

Universidad de Sevilla

FACULTAD DE FÍSICA

ESTUDIO DE LA DISPERSIÓN PROFUNDAMENTE
INELÁSTICA EN PROCESOS ELECTRÓN-NUCLEÓN
Y ANÁLISIS DE LOS FACTORES DE FORMA DEL
NUCLEÓN



Trabajo Fin de Grado

Javier Gallego Bonilla

Grado en Física

Curso 2021/22

Tutores: Juan Antonio Caballero Carretero

Guillermo Daniel Megías Vázquez

Índice

Resumen	3
1. Introducción General: Objetivos y Metodología	4
1.1. Ecuación de Dirac e interacción electromagnética del electrón	5
1.2. Estructura interna del nucleón: factores de forma	8
1.3. Situación experimental	10
2. Formalismo de la Interacción Electromagnética Electrón-Nucleón	13
2.1. Ecuación de Dirac	13
2.2. Análisis del diagrama de Feynman del proceso $e-N$	14
2.3. Corrientes hadrónica y leptónica	16
2.4. Hamiltoniano de interacción electromagnética	17
2.5. Sección eficaz	20
2.5.1. Cálculo de la sección eficaz	21
2.5.2. Sección eficaz diferencial doble	26
2.6. Formalismo de la dispersión inelástica $e-N$	27
2.6.1. Funciones de estructura inelásticas	29
2.6.2. Parametrizaciones de las funciones de estructura inelásticas	33
3. Análisis y discusión de los resultados	35
3.1. Sección eficaz	35
3.2. Factores de forma del nucleón	37
4. Conclusiones	43
A. Fundamentos de teoría de dispersión relativista	45
A.1. Ecuación de Dirac	45
A.2. Teorema de trazas	46

B. Sección eficaz	47
B.1. Propiedades de la función δ de Dirac.	47
B.2. Desarrollo de la función δ asociada a S_{fi}	47
B.3. Expresión para el flujo incidente Φ_{inc}	47
B.4. Integración de la función δ de Dirac	49
C. Tensores hadrónico y leptónico	51
C.1. Cálculo del tensor leptónico	51
C.2. Cálculo del tensor hadrónico	53
C.3. Contracción de los tensores hadrónico y leptónico	60
Referencias	65

Resumen

Este trabajo constituye un amplio estudio sobre la dispersión de electrones con nucleones, centrándonos en la región profundamente inelástica y en el empleo de este proceso como herramienta fundamental en la investigación sobre temas de gran relevancia, como el estudio de la estructura interna del nucleón y su composición en función de quarks. Así mismo, se analizan en detalle los factores de forma del nucleón y su comportamiento en función de la cinemática del proceso de interacción. Los resultados obtenidos servirán para revelar información acerca de la estructura interna del nucleón así como para validar modelos nucleónicos a través del empleo de distintas parametrizaciones y modelos de factores de forma y la comparación de predicciones teóricas con los datos experimentales disponibles.

1. Introducción General: Objetivos y Metodología

Este trabajo estudia, a nivel académico, la interacción electromagnética electrón-nucleón ($e-N$), centrándose especialmente en el proceso de dispersión profundamente inelástica y su relevancia en el análisis de los factores de forma del nucleón. Se obtendrá, de forma teórica, la sección eficaz del proceso $e-N$ en el régimen profundamente inelástico en el marco teórico de la electrodinámica cuántica. Dicha sección eficaz permite deducir los factores de forma inelásticos del nucleón, los cuales dan información acerca de la estructura interna del nucleón.

La dispersión de electrones es una de las técnicas más usadas en el campo de la Física de Partículas para estudiar las propiedades de los hadrones. En estos procesos, los electrones penetran en el blanco generando una “fotografía” [1] que aporta información sobre la estructura interna del objetivo, la cual dependerá en gran medida de la cinemática del proceso.

La interacción elástica $e-N$ proporciona información sobre las propiedades electromagnéticas del nucleón tales como distribuciones de carga y momento magnético. Para dispersiones más energéticas pueden producirse procesos inelásticos tales como resonancias nucleónicas asociadas a la emisión de piones y otros mesones en el estado final. La dispersión inelástica puede darse también en procesos electrón-núcleo. En este caso, uno de los nucleones puede alcanzar un estado resonante como en el proceso $e-N$. Por otra parte, la dispersión de electrones con núcleos nos ha proporcionado la información más precisa acerca del tamaño nuclear y la distribución de carga del núcleo [2].

A finales de la década de los 60 se comenzaron a realizar experimentos de dispersión $e-N$ profundamente inelástica o DIS (*Deep Inelastic Scattering*) por sus siglas en inglés [3]. Esta región profundamente inelástica corresponde a energías mucho mayores que las de excitación del nucleón. Estos estudios se realizaron en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC). Con haces de electrones de hasta 21 GeV, se pretendía estudiar el nucleón en distancias mucho menores de las que se habían conseguido hasta entonces. En estos experimentos quedó demostrado que el nucleón no era una partícula elemental, sino

que tenía estructura interna y estaba compuesto por quarks como ya se había predicho teóricamente por parte de los físicos Murray Gell-Mann, George Zweig y André Petermann [4, 5, 6].

Los quarks interactúan entre sí dentro del nucleón mediante el intercambio de gluones. Estos gluones son partículas de espín 1 y son los mediadores de la interacción nuclear fuerte. La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría que describe esta interacción. La dinámica de los quarks en este contexto puede ser descrita mediante unas funciones fenomenológicas conocidas como factores de forma. Estos factores de forma ayudan a determinar, entre otras, la distribución eléctrica y magnética del nucleón. El objetivo de los procesos de dispersión electrón-nucleón es obtener de forma experimental estos factores de forma.

El propósito principal de este trabajo es hacer un estudio de las propiedades y estructura interna del nucleón mediante el análisis de los factores de forma. Para ello nos valemos del proceso de dispersión electrón-nucleón en el régimen profundamente inelástico.

1.1. Ecuación de Dirac e interacción electromagnética del electrón

La descripción teórica de los procesos descritos en este trabajo se lleva a cabo en el marco que proporciona la electrodinámica cuántica en la cual es imprescindible el empleo de la ecuación de Dirac. La expresión de esta ecuación en el caso libre es:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M) \psi , \quad (1.1)$$

donde α_i y β son las matrices de Dirac.

