



UNIVERSIDAD  
DE SEVILLA

---

Facultad de Física

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA  
INFORMÁTICA PARA CALCULAR ACTIVIDADES  
DE RADIONÚCLIDOS PRESENTES EN LAS SERIES  
RADIATIVAS NATURALES**

*Autor*  
Manuel Martínez Rojas

*Tutores*  
Manuel García León  
Juan Mantero Cabrera

Curso 2021-2022

# Índice

1. Introducción.....	1
2. Las ecuaciones de Bateman y las series radiactivas naturales.....	2
2.1. Las ecuaciones de Bateman.....	2
2.1.1. Solución de las ecuaciones de Bateman para una serie lineal de cuatro elementos empleando la transformada de Laplace.....	3
2.1.2. Solución de las ecuaciones de Bateman para una serie no lineal de cuatro elementos y dos ramas usando el método de aproximación matricial.....	4
2.1.3. Solución general de las ecuaciones de Bateman para una serie lineal.....	6
2.1.4. Actividad radiactiva.....	7
2.1.5. Casos particulares de interés: equilibrios secular y transitorio.....	7
2.1.5.1. Equilibrio secular.....	8
2.1.5.2. Equilibrio transitorio.....	9
2.2. Las series radiactivas naturales.....	11
2.2.1. Serie del $^{238}\text{U}$ o $4n + 2$ .....	12
2.2.2. Serie del $^{232}\text{Th}$ o $4n$ .....	13
2.2.3. Serie del $^{235}\text{U}$ o $4n + 3$ .....	14
2.3. La radiactividad artificial y serie del $^{237}\text{Np}$ o $4n + 1$ .....	16
2.4. Equilibrio secular en las series radiactivas y datación geológica.....	17
3. Desarrollo de una herramienta informática para cálculo de radiactividades y poblaciones con las soluciones de las ecuaciones de Bateman (RaPCUBES: Radioactivity and Population Calculator Using Bateman Equations' Solutions).....	20
3.1. Base de datos.....	20
3.2. Funciones de computación.....	22
3.2.1. Datos requeridos por las calculadoras principales.....	23
3.2.2. Calculadora de la población inicial del núcleo primitivo.....	23
3.2.3. Calculadora de valores e incertidumbres en la fecha de cálculo.....	24
3.2.4. Calculadora de evolución temporal de actividades y poblaciones.....	24
3.3. Funciones auxiliares.....	25
3.3.1. Buscadores de datos e imágenes.....	25
3.3.2. Calculadoras secundarias.....	26
3.3.2.1. Función que calcula las diferencias de tiempos entre las fechas introducidas por el usuario.....	26
3.3.2.2. Función que transforma las semividas recopiladas en la base de datos a constantes de decaimiento.....	26
3.3.2.3. Función que genera el vector de tiempos a utilizar en la calculadora de evolución temporal.....	26
3.3.2.4. Función que calcula los cocientes de poblaciones o actividades.....	27
3.3.3. Buscadores de errores.....	27

3.3.4.	Recuperadores de valores y aspecto por defecto.....	28
3.4.	Interfaz de usuario e instrucciones de uso. ....	28
3.4.1.	Datos de entrada del usuario. ....	28
3.4.2.	Diagrama de decaimiento de la serie.....	30
3.4.3.	Botón para reproducir la aplicación y tabla de resultados. ....	30
3.4.4.	Apartado gráfico.....	32
4.	Ejemplos de uso de la aplicación, posibles mejoras y herramientas similares. ....	33
4.1.	Comparación de datos expuestos en artículos científicos con resultados calculados por RaPCUBES. ....	34
4.1.1.	Comparativa con resultados extraídos de un artículo sobre los problemas del desequilibrio radiactivo en series naturales presentes en materiales de construcción. ....	34
4.1.2.	Comparativa con resultados extraídos de un artículo sobre riesgos radiológicos y químicos por desechos generados en la industria del dióxido de titanio. ....	36
4.2.	Utilidades adicionales para versiones posteriores.....	38
4.3.	Otras aplicaciones similares a RaPCUBES. ....	42
5.	Conclusiones.....	42
6.	Bibliografía. ....	43

## 1. Introducción.

El estudio de los radionúclidos presentes en la Naturaleza nos permite conocer en mayor profundidad los fenómenos que en ella ocurren. Así, podemos efectuar análisis y trazados más precisos de dichos procesos. Además, los usos prácticos de estos elementos radiactivos son muchos y muy variados, destacando el empleo en Medicina (diagnóstico y tratamiento de enfermedades), investigación en Biología, datación geológica, análisis de sustancias (elementos contaminantes en el aire, composición de aleaciones, humedad en suelos...) o como combustible nuclear [1].

De especial interés es el análisis de las series radiactivas naturales, que establecen relaciones de parentesco entre diferentes núcleos radiactivos. El examen de su comportamiento permite el desarrollo de ecuaciones, en las que se plasma la evolución temporal de las poblaciones de los diferentes radioisótopos que las componen. Dichas expresiones matemáticas son las ecuaciones de Bateman [2], cuya resolución y evaluación se va complicando conforme aumenta el número de elementos de la misma familia que consideramos. Por ello, surge una necesidad de agilizar el proceso que se satisface empleando los métodos modernos de computación.

El objetivo de este trabajo es la elaboración de una herramienta informática de acceso abierto que proporcione la actividad radiactiva y población, con sus respectivas incertidumbres, de diferentes radionúclidos pertenecientes a la misma cadena natural, en cualquier instante de tiempo posterior la colección de la muestra en la que participan. Asimismo, para hacer más completa la aplicación, incluimos una interfaz gráfica en la que mostrar la evolución temporal de estas magnitudes y sus cocientes por pares, en un intervalo de tiempo razonablemente extenso. De esta forma, podremos visualizar la conducta pasada y futura del sistema, y comparar el comportamiento de los diferentes eslabones de la cadena. Todo ello será calculado a partir de las soluciones halladas para las ecuaciones de Bateman.

Por otro lado, este documento se compone de varias secciones en las que iremos tratando los diferentes aspectos de interés para la utilización y comprensión profunda del programa informático confeccionado y su contexto. En primer lugar, en la sección 2, explicaremos los fundamentos físico-teóricos y experimentales que componen el trasfondo requerido para la elaboración y uso de la aplicación. Después, en la 3, nos centraremos en describir el proceso de programación, revelando la idea esencial que se encuentra tras cada función y componente de la interfaz, su aspecto y su modo de empleo. A continuación, en la sección 4, mostraremos algunos ejemplos de resultados calculados con la herramienta y, para acabar, la 5 concluye con unas reflexiones finales acerca del proceso de creación y versión final del proyecto.

## 2. Las ecuaciones de Bateman y las series radiactivas naturales.

### 2.1. Las ecuaciones de Bateman.

Las ecuaciones de Bateman son un conjunto de EDOs (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) de primer orden que describen la evolución temporal de las poblaciones de radionúclidos pertenecientes a una serie de decaimiento radiactivo [3].

Primero, el modelo fue formulado por Ernest Rutherford en 1905 [3], tras el descubrimiento de la radiactividad por Henri Becquerel (1896) y la descripción del fenómeno por Marie y Pierre Curie. Rutherford estudió la transmutación e identificó dos de los tres modos de decaimiento principales, alfa y beta, en 1898, mientras que la radiación gamma fue hallada por Paul Ulrich Villard (1900). Después, en 1900, observó que la población de núcleos iguales de un solo elemento tardaba en reducirse a la mitad el mismo tiempo independientemente del tamaño de la muestra [4]. Este periodo temporal de semidesintegración, conocido como semivida, le permitió definir un sistema de EDOs de primer orden que, para el caso particular de una cadena lineal de  $n$  elementos, toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_i}{dt} &= -\lambda_i N_i + \lambda_{i-1} N_{i-1}, \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $N_i$  es la población instantánea del núcleo  $i$ , y  $\lambda_i$ , su correspondiente constante de decaimiento, relacionada con la semivida  $T_{\frac{1}{2},i}$  por

$$\lambda_i = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2},i}}. \quad (2)$$

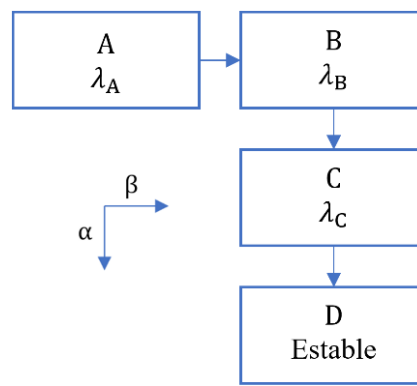
Por su parte, Harry Bateman publicó en 1910 un artículo titulado Solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations [2]. En él, mostraba cómo calcular la solución analítica del problema empleando la transformada de Laplace, y mostrando algunos resultados y conclusiones. Actualmente, se emplean también otros métodos de resolución, entre los que destacan la aproximación algebraica con formulación matricial [5] y métodos numéricos en computadoras.

A continuación, ilustraremos cómo el problema a resolver crece en complejidad a medida que aumenta el número de núcleos de la serie tratada, de ahí la necesidad de realizar los cálculos en ordenadores. Con este fin, vamos a obtener la solución de las ecuaciones de Bateman para un par de casos simples: una cadena lineal y otra no lineal de cuatro núcleos cada una. Procederemos empleando el método de la transformada de Laplace en el primer caso, y el

matricial, después.

2.1.1. Solución de las ecuaciones de Bateman para una serie lineal de cuatro elementos empleando la transformada de Laplace.

La *Figura 1* muestra el diagrama de decaimiento de una familia radiactiva compuesta por los cuatro radionúclidos A, B, C y D, con constantes de decaimiento  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ ,  $\lambda_C$  y 0, respectivamente. El núcleo A transmuta a B por decaimiento beta (representado por una flecha horizontal hacia la derecha); asimismo, el B da lugar a C por decaimiento alfa (indicado por una flecha vertical apuntando para abajo), al igual que ocurre con C y D, siendo este último estable.



*Figura 1. Diagrama de desintegración de una serie lineal de cuatro radionúclidos, A, B, C y D, con constantes de decaimiento  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ ,  $\lambda_C$  y 0, respectivamente. Los decaimientos beta vienen dados por flechas horizontales y hacia la derecha, y los alfa, por verticales y apuntando para abajo.*

Comenzamos planteando el sistema de ecuaciones a resolver, que es

$$\begin{aligned} \frac{dN_A}{dt} &= -\lambda_A N_A \\ \frac{dN_B}{dt} &= -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A \\ \frac{dN_C}{dt} &= -\lambda_C N_C + \lambda_B N_B \\ \frac{dN_D}{dt} &= \lambda_C N_C. \end{aligned} \tag{3}$$

Para simplificar el proceso de cálculo, supondremos que en el tiempo  $t = 0$  solo hay población del núcleo A, obteniendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} N_A(t = 0) &= N_0 \\ N_B(t = 0) &= 0 \\ N_C(t = 0) &= 0 \\ N_D(t = 0) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

A continuación, aplicamos la transformada de Laplace al sistema de EDOs (3) para obtener un sistema lineal de ecuaciones equivalente

$$\begin{aligned}
 L_A(s) &= \frac{N_0}{s + \lambda_A} \\
 L_B(s) &= \frac{\lambda_A N_0}{(s + \lambda_A)(s + \lambda_B)} \\
 L_C(s) &= \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{(s + \lambda_A)(s + \lambda_B)(s + \lambda_C)} \\
 L_D(s) &= \frac{\lambda_A \lambda_B \lambda_C N_0}{(s + \lambda_A)(s + \lambda_B)(s + \lambda_C)s},
 \end{aligned} \tag{5}$$

en el que se han definido las transformadas de Laplace de las poblaciones de radionúclidos

$$L_i(s) = \mathcal{L}[N_i(t)] = \int_0^{+\infty} N_i(t) e^{-st} dt. \tag{6}$$

Procedemos a resolver (5) de arriba abajo, aplicando la transformada inversa de Laplace de las variables  $L_i$ , obteniendo, de nuevo, las poblaciones

$$N_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_i(s)] = VP \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{1}{2\pi i} L_i(s) e^{st} ds. \tag{7}$$

De esta forma, llegamos a la solución

$$\begin{aligned}
 N_A(t) &= N_0 e^{-\lambda_A t} \\
 N_B(t) &= \lambda_A N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_B t}}{\lambda_A - \lambda_B} + \frac{e^{-\lambda_A t}}{\lambda_B - \lambda_A} \right) \\
 N_C(t) &= \lambda_A \lambda_B N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_C t}}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)} + \frac{e^{-\lambda_B t}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_B)} \right) \\
 N_D(t) &= -\lambda_A \lambda_B \lambda_C N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_C t}}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)\lambda_C} + \frac{e^{-\lambda_B t}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)\lambda_B} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_B)\lambda_A} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

2.1.2. Solución de las ecuaciones de Bateman para una serie no lineal de cuatro elementos y dos ramas usando el método de aproximación matricial.

La *Figura 2* muestra el esquema de decaimiento de una familia radiactiva no lineal compuesta por los núcleos A, B, C y D, con constantes de decaimiento  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ ,  $\lambda_C$  y 0, respectivamente. Encontramos que contiene dos ramas o caminos posibles para alcanzar la

estabilidad: A-B-D y A-C-D. Además, observamos que el elemento A puede sufrir decaimientos alfa y beta con las correspondientes probabilidades parciales  $p_{AC}$  y  $p_{AB}$ , para decaer a los núcleos C y B. A su vez, estos dan lugar a núcleos del tipo D, que es estable, por desintegraciones de tipos beta y alfa, respectivamente.

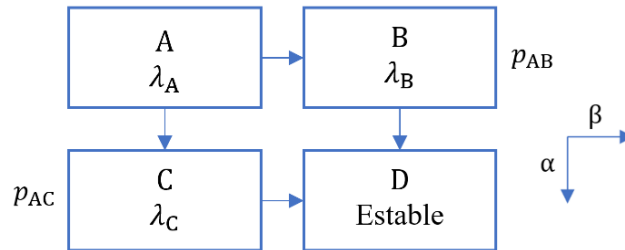


Figura 2. Diagrama de desintegración de una serie no lineal de cuatro radionúclidos, A, B, C y D, con constantes de decaimiento  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ ,  $\lambda_C$  y 0, respectivamente. Los decaimientos beta vienen dados por flechas horizontales y hacia la derecha, y los alfa, por verticales y apuntando para abajo.

De nuevo, comenzamos definiendo el sistema de ecuaciones a resolver, que en este caso toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{dN_A}{dt} &= -\lambda_A N_A \\ \frac{dN_B}{dt} &= -\lambda_B N_B + p_{AB} \lambda_A N_A \\ \frac{dN_C}{dt} &= -\lambda_C N_C + p_{AC} \lambda_A N_A \\ \frac{dN_D}{dt} &= \lambda_C N_C + \lambda_B N_B.\end{aligned}\tag{9}$$

También lo podemos expresar en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{dN_A}{dt} \\ \frac{dN_B}{dt} \\ \frac{dN_C}{dt} \\ \frac{dN_D}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_A & 0 & 0 & 0 \\ p_{AB} \lambda_A & -\lambda_B & 0 & 0 \\ p_{AC} \lambda_A & 0 & -\lambda_C & 0 \\ 0 & \lambda_B & \lambda_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \\ N_D \end{pmatrix}.\tag{10}$$

Empleamos de nuevo las condiciones iniciales (4) y calculamos la solución al sistema de EDOs a partir de

$$\begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \\ N_D \end{pmatrix} = VAV^{-1} \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\tag{11}$$

donde las matrices  $\Lambda$ ,  $V$  y  $V^{-1}$  son



$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_A t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_B t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_C t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{AB}\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{p_{AC}\lambda_A}{\lambda_C - \lambda_A} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{p_{AB}\lambda_B}{\lambda_A - \lambda_B} + \frac{p_{AC}\lambda_C}{\lambda_A - \lambda_C} & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{AB}\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{p_{AC}\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_C} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{p_{AB}(\lambda_A - \lambda_B)}{\lambda_A - \lambda_B} + \frac{p_{AC}(\lambda_A - \lambda_C)}{\lambda_A - \lambda_C} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $\Lambda$  es diagonal. Sus elementos no nulos son funciones exponenciales dependientes del tiempo,  $t$ , y las constantes de los exponentes son los autovalores de la matriz de coeficientes de (10), que coinciden con las constantes de decaimiento de los radionúclidos, con signo negativo. En cambio, la matriz  $V$  tiene como columnas los autovectores correspondientes a dicha matriz de coeficientes. Por último,  $V^{-1}$  es la matriz inversa de  $V$ .

