensive Transport*.







# ANEXO

Mapas de líneas de Sevilla tras ejecutar el método

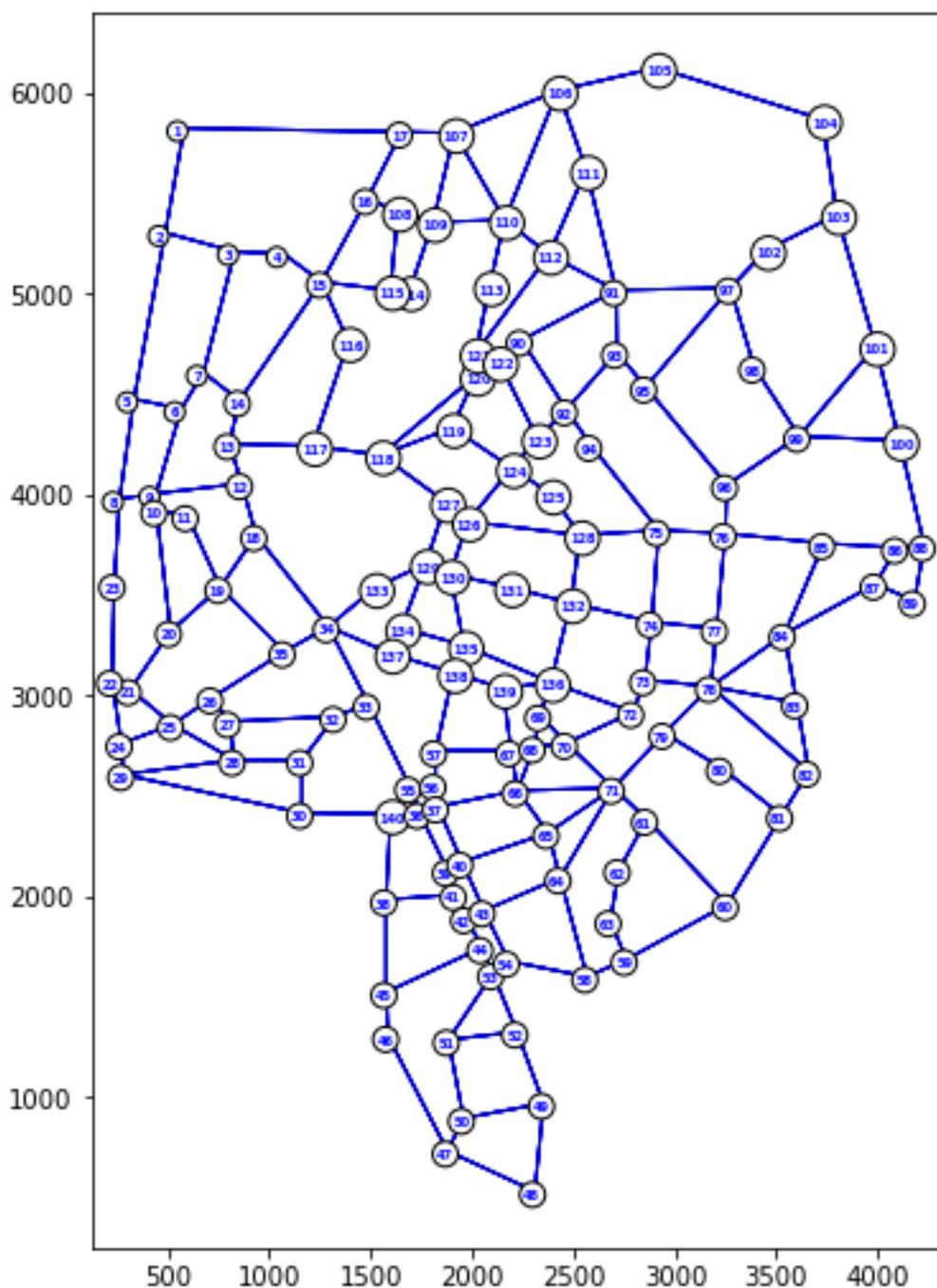


Figura 3. Mapa de nodos y arcos de Sevilla

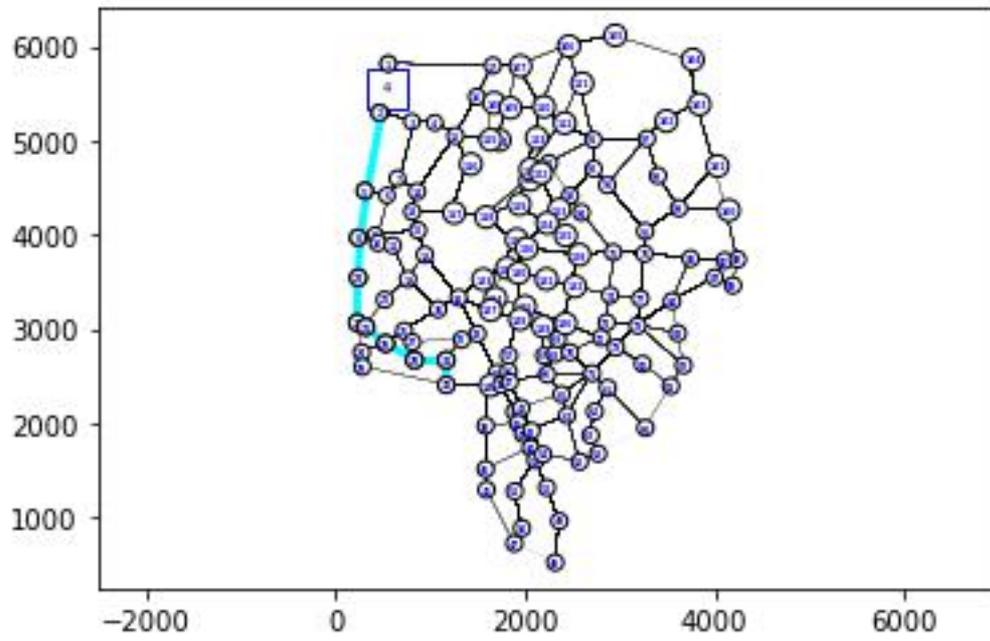


Figura 4. Línea 1

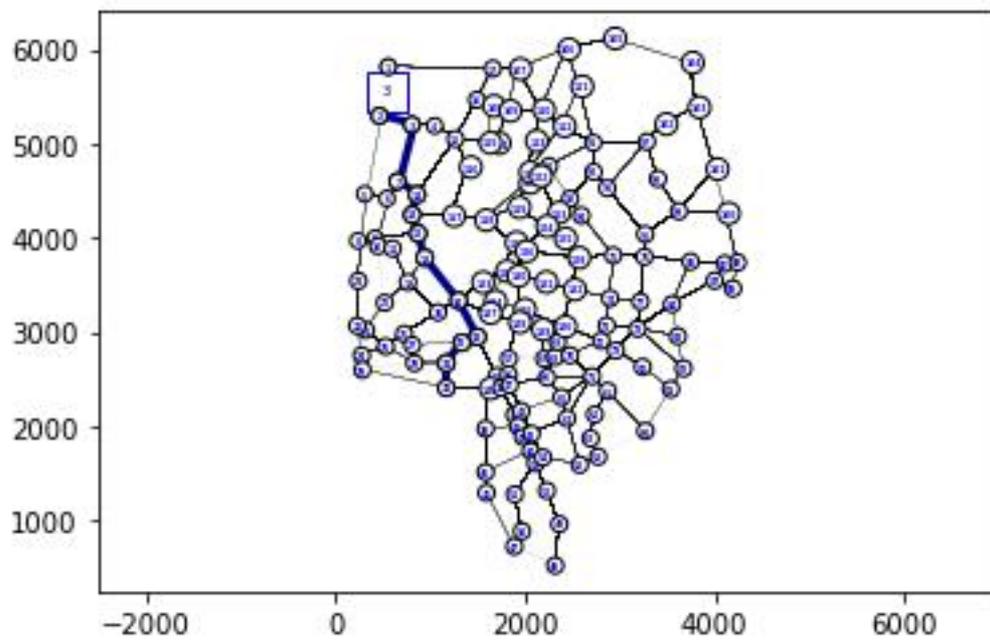


Figura 5. Línea 2

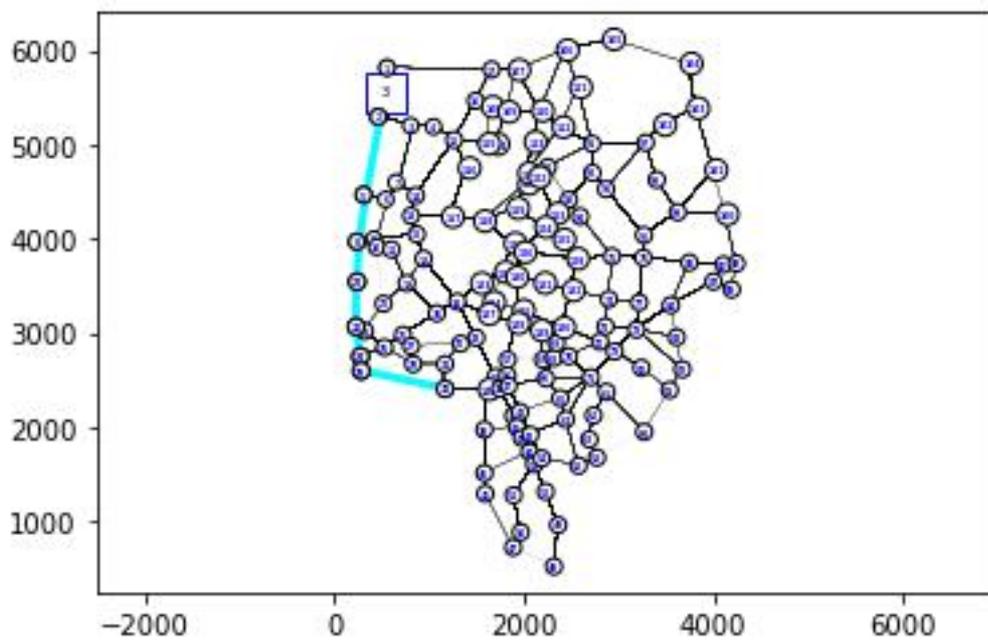


Figura 6. Línea 3

