



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

# Estudio y caracterización de sistemas láser

Trabajo de fin de grado  
Grado en Física

2021-2022

---

Pablo Ortega Flores





Memoria presentada como parte de los requisitos  
para la obtención del título de Grado en Física por  
la Universidad de Sevilla.

Realizado por  
Pablo Ortega Flores  
Tutorizado por  
Prof. Alfonso Bravo León



# Índice

<b>1. Resumen / Abstract</b>	<b>5</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>7</b>
2.1. Motivación . . . . .	7
2.2. Objetivos . . . . .	7
2.3. Paneo histórico . . . . .	7
<b>3. Estadística de Bose-Einstein</b>	<b>9</b>
3.1. Tratamiento combinatorio . . . . .	11
3.2. Población de partículas bosónicas . . . . .	15
3.3. Estadística de Boltzmann como límite asintótico . . . . .	17
<b>4. Gas de fotones</b>	<b>21</b>
4.1. Densidad de estados en fotones . . . . .	23
4.1.1. 1 Dimensión . . . . .	24
4.1.2. 2 Dimensiones . . . . .	27
4.1.3. 3 Dimensiones . . . . .	28
<b>5. Emisión estimulada</b>	<b>35</b>
5.1. Coeficientes de emisión y absorción . . . . .	36
<b>6. El láser</b>	<b>45</b>
6.1. Estructura del láser . . . . .	46
6.2. Clasificación de los láseres . . . . .	47
6.2.1. Tipos de láser según el medio . . . . .	47
6.2.2. Tipos de láser según la duración de la emisión . . . . .	51
6.3. Láseres sintonizables . . . . .	52



---

## 1. Resumen / Abstract

En este trabajo se ha abordado el estudio de los sistemas láser. Partiendo desde cero y junto a la premisa "las partículas bosónicas pueden coexistir en el mismo estado", se construye con todo detalle una teoría que permite aprovechar un fenómeno artificial y no tan artificial, pues en extrañas ocasiones en la naturaleza se encuentran láseres no artificiales (como es el caso del megamaser "Nkalakatha", palabra isiZulu que significa "gran jefe", situado a 5,000 millones de años luz de la Tierra). Fenómeno artificial es la inversión de población para dar lugar a la emisión de luz colimada, coherente y monocromática. Empezando por construir desde cero la estadística de Bose-Einstein y luego particularizándola para el gas de fotones se llega a una expresión que describe la densidad volumétrica de energía por unidad de frecuencia. Seguidamente se introducen los coeficientes de absorción y emisión y se plantea la inversión de población como un estado del sistema inestable del cual se puede obtener luz láser. Tras esto se comenta de manera resumida los tipos de láseres artificiales más comunes que existen.

The subject developed in this memoir deals with the understanding of the physical principles that support the system called laser. Starting from scratch and with the premise "bosonic particles can coexist in the same state", a theory is built in great detail that allows taking advantage of an artificial phenomenon (and not so artificial, because on rare occasions in nature there are found non-artificial lasers, such as the megamaser "Nkalakatha", an isiZulu word meaning "great chief", located 5,000 million light years from Earth) as is the population inversion to give rise to a collimated light emission, coherent and monochromatic. Starting by constructing the Bose-Einstein statistic from scratch and then particularizing it for the gas of photons, we arrive at an expression that describes the volumetric density of energy per unit frequency. Next, the absorption and emission coefficients are introduced and the population inversion is considered as an unstable state of the system from which laser light can be obtained. After this, the most common types of artificial lasers developed so far are briefly discussed.





---

## 2. Introducción

### 2.1. Motivación

Decidí hacer esta revisión bibliográfica ya que considero que es una parte de la física genuinamente interesante a la cual no se le da la atención apropiada en el grado en física en Sevilla. No se encuentra ningún tema referente a los sistemas láser en ninguna asignatura del grado, ya sea obligatoria u optativa, así pues decidí que al menos podría dedicar esta memoria a ellos.

Además, cabría la posibilidad de que esta memoria inspire a algún profesor de Física del Estado Sólido, Física Estadística, Física Cuántica u Óptica en presentar un apéndice en el que se estudien estos sistemas.

### 2.2. Objetivos

El objetivo principal de esta memoria es construir desde cero (salvando algunos conocimientos elementales previos) un hilo argumental coherente y autoconsistente que desemboque en lo que se conoce como láser. Atenderé tanto a la composición del sistema láser como a los principios físicos que lo gobiernan.

Un recurso usado en esta memoria es la repetición de una misma idea desde varios ángulos, con el objetivo de enfatizar su importancia y mejorar la calidad de la explicación. Además utilizo diversos ejemplos y dibujos para exponer lo que se está contando, ya que en lo personal, considero que a veces una imagen o/y un ejemplo en el momento adecuado pone de manifiesto lo que se pretende explicar de la mejor forma posible.

Este camino es largo y se puede complicar todo lo que el lector quiera, la versión aquí planteada es tanto breve como precisa, y se centra principalmente en dar a entender cuales son los mecanismos físicos que dan lugar a la luz láser, dejando todo lo posible a un lado la complejidad del mundo cuántico .

Llegaremos a la conclusión principal de que la construcción de un sistema láser conlleva el uso de distintos elementos como pueden ser un medio activo con ganancia óptica, un bombeo de radiación electromagnética que se encargue de excitar el medio activo, al menos un espejo de alta reflectancia y otro de no tan alta reflectancia. Además veremos cómo desde la premisa de que los fotones son bosones<sup>1</sup> uno es capaz de construir todo un formalismo matemático que le lleve de manera directa a la teoría de la radiación del cuerpo negro presentada por Planck.

### 2.3. Paneo histórico

Primero hagamos una mención de honor al mayor invento del siglo XX, que fue el transistor. En 1947, los físicos Walter Brattain, William Shockley y John Bardeen, de los laboratorios Bell lograron la invención del transistor (contracción de los términos

---

<sup>1</sup>Partículas mediadoras de las interacciones elementales según la física de partículas, con espín entero.

Transfer Resistor). La invención del transistor trajo el desuso de los tubos de vacío (también conocidos como válvulas de vacío) que fueron la base de la electrónica en la primera mitad del siglo pasado. Esta sustitución hizo posible una significativa mejora en la rapidez y permitió el abaratamiento de los costos de fabricación a la vez que redujo el tamaño de todos los dispositivos electrónicos, como pueden ser televisiones y ordenadores entre otros. El invento del transistor hizo posible una nueva generación de ordenadores, más rápidos, más pequeños y con menores necesidades de ventilación. El segundo invento más importante del siglo XX es el láser.

Todo comenzó en 1917 cuando Albert Einstein sienta las bases para la tecnología láser al predecir el fenómeno de la "emisión estimulada", que es fundamental para el funcionamiento de todos los láseres.

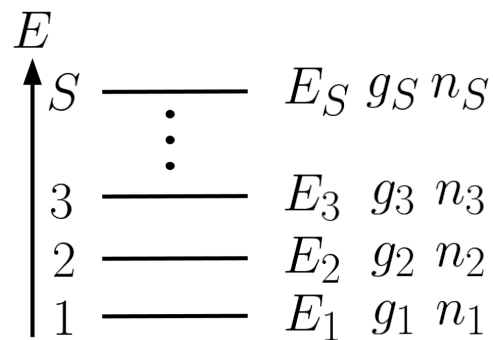
En 1939 Valentin Fabrikant teoriza sobre el uso de la emisión estimulada para amplificar la radiación y posteriormente en 1950 Charles Townes, Nikolay Basov y Alexander Prokhorov desarrollan la teoría cuántica de la emisión estimulada y demuestran la emisión estimulada en las microondas. Más tarde reciben el Premio Nobel en física por este trabajo de vanguardia.

En 1959 Gordon Gould, graduado de la Universidad Columbia, propone que la emisión estimulada se puede usar para amplificar la luz. Describe un resonador óptico que puede crear un haz angosto de luz coherente y lo llama LASER, por las siglas en inglés de "amplificación de luz por emisión estimulada de radiación" y un año después, en 1960, Theodore Maiman construye el primer prototipo de trabajo de un láser en Hughes Research Laboratories en Malibú, California. Este láser usa rubí sintético como medio activo y emite un haz de luz de color rojo profundo con una longitud de onda de 694,3 nm. La primera aplicación para el láser de rubí fue en telemetría militar, y aún se usa comercialmente para perforar orificios en diamantes debido a su alta potencia pico. Kumar Patel desarrolló el láser de dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) en los laboratorios ATT Bell en 1963. El láser de CO<sub>2</sub> tiene un costo muy inferior y una mayor eficiencia que el láser de rubí. Estos factores lo han hecho el tipo de láser industrial más popular por más de 50 años.

### 3. Estadística de Bose-Einstein

La estadística de Bose-Einstein describe desde un punto de vista estadístico las partículas cuánticas llamadas bosones, los cuales tienen como característica principal que pueden estar junto a otros bosones del mismo tipo en un mismo estado cuántico.

Empecemos imaginando tener un sistema con un espectro discreto de energía, supongamos  $S$  niveles permitidos, y cada nivel tendrá su degeneración de estado que denotaremos con  $g_i$ , que no es otra cosa que el número de estados cuánticos distintos (con distintos números cuánticos) pero con misma energía (el índice  $i$  hace referencia a la energía  $i$ -ésima permitida). El número de partículas con la energía  $E_i$  lo denotaremos como  $n_i$ . El siguiente dibujo pone de manifiesto la estructura que uno debe tener presente en su mente.



Cada nivel energético tiene una energía que lo caracteriza  $E_i$  y asociados dos números; su degeneración  $g_i$  y la población de partículas de ese nivel  $n_i$ .

Admitamos que el sistema es aislado, eso quiere decir que es un sistema cerrado (el número de partículas es constante) y que además no intercambia energía con el resto del universo. Ambas declaraciones se manifiestan matemáticamente mediante:

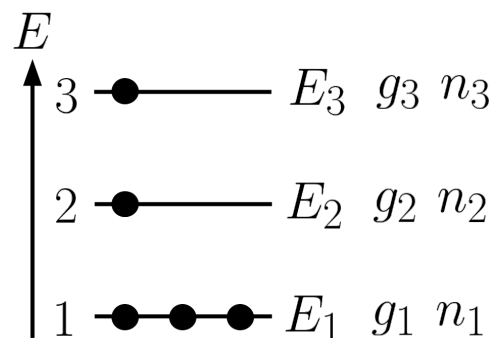
$$\text{Sistema cerrado} \Rightarrow N = \sum_{i=1}^S n_i = \text{cte} \quad \text{Número total de partículas} \quad (1)$$

$$\Delta U = 0 \Rightarrow U = \sum_{i=1}^S E_i n_i = \text{cte} \quad \text{Energía interna} \quad (2)$$

Podemos preguntarnos ahora, ¿cómo se distribuyen estas  $N$  partículas (que serán de tipo bosónico) sobre los niveles energéticos permitidos?

Esta pregunta es completamente similar a ¿cuál es de entre todas las distribuciones de partículas en los niveles permitidos la más probable?, está claro que es necesario pasar por el uso de la teoría de la probabilidad para dar respuesta a esta pregunta.

Para ejemplificar qué es lo que realmente se está preguntando en el párrafo anterior es recomendable atender a la siguiente imagen. Supongamos 3 niveles permitidos y 5 partículas, una de entre todas las distribuciones posibles sería la mostrada en la figura.



Es necesario ahora definir una nueva cantidad, "el número de modos en los que puedo distribuir  $n_i$  partículas en los  $g_i$  estados de energía  $E_i$ ", es una cantidad que se denomina partición " $P_i$ ". De esta manera, el número de modos con los que puedo distribuir todas las partículas del sistema en todos los niveles energéticos permitidos será:

$$P = \prod_{i=1}^S P_i \tag{3}$$

Vamos a asumir que las partículas cuánticas no interactúan entre sí, esto quiere decir que no influye si ya hay una o varias partículas en un nivel energético a la hora de añadir otra nueva. La probabilidad de que una partícula se encuentre en el mismo nivel que otras es independiente de la ocupación del nivel energético en cuestión.

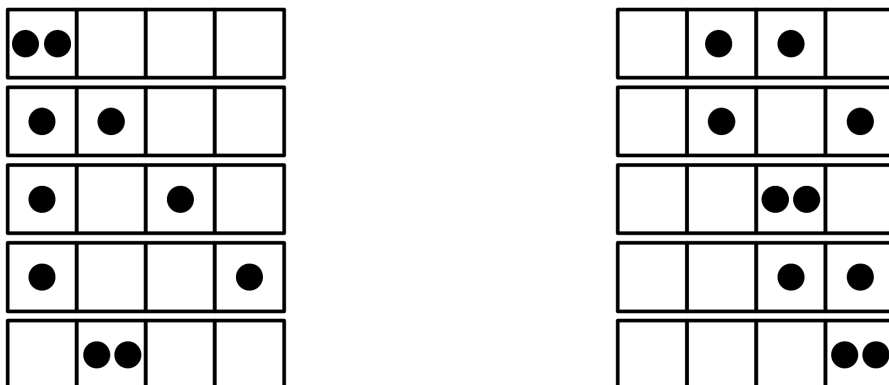
**Ejemplo** Consideremos un ejemplo sencillo que ayude a ilustrar lo que aquí se narra:

*¿Cual sería el valor de la partición de un nivel energético concreto?. El nivel energético  $i$ -ésimo le corresponderá una energía  $E_i$  y una degeneración de estados  $g_i$ , si consideramos por ejemplo que  $i = 2$ , lo que estamos diciendo es que vamos a calcular el valor de la partición para el segundo nivel energético del sistema.*

*Pongamos algunos valores para este ejemplo, hemos acordado que  $i = 2$ , además vamos a considerar que la degeneración del nivel energético con energía  $E_2$  es de cuatro, es decir, hay cuatro estados distintos con energía  $E_2$  ( $g_2 = 4$ ), y además vamos a considerar que tenemos dos partículas bosónicas a distribuir en estos cuatro estados ( $n_2 = 2$ ). Vamos a representar con una cajita cada estado y con un punto a cada partícula de manera que viendo la siguiente figura uno debe entender que hay 4 estados con una misma energía y 2 partículas a distribuir.*



Como los bosones no están sujetos al principio de exclusión de Pauli<sup>2</sup>, esta permitido que dos partículas bosónicas puedan estar en el mismo estado (así que si tuviéramos 3 bosones, podrían estar todos en el mismo estado). Veamos detalladamente las posibilidades que hay a la hora de distribuir estas dos partículas en cuatro estados:



<sup>2</sup>Principio de la mecánica cuántica que sostiene que dos o más partículas idénticas de tipo fermión, es decir, partículas con espín semi-entero, no pueden ocupar el mismo estado cuántico simultáneamente dentro del mismo sistema.

Vemos como como hay diez formas distintas de poner dos partículas en cuatro estados, entonces la partición del nivel energético  $E_2$  es  $P_2 = 10$ .

No es común tener solamente dos partículas, en general el número de partículas en cada nivel energético  $n_i$  y la degeneración de estado  $g_i$  van a ser muy grandes, por este motivo debemos idear una nueva forma de contar estas particiones. Es lícito pensar que el análisis combinatorio nos será de utilidad.

### 3.1. Tratamiento combinatorio

Vamos a considerar que el nivel energético caracterizado por la energía  $E_i$  con degeneración de estado  $g_i$  es representable mediante  $g_i - 1$  líneas verticales como se muestra en la siguiente figura, y las  $n_i$  partículas seguirán siendo  $n_i$  puntos.



Figura 1: Caso en el que  $g_i = 4$ , cuatro estados disponibles.

El ejemplo anterior quedaría así:



Para el caso general nos preguntamos; ¿De cuantas maneras puedo ordenar  $g_i - 1$  líneas y  $n_i$  puntos? Pues para calcular el valor de la partición  $i$ -ésima recurrimos a la combinatoria.