La solución para este caso es

$$\begin{aligned} N_A(t) &= N_0 e^{-\lambda_A t} \\ N_B(t) &= p_{AB}\lambda_A N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_B t}}{\lambda_A - \lambda_B} + \frac{e^{-\lambda_A t}}{\lambda_B - \lambda_A} \right) \\ N_C(t) &= p_{AC}\lambda_A N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_C t}}{\lambda_A - \lambda_C} + \frac{e^{-\lambda_A t}}{\lambda_C - \lambda_A} \right) \\ N_D(t) &= -p_{AB}\lambda_A\lambda_B N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_B t}}{(\lambda_A - \lambda_B)\lambda_B} + \frac{e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_B - \lambda_A)\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_A\lambda_B} \right) \\ &\quad - p_{AC}\lambda_A\lambda_C N_0 \left( \frac{e^{-\lambda_C t}}{(\lambda_A - \lambda_C)\lambda_C} + \frac{e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_C - \lambda_A)\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_A\lambda_C} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

### 2.1.3. Solución general de las ecuaciones de Bateman para una serie lineal.

Se observa una relación de recurrencia en las soluciones para el caso de una familia radiactiva lineal. De este modo, en una cadena de eslabones en la que solo hay población inicial del primer radionúclido de la serie (denotado por el subíndice 1), tenemos que la solución para

el n-ésimo núcleo viene dada por

$$N_n(t) = N_1(0) \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left( \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \right) [3]. \quad (13)$$

Estas soluciones son las que incorporaremos a nuestro programa informático por un método iterativo, de forma que sea capaz de construir aquellas que necesite en cada ocasión.

Asimismo, si tenemos en cuenta el problema más complejo en el que puede haber poblaciones iniciales no nulas de cualesquiera elementos de la familia, obtenemos

$$N_n(t) = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left( \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{N_p(0) e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \right) [6]. \quad (14)$$

Finalmente, cabe mencionar que estas expresiones son útiles también para el caso de cadenas de decaimiento no lineales. Simplemente, hay que tener en cuenta que las poblaciones de aquellos núcleos que proceden del mismo radioisótopo se calculan multiplicando el resultado de las ecuaciones (13) o (14) por la probabilidad parcial de que el núcleo padre decaiga a cada uno de ellos, denominados núcleos hijos. Adicionalmente, la población de un núcleo con dos padres diferentes se evalúa como la suma de las resultantes de cada una de las ramas de desintegración posibles. Estas ideas son fundamentales para comprender el funcionamiento del código desarrollado para el cálculo dentro de la aplicación.

#### 2.1.4. Actividad radiactiva.

Una magnitud de gran interés que podemos calcular a partir de las expresiones obtenidas anteriormente para las poblaciones de radionúclidos es la actividad radiactiva. Esta se define como la tasa de decaimiento de un determinado radioisótopo en función del tiempo y se calcula, para un elemento con constante de desintegración  $\lambda$  y población  $N$ , según la expresión

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t). \quad (15)$$

#### 2.1.5. Casos particulares de interés: equilibrios secular y transitorio.

Las diferencias relativas entre las constantes de decaimiento de radionúclidos con relaciones de parentesco determinan el comportamiento en la evolución temporal de las poblaciones y actividades de los diferentes núcleos presentes en una serie radiactiva. De las expresiones obtenidas en (8) y (12), podemos deducir que, para el primer eslabón de la cadena que forma parte de nuestra muestra de estudio, el comportamiento de la actividad frente al tiempo será decreciente de tipo exponencial hasta anularse. En cambio, esperamos que para el

resto de los elementos se produzca un crecimiento exponencial inicial desde el origen hasta alcanzar el máximo absoluto, seguido de una disminución del mismo tipo a cero.

Consideremos, entonces, los dos primeros eslabones de una cadena lineal de desintegración radiactiva, de manera que el primero de ellos, A, decae al segundo, B, y que les corresponden constantes de desintegración  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$ , respectivamente. Sus actividades radiactivas las podemos calcular combinando (8) y (15), y vienen dadas por

$$\begin{aligned} A_A(t) &= \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} \\ A_B(t) &= \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}). \end{aligned} \quad (16)$$

Se dice que estos radionúclidos se encuentran en equilibrio radiactivo [4] si sus tasas de decaimiento o actividades son iguales y, por tanto,

$$\lambda_A N_A = \lambda_B N_B \rightarrow A_A = A_B. \quad (17)$$

Además, empleando (16), podemos definir el cociente de actividades

$$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} (1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}), \quad (18)$$

que, en la situación dada por (17), toma valor uno. Veremos que, en situaciones reales, estas condiciones se cumplen, como mucho, de forma aproximada.

Sin embargo, el equilibrio no se establece en los casos en los que  $\lambda_A > \lambda_B$ , pues el cociente de actividades (18) aumenta con el tiempo indefinidamente [4] y de forma exponencial, tendiendo a infinito. Ilustramos la situación en la *Figura 3*, en la que mostramos unos resultados calculados con la aplicación desarrollada. Para ello, hemos elegido dos radionúclidos pertenecientes a la serie del  $^{238}\text{U}$ : el  $^{218}\text{Po}$ , con una semivida de unos tres minutos, transmutando por decaimiento alfa a  $^{214}\text{Pb}$ , cuya semivida vale veintisiete minutos, aproximadamente. En la gráfica de la izquierda, (a), podemos ver la evolución temporal de las actividades de los dos elementos considerados, mientras que, a la derecha, en (b), encontramos la evolución de la razón de actividades. Asimismo, el dominio de tiempo seleccionado es de cuarenta minutos.

A continuación, estudiaremos los dos casos posibles de equilibrio que se pueden dar: secular y transitorio.

#### 2.1.5.1. Equilibrio secular.

El equilibrio secular se observa cuando la semivida del núcleo padre es mucho mayor que la del hijo, y ha transcurrido el tiempo suficiente desde la creación de la muestra (al menos seis semividas del descendiente). El fenómeno consiste en que la actividad del hijo se acerca muy rápidamente a la del padre (en relación con la semivida de este), manteniéndose así

indefinidamente. De este modo, el valor del cociente (18) es prácticamente la unidad, cumpliéndose la condición de equilibrio (17)[4] [7].

Desarrollemos unos cálculos rápidos para ilustrar el concepto definido. Supongamos un radionúclido A con semivida  $T_{\frac{1}{2},A}$  y constante de desintegración  $\lambda_A$  que decae a otro, B, con parámetros característicos  $T_{\frac{1}{2},B}$  y  $\lambda_B$ . Las actividades radiactivas de ambos son las mismas que teníamos en (16).

A continuación, aplicamos las condiciones particulares del problema en cuestión

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2},A} &\gg T_{\frac{1}{2},B} \rightarrow \lambda_A \ll \lambda_B \\ t &\gg T_{\frac{1}{2},B} \end{aligned} \quad (19)$$

a la expresión de la actividad de B,  $A_B(t) = \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$ , y calculamos que

$$A_B(t) \cong \lambda_A N_0 (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) \cong \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} = A_A(t), \quad (20)$$

por lo que se llega a la condición de equilibrio (17).

En la *Figura 4* mostramos un ejemplo de esta situación, calculado con la aplicación desarrollada, dentro de la serie radiactiva del  $^{237}\text{Np}$ . En él, el núcleo padre es el  $^{229}\text{Th}$ , con semivida de unos ocho mil años, que decae emitiendo radiación alfa a  $^{225}\text{Ra}$ , cuya semivida es de quince días, aproximadamente. En la gráfica de la izquierda, (a), podemos ver la evolución temporal de las actividades de los dos elementos considerados, mientras que, a la derecha, en (b), encontramos la evolución de la razón de actividades. Asimismo, el dominio de tiempo seleccionado es de doscientos cuarenta días, alcanzándose el equilibrio secular hacia el ciento cincuenta.

#### 2.1.5.2. Equilibrio transitorio.

El segundo caso particular que vamos a tratar es el equilibrio transitorio, que se da cuando la semivida del padre es mayor que la del hijo, aunque no hace a esta última insignificante. Entonces, ocurre que la actividad del hijo iguala a la del padre instantáneamente y la supera, pero, al contrario que en la situación de no equilibrio, el cociente de actividades (18) continúa creciendo lentamente [4] [7].

Ahora, con un breve ejercicio matemático comprobaremos las condiciones de la definición proporcionada. Por tanto, supongamos que disponemos de un radionúclido A con semivida  $T_{\frac{1}{2},A}$  y constante de desintegración  $\lambda_A$  que decae a otro, B, con parámetros característicos  $T_{\frac{1}{2},B}$  y  $\lambda_B$ . La condición que cumplen las constantes en este caso es

$$T_{\frac{1}{2},A} > T_{\frac{1}{2},B} \rightarrow \lambda_A < \lambda_B. \quad (21)$$

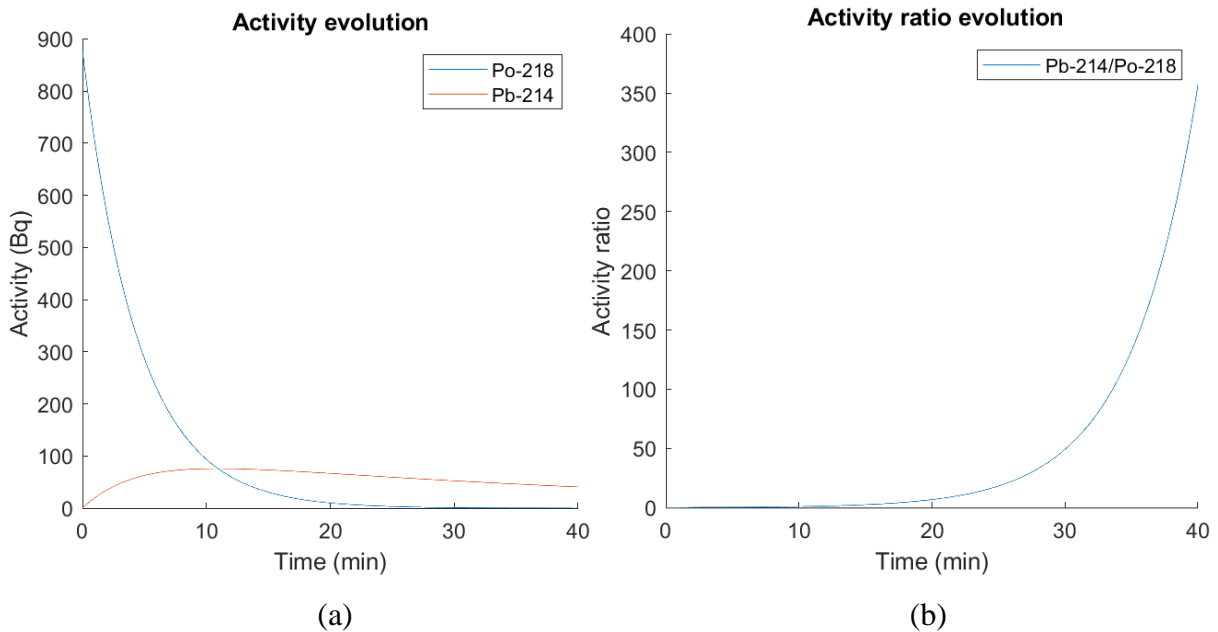
Si igualamos las actividades de ambos núcleos, dadas por (16), podemos calcular el instante de tiempo

$$t_{\text{igualdad}} = t_{\text{máx},B} = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)}{\lambda_A - \lambda_B} \quad (22)$$

en el que el cociente de actividades (18) toma valor uno. Desde entonces se ralentiza el crecimiento de esta razón, y, además, coincide con el momento en el que la actividad del hijo alcanza su valor máximo, como vemos en

$$\begin{aligned} \frac{dA_B}{dt}(t_{\text{máx},B}) &= \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{\lambda_B - \lambda_A} (\lambda_B e^{-\lambda_B t_{\text{máx},B}} - \lambda_A e^{-\lambda_A t_{\text{máx},B}}) = 0 \\ \frac{d^2 A_B}{dt^2}(t_{\text{máx},B}) &= \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{\lambda_B - \lambda_A} (\lambda_A^2 e^{-\lambda_A t_{\text{máx},B}} - \lambda_B^2 e^{-\lambda_B t_{\text{máx},B}}) < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Finalmente, en la *Figura 5* mostramos otro ejemplo, esta vez dentro de la serie de  $^{237}\text{Np}$ , calculado con ayuda de la herramienta elaborada, en el que el núcleo padre es el  $^{225}\text{Ra}$ , con una semivida de unos quince días, y el hijo, producido por decaimiento alfa, es el  $^{225}\text{Ac}$ , cuya semivida se acerca a los diez días. Asimismo, el dominio de tiempo seleccionado es de doscientos días y la condición de equilibrio se cumple hacia el vigésimo.



*Figura 3. Ejemplo de relación de parentesco entre radioisótopos en situación de no equilibrio. El radionúclido padre es  $^{218}\text{Po}$ , con semivida de unos tres minutos, que transmuta a  $^{214}\text{Pb}$ , cuya semivida vale veintisiete minutos, aproximadamente. En la gráfica (a) están representadas las actividades de ambos núcleos, y en (b), la razón de estas. El dominio de tiempo seleccionado para la representación es de cuarenta minutos.*

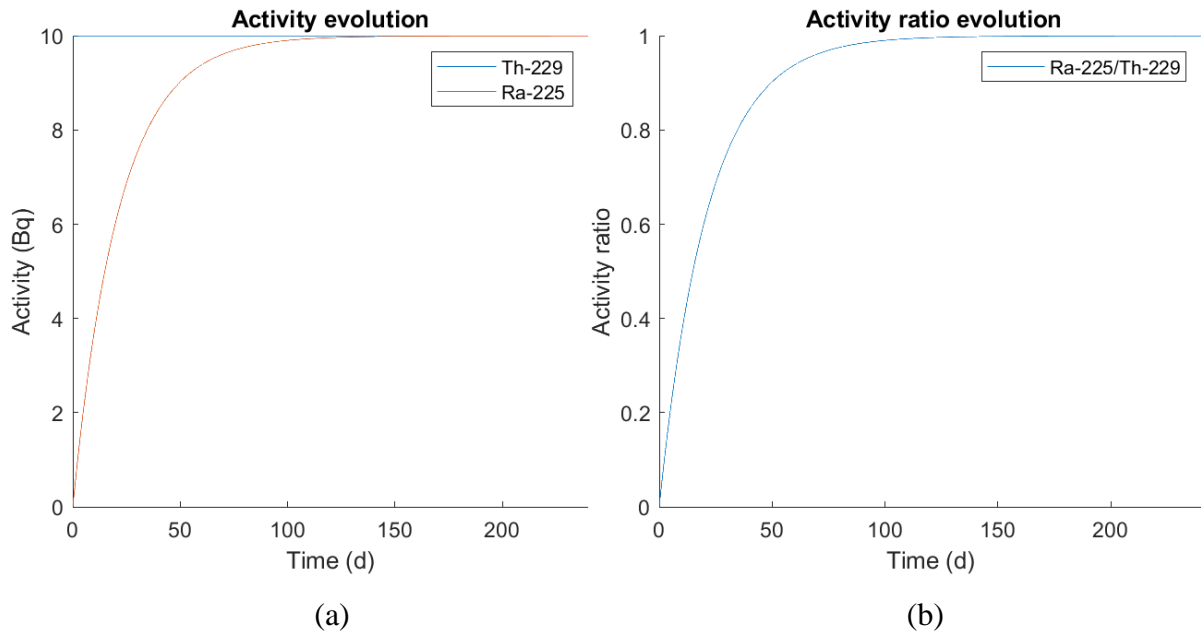


Figura 4. Ejemplo de equilibrio secular en el que el núcleo padre es el  $^{229}\text{Th}$ , con una semivida de unos ocho mil años, y el hijo es el  $^{225}\text{Ra}$ , cuya semivida es de quince días, aproximadamente. En la gráfica (a) están representadas las actividades de ambos núcleos, y en (b), la razón de estas. El dominio de tiempo seleccionado para la representación es de doscientos cuarenta días.

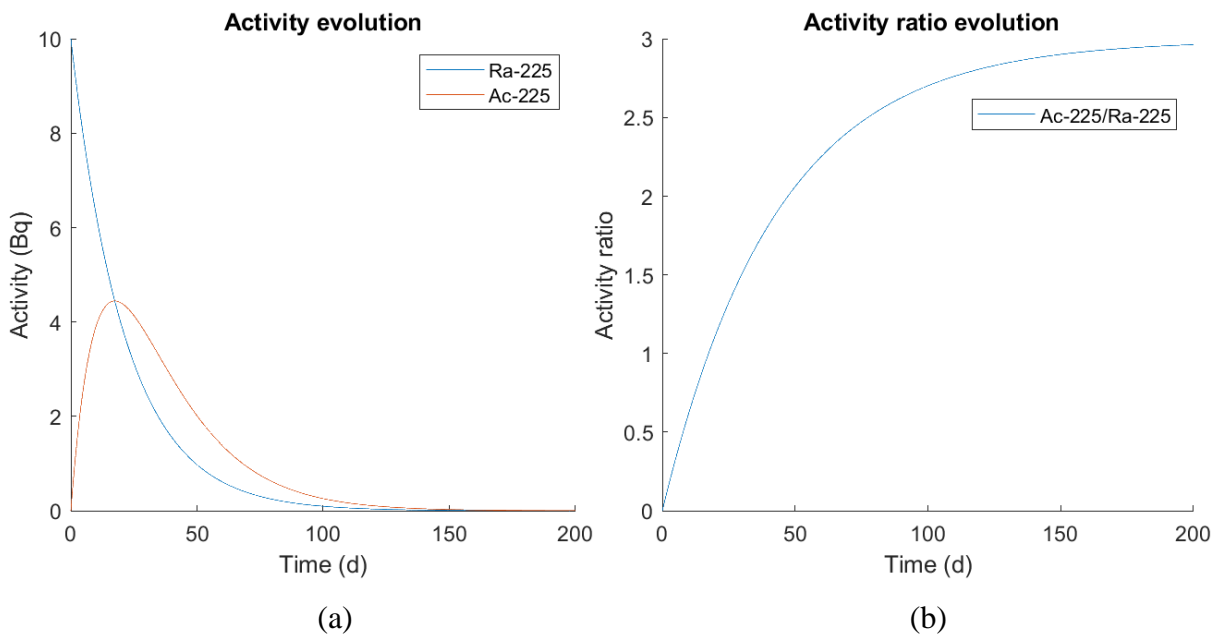


Figura 5. Ejemplo de equilibrio transitorio en el que el núcleo padre es el  $^{227}\text{Th}$ , con una semivida de unos diecinueve días, y el hijo es el  $^{223}\text{Ra}$ , cuya semivida es de once días, aproximadamente. En la gráfica (a) están representadas las actividades de ambos núcleos, y en (b), la razón de estas. El dominio de tiempo seleccionado para la representación es de doscientos días.

