



**DINÁMICA DE SISTEMAS COMPLEJOS**  
**DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

FACULTAD DE FÍSICA

**Francisco Javier Martínez Fabón**

Grado en Física

Curso académico 2022-2023

Tutora: María del Carmen Lemos Fernández

# Agradecimientos

*A Sevilla, a Lisboa y a Elena.*

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción a los sistemas complejos</b>	<b>4</b>
<b>2. Ecuaciones diferenciales para describir la dinámica de sistemas</b>	<b>6</b>
2.1. Definiciones iniciales . . . . .	6
2.2. Clasificación de puntos fijos . . . . .	9
2.3. Particularidades en sistemas no lineales . . . . .	15
<b>3. Ecuaciones en diferencias para describir la dinámica de sistemas</b>	<b>18</b>
<b>4. Bifurcaciones</b>	<b>21</b>
<b>5. Sistemas complejos en la naturaleza</b>	<b>28</b>
5.1. Modelo logístico de poblaciones y caos . . . . .	28
5.2. Modelo económico de la telaraña . . . . .	33
5.3. Reacciones químicas oscilantes . . . . .	36
<b>6. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Referencias</b>	<b>41</b>
<b>Apéndice</b>	<b>43</b>

## **Resumen**

En el presente trabajo se pretende realizar una introducción al vasto campo de los sistemas complejos, abordando su dinámica mediante modelos matemáticos deterministas, concretamente mediante sistemas de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones en diferencias. Para ello se muestran métodos de identificación y clasificación de puntos fijos y órbitas periódicas, así como la forma en que estos interactúan, se crean y se destruyen: las bifurcaciones. Finalmente se aportan algunos ejemplos de interés de sistemas complejos reales y se analiza su dinámica haciendo uso de las herramientas matemáticas expuestas en los apartados anteriores.

## **Abstract**

This paper intends to be an introduction to the vast field of complex systems, approaching their dynamics by means of deterministic mathematical models, specifically by means of systems of differential equations and systems of difference equations. For this purpose, methods of identification and classification of fixed points and periodic orbits are shown as well as the way in which they interact, are created and destroyed: bifurcations. Finally, some interesting examples of real complex systems are given and their dynamics are analyzed using mathematical tools presented in previous sections.

# 1. Introducción a los sistemas complejos

'Sistema', del griego *sýstema*, se define como «conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto» según la Real Academia Española. 'Complejo', del latín *complexus*, por su parte, significa «que se compone de elementos diversos» o «complicado».

Así pues, 'sistemas complejos' es un concepto bastante amplio que puede designar a cualquier conjunto de elementos de diversa índole. El cerebro humano, formado por neuronas; un determinado mercado, formado por empresas y consumidores; o los distintos animales y plantas que componen un ecosistema natural son ejemplos de sistemas complejos.

La disciplina científica asociada al término 'sistemas complejos', en ocasiones denominada 'ciencia de la complejidad', hace referencia a un novedoso campo de conocimiento que tiene como objetivo estudiar cómo las partes de un sistema interaccionan entre sí y cómo estas interacciones influyen en el comportamiento del sistema completo y en la relación de éste con el ambiente [1].

Sin embargo, para abordar de una manera científica el concepto es preciso acotar el significado del término 'sistemas complejos' definiendo una serie de parámetros objetivos según los cuales pueda determinarse si un sistema cualquiera es o no complejo. Para ello es necesario introducir un nuevo concepto, la 'emergencia'. Se dice que un sistema presenta un comportamiento emergente cuando el conjunto posee propiedades que no pueden inferirse directamente de las propiedades de sus componentes. Y pueden distinguirse dos tipos de comportamientos emergentes: local y global.

Un ejemplo de propiedad emergente local es la temperatura en un gas ideal. La temperatura es una característica emergente del gas, pues no puede deducirse del comportamiento primario (posición y velocidad) de los componentes del gas (partículas). Ahora bien, si una parte del gas es retirada del conjunto y aislada, tanto en la parte separada como en la original se mantiene el mismo valor de temperatura.

En un sistema con comportamiento emergente global eso no es posible. En ellos todas las partes de un sistema se encuentran en relación de interdependencia y el aislamiento de una parte afecta al comportamiento de dicha parte y al del conjunto. Son estos últimos los sistemas que se entienden por complejos.

Una vez convenido cualitativamente el significado de 'sistema complejo' surge la necesidad de cuantificar la complejidad, es decir, determinar qué hace que un sistema pueda considerarse más complejo que otro. Coloquialmente puede decirse que un sistema es más complejo cuanto más información se precisa para describir su comportamiento. Esto, llevado a los términos utilizados en los párrafos anteriores, puede traducirse de la siguiente forma: la complejidad de un sistema es mayor cuanto menor es el tamaño de las partes que deben ser descritas para comprender el comportamiento del conjunto. En otras palabras, la complejidad de un sistema aumenta cuando para describir su comportamiento es necesario reducir la escala en la que se observa este [2].

El estudio de los sistemas complejos y su dinámica abarca un vasto campo de conocimiento y resulta esencial para comprender fenómenos físicos, químicos y biológicos, además de elaborar modelos extrapolables a las ciencias sociales, especialmente en los ámbitos de la economía y la sociología. Para describir su comportamiento existen varios métodos. En este trabajo se aborda la dinámica de sistemas complejos mediante modelos matemáticos y computacionales, centrándose en el análisis de fenómenos no lineales.

Un ejemplo de este tipo de fenómenos emergentes no lineales se encuentra en la formación de patrones de ondas espirales en sistemas con interacciones locales. En la década de 1960, los científicos soviéticos B. Belousov y A. Zhabotinsky descubrieron que, en contra de las creencias de la época, algunas reacciones químicas bajo ciertas condiciones generaban comportamientos distintos al esperado estado simple homogéneo de equilibrio. Estos comportamientos iban desde un cambio cromático oscilante hasta la formación de espirales.

Este tipo de reacción (fig. 1), que recibió el nombre de reacción BZ en honor a los científicos



Figura 1: *Patrones en la reacción BZ. Fotografía tomada por M. Rogers y S. Morris en la Universidad de Toronto [3].*

que la observaron por primera vez, abrió un interesante campo de investigación en la química. Sin embargo, no es esta la única disciplina en la que puede hallarse esta clase de patrones emergentes. Ondas espirales similares pueden ser observadas en medios granulares bajo la acción de pulsos mecánicos, la actividad eléctrica del corazón o en dinámicas de poblaciones humanas y animales [4].

## 2. Ecuaciones diferenciales para describir la dinámica de sistemas

### 2.1. Definiciones iniciales

Dado un sistema  $S$ , de carácter ya sea físico, biológico, económico, etc, descrito por una serie finita de variables de estado  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que toma en los instantes  $t_0$  y  $t_1$  los valores  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))$  y  $x(t_1) = (x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1))$ , se considera que evoluciona en el tiempo si  $x(t_0) \neq x(t_1)$ . Se define como 'espacio de fases' o 'espacio de estados' al conjunto de todos los posibles valores de las variables de estado  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Para estudiar la dinámica de un sistema, además de definir un espacio de fases, es nece-

sario establecer una ecuación de evolución. El modo más habitual de hacerlo es mediante sistemas de ecuaciones diferenciales.

Sea  $f(x, t)$  una función continua y definida en un conjunto abierto  $U \times I$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , se define un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1)$$

Donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$  y, por tanto,  $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_n(x, t)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$\mathbb{R}^n$  es el espacio de fases,  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  el llamado 'espacio de fases extendido', las componentes del vector  $x \in \mathbb{R}^n$  son las variables dependientes y  $t$ , la variable independiente. Una solución de esta ecuación diferencial es  $\phi : I \rightarrow U$  si cumple, para todo  $t \in I$ :

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi(t), t) \quad (2)$$

Si dicha función cumple además que  $f(x + y, t) = f(x, t) + f(y, t)$  para cualquier  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in \mathbb{R}$ , y  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son solución de (1), entonces  $\psi(x) = \phi_1 + \phi_2$  es también solución de (1). En este caso se dice que el sistema de ecuaciones es lineal. Otro caso de interés es el de los sistemas autónomos, aquellos en los que la función  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ .

La imagen de una solución  $\phi(t)$  en el espacio de fases recibe el nombre de 'curva de fases' y se conoce como 'curva integral' al grafo asociado a dicha solución. Además,  $\phi$  satisface una condición inicial  $(t_0, x_0)$  si y sólo si la curva integral asociada pasa a través del punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Un sistema de ecuaciones diferenciales define un campo de vectores  $X$  en el espacio de fases, que recibe el nombre de 'flujo de fases', y cuyas órbitas son llamadas 'curvas de fase' o 'trayectorias'.



Para este flujo de fases se define como 'punto fijo' (también 'punto de equilibrio', 'punto crítico' y otros) a un punto  $p$  que cumple:

$$\frac{dx}{dt}(p) = 0 \quad (3)$$

Estos son, por tanto, soluciones particulares de ecuaciones diferenciales definidas para todo  $t \in I$  y, a la vez, estos puntos pueden considerarse curvas de fase del flujo.

Para definir la dinámica de sistemas complejos suele recurrirse al estudio de sistemas matemáticos no lineales. Mientras los sistemas lineales pueden dividirse y el análisis de sus partes por separado, recombinado, se corresponde al análisis del sistema completo, los sistemas matemáticos no lineales, de la misma manera que los sistemas complejos presentes en la naturaleza que pretenden representar, no pueden ser estudiados rotos en partes.

En este tipo de sistemas, además de los puntos críticos, existe otro elemento que perturba el flujo de fases: las 'órbitas periódicas' u 'órbitas cerradas', aquellas órbitas en las que, para una constante  $T > 0$ , ocurre que  $\phi(t) = \phi(t + T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Tanto la existencia de puntos fijos como de órbitas periódicas condiciona el comportamiento de las curvas de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales en sus entornos. Estudiando, pues, los campos de vectores y sus puntos fijos es posible extraer conocimiento, aunque sea meramente cualitativo, de las distintas variedades topológicas de las curvas de fase [5].

Al respecto de esto, el teorema de existencia y unicidad básica local nos dice:

**Teorema 2.1.1** Dado un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , dado  $x_0 \in U$  y dada una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitziana, esto es,  $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$  para todo  $x, y \in U$  y una constante de Lipschitz  $k < \infty$ . Puede afirmarse que existe cierta constante  $c > 0$  y una solución única  $\phi(x_0) : (-c, c) \rightarrow U$  que satisface la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  con la condición inicial  $x(0) = x_0$  [6].

Este teorema tiene como consecuencia la posibilidad de determinar soluciones locales apro-

ximadas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales a partir de consideraciones sobre la continuidad del flujo de fases, o, lo que es lo mismo, a partir de la existencia y el tipo de puntos críticos y órbitas periódicas [7].

## 2.2. Clasificación de puntos fijos

Dado que, por definición, siempre es posible diagonalizar una matriz compleja no singular, se pueden encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales en función del tiempo y de las condiciones iniciales.

En el caso de las ecuaciones diferenciales no lineales, si se quiere analizar la estabilidad de un punto fijo y el comportamiento del sistema en el entorno de dicho punto, debe hacerse a través de la linealización del campo de vectores. Para un sistema de funciones no lineal:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4}$$

Con  $x \in \mathbb{R}^n$  y en el que se halla un punto fijo  $p$ , la linealización se realiza de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Df(p)x \tag{5}$$

Donde  $Df(p)$  es la matriz jacobiana  $[\partial f_i / \partial x_j]$  de las derivadas parciales de las funciones  $f = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  evaluada en el punto fijo  $p$ .

Una vez se tiene un modelo matemático lineal del sistema y sus puntos de equilibrio puede iniciarse la clasificación de los puntos fijos. El criterio más fundamental de clasificación es el de estabilidad.

Se considera que un punto fijo  $p$  es estable si para cada entorno  $V(p)$  de  $p$  en  $U$  existe otro entorno  $V_1(p) \subset V(p)$  tal que toda solución  $\phi(t, x)$  con  $x \in V_1$  está definida y dentro de

$V(p)$  para todo  $t > 0$ . Si además de cumplirse esa condición se da también que  $\phi(t, x) \rightarrow p$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces el punto se dice 'asintóticamente estable' [7].

En una dimensión, dada una ecuación diferencial lineal  $\dot{x} = ax$ , se tiene la solución  $x(t) = x_0 e^{at}$  y, en función del parámetro  $a$ , puede hablarse de tres clases de estabilidad del sistema. En primer lugar, si  $a = 0$  todos los puntos del flujo de fases son fijos. En segundo lugar, si  $a < 0$ , el sistema tiene el punto fijo  $x = 0$  y se trata de un punto estable, llamado en ocasiones 'punto sumidero'. Por último, en el caso en que  $a > 0$ ,  $x = 0$  es un punto fijo inestable o 'punto fuente'.

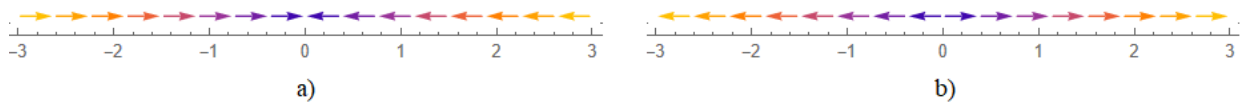


Figura 2: *Campo de vectores asociado a la ecuación diferencial  $\dot{x} = ax$ , con  $a = -1$  en a) y  $a = 1$  en b).*

En dos dimensiones los tipos de puntos fijos aumenta y su clasificación se torna más compleja. Esta se elabora a partir de los valores propios de la matriz  $A$   $2 \times 2$  asociada al sistema lineal.

Esta matriz, cuando se tratan los casos aislados, esto es, cuando  $\det A \neq 0$ , puede reducirse siempre por métodos algebraicos a uno de los siguientes tres tipos fundamentales:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (6)$$

Y, por tanto, surgen también tres tipos de soluciones fundamentales.

En primer lugar, el caso aislado en que los dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales. Las soluciones del sistema tienen la forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{t\lambda_1} \\ y(t) = y_0 e^{t\lambda_2} \end{cases} \quad (7)$$

Y si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , con un sólo autovector:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{t\lambda} + y_0 t e^{t\lambda} \\ y(t) = y_0 e^{t\lambda} \end{cases} \quad (8)$$

Se conoce como 'nodo estable' aquel punto fijo en que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , 'nodo inestable' aquel en que  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y se habla de 'punto de silla' cuando  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no comparten el mismo signo. Los nodos en que los dos autovalores son iguales pero la matriz sigue teniendo dos autovectores independientes reciben el nombre de 'estrellas'. Por el contrario, los sistemas con solución (8) se corresponden con los llamados 'nodos degenerados', que, como los no degenerados, pueden ser estables o inestables. Ver figura 3.