El número de elementos totales que tenemos que ordenar es  $n_i + (g_i - 1)$ , entonces será:

$$P_i = (n_i + g_i - 1) (n_i + g_i - 2) \cdots 1 = (n_i + g_i - 1)!$$

Pero como las partículas son indistinguibles (bosones), habrá que sustraer el número de permutaciones entre partículas (recuerde que en ):

$$P_i = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!}$$

También habrá que sustraer las permutaciones entre las líneas verticales, ya que permutar dos líneas resultaría en el mismo estado:

$$P_i = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

De manera que el número de modos con los que puedo distribuir todas las partículas del sistema en todos los niveles energéticos permitidos es:

$$P = \prod_{i=1}^S P_i = \prod_{i=1}^S \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

El estado físico global del sistema quedará determinado por el estado que van a ocupar todas las partículas, el cual va a ser aquel que corresponda a la partición más probable, esto es, a la partición que se pueda realizar en un mayor número de modos. La partición que se pueda realizar con un mayor número de modos es la partición más probable.

Tanto  $E_i$  como  $g_i$  son cantidades fijas, son características del sistema, pero  $n_i$  sí que puede variar. Nos preguntamos entonces: ¿Cuál es el valor máximo de  $P$  variando el conjunto de valores  $\{n_i\}$ ?

Vamos a considerar  $\ln P$  en lugar de  $P$  para agilizar y facilitar los cálculos. Buscar el máximo de  $P$  es buscar el máximo de  $\ln P$ , ya que el logaritmo es una función monótona creciente (para los lectores que se acuerden de la física estadística, el principio físico detrás de ésta estrategia es maximizar la entropía).

Primero calculemos el valor explícito de  $\ln P$ :

$$\begin{aligned} \ln P &= \ln \left( \prod_{i=1}^S P_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^S \ln P_i \\ &= \sum_{i=1}^S \ln \left[ \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \right] \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln[(n_i + g_i - 1)!] - \ln[n_i!] - \ln[(g_i - 1)!] \right] \end{aligned} \tag{4}$$

Disfrutando del hecho de haber factoriales dentro de los logaritmos se puede usar la aproximación de Stirling para cada factorial:

$$\ln x! \approx x \ln x - x \quad x \gg 1$$

$$\begin{aligned} \ln P &= \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ (n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - (n_i + g_i - 1) - n_i \ln(n_i) + n_i \right. \\ &\quad \left. - (g_i - 1) \ln(g_i - 1) + (g_i - 1) \right] \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ (n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln(n_i) - (g_i - 1) \ln(g_i - 1) \right] \end{aligned} \tag{5}$$

Para buscar el máximo de  $\ln P$  habrá que diferenciarlo y luego igualarlo a cero. Recor-

damos que las variables en este problema son el conjunto de valores  $\{n_i\}$ .

$$\begin{aligned} d(\ln P) &= 0 \\ &= \sum_{i=1}^S \frac{d}{dn_i} \left[ (n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln(n_i) - (g_i - 1) \ln(g_i - 1) \right] dn_i \end{aligned} \quad (6)$$

Haciendo las derivadas:

$$\begin{aligned} d(\ln P) &= \\ &= \sum_{i=1}^S \frac{d}{dn_i} \left[ (n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln(n_i) - (g_i - 1) \ln(g_i - 1) \right] dn_i \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ 1 \cdot \ln(n_i + g_i - 1) + (n_i + g_i - 1) \frac{1}{n_i + g_i - 1} - 1 \ln(n_i) - n_i \frac{1}{n_i} + 0 \right] dn_i \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln(n_i + g_i - 1) + 1 - \ln(n_i) - 1 \right] dn_i \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln(n_i + g_i - 1) - \ln(n_i) \right] dn_i \end{aligned} \quad (7)$$

Recordamos que el objetivo es buscar un conjunto de valores  $\{n_i\}$  para el cual se cumpla  $d(\ln P) = 0$ . Es tentador suponer que los valores del conjunto  $\{n_i\}$  son independientes entre sí, de esa manera podríamos sencillamente imponer que cada término del sumatorio fuese nulo y de la condición aquí planteada  $\left[ \ln(n_i + g_i - 1) - \ln(n_i) \right] = 0$  podríamos sacar el conjunto de valores  $\{n_i\}$ . Pero al haber una ligadura presente sobre los valores  $\{n_i\}$  (condición de sistema cerrado), no se puede hacer este planteamiento, se debe tener en cuenta que deben cumplirse en todo momento las dos ligaduras planteadas al inicio de la sección sobre el número de partículas y la energía del sistema, (1) y (2).

Para incluir estas ligaduras dentro del formalismo que se está desarrollando, es conveniente usar los llamados multiplicadores de Lagrange  $\alpha$  y  $\beta$ . Para ello lo primero que hay que hacer es diferenciar ambas ligaduras:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^S n_i = cte \Rightarrow dN = \sum_{i=1}^S dn_i = 0 \\ U &= \sum_{i=1}^S n_i E_i = cte \Rightarrow dU = \sum_{i=1}^S \left[ E_i dn_i + n_i \underbrace{\frac{dE_i}{E_i}}_{=0} \right] = \sum_{i=1}^S \left[ E_i dn_i \right] = 0 \end{aligned}$$

Una vez diferenciadas sólo resta introducir los multiplicadores de Lagrange de esta manera:

$$\begin{aligned} 0 &= d(\ln P) - \alpha dN - \beta dU \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln(n_i + g_i - 1) - \ln(n_i) \right] dn_i - \alpha dN - \beta dU \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>3</sup>Los niveles energéticos son valores fijos impuestos por las características del sistema.

Parece que se está modificando el resultado al que se ha llegado al final del desarrollo (7), pero en realidad lo único que se está haciendo es restar 0 dos veces, ya que  $dU = dN = 0$ , pero de esta manera hemos introducido los multiplicadores de Lagrange. Si ahora sustituimos los valores de  $dU$  y  $dN$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln(n_i + g_i - 1) - \ln(n_i) \right] dn_i - \alpha \sum_{i=1}^S dn_i - \beta \sum_{i=1}^S \left[ E_i dn_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln(n_i + g_i - 1) - \ln(n_i) - \alpha - \beta E_i \right] dn_i \end{aligned} \quad (9)$$

La motivación de haber introducido los multiplicadores de Lagrange no es más que adquirir la ventaja de poder afirmar que ahora los valores  $n_i$  sí que son independientes entre sí. Las ligaduras se han introducido formalmente dentro de la ecuación a través de los multiplicadores de Lagrange y se están teniendo en cuenta. Al introducir los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se han desvinculado formalmente los valores de  $n_i$  de ser correlacionados entre ellos.

Con el conjunto de valores  $\{n_i\}$  formalmente independientes entre sí se permite decir que el único modo por el cual la sumatoria (9) sea cero, es que todos los sumandos sean cero.

$$\ln(n_i + g_i - 1) - \ln(n_i) - \alpha - \beta E_i = 0 \quad \forall i$$

Ahora sencillamente podemos despejar  $n_i$ ;

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n_i + g_i - 1}{n_i}\right) &= \alpha + \beta E_i \Rightarrow \frac{n_i + g_i - 1}{n_i} = e^{\alpha + \beta E_i} \Rightarrow \\ \Rightarrow n_i + g_i - 1 &= n_i e^{\alpha + \beta E_i} \Rightarrow g_i - 1 = n_i \left[ e^{\alpha + \beta E_i} - 1 \right] \end{aligned}$$

Entonces queda:

$$n_i = \frac{g_i - 1}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

Podemos ahora considerar que los valores de  $g_i$  son enormes en comparación con 1, ya que  $g_i$  es el número de estados cuánticos microscópicos con energía  $E_i$  de un sistema macroscópico (por ejemplo como los distintos estados de misma energía de electrones en una colección macroscópica de átomos). Y por lo tanto podemos asumir que  $g_i - 1 \approx g_i$ :

$$n_i \approx \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1} \quad (10)$$

De esta ecuación se determina que  $[\beta] = E^{-1}$  y que  $\alpha$  es adimensional.

Los valores dados por (10) (el número de partículas que ocupan cada nivel energético) son aquellos valores que maximizan  $\ln P$ , esto se traduce a que dan lugar a la partición más probable del sistema descrito por la estadística de Bose-Einstein.

Es conveniente desde un punto de vista físico reescribir el parámetro  $\beta$  en función de otro parámetro  $T$  de esta forma:

$$\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$$



Donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K y el parámetro  $T$  tendrá el significado de temperatura.

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \frac{E_i}{k_B T}} - 1}$$

Estos son los valores del conjunto  $\{n_i\}$  (recodemos que  $n_i$  es el número de partículas que ocupan el nivel energético  $E_i$ ) que maximizan la cantidad  $\ln P$ , en consecuencia estos valores dan lugar a la partición más probable del sistema.

También hay otro modo de reparametrizar  $\alpha$ ;  $\alpha = -\frac{\mu}{k_B T}$ , el nuevo parámetro introducido  $\mu$  pasará a jugar el papel de potencial químico.

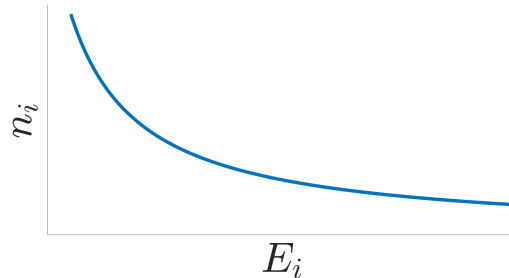
La motivación de usar los parámetros  $\mu$  y  $T$  en lugar de usar los multiplicadores de Lagrange  $\alpha$  y  $\beta$  se basa en que los nuevos parámetros son mas significativos desde un punto de vista físico que los antiguos, y es por eso que se usan.

### 3.2. Población de partículas bosónicas

La distribución estadística de partículas para distintos valores de  $E_i$  es:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) - 1} \quad (11)$$

La cual toma la siguiente forma:



Vemos que para altos valores de la energía, el número de partículas que ocupan ese nivel decrece exponencialmente. Además, hay una singularidad donde se anula el denominador, cuando  $\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) = 1$  la función diverge.

Es importante darse cuenta de que debe cumplirse  $n_i \geq 0$  en todo momento, no tiene sentido que el número de partículas en un nivel sea negativo.

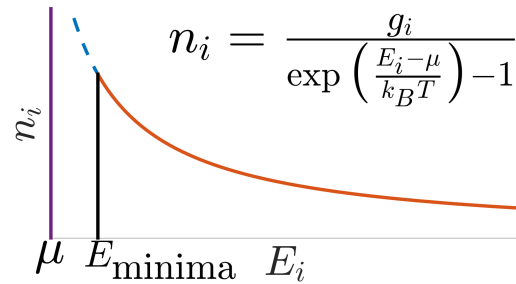
- Para que se cumpla que  $n_i = 0$  debe ocurrir que la degeneración del nivel  $g_i$  sea cero, como los valores de la degeneración del estado es característico del sistema considerado, es factible a priori que pueda darse el caso.
- Para que se cumpla que  $n_i > 0$  tanto numerador como denominador deben tener el mismo signo, como forzosamente ocurre que  $g_i > 0$ , necesariamente el denominador de la expresión (11) debe ser positivo también.

$$\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) - 1 > 0 \Rightarrow \exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) > 1$$

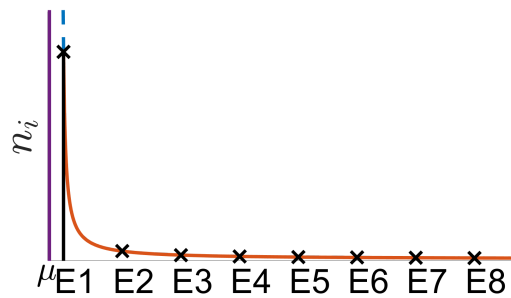
De esta última ecuación se saca algo verdaderamente llamativo, como la escala de temperatura es absoluta ( $T > 0$ ), es necesario que  $E_i - \mu > 0$ , lo que quiere decir que  $\mu$  debe ser más pequeño que el más pequeño de los posibles valores de  $E_i$ .

$$\mu > E_i \quad \forall i$$

Recapitulando, matemáticamente la función  $n_i$  diverge para  $E_i = \mu$ , pero este escenario nunca se va a dar en un sistema físico pues debe cumplirse que  $\mu > E_i \quad \forall i$ .



Es interesante ver lo que sucede cuando  $T$  se aproxima a 0. En tal caso sucede que  $\frac{1}{k_B T} \gg 0$  y entonces  $\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) \gg 0$  a no ser que  $E = \mu$ .

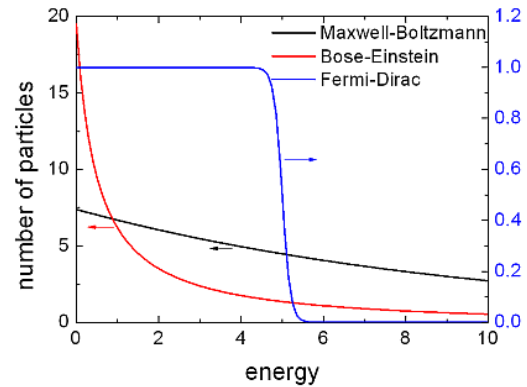


Vemos que se van a concentrar todas las partículas del sistema en el nivel de menor energía y además vemos como  $n_i \rightarrow 0$  cuando  $T$  se aproxima a 0 para todos los valores de energía menos para el primero (a este fenómeno se le da el nombre de "Condensación de Bose-Einstein", al cual se le dedican unas palabras en el apéndice). Nótese cómo se debe cumplir siempre que  $E_1 > \mu$ .

Desde un punto de vista físico, los bosones son partículas cuánticas que no están sujetas al principio de exclusión de Pauli. Al bajar la temperatura del sistema, disminuye la energía térmica del sistema y las partículas se concentran en el nivel energético más bajo posible. La estadística dice que si tengo  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  bosones, cuando  $T$  se aproxima a 0 tienden a estar todos juntos en el mismo estado cuántico de energía  $E_1$ .

El condensado de Bose-Einstein es un estado del sistema descrito por la estadística de Bose-Einstein, estado particularmente interesante que aparece cuando la temperatura tiende al cero absoluto ya que da lugar a propiedades tan útiles como la superconductividad o la superfluidez. Este estado está desarrollado en el apéndice.

Esto es completamente distinto de lo que sucede con la estadística fermiónica (conocida como estadística de Fermi-Dirac).



Los sistemas descritos por la estadística fermiónica son aquellos cuyos componentes son fermiones, los cuales sí atienden al principio de exclusión de Pauli, impidiéndoles ocupar un estado previamente ya poblado. La ecuación que caracteriza la estadística fermionica es:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) + 1}$$

Cuyo significado es totalmente análogo a la ecuación (11) pero en este caso referida a fermiones, no a bosones.

El significativo cambio de signo del 1 en el denominador cambia el comportamiento de las partículas radicalmente en comparación con los bosones, el signo positivo evita cualquier posible singularidad en el denominador y como resultado la población fermionica se asemejará a una función escalón cuando  $T$  se aproxime a 0.

### 3.3. Estadística de Boltzmann como límite asintótico

Veamos ahora cómo la estadística de Boltzmann es un límite asintótico de la estadística de Bose-Einstein.

Hemos llegado a que el número de partículas bosónicas en el nivel  $i$ -ésimo de energía en equilibrio termodinámico está dado por la expresión:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) - 1} \quad (12)$$

Donde  $g_i$  es la degeneración del nivel energético  $i$ -ésimo, esto es, el número de estados cuánticos con la misma energía  $E_i$ . Lo que tiene de particular la estadística de Bose-Einstein es la posibilidad de tener dos o más partículas cuánticas indistinguibles ocupen el mismo estado cuántico, esto último emerge de algún modo en el "-1" del denominador.