## 2.2. Las series radiactivas naturales.

Las series radiactivas naturales son conjuntos de núcleos relacionados entre sí de manera que cada uno de ellos se obtiene de la desintegración de otro, a excepción del elemento pesado que encabeza la cadena. Al final, se alcanza la estabilidad nuclear, generalmente, con núcleos

de plomo. En el proceso tienen lugar, esencialmente, emisiones de los tipos alfa y beta, aunque pueden ir acompañadas de alguna desintegración gamma si un núcleo hijo es generado en un estado excitado de su configuración nuclear. Esta última clase de decaimiento no la vamos a considerar en la elaboración de la aplicación por las muy bajas semividas que las acompañan, despreciables frente a los tiempos característicos de las otras dos.

Los radionúclidos primigenios que encabezan las cadenas radiactivas naturales están presentes en la Naturaleza desde la creación de la Tierra hace unos cuatro mil millones y medio de años, convirtiéndose un factor esencial en el desarrollo geológico de nuestro planeta. Además, conforman una de sus principales fuentes de calor interno y de radiación absorbida por las diferentes formas de vida que en él habitan, junto con  $^{40}\text{K}$  [8]. Las series radiactivas naturales son tres, y se conocen por el nombre del radioisótopo que las lidera, o bien por la relación que existe entre los números másicos de los elementos que las componen. Esta viene dada por el cuádruple de un cierto número entero,  $n$ , diferente para cada eslabón de la cadena, y una constante que se le suma y es característica de la serie. Así, encontramos la familia radiactiva del  $^{238}\text{U}$  o  $4n + 2$ , la del  $^{232}\text{Th}$  o  $4n$  y la del  $^{235}\text{U}$  o  $4n + 3$  [4]. Ahora comentaremos sus características más importantes.

### 2.2.1. Serie del $^{238}\text{U}$ o $4n + 2$ .

La serie del  $^{238}\text{U}$  fue la primera en ser estudiada por Henri Becquerel, que trabajaba con sales de uranio en sus experimentos sobre fenómenos de luminiscencia. Unos años después, el estudio de la radiactividad por el matrimonio Curie, centrado en el radio, permitió conocer la sucesión de diferentes emisiones que se producían en las muestras analizadas, y la observación de que el producto final estable era un isótopo del plomo [9]. Más adelante, Rutherford y Soddy [10] plantearon la posibilidad de que el propio radio fuera un eslabón intermedio de una cadena de desintegración mayor que comenzase con el uranio. Sus sospechas se fundamentaban en el hecho de que el radio siempre se halla en minerales de uranio, como la peblenda. Posteriormente, la investigación que se llevó a cabo al respecto mostró que estaban en lo cierto.

En la *Figura 6* mostramos el esquema de desintegración correspondiente a la familia del  $^{238}\text{U}$ , que decae hasta generar  $^{206}\text{Pb}$  estable. Además, destacamos que el  $^{226}\text{Ra}$  estudiado por los Curie ocupa la sexta posición en la cadena. Por otro lado, en la *Tabla 1* se visualizan los valores de las semividas, con sus incertidumbres y unidades, de los elementos de la serie radiactiva, que han sido obtenidos en la base de datos NutDat3 del NNDC [11] (National Nuclear Data Center). Finalmente, cabe mencionar que aquella imagen ha sido extraída de la interfaz de la herramienta informática desarrollada y, de ella, se han excluido elementos de la familia con una

probabilidad parcial de aparición por ramificación de la cadena menor al 0,001%: el  $^{206}\text{Hg}$  y el  $^{210}\text{Bi}$ , a los que decaen el  $^{210}\text{Pb}$  y el  $^{210}\text{Bi}$ , respectivamente, emitiendo radiación alfa.

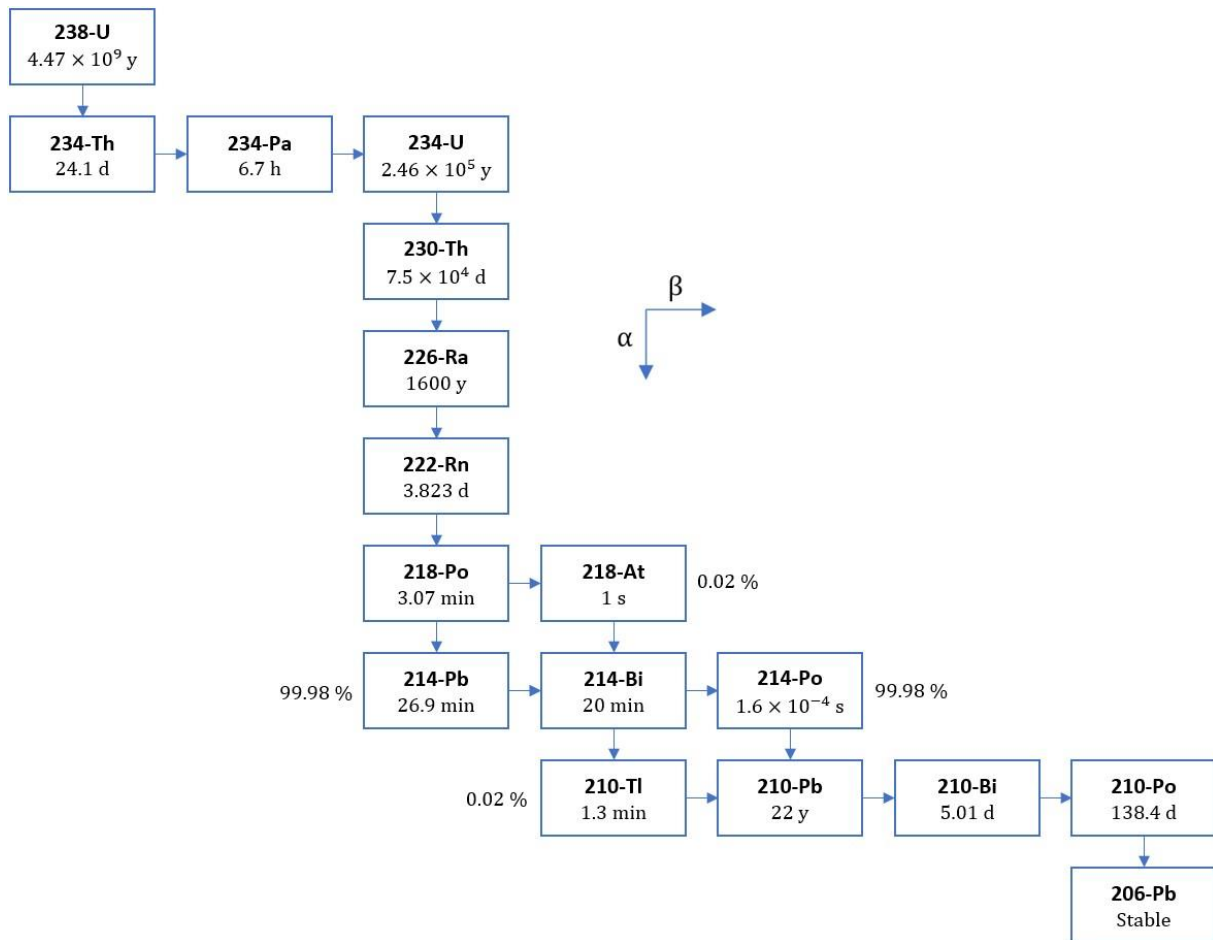


Figura 6. Diagrama de decaimiento correspondiente a la serie radiactiva del  $^{238}\text{U}$ .

### 2.2.2. Serie del $^{232}\text{Th}$ o $4n$ .

Esta familia radiactiva fue investigada poco después que la del  $^{238}\text{U}$ , cuando el matrimonio Curie halló también presencia de radio en sales de torio y determinó su carácter radiactivo. El  $^{232}\text{Th}$ , descubierto en 1828 por Jakob Berzelius, es el eslabón inicial de la cadena radiactiva, y se puede emplear como combustible nuclear debido a su alta capacidad para ser fisionado. Esta tecnología se encuentra aún en fase de desarrollo, pero tiene un gran futuro por delante debido, fundamentalmente, a la mayor seguridad que proporciona frente a los reactores de uranio [9].

Asimismo, encontramos el esquema de desintegración de la serie del  $^{232}\text{Th}$  en la Figura 7, que concluye con la producción de  $^{208}\text{Pb}$ . La imagen es, de nuevo, la empleada en la aplicación. Por otra parte, en la Tabla 2 se muestran los valores de las semividas para los elementos de esta cadena, recogidos por el NNDC [11].



Datos de la serie radiactiva del $^{238}\text{U}$	
Radionúclidos	Semividas $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$
238-U	$(4,468 \pm 0,006) \times 10^9 \text{ y}$
234-Th	$(24,10 \pm 0,03) \text{ d}$
234-Pa	$(6,70 \pm 0,05) \text{ h}$
234-U	$(2,455 \pm 0,006) \times 10^5 \text{ y}$
230-Th	$(7,54 \pm 0,03) \times 10^4 \text{ d}$
226-Ra	$(1600 \pm 7) \text{ y}$
222-Rn	$(3,8235 \pm 0,0004) \text{ d}$
218-Po	$(3,098 \pm 0,012) \text{ m}$
218-At	$(1,5 \pm 0,3) \text{ s}$
214-Pb	$(27,06 \pm 0,07) \text{ m}$
214-Bi	$(19,9 \pm 0,4) \text{ m}$
214-Po	$(1,640 \pm 0,003) \times 10^{-4} \text{ s}$
210-Tl	$(1,30 \pm 0,03) \text{ m}$
210-Pb	$(22,20 \pm 0,22) \text{ y}$
210-Bi	$(5,012 \pm 0,005) \text{ d}$
210-Po	$(138,376 \pm 0,002) \text{ d}$
206-Pb	$+\infty$ (Estable)

Tabla 1. Datos de la serie radiactiva del  $^{238}\text{U}$  extraídos de NuDat3 [11].

### 2.2.3. Serie del $^{235}\text{U}$ o $4n + 3$ .

La serie radiactiva del  $^{235}\text{U}$ , descubierto en 1935 por Arthur Jeffrey Dempster, se estudió con especial interés a partir de 1938, cuando Otto Hahn descubrió la elevada energía producida al fisiónar átomos de uranio. En particular, el isótopo de número másico 235, aunque mucho menos común ( $\sim 0,715\%$ ), resulta más útil para esta actividad que el 238 ( $\sim 99,28\%$ ) [9].

Adicionalmente, mostramos el esquema de decaimiento de la familia del  $^{235}\text{U}$  en la *Figura 8*, que finaliza con el  $^{207}\text{Pb}$ . Este diagrama también pertenece a la interfaz del programa. Asimismo, la *Tabla 3* contiene los valores experimentales de las semividas de los elementos de la cadena, extraídos de la base de datos del NNDC [11]. Por último, en relación con la serie de desintegración real, hemos suprimido el  $^{227}\text{Ra}$ ,  $^{219}\text{At}$  y  $^{215}\text{Bi}$  por tener probabilidades parciales de manifestarse menores al 0,001%. El primero de estos elementos procede del  $^{231}\text{Th}$ , el segundo, del  $^{223}\text{Th}$ , y el último, del  $^{219}\text{At}$ , y los tres son generados a partir de decaimientos alfa.

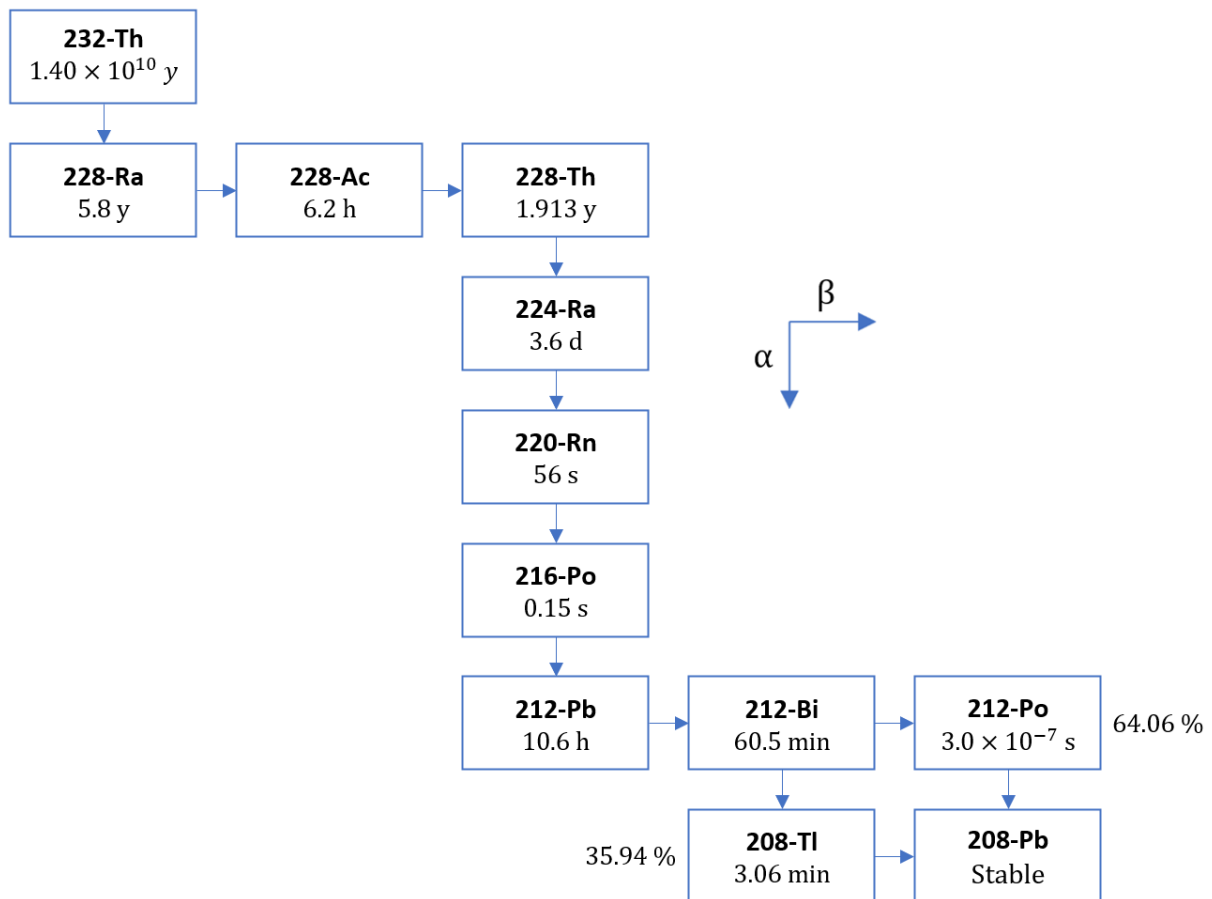


Figura 7. Diagrama de decaimiento correspondiente a la serie radiactiva del  $^{232}\text{Th}$ .

Datos de la serie radiactiva del $^{232}\text{Th}$	
Radionúclidos	Semividas $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$
$^{232}\text{Th}$	$(1,400 \pm 0,010) \times 10^{10}$ y
$^{228}\text{Ra}$	$(5,75 \pm 0,03)$ y
$^{228}\text{Ac}$	$(6,150 \pm 0,020)$ h
$^{228}\text{Th}$	$(1,9125 \pm 0,0009)$ y
$^{224}\text{Ra}$	$(3,6319 \pm 0,0023)$ d
$^{220}\text{Rn}$	$(55,60 \pm 0,10)$ s
$^{216}\text{Po}$	$(0,1450 \pm 0,0020)$ s
$^{212}\text{Pb}$	$(10,640 \pm 0,010)$ h
$^{212}\text{Bi}$	$(60,55 \pm 0,06)$ h
$^{212}\text{Po}$	$(2,99 \pm 0,02) \times 10^{-7}$ s
$^{208}\text{Tl}$	$(3,053 \pm 0,004)$ m
$^{208}\text{Pb}$	$+\infty$ (Estable)

Tabla 2. Datos de la serie radiactiva del  $^{232}\text{Th}$  extraídos de NuDat3 [11].