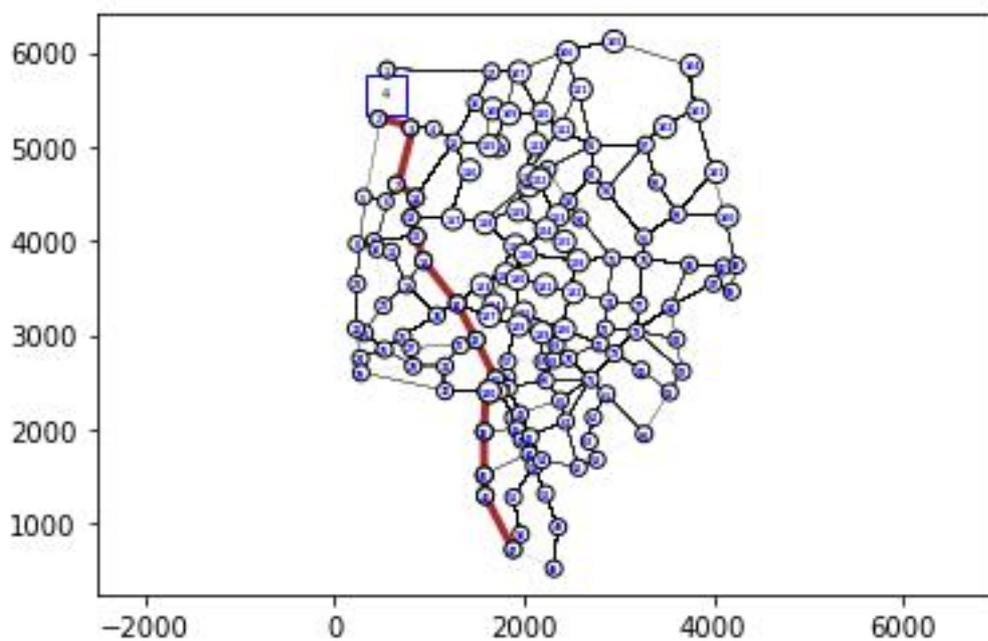


Figura 7. Línea 4

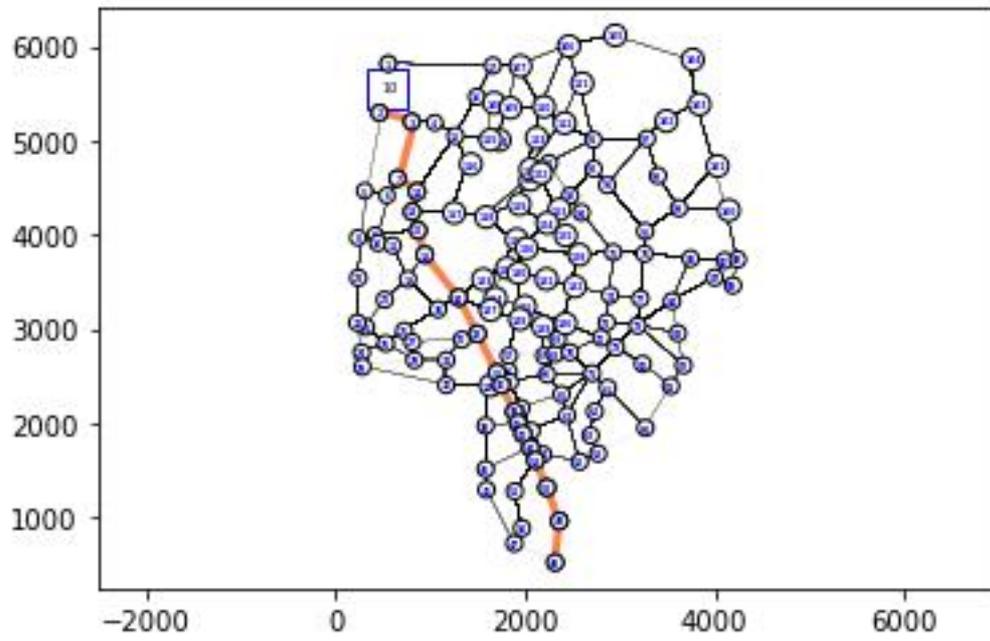


Figura 8. Línea 5

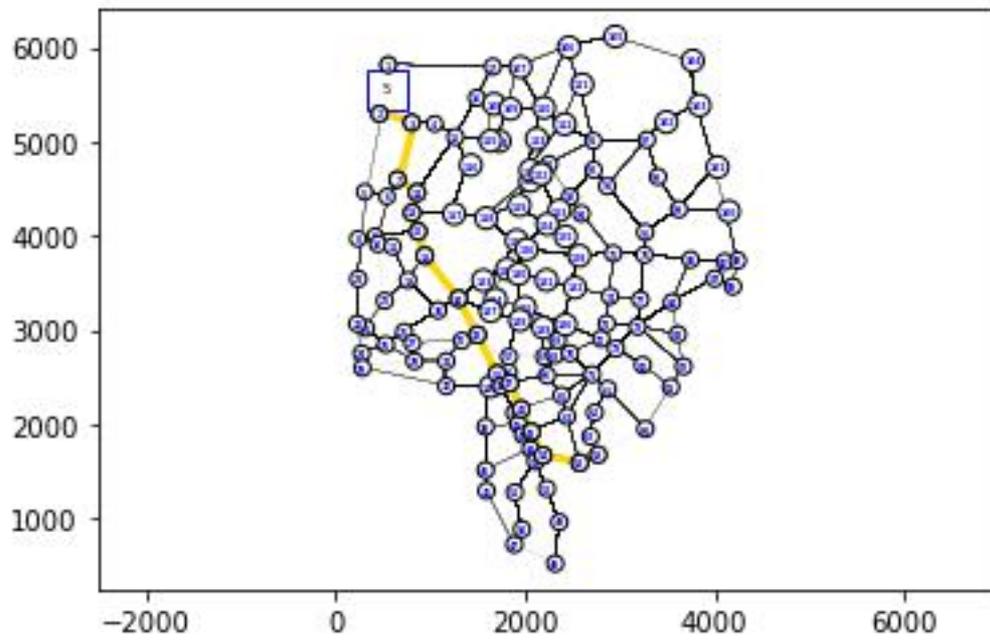


Figura 9. Línea 6

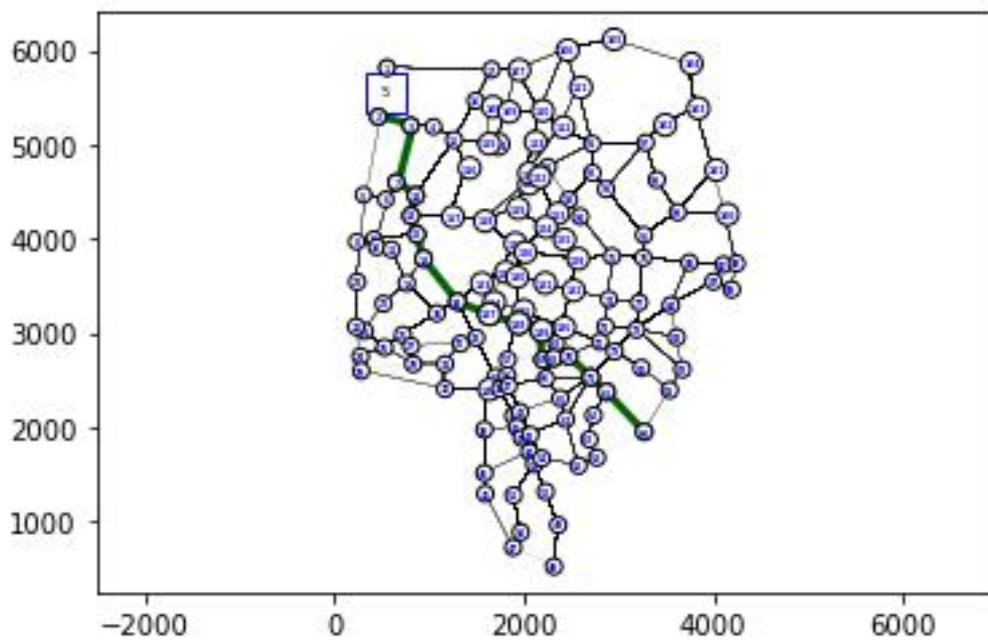


Figura 10. Línea 7

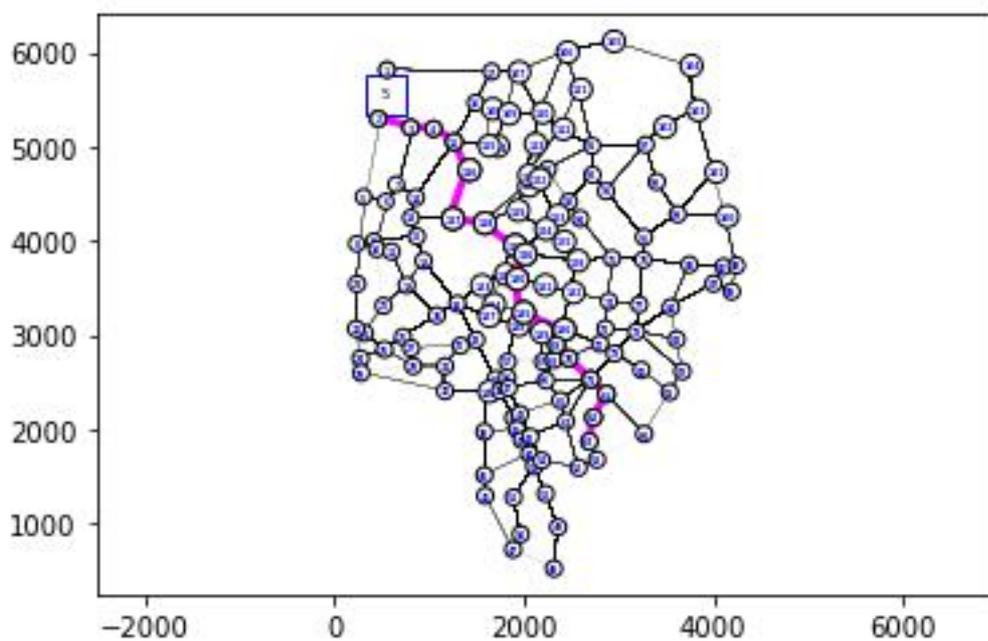


Figura 11. Línea 8

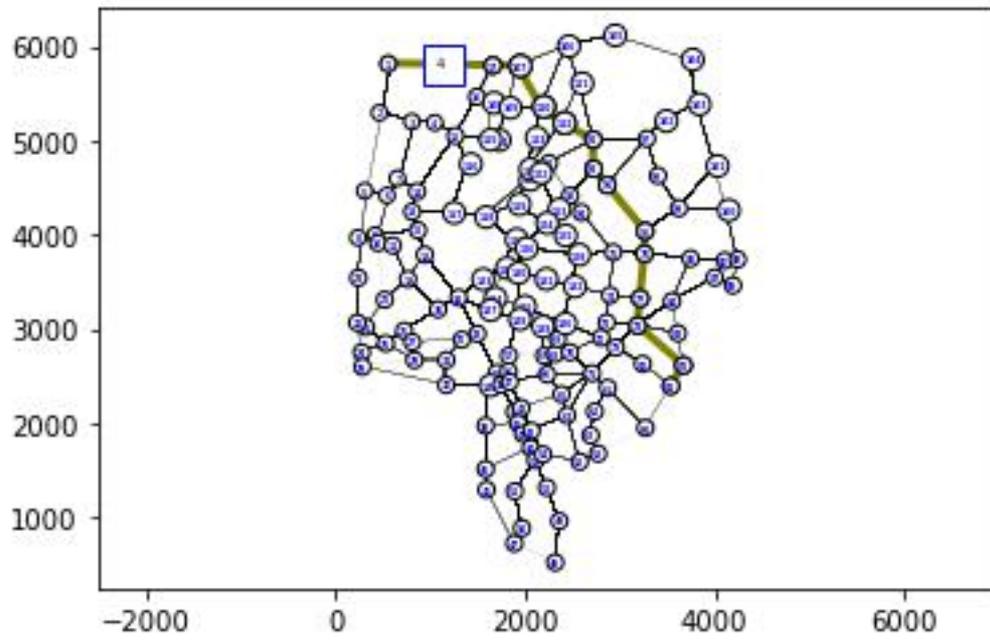


Figura 12. Línea 9

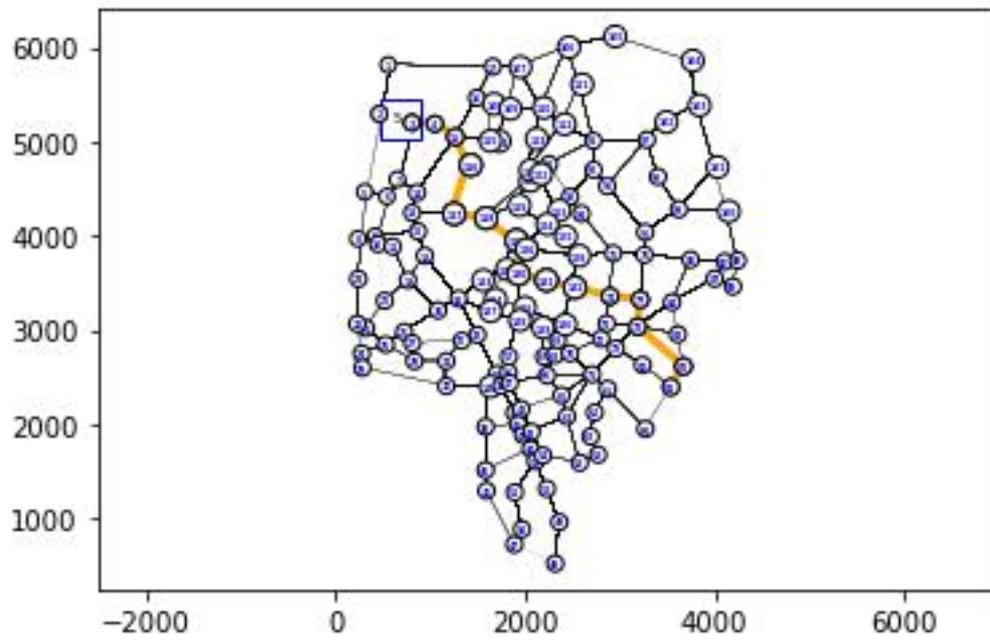