Es bien conocido que la estadística de Boltzmann (la estadística clásica) describe  $n_i$  con la misma dependencia que la de Bose-Einstein salvo el "-1" en el denominador.

$$n_i \propto \exp(-\alpha - \beta E_i)$$

Se puede demostrar que la estadística de Bose-Einstein converge a la de Boltzmann. Consideremos un "sistema estadístico diluido", esto quiere decir que se tienen pocas partículas en el sistema respecto a la cantidad de estados disponibles, matemáticamente que  $g_i \gg n_i$ . Veamos que bajo esta condición podemos hacer tender asintóticamente la descripción cuántica de Bose-Einstein a la descripción clásica de Boltzmann.

Antes de empezar debemos hacer una aclaración, escribir  $g_i \gg n_i$  no quiere decir que  $n_i$  sea un número pequeño, esta claro que  $n_i \gg 1$ ,  $n_i \sim N_A$ , lo que ocurre es que  $g_i$  es horriblemente mas grande.

Partimos de la ecuación que da una descripción de la partición, o los modos con los que se pueden distribuir las partículas en los distintos niveles energéticos:

$$P = \prod_{i=1}^S P_i = \prod_{i=1}^S \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!}$$

En base a que  $g_i \gg n_i$  (sistema diluido) podemos hacer la siguiente aproximación: (desarrollada en el apéndice)

$$(n_i + g_i - 1)! \approx g_i^{n_i}(g_i - 1)!$$

Entonces la partición queda;

$$P = \prod_{i=1}^S P_i = \prod_{i=1}^S \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \approx \prod_{i=1}^S \frac{g_i^{n_i}(g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} = \prod_{i=1}^S \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

A partir de este punto es cuestión de repetir la estrategia anterior. El objetivo es buscar el conjunto de valores de  $\{n_i\}$  que hace máximo a  $P$ . Para simplificar los cálculos volvemos a considerar  $\ln(P)$ , luego diferenciamos e igualamos a cero, introducimos los multiplicadores de Lagrange, igualamos cada término a cero y por último sacamos los valores de  $\{n_i\}$ .

¿Cuál es la partición que se puede hacer en el mayor número de modos posibles?, es decir, ¿Cuál es la partición más probable?, pues habrá que maximizar  $P$ , o mejor, maximizar  $\ln P$ .

$$\ln P = \ln \left( \prod_{i=1}^S \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right) = \sum_{i=1}^S \left[ \ln(g_i^{n_i}) - \ln(n_i!) \right] \approx \sum_{i=1}^S \left[ n_i \ln(g_i) - n_i \ln(n_i) + n_i \right]$$

Diferenciando e igualando a cero queda (recuerde que  $g_i$  es una cantidad fija):

$$\begin{aligned} d(\ln P) &= \sum_{i=1}^S \frac{d}{dn_i} \left[ n_i \ln(g_i) - n_i \ln(n_i) + n_i \right] dn_i \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln(g_i) - 1 \ln(n_i) - n_i \frac{1}{n_i} + 1 \right] dn_i \\ &= \sum_{i=1}^S \left[ \ln \left( \frac{g_i}{n_i} \right) \right] dn_i = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Si las variaciones de todos los " $dn_i$ " fueran independientes entre sí, el único modo de que el sumatorio fuese cero sería que todos los sumandos fuesen cero, pero ocurre

que los " $dn_i$ " no son independientes entre sí, se deben cumplir las ligaduras (1) y (2) simultáneamente. Para implementar que se cumplan, una vez más introducimos en la ecuación los multiplicadores de Lagrange  $\alpha$  y  $\beta$ ;

$$\sum_{i=1}^S \left[ \ln \left( \frac{g_i}{dn_i} \right) - \alpha - \beta E_i \right] dn_i = 0$$

Una vez que los " $dn_i$ " son independientes entre sí;

$$\forall i : \ln \left( \frac{g_i}{dn_i} \right) - \alpha - \beta E_i = 0 \Rightarrow n_i = g_i \exp(-\alpha - \beta E_i)$$

Se llega así a la estadística clásica de Boltzmann:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha + \beta E_i)} \quad (14)$$

El motivo por el cual se llega a la estadística clásica de Boltzmann cuando consideramos un sistema diluido en la estadística con carácter cuántico de Bose-Einstein es la diferencia de ordenes de magnitud entre  $\exp(\beta E_i)$  y 1. En la estadística de Bose-Einstein se tiene que:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha + \beta E_i) - 1}$$

Cuando  $E_i \rightarrow +\infty$  el "-1" es despreciable y queda la ecuación (14).

En el apéndice se desarrolla brevemente la aparición de la función de partición, función que conecta con la Física Estadística y que a veces es conveniente utilizar para abreviar y reorganizar las magnitudes que dependen de la estructura física del sistema y no del número de partículas que hay en cada nivel energético.



---

## 4. Gas de fotones

El gas de fotones es un gas bosónico, así que el punto de partida de esta sección será la estadística de Bose-Einstein en condiciones de equilibrio termodinámico.

El número de partículas bosónicas que ocupan un determinado nivel energético de degeneración  $g_i$  es:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i}{k_B T}\right) - 1} \quad (15)$$

Nótese que esta forma explícita no contempla el multiplicador de Lagrange  $\alpha$ . En este caso (gas de fotones) no hay ligadura en el número total de partículas. Esta expresión sale de repetir el mismo cálculo descrito en la sección anterior pero sin introducir el parámetro de Lagrange  $\alpha$ .

En el gas de fotones el número total de fotones no es constante.

$$N = \sum_{i=1}^S n_i \neq cte$$

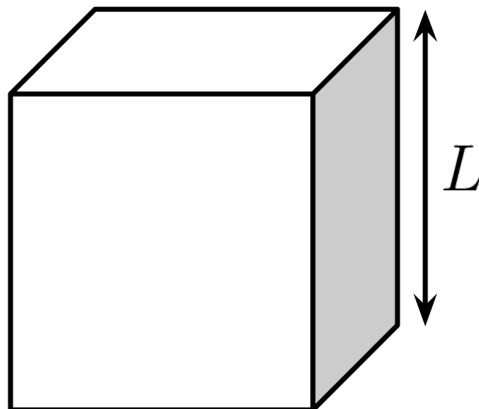
Esta cualidad es característica del sistema físico que estemos considerando, el gas de fonones<sup>4</sup> y el gas de fotones son ejemplos clave de sistemas donde existen mecanismos tales que crean y destruyen partículas.

En el caso de los fotones se habla de una cavidad óptica que contiene un cierto número de fotones los cuales están en equilibrio térmico con las paredes de la cavidad. Por como está hecha la física de este sistema los fotones pueden ser absorbidos y emitidos por las paredes internas de la cavidad óptica, entonces el número de fotones es definido como número medio y no es estrictamente constante.

Esto puede parecer extraño, pero no viola el principio de conservación de la energía.

$$U = \sum_{i=1}^S E_i n_i = cte$$

Lo primero sería definir el sistema físico, la cavidad óptica podemos imaginarla como un cubo de lado  $L$ :

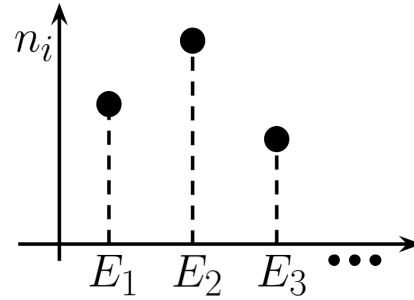


---

<sup>4</sup>Fonón. Pseudo partícula que representa un modo cuantizado vibratorio que se halla en redes cristalinas como la red atómica de un sólido.

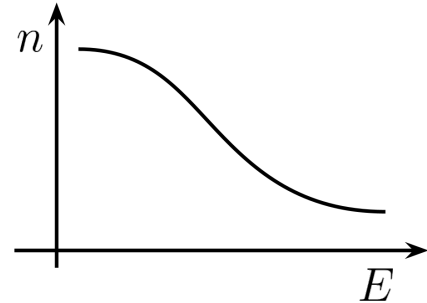
Antes de seguir hay que hacer un salto conceptual del discreto al continuo.

La descripción hasta ahora utilizada (15) presupone que hay un conjunto de niveles energéticos que son representables de esta manera. Para cada valor discreto de  $E_i$  tengo un valor de  $n_i$ .



Como veremos, la distancia energética entre estos niveles discretos es extremadamente pequeña respecto a la escala energética del problema (la cual será la escala  $k_B T$ ), y entonces podemos tratar con una descripción continua.

Ahora la energía puede variar de manera continua (pero en rigor sigue estando discretizada). En este punto ya no usamos  $n_i = n_i(E_i)$ , ahora debemos introducir una definición diferencial. Para un valor genérico de energía  $E$ , en un intervalo infinitésimo de energía entre  $E$  y  $E + dE$  tenemos un número infinitesimal de fotones  $dn$ , el número infinitesimal de fotones con energías comprendidas entre  $E$  y  $E + dE$  depende de  $E \rightarrow dn = dn(E)$  y es dado por:



$$dn(E) = \underbrace{\left[ \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1} \right]}_{(16)} dE$$

**Esta función** multiplicada por la amplitud del intervalo infinitesimal  $dE$  nos devuelve el número infinitesimal de fotones que en el equilibrio termodinámico con la cavidad óptica se encuentran en los niveles de energía comprendidos entre  $E$  y  $dE$ .

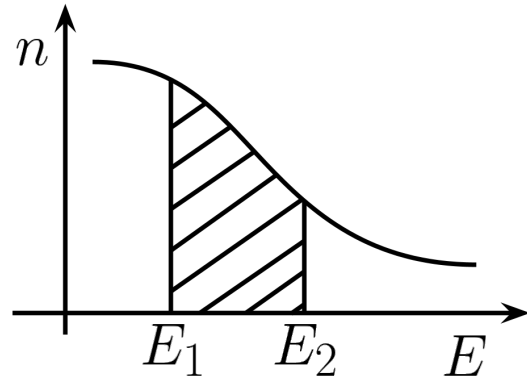
El factor que multiplica a la degeneración del estado  $g(E)$  es denominado *Función probabilística de Bose-Einstein*, escrita normalmente como  $f_{BE}(E)$ .

$$\frac{dn(E)}{dE} = \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1}$$

$$\frac{dn(E)}{dE} = g(E) f_{BE}(E)$$



Tener el número de partículas definido mediante su derivada nos da la oportunidad (desde un punto de vista operativo) de calcular el número de fotones que hay en un cierto intervalo de energético finito. Si nos proponemos saber cuantos fotones hay en el gas con una energía comprendida entre  $E_1$  y  $E_2$ , sólo habrá que hacer una integral.



$$\Delta n = \int_{E_1}^{E_2} \frac{dn}{dE} dE = \int_{E_1}^{E_2} g(E) f_{BE}(E) dE$$

Esta ultima ecuación nos dice que para contar el número de fotones que tienen una  $E \in [E_1, E_2]$  se debe integrar el número de estados disponibles  $g(E)$  multiplicado por la probabilidad de ocupar esos estados  $f_{BE}(E)$ .

La función  $f_{BE}(E)$  es una función que no depende del sistema que estemos considerando, es decir, es la misma para el gas de fonones y será la misma para cualquier tipo de gas bosónico. Vendrá siempre definida como:

$$f_{BE} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1}$$

Es  $g(E)$  quien porta la información del sistema físico, sistemas físicos distintos estarán caracterizados por distintas expresiones de la densidad de estados en función de la energía.

### 4.1. Densidad de estados en fotones

Estudiemos más a fondo el caso concreto del gas de fotones que se encuentran en equilibrio termodinámico con las paredes de la cavidad óptica. Se pretende ahora determinar cuántos estados cuánticos están disponibles para ser ocupados para una determinada energía  $E$ .

$n_s$  **no** debe confundirse con  $n$ ;

$$g(E) \equiv \frac{dn_s}{dE}$$

$n \rightarrow$  Número de fotones (veremos mas adelante cómo en realidad es una densidad volumétrica).

$n_s \rightarrow$  Número de estados disponibles.

$dn_s$  es el número de estados cuánticos con energías comprendidas entre  $E$  y  $E + dE$ , y como es de esperar dependerá de la energía  $\rightarrow dn_s = dn_s(E) = g(E)dE$ .

Podemos reescribir como se muestra a continuación la ecuación (16);

$$dn(E) = dn_s(E) f_{BE}(E) \quad \text{es equivalente a} \quad dn(E) = \left[ \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1} \right] dE$$

Entonces, se pretende conocer la expresión de  $g(E)$ , para una cavidad de lado  $L$  y en su interior el gas de fotones. Para calcular el número de estados disponibles conviene razonar en términos de las funciones de onda que describen estas partículas.

Partiendo de la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Psi$$

Debemos entender que para una energía determinada, debemos contar cuantas funciones de onda están disponible (lo que realmente haremos será contar el número de ondas estacionarias confinadas dentro de la caja).

Para simplificar el problema consideremos 1 dimensión por el momento.

#### 4.1.1. 1 Dimensión

1D: La caja se vuelve una caja unidimensional de lado  $L$  (un segmento de longitud  $L$ ), y la ecuación de onda se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

La solución general de la ecuación de onda es:  $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(-kx - \omega t)}$ , una superposición de una onda que se propaga hacia la derecha y otra que se propaga hacia la izquierda respectivamente.

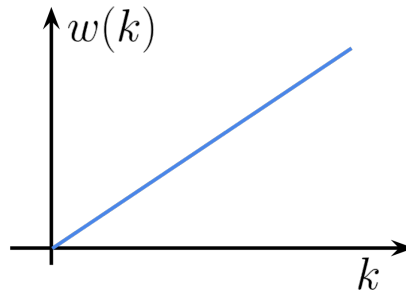
$A$  y  $B$  son parámetros a determinar a través de las condiciones de contorno, mientras que  $\omega$  y  $k$  tienen una relación entre ellos determinada por las características del medio (que en este caso concreto será el vacío).

Antes de aplicar las condiciones de contorno vamos a sustituir la solución en la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi \\ c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = c^2 (-k^2) \Psi \end{cases} \quad \rightarrow \quad -\omega^2 \Psi = c^2 (-k^2) \Psi \quad \rightarrow \quad \omega^2 = c^2 k^2 \quad \rightarrow \quad \omega(k) = ck$$

Hemos encontrado la relación de dispersión (relación entre  $\omega$  y  $k$ ) para los fotones en el vacío, la cual es lineal:

$$\omega(k) = ck$$



Volviendo al tema principal, aplicando las condiciones de contorno se determinan las

constantes  $A$  y  $B$ .

¿Qué tipo de condiciones de contorno se deben aplicar?. Hagamos un análisis cualitativo para determinar el tipo de condiciones de contorno.

La función de onda de una partícula entendida a través de la interpretación de Copenhague está directamente relacionada con la probabilidad de encontrar una partícula en las inmediaciones de un punto en cuestión en un tiempo determinado, esta probabilidad es directamente proporcional al modulo al cuadrado de la amplitud de la función de onda, a mayor amplitud, mayor es la probabilidad y al contrario, a menor amplitud, menor es la probabilidad de encontrar la partícula en las inmediaciones de dicho punto.

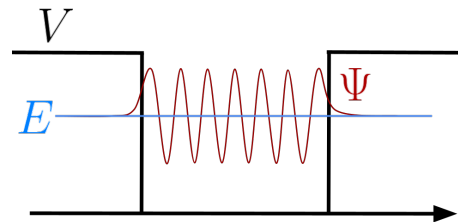
$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

$$P_V(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

Donde  $\rho(\vec{r}, t)$  es la densidad de probabilidad y  $P_V(t)$  la probabilidad de encontrar la partícula en un volumen  $V$ .

Podemos construir barreras de potencial  $V$  para confinar a las partículas y vetarlas de su presencia en algunas zonas del espacio, la zona del espacio donde la partícula está vetada viene caracterizada por un potencial que es mayor a la energía de la partícula en cuestión.