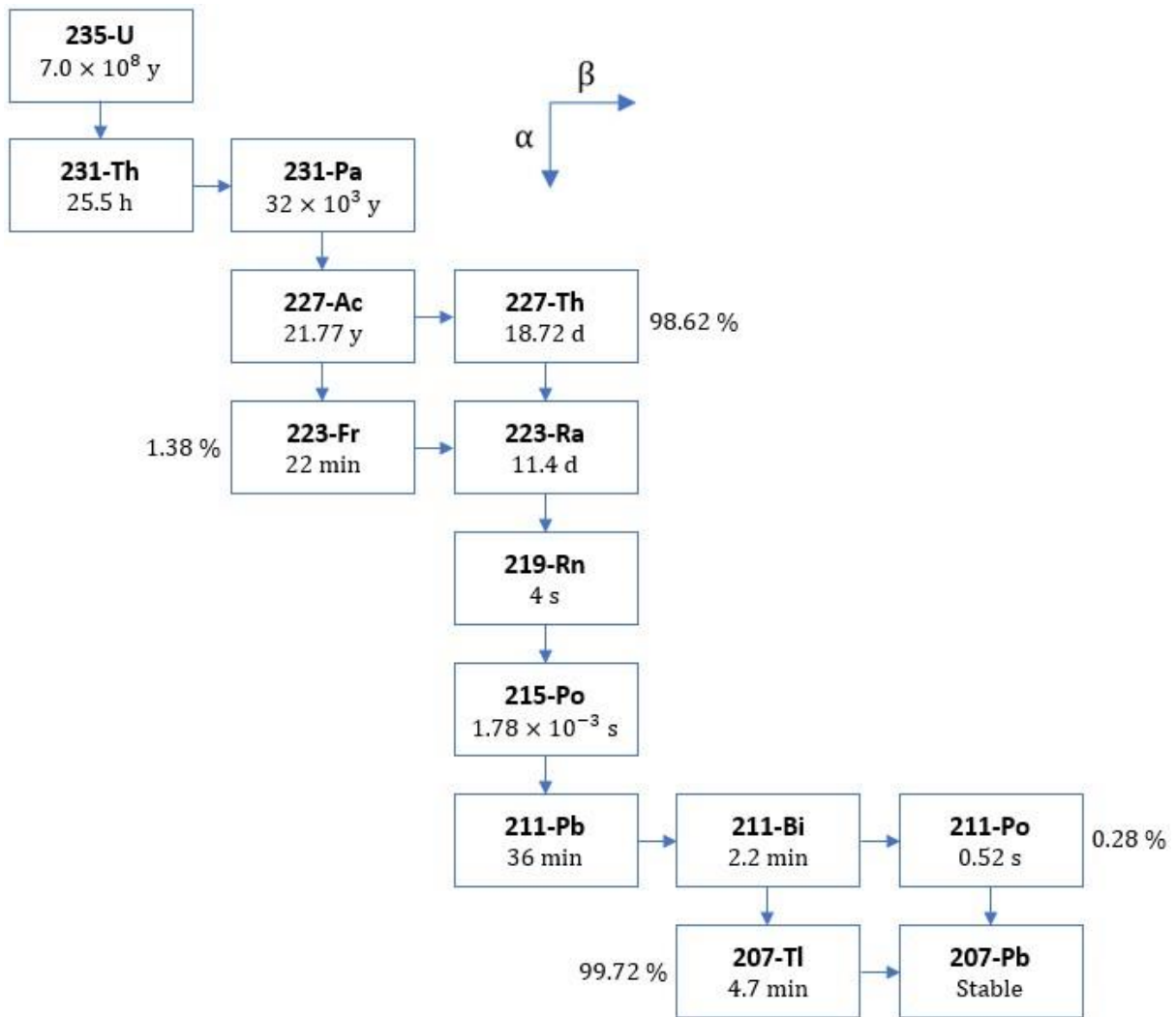


Figura 8. Diagrama de decaimiento correspondiente a la serie radiactiva del  $^{235}\text{U}$ .

### 2.3. La radiactividad artificial y serie del $^{237}\text{Np}$ o $4n + 1$ .

La radiactividad artificial fue descubierta por Irène y Frédéric Joliot-Curie en 1934, que estudiaron el decaimiento beta del  $^{13}\text{N}^*$ , un isótopo inestable nunca antes observado. El origen de este fenómeno se encuentra en la actividad humana reciente del último siglo, que ha dado lugar a la implementación de nuevos radionúclidos en la Naturaleza. Estos se han obtenido como productos en el desarrollo y empleo tanto de reactores nucleares y aceleradores de partículas, como tecnología armamentística nuclear [4].

Entre ellos, nos centraremos en una familia radiactiva que estaba extinta, hasta su recuperación por McMillan y Abelson en 1940 [9], debido a que las semividas de los núcleos iniciales que la componen son relativamente cortas con respecto a la edad actual de la Tierra. Esta serie es la del  $^{237}\text{Np}$  o  $4n + 1$ , que concluye con  $^{205}\text{Tl}$ , como se aprecia en su diagrama de decaimiento en la Figura 9. Para concluir, hemos agrupado los valores de las semividas correspondientes a los componentes de la cadena y recogidos por el NNDC [11] en la Tabla 4.

Datos de la serie radiactiva del $^{235}\text{U}$	
Radionúclidos	Semividas $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$
235-U	$(7,040 \pm 0,010) \times 10^6$ y
231-Th	$(25,520 \pm 0,010)$ h
231-Pa	$(3,267 \pm 0,011) \times 10^5$ y
227-Ac	$(21,772 \pm 0,003)$ y
227-Th	$(18,697 \pm 0,007)$ d
223-Fr	$(22,00 \pm 0,07)$ m
223-Ra	$(11,43 \pm 0,05)$ d
219-Rn	$(3,960 \pm 0,010)$ s
215-Po	$(1,781 \pm 0,004) \times 10^{-3}$ s
211-Pb	$(36,10 \pm 0,20)$ m
211-Bi	$(2,140 \pm 0,020)$ m
211-Po	$(0,516 \pm 0,003)$ s
207-Tl	$(4,77 \pm 0,03)$ m
207-Pb	$+\infty$ (Estable)

Tabla 3. Datos de la serie radiactiva del  $^{235}\text{U}$  extraídos de NuDat3 [11].

#### 2.4. Equilibrio secular en las series radiactivas y datación geológica.

Los minerales que contienen de forma natural radionúclidos pueden ser estudiados para datar fenómenos de origen geológico o atmosférico a partir de las medidas de actividad radiactiva o población de dichos elementos.

Cuando se tratan muestras que se suponen con antigüedad del orden de tiempos geológicos (millones de años o superior), se emplean medidas de poblaciones por espectrometría de masas. Así, en 1956, C.C. Patterson calculó una edad de la Tierra de unos cuatro mil quinientos cincuenta millones de años, que coincide con resultados posteriores, introduciendo el método de datación U-Pb que aplicó a los restos de un meteorito hallado en Arizona [4]. En cambio, para muestras más recientes, se emplean los valores de actividad. Esta diferenciación se fundamenta en que, para las sales de mayor edad con elementos radiactivos de semividas muy elevadas (por ejemplo, los que encabezan las series radiactivas naturales), el equilibrio secular está completamente establecido y las razones de actividades padre-hijo no aportan más información. Sin embargo, si el equilibrio secular aún no se ha manifestado, el

cociente de actividades es distinto de la unidad y puede ser usado para calcular la edad de la muestra, empleando las soluciones de las ecuaciones de Bateman. En muchos casos, es necesario emplear cocientes de actividades de radionúclidos que pertenecen a la misma cadena radiactiva, con expresiones sin solución analítica, por lo que el cálculo de los tiempos debe realizarse por métodos gráficos o numéricos. Cabe mencionar que, debido a que diferentes radioisótopos tienen semividas distintas, cada método de datación que emplee núcleos diferentes, será válido para calcular edades dentro de un cierto rango, distinto al de los demás, en general [12].

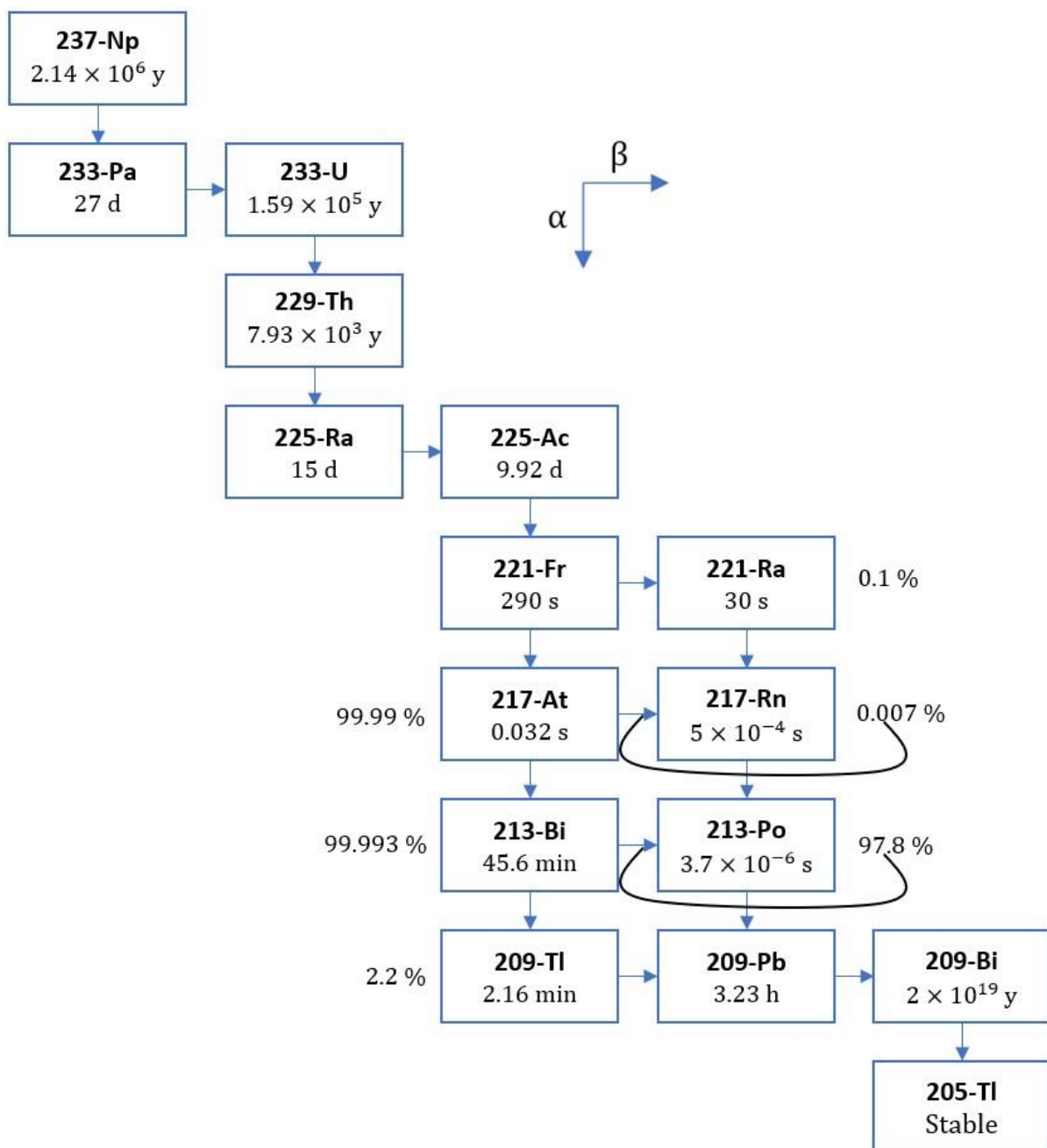


Figura 9. Diagrama de decaimiento correspondiente a la serie radiactiva del  $^{237}\text{Np}$ .

Datos de la serie radiactiva del $^{237}\text{Np}$	
Radionúclidos	Semividas $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$
237-Np	$(2,144 \pm 0,007) \times 10^6 \text{ y}$
233-Pa	$(26,975 \pm 0,013) \text{ d}$
233-U	$(1,5920 \pm 0,0020) \times 10^5 \text{ y}$
229-Th	$(7932 \pm 28) \text{ y}$
225-Ra	$(14,90 \pm 0,10) \text{ d}$
225-Ac	$(9,920 \pm 0,003) \text{ d}$
221-Fr	$(286,1 \pm 1,0) \text{ s}$
221-Ra	$(28,0 \pm 2,0) \text{ s}$
217-At	$(3,23 \pm 0,04) \times 10^{-2} \text{ s}$
217-Rn	$(5,4 \pm 0,5) \times 10^{-4} \text{ s}$
213-Bi	$(45,61 \pm 0,06) \text{ m}$
213-Po	$(3,720 \pm 0,020) \times 10^{-6} \text{ s}$
209-Tl	$(2,162 \pm 0,007) \text{ m}$
209-Pb	$(3,234 \pm 0,007) \text{ h}$
209-Bi	$(2,01 \pm 0,08) \times 10^{19} \text{ y}$
205-Tl	$+\infty$ (Estable)

Tabla 4. Datos de la serie radiactiva del  $^{237}\text{Np}$  extraídos de NuDat3 [11].

En ocasiones ocurre que un sistema en equilibrio secular es alterado por algún factor externo que varía las concentraciones de uno o más radioisótopos presentes y se crea una muestra nueva en desequilibrio. De este modo, es posible que si se estudia un mineral que ha sufrido dicho tipo de transformación, al analizarlo encontremos una situación de no equilibrio en la que podemos aplicar métodos de datación por cocientes de actividades. Así ocurre, por ejemplo, con el procedimiento que implica a los isótopos  $^{230}\text{Th}$ ,  $^{238}\text{U}$  y  $^{234}\text{U}$ , empleado en datación de carbonatos cálcicos terrestres o marinos, como los que se encuentran en fósiles de corales o en los distintos espeleotemas de las cuevas naturales. En tales casos, la razón principal por la que se produce el desequilibrio en las proporciones de radionúclidos es que dichos minerales son originados por sedimentación por parte de las aguas naturales. Resulta que, en estas condiciones, las sales de torio no son solubles, mientras que las de los isótopos de uranio sí que lo son. Por tanto, el agua deposita en el material por el que fluye ciertas concentraciones de isótopos de uranio, que decaerán dando lugar a  $^{230}\text{Th}$ , según el esquema de la *Figura 6*, en

situación de desequilibrio [12].

3. Desarrollo de una herramienta informática para cálculo de radiactividades y poblaciones con las soluciones de las ecuaciones de Bateman (RaPCUBES: Radioactivity and Population Calculator Using Bateman Equations' Solutions).

La aplicación RaPCUBES ha sido desarrollada empleando la utilidad App Designer, disponible en MATLAB, que simplifica la creación y distribución de los diferentes elementos que componen la interfaz de usuario. También permite crear herramientas independientes que solo precisan del software necesario para interpretar la aplicación, sin necesidad de tener preinstalado o estar registrado en MATLAB. Sin embargo, no facilita muchos recursos estéticos de personalización. En lo referente a la confección del código, App Designer incluye la mayoría de las demás funcionalidades de MATLAB, el mismo lenguaje de programación, y un aspecto muy agradable y reconocible para aquellos que conozcan la escritura en script y la elaboración de funciones.

A lo largo de este apartado, vamos a analizar diferentes aspectos acerca de la evolución, código, aspecto final y modo de empleo de RaPCUBES. Dividiremos la explicación de la misma manera en que está organizada la aplicación: base de datos, funciones de computación, funciones auxiliares e interfaz de usuario.

### 3.1. Base de datos.

Uno de los apartados más importantes a considerar a la hora de construir una aplicación es la elaboración de una base de datos. Esta es fundamental para simplificar la entrada de información por parte del usuario que utiliza la herramienta, de forma que también se evitan posibles errores a la hora de introducir valores en la interfaz. Por contra, es el programador quien debe recopilar la información requerida y asegurarse de que es lo más correcta posible. Nosotros la hemos extraído de la página oficial del NNDC [11].

Con respecto al tipo de base de datos empleada, la hemos elaborado en Excel con varios documentos. Las razones de esta elección son: se trata de una utilidad con amplia difusión y se posee conocimiento avanzado de la misma, tiene una alta compatibilidad con MATLAB y, al ser tan conocida y manejable, en caso de publicar una versión editable del programa, sería muy sencillo para cualquier usuario actualizar o ampliar la base de datos.

A continuación, vamos a explicar cada uno de los elementos que componen nuestra base de datos. En primer lugar, tenemos un documento con el nombre de las cuatro familias radiactivas entre las que puede elegir el usuario ( $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  y  $^{237}\text{Np}$ ). Después,

encontramos otros cuatro archivos más, uno por serie radiactiva. En cada uno de ellos hay tres fichas con diferentes tipos de información: semividas, probabilidades y cadenas lineales o ramas. Veámoslas apoyándonos en el documento que utilizamos para el caso de la familia del  $^{232}\text{Th}$ , teniendo en mente el esquema mostrado en la *Figura 7*.