La ecuación de Dirac (1.1) proporciona una descripción cuántica-relativista de partículas de espín 1/2. Su carácter matricial con las matrices α y β de dimensión 4×4 , implica que existen cuatro soluciones, dos correspondientes a valores positivos de la energía y

otras dos a valores negativos [7, 8].

En el contexto de este trabajo, esta ecuación se usará para describir los fermiones con los que vamos a trabajar: electrón y nucleón. Obtendremos una solución para cada partícula, las cuales usaremos posteriormente en el desarrollo formal de la interacción electromagnética entre ambas partículas.

A lo largo de este trabajo nos centraremos en la interacción electrón-nucleón y, más específicamente, en la interacción electromagnética entre ellos. Además de esta, también podría considerarse la interacción débil, sin embargo, esta juega en general un papel poco importante respecto a la electromagnética.

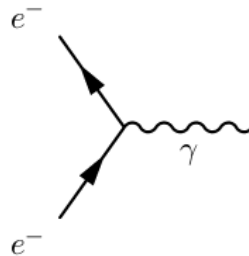


Figura 1: *Vértice básico de la interacción electromagnética. Figura obtenida de [9].*

Todos los procesos de interacción electromagnética entre partículas pueden reducirse a lo que se denomina como un vértice básico [9] cuyo diagrama de Feynman es el de la Fig. 1. Aunque el diagrama de la Fig. 1 corresponde a un proceso que no es posible debido a la conservación del cuadrimomento, sirve como elemento básico para construir todos los diagramas de Feynman de procesos electromagnéticos.

La interacción electromagnética se describe a través del intercambio, entre partículas cargadas, de fotones virtuales. A su vez, los diagramas de Feynman constituyen una simple representación de dichos procesos. Así, en la Fig. 2 se muestra el diagrama de Feynman para el proceso de dispersión electrón-muón.

Como se observa, en el diagrama solo se ha considerado el intercambio de un fotón virtual. Esto corresponde a la aproximación más sencilla posible. Es el término de primer orden en el cálculo perturbativo de la electrodinámica cuántica (QED) y se denomina aproximación de Born.

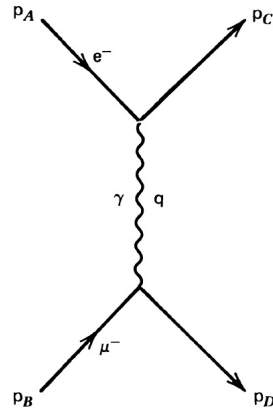


Figura 2: *Diagrama de Feynman para la interacción entre un electrón y un muón mediante el intercambio de un fotón. Figura obtenida de [10].*

Electrón-Protón

En este trabajo, nos centraremos fundamentalmente en diagramas como el de la Fig. 3, el cual representa la interacción electromagnética entre el electrón y el protón. Como se observa, el protón viene representado por tres líneas paralelas, las cuales hacen referencia a la composición de quarks de este barión. En la Fig. 3 se toma por válida la aproximación de Born (un único fotón intercambiado) entre un electrón y un protón en régimen elástico. A medida que se incrementa la energía del proceso entre estas dos partículas, también podría considerarse el régimen inelástico y el profundamente inelástico [1]. En el régimen inelástico, resonancias del protón tales como el barión delta (Δ) son producidos en el estado final. Por otro lado, en el régimen profundamente inelástico (DIS) la energía intercambiada en el proceso es lo suficientemente alta para que puedan aparecer múltiples partículas en el estado final [10]. Esto se muestra en la Fig. 4, donde X hace referencia al conjunto de todas las posibles partículas finales.

El nucleón también puede encontrarse en un estado ligado en el interior de un núcleo. Al igual que en el caso electrón-nucleón, este proceso también puede ocurrir de diversas maneras en función de la energía del proceso. A bajas energías se encuentra el régimen elástico donde el núcleo permanece intacto en el estado final. Conforme aumenta la energía transferida por el lepton, se alcanza el régimen cuasielástico donde un nucleón es arrancado del núcleo inicial dando lugar a un nuevo núcleo. Finalmente, a energías más altas, se

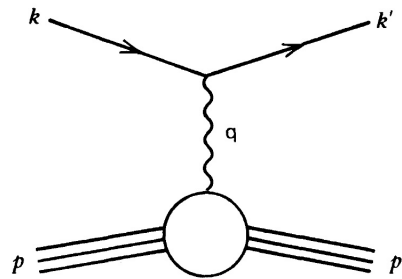


Figura 3: *Diagrama de Feynman para la interacción electrón-protón mediante el intercambio de un fotón. Figura obtenida de [10].*

producen dispersiones inelásticas con procesos nucleónicos que presentan semejanzas con los que estudiaremos en el caso $e-N$.

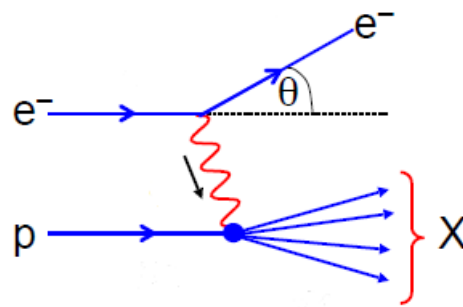


Figura 4: *Diagrama de Feynman para la interacción profundamente inelástica electrón-protón. Figura obtenida de [11].*

1.2. Estructura interna del nucleón: factores de forma

La descripción de la estructura interna de los nucleones puede realizarse a través de funciones fenomenológicas que describen la estructura y la dinámica interna del nucleón. Estas funciones reciben el nombre de factores de forma.

El empleo de los factores de forma es imprescindible en la formulación teórica de procesos de interacción en los que intervienen hadrones, como es nuestro caso. Estas funciones aparecen explícitamente en la expresión final de la sección eficaz de los distintos procesos de dispersión que consideraremos.