El caso aislado en que los autovalores pertenecen al plano complejo es distinto, pues depende de la relación entre las partes reales y las partes imaginarias de los autovalores, que son de la forma  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .

Las soluciones:

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\alpha}(x_0 \cos t\beta - y_0 \sin t\beta) \\ y(t) = e^{t\alpha}(x_0 \sin t\beta + y_0 \cos t\beta) \end{cases} \quad (9)$$

Se denominan 'centros' los puntos con valores propios imaginarios puros, es decir,  $\alpha = 0$ . Estos puntos, al contrario que los nodos estables y las espirales, no son asimptótica sino 'neutralmente estables', pues las trayectorias alrededor de estos puntos fijos no se ven ni atraídas ni repelidas por ellos. Las 'espirales', también llamadas 'focos', pueden ser estables si  $\alpha < 0$  o inestables si  $\alpha > 0$ .

Tanto en centros como en espirales el signo de  $\beta$  indica únicamente el sentido de giro de las trayectorias. Ver figura 4.

Especiales son los casos en que  $\det A = 0$ . Estos son referidos como 'no aislados' o directamente como 'líneas fijas', pues en ellos se encuentra un tipo de criticidad que no se reduce a un único punto del campo de fases.

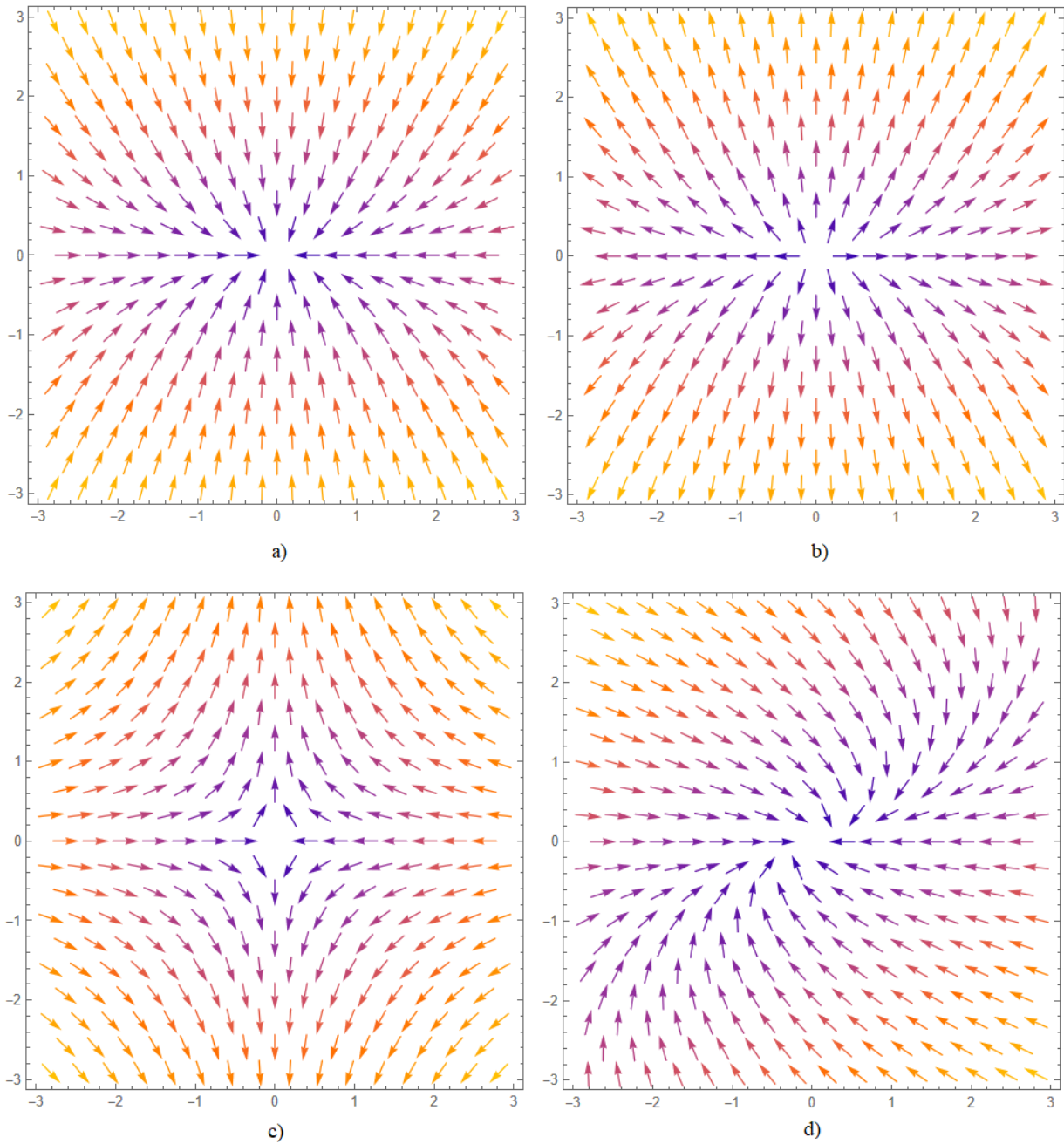


Figura 3: Campo de vectores asociado al sistema de ecuaciones diferenciales con autovalores  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$  (nodo estable) en a), con  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 2$  (nodo inestable) en b),  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$  (punto de silla) en c) y  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  con un sólo autovector (nodo impropio estable) en d).

En la figura 5 se muestran algunos ejemplos representativos.

Además de todas estas consideraciones realizadas exclusivamente en función del signo de

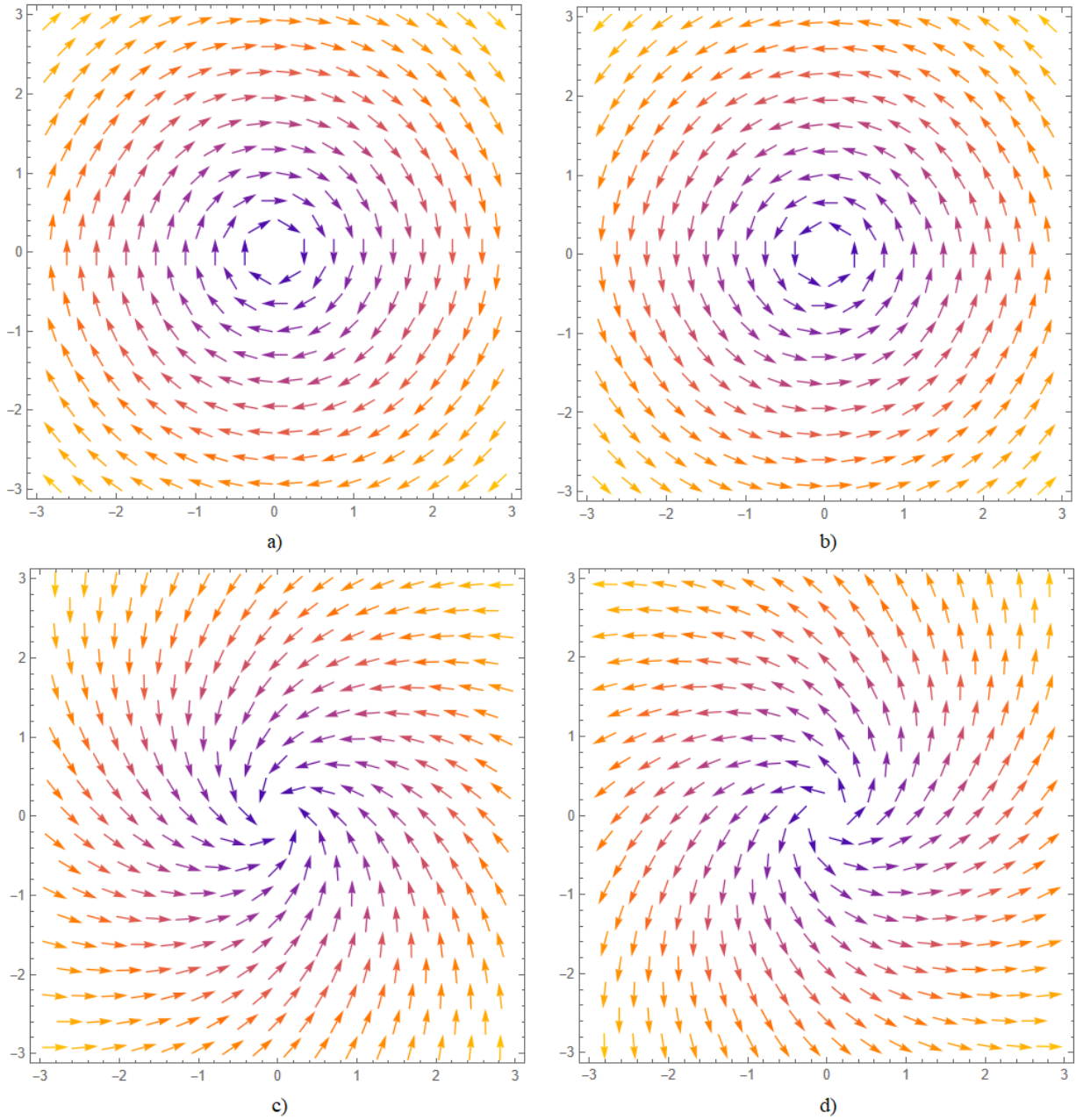


Figura 4: *Campo de vectores asociado al sistema de ecuaciones diferenciales con autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i$  (centro) en a), con  $\lambda_{1,2} = \mp i$  (centro) en b),  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$  (espiral estable) en c) y  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$  (espiral inestable) en d).*

los autovalores de la matriz  $A$ , dado que éstos vienen dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4\det A}}{2} \quad (10)$$

donde  $trA$  es la traza de  $A$  y  $detA$  su determinante, es posible y útil, para los casos aislados, representar una distribución de puntos fijos en base a estos dos parámetros.

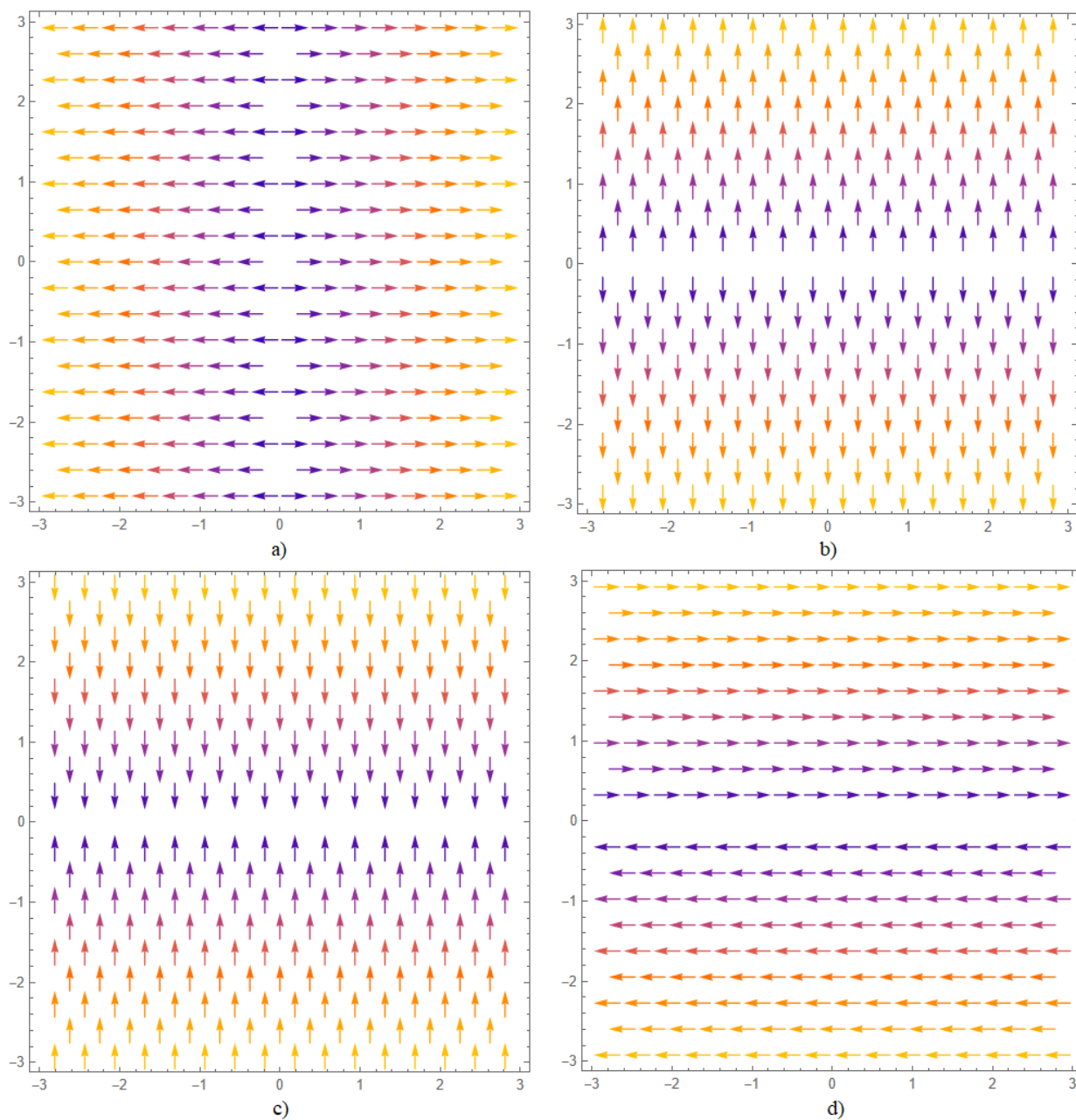


Figura 5: *Campo de vectores asociado al sistema de ecuaciones diferenciales con autovalores  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 0$  en a), con  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 1$  en b),  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -1$  en c) y  $\lambda_{1,2} = 0$  en d).*

En este espacio la recta  $trA = 0$  se corresponde con los centros mientras que la recta  $detA = 0$  lo hace con los puntos no aislados y constituye, a su vez, la frontera entre los puntos de silla

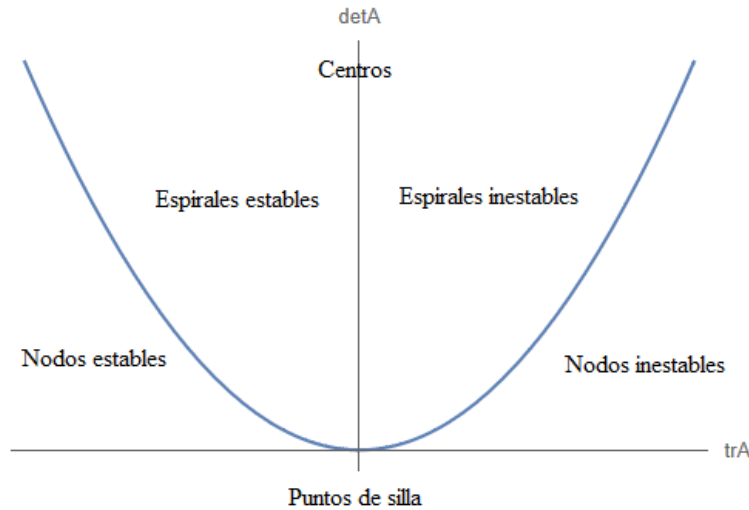


Figura 6: Esquema de la distribución de puntos fijos en el espacio de los parámetros traza y determinante de  $A$ .

y el resto. La curva  $\det A = \frac{(\text{tr}A)^2}{4}$  representa a los nodos degenerados y marca también la frontera entre el área de los nodos no degenerados y el área de las espirales.