La primera ficha del archivo, como la de la *Figura 10*, recoge, distribuidos en columnas, los nombres de todos los elementos de la cadena, sus respectivas semividas, las incertidumbres de estas, y la unidad de tiempo en la que están expresadas. Cabe destacar que los últimos núcleos de cada serie, los estables, también han sido incluidos, pero con valor de semivida de cero segundos, lo cual no es cierto. En cambio, sí que resulta útil para agilizar algunas operaciones del programa relacionadas con longitudes de vectores de datos, y así evitar alguna que otra operación lógica de más. Finalmente, la última columna refleja la generación, dentro de la cadena de desintegración, a la que pertenece cada radionúclido.

Nucleus	Half_life	Error	Unit	Generation
Th-232	1.40E+10	1.00E+08	y	1
Ra-228	5.75	3.00E-02	y	2
Ac-228	6.15	2.00E-02	h	3
Th-228	1.91E+00	9.00E-04	y	4
Ra-224	3.63E+00	2.30E-03	d	5
Rn-220	55.6	0.1	s	6
Po-216	0.145	2.00E-03	s	7
Pb-212	10.64	1.00E-02	h	8
Bi-212	60.55	6.00E-02	m	9
Po-212	2.99E-07	2.00E-09	s	10
Tl-208	3.053	0.004	m	10
Pb-208	0.00E+00	0.00E+00	s	11

*Figura 10. Ficha de la base de datos para la serie del  $^{232}\text{Th}$  en la que se recogen los valores de las semividas, junto a sus incertidumbres y unidades de medida, así como las generaciones, de todos los elementos de la cadena radiactiva.*

Después, la segunda ficha muestra una matriz con la probabilidad parcial de que cada núcleo transmute a otro. En la *Figura 11* podemos ver que la primera columna está ocupada por los posibles núcleos hijo, mientras que en la cabecera aparecen ordenados los mismos elementos, pero como padres. De esta forma, en cada columna los valores nulos indican que no hay relación de parentesco, las unidades aparecen cuando el hijo es único, y las cantidades no enteras expresan las probabilidades de decaimiento a cada uno de los radioisótopos hermanos.

Finalmente, en la última ficha aparecen los diferentes caminos posibles que llevan desde el primer núcleo de la familia al último (estable). Como muestra la *Figura 12*, cada rama viene



descrita en una columna y los núcleos están representados por números referidos al orden en que aparecían en la *Figura 10*.

Para concluir, nuestra base de datos incluye una carpeta con las imágenes de los diagramas de decaimiento que vimos en los apartados 2.2 y 2.3.

Daughters	Th-232	Ra-228	Ac-228	Th-228	Ra-224	Rn-220	Po-216	Pb-212	Bi-212	Po-212	Tl-208	Pb-208
Th-232	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ra-228	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ac-228	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Th-228	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ra-224	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Rn-220	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Po-216	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Pb-212	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Bi-212	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Po-212	0	0	0	0	0	0	0	0	0,6406	0	0	0
Tl-208	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3594	0	0	0
Pb-208	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

*Figura 11. Ficha de la base de datos para la serie del  $^{232}\text{Th}$  en la que se recogen los valores de las probabilidades parciales de decaimiento de cada radionúclido a sus hijos.*

Branch_1	Branch_2
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	11
12	12

*Figura 12. Ficha de la base de datos para la serie del  $^{232}\text{Th}$  en la que se recogen las posibles ramas de decaimiento que se pueden dar.*

### 3.2. Funciones de computación.

La herramienta informática RaPCUBES permite el cálculo de actividades radiactivas y poblaciones de los elementos de cualquiera de las series definidas anteriormente:  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  y  $^{237}\text{Np}$ . Las operaciones son realizadas con las premisas habituales de que: inicialmente solo hay población y actividad de uno de los radionúclidos, la muestra está aislada y toda presencia de radioisótopos se debe al decaimiento del primer elemento. En estas circunstancias, las ecuaciones (13) y (15) son válidas, al igual que los resultados obtenidos en los puntos 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.5.

### 3.2.1. Datos requeridos por las calculadoras principales.

La aplicación necesita ciertos datos de entrada que son una combinación de elecciones y medidas tomadas por el usuario, e información recogida en la base de datos. Para comenzar, precisa de la selección de la familia radiactiva con la que se desea trabajar, y del radionúclido primitivo de la muestra de estudio, además de la fecha en que esta se colectó. Adicionalmente, requiere que se introduzcan el elemento del que se ha medido la radiactividad, el valor de esta, su incertidumbre y el instante en el que se obtuvo la medida. Por último, hay que definir el momento en el que se quieren calcular las actividades y poblaciones. Por supuesto, todo lo comentado en el apartado 3.1 es de utilidad para efectuar los cálculos.

### 3.2.2. Calculadora de la población inicial del núcleo primitivo.

Como vemos en la ecuación (13), necesitamos conocer la población inicial del primer núcleo de la serie que está presente en la muestra estudiada para calcular el resto de poblaciones en el instante requerido, y aplicar después (15) para conseguir los valores de actividad. Dado que la única entrada de datos numérica es la actividad del radionúclido medido con su incertidumbre, debemos elaborar una función que la utilice para la evaluación de esa población inicial. Su expresión la podemos obtener despejando  $N_1(0)$  de la ecuación (13) y combinándola con la (15). También hay que tener en cuenta los diferentes caminos de desintegración por los que se puede alcanzar el isótopo medido desde el que inicia la muestra, llegando a

$$N_1(0) = \sum_{\text{caminos de desintegración}} \frac{A_n(t_{\text{medida}})}{\prod_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \right)}, \quad (24)$$

donde el elemento correspondiente al subíndice  $n$  es aquel que ha sido medido, y  $t_{\text{medida}}$  es el tiempo transcurrido entre la colección de la muestra y el momento en el que se ha registrado la actividad. Es importante aclarar que el instante en el que se creó la muestra es el origen de tiempos ( $t = 0$ ) de todas las ecuaciones en las que aparece la variable temporal.

Para resolver las operaciones con MATLAB, hemos elaborado una función que aprovecha los sumatorios y productorios de (24) para operar iterativamente con bucles. El principal de estos es el que recorre todos los caminos de decaimiento posibles. Dentro de él se desarrollan los demás. El primero se encarga del productorio  $\prod_{i=1}^n \lambda_i$ , el siguiente recrea el sumatorio  $\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)}$  y, a su vez, para cada término efectúa un último bucle que produce  $\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)$ . Finalmente, solo nos queda resolver el cociente de  $A_n(t_{\text{medida}})$  entre el denominador calculado a partir de las expresiones anteriores.

### 3.2.3. Calculadora de valores e incertidumbres en la fecha de cálculo.

La función encargada de calcular actividad y población en el instante requerido por el usuario se basa en la misma idea que el método empleado en el apartado anterior, solo que en este caso emplearemos (15) junto con la expresión

$$N_n(t) = N_1(0) \sum_{\text{caminos de desintegración}} \left[ \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left( \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t_{\text{cálculo}}}}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \right) \right], \quad (25)$$

donde  $t_{\text{cálculo}}$  es el tiempo transcurrido entre la creación de la muestra y el momento en el que el usuario quiere obtener los resultados. También es necesario en este apartado un nuevo bucle que recorra los diferentes radionúclidos presentes en la muestra, y que aparecerán entre los valores calculados.

Además, esta parte del programa computa las incertidumbres de las dos magnitudes. Para este fin, elegimos la propagación cuadrática media, dada por la fórmula

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x\right)^2}. \quad (26)$$

Así, vamos calculando las incertidumbres de los distintos elementos, sumatorios y productorios, y las asociamos entre sí hasta alcanzar el resultado final. Cabe mencionar que las derivadas presentes en (26) las hemos calculado a mano e introducido sus expresiones, al igual que hacemos con las soluciones de las ecuaciones de Bateman, aprovechando los bucles.

### 3.2.4. Calculadora de evolución temporal de actividades y poblaciones.

La función a cargo de las evoluciones temporales para las representaciones gráficas es prácticamente idéntica a la que obtiene valores instantáneos, a excepción de algunas cuestiones. En primer lugar, en este caso no hemos considerado el cálculo de incertidumbres. Además, ahora las expresiones a calcular son

$$\vec{N}_n = N_1(0) \sum_{\text{caminos de desintegración}} \left[ \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left( \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k \vec{t}_{\text{evolución}}}}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \right) \right] \quad (27)$$

y

$$\vec{A}_n = \lambda_n \vec{N}_n, \quad (28)$$

en las que  $\vec{t}_{\text{evolución}}$  es un vector que recoge una muestra de valores de tiempo en los que se van a calcular la actividad y población de cada núcleo, dadas por los vectores  $\vec{A}_n$  y  $\vec{N}_n$ , respectivamente. Con el objetivo de que las curvas representadas se vean suaves,  $\vec{t}_{\text{evolución}}$

consta de diez mil componentes equiespaciadas entre el momento en el que se originó la muestra y el doble de  $t_{\text{cálculo}}$ . De esta forma, podemos visualizar el comportamiento de la muestra en el pasado y durante un periodo considerable hacia el futuro.

### 3.3. Funciones auxiliares.

Cualquier programa informático requiere de una cierta cantidad de funciones auxiliares que se encarguen del correcto funcionamiento de esta, más allá de la obtención de resultados. Para la elaboración de RaPCUBES, ha sido necesario un buen número de ellas, que podemos dividir en tres grupos claramente diferenciados según su ámbito de trabajo: buscadores de datos e imágenes, calculadoras secundarias, buscadores de errores y recuperadores de valores y aspecto por defecto.

#### 3.3.1. Buscadores de datos e imágenes.

Las funciones buscadoras de datos se encargan de aportar información a los diferentes elementos de interacción de la interfaz de usuario, y de obtener los valores requeridos para las operaciones numéricas, todos ellos procedentes de la base de datos.

En primer lugar, necesitamos que al iniciar la aplicación aparezcan los nombres de las familias radiactivas con las que podemos trabajar. Para ello, una función accede al primer archivo de la base de datos y coloca los elementos en una lista. Una vez el usuario selecciona la serie que requiere, deben aparecer todos los miembros de la cadena como opciones para ser elegidos como radionúclido primario de la muestra. Entonces, una nueva función debe acceder al documento correspondiente a la serie y guardar los nombres de los elementos. Algo similar debe ocurrir cuando especificamos el núcleo primitivo para la lista que permite señalar de qué elemento se ha medido la actividad.

Por otro lado, como ya hemos visto, son necesarias utilidades que recopilen los datos de semividas, probabilidades y posibles caminos de desintegración de la base de datos. Estos, junto con los tiempos y medidas introducidos por el usuario son guardados en constantes que se usarán en múltiples ocasiones a lo largo de los distintos procesos que ocurren en el programa.

Finalmente, hay una función que, cada vez que se selecciona una familia radiactiva diferente, busca en la base de datos de imágenes el esquema de desintegración concerniente para mostrarlo en la interfaz de usuario. También en relación con la carpeta de figuras, existe una última utilidad a cargo de mostrar la imagen con las instrucciones de uso de la aplicación, en una ventana independiente, cada vez que esta se inicia.

### 3.3.2. Calculadoras secundarias.

Otros cálculos adicionales son necesarios, aparte de los efectuados con las soluciones de las ecuaciones de Bateman para obtener poblaciones y actividades, con el objeto de preparar los valores numéricos de entrada antes de realizar esas operaciones. A continuación, iremos enumerando y describiendo brevemente estas funciones de transformación de datos.

#### 3.3.2.1. Función que calcula las diferencias de tiempos entre las fechas introducidas por el usuario.

En la interfaz de usuario de la aplicación, los tiempos que este introduce tienen el formato de hora y fecha. En cambio, en nuestras ecuaciones van a aparecer los valores de tiempo en segundos, y las constantes de decaimiento, en segundos elevados a menos uno, de manera que concuerden las unidades. Por consiguiente, necesitamos una función que evalúe  $t_{\text{medida}}$  en segundos como diferencia de las fechas de medida y colección de la muestra, y otra que haga lo propio con  $t_{\text{cálculo}}$ , y los tiempos de cálculo y creación de la muestra.

#### 3.3.2.2. Función que transforma las semividas recopiladas en la base de datos a constantes de decaimiento.

Los valores de semividas de todos los radionúclidos están expresados, como vimos en la *Figura 10* del apartado 3.1, cada una en la unidad de tiempo que más comodidad proporciona, y así es como aparecen en las bases de datos habituales, por ejemplo, la del NNDC [11]. Para no complicar demasiado la estructura de la base de datos de RaPCUBES y hacerla más sencilla de modificar, optamos por no realizar ninguna operación con Excel. Esto implica que debemos crear una función que pase todas las semividas a segundos y, a partir de ahí, obtenga las constantes de decaimiento empleando la ecuación (2). La misma operación la llevamos a cabo con los valores de las incertidumbres, de modo que todas las cantidades acaban en unidades de segundos a la menos uno.

#### 3.3.2.3. Función que genera el vector de tiempos a utilizar en la calculadora de evolución temporal.

El cálculo de las evoluciones temporales se basa en una buena elección de valores para la variable independiente, el tiempo en este caso, de forma que se puedan visualizar correctamente las variaciones de las poblaciones y actividades a la hora de representarlas. Consecuentemente, hemos elaborado un vector de tiempos  $\overrightarrow{t_{\text{evolución}}}$  con valores que van desde

el cero (instante en el que se originó la muestra) hasta el doble de  $\overrightarrow{t_{\text{cálculo}}}$ , de manera que el dominio sea lo suficientemente extenso como para comprender el comportamiento de la muestra dentro de los tiempos con los que trabajamos. Asimismo, el vector consta de diez mil componentes que permiten la visualización de curvas de aspecto suave y no cargan demasiado la memoria de la computadora ni los procesos de cálculo, permitiendo una respuesta rápida del programa.

#### 3.3.2.4. Función que calcula los cocientes de poblaciones o actividades.

La última de las funciones secundarias de computación se centra en uno de los aspectos de mayor interés de la interfaz gráfica del programa, permitiendo la representación de razones de actividades radiactivas y poblaciones.

Los cocientes en cuestión son evaluados en el momento de la selección por parte de usuario para ahorrar en tiempo de cálculo pues el número de combinaciones posibles puede ser muy elevado. Cuando el usuario representa la actividad o población de más de un elemento en el elemento gráfico dedicado a ello, aparece la opción de dibujar la evolución del cociente o cocientes concernientes en los ejes dedicados a esta segunda utilidad. Solo son considerados los cocientes entre elementos pertenecientes a diferentes generaciones de la cadena radiactiva, es decir, nunca entre hermanos, y siempre se dividen los valores del núcleo más joven entre los del de mayor antigüedad.

#### 3.3.3. Buscadores de errores.

Las condiciones bajo las que RaPCUBES puede operar son: la actividad inicial de la muestra corresponde a un único radionúclido, y esta no se ve afectada por ningún factor externo.

Aunque con la incorporación de una base de datos fiable y su interacción con la interfaz de usuario hemos logrado evitar un gran número de situaciones que violen dichas normas, aún hemos permitido cierta posibilidad de error en caso de que el usuario introduzca valores incorrectos de las fechas de trabajo. Más concretamente, nuestro programa solo trabajará si las fechas de medida y cálculo son posteriores a la de colección de la muestra. Si no se cumple alguno de estos requisitos, la función que lo detecta interrumpe el proceso de trabajo de la aplicación antes de realizar ninguna operación más, y despliega un mensaje de alerta en pantalla informando sobre el incidente.

Por otra parte, cabe destacar que el proceso de computación del programa se inicia simplemente haciendo clic en un botón de la interfaz, y es posible que este sea seleccionado por error antes de haber rellenado propiamente todos los campos relacionados con datos de

entrada del usuario. Entonces, los cálculos tampoco son posibles, pues falta información requerida, por lo que la misma función que analiza los valores de las fechas se encarga de encontrar estos huecos por completar, incluyéndolos en el mensaje de alerta que desplegará en caso necesario.

Finalmente, puede ocurrir que el usuario introduzca involuntariamente algún tipo de símbolo no numérico en alguno de los apartados destinados a recoger datos de este tipo relacionados con magnitudes. Estas circunstancias pueden darse en las tablas que contienen las fechas y los elementos de actividad medida e incertidumbre correspondiente. De nuevo, existe una utilidad que, en estos casos, devuelve los valores por defecto.

#### 3.3.4. Recuperadores de valores y aspecto por defecto.

La aplicación RaPCUBES está pensada para permitir al usuario jugar todo lo que quiera con la información que esta maneja, dentro de sus limitaciones. Por ello, es conveniente que los valores de todos los campos que muestran resultados o que están relacionados con la entrada de datos se refresquen cuando se producen ciertos cambios en las selecciones dentro de la interfaz. Estos se traducen en vueltas a los valores por defecto, los que aparecen cuando se inicia la aplicación. De esta manera, por ejemplo, si se selecciona una serie radiactiva diferente a otra con la que se acaba de operar, el resto de los objetos que aparecen en pantalla se reinician.