Figura 13. Línea 10

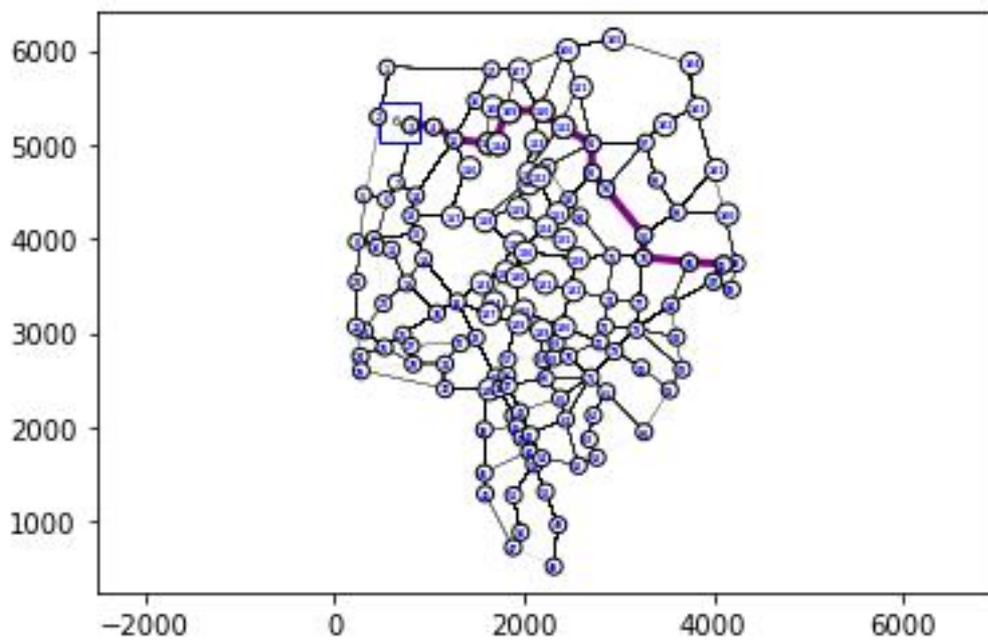


Figura 14. Línea 11

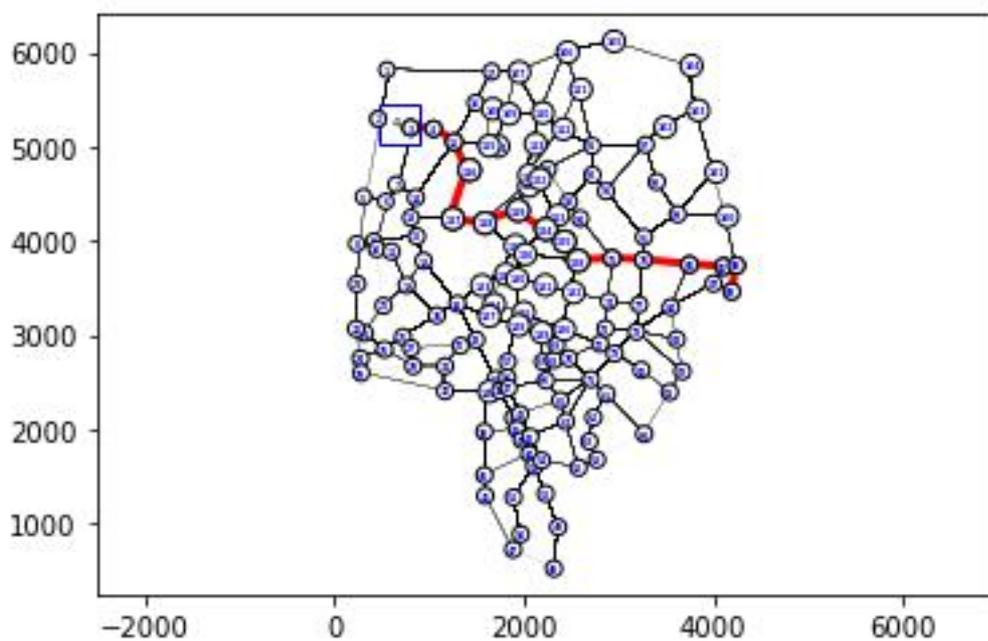


Figura 15. Línea 12

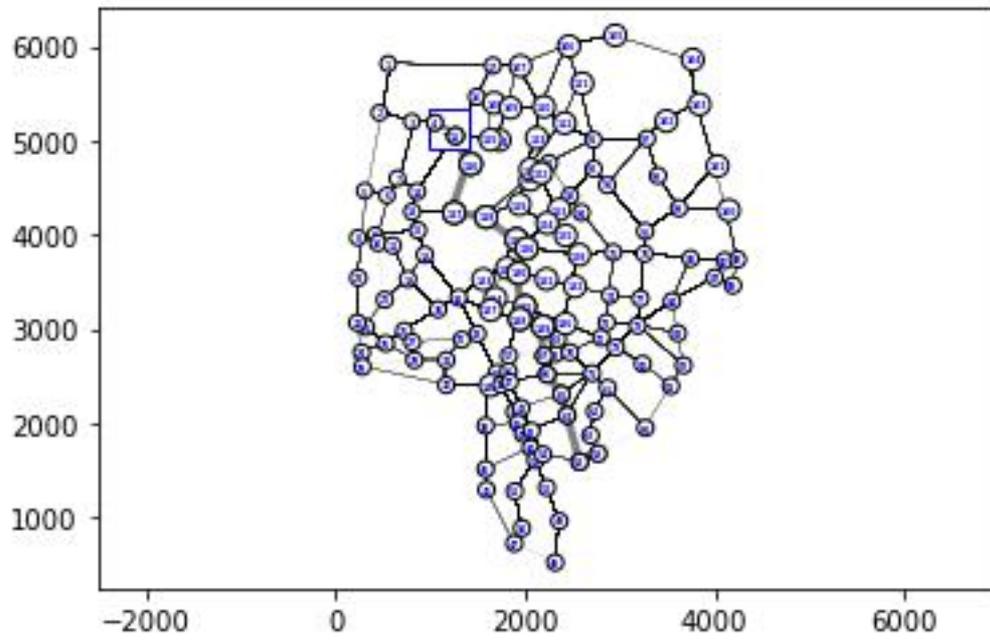


Figura 16. Línea 13

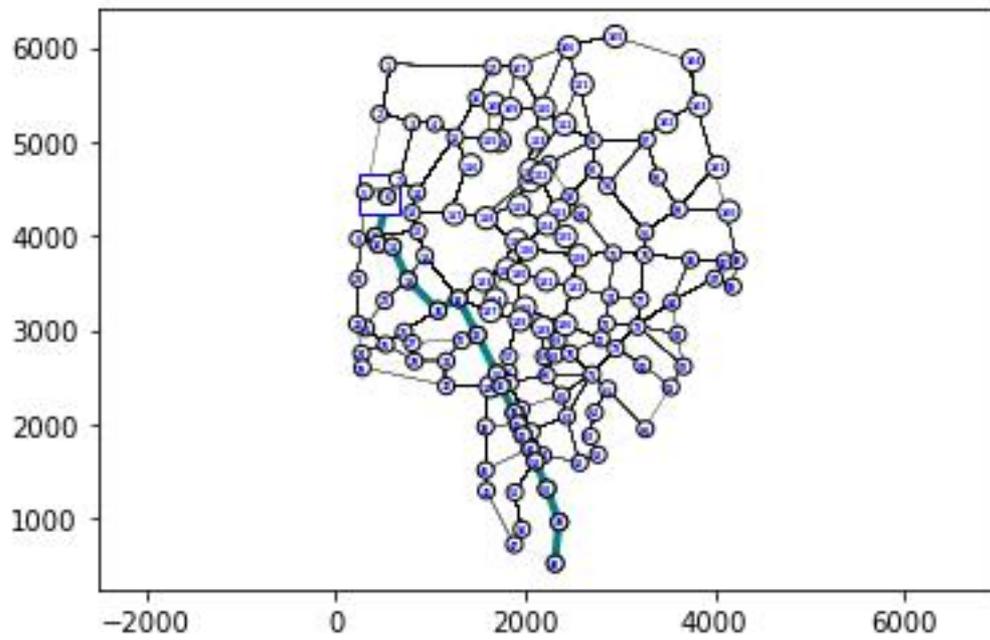


Figura 17. Línea 14

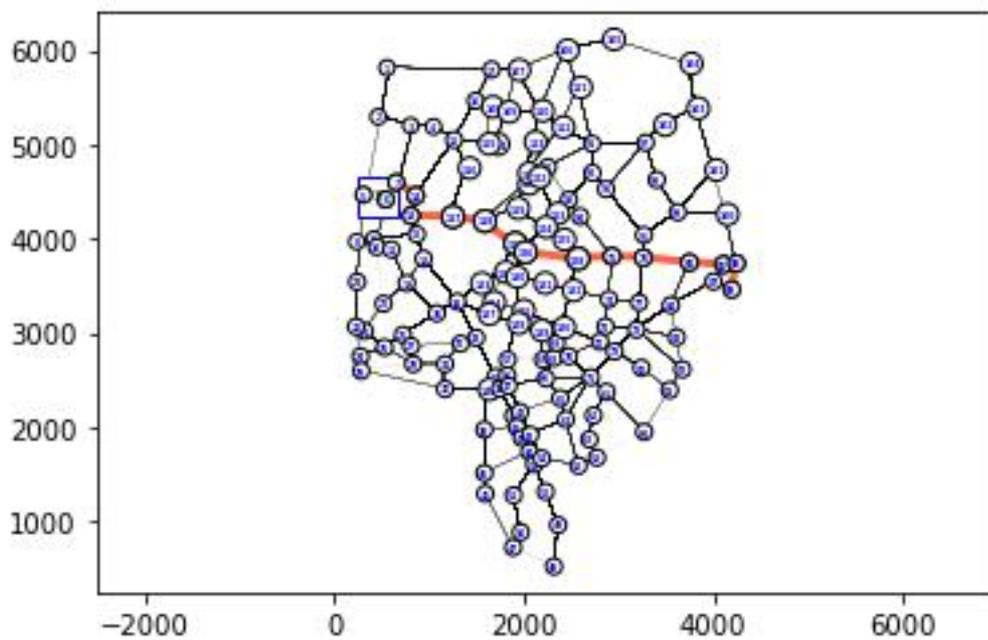


Figura 18. Línea 15