Para dimensiones superiores a 2, los puntos fijos de un sistema pueden clasificarse en función de combinaciones de los tipos de puntos vistos en dimensión 1 y dimensión 2 [8].

### 2.3. Particularidades en sistemas no lineales

Si bien es cierto que, para analizar la topología de sistemas no lineales, la aproximación mediante matriz jacobiana ofrece unos resultados muy satisfactorios en la mayoría de los casos, en algunos de ellos pequeñas variaciones no lineales pueden provocar cambios cualitativos en la estructura del campo de fases del sistema.

Concretamente, la relación entre las soluciones del sistema no lineal y el sistema lineal asociado en torno del punto fijo  $x_0$  viene dada por el teorema de Grobman-Hartman:

**Teorema 2.3.1** Si la matriz jacobiana  $Df(x_0)$  no tiene valores propios nulos ni imaginarios puros existe un homeomorfismo  $h$  definido en un entorno abierto  $U$  de  $x_0$  tal que las órbitas del sistema no lineal son topológicamente equivalentes a las órbitas del sistema lineal [9].

Es decir, el análisis del sistema linealizado puede fallar cuando se predice la existencia de puntos con comportamiento límite tales como centros, estrellas, nodos degenerados y casos



no aislados.

Los centros son especialmente delicados, pues su estabilidad neutra se rompe fácilmente en favor de bien una estabilidad asintótica, bien una inestabilidad. Por esto, un error al predecirlos puede ocultar una estructura topológica completamente distinta del sistema. No sucede lo mismo con las estrellas o los nodos degenerados, cuya predicción puede ocultar un comportamiento del sistema ligeramente distinto en su entorno, pero nunca un tipo diferente de estabilidad.

Por esta razón, la manera de afrontar la clasificación de los puntos críticos de este tipo de sistemas a menudo varía con respecto a la que se realiza, más precisa, en los sistemas lineales.

Se distinguen aquellos puntos de cuya forma exacta se tiene certeza realizando un análisis de estabilidad mediante aproximación lineal, a los que se les llama 'puntos hiperbólicos', de aquellos otros en los que no.

Los segundos, centros y puntos no aislados, reciben el sobrenombre de 'casos marginales'. Son los casos en que al menos uno de los autovalores tiene parte real nula. Los primeros se dividen a su vez en 'atractores' o 'sumideros', en los que las partes reales de los autovalores son ambas negativas, 'repelentes' o 'fuentes', en los que las partes reales de los autovalores son ambas positivas y, por último, con valores propios de signo distinto, los puntos de silla [8].

En estos sistemas existe un segundo elemento que distorsiona el flujo de fases en dimensión  $n \geq 2$ : las órbitas periódicas. Estas pueden ser descritas también como 'trayectorias cerradas aisladas' o, en el caso de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, 'ciclos límite'. A diferencia de las órbitas que se generan alrededor de un punto centro, los ciclos límite pueden ser atractores (asintóticamente estables), repelentes (asintóticamente inestables), o medio estables a la manera de los puntos de silla.

En los siguientes sistemas pueden hallarse ejemplos de ciclos límite sencillos, estable e inestable respectivamente:

$$\begin{cases} \dot{r} = r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r} = -r + r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (11)$$

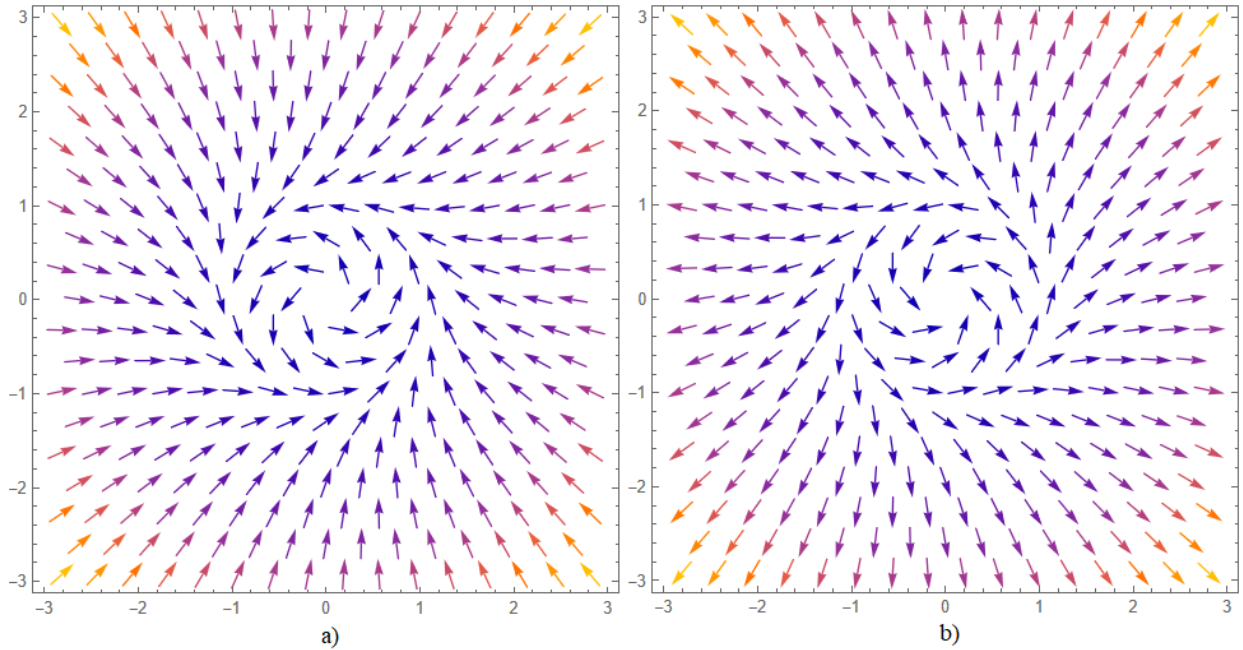


Figura 7: *Campo de vectores asociado al primer sistema de (11) (ciclo límite estable en  $r = 1$  con punto fijo inestable en  $r = 0$ ) en a) y al segundo sistema (ciclo límite inestable en  $r = 1$  con punto fijo estable en  $r = 0$ ) en b).*

Debido a su carácter estrictamente no lineal existe una dificultad para hallar e identificar este tipo de trayectorias mucho mayor de la que existe en el análisis de puntos fijos. Al respecto de esto, el único criterio que existe para confirmar la existencia de ciclos límite viene dado por el teorema de Poincaré-Bendixson:

**Teorema 2.3.1** Dado un campo de vectores diferenciable  $\dot{x} = f(x)$  en un conjunto abierto  $D$  y dado un subconjunto cerrado  $K \in D$  del plano, si  $K$  no contiene puntos críticos y existe una trayectoria  $C$  confinada en  $K$ , entonces o bien  $C$  es una órbita cerrada o bien tiene forma de espiral atraída por una órbita cerrada que se encuentra dentro de  $K$  [6].

Es preciso añadir que, debido a que una órbita periódica aislada siempre encierra un punto fijo, la región del plano  $K$  debe tener forma de rosquilla.

### 3. Ecuaciones en diferencias para describir la dinámica de sistemas

Una ecuación en diferencias es una equivalencia matemática que involucra las diferencias entre valores sucesivos de una cierta variable discreta [10]. En otras palabras: dado un número natural  $n$  tal que el número  $n$ ésimo de una sucesión es función de  $n$  y existen los términos sucesivos  $x_{n+1}$ ,  $x_{n+2}$ ... recibe el nombre de ecuación en diferencias toda ecuación que relaciona el término  $x_n$ , la sucesión incógnita  $x_n = x(n)$  y los términos siguientes de dicha sucesión [11].

Las ecuaciones en diferencias, también conocidas como funciones iterativas, surgen como un método alternativo a las ecuaciones diferenciales para expresar matemáticamente una evolución temporal de variables, pero esta vez en saltos discretos de tiempo. Es por esto último que, en el estudio de dinámica de sistemas, son de un especial interés en el modelado computacional o cuando se tratan datos estadísticos discretos.

Un ejemplo simple es el siguiente:

$$x_{n+1} = ax_n \tag{12}$$

Y por inducción, la solución a la ecuación (12):

$$x_n = a^n x_0 \tag{13}$$

Este ejemplo sirve para introducir el concepto de punto fijo adaptado a este tipo de sistemas y la clasificación que se hace de ellos.

Así, dado un sistema de ecuaciones en diferencias  $x_{n+1} = f(x_n)$ , donde  $f : I \rightarrow I$  es una función continua y  $I$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , y dada  $f^k(x)$  la función iterada de orden  $k$  del punto  $x \in I$ , se considera que un punto  $p \in I$  se trata de un punto periódico de orden  $k$  si:

$$f^k(p) = p \quad (14)$$

Y, particularmente, se habla de 'punto fijo' o 'punto de equilibrio' si  $k = 1$ .

La órbita de un punto periódico  $p$  de orden  $k$  es el conjunto finito  $\{p, f(k), \dots, f^{l-1}(k)\}$  y recibe el nombre de 'ciclo de  $f$  de longitud  $k$ ' [12].

Por otra parte, en este tipo de sistemas el teorema de Grobman-Hartman se mantiene válido, lo que permite estudiar el comportamiento de sistemas en diferencias no lineales a partir de sus matrices de linealización cuando los puntos de equilibrio a analizar no se encuentran en escenarios límite.

Volviendo a la ecuación (12), pues ésta se corresponde con el sistema de ecuaciones en diferencias lineal y homogéneo de dimensión 1, se tiene que si  $a \neq \pm 1$  la ecuación tiene un único punto fijo en  $x = 0$ . Para  $a = 1$ , todos los puntos del espacio de fases son puntos de equilibrio de periodo 1, mientras que para  $a = -1$ , todos los puntos son de equilibrio de periodo 2. Además, con  $a < -1$  y  $a > 1$  el punto es inestable (fig. 2b), mientras que con  $-1 < a < 1$  el punto es estable (fig. 2a) a excepción del caso  $a = 0$ , en que la sucesión colapsa en su origen.

En dos dimensiones se tiene el sistema

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (15)$$

donde  $A$  es la misma matriz que en el apartado anterior (ecuación (6)). Así pues, sus posibles soluciones son las siguientes:

$$\begin{cases} x_n = \lambda_1^n x_0 \\ y_n = \lambda_2^n y_0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_n = \lambda^n x_0 + n\lambda^{n-1}y_0 \\ y_n = \lambda^n y_0 \end{cases} \quad (17)$$

Y con autovalores complejos:

$$\begin{cases} z_n = z_0(\alpha^2 + \beta^2)^n e^{i\theta n} \\ \theta = \arctg(-\frac{\beta}{\alpha}) \end{cases} \quad (18)$$

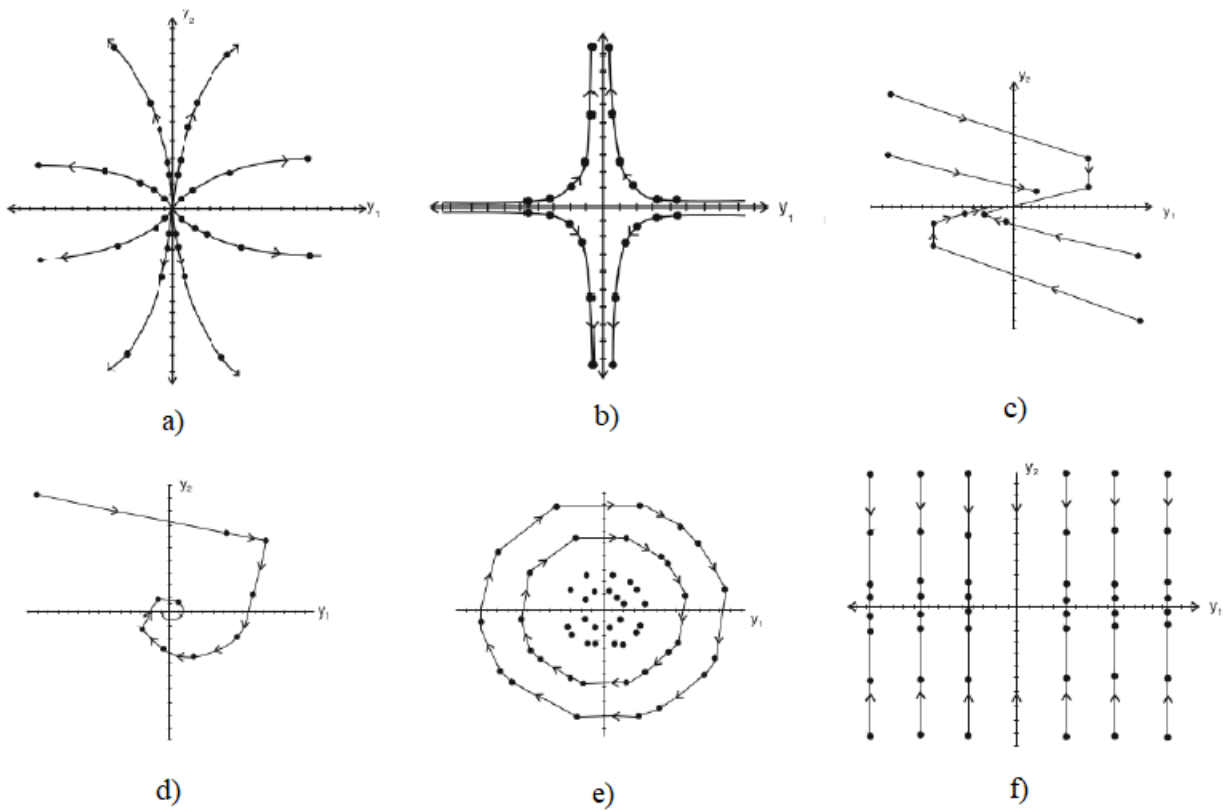


Figura 8: Sistema con autovalores  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$  (nodo inestable) en a), autovalores  $|\lambda_1| < 1$  y  $|\lambda_2| > 1$  (punto silla) en b),  $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$  (nodo impropio estable) en c),  $|\lambda_{1,2}| < 1$  (espiral estable) en d),  $|\lambda_{1,2}| = 1$  (centro) en e) y  $|\lambda_1| = 1$  y  $|\lambda_2| < 1$  (caso no aislado) en f). Imágenes extraídas de [13].