Hay un efecto cuántico que aparece en las inmediaciones de la interfase entre el espacio permitido y el prohibido para encontrar a la partícula, hay una cierta penetración de la función de onda que decae exponencialmente con la distancia en la zona prohibida que se hace más insignificante cuanto mayor sea la diferencia entre el potencial en la zona prohibida y la energía de la partícula (en el caso extremo de un potencial infinito, la penetración en la barrera es inexistente y por tanto, la amplitud de la función de onda es idénticamente nula tanto dentro de la zona prohibida como en la interfase entre las zonas permitida y prohibida). Vamos a considerar que el potencial que modeliza las paredes de la cavidad óptica es lo suficientemente alto como para despreciar el efecto cuántico de penetración en la barrera. De manera que las paredes las podemos considerar como impenetrables por los fotones. Además, la función de onda goza de la propiedad de continuidad en el espacio-tiempo, lo que lleva inevitablemente a la imposición de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet (o de primer tipo). La función de onda debe ser cero fuera de la cavidad pues los fotones no pueden tener presencia fuera, y en todo momento y lugar continua, esto lleva a que en el borde de la cavidad la función de onda deba de ser cero en todo momento. Con estas consideraciones obtenemos estados estacionarios dentro de la cavidad óptica, los cuales tienen la propiedad de que la amplitud de la función de onda es nula en los límites de la zona permitida.

$$\Psi(x = 0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \Psi(x = L, t) = 0$$

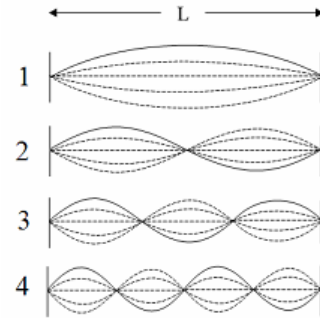
$$\Psi(x = 0, t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (A + B) = 0 \rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(x = L, t) &= Ae^{i(kL - \omega t)} - Ae^{i(-kL - \omega t)} = Ae^{-i\omega t} [e^{ikL} - e^{-ikL}] \\
 &= Ae^{-i\omega t} \left[ \cos(kL) + i \operatorname{sen}(kL) - \cos(-kL) - i \operatorname{sen}(-kL) \right] \\
 &= Ae^{-i\omega t} \left[ \cos(kL) + i \operatorname{sen}(kL) - \cos(kL) + i \operatorname{sen}(kL) \right] \\
 &= Ae^{-i\omega t} 2i \operatorname{sen}(kL) = 0 \\
 &\rightarrow \operatorname{sen}(kL) = 0 \leftrightarrow \boxed{k_n L = n\pi \quad n \in \mathbb{N}}
 \end{aligned} \tag{17}$$

El caso  $n = 0$  lleva a un número de onda nulo, lo que significa que no existiría la onda, con lo cual debemos excluir el cero. Entonces  $n$  pertenece al conjunto de los números naturales<sup>5</sup>.

Entonces los números de onda deben ser  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ;  $n \in \mathbb{N}$ . De esta manera los valores de  $k$  quedan discretizados y no cualquier valor de  $k$  está permitido.

Gráficamente las posibles formas de la función de onda son:



Si  $k_n = n(\frac{\pi}{L})$  y además  $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$  entonces;

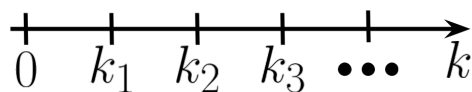
$$\lambda_n = 2\frac{L}{n} \rightarrow \frac{\lambda_n}{2}n = L$$

Esta última ecuación dice que  $L$  debe de ser un número natural de veces la semilongitud de onda (siempre para ondas estacionarias).

Con todo esto tenemos al final la función de onda estacionaria;

$$\Psi_n(x, t) = Ae^{-i\omega t} \left[ e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right] = Ae^{-i\omega t} 2i \operatorname{sen}(k_n x) \quad k_n = \frac{n\pi}{L}; \quad n \in \mathbb{N}$$

Entonces, en el espacio  $k$  (espacio recíproco), sólo algunos valores para  $k$  están permitidos, el conjunto de valores es discreto. Cada valor distinto de  $k$  en el espacio recíproco me identifica una onda en el espacio real, y la distancia entre dos valores de  $k$  consecutivos es de  $\Delta k = \pi/L$ .

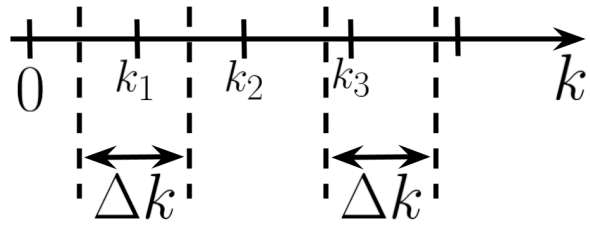


Hemos encontrado un modo para averiguar el número de estados disponibles en el espacio  $k$ , ya que:

<sup>5</sup>Los valores de  $n \notin \mathbb{Z}$  por que el valor  $k = k_i$  y el valor  $k = -k_i$  identifican la misma onda.

$$\underbrace{\frac{dn_S}{dk}} = \frac{1}{\Delta k}$$

El número de estados por unidad de volumen en el espacio  $k$  es 1 estado, por cada valor de  $\Delta k$ .



Para cada intervalo de  $\Delta k$  en el espacio recíproco, solo hay un posible estado.

Y así uno obtiene la densidad de estados en el espacio  $k$ , pero falta considerar los dos estados de polarización de la onda. Debido a que las ondas electromagnéticas son transversales, es decir, el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo magnético  $\vec{B}$  (perpendiculares entre sí) determinan en todo momento un plano perpendicular al vector de onda  $\vec{k}$  el cual identifica la dirección de propagación de la onda electromagnética (del fotón). Como el espacio donde varían estos vectores es una variedad lineal de dimensión dos, identificamos dos estados de polarización linealmente independientes en la onda electromagnética.

$$\frac{dn_S}{dk} = \frac{1}{\Delta k} \cdot 2$$

Esta multiplicidad está ligada al grado de libertad de la polarización, en el caso de la luz, es dos.

La densidad de estados al final queda:

$$\frac{dn_S}{dk} = \frac{1}{\Delta k} \cdot 2 = \frac{2L}{\pi}$$

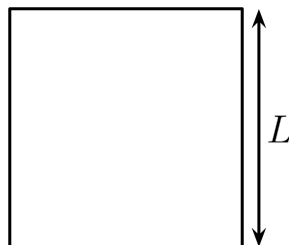
Ahora debemos ver qué ocurre en dos y tres dimensiones (2D y 3D).

### 4.1.2. 2 Dimensiones

La función de onda es ahora:

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)} + Be^{+i(-\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}$$

La cavidad óptica es un cuadrado de lado  $L$ .

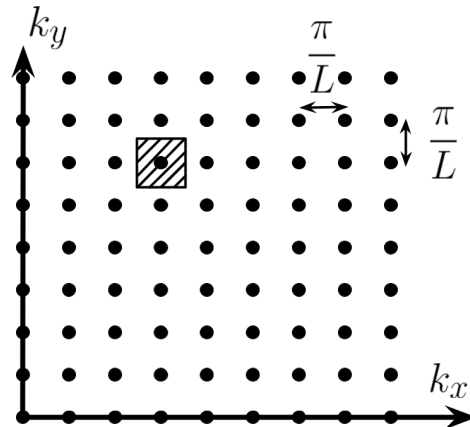


Tendremos en este caso una onda bidimensional (podríamos imaginarla como una membrana), así pues aparecen de modo natural dos conjuntos de valores de  $k \rightarrow \{k_x\}$  y  $\{k_y\}$ .

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L} \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L} \quad n_x, n_y \in \mathbb{N}$$

El espacio recíproco ya no será unidimensional, es bidimensional y se asemeja a una malla equiespaciada, donde cada vértice es un posible estado.

Un punto en este espacio no identifica una determinada posición en el espacio físico (espacio ordinario), representa una onda estacionaria, es decir, identifica un modo de vibración de la onda en el espacio real.



La densidad de estados en este caso sería:

$$\frac{dn_S}{dS_k} = \frac{1}{(\pi/L)^2} \cdot 2$$

La densidad de estados es el número de estados por unidad de área, es decir, 1 estado por cada área  $(\pi/L)^2$ , además hay que multiplicar por 2 debido a los dos estados posibles de polarización.

Nos da información sobre el número de estados cuánticos disponibles por unidad de volumen en el espacio  $K^2$ .

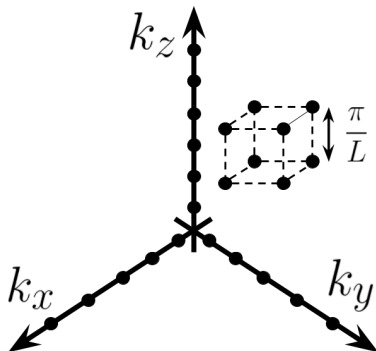
Denotaremos a la densidad de estados de la siguiente forma:

$$\frac{dn_S}{dS_k} = G(\vec{k}) = \frac{2}{(\pi/L)^2}$$

La cantidad denotada como  $dS_k$  no es más que un diferencial de superficie en el espacio bidimensional  $\vec{k}$ .

### 4.1.3. 3 Dimensiones

Parece lícito pensar que se puede extrapolar el resultado anterior para el caso de tres dimensiones.



$$G(\vec{k}) = 2 \left( \frac{L}{\pi} \right)^3$$

Nótese que la densidad de estados es una cantidad constante.

Hemos obtenido al final el número de estados cuánticos disponibles por unidad de volumen en el espacio recíproco tridimensional  $K^3$ , pero es más conveniente para su posterior manipulación expresar esta cantidad en función de la energía, y no de la cantidad denotada como  $k$ . Hemos partido de la cantidad  $k$  porque es la condición estacionaria quien nos ha vinculado los posibles estados, entonces es natural partir de  $k$ .

Afortunadamente  $k$  y la energía están relacionadas por la relación de dispersión, que para los fotones es  $w(k) = ck$ .

Aquí aparece una sutileza a la cual debemos prestar atención:

$$G(\vec{k}) = 2 \left( \frac{L}{\pi} \right)^3$$

$$w(k) = ck$$

Pero la  $k$  aquí presente es el módulo del vector  $\vec{k}$ .

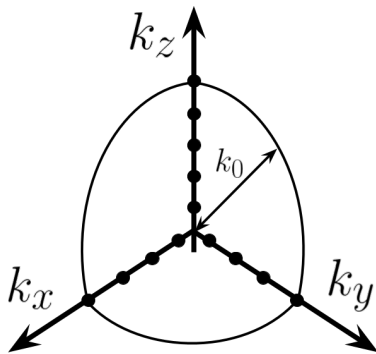
La dependencia en esta ecuación con  $k$  es vectorial.

$$k = |\vec{k}|$$

Hay muchos vectores  $\vec{k}$  que tienen el mismo módulo, todos esos vectores además, tendrán la misma frecuencia.

Entonces un valor determinado de frecuencia es correspondido por un conjunto de vectores  $\vec{k}$  (los cuales tienen todos un mismo módulo definido por  $k = w/c$ ). Esta multiplicidad debe aparecer en algún momento, y aparece mediante el siguiente razonamiento;

Vamos a considerar en el conteo de estados, todos los estados que tienen un  $|\vec{k}|$  comprendido entre 0 y un valor genérico  $k_0$ .



El conjunto de puntos en el espacio recíproco aquí planteado no es una superficie, es un volumen, concretamente un octavo de esfera.

$$\Delta\vec{k} = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi k_0^3$$

El número de estados posibles dentro del elemento de volumen considerado ( $\Delta\vec{k}$ ) se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta n_S = G(\vec{k}) \Delta\vec{k} = 2 \left( \frac{L}{\pi} \right)^3 \left( \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi k_0^3 \right) = \frac{L^3}{3\pi^2} k_0^3$$

Tenemos el número de estados que hay dentro del octante de esfera. Vamos ahora a definir una nueva densidad a partir de este dato, y la denotaremos como  $G(k)$ . No hay que confundirla con  $G(\vec{k})$ .

$$G(k) \equiv \frac{dn_S}{dk_0} = \frac{L^3}{3\pi^2} 3k_0^2 = \frac{L^3}{\pi^2} k_0^2$$

Cambiando el argumento de  $\vec{k}$  a  $k$  se entiende que es otra función distinta.

$$G(k) \equiv \frac{dn_S}{dk_0} = \frac{L^3}{\pi^2} k_0^2$$

$$dn_S = \frac{L^3}{\pi^2} k_0^2 dk_0$$

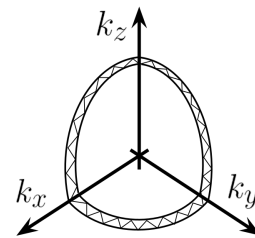
Esta es la densidad de estados cuánticos posibles por unidad de modulo de  $\vec{k}$ , es decir, por unidad de  $k = |\vec{k}|$ .

Esto es el número de estados correspondientes a un  $\vec{k}$  que tiene un modulo comprendido entre  $k_0$  y  $k_0 + dk_0$ .

A partir de ahora se usará principalmente la cantidad  $G(k)$ , y no vamos a prestar más atención a  $G(\vec{k})$ . Es usual encontrarse el subíndice en  $k_0$  omitido, pasando de  $k_0 \rightarrow k$ .

$$dn_S = \frac{L^3}{\pi^2} k^2 dk$$

Número de estados en la corteza:



Ahora tenemos todo lo necesario para calcular la densidad de estados por unidad de energía;

$$- \frac{dn_S}{dk} = \frac{L^3}{\pi^2} k^2$$

-  $\frac{dk}{dE}$  Se puede calcular a partir de la relación de dispersión.  $w = ck$

$$g(E) \equiv \frac{dn_S}{dE} = \frac{dn_S}{dk} \frac{dk}{dE}$$

$$E = h\nu = h \frac{w}{2\pi} = h \frac{ck}{2\pi} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{hc} E \Rightarrow \frac{dk}{dE} = \frac{2\pi}{hc} = \frac{1}{\hbar c}$$

Cantidad que se puede expresa en función de  $E$  usando  $k = \frac{E}{\hbar c}$

$$g(E) = \frac{dn_S}{dk} \frac{dk}{dE} = \frac{L^3}{\pi^2} k^2 \frac{1}{\hbar c}$$

$$g(E) = \left( \frac{L}{\hbar c} \right)^3 \left( \frac{E}{\pi} \right)^2$$

De esta manera queda respondida la pregunta: si  $E$  está comprendido entre  $E$  y  $E + dE$  ¿Cuántos estados disponibles hay en ese intervalo?

$$dn_S = g(E)dE = \left( \frac{L}{\hbar c} \right)^3 \left( \frac{E}{\pi} \right)^2 dE$$

Nótese la siguiente apreciación, la densidad de estados cuánticos  $g(E)$  es directamente proporcional a  $E^2$ . Este hecho nos dice que hay más estados permitidos en el intervalo de energía  $(100 \text{ eV}, 100 \text{ eV} + \epsilon)$  que en el mismo intervalo de energía  $(1 \text{ eV}, 1 \text{ eV} + \epsilon)$ . Nos damos cuenta que la densidad de estados en el espacio  $k$  es constante, pero en el espacio de la energía **no** es constante.



$$g(E) \propto E^2$$

Además, también es proporcional a  $L^3$ ,  $g(E) \propto L^3$

Hasta ahora  $n_S$  era el número de estados disponibles (cantidad adimensional  $\rightarrow [n_S] = 1$ ), pero es conveniente redefinirla como el número de estados por unidad de volumen en el espacio real. La nomenclatura utilizada va a ser la siguiente;  $N_S$  va a tomar el papel del antiguo  $n_S$  y  $n_S$  va a ser a partir de ahora el antiguo  $n_S$  dividido por el volumen.