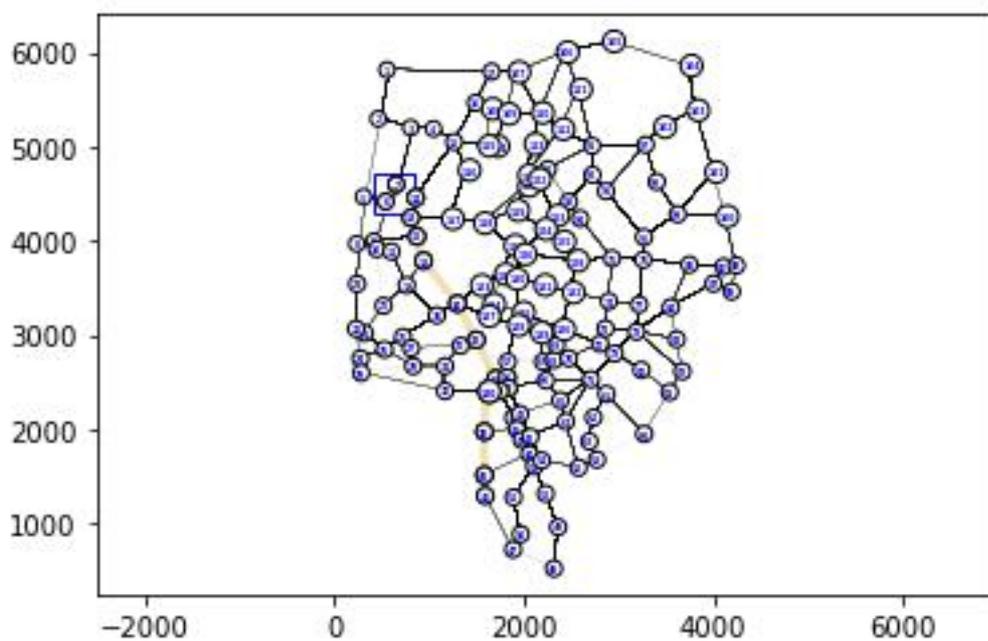


Figura 19. Línea 16

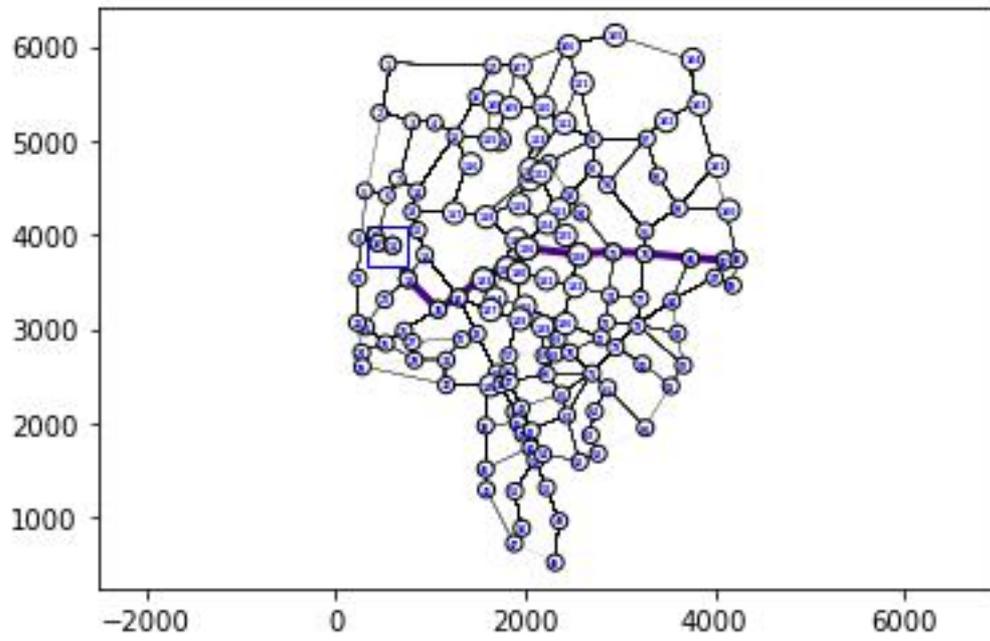


Figura 20. Línea 17

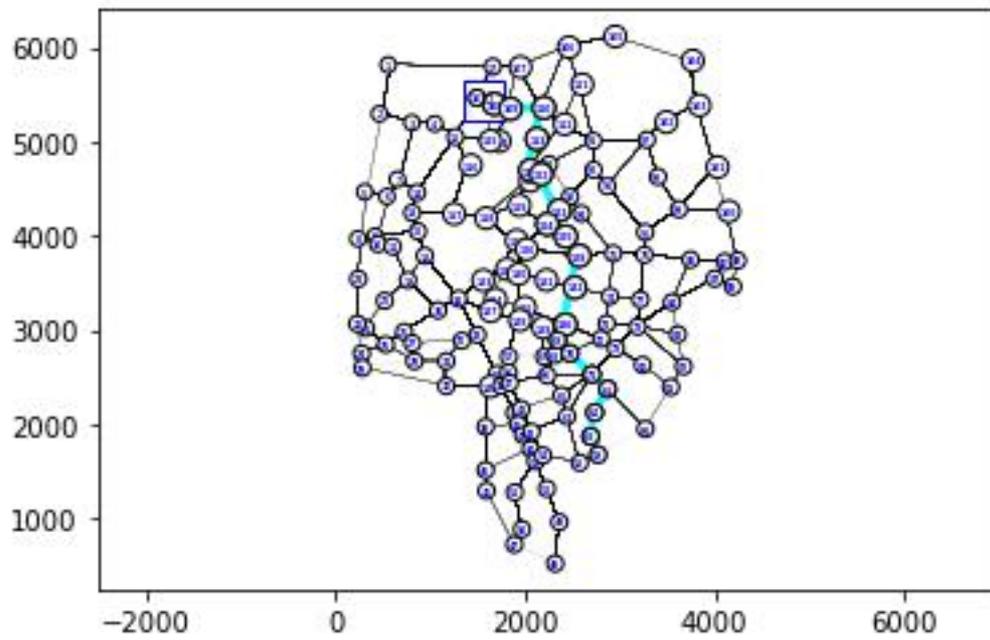


Figura 21. Línea 18

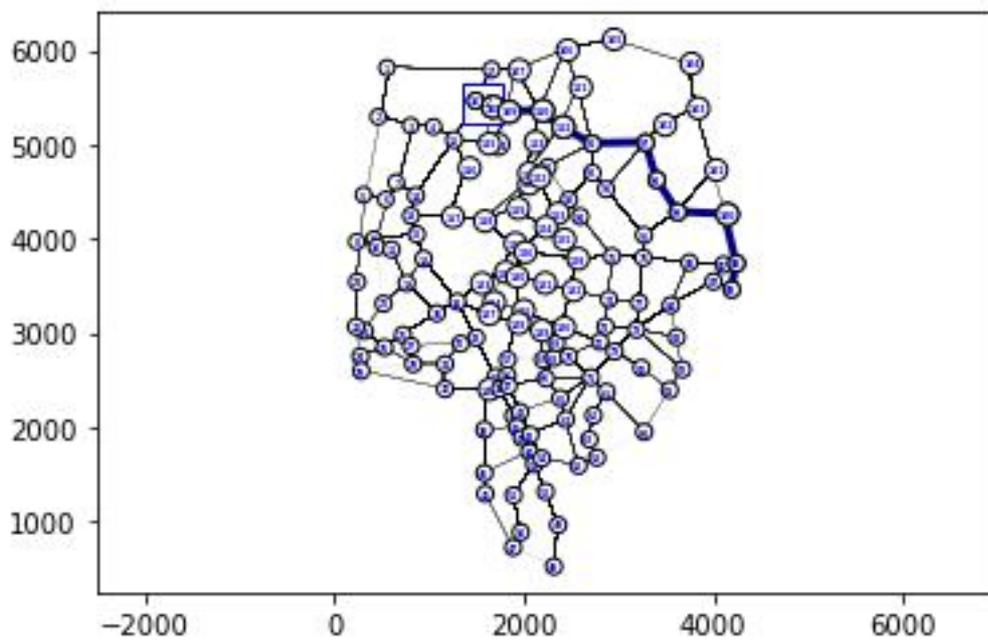


Figura 22. Línea 19

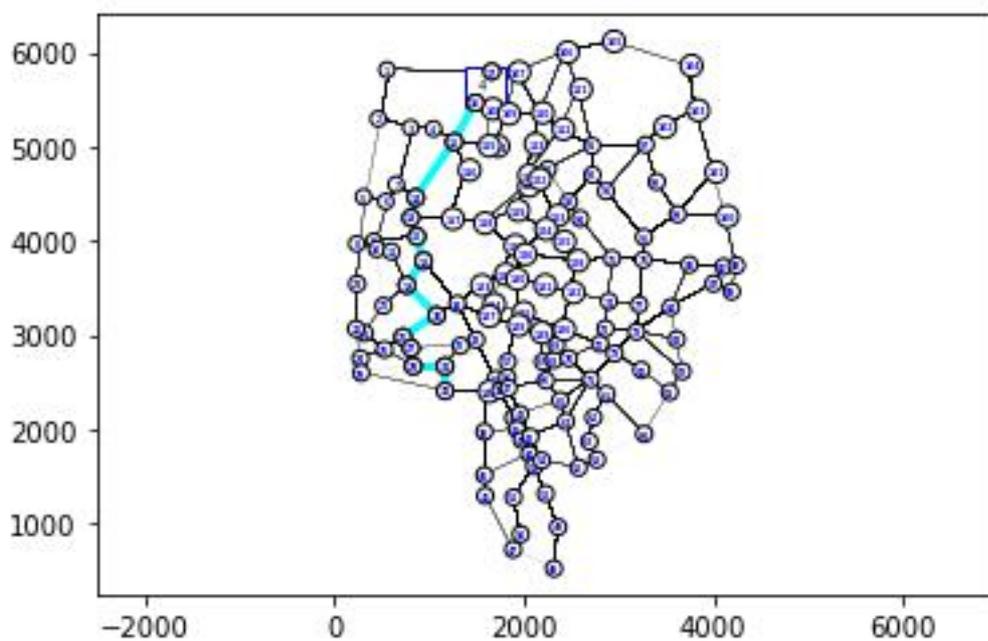


Figura 23. Línea 20

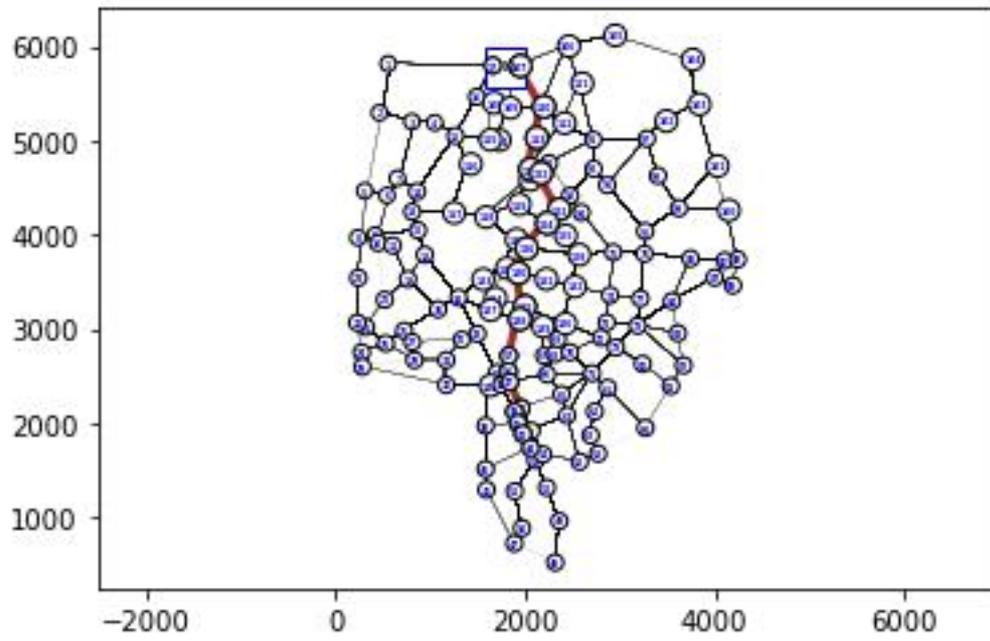


Figura 24. Línea 21