Las soluciones del sistema (15) son semejantes a las representadas en las figuras 3, 4 y 5, con la diferencia de que las órbitas de fase no son trayectorias continuas, sino secuencias de puntos con una estructura topológica equivalente a las soluciones del caso continuo.

En la figura 8 se muestran algunos ejemplos de representaciones de órbitas en torno a puntos de equilibrio de este tipo de sistemas.

Aquí, el círculo de radio  $\lambda = 1$  en el plano complejo desempeña el mismo papel que el eje imaginario en el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales, siendo el interior del círculo la 'zona estable' y hallándose nodos y espirales inestables en el exterior [13].

Al igual que con los sistemas continuos, puede realizarse un diagrama de estabilidad basado en la relación de la traza  $trA$  y el determinante  $detA$  de la matriz  $A$  del sistema.

En este nuevo esquema los puntos estables se encuentran en el interior del área delimitada por la recta  $detA = 1$  y la curva  $detA = \frac{trA^2}{2} - 1$ , y es en el contorno de dicha área donde se hallan los centros, haciendo de frontera con el área de los puntos inestables.

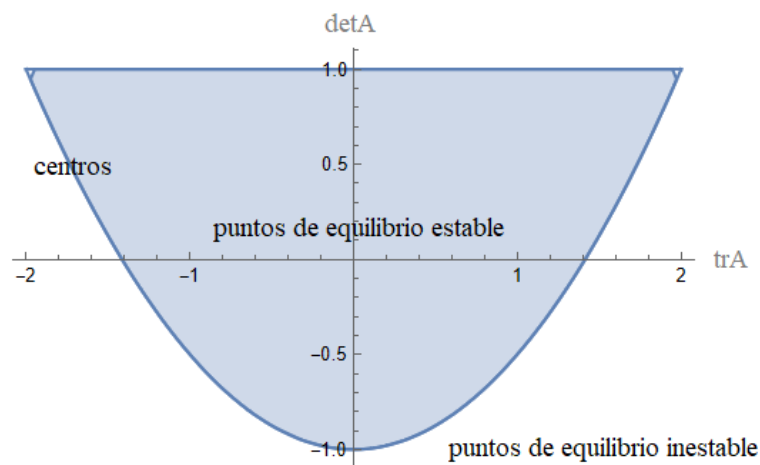


Figura 9: Esquema de la distribución de puntos fijos en el espacio de los parámetros traza y determinante de  $A$ , caso discontinuo.

## 4. Bifurcaciones

Si por algo se caracterizan los sistemas dinámicos complejos, además de por el hecho de ser definidos mediante ecuaciones no lineales, es porque a menudo dependen de distintos parámetros que pueden modificar su valor.

Estos parámetros definen la estructura topológica de un sistema y variando su valor numérico se propicia la aparición o desaparición de puntos críticos u órbitas periódicas y cambios en el comportamiento de estos, ya sea desplazándolos en el espacio de fases o incluso modificando su estabilidad.

En la dinámica de sistemas los valores parametrales para los que se produce un cambio cualitativo en la estructura de un sistema reciben el nombre de 'puntos de bifurcación' o de 'bifurcaciones' a secas. En función del tipo de transformación topológica que produce cada uno de estos puntos pueden distinguirse varios tipos de bifurcaciones.

Aquellas bifurcaciones en las que dos o más puntos fijos colisionan cuando alguno de los autovalores de la matriz que define el sistema se hace nulo reciben el nombre de 'bifurcaciones de autovalor cero'. Estas bifurcaciones, que pueden hallarse en sistemas de dimensión 1 y superiores, son habitualmente asociadas a las llamadas 'formas normales'. La forma normal de un tipo concreto de bifurcación es el ejemplo algebraicamente más simple de sistema en el que se produce dicha bifurcación. A su vez, las bifurcaciones de autovalor cero pueden dividirse en tres subgrupos principales.

El primero, las 'bifurcaciones silla-nodo'. Estas se dan cuando, al variar un parámetro, dos puntos fijos (un punto de silla y un nodo en dos dimensiones) se acercan hasta que colisionan en el punto de bifurcación y finalmente desaparecen. La forma normal en dos dimensiones de este tipo de bifurcaciones es:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (19)$$

En este ejemplo, para  $a > 0$  el sistema presenta dos puntos fijos: un nodo estable en  $(\sqrt{a}, 0)$  y un punto de silla en  $(-\sqrt{a}, 0)$ . Aproximando el valor de  $a$  a 0 ambos puntos se acercan a la coordenada  $(0, 0)$  hasta que entran en contacto (un único punto fijo en  $a = 0$ ) y desaparecen para valores negativos de  $a$ .

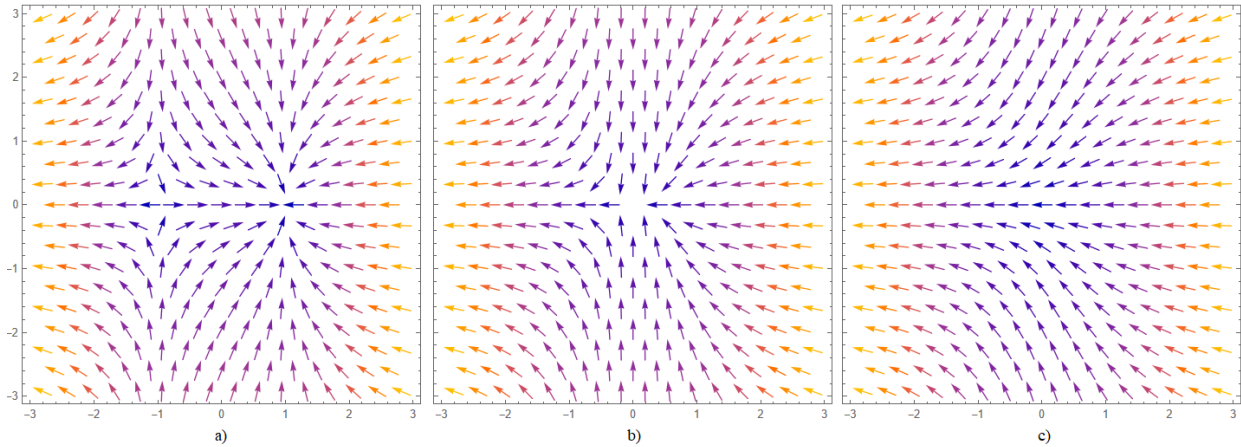


Figura 10: *Flujo de fases asociado al sistema (19) con  $a = 1$  en a),  $a = 0$  en b) y  $a = -1$  en c).*

El siguiente tipo de bifurcaciones a reseñar es el de las 'bifurcaciones transcricas'. Su forma normal viene dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (20)$$

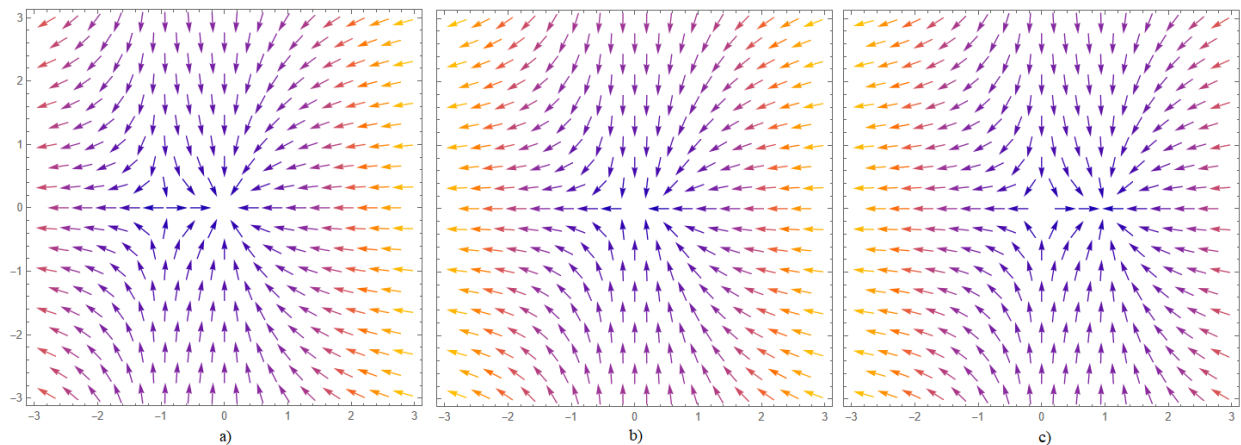


Figura 11: *Flujo de fases asociado al sistema (20) con  $a = -1$  en a),  $a = 0$  en b) y  $a = 1$  en c).*

Para valores negativos de  $a$  aparece un punto fijo estable en  $(0, 0)$  y uno inestable en  $(a, 0)$ , mientras que para valores positivos el punto de  $(0, 0)$  se hace inestable y el punto  $(a, 0)$ , que pasa al lado diestro del eje  $x$ , se convierte en un punto estable.



En tercer lugar las 'bifurcaciones de horca', que se dividen entre las 'bifurcaciones de horca supercríticas' y las 'bifurcaciones de horca subcríticas'.

En las supercríticas (forma normal asociada en el primer sistema de (21)), para valores negativos de  $a$  existe un único punto fijo estable en  $(0, 0)$  que empieza a dividirse en tres cuando  $a = 0$ . Conforme el valor de  $a$  aumenta alejándose de 0 se separan también los dos nuevos puntos fijos, estables y en  $(\pm\sqrt{a}, 0)$ , mientras el punto fijo del centro de coordenadas adquiere un carácter inestable.

Las 'bifurcaciones de horca subcríticas' (forma normal asociada en el segundo sistema de (21)) siguen un proceso opuesto: un único punto crítico inestable para valores positivos de  $a$  pasa a estable y da lugar a dos nuevos puntos fijos inestables cuando  $a < 0$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (21)$$

Representación en la figura 12.

Al contrario que las bifurcaciones de autovalor cero, las 'bifurcaciones de Hopf' son propias de sistemas cuya matriz jacobiana presenta valores propios con parte imaginaria no nula y de dos o más dimensiones.

Las 'bifurcaciones de Hopf supercríticas' son aquellas que se dan cuando una espiral estable da lugar a una espiral inestable rodeada por un pequeño ciclo límite elíptico. Por ejemplo, en su forma normal:

$$\begin{cases} \dot{r} = ar - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (22)$$

En la versión subcrítica de este tipo de bifurcaciones las diferencias con sus homónimas supercríticas son análogas a las diferencias entre los dos tipos de bifurcaciones de horca: una espiral inestable se hace estable y a su alrededor aparece una órbita periódica inestable. La forma normal correspondiente al segundo caso:

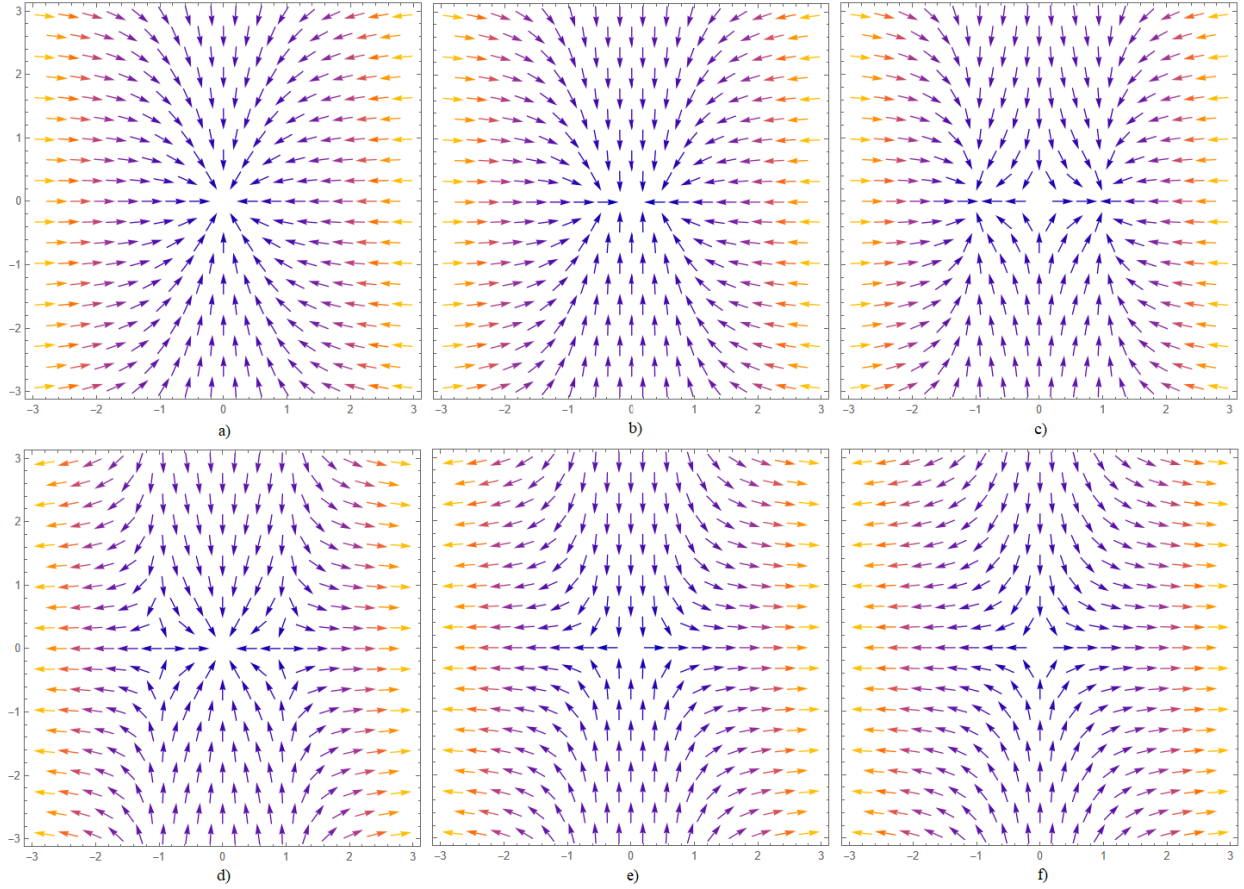


Figura 12: Flujo de fases asociado al sistema (21) con  $a = -1$  en a),  $a = 0$  en b) y  $a = 1$  en c), y lo mismo con el flujo asociado al sistema (21) en d), e) y f) respectivamente.

$$\begin{cases} \dot{r} = -ar + r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Ambas versiones son representadas en la figura 13.