Como ya se ha mencionado, una manera adecuada de obtener información acerca

de la estructura de un objeto a nivel atómico es la dispersión de un haz de electrones. Estudiando la sección eficaz del proceso podemos averiguar, por ejemplo, propiedades tales como distribuciones de carga eléctrica y magnética, radio, etc. En el caso de blancos extensos, con una cierta distribución de carga eléctrica, para momento angular nulo, la sección eficaz del proceso de dispersión puede expresarse de forma general en función de la sección eficaz correspondiente a una carga puntual como sigue [10],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{point} |F(q)|^2, \quad (1.2)$$

donde q es el momento transferido del electrón incidente al blanco ($q = k_i - k_f$). El término $F(q)$ representa el factor del forma del blanco que viene dado como la transformada de Fourier de la distribución de carga,

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x. \quad (1.3)$$

Para obtener información acerca del tamaño del protón, el proceso es similar al descrito justo arriba pero con algunas diferencias importantes. Por un lado, debemos considerar que el momento magnético del protón, al igual que su carga, también interviene en la interacción electromagnética con el haz de electrones. Además, será necesario considerar el retroceso del nucleón tras el proceso de dispersión. En este caso se obtendrán dos factores de forma G_E y G_M los cuales están relacionados, en ciertas aproximaciones, con la distribución de carga y de momento magnético, respectivamente. En el capítulo 2 se presenta una descripción detallada sobre esta cuestión.

Si quisiéramos una visión más detallada de la estructura del protón, se debería aumentar el momento transferido q por el electrón. Al aumentar el momento del electrón se aumenta la energía del proceso y cuando esta energía es suficientemente alta, el protón puede alcanzar un estado excitado. Este proceso se conoce como dispersión inelástica electrón-protón ($e + p \rightarrow e + X$). Un ejemplo es: $e + p \rightarrow e + \Delta^+ \rightarrow e + p + \pi_0$. En este caso, el protón se excita a un estado *Delta* y luego decae mediante la emisión de un mesón neutro π_0 y un protón.

El proceso que se estudia en este trabajo es el de dispersión profundamente inelástica. En este régimen energético, el proceso puede interpretarse de forma aproximada como dispersión elástica/cuasielástica del electrón por los constituyentes elementales del protón [10]. Inicialmente, los constituyentes elementales del protón se conocían con el nombre de partones. Cada uno de estos partones portaba una fracción distinta del momento y energía total del hadrón. En el modelo de partones, estos se definen respecto a una escala energética que viene dada por el momento transferido en el proceso de dispersión.

En el contexto del modelo de quarks, para procesos en los que el momento transferido no es muy alto, un protón puede describirse por tres quarks de valencia. Para procesos más energéticos, será necesario considerar parejas quark-antiquark además de los tres quarks de valencia [1]. Los experimentos de DIS pudieron interpretarse adecuadamente a través del modelo de quarks. Más aún, sus resultados eran consistentes con las ideas generales del modelo de quarks y constituyen un aspecto esencial en el desarrollo de la teoría de la interacción fuerte, la cromodinámica cuántica (QCD).

Aunque se aparte del tema principal de este trabajo, también cabe destacar la dispersión neutrino-nucleón puesto que es otro método muy eficaz y preciso de estudiar propiedades de la QCD. Estos procesos permiten estudiar la estructura axial del nucleón, la cual es difícil de investigar mediante dispersión de electrones o fotones [1, 12].

1.3. Situación experimental

Numerosos experimentos se han llevado a cabo desde los años 60 hasta nuestros días acerca de la estructura interna de los hadrones. Cabe destacar el SLAC *National Accelerator Laboratory* de Stanford, California, un laboratorio en el que se encuentra un acelerador lineal de partículas. Las investigaciones llevadas a cabo en este laboratorio por parte de los físicos J. I. Friedman, H. W. Kendall y R. E. Taylor en los años 60 y 70, consiguieron demostrar la presencia de quarks en protones y neutrones. Esta fue la primera prueba experimental de la existencia de los quarks, gracias a la cual, estos tres físicos fueron galardonados con el premio Nobel en 1990. También hay que destacar otros hallazgos importantes llevados a cabo en SLAC, como el descubrimiento de la partícula

J/Ψ y del quark *strange* (premio Nobel de Física en 1974), o el descubrimiento del leptón τ (premio Nobel de Física en 1995) [13].

CEBAF [14] es un acelerador continuo de electrones dentro del laboratorio Thomas Jefferson de Estados Unidos. En dicho acelerador se ha conseguido aumentar la energía del haz de electrones a 12 GeV. Gracias a este avance, se espera entender de forma más precisa la estructura interna de los nucleones. Uno de los primeros resultados consecuencia de esta mejora ha demostrado que es posible detectar nuevas formas de materia, los mesones híbridos [15]. Estos mesones están formados por quarks unidos por la interacción fuerte mediante gluones. Pero, a diferencia de los mesones ordinarios, los gluones de los mesones híbridos se comportan de manera diferente. El estudio de estas partículas permitirá investigar cómo están formadas las partículas subatómicas por la interacción fuerte, así como el confinamiento de quarks (por qué los quarks no se han observado aislados). Actualmente se están llevando a cabo diversos experimentos que estudian la interacción electrón-núcleo. Cabe destacar el detector CLAS12 (CEBAF *Large Acceptance Spectrometer* para 12 GeV) instalado en el *Hall B* del Jefferson Lab. Gracias a este detector pueden realizarse reacciones muy energéticas que permiten estudiar en gran profundidad la interacción electrón-núcleo. Los resultados de estos experimentos se emplean tanto para descifrar la estructura de los nucleones y las fuerzas que rigen estas interacciones como para obtener información precisa acerca de los neutrinos. Los neutrinos son partículas muy poco interactuantes debido a que son leptones sin carga, por lo que los experimentos con neutrinos son difíciles de realizar y de medir. Los procesos con electrones sirven para modelar los respectivos procesos con neutrinos y también para realizar test y correcciones a los detectores de neutrinos, explotándose así las similitudes entre neutrinos y electrones (ambos son leptones) [16]. Estos métodos se usan actualmente en la investigación de las oscilaciones de neutrinos, un fenómeno que consiste en que los neutrinos cambian de sabor, el cual es un tema de reciente interés en la Física de Partículas.

Gracias a los experimentos de DIS anteriormente descritos y a partir de sus resultados (secciones eficaces angulares) puede obtenerse información precisa sobre los factores de forma del nucleón. Como se mostrará en detalle en el capítulo siguiente, la expresión de la sección eficaz diferencial doble tanto para el caso de dispersión elástica como pro-

fundamente inelástica, contiene de forma explícita los factores de forma nucleónicos que dependen del cuadrimomento transferido en el proceso al cuadrado (Q^2). Este valor viene determinado por la energía inicial del electrón y por el ángulo de dispersión (θ). Combinando los resultados experimentales obtenidos para distintos valores del cuadrimomento transferido y del ángulo de dispersión con las expresiones teóricas de la sección eficaz es posible obtener información sobre los factores de forma del nucleón.