Antiguo	$\rightarrow$	Nuevo
$n_S$		$N_S$
$n_S/L^3$		$n_S$

$$dn_S = \frac{dN_S}{L^3} = \frac{E^2}{\pi^2(\hbar c)^3} dE \quad \text{Ahora } [n_S] = \text{cm}^{-3}$$

Ahora **esta cantidad** es el número de estados disponibles por unidad de volumen y por unidad de energía, es en definitiva una densidad doble, la cual hemos llamado  $g(E)$ .

$$g(E) = \frac{dn_S}{dE} = \frac{E^2}{\pi^2(\hbar c)^3} \quad [g] = \frac{\text{J}^2}{(\text{J s m s}^{-1})^3} = \frac{1}{\text{J m}^3}$$

Como ahora  $g(E)$  es una densidad doble, por unidad de energía y de volumen, la cantidad  $dn$  que antes era el número de fotones en la cavidad va tomar un nuevo significado:

$$dn = g(E) f_{BE}(E) dE = \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1}$$

Ahora  $n$  va a ser el número de fotones por unidad de volumen en el espacio físico. Dejar esta diferencia clara es fundamental.

$dn = \frac{E^2}{\pi^2(\hbar c)^3 \left[ \exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1 \right]} dE$ <p style="text-align: center; margin-top: 0;">Densidad de fotones por unidad de volumen en el espacio físico</p>	$\frac{dn}{dE} = \frac{E^2}{\pi^2(\hbar c)^3 \left[ \exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1 \right]}$ <p style="text-align: center; margin-top: 0;">Densidad de fotones por unidad de volumen en el espacio físico y unidad de energía</p>
---	---

Usando la relación  $E = h\nu$ , se puede expresar esta última cantidad en función de la frecuencia en lugar de la energía, así podríamos saber cuántos fotones hay con frecuencias comprendidas entre  $\nu_1$  y  $\nu_2$ ;

$$\frac{dn}{d\nu} = \frac{dn dE}{dE d\nu} = \frac{E^2}{\pi^2(\hbar c)^3 \left[ \exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1 \right]} h = \frac{(h\nu)^2}{\pi^2(\hbar c)^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right]} h$$

$$\frac{dn}{d\nu}(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

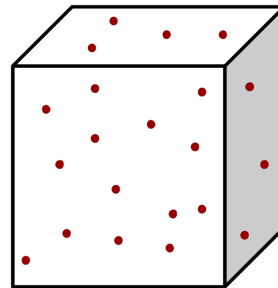
Ecuación que el 19 de octubre de 1900 Max Planck presentó en la Sociedad de Física de Berlín en un artículo en el que logró explicitar una nueva ley de distribución que, hasta la fecha, ha resistido todos los hechos experimentales. Esta es la ecuación de Planck que describe el comportamiento del cuerpo negro (una cavidad de emisión y absorción perfecta).

Debido a la dificultad que presenta el conteo de fotones y con el objetivo de poder verificar experimentalmente la veracidad de esta teoría, es más conveniente hacer un cambio de variable orientado a la energía. Sabemos que la energía del fotón es  $E = h\nu$  y no es complicado calcular la densidad de energía por unidad de frecuencia y unidad de volumen en el espacio real.

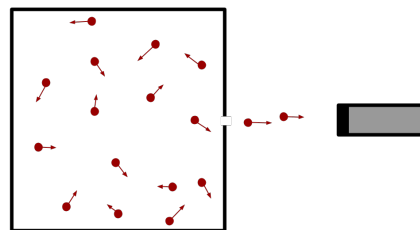
$$\underbrace{\frac{dE}{d\nu}}_{\substack{\text{Cuanta energía hay} \\ \text{por unidad de frecuencia} \\ \text{y por unidad de volumen} \\ \text{en el espacio real.}}} \equiv \rho_E(\nu) = \frac{dn}{d\nu} E = \frac{dn}{d\nu} h\nu = \underbrace{\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}}_{\substack{\text{Esto es un buen} \\ \text{observable físico.}}}$$

Para verificar si esta expresión caracteriza de verdad los fotones de una cavidad óptica sólo hay que hacer el siguiente experimento.

Construyo una cavidad óptica y la lleno de fotones.



Seguidamente se abre un pequeño orificio en la cavidad y se coloca un detector delante de él.



Un detector de fotones mide la intensidad lumínica (también conocida como intensidad radiante), que es un flujo de energía por unidad de ángulo sólido.

$$I_\Omega = \frac{d\phi}{d\Omega}$$

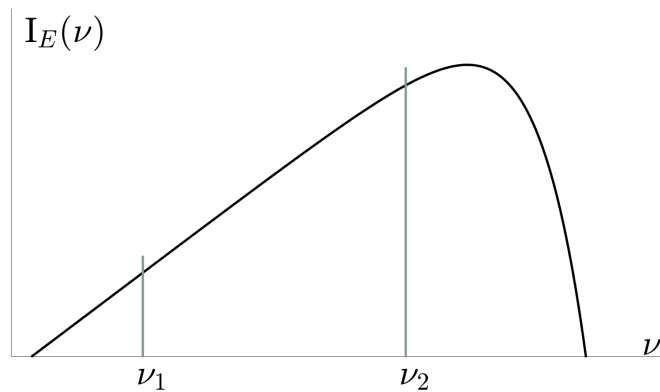
Donde  $\Omega$  hace referencia al ángulo sólido y señala que es una cantidad direccional y  $\phi$  es el flujo radiante emitido por una fuente casi puntual. El flujo de cualquier magnitud es el producto de una densidad por una velocidad  $\phi_x = \rho_x v$ , donde  $v$  es la velocidad.

Entonces la intensidad de la radiación por unidad de frecuencia que emerge de la cavidad óptica (que recibe el nombre de cuerpo negro) es:

$$I_E(\nu) = \frac{1}{4\pi} \underbrace{\rho_E(\nu) c}_{\phi} \quad \begin{array}{l} \text{Es la intensidad por unidad de volumen, por unidad de fre-} \\ \text{cuencia y por unidad de ángulo sólido.} \\ \text{(El } 4\pi \text{ viene del ángulo sólido total)} \end{array}$$

$$I_E(\nu) = \frac{c}{4\pi} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad [I] = \frac{W}{m^2 \text{ Hz}}$$

La pinta que tiene  $I_E(\nu)$  es:



Esta es la intensidad que debería registrar el detector al hacer el experimento.



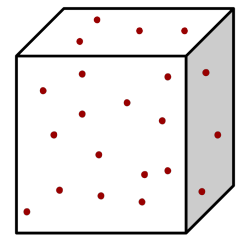
## 5. Emisión estimulada

La ecuación que describe la densidad de energía por unidad de frecuencia y unidad de volumen en el espacio real que caracteriza la radiación electromagnética confinada dentro de la cavidad óptica es:

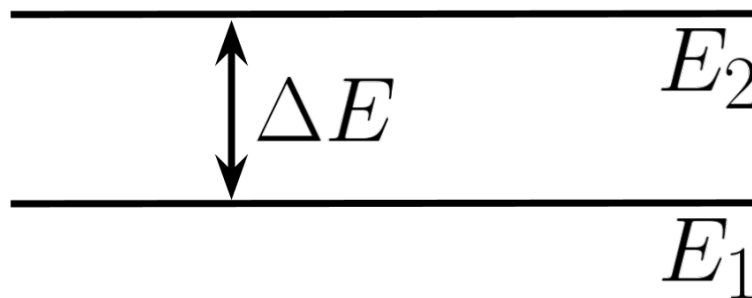
$$\rho_E(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

Einstein hizo un estudio mirando un poco más de cerca la cavidad. Consideró que:

- Las paredes son un cuerpo negro ideal (intercambian energía en modo ideal con el campo electromagnético que está contenido dentro de él).
- Las paredes se encuentran a una temperatura  $T$ .
- La cavidad está en equilibrio termodinámico con el gas.

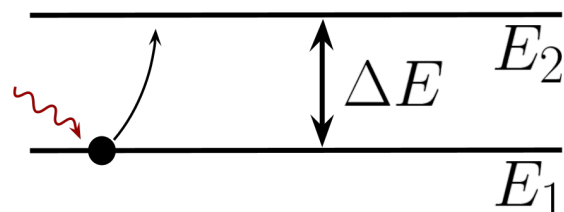


Einstein sabía que las paredes son sólidas, hechas por átomos y moléculas que intercambian energía con el gas de fotones. Simplificando el problema a su mínima expresión pero siendo capaz de plasmar el comportamiento real con gran fidelidad, Einstein consideró en un principio que los constituyentes de las paredes sólo iban a tener dos niveles energéticos posibles:



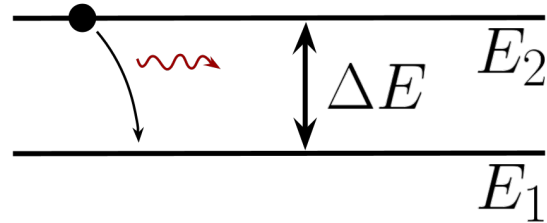
Se puede modelizar cada constituyente de la pared como un sistema físico que puede transitar entre dos niveles, las paredes del cuerpo negro intercambian energía con el gas de fotones mediante o bien la absorción o bien la emisión de energía en forma de fotones.

Cuando un fotón es absorbido por la pared, el componente de la pared que ha absorbido dicho fotón transita desde su nivel fundamental  $E_1$  a un estado excitado  $E_2$ .



Es por esta razón por la que el número medio de fotones  $N = \sum_i n_i$  no es una cantidad constante.

Eventualmente el constituyente de la pared se desexcitará emitiendo así un fotón y transicionará del nivel  $E_2$  al  $E_1$ .



Este sistema de dos niveles está caracterizado por la diferencia de energía  $\Delta E$ , que debe coincidir con la energía del fotón para que éste sea absorbido  $E = h\nu$ .

$$\Delta E = h\nu$$

De esta manera distintos materiales (tipo de osciladores) tendrán resonancias con distintos tipos de fotones (distintas componentes espectrales del espectro electromagnético).

### 5.1. Coeficientes de emisión y absorción

Definamos dos cantidades relevantes:

- $n_1$  número de partículas de la pared en el nivel  $E_1$
- $n_2$  número de partículas de la pared en el nivel  $E_2$

Cuando el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, ambas cantidades son macroscopicamente constantes en el tiempo, pero microscopicamente hay una continua transición de partículas entre los niveles, excitaciones y desexcitaciones, dicho de otra manera, los valores promedios son independientes del tiempo en el equilibrio termodinámico.

Entonces hay un  $\frac{dn_2}{dt}$  debido a las transiciones del nivel 1 al 2 (absorción) no nulo.

$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Absorción}}$	Si este numero vale 1000, quiere decir que en cada segundo se absorben 1000 fotones y 1000 elementos constituyentes de la pared transicionan al nivel excitado $E_2$ .
---	--

El fenómeno de emisión de fotones también varía la población  $n_2$ :

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emisión espontánea}}$$

Einstein se preguntó de qué dependían estas dos cantidades;

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emisión espontánea}} \propto n_2$$

Es una ley de decaimiento caracterizada por una cierta probabilidad. La constante de proporcionalidad será negativa, ya que va a disminuir  $n_2$ .

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Absorción}} \propto n_1, \rho_E(\nu)$$

Está claro que a mayor  $n_1$ , más constituyentes pueden transicionar. Pero además, a más radiación electromagnética (más fotones), más son absorbidos y más transiciones ocurren por unidad de tiempo del nivel 1 al 2.

Se puede entonces escribir lo siguiente:

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Abs.}} = B_{12} n_1 \rho_E(\nu)$$

Así aparece el primer coeficiente de Einstein  $B_{12}$ , coeficiente que es del todo independiente de las variables características del sistema y que va a definir la probabilidad de una transición, es decir, contiene la física de la transición.

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}} = -A_{21} n_2$$

Las cantidades  $A_{21}$  y  $B_{12}$  son cantidades definidas positivas que contienen la física del problema y son características del sistema considerado.

Entonces, la variación temporal promedio de la población  $n_2$  estaría dada por:

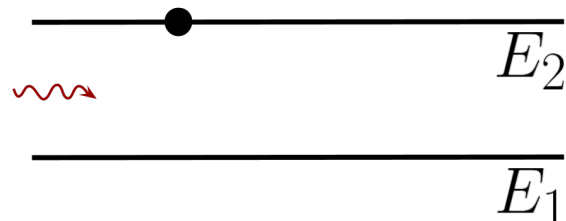
$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Total}} = \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Abs.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}}$$

Que, en el equilibrio termodinámico, debe de ser nula;

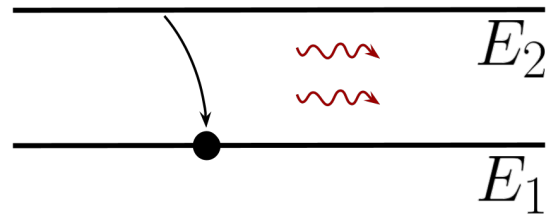
$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Total}} = \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Abs.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}} = 0$$

Este cálculo lo puede hacer cualquiera, pero he aquí la contribución del genio, Einstein hipotizó un tercer mecanismo, sería el segundo mecanismo responsable de variar la población del nivel excitado, un segundo mecanismo de emisión distinto al de emisión espontánea. Este nuevo mecanismo considera la interacción de un nivel excitado con un fotón, donde el nivel excitado viene estimulado con la llegada del fotón, desexcitándose a su paso y, por ende, emitiendo un nuevo fotón.

El constituyente de la pared que está excitado puede emitir en **modo estimulado** un nuevo fotón (desexcitándose) ante la presencia de un fotón cuya frecuencia sea  $\nu = \Delta E/h$ , de esta manera se da el fenómeno de resonancia.



Entonces salen dos fotones y el constituyente de la pared queda desexcitado.



Este proceso fue denominado **emisión estimulada** y la emisión considerada anteriormente queda denominada como **emisión espontánea**.

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2\rightarrow 1}^{\text{Emisión Estimulada}} \propto n_2 \rho_E(\nu) \quad \text{A más población en } n_2 \text{ más emisión estimulada, a más fotones más emisión estimulada.}$$

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2\rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}} = -B_{21} n_2 \rho_E(\nu)$$

Tenemos así tres coeficientes de Einstein;  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  y  $B_{12}$ , donde las "B" aparecen acompañadas de  $\rho_E(\nu)$ .

Entonces en el balance hay tres términos:

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Total}} = \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1\rightarrow 2}^{\text{Abs.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2\rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2\rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}$$

De la condición de equilibrio termodinámico podemos sacar una relación entre los tres coeficientes y la densidad de energía por unidad de frecuencia y unidad de volumen;

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Total}} = 0 &= \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1\rightarrow 2}^{\text{Abs.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2\rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2\rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}} \\ &= B_{12} n_1 \rho_E(\nu) - A_{21} n_2 - B_{21} n_2 \rho_E(\nu) \end{aligned} \quad (18)$$

Despejando  $\rho_E(\nu)$ :

$$\rho_E(\nu) = \frac{A_{21} n_2}{B_{12} n_1 - B_{21} n_2} \quad \text{Esta igualdad sólo se cumple en el equilibrio termodinámico}$$

Llegados a este punto Einstein hizo una hipótesis bastante arbitraria, consideró la siguiente aproximación:

*El sistema termodinámico representado por las paredes de la cavidad es un sistema suficientemente diluido como para ser descrito por la estadística de Boltzmann.*

Veamos a dónde conduce esta hipótesis.