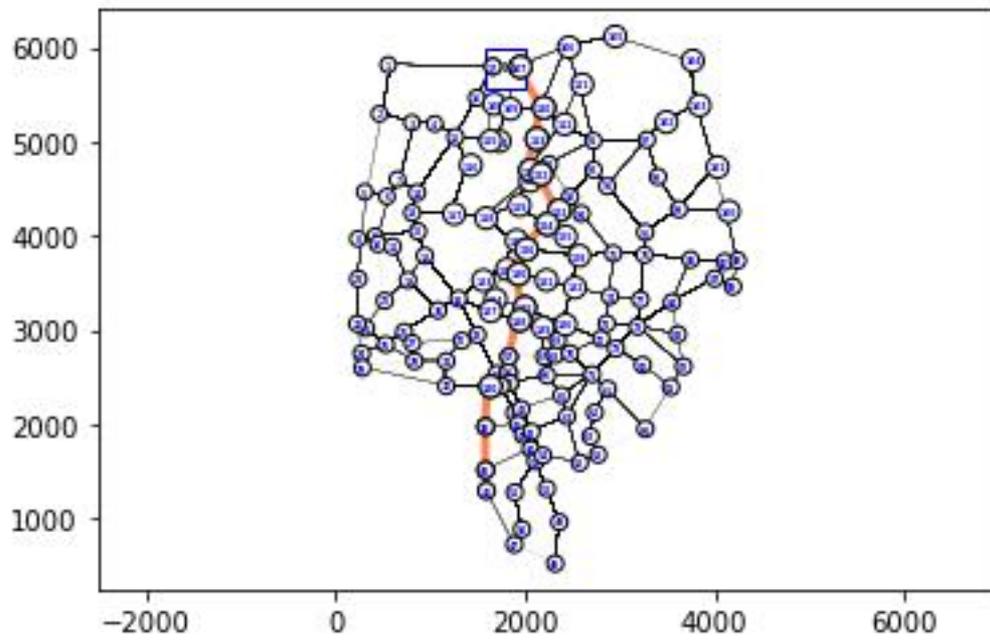


Figura 25. Línea 22

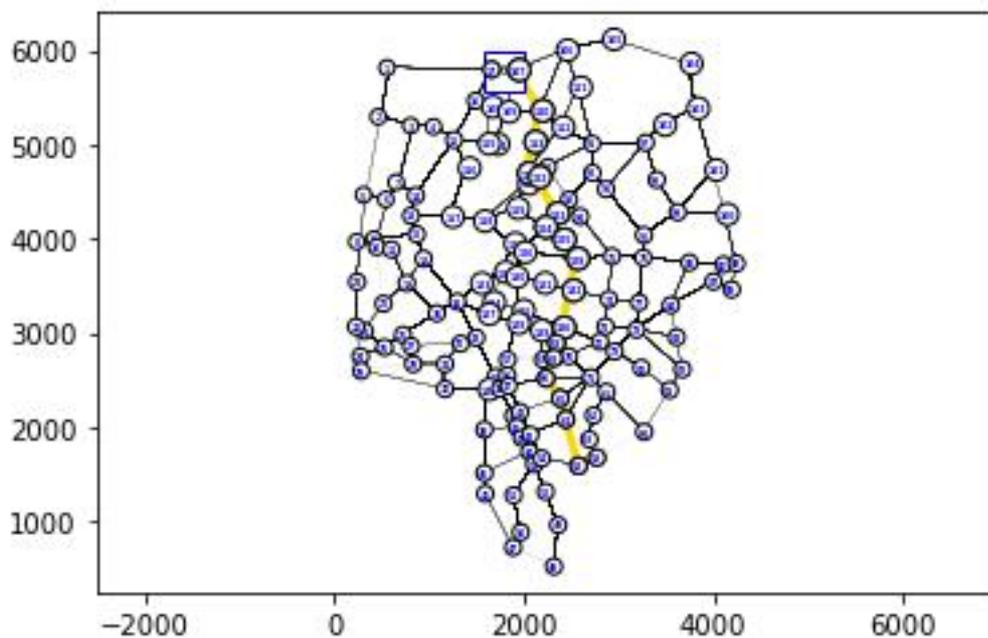


Figura 26. Línea 23

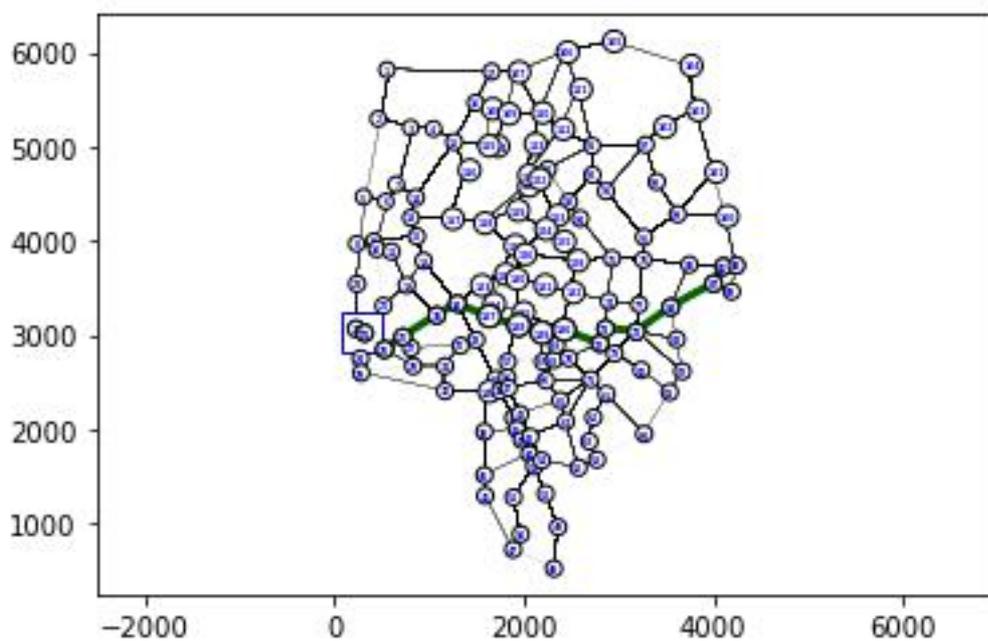


Figura 27. Línea 24

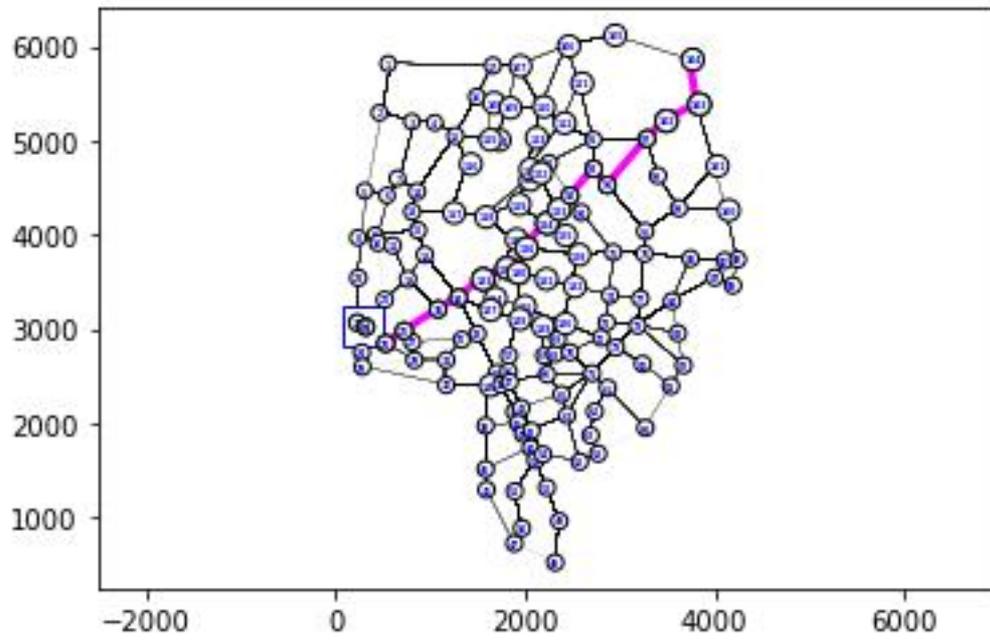


Figura 28. Línea 25

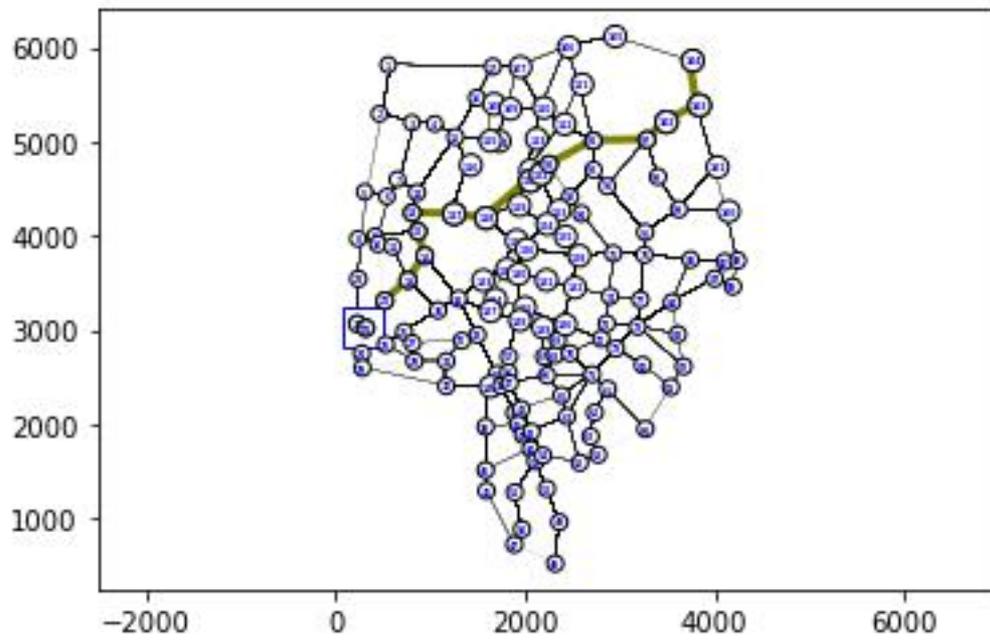


Figura 29. Línea 26

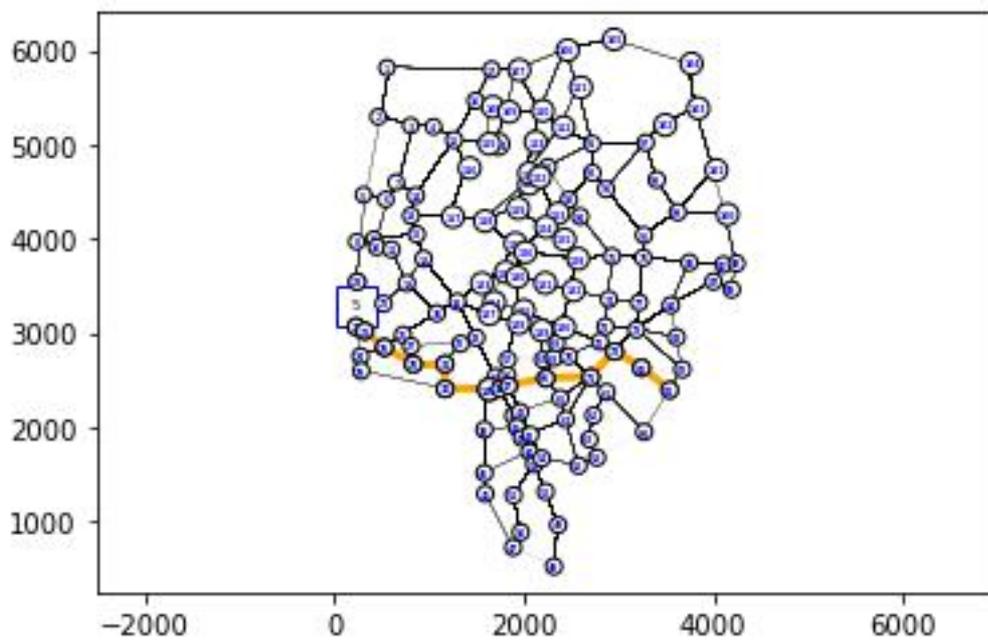


Figura 30. Línea 27