Además de las bifurcaciones de Hopf existen algunos tipos más, en dos o más dimensiones, que involucran a los ciclos límite. Para estas bifurcaciones no existen formas normales, pero sí se puede seguir encontrando ciertos ejemplos relativamente simples con los que ilustrarlas. Uno de ellos es el de las 'bifurcaciones de periodo infinito', que se da en:

$$\begin{cases} \dot{r} = r - r^3 \\ \dot{\theta} = a - \text{sen}\theta \end{cases} \quad (24)$$

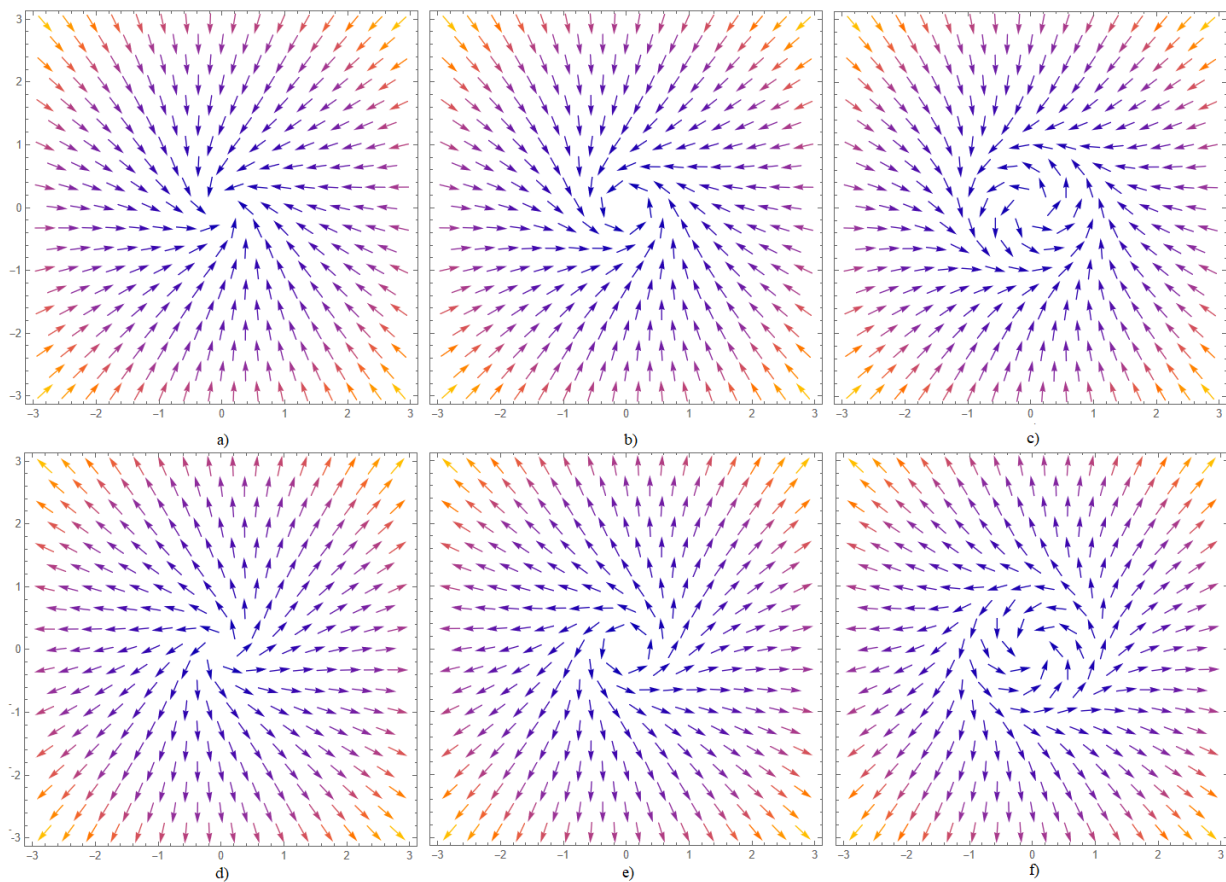


Figura 13: *Flujo de fases asociado al sistema (22) con  $a = -1$  en a),  $a = 0$  en b) y  $a = 1$  en c), y lo mismo con el flujo asociado al sistema (23) en d), e) y f) respectivamente.*

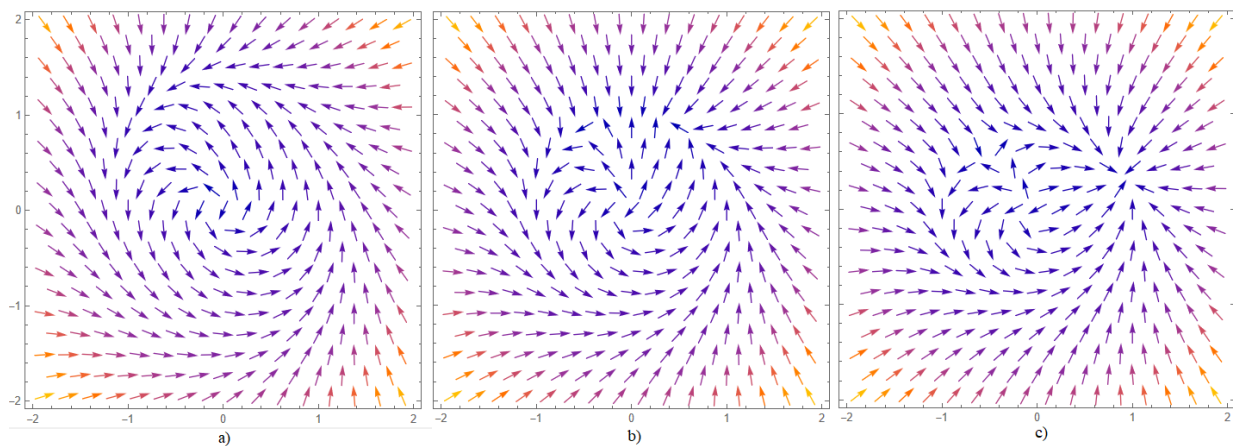


Figura 14: *Flujo de fases asociado al sistema (24) con  $a = 2$  en a),  $a = 1$  en b) y  $a = 0,5$  en c).*

Para valores positivos de  $a$  el ciclo límite con un punto fijo en su interior que puede obser-

vase en  $a > 1$  se abre en dos puntos tangentes que se convierten en una silla y un nodo cuando  $0 < a < 1$ .

Otro ejemplo de entre las 'bifurcaciones globales', esto es, que involucran a ciclos límite en regiones arbitrariamente grandes del espacio de fases, es el de las 'bifurcaciones homoclínicas'. En el punto de bifurcación un punto de silla y un ciclo límite entran en contacto para dar lugar a una órbita homoclínica. Es el caso del sistema dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ay + x - x^2 + xy \end{cases} \quad (25)$$

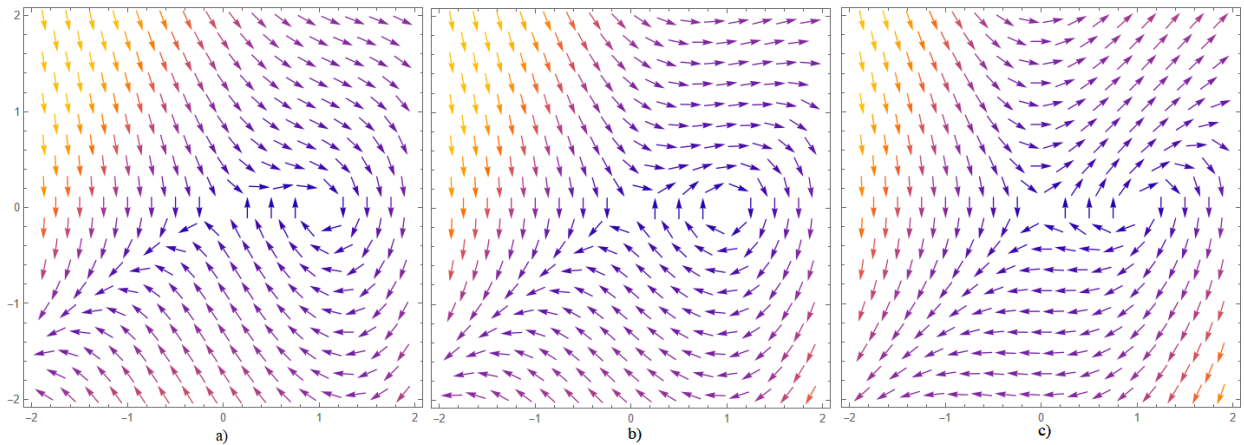


Figura 15: *Flujo de fases asociado al sistema (25) con  $a = -1,5$  en a),  $a = 0,8645$  en b) y  $a = 0$  en c).*

Cuando un ciclo límite, en lugar de chocar con un solo punto de silla, lo hace con dos o más, la bifurcación recibe el nombre de 'bifurcación heteroclínica', pues es este el tipo de órbitas que se genera cuando el parámetro en cuestión llega al valor de bifurcación.

Además, existe un último caso de bifurcaciones globales llamado 'bifurcaciones silla-nodo de ciclos límite' que puede encontrarse en el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{r} = ar + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases} \quad (26)$$

Como su nombre indica, este tipo de bifurcaciones es equivalente al ilustrado en la figura 10 pero con órbitas estables e inestables en lugar de nodos y puntos de silla [8].

Como podría suponerse, las bifurcaciones existentes en sistemas de ecuaciones diferenciales pueden hallarse de manera análoga en sistemas de ecuaciones en diferencias. Si bien las bifurcaciones de autovalor cero ocurren en los sistemas continuos cuando al menos uno de los valores propios de su matriz jacobiana alcanza el valor nulo variando cierto parámetro, cuando el sistema es descrito por ecuaciones iterativas las bifurcaciones locales son determinadas por el círculo de radio unitario del plano complejo.

Si variando un parámetro uno de los autovalores  $\lambda$  atraviesa el círculo por el punto  $\lambda = 1$  se da una bifurcación silla-nodo, una bifurcación transcítica o una de horca. Si lo hace fuera del eje real se obtiene una bifurcación de Hopf. Finalmente, si el círculo es cruzado por  $\lambda = -1$  se observa un tipo de bifurcación particular de los sistemas discretos: la 'bifurcación de vuelta' o 'bifurcación de duplicación de periodo'. Estas se caracterizan por la creación o destrucción de una órbita periódica con el doble de periodo que la órbita original [14].

## 5. Sistemas complejos en la naturaleza

Como se comenta en la introducción de este trabajo, son incontables los modelos deterministas descritos con ecuaciones diferenciales o en diferencias que pretenden describir la dinámica de sistemas complejos. En esta sección se muestran algunos ejemplos de interés.

### 5.1. Modelo logístico de poblaciones y caos

Un ejemplo perfecto de sistema complejo presente en la naturaleza es el de una población de seres vivos. Cómo los individuos de cierto grupo interactúan y se reproducen en función de parámetros que dependen de características internas o del entorno y cuál es la forma final que adquiere la evolución en el tiempo de su población son cuestiones recurrentes en biología y que, a su vez, se ajustan a la perfección a los objetos de estudio de la dinámica de sistemas

complejos.

En este contexto surge un modelo de crecimiento poblacional simple en apariencia pero que representa de manera bastante fidedigna la manera en que evolucionan algunas poblaciones que se observan en la naturaleza: el modelo logístico.

El modelo logístico predice que, pese a que inicialmente el crecimiento de una población puede describirse aproximadamente mediante una función exponencial, cerca de cierto punto conocido como 'capacidad de carga'  $k$ , factores como la escasez de recursos, el espacio disponible o la aparición de depredadores disminuye progresivamente la tasa de crecimiento hasta que la población acaba por estabilizarse.

Este comportamiento, que se traduce gráficamente en una curva con forma de S, viene dado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx \frac{(k - x)}{k} \quad (27)$$

Donde  $r$  es la tasa de crecimiento inicial.

En 16, la curva logística ideal dada por la ecuación (29) y un caso real de población que evoluciona de una manera semejante [15].

No obstante, dado que la dinámica de poblaciones es descrita a través de la aparición o desaparición de los individuos que la componen, en muchas ocasiones lo adecuado es aplicar modelos discretos. En el caso de la ecuación logística, que en su versión iterativa simplificada viene dada por (28), es precisamente analizando esa versión de la ecuación en diferencias que pueden descubrirse dinámicas complejas sorprendentes.

$$x_{n+1} = \mu(1 - x_n)x_n \quad (28)$$

Dado un valor de la constante positiva  $\mu$  (tasa de crecimiento) menor que 1, para cualquier cantidad inicial de sujetos  $x_0 \in [0, 1]$  la población se acaba extinguiendo cuando  $n \rightarrow \infty$ .