### 3.4. Interfaz de usuario e instrucciones de uso.

La interfaz de usuario de RaPCUBES es el ecosistema de trabajo del usuario con la aplicación, por lo que tenemos que tratar de convertirla en un espacio cómodo, agradable e intuitivo. A lo largo de este apartado, vamos a explicar cómo interactuar con la aplicación y el funcionamiento de todos los elementos manipulables que ofrece. Dividiremos la descripción en las distintas zonas que se muestran en la *Figura 13*: datos de entrada del usuario (1), diagrama de decaimiento de la serie (2), botón para ejecutar la aplicación (3), tabla de resultados (4) y apartado gráfico (5).

#### 3.4.1. Datos de entrada del usuario.

La zona reservada a la entrada de datos del usuario se encuentra en la parte superior izquierda de la interfaz, y es lo primero que se observa al abrir la aplicación. Una imagen de su aspecto la tenemos en la *Figura 14*.

La primera decisión que debe tomar el usuario es con qué familia radiactiva desea trabajar en el desplegable llamado “Decay series”, donde las posibles opciones son los nombres

de las cuatro cadenas que hemos descrito en 2.2 y 2.3:  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  y  $^{237}\text{Np}$ . Entonces, tendremos disponibles todos los elementos de dicha serie para ser seleccionados en “Parent nucleus”, que es el núcleo primitivo de la muestra que se quiere estudiar. Después, podremos elegir la fecha y hora de creación de la muestra en la tabla de “Sampling date”, y elegir, de entre todos los posibles, el radionúclido del que hemos medido la actividad en “Measured nucleus”. Ahora hemos de escribir la actividad medida y su incertidumbre, en Becquerelios, en los apartados “Measured activity” y “Measured activity uncertainty”, respectivamente. A continuación, debemos indicar los datos de la fecha en la que efectuamos la medida, en la tabla de “Measurement date”. Por último, concretamos el momento (hora, minuto, mes, día y año) en que queremos obtener los valores instantáneos calculados por la aplicación, en la tabla “Calculation date”. Con todo ello, la aplicación ya está en disposición de operar.

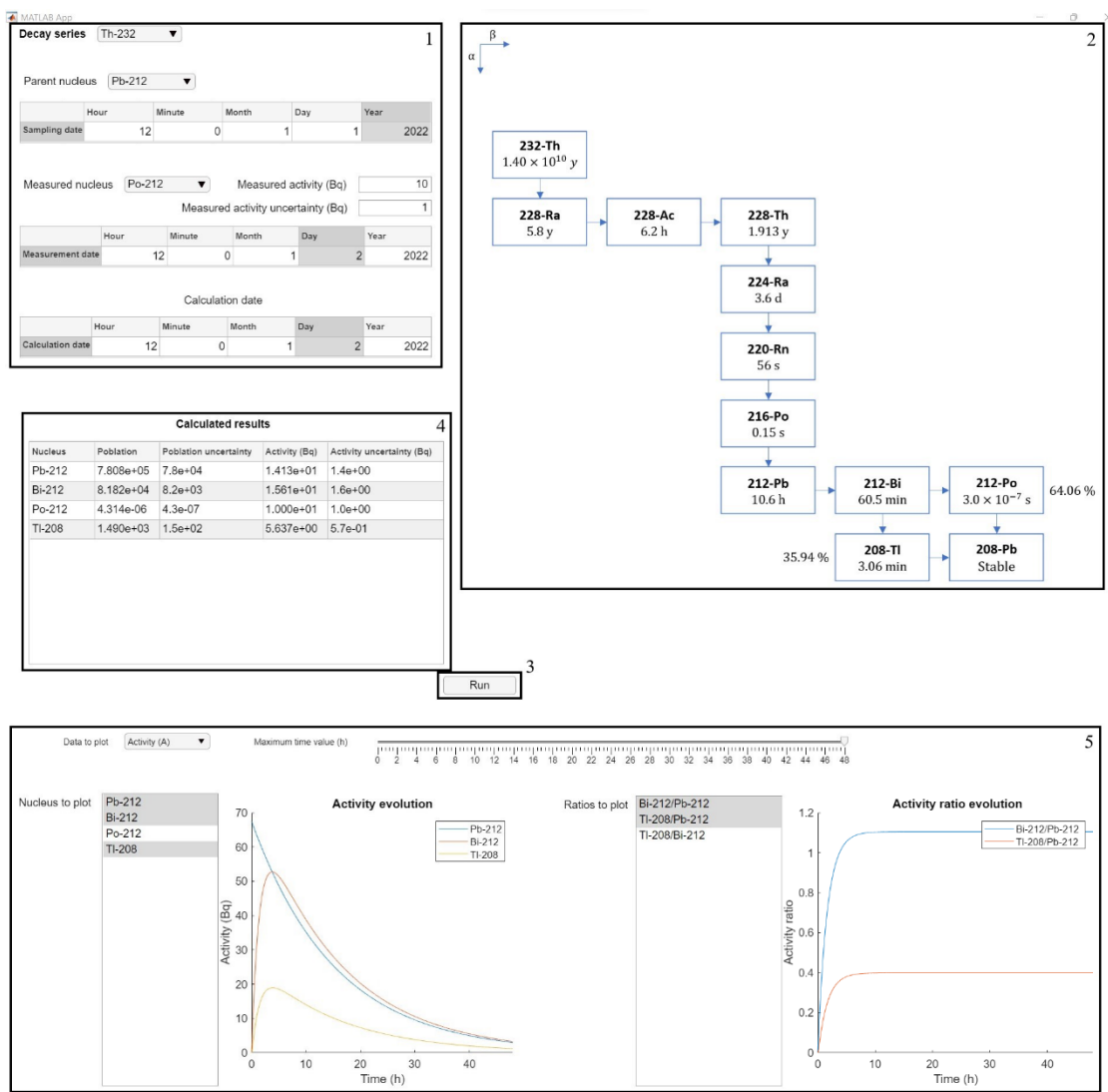


Figura 13. Interfaz completa de la aplicación RaPCUBES, en la que aparecen enmarcadas cada una de sus secciones principales: datos de entrada del usuario (1), diagrama de decaimiento de la serie (2), botón para ejecutar el programa (3), tabla de resultados (4) y apartado gráfico (5).



Decay series

Parent nucleus

	Hour	Minute	Month	Day	Year
Sampling date	12	0	1	1	2022

Measured nucleus  Measured activity (Bq)

Measured activity uncertainty (Bq)

	Hour	Minute	Month	Day	Year
Measurement date	12	0	1	2	2022

Calculation date

	Hour	Minute	Month	Day	Year
Calculation date	12	0	1	2	2022

Figura 14. Sección de la interfaz de RaPCUBES correspondiente a la entrada de datos por parte del usuario.

### 3.4.2. Diagrama de decaimiento de la serie.

El diagrama de decaimiento de la serie ocupa un área considerable situada la zona superior derecha de la interfaz, y tiene el aspecto de la *Figura 15*. Se muestra cuando la familia correspondiente es seleccionada en el desplegable “Decay series” descrito en el apartado anterior, cambiando con este. En caso de que no haya ninguna cadena marcada, la imagen se queda en blanco. Únicamente está siempre presente el indicador del tipo de decaimiento, arriba a la izquierda. Como este refleja, los decaimientos de tipo alfa de los esquemas son representados por flechas verticales que apuntan para abajo, mientras que las desintegraciones beta vienen dadas por flechas horizontales y hacia la derecha.

### 3.4.3. Botón para reproducir la aplicación y tabla de resultados.

Los elementos analizados hasta el momento no están directamente relacionados con los procesos de cálculo. Para ello, existe un botón con el letrero de “Run” escrito sobre él y situado al lado de la tabla de resultados, como vemos en la *Figura 16*, bajo la zona de entrada de datos. Una vez pulsado, si los buscadores de errores detectan algún dato de entrada incorrecto o incompleto el proceso de operaciones es interrumpido y aparece una ventana de alerta con los fallos cometidos descritos en ella. En cambio, si toda la información introducida es válida, se muestran los resultados calculados en la tabla titulada “Calculated results”, conformada por cinco columnas. En ellas se organizan los nombres de todos los elementos de la serie presentes en la muestra de estudio, y las actividades radiactivas y poblaciones de los mismo, junto con las respectivas incertidumbres.

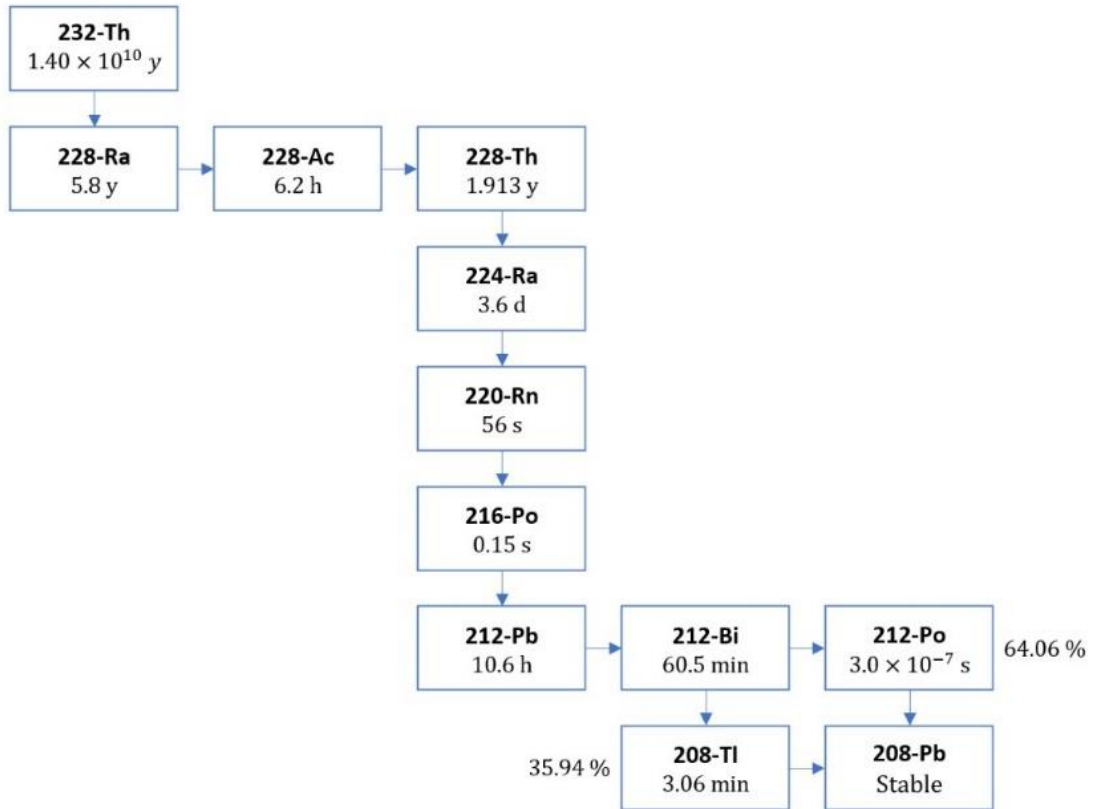


Figura 15. Sección de la interfaz de RaPCUBES dedicada a los diagramas de decaimiento de las diferentes series radiactivas.

**Calculated results**

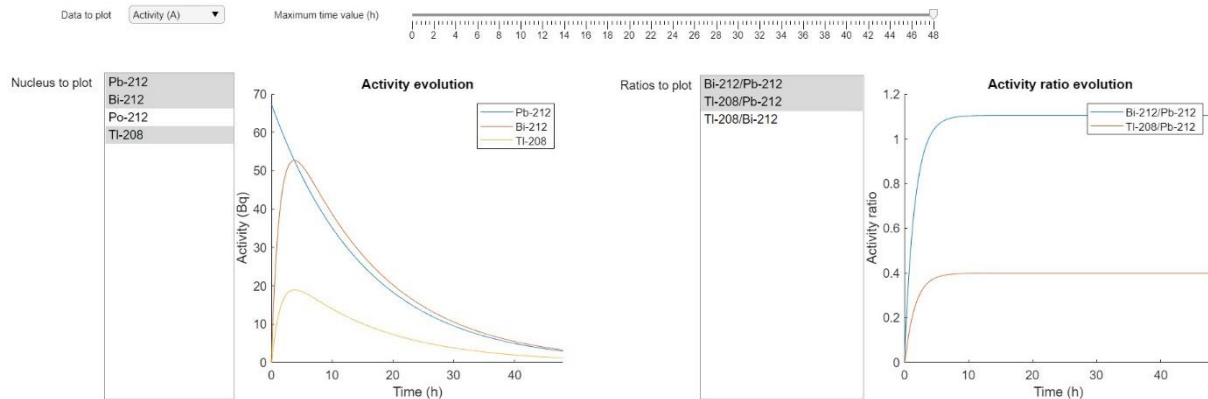
Nucleus	Poblation	Poblation uncertainty	Activity (Bq)	Activity uncertainty (Bq)
Pb-212	7.808e+05	7.8e+04	1.413e+01	1.4e+00
Bi-212	8.182e+04	8.2e+03	1.561e+01	1.6e+00
Po-212	4.314e-06	4.3e-07	1.000e+01	1.0e+00
Tl-208	1.490e+03	1.5e+02	5.637e+00	5.7e-01

Run

Figura 16. Sección de la interfaz de RaPCUBES dedicada a la tabla de resultados instantáneos y el botón que ejecuta el programa.

### 3.4.4. Apartado gráfico.

El apartado gráfico de la aplicación RaPCUBES, situado en la parte inferior de la interfaz, es probablemente el más útil e interesante de todos, aunque también el más complejo de utilizar. En la *Figura 17*, ilustramos su apariencia y nos servirá de apoyo en las explicaciones que siguen.



*Figura 17. Sección de la interfaz de RaPCUBES que recoge todos los elementos relacionados con la representación gráfica de resultados.*

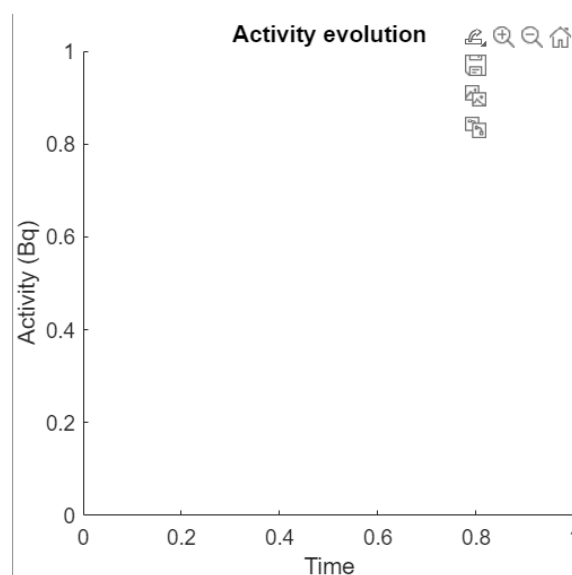
En primer lugar, arriba a la izquierda encontramos un desplegable en el que podemos elegir qué tipo de datos queremos representar: actividades o poblaciones. La selección por defecto es radiactividades. Desde el momento en el que se completan los cálculos tras pulsar el botón “Run”, ya aparecen en la lista de “Nucleus to plot”, a la izquierda, todos los radionúclidos de la serie que participan en el problema. Cada vez que se selecciona uno de ellos, aparece la curva correspondiente en la primera gráfica. Además, la aplicación nos permite dibujar hasta tres líneas a la vez, manteniendo pulsada la tecla CTRL a la vez que clicamos. Sin embargo, nunca podremos tener seleccionados núcleos hermanos simultáneamente.

Por otra parte, a la derecha encontramos la interfaz gráfica dedicada a la representación de cocientes de actividades o poblaciones (según lo seleccionado). Cuando más de un elemento es elegido en “Nucleus to plot”, al instante aparecen el cociente o cocientes competentes en el listado llamado “Ratios to plot”. Estas razones se construyen siempre dividiendo la magnitud asociada al núcleo más joven entre la del de mayor antigüedad. Como consecuencia de la restricción a la hora de representar la evolución de las magnitudes, solo tres ratios estarán disponibles, como máximo, para ser dibujados a la vez.

Finalmente, en la zona superior del apartado gráfico encontramos un elemento deslizable denominado “Maximum time value”, que nos permite acortar el dominio de tiempo que es mostrado en ambas gráficas, fijado al principio en el doble del tiempo de cálculo. Esto

puede resultar útil en el caso de trabajar con radioisótopos con semividas muy dispares, pues, para aquellos con valores de esta magnitud más pequeños, las variaciones en el comportamiento son más rápidas y es posible que necesitemos enfocarnos en los tiempos más bajos.