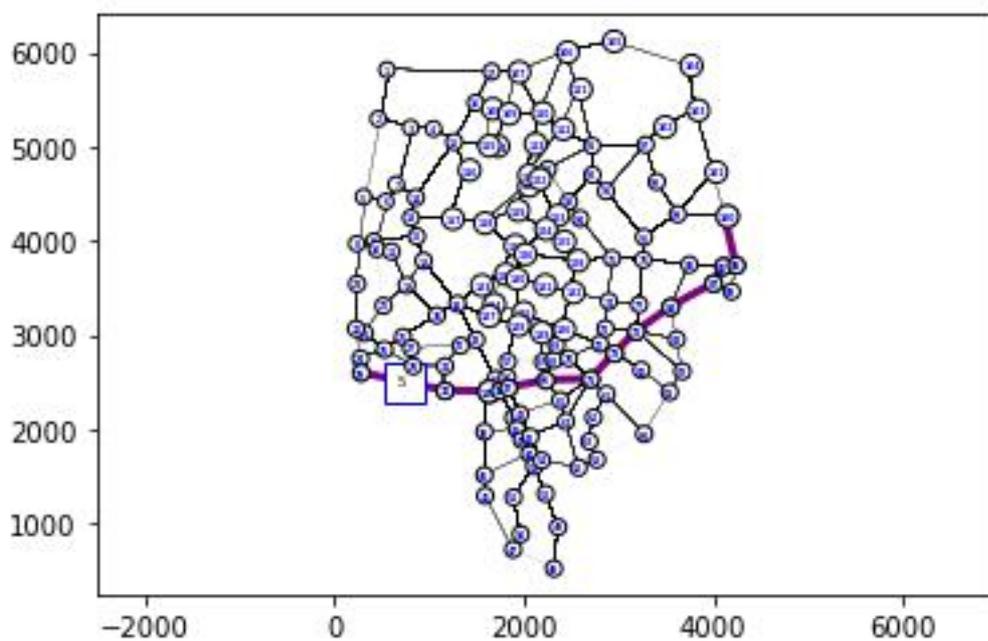


Figura 31. Línea 28

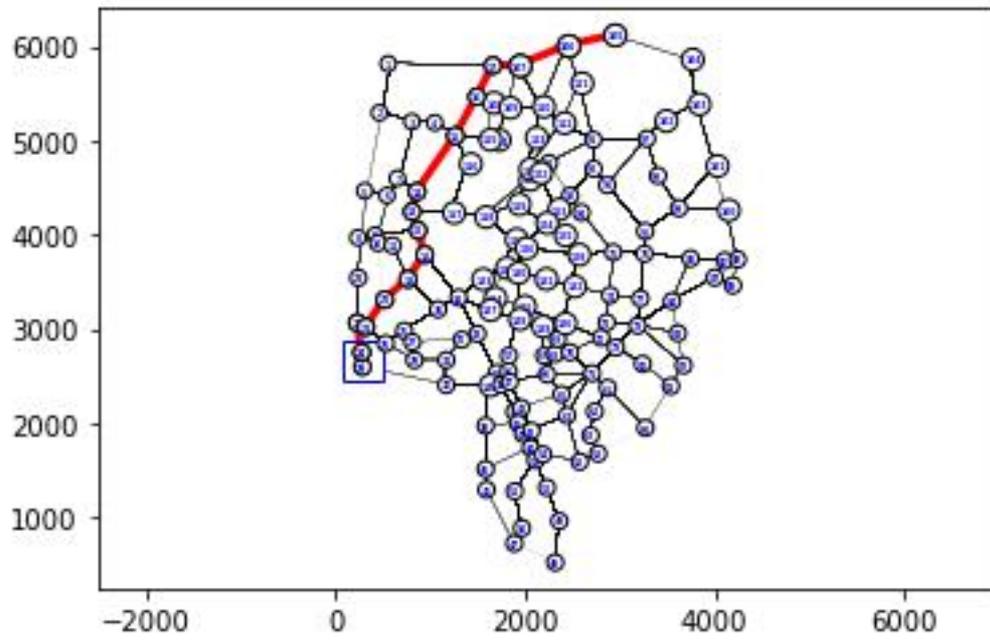


Figura 32. Línea 29

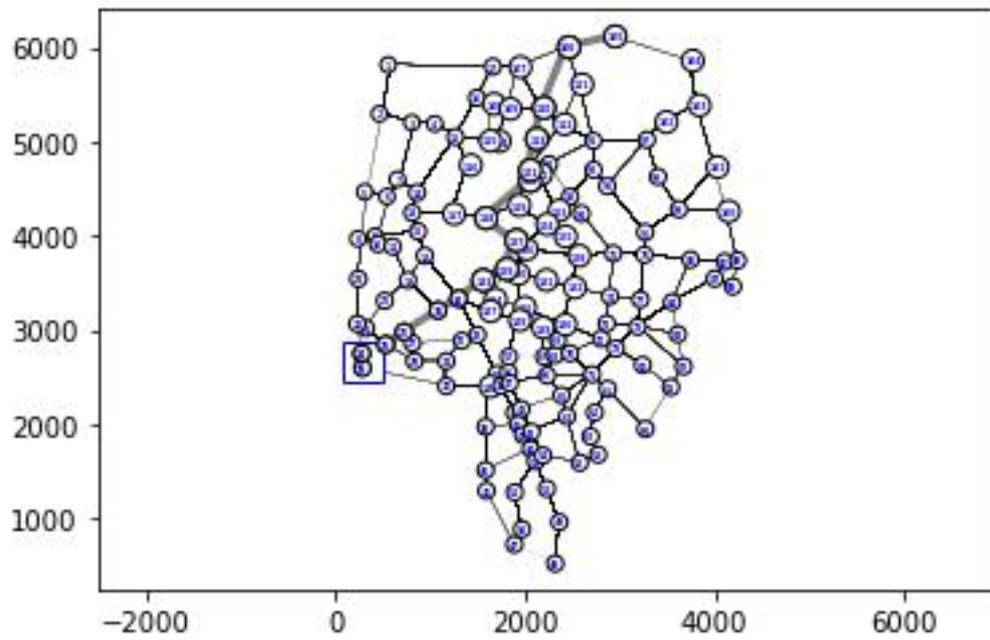


Figura 33. Línea 30

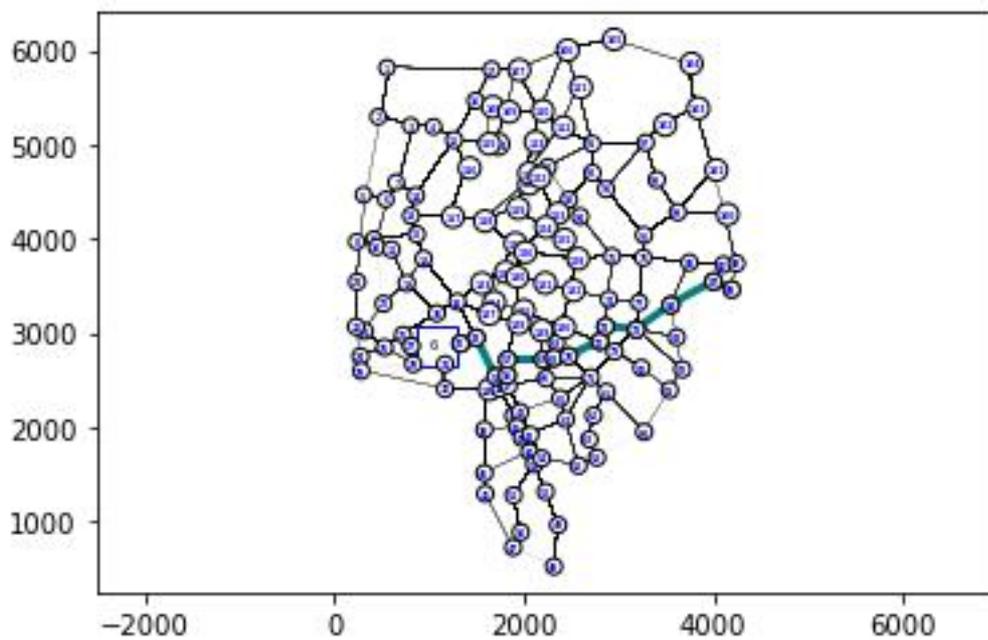


Figura 34. Línea 31

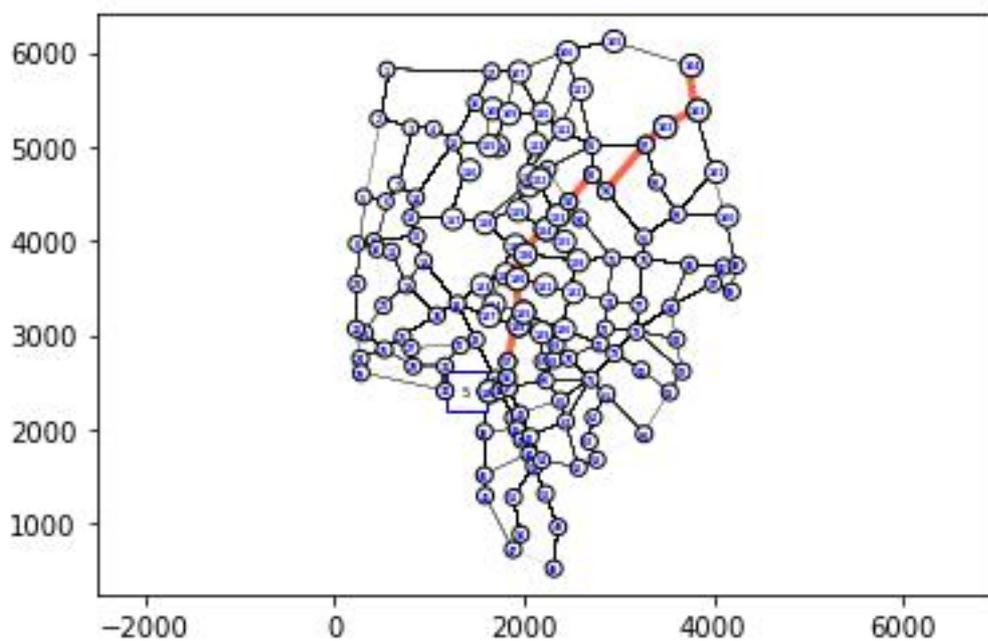


Figura 35. Línea 32

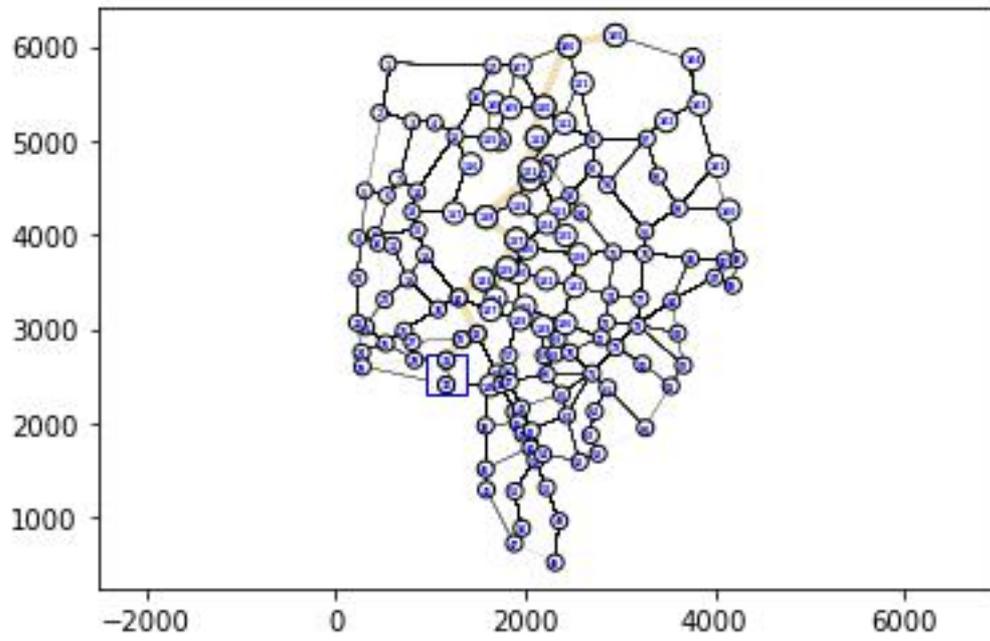


Figura 36. Línea 33