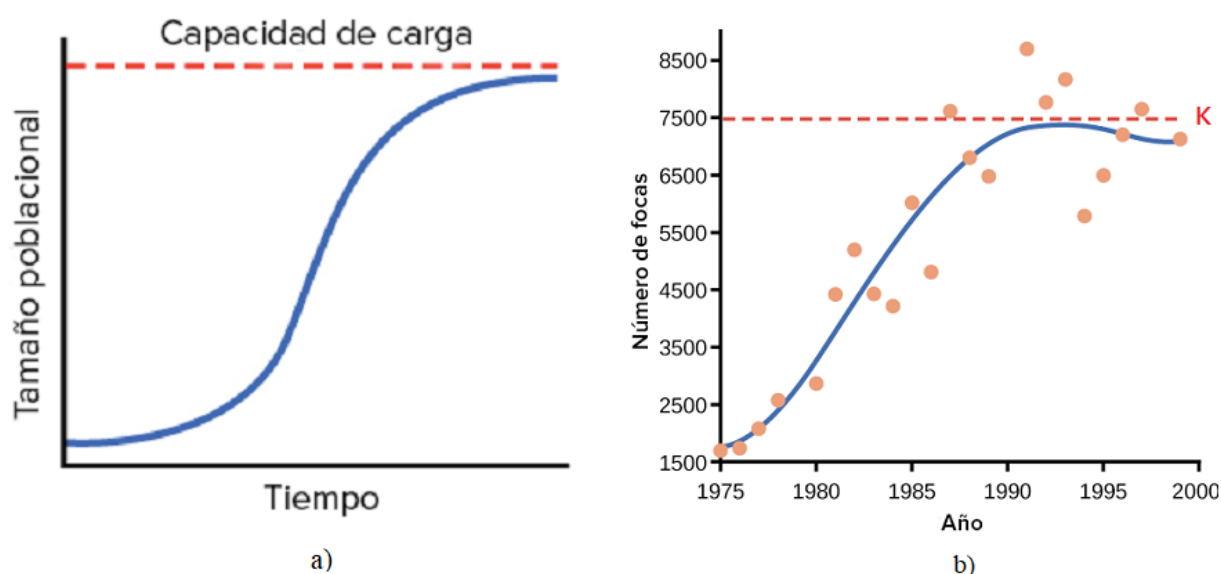


Figura 16: Curva logística ideal en a) y curva asociada a la evolución de la población de focas comunes en el estado de Washington (EEUU) entre los años 1975 y 2000 en b). Figuras obtenidas de [15] y elaboradas a partir de [16].

Esto se corresponde claramente con un punto de equilibrio estable en  $x = 0$ .

Para  $\mu > 1$  el punto de equilibrio en el origen se vuelve inestable y aparece un nuevo punto crítico en  $x = 1 - 1/\mu$ . Después de suceder lo que, según lo visto en el apartado anterior, puede considerarse una bifurcación transcítica, en el intervalo  $1 < \mu < 3$  la dinámica del modelo pasa a consistir en un comportamiento asintótico que acaba estabilizándose al aproximarse al segundo punto fijo.

Todo esto puede predecirse analíticamente, calculando los puntos fijos haciendo uso de (16) y considerando qué valores de  $\mu$  hacen que el autovalor  $\lambda$  de la matriz jacobiana asociada sea inferior (estabilidad) o superior (inestabilidad) a 1. Ambas cosas, eso sí, deben realizarse teniendo presente que una población nunca puede ser descrita en términos negativos.

Si se estudian además las funciones iteradas de orden superior a 1, para valores inmediatamente superiores a  $\mu > 3$  empieza a observarse un comportamiento oscilante: el punto fijo atractor desaparece dando paso a una órbita de periodo 2, o lo que es lo mismo, aparece una bifurcación de duplicación de periodo.

Poco después, en torno a  $\mu \simeq 3,45$ , una nueva bifurcación de duplicación de periodo genera

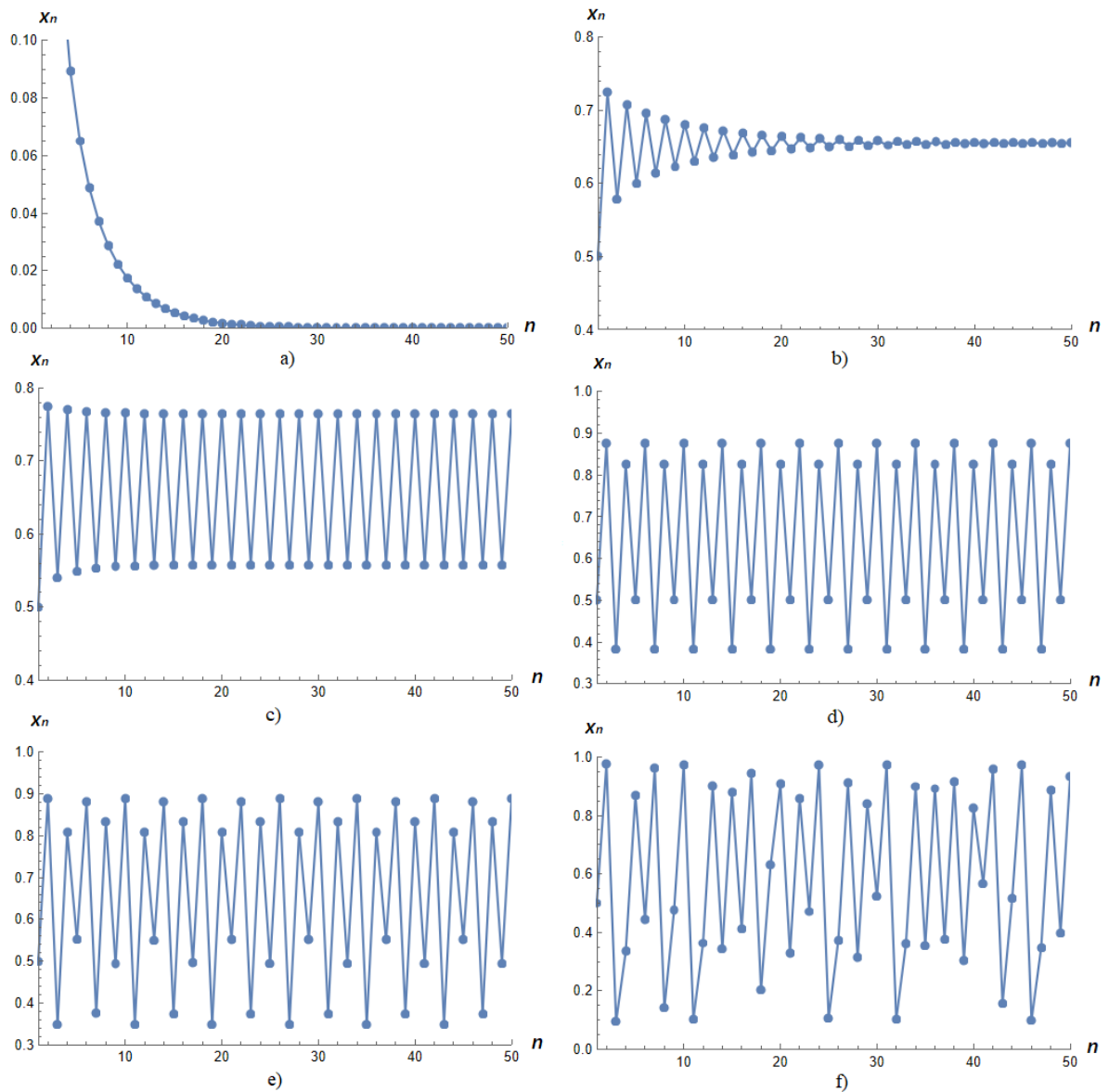


Figura 17: Sucesión de  $x_n$  con un sólo atractor en el origen ( $\mu = 0,8$ ) en a), con un atractor en  $x = 1 - 1/\mu$  ( $\mu = 2,9$ ) en b), con una órbita de periodo 2 ( $\mu = 3,1$ ) en c), una órbita de periodo 4 ( $\mu = 3,5$ ) en d), una órbita de periodo 8 ( $\mu = 3,56$ ) en e) y comportamiento caótico ( $\mu = 3,9$ ) en f).

una órbita de periodo 4. En intervalos cada vez más pequeños de  $\mu$  van sucediéndose nuevas bifurcaciones de vuelta hasta que, aproximadamente en  $\mu \simeq 3,57$ , las iteradas  $x_n$  dejan de seguir cualquier tipo de patrón reconocible en lo que puede interpretarse como una órbita de periodo infinito. Este fenómeno, que muestra la emergencia de un comportamiento aleatorio e impredecible desde un modelo matemático determinista, es conocido como 'caos topológico' y resulta de un interés científico excepcional por la manera en que conecta dos áreas del



conocimiento y dos concepciones del universo (el determinismo y la estadística) que pueden parecer antagónicas e irreconciliables.

Para examinar con mayor claridad la dinámica de un sistema unidimensional en función de cierto parámetro es habitual recurrir a los llamados 'diagramas de bifurcaciones', representaciones gráficas de los elementos atractores (esto es, puntos fijos y ciclos límite estables, así como la cantidad de periodos que posee una órbita periódica estable) presentes en dicho sistema para cada valor de dicho parámetro.

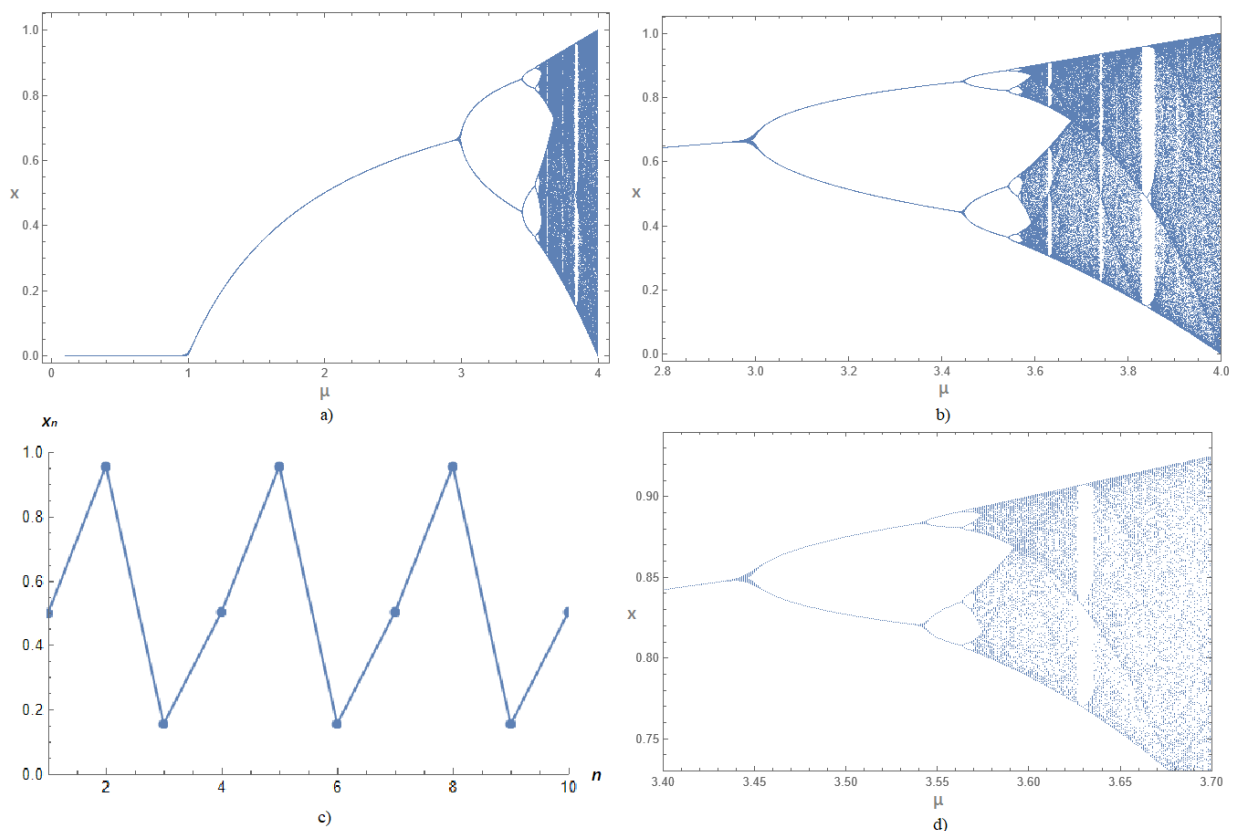


Figura 18: Diagrama de bifurcaciones a distintas escalas de la ecuación logística (28) en a), b) y d), y sucesión de  $x_n$  con una órbita de periodo 3 ( $\mu = 3,83$ ) en c).

Como puede apreciarse en las figuras 18a) y 18b), las bifurcaciones suceden donde el análisis matemático y las simulaciones computacionales predecían. No obstante, se exponen algunas particularidades que añaden complejidad a la dinámica del sistema.

La primera, la órbita de periodo 3 que aparece en torno a  $\mu \simeq 3,8$  y se representa en la figura 18c). La emergencia de este tipo de órbitas recibe el nombre de 'bifurcación tangente', una clase de bifurcación silla-nodo característica de sistemas caóticos. Esta relación entre el caos topológico y las órbitas de periodo 3 queda certificada por el teorema de Li y Yorke:

**Teorema 5.1.1** Si una función iterativa continua  $G : [a, b] \rightarrow [a, b]$  posee un ciclo de un periodo que no es potencia de 2, entonces esta exhibe una topología caótica [17].

Por otra parte, como queda a la vista en la comparativa entre las figuras 18b) y 18d), la forma en que los periodos orbitales se multiplican en función del parámetro  $\mu$  se reproduce de forma idéntica a diferentes escalas. En otras palabras, el diagrama de bifurcaciones de la aplicación logística es autosimilar, propiedad intrínseca de los fractales.

Estos dos fenómenos combinados, las bifurcaciones tangentes y la autosemejanza, provoca una intermitencia entre intervalos de comportamiento caótico e intervalos de periodicidad múltiple de 3 que es conocida como 'ruta intermitente hacia el caos' [8] [14].

## 5.2. Modelo económico de la telaraña

El ámbito económico es, sin duda, uno de los campos que mejor se ajusta al objeto de estudio de los sistemas complejos y donde puede resultar de mayor utilidad aplicar modelos de dinámica de sistemas.