En este trabajo se hará uso de diversos modelos con el objetivo de estudiar el comportamiento de los factores de forma y las funciones de estructura inelásticas, que así mismo permitirá el cálculo de secciones eficaces de los procesos de dispersión respecto a diversos parámetros cinemáticos. Los cálculos se han realizado desarrollando programas de computación en Fortran y Matlab.

2. Formalismo de la Interacción Electromagnética Electrón-Nucleón

En este capítulo se introduce la ecuación de Dirac y el formalismo de la interacción electromagnética. Posteriormente, se desarrolla la descripción teórica del proceso de dispersión electrón-protón tanto en régimen elástico como inelástico. Por último, se calculan la sección eficaz del proceso inelástico y los factores de forma inelásticos del nucleón.

2.1. Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac es una de las herramientas fundamentales para describir el proceso que se trata en este trabajo, pues proporciona una descripción cuántico-relativista de partículas de espín 1/2.

Dicha ecuación fue formulada en 1928 por Paul Dirac y surge en la búsqueda de una ecuación covariante relativista de primer orden en el tiempo, que trate las variables espaciales y temporal en forma simétrica y que tenga una norma conservada definida positiva. La expresión covariante de la ecuación es:

$$(i\rlap{/}\partial - M)\psi = 0 , \tag{2.1}$$

donde $\rlap{/}\partial = \gamma_\mu \partial^\mu$ es el operador *nabla slash*, con γ^μ las matrices de Dirac y ∂^μ la cuádriderivada covariante; y M es la masa de la partícula. Información más específica acerca de la ecuación de Dirac y sus propiedades puede encontrarse en el apéndice A.1 y en [17].

Aunque una información más completa y detallada se pueda encontrar en las notas de la asignatura Mecánica Cuántica Relativista [7] o en sus referencias bibliográficas [18], es conveniente introducir en esta sección las expresiones para las soluciones libres de la ecuación de Dirac. Estas aparecen en el desarrollo formal de la interacción entre las partículas involucradas en el proceso. En (2.2) y (2.3) se detallan las soluciones de la

ecuación (2.1):

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(X^\mu) = \sqrt{\frac{M}{EV}} u(\mathbf{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu} \quad (2.2)$$

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}(X^\mu) = \sqrt{\frac{M}{EV}} v(\mathbf{p}, s) e^{iP_\mu X^\mu}, \quad (2.3)$$

donde $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ y $\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}$ son funciones de onda asociadas a soluciones de energía positiva y negativa, respectivamente. Las funciones $u(\mathbf{p}, s)$ y $v(\mathbf{p}, s)$ son los espinores de Dirac cuyas expresiones generales son:

$$u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+M} \chi_s \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$v(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+M} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ y χ_s son las matrices y los espinores de Pauli, respectivamente.

2.2. Análisis del diagrama de Feynman del proceso e - N

En esta sección se analiza el proceso de dispersión e - N tomando la aproximación de Born, esto es, las partículas interactúan mediante el intercambio de un único fotón. El diagrama de Feynman representado en la Fig. 5 es, por lo tanto, de primer orden. En la Fig. 5 el eje del tiempo se ha tomado en dirección vertical de forma que en la parte inferior del diagrama aparecen las partículas iniciales y en la parte superior las partículas finales.

Para simplificar los cálculos se elige como sistema de referencia el sistema laboratorio en el cual el nucleón inicial se encuentra en reposo. Se define θ como el ángulo de dispersión del electrón (ángulo que forman el momento inicial y final del electrón). A continuación, se detallan los momentos y energías de las partículas iniciales y finales:

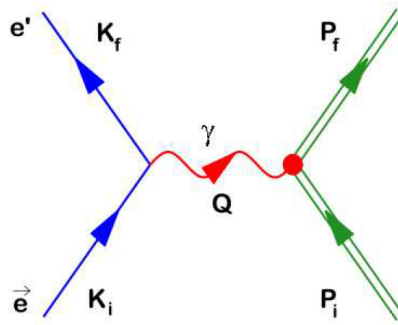


Figura 5: *Diagrama de Feynman para la interacción electrón-nucleón mediante el intercambio de un fotón. Figura obtenida de [19].*

- Electrón inicial:
 - Cuadrimomento: $k_i^\mu = (\varepsilon_i, \mathbf{k}_i)$
 - Masa: m
- Electrón final:
 - Cuadrimomento: $k_f^\mu = (\varepsilon_f, \mathbf{k}_f)$
 - Masa: m
- Nucleón inicial:
 - Cuadrimomento: $P_i^\mu = (M, 0)$
 - Masa: M
- Nucleón final:
 - Cuadrimomento: $P_f^\mu = (E_f, \mathbf{p}_f)$
 - Masa: M

Para estudiar la cinemática del proceso, aplicamos el principio de conservación de energía-momento en ambos vértices del diagrama.

Vértice leptónico:

- Conservación de la energía: $\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f$

- Conservación del momento: $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \Rightarrow \mathbf{q}^2 = |\mathbf{k}_i|^2 + |\mathbf{k}_f|^2 - 2|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f|\cos\theta$

Vértice hadrónico:

- Conservación de la energía: $E_f = \omega + M$
- Conservación del momento: $\mathbf{p}_f = \mathbf{q} \Rightarrow \omega^2 + 2M\omega = \mathbf{q}^2 \Rightarrow -Q^2 = |Q^2| = 2M\omega$

De las ecuaciones anteriores se deduce que las variables ε_i , ε_f y θ no son independientes. Generalmente, basta determinar dos de ellas para fijar completamente la cinemática del proceso. Se suelen tomar como variables independientes la energía del electrón inicial (ε_i) y el ángulo de dispersión (θ).