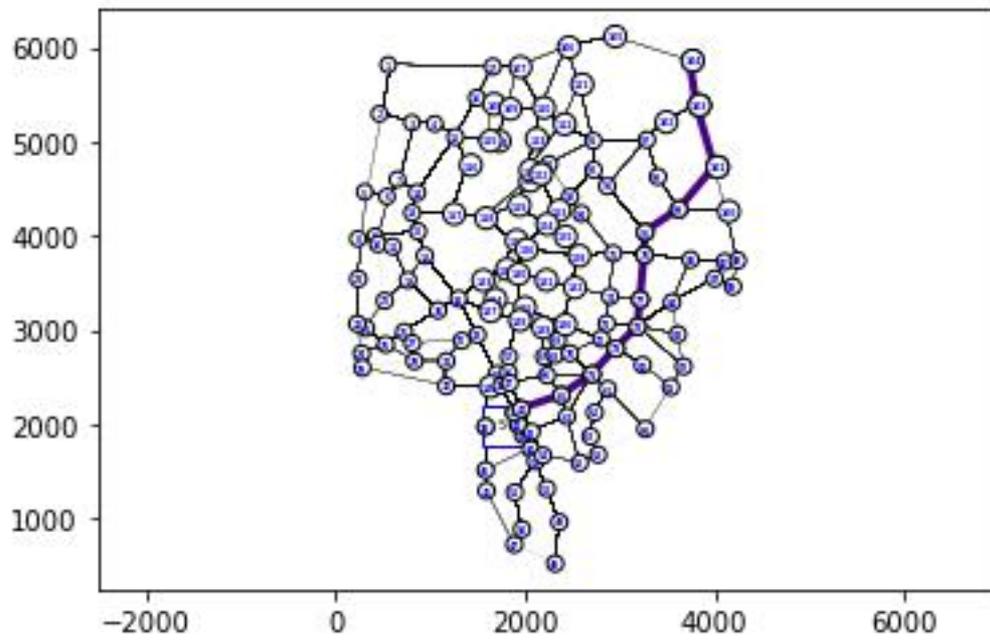


Figura 37. Línea 34

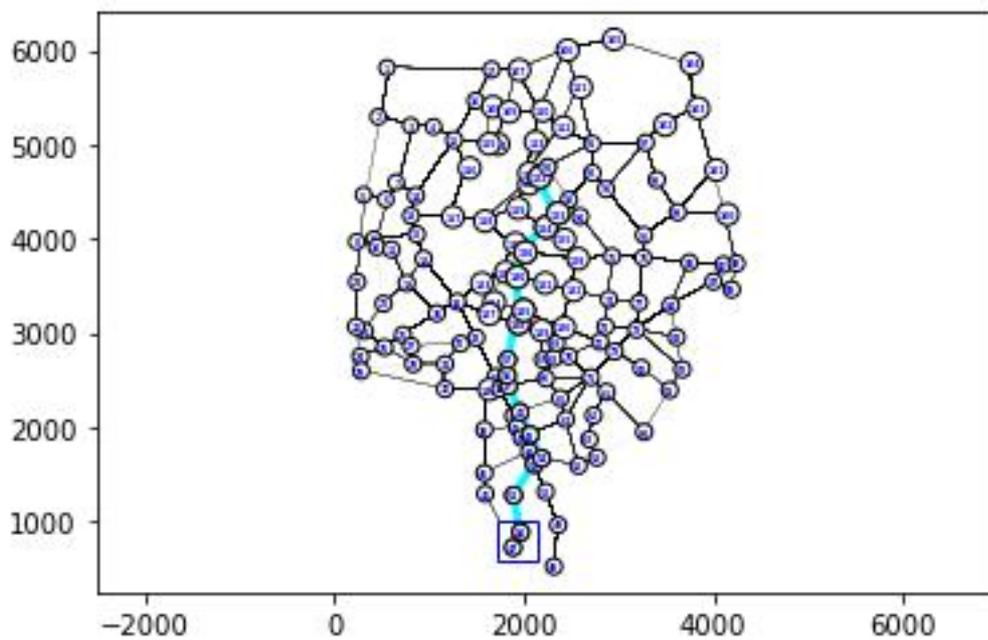


Figura 38. Línea 35

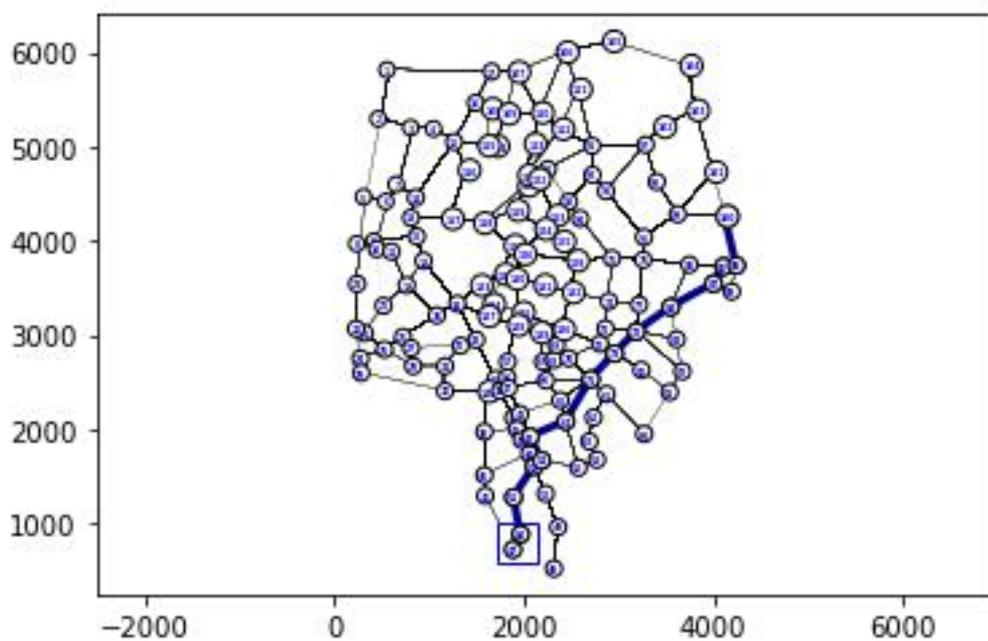


Figura 39. Línea 36

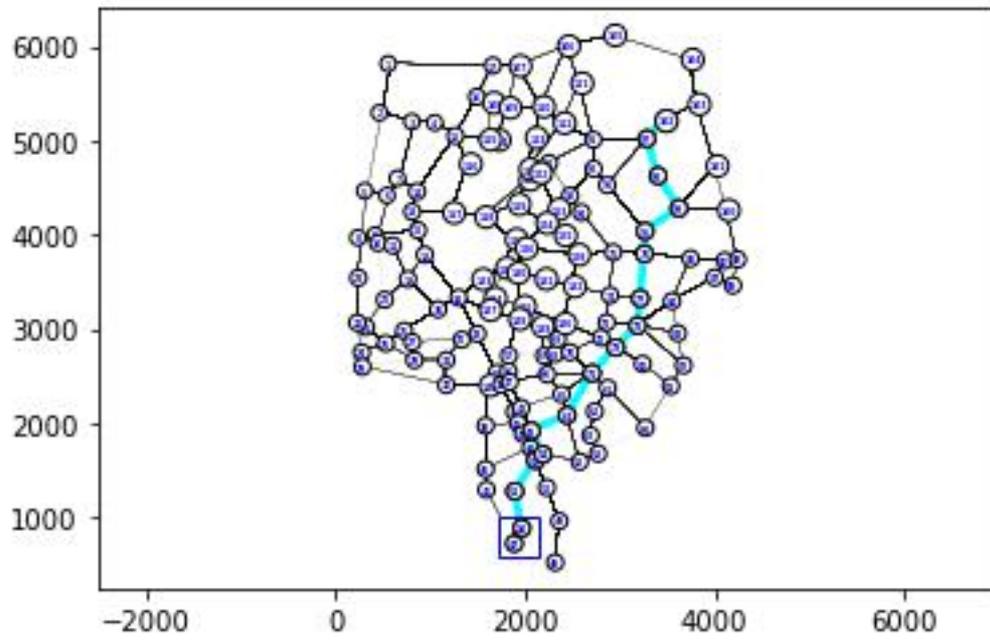


Figura 40. Línea 37

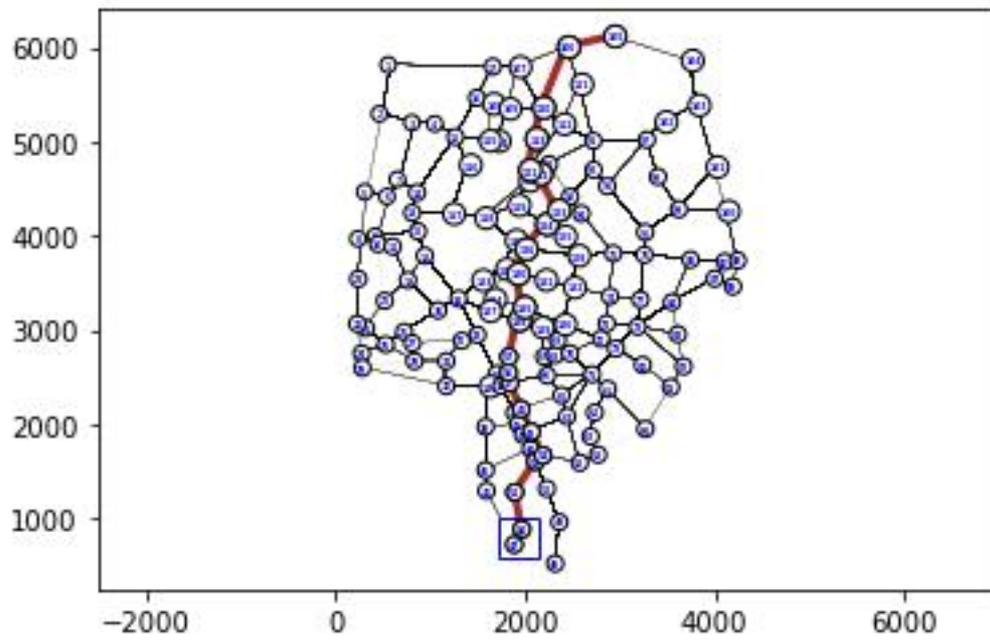


Figura 41. Línea 38

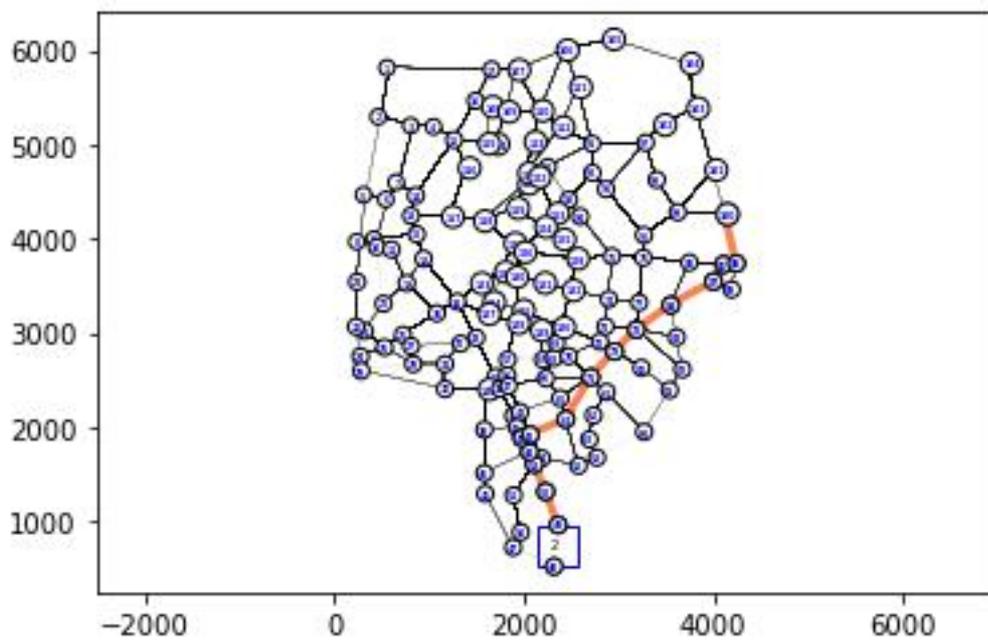


Figura 42. Línea 39