Teniendo en cuenta que  $\Delta E = h\nu$  y considerando válida la hipótesis anterior y que la degeneración de niveles energéticos contiguos es aproximadamente la misma, de la estadística de Boltzmann sacamos lo siguiente:

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

Esta es la densidad de fotones a la que se llega:

$$\rho_E(\nu) = \frac{A_{21}/B_{12}}{\frac{n_1}{n_2} - \frac{B_{21}}{B_{12}}} = \frac{A_{21}/B_{12}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - \frac{B_{21}}{B_{12}}}$$

Podemos ahora comparar esta densidad de fotones con la formula de Planck:

$$\rho_E(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \qquad \rho_E(\nu) = \frac{A_{21}/B_{12}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - \frac{B_{21}}{B_{12}}}$$

Igualando ambas expresiones sacamos que:

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = 1 \qquad \text{Los coeficientes probabilísticos que contienen la física de los procesos de emisión estimulada y de absorción deben ser iguales.}$$

Esto quiere decir que la probabilidad de absorber un fotón por unidad de población  $n_1$  y por unidad de densidad energética del campo electromagnético (absorción) es la misma que la probabilidad de emitir un fotón por unidad de población  $n_2$  y por unidad de densidad energética del campo electromagnético (emisión estimulada).

$$B_{12} = B_{21}$$

Además se obtiene que:

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \qquad \text{Encontrando así un modo de definir estas constantes probabilísticas.}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

La segunda parte de la igualdad anterior nos proporciona la relación entre el proceso de emisión espontánea y el de emisión estimulada.

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

Nótese que la relación entre  $A_{21}$  y  $B_{21}$  **no** es constante, ya que tiene una dependencia con  $\nu^3$ ; para una determinada frecuencia sí que es una relación constante.

En un caso más realista, con un sistema con múltiples niveles energéticos no equiespaciados, tendremos la posibilidad de usar los niveles energéticos que deseemos siempre y cuando usemos fotones cuya energía coincida con la diferencia de energía de los dos niveles deseados. Al cambiar la frecuencia del fotón, cambia su energía y entrará en resonancia con otros dos niveles energéticos distintos del sistema  $E'_1$  y  $E'_2$  tales que su diferencia  $\Delta E'$  esté en resonancia con el campo electromagnético  $\rightarrow \Delta E' = h\nu'$ .

Volviendo al caso del sistema con dos niveles, si calculamos la relación entre el ritmo de cambio en la población  $n_2$  debido a la emisión espontánea y el ritmo de la población  $n_2$  debido a la emisión estimulada:

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}} \right| = \frac{A_{21} n_2}{B_{21} n_2 \rho_E(\nu)} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\rho_E(\nu)} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(\rho_E(\nu)\right)^{-1} = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1$$

En el equilibrio termodinámico tenemos que:

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}} \right| = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \quad \text{Expresión dependiente de la frecuencia } \nu.$$

Para comprender mejor este resultado podemos considerar el siguiente ejercicio, consideremos temperatura ambiente  $T_{amb}$  y una frecuencia  $\nu$  en el visible  $h\nu_{verde} \sim 2 \text{ eV}$ . La relación anterior tendrá un valor de:

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}} \right| = \exp\left(\frac{h \nu_{verde}}{k_B T_{amb}}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{2 \text{ eV}}{0,026 \text{ eV}}\right) - 1 \approx 2,5 \cdot 10^{33} - 1 \approx 2,5 \cdot 10^{33}$$

El ratio de la emisión espontánea dividido por el de la emisión estimulada es verdaderamente grande, esto significa que si estamos a temperatura ambiente y se considera la radiación verde, ocurre que las paredes internas de la cavidad emiten luz casi exclusivamente por el mecanismo de emisión espontánea. La emisión estimulada es irrelevante en esas condiciones.

Esto cambia a medida que la frecuencia baja y/o la temperatura aumenta, incrementándose progresivamente la fracción de emisión estimulada respecto a la espontánea.

Calculemos ahora otra relación:

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Total}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Absorción}}} \right| \quad \text{La razón entre el ritmo de emisión total (espontánea y estimulada) y el ritmo de absorción debidos a las paredes de la cavidad.}$$

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Total}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Absorción}}} \right| = \left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Absorción}}} \right| = \frac{A_{21} n_2 + B_{21} n_2 \rho_E(\nu)}{B_{12} n_1 \rho_E(\nu)} =$$

$$= \frac{A_{21} n_2}{B_{21} n_1 \rho_E(\nu)} + \frac{B_{21} n_2 \rho_E(\nu)}{B_{21} n_1 \rho_E(\nu)} = \frac{A_{21} n_2}{B_{21} n_1 \rho_E(\nu)} + \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \left[ \frac{A_{21}}{B_{12} \rho_E(\nu)} + 1 \right] =$$

$$\left( \text{Tenemos el valor de } \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right)$$

$$= \frac{n_2}{n_1} \left\{ \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right] + 1 \right\} = \frac{n_2}{n_1} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) =$$

Si volvemos a considerar que se puede aplicar la estadística clásica de Boltzmann donde:

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) = 1$$

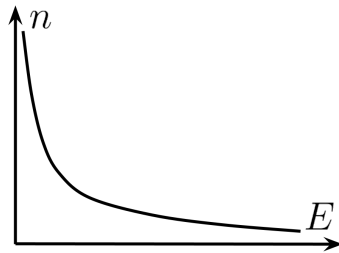
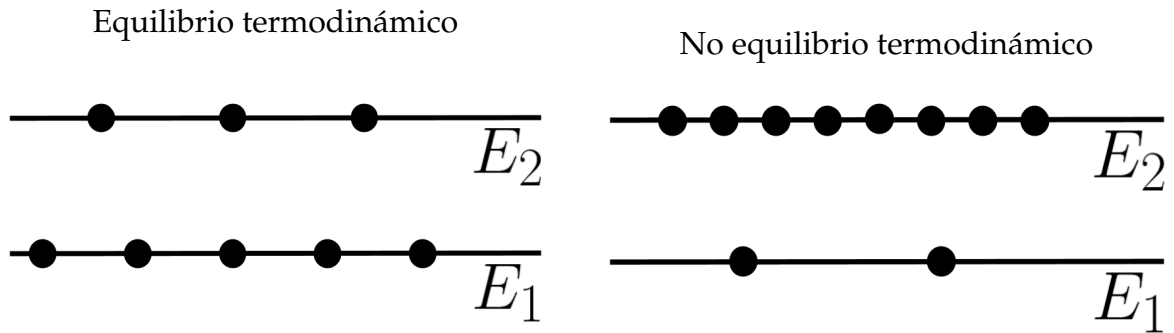
Este resultado nos dice que, lo que se absorbe por segundo y lo que se emite por segundo es lo mismo. Esto es justo la condición de equilibrio termodinámico.

Ha salido una tautología, pero sólo es una tautología en el caso de considerar el equilibrio termodinámico, si no estamos en equilibrio termodinámico la siguiente relación sigue siendo válida:

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Total}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2}^{\text{Absorción}}} \right| = \frac{n_2}{n_1} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

Podríamos idear un mecanismo para empujar al sistema fuera del equilibrio termodinámico. Si llevamos al sistema a una situación en la que  $\frac{n_2}{n_1} \neq \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$ , es decir, a una situación en la que  $\frac{n_2}{n_1}$  valga algo distinto a lo que debería de valer en el equilibrio termodinámico, el sistema rápidamente tenderá a volver a su estado de equilibrio, pero si forzamos de manera externa a que se quede fuera del equilibrio termodinámico, llegaríamos a un estado estacionario de no equilibrio del cual podemos sacar provecho.

En las siguientes imágenes se muestran poblaciones típicas en condiciones de equilibrio termodinámico y en condiciones de no equilibrio, en el primer caso la población de niveles energéticos inferiores es siempre mayor que la población de niveles superiores, mientras que una situación típica de no equilibrio sería la contraria, los niveles de energías más altas tendrían una mayor población que los niveles de menor energías.



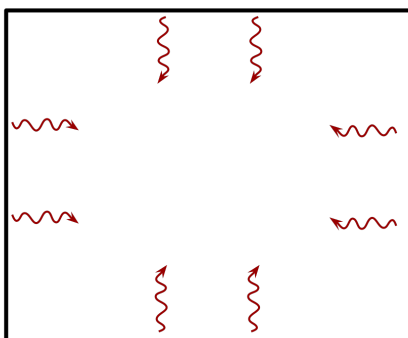
$$n_2 > n_1$$

Si  $n_2 > n_1$  entonces  $\frac{n_2}{n_1} > 1 \rightarrow \left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Emi. Total}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Absorción}}} \right| = \underbrace{\frac{n_2}{n_1} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}_{\text{Entonces esto es } > 1} > 1$

Lo que quiere decir que hemos puesto al sistema en una situación en la cual el ritmo de emisión total es mayor que el ritmo de absorción.

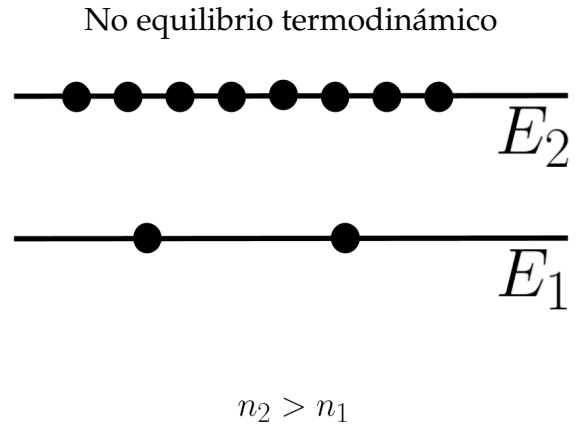
$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Emisión Total}} > \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{Absorción}}$$

La cavidad óptica se vuelve una cavidad activa desde el punto de vista de la radiación. Se convierte en una cavidad cuyas paredes emiten más radiación (fotones) de la que absorben.

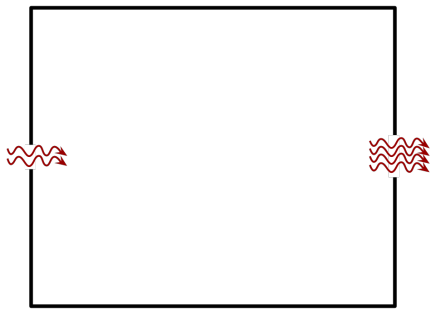


Este tipo de situación parece estar violando el principio de conservación de la energía. Pero no es así, porque para empujar al sistema fuera del equilibrio termodinámico se requiere de esa energía que ahora se está emitiendo.

La situación fuera del equilibrio termodinámico se denomina **inversión de población** y no se debe olvidar que promover a los constituyentes del material a niveles más altos de energía tiene un coste energético, es decir, crear una situación de inversión de población requiere de una energía que hay que aportar.



La cavidad óptica es "una cavidad activa" en el sentido de que si yo mando radiación electromagnética (meto fotones), desde la cavidad va a salir más radiación que la que entró. La densidad de radiación en su interior va a incrementarse.



$\rho_E(\nu)$  crece si la cavidad es activa.

Volvamos a ver el comportamiento de  $\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}} \right|$  pero ahora fuera del equilibrio termodinámico.

$$\left| \frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Esp.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1}^{\text{Emi. Est.}}} \right| = \frac{A_{21}}{B_{21} \rho_E(\nu)}$$

Si aumenta  $\rho_E(\nu)$  vemos que la razón debe disminuir.

Esto significa que el ritmo de emisión espontánea respecto al ritmo de emisión estimulada decrece, o lo que es lo mismo, **el ritmo de emisión estimulada respecto al ritmo de emisión espontánea esta creciendo.**

Cuando empujamos el sistema a un punto de no equilibrio termodinámico, estamos aumentando las emisiones de la radiación en la cavidad respecto a la absorción, y además están aumentando las emisiones estimuladas respecto a las emisiones espontáneas. Esto es la base del funcionamiento del láser.



## 6. El láser

Tras el desarrollo del formalismo y dar la atención merecida al concepto de emisión estimulada, se comenzó a teorizar y luego a realizar los láseres (LASER) acrónimo del inglés Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (amplificación de luz por emisión estimulada de radiación).

Si tengo una cavidad de un material y consigo realizar la condición de inversión de población, sabemos que si incide radiación electromagnética (fotones) de energía similar a una transición del constituyente de la pared ( $\Delta E = h\nu$ ), se obtiene que de la cavidad sale más radiación de la que entra.

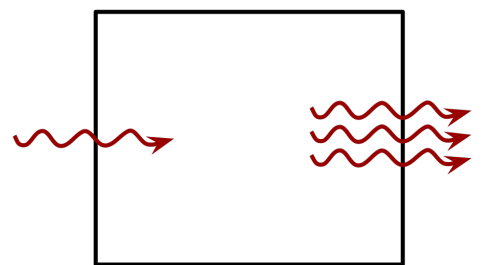
Un componente de la pared en el estado excitado tras un cierto intervalo de tiempo característico se desexcita emitiendo así un fotón, pero emite en modo estimulado antes si le llega un fotón con energía  $E_2 - E_1$ . Entonces el fotón estimulante (que no se absorbe, simplemente pasa) es acompañado de otro fotón igual a él.

Ambos fotones tienen la misma energía (requisito para que se dé la emisión estimulada), además el fotón emitido por la estimulación tiene la misma dirección que el fotón estimulante y por último ambos fotones están en fase entre sí, característica muy importante de la radiación láser. En pocas palabras, el fotón creado por este proceso es un clon del fotón estimulador.

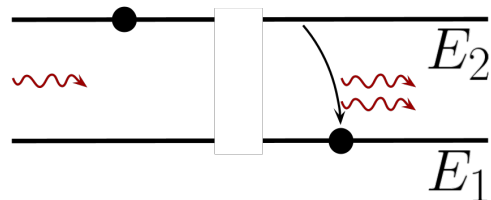
En resumen, la radiación saliente goza de unas características únicas, características las cuales han sido aprovechadas para desarrollar todo tipo de tecnologías.

- **Es altamente monocromática:** radiación compuesta de ondas de la misma longitud de onda.
- **Es coherente:** las ondas mantienen la fase relativa al desplazarse. Al resto de radiaciones ópticas se las denomina incoherentes.
- **Es unidireccional:** al alejarse de la fuente, la dispersión de la radiación es mínima, idealmente nula.

Estas características hacen que la radiación láser pueda lograr densidades de energía muy elevadas, que casi no disminuyen al aumentar la distancia a la fuente. Por ello el láser se ha convertido en una herramienta muy utilizada en la tecnología, a nivel industrial, médico, de investigación, comunicaciones, etc. y cada vez se utiliza más. Pero estas características hacen también que tenga unos efectos potencialmente dañinos en la salud si incide en algún tejido vivo.

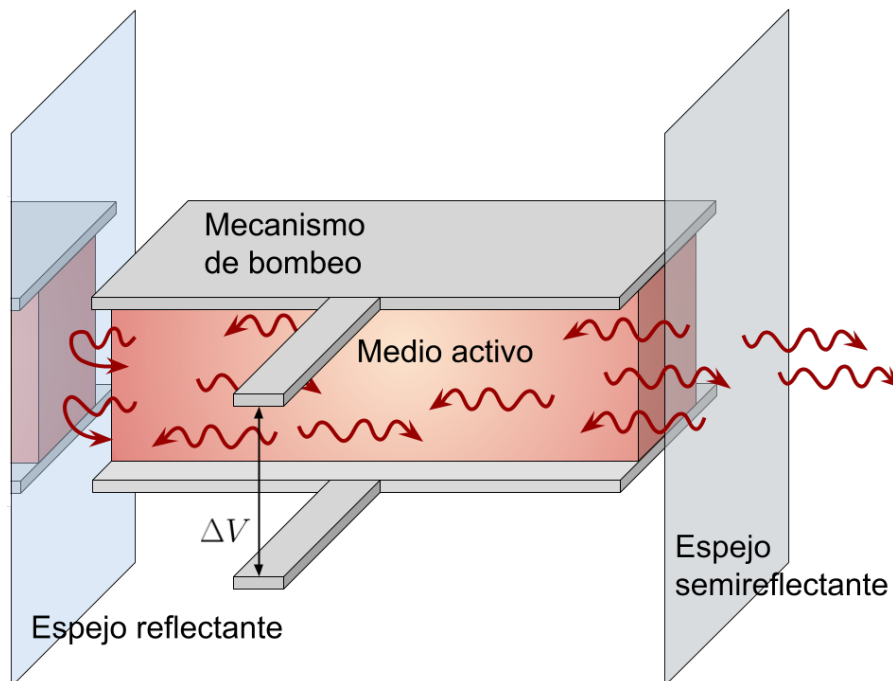


Inversión de población



## 6.1. Estructura del láser

Una vez estudiado los fundamentos físicos del láser, no es difícil imaginar que cualquier láser fabricado por el hombre debe tener al menos tres elementos fundamentales: un medio activo, un sistema de bombeo y una cavidad resonante.