2.3. Corrientes hadrónica y leptónica

Para poder realizar los cálculos pertinentes, es de gran utilidad definir las cuadracorrientes electromagnéticas de transición entre los estados inicial y final en cada vértice, en este caso, corriente leptónica, $j_{(l)}^\mu$, y corriente hadrónica, $J_{(N)}^\mu$ [10]:

$$j_{(e)}^\mu = \bar{\psi}_{k_f} \gamma^\mu \psi_{k_i} \quad (2.6)$$

$$J_{(N)}^\mu = \bar{\psi}_{P_f} \hat{\Gamma}^\mu \psi_{P_i} . \quad (2.7)$$

En primer orden de teoría de perturbaciones y considerando ondas planas, las funciones de onda leptónicas y hadrónicas se expresan como las soluciones libres de (2.2) y las corrientes anteriores quedan:

Corriente leptónica

$$j_{(e)}^\mu = -e \frac{m}{V \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_f}} \bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma^\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i) e^{i(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{X}} . \quad (2.8)$$

Corriente hadrónica

Puesto que el nucleón tiene estructura interna, $\hat{\Gamma}^\mu$ en (2.7) no puede sustituirse únicamente por γ^μ como es el caso para una partícula puntual de espín 1/2. La corriente hadrónica $J_{(N)}^\mu$ es un cuadvivector que se construye a partir del álgebra de Clifford definida en el espacio de Dirac por las matrices γ y los covariantes bilineales asociados [7, 9]. En el caso particular de la interacción electromagnética, la corriente hadrónica adquiere la forma:

$$J_{(N)}^\mu = e \frac{M}{V \sqrt{E_i E_f}} \bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i) e^{i(P_f - P_i) \cdot X}, \quad (2.9)$$

con

$$\hat{\Gamma}^\mu = F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{i F_2(Q^2)}{2M} \sigma^{\mu\nu} Q_\nu, \quad (2.10)$$

donde F_1 y F_2 son los factores de forma nucleónicos de Pauli y Dirac, respectivamente, los cuales proporcionan información acerca de la estructura interna del nucleón y solo dependen de Q^2 [20].

En (2.10) aparecen dos términos independientes, asociados a γ^μ y $\sigma^{\mu\nu}$. Si tratásemos el caso de dispersión de neutrinos, sería necesario incluir términos que involucran a γ^5 , los cuales están asociados a procesos de violación de paridad.

2.4. Hamiltoniano de interacción electromagnética

El estado de un sistema como el que estamos tratando se puede representar mediante un *ket* $|\Phi(t)\rangle$ en el espacio de Hilbert. Nos interesa, conociendo el estado inicial del sistema ($|\Phi_i\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle$), encontrar la probabilidad de obtener un determinado estado final ($|\Phi_f\rangle$). Con este objetivo, se define la matriz de dispersión S como:

$$|\Phi(+\infty)\rangle = S |\Phi(-\infty)\rangle . \quad (2.11)$$

El estado final $|\Phi(+\infty)\rangle$ puede expandirse en una base completa de estados finales $|\Phi_f\rangle$:

$$|\Phi(+\infty)\rangle = \sum_f |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f | \Phi(+\infty)\rangle , \quad (2.12)$$

con

$$\langle \Phi_f | \Phi(+\infty)\rangle = \langle \Phi_f | S | \Phi(-\infty)\rangle = \langle \Phi_f | S | \Phi_i\rangle \equiv S_{fi} . \quad (2.13)$$

De esta forma, se deduce que el elemento de matriz S_{fi} es la amplitud de probabilidad de obtener el estado final $|\Phi_f\rangle$ tras el proceso de dispersión.

La matriz S definida en (2.11) permite obtener una ecuación de movimiento de los estados del sistema en cualquier orden en teoría de perturbaciones. En este caso, nos centramos únicamente en la dispersión electromagnética electrón-nucleón en primer orden de teoría de perturbaciones (un solo fotón intercambiado). La amplitud de transición (elemento de matriz S_{fi}) asociada al proceso de dispersión que lleva al sistema de un estado inicial a otro final, ambos determinados, en primer orden de teoría de perturbaciones adquiere la forma (ver [7, 8]):

$$S_{fi} = -i \int d^4X H_I(X) , \quad (2.14)$$

donde H_I es el hamiltoniano de interacción responsable del proceso.

En este caso, el hamiltoniano es el correspondiente a la interacción electromagnética cuya expresión viene dada por la electrodinámica cuántica (QED) según:

$$H_{EM}(X) = j_\mu(X)A^\mu(X) , \quad (2.15)$$

donde $j_\mu(X)$ es la cuadricorriente electromagnética asociada al proyectil y $A^\mu(X)$ el cuadripotencial (o campo) electromagnético generado por el blanco.

El campo electromagnético generado por el nucleón, en este caso, es:

$$A^\mu(X) = \int d^4Y D_{EM}^{\mu\nu}(X - Y) J_\nu^{(N)}(Y), \quad (2.16)$$

donde se ha usado la expresión (2.9) de la corriente hadrónica del nucleón y $D_{EM}^{\mu\nu}(X)$ es el propagador de la interacción electromagnética. En la ecuación (2.16), X e Y corresponden a las coordenadas espacio-temporales de los vértices leptónico y hadrónico, respectivamente (ver la Fig. 5).

Propagador de la interacción electromagnética

La expresión más general del propagador del fotón es [10]:

$$D_{EM}^{\mu\nu}(X - Y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{Q^2} \left(-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2} \right) e^{iQ \cdot (X - Y)} . \quad (2.17)$$

Es habitual, para estos cálculos en el contexto de la QED, elegir el gauge de Feynman ($\xi = 1$). En dicho caso, el propagador recibe el nombre de propagador de Feynman y su expresión es, simplemente:

$$D_F^{\mu\nu}(X - Y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{Q^2} e^{iQ \cdot (X - Y)} . \quad (2.18)$$

De esta forma, el campo electromagnético creado por el nucleón queda:

$$A^\mu(X) = - \int d^4Y \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{Q^2} e^{iQ \cdot (X - Y)} J_{(N)}^\mu(Y) . \quad (2.19)$$

2.5. Sección eficaz

En el caso de colisiones de dos partículas para llegar a cualquier estado final, la sección eficaz se define como la probabilidad de que se produzca una colisión concreta por unidad de tiempo, por unidad de centro dispersor y por unidad de flujo incidente. Partimos de la expresión de la probabilidad del proceso por unidad de volumen y tiempo:

$$W_{fi} \equiv \frac{|S_{fi}|^2}{V \cdot T}, \quad (2.20)$$

donde V y T son, respectivamente, el volumen y el tiempo considerados.