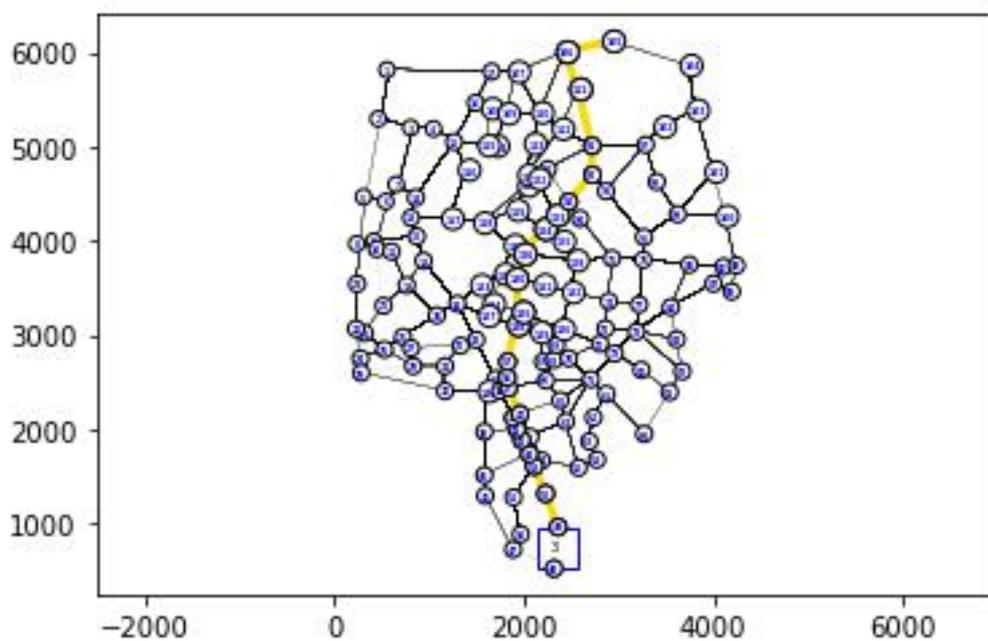


Figura 43. Línea 40

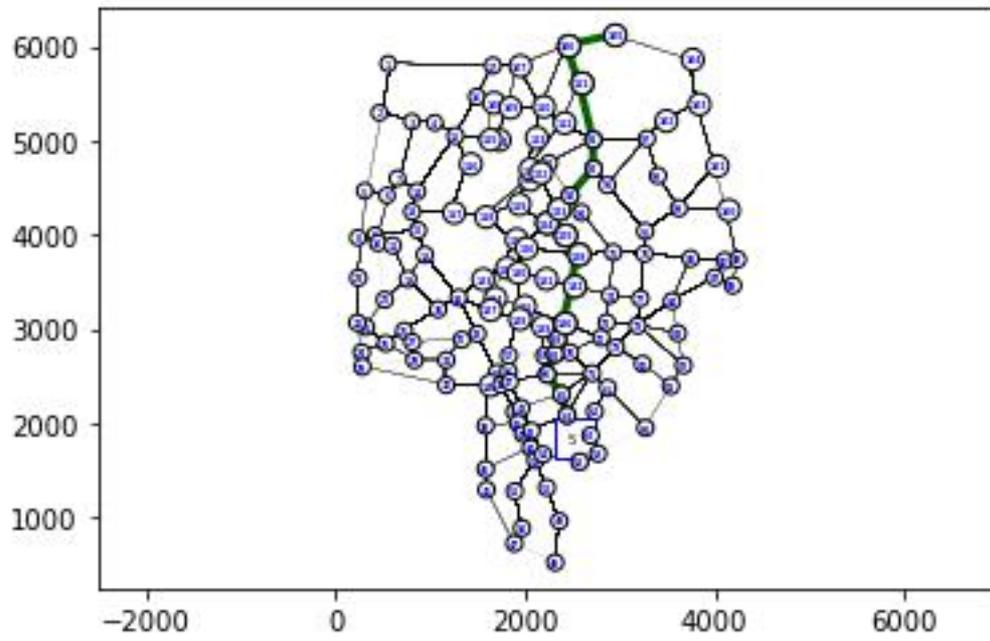


Figura 44. Línea 41

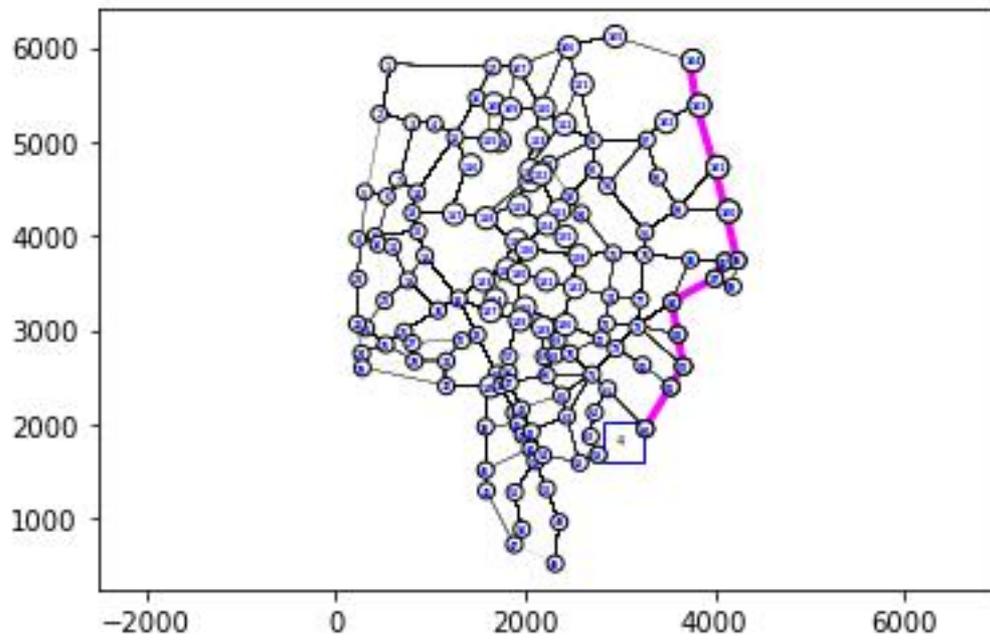


Figura 45. Línea 42

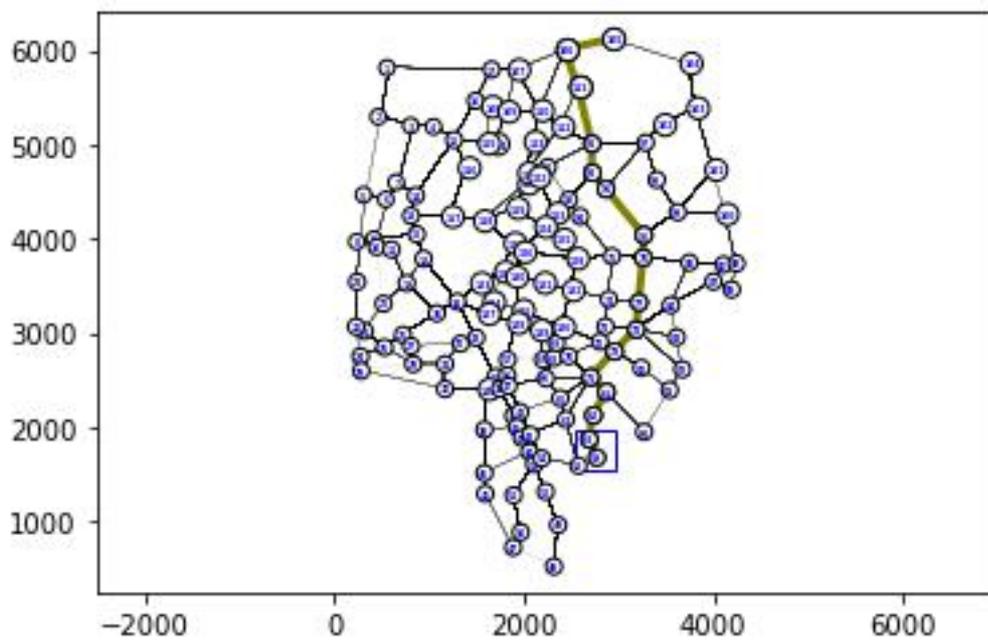


Figura 46. Línea 43

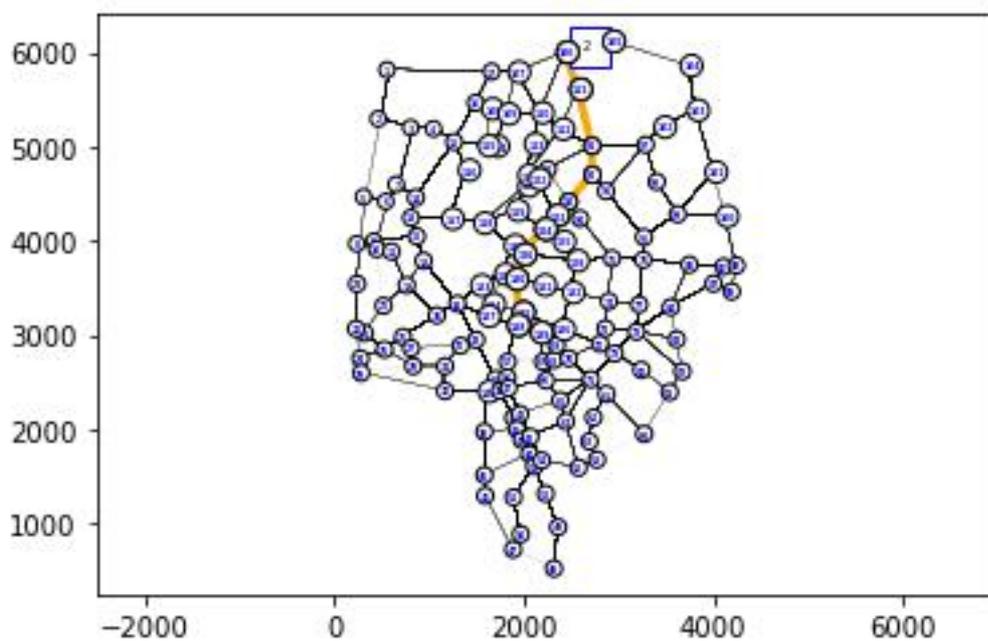


Figura 47. Línea 44

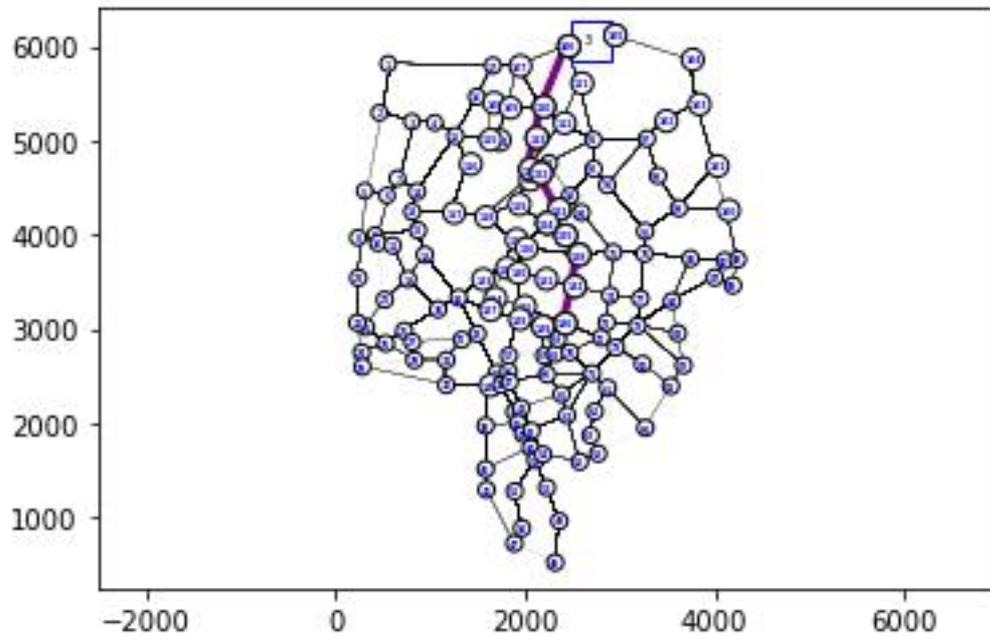


Figura 48. Línea 45