Para concluir, describiremos algunas funcionalidades extras que MATLAB nos permite incluir en cada uno de los dos gráficos, y que mostramos en la *Figura 18*. Al llevar el ratón a la parte superior derecha de cada par de ejes, dispondremos de un menú con varias utilidades interesantes a tener en cuenta. Primero, encontramos la opción de guardar la figura en diferentes formatos, o bien copiarla como imagen o como gráfico vectorial. A su lado, tenemos dos elementos que nos permiten hacer zum, haciendo clic y arrastrando sobre la zona de interés, o bien alejar el punto de vista, clicando sobre la pantalla. Cabe mencionar que ambas utilidades están también disponibles simplemente desplazando la rueda del ratón, como es habitual. Por último, el símbolo de la casa tiene la función de volver a la visión de la representación por defecto.



*Figura 18. Opciones gráficas adicionales en la parte superior derecha de cada par de ejes: guardar o copiar imagen, hacer zum, alejar punto de vista o volver a visión inicial.*

#### 4. Ejemplos de uso de la aplicación, posibles mejoras y herramientas similares.

La herramienta RaPCUBES, de la que ya conocemos su funcionamiento e instrucciones de uso, puede ser empleada para analizar diferentes situaciones que tienen lugar en los sistemas que contienen radionúclidos pertenecientes a alguna serie radiactiva natural. En esta sección, vamos a comparar los resultados computados por la aplicación con algunos datos publicados en artículos científicos. Después, discutiremos sobre algunas características interesantes que podrían ser añadidas a RaPCUBES en versiones posteriores y comentaremos sus ventajas frente a otros programas similares.

#### 4.1. Comparación de datos expuestos en artículos científicos con resultados calculados por RaPCUBES.

Los datos que vamos a emplear para verificar el buen comportamiento de la aplicación han sido extraídos de dos publicaciones sobre investigaciones relacionadas con la materia que nos ocupa: estimación de riesgo radiológico, estudio de desequilibrios o flujo de masa en familias radiactivas naturales. En particular, veremos, sobre todo, las situaciones de equilibrio descritas en 2.1.5.

##### 4.1.1. Comparativa con resultados extraídos de un artículo sobre los problemas del desequilibrio radiactivo en series naturales presentes en materiales de construcción.

El documento en el que se fundamenta el contenido de este apartado se titula Measurement of radioactivity in building materials – Problems encountered caused by possible disequilibrium in natural decay series y fue publicado en 2018 [13].

La mayoría de los materiales empleados en construcción se componen de materia mineral en bruto que sufre ciertos procesos industriales que las transforman para su posterior utilización. A lo largo de dichas conversiones, son incorporados determinados residuos que pueden contener concentraciones elevadas de radionúclidos naturales y que se denominan NORM (Naturally Occurring Radioactive Materials). Por este motivo, se requiere llevar un control acerca de los niveles de actividad de las sustancias en cuestión, de modo que solo se empleen si el daño que pueden causarnos es mínimo. Como consecuencia, surge la necesidad de elaborar una normativa que regule la dosis máxima permitida que puedan proporcionar a las personas. En el caso de la Unión Europea, se han establecido un techo de  $1 \frac{\text{mSv}}{\text{año}}$ .

Sin embargo, la absorción de radiación por parte del organismo es, en la práctica, imposible de medir de forma directa. Así, la magnitud de interés pasa a ser la actividad, a partir de la cual se pueden efectuar estimaciones más o menos precisas de las dosis correspondientes. Por consiguiente, se ha definido el índice  $I$ , que debe cumplir

$$I = \frac{C_{226-\text{Ra}}}{300 \frac{\text{Bq}}{\text{kg}}} + \frac{C_{232-\text{Th}}}{200 \frac{\text{Bq}}{\text{kg}}} + \frac{C_{40-\text{K}}}{3000 \frac{\text{Bq}}{\text{kg}}} \leq 1 \quad [13], \quad (29)$$

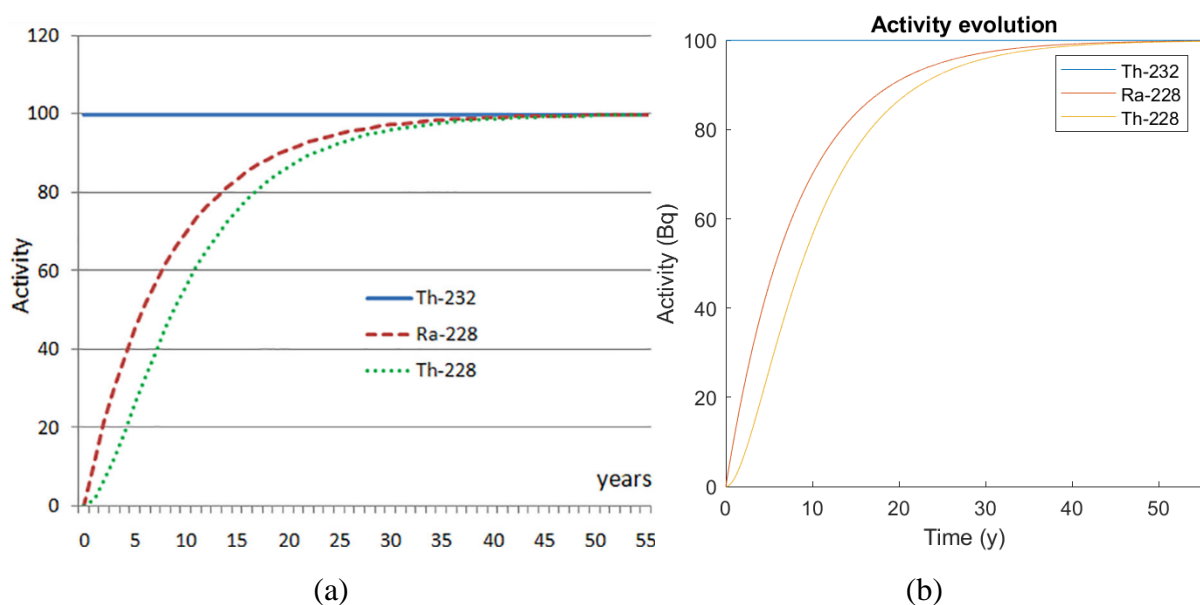
donde los numeradores de las fracciones son las concentraciones máxicas de actividad, expresadas en  $\frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$ , de los radioisótopos  $^{226}\text{Ra}$ ,  $^{232}\text{Th}$  y  $^{40}\text{K}$ , en este orden.

Por otra parte, el método empleado para la evaluación de las radiactividades buscadas es la espectroscopía gamma, que detecta la radiación de este tipo emitida por los radionúclidos de cada cadena participante. Para el caso del  $^{40}\text{K}$ , la medida es directa, pero no para los otros

dos núcleos.

A partir de ahora, nos centraremos en dos disequilibrios que pueden tener lugar en la familia del  $^{232}\text{Th}$  y una de sus subseries. En lo sucesivo, vamos a ignorar la participación del  $^{228}\text{Ac}$ , con una semivida algo superior a seis horas, en la cuestión que nos ocupa, pues, para los tiempos con los que vamos a trabajar, de varias decenas de años, su actividad es prácticamente idéntica a la de su padre (equilibrio secular),  $^{228}\text{Ra}$ , con semivida de unos seis años.

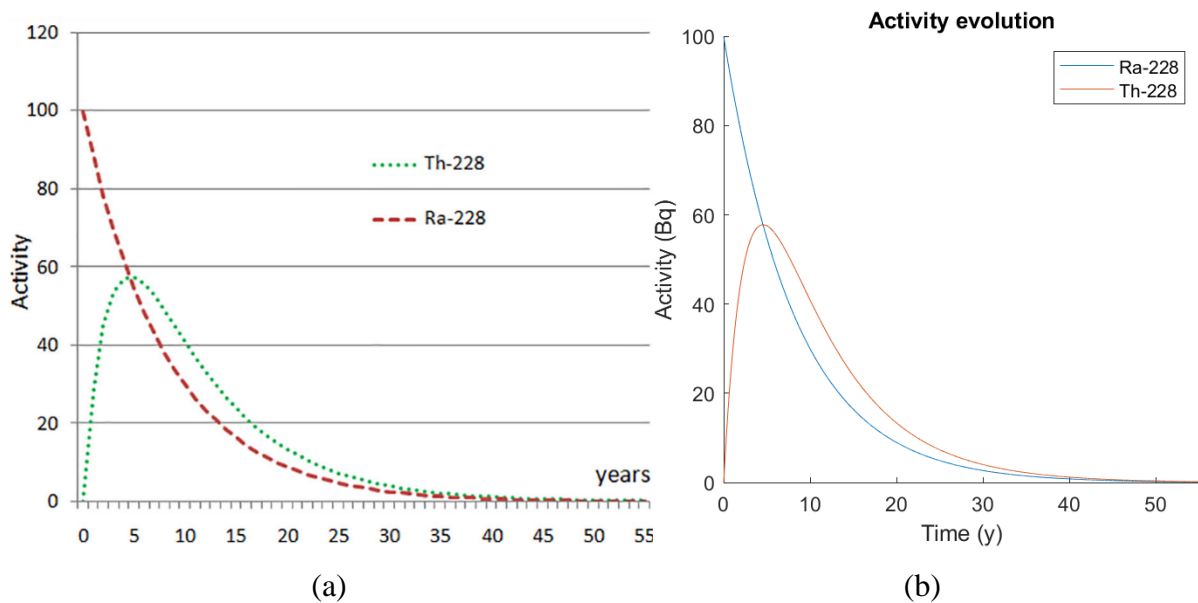
En primer lugar, puede ocurrir que, inicialmente, solo haya población de  $^{232}\text{Th}$  en el material, por lo que observaremos una evolución de la actividad del  $^{228}\text{Ra}$  hasta alcanzar el equilibrio secular. Si consideramos también la presencia del  $^{228}\text{Th}$ , hijo del  $^{228}\text{Ac}$ , esperamos que, con su semivida de dos años, tienda hacia una situación de equilibrio transitorio con el  $^{228}\text{Ra}$  y termine uniéndose a la línea que marca equilibrio secular. Esta circunstancia la vemos reflejada en la *Figura 19*, donde la gráfica (a) es la que aparece en el artículo [13] y la (b), la equivalente calculada por RaPCUBES. En ambas queda patente que las situaciones de equilibrio secular son alcanzadas una vez transcurridos en torno a cuarenta años.



*Figura 19. Estudio de disequilibrio en la serie del  $^{232}\text{Th}$ , correspondiente a una muestra en la que, inicialmente, solo hay población del propio  $^{232}\text{Th}$ . La gráfica (a) muestra los resultados publicados en el artículo sobre radiactividad en materiales de construcción [13], mientras que la (b) ha sido calculada por RaPCUBES. En ambas se observa una tendencia hacia el equilibrio secular, alcanzado unos cuarenta años después de la creación de la muestra.*

Por otro lado, es posible que el disequilibrio se deba a la carencia de núcleos de  $^{232}\text{Th}$  en el origen de la muestra, siendo esta generada por una población inicial de  $^{228}\text{Ra}$ . De esta forma, se da lugar a dos subseries que considerar:  $^{228}\text{Ra}$  decayendo a  $^{228}\text{Ac}$ , y  $^{228}\text{Th}$  desintegrándose en  $^{224}\text{Ra}$  y produciendo varios radionúclidos de semivida relativamente muy

corta. Aunque esta situación no es de utilidad para evaluar el índice (29), si es necesario saber reconocerla para efectuar su descarte. Si únicamente tenemos en cuenta las participaciones de  $^{228}\text{Ra}$  y  $^{228}\text{Th}$ , podemos esperar un comportamiento de equilibrio transitorio entre un núcleo padre y su hijo, hecho que reflejamos en la *Figura 20*. En ella, la gráfica (a) es, de nuevo, la que podemos encontrar en la publicación de referencia [13], mientras que la (b) ha sido obtenida por RaPCUBES. Vemos que la condición de equilibrio se alcanza hacia el quinto año.



*Figura 20. Estudio de desequilibrio en la serie del  $^{232}\text{Th}$ , correspondiente a una muestra en la que, inicialmente, solo hay población del  $^{228}\text{Ra}$ . La gráfica (a) muestra los resultados publicados en el artículo sobre radiactividad en materiales de construcción [13], mientras que la (b) ha sido calculada por RaPCUBES. En ambas se observa una tendencia característica del equilibrio transitorio. La igualdad de actividades tiene lugar hacia el quinto año a partir de la creación de la muestra.*

#### 4.1.2. Comparativa con resultados extraídos de un artículo sobre riesgos radiológicos y químicos por desechos generados en la industria del dióxido de titanio.

El documento en el que se fundamenta el contenido de este apartado se titula Radiological and chemical risks by waste scales generated in the titanium dioxide industry y fue publicado en 2021 [14].

La producción industrial de pigmentos de dióxido de titanio a partir de mineral de ilmenita resulta ser un proceso en el que el material obtenido queda enriquecido por ciertas sustancias radiactivas y/o tóxicas. Entre ellas, destacan los isótopos de radio y plomo que se depositan en las paredes internas de las tuberías, procedentes de las desintegraciones que se suceden las series de uranio y torio. Por ello, es requerido un estudio y control de dicha materia para determinar su grado de peligro para la salud de las personas, fundamentalmente aquellas que trabajan en las fábricas, que son las más expuestas. El resultado de los análisis que se

exponen en el artículo vislumbra que los empleados a cargo de actividades convencionales reciben dosis menores a  $1 \frac{\text{mSv}}{\text{año}}$  [14].

Varios procedimientos son requeridos para el completo examen de los residuos: caracterización mineralógica con difracción de rayos X, composición elemental a partir del uso de fluorescencia de rayos X, microscopía electrónica de barrido (SEM) o determinaciones radiométricas basadas en espectrometría de rayos gamma y partículas alfa. En esta última parte es en la que nos vamos a centrar de ahora en adelante, en particular, en dos de las cinco muestras tomadas y estudiadas por los autores del artículo [14].

Los resultados recopilados en la publicación [14], que vamos a tratar en este apartado, se identifican con sistemas en los que interviene, esencialmente, la cadena del  $^{232}\text{Th}$ . Concretamente, los análisis radiométricos de las muestras proporcionan concentraciones de actividad de los isótopos  $^{232}\text{Th}$  y  $^{230}\text{Th}$  despreciables frente a la del  $^{228}\text{Ra}$ . Por consiguiente, supondremos en nuestras simulaciones que, inicialmente, solo hay población de este último núcleo, que da lugar a  $^{228}\text{Th}$  por medio de  $^{228}\text{Ac}$ . En cambio, no consideraremos el actinio en nuestras gráficas, ya que su semivida es, de nuevo, muy pequeña en comparación con los tiempos que vamos a manejar. En líneas generales, esperamos observar un grupo de gráficas en las que se manifieste una situación de equilibrio transitorio entre  $^{228}\text{Th}$  y  $^{228}\text{Ra}$  a partir de un cierto instante de tiempo.

Los datos que utilizaremos para la representación en RaPCUBES del comportamiento de las muestras de restos cristalizados, denominada CS1, y del filtro Moore, bautizada como MF, aparecen recogidos en la *Tabla 5* [14]. Se corresponden con dos fechas de medida diferentes: una en la que se efectuó espectrometría gamma sobre los dos radionúclidos y otra posterior en la que solo se midió  $^{228}\text{Th}$  empleando espectrometría alfa.

<b>Datos de la concentración de actividad (CA) medida para <math>^{228}\text{Ra}</math> y <math>^{228}\text{Th}</math> en dos muestras recogidas en una fábrica de <math>\text{TiO}_2</math></b>						
Muestra	Fecha de recolección	Espectrometría gamma			Espectrometría alfa	
		Fecha de medida ( $t_m$ )	CA( $t_m$ ) $^{228}\text{Ra}$ ( $\frac{\text{Bq}}{\text{g}}$ )	CA( $t_m$ ) $^{228}\text{Th}$ ( $\frac{\text{Bq}}{\text{g}}$ )	Fecha de medida ( $t_n$ )	CA( $t_m$ ) $^{228}\text{Th}$ ( $\frac{\text{Bq}}{\text{g}}$ )
CS1	12-2006	9-2019	$40 \pm 6$	$63 \pm 8$	8-2020	$63 \pm 5$
MF	12-2006	6-2013	$29,3 \pm 3,5$	$32,8 \pm 2,1$	8-2020	$17.5 \pm 1.2$

*Tabla 5. Datos de concentraciones de actividad para  $^{228}\text{Ra}$  y  $^{228}\text{Th}$ , medidas en diferentes fechas por espectrometrías gamma y alfa, a partir de muestras obtenidas en una fábrica de  $\text{TiO}_2$  [14].*



Con el objetivo de obtener las mismas gráficas que los investigadores [14], accederemos al código de la aplicación para obtener los datos en cuestión y poder modificar las representaciones. Igualmente, añadiremos el dibujo original generado por RaPCUBES y poder comparar.

Para la construcción de las curvas de concentración de actividad, haremos uso de la fecha de recolección, que consideraremos como instante inicial en el que se crea la muestra, la fecha de medida de las concentraciones por espectroscopía gamma y el valor recogido en este caso para el  $^{228}\text{Ra}$ . Con ello, completamos todas las entradas de usuario que ofrece RaPCUBES, salvo la fecha de cálculo, que ha sido elegida para facilitar al máximo una visualización óptima de la comparativa. Asimismo, para determinar con qué bondad se cumple la suposición de que al inicio solo haya población de  $^{228}\text{Ra}$ , localizaremos los puntos referentes a las dos medidas del  $^{228}\text{Th}$  y comprobaremos cómo de cerca pasa la línea concerniente.