Definimos ahora la probabilidad diferencial (dW) como la probabilidad por unidad de volumen y tiempo de, partiendo del estado $|\Phi_i\rangle$ llegar a cualquier estado final en una región diferencial del espacio de momentos $d^3\mathbf{p}_f$ alrededor del estado final $|\Phi_f\rangle$ (compuesto por N_f partículas de momentos \mathbf{p}_f). Por lo tanto hay que sumar, para cada una de las partículas finales, sobre los posibles estados dentro de esa región de momentos:

$$\sum_{\mathbf{p}_f + d^3\mathbf{p}_f} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}_f.$$

De esta forma, la probabilidad diferencial queda:

$$dW = W_{fi} \left(\prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}_f \right). \quad (2.21)$$

Para obtener la sección eficaz diferencial hay que dividir por la densidad de partículas en el blanco ($\frac{1}{V}$ teniendo en cuenta la normalización) y por el flujo de partículas incidentes (Φ_{inc}). La expresión resultante es:

$$d\sigma = \frac{dW}{\frac{1}{V}\Phi_{inc}} = \frac{|S_{fi}|^2}{T \cdot \Phi_{inc}} \left(\prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}_f \right). \quad (2.22)$$

Finalmente, presentamos la expresión del flujo incidente:

$$\Phi_{inc} = \frac{|\mathbf{v}_{rel}|}{V}, \quad (2.23)$$

donde \mathbf{v}_{rel} es la velocidad relativa de las partículas que colisionan.

2.5.1. Cálculo de la sección eficaz

En este apartado vamos a desarrollar la expresión (2.14) de la amplitud de transición haciendo uso del resto de expresiones previas. En principio tenemos:

$$S_{fi} = -i \int d^4X \int d^4Y \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} j_\mu^{(e)}(X) \left(-\frac{1}{Q^2} \right) e^{iQ \cdot (X-Y)} J_{(N)}^\mu(Y). \quad (2.24)$$

Introduciendo las expresiones de las corrientes electromagnéticas (2.8) y (2.9) llegamos a:

$$S_{fi} = ie^2 \frac{m}{V \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_f}} \frac{M}{V \sqrt{E_i E_f}} \left(-\frac{1}{Q^2} \right) [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)] [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)] \\ \times \int d^4X \int d^4Y \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{iQ \cdot (X-Y)} e^{i(P_f - P_i) \cdot Y} e^{i(k_f - k_i) \cdot X}, \quad (2.25)$$

y resolviendo las integrales:

$$\int d^4X e^{i(k_f - k_i + Q) \cdot X} = (2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i + Q) \quad (2.26)$$

$$\int d^4Y e^{i(P_f - P_i - Q) \cdot Y} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i - Q), \quad (2.27)$$

la parte integral de (2.25) queda:

$$\int d^4Q (2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i + Q) \delta^4(P_f - P_i - Q) = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i). \quad (2.28)$$

Introduciendo este resultado en (2.25), obtenemos:

$$S_{fi} = -ie^2 \frac{mM}{V^2 \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_f E_i E_f}} \left(\frac{1}{Q^2} \right) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) \\ \times [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)] [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)].$$

Se puede expresar la tasa de transición por unidad de volumen (W_{fi}) como:

$$W_{fi} \equiv \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = \frac{m^2 M^2}{V^4 \varepsilon_i \varepsilon_f E_i E_f} \frac{[(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i)]^2}{VT} |M_{fi}|^2 \\ = \frac{m^2 M^2}{V^4 \varepsilon_i \varepsilon_f E_i E_f} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) |M_{fi}|^2, \quad (2.29)$$

donde se ha usado (B.3).

En (2.29), M_{fi} es la amplitud invariante que viene dada por:

$$M_{fi} = -e^2 \left(\frac{1}{Q^2} \right) [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)] [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)]. \quad (2.30)$$

En este término se halla contenida la física esencial del proceso de dispersión que se está estudiando.

La expresión (2.22) de la sección eficaz, para el caso que estamos tratando de dos partículas finales con momentos \mathbf{p}_f y \mathbf{k}_f , queda:

$$d\sigma = \frac{m^2 M^2}{\varepsilon_i \varepsilon_f E_i E_f} \frac{1}{V \Phi_{inc}} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) |M_{fi}|^2 \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_f}{(2\pi)^3}. \quad (2.31)$$

El flujo incidente Φ_{inc} se define como el número de partículas que llegan por unidad de área y unidad de tiempo. La expresión del flujo incidente es:

$$\Phi_{inc} = \frac{|\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_i|}{V}, \quad (2.32)$$

donde \mathbf{v}_i y \mathbf{V}_i son, respectivamente, las velocidades incidentes de electrones y nucleones.

Si sustituimos en la expresión de la sección eficaz (2.31) el resultado (B.8) del apéndice B.3, llegamos a la expresión:

$$d\sigma = \frac{m^2 M}{(2\pi)^2 |\mathbf{k}_i| \varepsilon_f E_f} \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) |M_{fi}|^2 d^3 \mathbf{p}_f d^3 \mathbf{k}_f. \quad (2.33)$$

La expresión que estamos buscando es la de la sección eficaz diferencial para un electrón dispersado en un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ centrado alrededor del ángulo θ . Para ello, comenzamos desarrollando $d^3 \mathbf{k}_f$ de (2.33) como:

$$d^3 \mathbf{k}_f = |\mathbf{k}_f|^2 d|\mathbf{k}_f| d\Omega = |\mathbf{k}_f| \varepsilon_f d\varepsilon_f d\Omega, \quad (2.34)$$

donde se ha usado $\varepsilon_f^2 = \mathbf{k}_f^2 + m^2$ y por tanto $|\mathbf{k}_f| d|\mathbf{k}_f| = \varepsilon_f d\varepsilon_f$. Si ahora sustituimos (2.34), (B.9) y (B.10) en (2.33), obtenemos:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{|\mathbf{k}_i|} |M_{fi}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 P_f \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) \\ \times 2mM |\mathbf{k}_f| d\varepsilon_f d\Omega \delta(P_f^2 - M^2) \Theta(p_0). \quad (2.35)$$

Puesto que en la mayoría de experimentos solo se detecta el electrón final, debemos sumar para todos los estados finales del nucleón. Esto se hace integrando sobre todos los momentos finales (\mathbf{p}_f) del nucleón. De esta forma, la sección eficaz diferencial doble resulta:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} |M_{fi}|^2 \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right), \quad (2.36)$$

donde se ha aplicado (B.12).