- **El medio activo es el material** (sólido, líquido o gas) que emite la luz. Para que emita luz el medio activo hay que excitarlo de alguna manera con el objetivo de mantenerlo en inversión de población, ese es el cometido del sistema de bombeo.
- **El sistema de bombeo** puede consistir en otro láser, una lámpara convencional, o una corriente o descarga eléctrica, dependiendo del tipo de láser.
- **La cavidad resonante** se debe entender como una parte del láser que tiene como finalidad amplificar la radiación electromagnética que produce el medio activo. Con este objetivo uno puede imaginar como el medio activo es colocado entre dos espejos que forman la cavidad resonante, de esta manera la luz rebota entre los dos espejos y ayuda a la amplificación del mismo modo que la caja de resonancia de una guitarra amplifica las ondas acústicas. Uno de los espejos debe ser semi-reflectante para que parte de la luz amplificada salga de la cavidad resonante en forma de haz.

Cualquier láser debe tener al menos estos tres elementos, y de todos ellos es el medio activo el protagonista, pues sólo debidamente bombeado (es decir, imponerle al medio activo unas condiciones tales que favorezcan la inversión de población y la emisión estimulada) devuelve la radiaciones láser.

A partir de estos tres elementos básicos se han construido láseres más sofisticados. Añadiendo otros dispositivos intracavidad es posible modificar las características de la luz emitida (longitud de onda, pulsación, etc.) o elementos externos a la cavidad



para amplificar la luz (a través de otro medio activo con su correspondiente bombeo) o modificar la duración de pulso, tasa de repetición, longitud de onda, polarización, etc.

## 6.2. Clasificación de los láseres

Los láseres se pueden clasificar según diferentes parámetros, de todos ellos los más usados son el tipo de medio de amplificación de la luz y la duración de la emisión del láser.

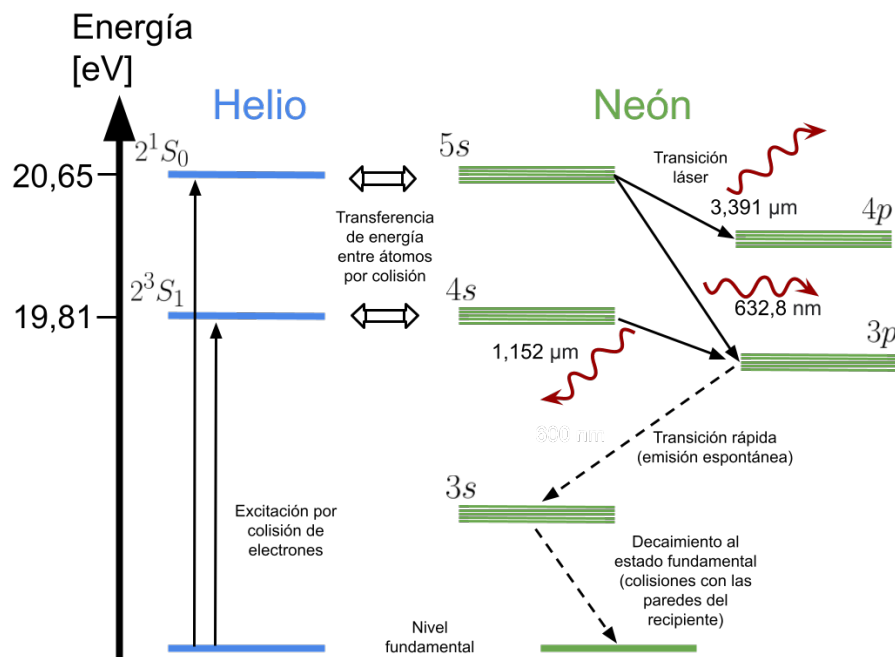
Como etiqueta adicional, diremos que un láser es sintonizable cuando su longitud de onda emitida se pueda alterar de forma controlada, ya sea mediante el sistema de bombeo u otros mecanismos.

### 6.2.1. Tipos de láser según el medio

Los láseres según el tipo de medio activo que produzca la radiación pueden ser:

- **Láseres de estado sólido.** Tienen un medio activo distribuido en una matriz sólida, por ejemplo, los láseres de rubí o neodimio-YAG (granate de itrio y aluminio). El láser de neodimio-YAG emite luz infrarroja de 1.064 micrómetros de longitud de onda. Entre sus aplicaciones se incluyen el procesamiento de materiales, tecnologías de medición, espectroscopía ultrarrápida, microscopía y espectroscopía multifotón.
- **Láseres de gas.** El haz láser es generado mediante una descarga eléctrica en un medio gaseoso. El tipo de gas utilizado determina la longitud de onda, la potencia y el modo de operación del láser. Técnicamente es posible conseguir un amplio rango de longitudes de onda y características radiantes.

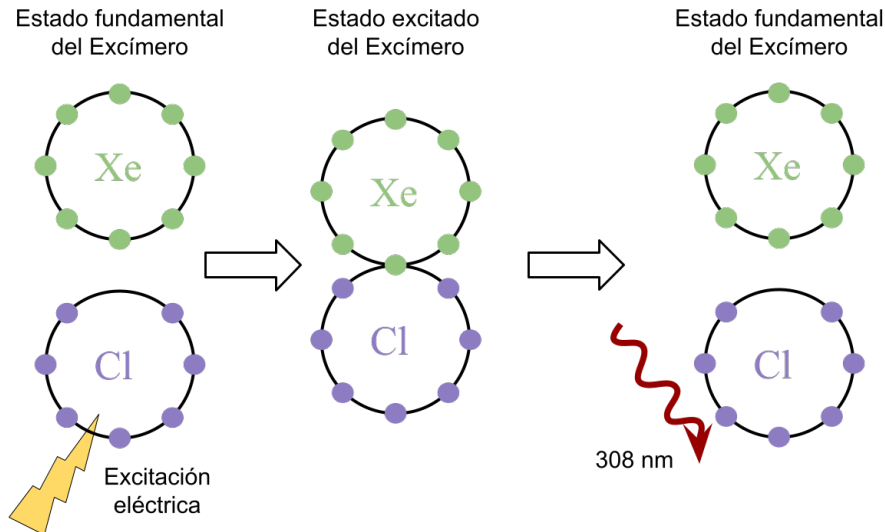
El láser de helio-neón (HeNe), es el láser de gas más utilizado y fue el primero en ser construido, seguido del de monóxido de carbono y del de nitrógeno molecular y el rendimiento generalmente se degrada con el uso a largo plazo. El proceso de emisión de fotones en el láser de helio-neón comienza con una descarga eléctrica, el alto voltaje aplicado provoca la aceleración de los electrones desde el cátodo hacia el ánodo, estos electrones colisionan con los átomos de helio y les transfieren su energía cinética quedando así excitados. Los átomos de helio excitados colisionan con los átomos de neón y les transfieren la energía de la excitación quedando así el neón excitado. Rápidamente el neón se desexcita mediante una transición que emite el fotón láser y quedando en otro estado excitado de menor energía. Después de esta transición láser se produce una rápida caída del neón al estado fundamental gracias a las colisiones de los átomos de neón con las paredes del recipiente. Nótese que es el neón quien emite la luz y el helio no participa en el proceso láser, pero aumenta el rendimiento de la excitación del neón de modo que el rendimiento del proceso aumenta en un factor de alrededor de 200.



Algunas aplicaciones típicas de estos láseres son el procesamiento de materiales, tecnologías de medición, e interferometría. Otro láser muy importante es el de  $\text{CO}_2$ , que emite energía en el infrarrojo lejano, 10.6 micrómetros, y se utiliza para cortar materiales duros.

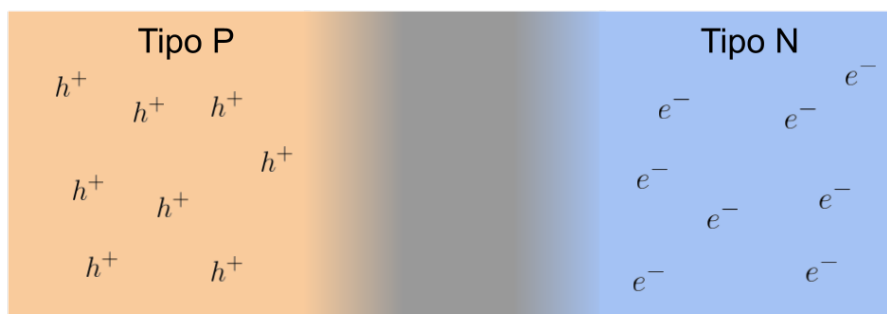
- Láser de excímeros:** Estos láseres se caracterizan por crear fotones a partir de transiciones electrónicas de moléculas excimer (moléculas que existen solo en estados electrónicamente excitados). El término "excímer" significa dímero excitado y se refiere al tipo de material utilizado como medio activo. El dímero es una molécula de vida corta (nanosegundos) formada a partir de dos átomos, al menos uno de los cuales está en un estado electrónico excitado. En condiciones normales estos dos átomos no formarían un enlace químico entre ellos, pero debido a que al menos uno de ellos está excitado electrónicamente (debido a un estímulo eléctrico externo por ejemplo), son capaces de formar brevemente una molécula (estado excitado del dímero).

Es común ver entre los láseres de excímeros el uso de los gases nobles (argón, kriptón, xenón) junto a elementos halógenos (bromo, flúor, cloro), ya que en circunstancias normales no se crearía la molécula  $\text{ArCl}$ , pero en el estado excitado (causado por descargas eléctricas o haces de electrones de alta energía), pueden formar moléculas temporalmente asociadas con ellos mismos o con los halógenos presentes. La aparición de estas moléculas (los dos átomos en el estado excitado de unión, es decir, enlazados/unidos) crea automáticamente la inversión de población entre los dos niveles de energía de la molécula. Los excímeros se desintegran rápidamente en sus componentes atómicos (en picosegundos) ya que esa situación es fuertemente repulsiva, haciendo que la molécula pase del estado excitado de unión al estado fundamental de átomos separados, emitiendo al mismo tiempo el exceso de energía en forma de radiación electromagnética (fotón).



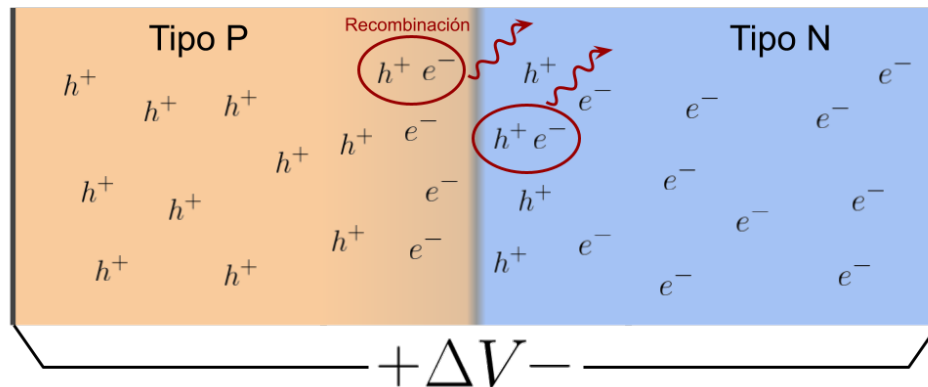
La aplicación industrial más extendida del láser de excímeros ha sido en la fotolitografía en el ultravioleta profundo (una tecnología fundamental utilizada en la fabricación de dispositivos microelectrónicos), además de para tratamientos en tejidos orgánicos.

- **Láseres de colorante:** Usan tintes orgánicos complejos como la rodamina 6G en disolución como medio activo. Se pueden ajustar en una amplia gama de longitudes de onda. Se suelen usar como fuente de radiación sintonizable para espectroscopía de alta resolución, fotoquímica láser y en tratamiento de enfermedades dermatológicas.
- **Láseres de semiconductores** (a veces llamados láseres de diodo): No confundir con los láseres de estado sólido descritos anteriormente. El material activo de estos láseres es el conjunto creado por la unión de dos semiconductores, uno dopado con cargas negativas (electrones), tipo N, y otro dopado con cargas positivas (huecos), tipo P. Cuando ambos semiconductores forman una unión se crea una zona intermedia carente de carga debida a la recombinación de huecos con electrones en un primer instante. Esta zona carente de cargas actúa como una barrera para los portadores de carga, impidiendo que se sigan recombinando de forma difusiva.



Si sometemos a los semiconductores dopados a una diferencia de potencial de manera que los huecos se vean empujados por el campo eléctrico hacia la zona

de tipo N y los electrones se vean empujados a la zona de tipo P (esto se denomina polarización directa), ocurrirá que la zona neutra se hará cada vez mas estrecha, llegando eventualmente a ser insignificante si la diferencia de potencial es lo suficientemente alta, si esto llegase a pasar, los electrones que están en la banda de conducción de la zona N podrían pasar por efecto túnel a la banda de conducción de la zona P atravesando así la unión entre ambos semiconductores. Rápidamente este electrón pasaría a la banda de valencia de la zona de tipo P para recombinarse con un hueco, emitiendo un fotón en el proceso.

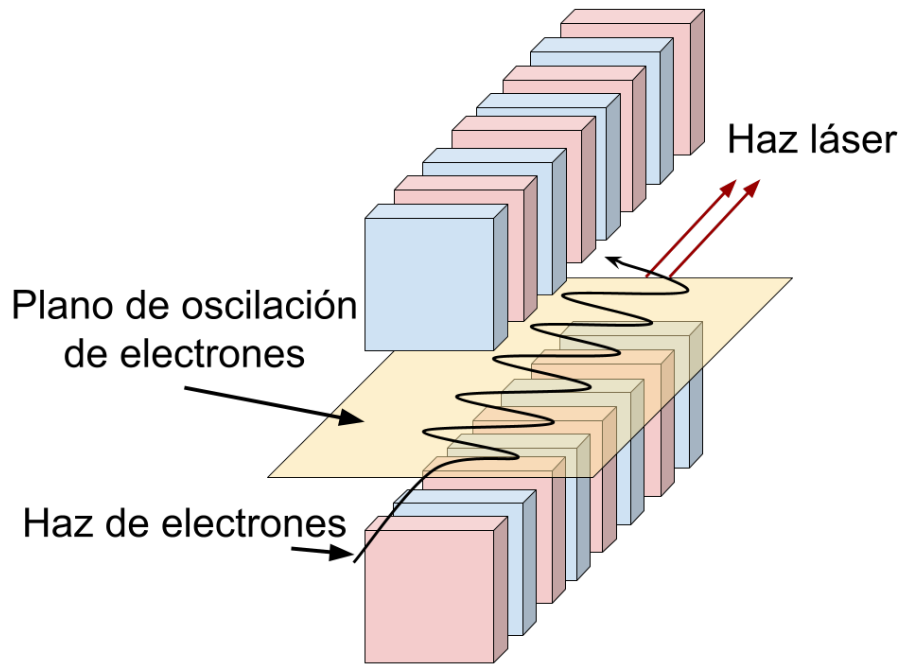


El fotón aparece debido al salto de energía que realiza el electrón desde la banda de conducción a la banda de valencia donde le espera para recombinarse un hueco. Como la banda de conducción siempre tiene mayor energía que la banda de valencia para una misma zona, ésta energía que pierde el electrón es transformada en radiación electromagnética es decir, en un fotón de energía  $h\nu = E_C - E_V$ .