El modelo de la telaraña aborda el análisis de la dinámica del precio de un producto en cierto mercado medido anualmente. Primero define la variable 'precio esperado'  $\pi_n$ , el precio que adquirirá el producto el año  $n$  según las estimaciones del productor en el año  $n - 1$ , y del cual depende la oferta del producto  $S(\pi_n)$ . Después define la variable independiente  $p_n$ , el precio real del producto durante el año  $n$  y del cual depende la demanda  $D(p_n)$ .

Se supone la función demanda  $D(p_n)$  continua, estrictamente decreciente y lineal, mientras que la función oferta  $S(\pi_n)$  se da como continua, estrictamente creciente y con gráfica

en forma de  $S$ . Esto último tiene sentido, pues es de suponer que si los precios son bajos la oferta debe crecer lentamente debido a unos costes de producción fijos, mientras que si los precios son altos la oferta también crece lentamente debido a limitaciones de capacidad.

Por último, se asume que el precio esperado viene dado por una media ponderada de los precios esperados y los precios en el pasado, y se supone cierta una ley básica de la ciencia económica: para cada periodo de tiempo  $n$  la oferta y la demanda acaban por alcanzar un equilibrio temporal.

Todas estas suposiciones se expresan matemáticamente de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \pi_{n+1} = (1 - w)\pi_n + wp_n \\ p_n = D^{-1}S(\pi_n) \\ D(p_n) = a - bp_n \\ S(\pi_n) = \frac{1}{1 + e^{2\lambda(1 - \pi_n)}} \end{cases} \quad (29)$$

Donde  $w \in (0, 1)$  es una constante de ponderación y  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$ , constantes de ajuste de las funciones oferta y demanda.

Simplificando el anterior sistema de ecuaciones en diferencias al máximo surge el enunciado:

$$\pi_{n+1} = \pi_n + \alpha - \frac{1}{1 + e^{2\lambda(1 - \pi_n)}} \quad (30)$$

Con los parámetros  $\lambda < 0$  y  $0 < \alpha < 1$ .

Dada la dependencia del sistema de no uno sino dos parámetros, la manera más efectiva de estudiar su dinámica consiste en representar varios diagramas de bifurcaciones de  $x$  en función de uno de los parámetros para distintos valores del segundo.

Así, tomando  $\alpha$  como parámetro de referencia, puede observarse un diagrama simple, sin bifurcaciones y con un sólo punto fijo que varía su posición dibujando una curva en forma de  $S$  invertida para todo valor de  $\lambda$  menor que 4. Para  $\lambda > 4$  surge en el centro del diagrama una órbita de periodo dos, el punto de bifurcación se aleja del centro del diagrama conforme se

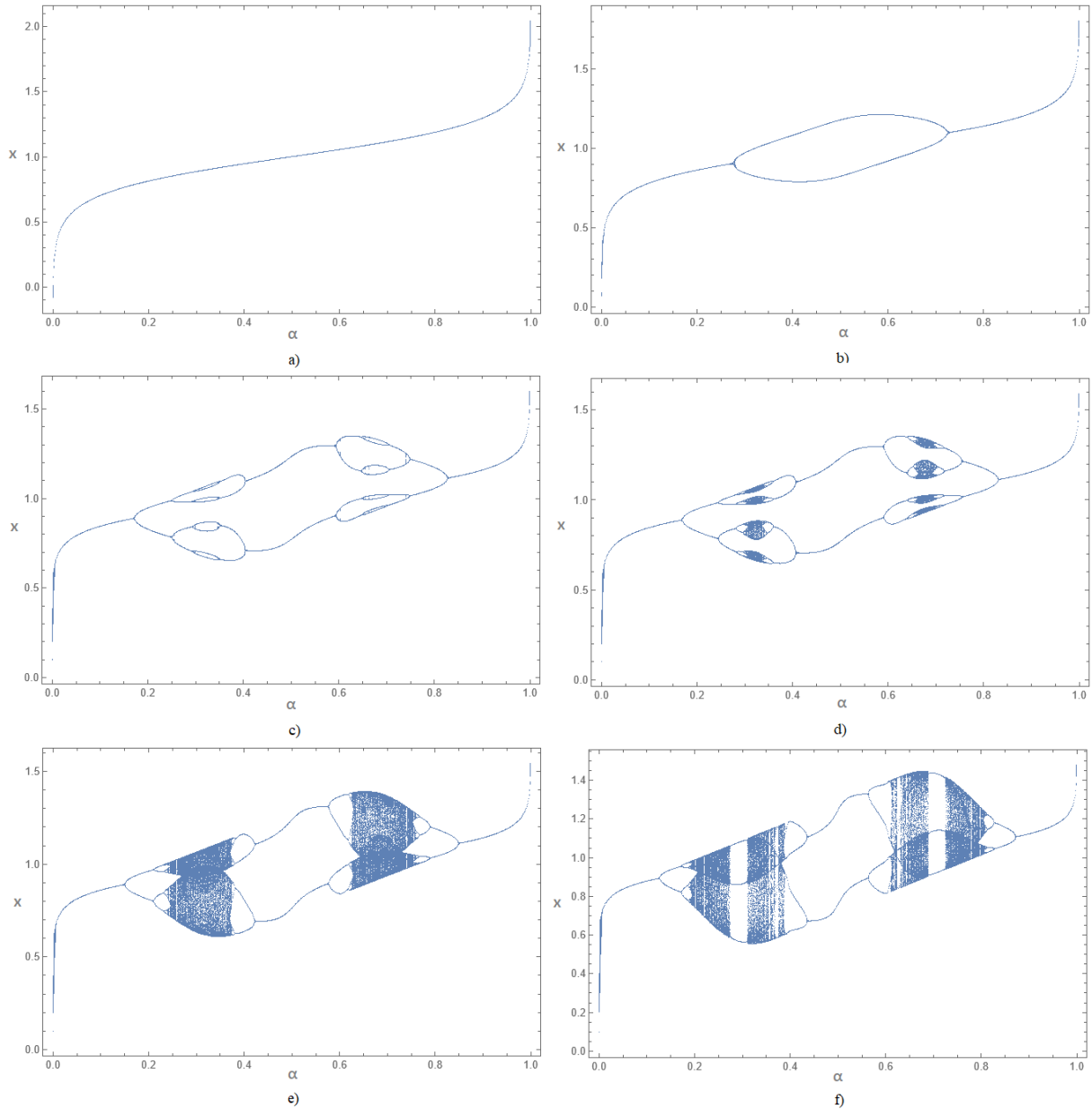


Figura 19: *Diagrama de bifurcaciones de  $x$  en función de  $\alpha$  para  $\lambda = 3,5$  en a),  $\lambda = 5$  en b),  $\lambda = 7$  en c),  $\lambda = 7,1$  en d),  $\lambda = 7,8$  en e) y  $\lambda = 9$  en f).*

incrementa  $\lambda$  y una nueva bifurcación de duplicación de periodo aparece en torno a  $\lambda \simeq 6,25$ .

Si se continúa aumentando  $\lambda$  se observan cada vez más bifurcaciones, de vuelta de la misma manera que en la ecuación logística, hasta que en ciertas regiones del diagrama aparecen zonas caóticas. Sin embargo, existe una diferencia notable con el diagrama de la aplicación logística: en este caso toda aparición de una bifurcación de duplicación de periodo viene

acompañada de una bifurcación de efecto inverso. Estas bifurcaciones se disponen en el diagrama siguiendo un patrón simétrico y pueden ser referidas como 'bifurcaciones de reducción de periodo'. El comportamiento caótico comienza a mostrarse a partir de  $\lambda \simeq 7,05$  y en  $\lambda \simeq 7,85$  pueden apreciarse ya las características órbitas de periodo impar.

Con  $\lambda \rightarrow \infty$  el caos se hace inevitable para todo  $\alpha$ , cuya incidencia en el diagrama pasa a ser únicamente la de definir los límites máximo y mínimo del intervalo unitario de posibles  $x$ .

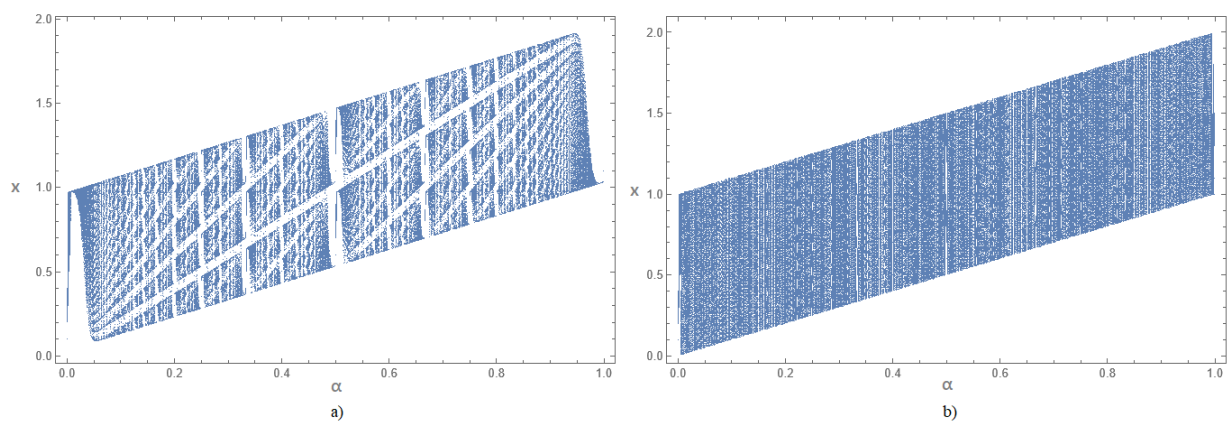


Figura 20: *Diagrama de bifurcaciones de  $x$  en función de  $\alpha$  para  $\lambda = 10^2$  en a) y  $\lambda = 10^6$  en b).*

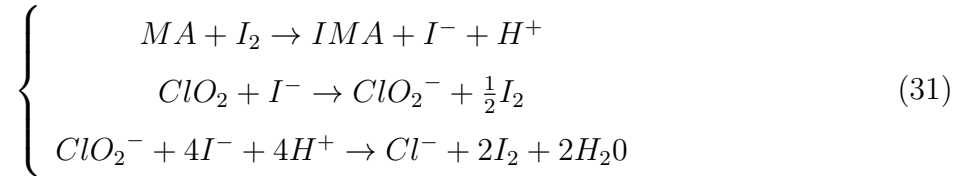
El modelo de la telaraña es un modelo determinista fundamental en un área de investigación, el financiero, en el que prima el uso de la probabilidad y la estadística. En su versión no lineal, expuesta en este apartado, la telaraña ofrece una herramienta significativamente más potente que otros modelos lineales para comprender las fluctuaciones de precios en mercados independientes y abre la puerta a una mayor utilización de la matemática determinista en el ámbito económico, tendencia actualmente al alza [18].

### 5.3. Reacciones químicas oscilantes

Este trabajo introduce en sus primeras páginas la reacción Belusov-Zhabotinsky, descubrimiento fundamental en la química del siglo XX y clave en el desarrollo de los sistemas complejos como ámbito de investigación. Sin embargo, el comportamiento cromático oscilan-

te que caracteriza la reacción BZ no es exclusivo de esta. Un ejemplo alternativo de reacción química que puede describirse mediante un modelo sencillo de ecuaciones diferenciales no lineales es el de la reacción de dióxido de cloro con yodo en un medio de ácido malónico.

Este sistema se demuestra empíricamente compuesto por las tres reacciones básicas siguientes:



Dado que los reactivos  $MA$ ,  $I$  y  $ClO_2$  varían mucho más lentamente que  $I^-$  y  $ClO_2^-$ , pueden aproximarse como constantes y el sistema simplificado expresarse como el sistema bidimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = a - x - \frac{4xy}{x^2+1} \\ \dot{y} = bx(1 - \frac{y}{x^2+1}) \end{array} \right. \quad (32)$$

Donde  $x$  e  $y$  son las concentraciones de  $I^-$  y  $ClO_2^-$  respectivamente y las constantes  $a$ ,  $b > 0$  dependen de las concentraciones de los reactivos lentos y de otras propiedades químicas obtenidas experimentalmente.

Mediante cálculos matemáticos triviales y siguiendo los criterios de clasificación expuestos en el segundo apartado puede deducirse que existe un punto fijo, asintóticamente estable cuando se cumple la condición  $b > 3a/5 - 25/a = b_c$  e inestable cuando  $b < b_c$ . Gracias al teorema de Poincaré-Bendixson (expuesto también en el apartado 2.3) es posible confirmar lo previsible a la vista del cambio en el comportamiento del punto crítico: en  $b = b_c$  se da una bifurcación de Hopf supercrítica, esto es, en torno al punto fijo aparece un ciclo límite atractor cuando  $b < b_c$ .