En la *Figura 21* se encuentran los resultados obtenidos para las muestras CS1 y MF, indicadas por los subíndices 1 y 2, respectivamente. Las gráficas (a) son las pertenecientes al artículo científico [14], las (b) son las salidas de la aplicación construida y las (c) se identifican con las imágenes transformadas con MATLAB para parecerse más a las de la publicación. Queda patente en dichas representaciones que la presunción de la que partimos al principio no es exacta, pues los valores medidos para el  $^{228}\text{Th}$  se alejan, en general, de los esperados teóricamente.

Por último, concluiremos que, aunque por el momento nuestra aplicación no permite tratar los datos que calcula fuera de ella, sí que tiene potencial para emplearse con este fin y permitir una mayor libertad de creación.

#### 4.2. Utilidades adicionales para versiones posteriores.

La variedad de situaciones posibles en las que es útil la aplicación RaPCUBES está actualmente limitada, en esencia, por los requerimientos de tiempo que tiene el desarrollo completo de un proyecto como este Trabajo de Fin de Grado, y de espacio, en la interfaz. Además, el alumno encargado del mismo posee conocimientos no muy extensos de programación, por lo que es seguro que el código puede ser mejor optimizado. En cambio, sí que han surgido durante la construcción de la herramienta diversas ideas que pueden enriquecerla enormemente y convertirla en un instrumento de mayor interés científico.

A continuación, presentamos un listado con las posibles características a considerar para ser añadidas en futuras versiones RaPCUBES, junto con algunas indicaciones de cómo se podrían implementar en el código elaborado.

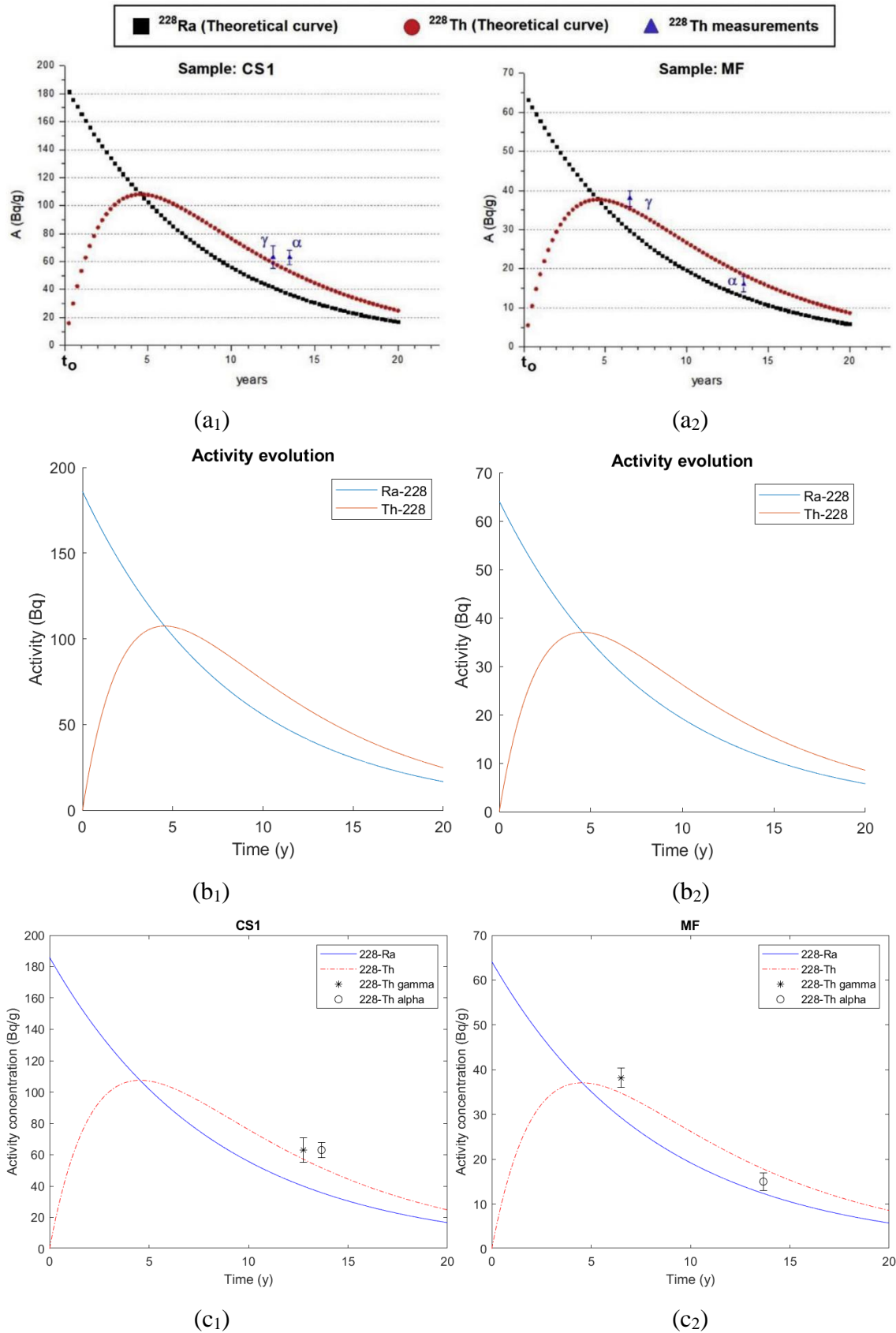


Figura 21. Comparativa de resultados obtenidos por RaPCUBES, (b), directamente, y (c), con transformaciones externas, y los publicados en el artículo sobre los riesgos de residuos radiactivos en fábricas de  $\text{TiO}_2$ , (a) [14]. Los subíndices 1 están referidos a la muestra CS1, y los 2, a la MF. En ambos casos, para el trazado de las curvas, se ha considerado que al inicio solo había población de  $^{228}\text{Ra}$ , pero las medidas experimentales representadas por puntos en (a) y (c), muestran que esta suposición se aleja de la realidad.

- Elección entre actividad radiactiva, población, masa o concentración radiactiva para la entrada de datos del usuario.

El apartado 2.4 refleja que es interesante, en ciertas situaciones, tomar medidas de la población de los radionúclidos presentes en la muestra, en lugar de sus actividades. La manera más simple de conseguirlo sería hacer algo similar a la selección considerada al inicio de la interfaz gráfica, con un pequeño desplegable.

Por otra parte, para poder trabajar con densidades y masas, habría, adicionalmente, que incrementar el volumen de la base de datos, incorporando las masas atómicas de los diferentes radioisótopos.

- Análisis de muestras con poblaciones iniciales no nulas de cualquier número de radionúclidos.

Una de las mayores restricciones de RaPCUBES es considerar únicamente población inicial de uno de los eslabones de la cadena radiactiva. Sin embargo, como consecuencia de la estructura de bucles que preside cada núcleo de cálculo descrito en 3.2, y la forma de la ecuación a emplear, que es la (14), sería relativamente sencillo incluir esta posibilidad. Simplemente tendríamos que aplicar un nuevo ciclo correspondiente al sumatorio en las poblaciones iniciales.

Adicionalmente, habría que considerar una región para la entrada de datos mucho más extensa que la que ofrece esta versión, pudiendo tomar una forma de tabla editable con columnas para medidas, incertidumbres y fechas.

- Incorporación de elementos externos a la serie como trazadores y consideración de varias familias radiactivas a la vez.

Hay ocasiones en las que se opta por añadir elementos externos a la muestra de estudio para facilitar las lecturas de radiactividad que podemos efectuar en el laboratorio. Este es el caso, por ejemplo, del  $^{232}\text{U}$  empleado frecuentemente en la cadena del  $^{232}\text{Th}$ .

En este caso, sería conveniente guardar en un apartado de la base de datos los trazadores más empleados con cada serie, y que, al seleccionarla, aparezca la opción de definir una cierta cantidad de la sustancia agregada. Además, sería interesante poder elegir para ello un tiempo de incorporación posterior a la creación de la muestra.

- Mayor diversidad de resultados a la salida.

Ya hemos contemplado la entrada de datos de masas y densidades radiactivas

por parte del usuario. Consecuentemente, cabe esperar que, sin mucho más esfuerzo podamos obtener los valores de dichas magnitudes a las salidas, tanto instantánea como gráfica. Para ello, tendríamos que efectuar las transformaciones inversas entre magnitudes, volviendo a hacer uso de una renovada base de datos.

- Posibilidad de seleccionar más radionúclidos y ratios para poder representar.

De poder organizar la aplicación en varias pestañas, dispondríamos de más espacio para cada elemento de la interfaz. Así, tener una ventana completa solo para la parte gráfica nos permitiría ampliar las posibilidades de selección de curvas a dibujar. En cambio, esta opción está capada por la propia forma de funcionamiento del App Designer de MATLAB, y nos obligaría a elaborar varias aplicaciones diferentes y relacionarlas entre sí.

- Permitir una mayor personalización de las gráficas en la propia interfaz de usuario.

Igualmente ocurre que el App Designer no permite apenas modificar la interfaz gráfica por parte del programador, y muchas menos licencias da al usuario. De este modo, por ejemplo, no pueden cambiarse a la vez el color y formato de las curvas representadas de forma sucesiva. La única posibilidad que se nos da es la de mostrar las gráficas en una ventana emergente con el formato “figure”, donde se ponen a nuestra disposición algunas herramientas más.

Quizás, en este aspecto, haya que esperar un poco más a que sigan desarrollando la utilidad App Designer para poder crear aplicaciones más útiles y compactas, o bien, tratar de programar en otro entorno que ofrezca una mayor libertad, como Python.

- Extracción de los datos representados en las gráficas en forma de vectores numéricos.

Al término de la comparativa 4.1.2, ilustramos la utilidad de poder llevarnos los datos en forma de vectores a un ambiente en el que trabajar cómodamente con ellos, bien porque la aplicación no lo permita, como es el caso, o bien porque prefiramos otra.

Para llevar esto a cabo, deberíamos elaborar una nueva sección del programa que se dedique a guardar los datos calculados para las representaciones en archivos de texto o de Excel. Estos, a su vez tienen que estar disponibles en una carpeta adicional, que esté a disposición tanto de la aplicación, como del usuario, quien debe contar con medios para tener acceso y extraer la información.

- Datación geológica.

Para terminar, cabría contemplar la posibilidad de incluir una nueva funcionalidad en la aplicación, centrada en cálculos para investigaciones relacionadas con la datación geológica.

Con este fin, tendríamos que construir nuevas funciones de computación principales, una por cada método considerado, pues, en estos casos, se emplean ecuaciones específicas que relacionan ciertos cocientes de actividades. Asimismo, la entrada de datos en estos casos también interesa que sea una razón.

#### 4.3. Otras aplicaciones similares a RaPCUBES.

La aplicación RaPCUBES ha sido desarrollada con la utilidad App Designer disponible con las últimas versiones de MATLAB. Su objetivo principal es que la comunidad científica pueda disponer de una herramienta que trabaje con las series radiactivas naturales y que sea de acceso abierto, proporcionando el mayor número posible de funcionalidades.

En relación con el contexto científico que nos ocupa, ya existía cierta variedad de herramientas similares diseñadas, en su mayoría, por personal de universidades y centros de investigación, y que requieren de un cierto desembolso para su utilización. Aunque tienen un aspecto más profesional que RaPCUBES y algunas ofrecen más posibilidades, la interfaz de nuestro programa permite bastante interacción con el usuario, con una distribución minimalista. Además, hemos considerado los diferentes caminos de decaimiento posibles en cada una de las familias de radioisótopos, algo que no está presente en algunas de sus semejantes.

Dos de las aplicaciones más importantes en este campo son DECSERVIS-2 [15], que viene de “DECay SERies VISualization”, y Decay Engine++ [16]. La primera de ellas es bastante similar a RaPCUBES, pero como característica diferencial, permite el cálculo de las masas y sus cocientes en un instante de tiempo, y, adicionalmente, su representación gráfica a lo largo de un cierto intervalo. La otra herramienta es mucho más completa y da una gran libertad al usuario para seleccionar entre multitud de opciones para la entrada y salida de datos, y para personalizar las gráficas a su gusto.

#### 5. Conclusiones.

El proyecto realizado para este Trabajo de Fin de Grado ha concluido con una aplicación informática funcional. Se llama RaPCUBES, es de acceso abierto y permite al usuario calcular las actividades y poblaciones de los radionúclidos más importantes que participan en cada una de las tres familias radiactivas naturales ( $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  y  $^{235}\text{U}$ ) y la principal cadena artificial

( $^{237}\text{Np}$ ). Para ello, hace uso de las soluciones de las ecuaciones de Bateman.

Desde que iniciamos la colaboración con los tutores para el desarrollo del trabajo, ideamos un sistema consistente en proponernos metas a corto y medio plazo, siendo capaces de cumplirlas todas a tiempo y de forma satisfactoria. Así, hemos reunido un total de once versiones del programa, cada cual más completa y compleja que la anterior. Esto ha permitido, tras cerca de cuatro meses de labor, que ya podamos complacer ciertas necesidades de los investigadores y científicos, con una herramienta lo suficientemente madura como para que la tengan en consideración.

Con respecto a sus posibilidades de uso, RaPCUBES está preparada para operar en base a medidas radiométricas de muestras de las que debemos conocer su fecha de creación, y en las que solo haya población de uno de los radionúclidos de la serie considerada. Asimismo, se considera que el sistema analizado se encuentra aislado y no sufre ningún tipo de perturbación provocada por agentes externos. De este modo, RaPCUBES puede ser empleada para hacer cálculos precisos de actividades y poblaciones, con sus incertidumbres, en un determinado instante posterior a la colección de la muestra, o efectuar estimaciones del comportamiento temporal de dichas magnitudes, por medio de la interfaz gráfica. Esto puede ser de gran ayuda para apoyar estudios en los que se tomen medidas de radiación, como el análisis geológico de minerales o el examen de residuos industriales NORM.

Por otra parte, aunque encontramos ciertas carencias en el actual programa que le restan atractivo frente a otros, también somos conscientes su gran potencial. Asimismo, con el rodaje que llevamos a día de hoy, hemos ganado la suficiente experiencia y soltura en el desarrollo de RaPCUBES, que nos mostramos optimistas en cuanto a su futuro. Además, debido a la estructura de su código y base de datos, es susceptible de poder recibir contribuciones de usuarios con conocimientos de Excel y programación en MATLAB, si se llega a publicar una versión sin compilar.

## 6. Bibliografía.

- [1] IDPH (Iowa Department of Public Health). Major Uses of Radioisotopes. Bureau of Radiological Health.
- [2] H. Bateman. Solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations, páginas 423-427. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1910.
- [3] N. Connor. What is Bateman equation? [radiation-dosimetry.org](http://radiation-dosimetry.org), 2019.

- [4] A. Ferrer Soria. Física nuclear y de partículas, 3ª edición, Capítulo 8 (apartados 8.1, 8.2, 8.5, 8.6 y 8.8)  
Publications Universitat de Valencia, 2015.
- [5] A. Moral, A. F. Pacheco. Algebraic approach to the radioactive decay equations.  
Universidad de Zaragoza, 2003.
- [6] K. Skrable; C. French; G. Chabot; A. Major. A general equation for the kinetics of linear first order phenomena and suggested applications.  
Health Physics, 1974.
- [7] Connor, N. What is transient equilibrium?  
[radiation-dosimetry.org](http://radiation-dosimetry.org), 2019.
- [8] A. Otero Pazos. Universidad de Zaragoza. Estudio de la radiactividad ambiental en suelos de la costa norte de A Coruña y Lugo, Capítulo 2 (apartados 2.1 y 2.4), 2014.
- [9] Enciclopedia de la página web [quimica.es](http://quimica.es) (última visita: 28/4/2022).
- [10] F. Doménech. Rutherford y Soddy, los verdaderos alquimistas.  
BBVA OpenMind, Ventana al conocimiento, 2021.
- [11] NNDC. NuDat 3 (última visita: 28/4/2022).
- [12] D. Hoffman, D. Scholz.  $^{238}\text{Th}/\text{U}$ -dating of fossil corals and speleothems.  
Eiszeitalter und Gegenwart Quaternary Science Journal, 2008.
- [13] B. Michalik, G de With, W. Schroevers. Measurement of radioactivity in building materials – Problems encountered caused by possible disequilibrium in natural decay series.  
ELSEVIER, Construction and building materials, 2018.
- [14] M.J. Gazquez, J. Mantero, F. Mosqueda, I. Vioque, R. García-Tenorio, J.P. Bolívar. Radiological and chemical risks by waste scales generated in the titanium dioxide industry.  
ELSEVIER, Chemosphere, 2021.
- [15] S. Azzam, J. Suksi, M. Ammann. DECSERVIS-2: A tool for natural decay series mass flow simulation.  
ELSEVIER, Applied Radiation and Isotopes, 2009.
- [16] [nucleonica.com/wiki](http://nucleonica.com/wiki) Help: Decay Engine++ (última visita: 1/6/2022).