Estos dispositivos electrónicos son generalmente muy pequeños y usan poca energía, pero también se encuentran integrados en matrices más grandes, por ejemplo, punteros láser, la fuente de escritura en algunas impresoras láser o reproductores de discos compactos. La aplicación básica que se le ha dado a este tipo de láser es como fuente de alimentación lumínica para sistemas de telecomunicaciones vía fibra óptica, este láser es capaz de proporcionar una potencia óptica de  $25mW$ , suficiente para transmitir señales a varios kilómetros de distancia.

- Láseres de electrones libres:** Estos láseres son un caso especial, pues no tienen un medio activo propiamente definido. Un haz de electrones acelerados a velocidades relativistas entra en el seno de un campo magnético periódico de manera que la velocidad del electrón es perpendicular en todo momento al campo magnético periódico.

Debido a la fuerza de Lorentz que actúa sobre los electrones  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ , estos se ven obligados a recorrer una trayectoria curvilínea provocando en ellos una pérdida de energía en forma de radiación electromagnética (fotones).



Estos fotones interactúan con los electrones produciéndose así un fenómeno de "microbunching", el cual consiste en que los electrones se agrupan en conjuntos separados por unidad de longitud de onda de la radiación. En estos grupos, los electrones emiten en fase y así las amplitudes de radiación suministrada por cada electrón se suman haciendo que la intensidad crezca de forma exponencial a lo largo del recorrido hasta alcanzar un cierto régimen de saturación en el cual los electrones absorben tanta energía como la que emiten. Estos láseres tienen el rango de frecuencias más amplio de todos los tipos de láser y son fácilmente sintonizables, lo cual los convierte en instrumentos útiles para la investigación científica en física, química, biología, el desarrollo de nuevos materiales y tecnologías y tienen aplicaciones prácticas en medicina y en la industria militar.

### 6.2.2. Tipos de láser según la duración de la emisión

Los láseres según la duración de la emisión de la radiación se clasifican en:

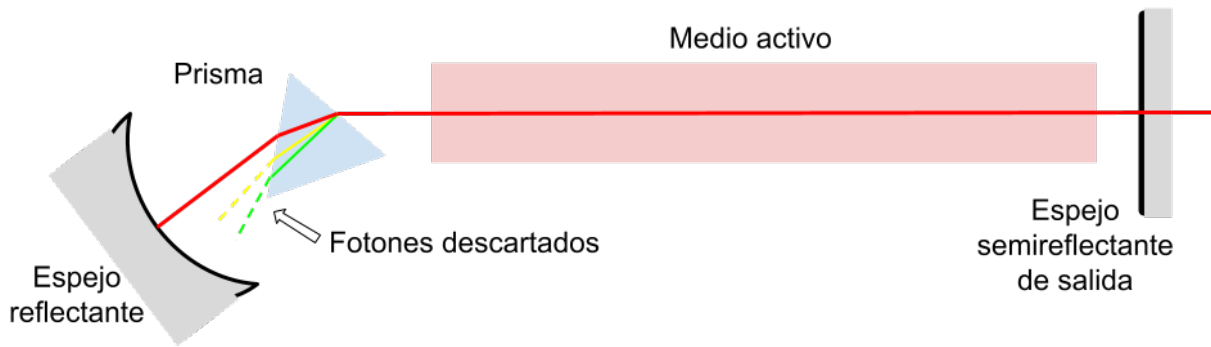
- **Láseres de onda continua** (cuyas siglas en inglés son CW, por continuous wave): el láser se bombea continuamente y emite luz de forma continua, es decir, que tiene una potencia de haz media estable. Generalmente este tipo de láser se enfoca en la potencia y el alto rendimiento, por lo que donde son más habituales es en entornos industriales, como la industria automotriz, aeroespacial, electrónica y de semiconductores, así como el sector médico. Son adecuados para aplicaciones como el taladrado láser, corte por láser y soldadura láser, y pueden ser tanto de gas, como de estado sólido, semiconductores o de colorante.
- **Láseres pulsado:** Son láseres que emiten luz en forma de pulsos ópticos de cierta duración, presentando patrones de repetición. Esto permite una amplia gama de tecnologías que abordan usos diferentes, aunque algunos láseres son pulsados simplemente porque no se pueden ejecutar en modo continuo. Son muy apreciados, por ejemplo, en cirugía, ya que un láser

de onda continua que entra en contacto con tejidos blandos podría sobrecalentar el tejido circundante, por lo que la luz pulsada puede prevenir la necrosis, al espaciar los pulsos para permitir un enfriamiento eficiente del tejido (tiempo de relajación térmica) entre ellos. Dependiendo de la duración, la energía y la frecuencia de repetición del pulso y la longitud de onda requeridas, se usan métodos muy diferentes para la generación de impulsos y dar como resultado tipos muy diferentes de láseres pulsados.

### 6.3. Láseres sintonizables

Un láser sintonizable es aquel que permite de manera controlada, variar la energía del haz de fotones. Podríamos distinguir en primer lugar aquellos sistemas que son intrínsecamente sintonizables de los que no lo son, pongamos el ejemplo más sencillo para aclarar esto. Los láseres de electrones libres son intrínsecamente sintonizables, debido a que los fotones que emite el sistema tienen una energía directamente proporcional a la velocidad de los electrones, y esta velocidad es fácilmente ajustable a las necesidades requeridas, con disminuir o aumentar el voltaje acelerador del cañón de electrones sería suficiente. Pero por otro lado hay láseres que **no son intrínsecamente** sintonizables, por ejemplo los láseres de estado sólido, los de gas y los de semiconductores son generalmente intrínsecamente no sintonizables. La estructura cristalina del sólido y la naturaleza de sus componentes determinan la estructura de bandas de energía, los estados excitados de los átomos del gas usado determinan los niveles de energía del sistema y el salto de los electrones entre la banda de valencia y de conducción determina la energía del fotón emitido. Estas son cantidades de energía provenientes de la naturaleza de los componentes del medio activo, y determinan la energía de los fotones emitidos, y no es posible modificar estos niveles de ninguna manera sin modificar el medio activo (por ejemplo, no es posible modificar la energía de los estados excitados del neón, para ese fin no queda otro remedio que sustituir el neón por otro gas), de manera que los niveles van a ser fijos y por ende las posibles transiciones también van a ser siempre las mismas. No obstante es posible manipular los fotones que estos láseres emiten, convirtiéndolos en láseres sintonizables.

Siempre que se tenga un haz constituido por fotones de diferentes frecuencias (independientemente de cual sea su origen), uno puede manipularlo para seleccionar las frecuencias que le interesen. Por lo general, los medios activos tienen múltiples transiciones posibles cuyas poblaciones están invertidas por el sistema de bombeo, esto hará que el láser emita un espectro discontinuo en cuanto a frecuencias se refiere, es posible seleccionar una de ellas para que oscile dentro de la cavidad resonante colocando un prisma o una red de difracción dentro de la cavidad, como se muestra en la siguiente figura.



El prisma está colocado y orientado de tal forma que sólo la luz de la frecuencia deseada incide perpendicularmente en el espejo reflectante, permitiendo que ésta vuelva a entrar en el medio activo aumentando así la densidad de fotones con la frecuencia deseada. Rotando el prisma controlamos la frecuencia deseada, pues el camino óptico depende tanto del índice de refracción del material del prisma como de la frecuencia del fotón. Los láseres de iones de argón por ejemplo, suelen tener un prisma ajustable dentro de la cavidad resonante que permite elegir una de las dos longitudes de onda que es capaz de emitir, el azul  $488 \text{ nm}$  o el verde azulado  $514,5 \text{ nm}$ .

De esta manera los láseres que no son intrínsecamente sintonizables se pueden clasificar como sintonizables si los fotones que emiten pasan por algún otro sistema secundario que los filtre, seleccionando las frecuencias deseadas y desechando las no deseadas. Este segundo sistema puede estar tanto fuera de la cavidad óptica como en su interior y por lo general encarecen sustancialmente el precio del láser cuanto mayor precisión tenga a la hora de filtrar fotones.

Dada una aplicación en concreto, para determinar apropiadamente el láser requerido lo primero debería ser identificar la manera más simple y eficiente para producir la energía (o la potencia promedio requerida), en una región espectral determinada. Pero en la práctica, el problema es más complejo por consideraciones como el costo y la disponibilidad de los materiales, así que es común optar por fabricar un láser que sea capaz de emitir en una región de frecuencias razonable y luego implementar un segundo sistema regulable que controle cuáles fotones salen y cuáles no.

## Apéndice

### Aproximación en sistemas diluidos

La siguiente aproximación:

$$(n_i + g_i - 1)! \approx g_i^{n_i} (g_i - 1)!$$

Es tanto más válida como mayor sea la cantidad  $g_i$  (número de estados con energía  $E_i$ ) respecto de  $n_i$  (número de partículas con energía  $E_i$ ). Es conveniente explicar esta aproximación con un ejemplo particular, su extensión al caso general es trivial a partir de él.

Supongamos que  $g_i = 10^{10}$  y  $n_i = 5$ , este ejemplo no es realista, pero es para dar a entender lo que ocurre.

$$(n_i + g_i - 1)! = \underbrace{(5 + 10^{10} - 1)} \cdot \underbrace{(4 + 10^{10} - 1)} \cdot \underbrace{(3 + 10^{10} - 1)} \\ \cdot \underbrace{(2 + 10^{10} - 1)} \cdot \underbrace{(1 + 10^{10} - 1)} \cdot (10^{10} - 1)!$$

Vemos como tenemos 5 factores, cada uno de ellos son aproximadamente lo mismo,  $\sim 10^{10}$

$$(n_i + g_i - 1)! \approx 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot (10^{10} - 1)! \\ = (10^{10})^5 \cdot (10^{10} - 1)!$$

Quedando así la aproximación:

$$(n_i + g_i - 1)! \approx g_i^{n_i} (g_i - 1)!$$

### Función de partición

Es importante tener en mente que los parámetros de Lagrange  $\alpha$  y  $\beta$  no son mas que una manera de parametrizar el número total de partículas  $N$  y la energía térmica del sistema respectivamente, fijar  $\alpha$  es equivalente a fijar  $N$ . Siendo así, es posible encontrar una relación entre  $\alpha$  y  $N$ , y luego imponer una ligadura en lugar de al número total de partículas (1), al valor del parámetro  $\alpha$ ;

$$N = \sum_{i=1}^S n_i = \sum_{i=1}^S \underbrace{g_i \exp(-\alpha - \beta E_i)}_{\text{Estad. Boltzmann}} = e^{-\alpha} \sum_{i=1}^S g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Se identifica así la función de partición  $\mathcal{Z}$ , función que **no** depende de los valores de  $\{n_i\}$ :

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Quedando entonces una relación que muestra como fijar  $N$  es equivalente a fijar  $\alpha$ ;

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\mathcal{Z}}$$



El parámetro  $\alpha$  es otra parametrización del número total de partículas en el sistema. Con la función de partición definida, es ahora posible escribir la población del nivel energético  $i$ -ésimo, pero esta vez en función del número total de partículas  $N$  en lugar de  $\alpha$ :

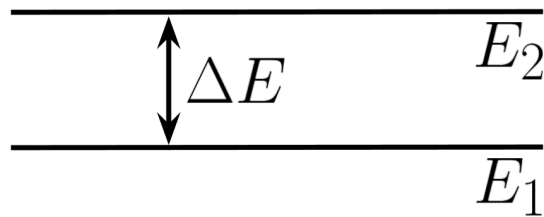
$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = g_i \frac{N}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (19)$$

La ecuación (19) es otro modo de escribir la estadística de Boltzmann, esta vez parametrizada directamente con  $N$ , el número total de partículas del sistema.

## Condensación de Bose-Einstein

Aparece entonces un estado del sistema con propiedades únicas y exóticas que es merecedor de una breve mención.

Supongamos un sistema descrito por la estadística clásica (Boltzmann) el cual tiene al menos dos niveles energéticos disponibles, caracterizados por las degeneraciones  $g_1$  y  $g_2$ .



La proporción entre las poblaciones de ambos niveles es:

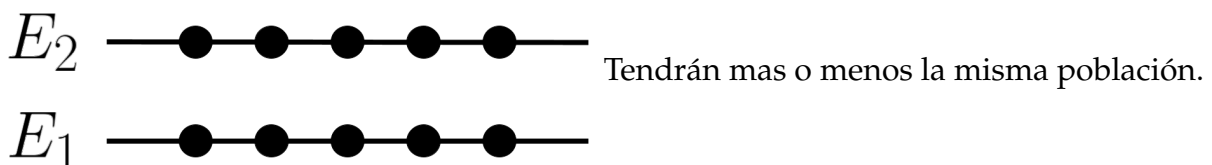
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 \frac{N}{Z} \exp(-E_2/k_B T)}{g_1 \frac{N}{Z} \exp(-E_1/k_B T)} = \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right)$$

Se ha tenido en cuenta la siguiente aproximaciones: Dos niveles energéticos consecutivos van a tener la misma degeneración del estado en primera aproximación,  $g_2 \approx g_1$ .

Esta ecuación nos dice que a medida que  $k_B T$  se va haciendo mas grande respecto a la diferencia de energía entre los dos niveles  $\Delta E$ , la exponencial tiende a 1 y por consecuencia  $n_1 \approx n_2$ .

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

En otras palabras, si la  $\Delta E$  es pequeña respecto a la energía térmica  $k_B T$ , entonces las partículas tienen una energía térmica suficientemente grande como para pertenecer indiferentemente al nivel mas bajo o en un nivel superior.



Si por el contrario  $\Delta E \gg k_B T$  (sistema muy frío), entonces no es verdad que  $n_1 \approx n_2$ , y se tiene que el nivel 2 está significativamente menos poblado que el nivel 1.

La estadística de Bose-Einstein tiene una peculiaridad que no tiene la estadística clásica. Cuando la temperatura se aproxima a  $0\text{ K}$  aparece una altísima población de partículas en el primer nivel disponible y todos los demás niveles es previsible que estén des poblados.

Esta característica peculiar deriva inevitablemente de la posibilidad que tienen los bosones de ocupar el mismo estado cuántico, permite la formación del llamado *Condensado de Bose-Einstein (B.E.C.)*.



Estos sistemas en los cuales todos los bosones están en el primer nivel energético tienen propiedades únicas, por ejemplo un superfluido (fluido con viscosidad nula) sería un B.E.C. salvando las interacciones entre sus partículas constituyentes.

## Referencias

- [1] Marc Eichhorn, *Laser Physics*, Springer 1ª edición, (16 Marzo 2014)
- [2] Karl F. Renk, *Basics of Laser Physics: For Students of Science and Engineering*, Springer 2ª edición, (8 Mayo 2018)
- [3] K. Thyagarajan & Ajoy Ghatak, *Lasers: Fundamentals and Applications*, Springer 2ª edición, (5 Octubre 2010)
- [4] Lev Pitaevskii & Sandro Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford University Press Illustrated edición, (28 Marzo 2016)
- [5] Nick P. Proukakis, David W. Snoke & Peter B. Littlewood, *Universal Themes of Bose-Einstein Condensation*, Cambridge University Press, (Mayo 2017)
- [6] Masahito Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation*, World Scientific Publishing Company, (2010)
- [7] Orazio Svelto, *Principles of Lasers*, Springer 5ª edición, (28 Diciembre 2009)
- [8] Bahaa E. A. Saleh & Malvin Carl Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley-Interscience 2ª edición, (9 Marzo 2007)
- [9] Laser Types and Classification, <https://ehs.oregonstate.edu/laser/training/laser-types-and-classification>