Debido a lo 'cerrada' que es la espiral antes de la aparición de la órbita periódica resulta

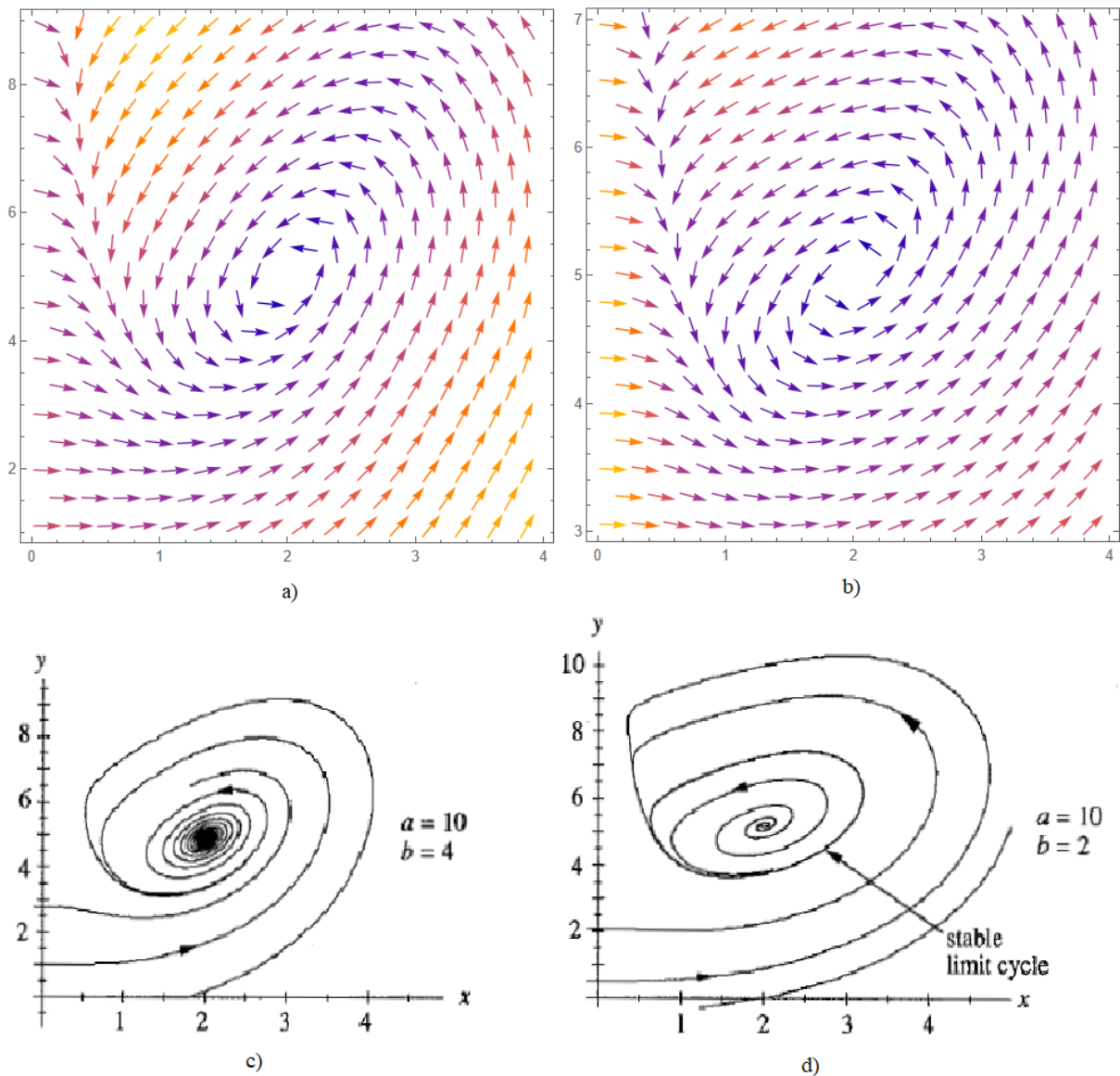


Figura 21: Flujo de fases asociado al sistema (32) con  $a = 10$  y  $b = 4$  en a),  $a = 10$  y  $b = 2$  en b) y representaciones esquemáticas equivalentes en c) y d) extraídas de [8].

complicado representar la bifurcación de manera que quede claramente visible. Pese a que en la figura 21b) puede apreciarse sutilmente que el punto fijo se ha convertido en un repelente, en las figuras 21c) y 21d) se incluyen dibujos a mano alzada de ciertas trayectorias del flujo de fases que muestran las diferencias en la estructura topológica del sistema antes y después de la bifurcación.

Aun sutil, la existencia del ciclo límite para unas concentraciones concretas de los reac-

tivos lentos es responsable de que la reacción acabe mostrando un comportamiento oscilante que tiende al infinito en lugar de estabilizarse en un estado homogéneo de equilibrio [19].

Modelizar matemáticamente la reacción BZ es una tarea notablemente más complicada, pues involucra más de veinte reacciones elementales, y son numerosos los intentos realizados durante las últimas décadas de definir un sistema matemático que describa la dinámica de esta reacción en función de ciertas condiciones iniciales y ambientales.

Uno de los modelos más sencillos propuestos hasta la fecha es el llamado 'Oregonator' (debido a que fue publicado por tres científicos de la Universidad de Oregón [20]). Este, bajo unas condiciones específicas y realizando simplificaciones similares a las del modelo de la reacción que se expresa en (31), reduce la dinámica de la reacción BZ a un elegante sistema de ecuaciones diferenciales de tan sólo dos dimensiones y tres parámetros:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x(1-x) + y \frac{q-x}{q+x} f \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad (33)$$

Lo que se descubre analizando el sistema (33) es que la mecánica detrás del comportamiento de la reacción BZ es la misma que produce las oscilaciones cromáticas de la reacción de dióxido de cloro con yodo en ácido malónico. Fácilmente puede hallarse un punto fijo que, para combinaciones concretas de los tres parámetros  $f$ ,  $q$  y  $\varepsilon$ , sufre una bifurcación de Hopf supercrítica [21].

## 6. Conclusiones

'Sistemas complejos' es un concepto amplio, incluso ambiguo, y abordar el estudio de la manera en que estos evolucionan resulta una labor, valga la redundancia, compleja. Mostrar una imagen completa de tan grande campo de conocimiento es un objetivo inalcanzable para un trabajo de estas características y no es en ningún caso su motivación.

A menudo la dinámica de los sistemas complejos se describe mediante métodos estadísticos o procedimientos que desbordan la matemática clásica como la lógica o la simulación



computacional. Incluso ciñéndose a los modelos matemáticos deterministas, la rigurosidad y profundidad con que pueden tratarse cuestiones como la estructura topológica que el espacio de fases puede adoptar para un número de dimensiones superiores a dos o la forma en que el caos puede manifestarse en diversos sistemas supera por mucho las posibilidades de estas cuarenta páginas.

Así pues, el presente proyecto surge con el ánimo de servir de introducción a los sistemas complejos y de dotar a uno de ciertas herramientas, básicas y ajustadas a los contenidos estudiados durante el Grado en Física, que habiliten para describir y analizar de una manera sencilla dinámicas altamente complejas.

Las herramientas matemáticas son aportadas en el segundo, tercer y cuarto apartado, que versan principalmente sobre puntos de equilibrio, órbitas periódicas y bifurcaciones en sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias no lineales. Como elemento vertebrador se incluyen, a lo largo de todo el texto, representaciones elaboradas con el *software* Mathematica que corroboran visualmente los fenómenos expuestos en lenguaje algebraico.

Por último se describen tres modelos matemáticos que demuestran las dos tesis fundamentales del trabajo. La primera, que es posible analizar de un modo determinista la dinámica de ciertos sistemas complejos a partir únicamente de sistemas de ecuaciones y de análisis de estabilidad de los campos vectoriales asociados. La segunda, que la dinámica de sistemas complejos está presente en una enorme variedad de áreas científicas y que modelos muy similares pueden ser utilizados para explicar realidades extremadamente diferentes.

## Referencias

- [1] Yaneer Bar-Yam. General features of complex systems. *Encyclopedia of life support systems*, 2002.
- [2] Yaneer Bar-Yam. *Dynamics Of Complex Systems*. CRC Press, 2019.
- [3] Philip Ball. Forging patterns and making waves from biology to geology: A commentary on turing (1952) ‘the chemical basis of morphogenesis’. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences*, 2015.
- [4] Santiago Ramírez. *Perspectivas en las teorías de sistemas*. Siglo XXI, 1999.
- [5] Vladimir I. Arnold. *Ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [6] Earl A. Coddington y Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [7] John Guckenheimer y Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Steven H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [9] Philip Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1960.
- [10] Encyclopaedia Britannica et al. *Britannica concise encyclopedia*. Encyclopaedia Britannica, Inc., 2008.
- [11] Gustavo A. Juárez y Silvia I. Navarro. Las ecuaciones en diferencias en los modelos matemáticos discretos. *Aportes científicos en PHYMATH*, 2011.
- [12] Hassan Sedaghat. Difference equations as discrete dynamical systems. *Virginia Commonwealth University repository*, 2007.

- [13] Wbeimar Oswaldo Vera Martínez et al. Aplicaciones del teorema de estabilidad liapunov para sistemas de ecuaciones en diferencia. *Repositorio institucional Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, 2015.
- [14] Jean-Michel Grandmont. Nonlinear difference equations, bifurcations and chaos. *CE-PREMAP paper*, 1988.
- [15] Mary A. Clark, Jung Choi y Matthew Douglas. *Biology, (OpenStax)*. OpenStax, 2018.
- [16] Steven Jeffries, Harriet Huber, John Calambokidis y Jeffrey Laake. Trends and status of harbor seals in washington state: 1978-1999. *The Journal of wildlife management*, 2003.
- [17] Tien Y. Li y James A. Yorke. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 1975.
- [18] James A Walsh. Surprising dynamics from a simple model. *Mathematics Magazine*, 2006.
- [19] Istvan Lengyel, Gyula Rabai e Irving R. Epstein. Experimental and modeling study of oscillations in the chlorine dioxide-iodine-malonic acid reaction. *Journal of the American Chemical Society*, 1990.
- [20] Richard J. Field, Endre Koros y Richard M. Noyes. Oscillations in chemical systems. ii. thorough analysis of temporal oscillation in the bromate-cerium-malonic acid system. *Journal of the American Chemical Society*, 1972.
- [21] Casey Gray. An analysis of the belousov-zhabotinskii reaction. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 2002.

## Apéndice

Código utilizado en Wolfram Mathematica para representar figuras.

Mapas de vectores asociados a los puntos fijos y ciclos límite (2, 3, 4, 5, 7):

```
VectorPlot[{x, 5 y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x, -5 y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x, y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x + y, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{y, -x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-y, x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{x - y, x + y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x - y, x - y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
r2 = x^2 + y^2;
VectorPlot[{x*(1 - r2) - y, y*(1 - r2) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x*(1 - r2) - y, -y*(1 - r2) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Diagramas de estabilidad de puntos fijos (6, 8):

```
Plot[detA = trA^2/4, {trA, -3, 3}, TicksStyle -> {White, White}]
Show[{Plot[detA = trA^2/2 - 1, {trA, -2, 2}], Plot[detA = 1, {trA, -2, 2}],
  RegionPlot[{detA > trA^2/2 - 1 && detA < 1}, {trA, -3, 3}, {detA, -3, 3}]]
```

Mapas de vectores asociados a bifurcaciones (10, 11, 12, 21):

```
VectorPlot[{1 - x^2, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{- x^2, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-1 - x^2, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x - x^2, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{- x^2, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{x - x^2, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x - x^3, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{- x^3, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

```

VectorPlot[{x - x^3, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{-x + x^3, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{x^3, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
VectorPlot[{x + x^3, -y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
r2 = x^2 + y^2;
a = -1;
VectorPlot[{-x*(r2 - a) - y, -y*(r2 - a) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
a = 0;
VectorPlot[{-x*(r2 - a) - y, -y*(r2 - a) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
a = 1;
VectorPlot[{-x*(r2 - a) - y, -y*(r2 - a) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
a = -1;
VectorPlot[{x*(r2 - a) - y, y*(r2 - a) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
a = 0;
VectorPlot[{x*(r2 - a) - y, y*(r2 - a) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
a = 1;
VectorPlot[{x*(r2 - a) - y, y*(r2 - a) + x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
a = 0.5;
VectorPlot[{x*(1 - r2) - y*a + y^2/Sqrt[r2],
  y*(a - r2) + x*a - x*y/Sqrt[r2]}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
a = 1;
VectorPlot[{x*(1 - r2) - y*a + y^2/Sqrt[r2],
  y*(a - r2) + x*a - x*y/Sqrt[r2]}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
a = 2;
VectorPlot[{x*(1 - r2) - y*a + y^2/Sqrt[r2],
  y*(a - r2) + x*a - x*y/Sqrt[r2]}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
a = -1.5;
VectorPlot[{y, a*y + x - x^2 + x*y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
a = -0.8645;
VectorPlot[{y, a*y + x - x^2 + x*y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
a = 0;

```

```

VectorPlot[{y, a*y + x - x^2 + x*y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
a = 10;
b = 1;
VectorPlot[{a - x - 4 x*y/(1 + x^2), b*x (1 - y/(1 + x^2))}, {x, 0,
  4}, {y, 2, 8}]
b = 4;
VectorPlot[{a - x - 4 x*y/(1 + x^2), b*x (1 - y/(1 + x^2))}, {x, 0,
  4}, {y, 2, 8}]

```

Representaciones de la ecuación logística (17, 18c):

```

ListPlot[{NestList[0.8*#*(1 - #) &, 0.5, 50]},
  PlotRange -> {{1, 50}, {0, 0.1}}, Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
ListPlot[{NestList[2.9*#*(1 - #) &, 0.5, 50]},
  PlotRange -> {{1, 50}, {0.4, 0.8}}, Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
ListPlot[{NestList[3.1*#*(1 - #) &, 0.5, 50]},
  PlotRange -> {{1, 50}, {0.4, 0.8}}, Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
ListPlot[{NestList[3.5*#*(1 - #) &, 0.5, 50]},
  PlotRange -> {{1, 50}, {0.3, 1}}, Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
ListPlot[{NestList[3.56*#*(1 - #) &, 0.5, 50]},
  PlotRange -> {{1, 50}, {0.3, 1}}, Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
ListPlot[{NestList[3.9*#*(1 - #) &, 0.5, 50]},
  PlotRange -> {{1, 50}, {0, 1}}, Joined -> True,
  PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
ListPlot[{NestList[3.83*#*(1 - #) &, 0.5, 9]},
  PlotRange -> {{1, 10}, {0, 1}}, Joined -> True,

```

```
PlotMarkers -> {Automatic, 7}]
```

Diagramas de bifurcaciones (18, 19):

```
ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
  Union[Drop[NestList[r # (1 - #) &, .1, 300], 100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0.1, 4, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
  FrameLabel -> {"\[Mu]", "x"}, PlotRange -> Full,
  ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.0001], Axes -> True,
  FrameLabel -> {"\[Mu]", "x"}, Frame -> True,
  PlotRange -> {{2.8, 4}, All}, ImageSize -> 500]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
  Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[7 (1 - #)]) &, .1, 300],
    100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
  FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
  ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
  Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[10 (1 - #)]) &, .1, 300],
    100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
  FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
  ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
  Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[14 (1 - #)]) &, .1, 300],
```

```

100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[14.2 (1 - #)]) &, .1, 300],
100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[15.6 (1 - #)]) &, .1, 300],
100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[18 (1 - #)]) &, .1, 300],
100]]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@

```



```

Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[200 (1 - #)]) &, .1, 300],
100]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

ff = Compile[{{r, _Real}}, ({r, #} &) /@
Union[Drop[NestList[# + r - 1/(1 + Exp[2000000 (1 - #)]) &, .1, 300],
100]];
mm = Flatten[Table[ff[r], {r, 0, 1, 0.001}], 1];
ListPlot[mm, PlotStyle -> AbsolutePointSize[.00015], Axes -> True,
FrameLabel -> {"\[Alpha]", "x"}, PlotRange -> Full,
ImageSize -> {500, 500}, Frame -> True]

```