Una vez obtenida esta expresión de la sección eficaz, únicamente resta calcular el cuadrado de la amplitud invariante, $|M_{fi}|^2$. Podemos expresar:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{e^4}{|Q^2|^2} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

donde $L_{\mu\nu}$ y $H^{\mu\nu}$ son los tensores leptónico y hadrónico, respectivamente. Estos tensores vienen definidos por:

$$L_{\mu\nu} = \overline{\sum_{s_i, s_f}} [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)] [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\nu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)]^* \quad (2.38)$$

$$H^{\mu\nu} = \overline{\sum_{S_i, S_f}} [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)] [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\nu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)]^*. \quad (2.39)$$

El símbolo $\overline{\sum}$ denota que se suma/promedia en los estados finales/iniciales de espín.

Para proseguir con el cálculo de la sección eficaz es necesario desarrollar las expresiones (2.38) y (2.39) y posteriormente calcular la contracción de los dos tensores, $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$.

Tensor leptónico $L_{\mu\nu}$

Tras un pequeño desarrollo, se llega a la siguiente expresión para el tensor leptónico:

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr \left(\frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma_\nu \right). \quad (2.40)$$

Finalmente, el tensor leptónico puede expresarse en la forma:

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2}(k_f^\mu k_i^\nu + k_f^\nu k_i^\mu - (k_f \cdot k_i - m^2)g^{\mu\nu}) . \quad (2.41)$$

El desarrollo de los cálculos necesarios para obtener estas expresiones es muy extenso, y puede encontrarse en el apéndice C.1.

Tensor hadrónico $H^{\mu\nu}$

De forma análoga a la anterior, llegamos a la siguiente expresión para el tensor hadrónico:

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{2}Tr \left(\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right) . \quad (2.42)$$

Tras una serie de cálculos, el tensor hadrónico resulta:

$$H^{\mu\nu} = -W_1(Q^2) \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + \frac{W_2(Q^2)}{M^2} X^\mu X^\nu , \quad (2.43)$$

donde:

$$W_1 = \frac{|Q^2|}{4M^2} (F_1 + F_2)^2 \quad (2.44)$$

$$W_2 = (F_1)^2 + \frac{|Q^2|}{4M^2} (F_2)^2 . \quad (2.45)$$

Los cálculos que han sido necesarios para llegar a estas expresiones del tensor hadrónico están recogidos en el apéndice C.2.

Contracción de los tensores hadrónico y leptónico $L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$

Tras realizar los cálculos pertinentes, incluidos en el apéndice C.3, llegamos a la expresión siguiente para la contracción de los tensores leptónico y hadrónico:

$$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_f \varepsilon_i}{m^2} \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) , \quad (2.46)$$

donde se ha aplicado el límite ultrarrelativista para los electrones.

2.5.2. Sección eficaz diferencial doble

Introduciendo los resultados del apéndice C.3 en la expresión (2.36), llegamos a la siguiente expresión de la sección eficaz diferencial doble en el sistema laboratorio:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega} &= \frac{m^2}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} |M_{fi}|^2 \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right) = \frac{m^2}{(2\pi)^2} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \frac{e^2 e^2}{|Q^2|^2} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right) \\
 &= \frac{e^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4(2\pi)^2 \varepsilon_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right) \\
 &= \sigma_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right), \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

donde $G_E(Q^2) = F_1 - \tau F_2$ y $G_M(Q^2) = F_1 + F_2$ son los factores de forma de Sachs eléctrico y magnético respectivamente con $\tau = \frac{|Q^2|}{4M^2}$. El término σ_{Mott} es la sección eficaz de Mott que viene dada por:

$$\sigma_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta/2}{4\varepsilon_i^2 \sin^4 \theta/2}, \tag{2.48}$$

donde α es la constante de estructura fina. La sección eficaz de Mott es la sección eficaz correspondiente a la dispersión de un electrón con una partícula puntual sin espín [20].

Modificamos (2.47) aplicando la propiedad (B.1) de la δ de Dirac:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega} &= \sigma_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] 2M \delta(2M\omega - |Q^2|) \\
 &= \sigma_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] 2M \delta\left(2M\varepsilon_i - 2M\varepsilon_f - 4\varepsilon_i \varepsilon_f \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \sigma_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{2M}{2M + 4\varepsilon_i \sin^2 \frac{\theta}{2}} 2M \delta \left(\frac{2M}{2M + 4\varepsilon_i \sin^2 \frac{\theta}{2}} \varepsilon_i - \varepsilon_f \right) .$$

Finalmente integramos sobre $d\varepsilon_f$ y llegamos a la conocida como fórmula de Rosenbluth [21]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} f_{rec}^{-1} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \theta/2 \right] , \quad (2.49)$$

donde $f_{rec} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}$ es el factor de retroceso.

Los factores de forma G_E y G_M en el caso elástico, se pueden determinar a partir de medidas experimentales de la sección eficaz respecto al ángulo de dispersión, donde al representar respecto a $\tan^2 \theta/2$, la pendiente dará información sobre G_M y la ordenada en el origen sobre G_E y G_M . Lo mismo es aplicable en el caso siguiente para determinar las funciones de estructura inelásticas W_1 y W_2 .

2.6. Formalismo de la dispersión inelástica $e-N$

Hasta este punto hemos desarrollado la expresión de la sección eficaz diferencial del proceso $e-N$ en el régimen elástico. Sin embargo, el objetivo principal es el estudio del proceso en el régimen inelástico. Para obtener la sección eficaz correspondiente a dicho caso hemos de expresarla en términos de las funciones de estructura W_1 y W_2 anteriores que son las que proporcionan la información de la estructura interna del nucleón en el régimen inelástico y cuya descripción ya no vendrá dada en función de los factores G_E y G_M del caso elástico. Por lo tanto, la sección eficaz diferencial doble resulta:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega} = \sigma_{Mott} [W_2 + 2W_1 \tan^2 \theta/2] . \quad (2.50)$$

Las funciones de estructura W_1 y W_2 describen, ahora, la estructura interna del nucleón en el régimen inelástico. Como se puede observar, a diferencia de (2.47), en (2.50) no aparece la δ . Esto se debe a que en el caso inelástico, la masa de hadrón final no es

constante y hay que considerar todos los posibles estados, lo cual añade una suma que elimina esa δ . Al contrario del caso elástico, estas dependen de dos variables cinemáticas independientes:

$$W_1(\nu, Q^2) \quad W_2(\nu, Q^2) , \quad (2.51)$$

donde:

$$\nu \equiv \frac{P_i \cdot Q}{M} \xrightarrow{\text{sist.laboratorio}} \omega . \quad (2.52)$$

Previamente a describir el formalismo de la dispersión profundamente inelástica es conveniente introducir dos nuevas variables: la masa invariante (W) y la variable x de Bjorken [22]. Estas variables vienen definidas por:

$$W^2 \equiv P_i^2 = (P_f + Q)^2 = M^2 + 2M\nu + Q^2 \quad (2.53)$$

$$x \equiv \frac{|Q^2|}{2P_i \cdot Q} = \frac{|Q^2|}{2M\nu} . \quad (2.54)$$

En el estado final deberá aparecer, al menos, un barión. Puesto que el protón es el barión más ligero, se tiene $W \geq M$. En el caso elástico, la masa en el vértice hadrónico se conserva ($W = M$), luego $x = 1$ corresponde al caso elástico y $0 < x < 1$ al caso inelástico.

Las pruebas realizadas en el régimen profundamente inelástico ($|Q^2| \geq 1 \text{ GeV}^2$ y $W \geq 4 \text{ GeV}$) muestran que las funciones de estructura $MW_1(\nu, Q^2)$ y $\nu W_2(\nu, Q^2)$ se convierten en funciones de una única variable x . Esto se conoce por el nombre de *scaling* de Bjorken [22] y es una evidencia directa de que el electrón es dispersado por un constituyente puntual y cargado del protón. Por ello, en el régimen DIS es conveniente sustituir las funciones de estructura como:

$$MW_1(\nu, Q^2) = F_1(x, Q^2) \xrightarrow{\text{DIS}} F_1(x) \quad \nu W_2(\nu, Q^2) = F_2(x, Q^2) \xrightarrow{\text{DIS}} F_2(x) ,$$

donde hay que tener en cuenta que estas funciones de estructura $F_{1,2}(x)$ de DIS no son las mismas que los factores de forma $F_{1,2}(Q^2)$ de la dispersión elástica.

En el régimen profundamente inelástico, estas dos funciones de estructura satisfacen la relación de Callan-Gross [23]:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) . \quad (2.55)$$

Esta relación se obtiene considerando el modelo de partones y se deriva de que en el régimen DIS $\sigma_L \ll \sigma_T$, donde σ_L y σ_T son las secciones eficaces longitudinal y transversal, respectivamente. Las secciones eficaces longitudinal y transversal corresponden, respectivamente, a la polarización longitudinal o transversal de los fotones virtuales intercambiados en el proceso de dispersión [24]. La relación de Callan-Gross (2.55) además pone de manifiesto que los constituyentes puntuales del protón tienen espín $\frac{1}{2}$ [1].

2.6.1. Funciones de estructura inelásticas

En esta sección trataremos de obtener las funciones de estructura inelásticas $F_1(x)$ y $F_2(x)$. Para ello nos basaremos en el modelo de partones introducido previamente en la sección 1.2 según el cual, los partones se identifican como los quarks constituyentes del protón. En este modelo, los partones se definen según el momento transferido en el proceso de dispersión. A bajas energías, el protón contiene únicamente tres quarks de valencia. Para energías mayores, se definen, además las parejas quark-antiquark creadas por la interacción fuerte. En el sistema de referencia de momento infinito, el partón lleva una fracción x del cuadrimomento y de la energía total del nucleón (ver Fig. 6). Podemos expresar:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) , \quad (2.56)$$

donde la suma i se realiza sobre los distintos tipos de partones, e_i es la carga del partón y $f_i(x)$ es la función de distribución del partón (PDF, por sus siglas en inglés) definida como

la probabilidad de que el partón transporte una fracción entre x y $x+dx$ del momento total del nucleón. De esta forma, medir la función de estructura $F_2(x)$ proporciona directamente información de la distribución de quarks en el protón.

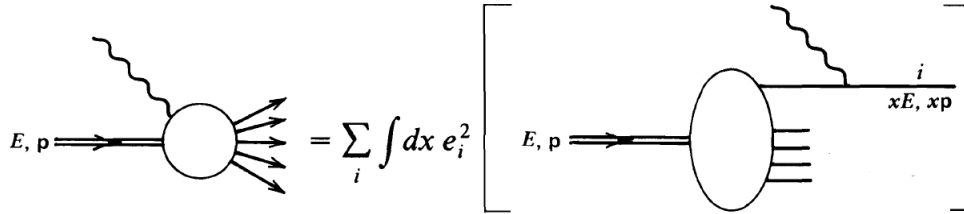


Figura 6: Diagrama representativo del modelo de partones. Figura obtenida de [10].

En el modelo de partones, la interacción entre estos se desprecia durante el tiempo en que se produce la dispersión: consideramos el partón como cuasilibre. Con esta suposición podemos dar una visión de la estructura de quarks del nucleón. Si considerásemos que el nucleón contiene únicamente tres quarks de valencia, la forma de la función de estructura sería $F_2(x) = \delta(x - \frac{1}{3})$. Sin embargo, además de los quarks de valencia, existe un mar de quarks formado por parejas quark-antiquark. Este mar de quarks se forma debido a los gluones emitidos por los quarks de valencia (ver Fig. 7).

La presencia de gluones tiende a ensanchar la distribución ya que existen quarks con momentos diferentes (distintos a $x = \frac{1}{3}$) como se puede apreciar en la Fig. 8.

Si expandimos (2.56) para el protón y el neutrón, obtenemos [10]:

$$\frac{1}{x}F_2^p(x) = \frac{4}{9}[u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9}[d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9}[s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \quad (2.57)$$

$$\frac{1}{x}F_2^n(x) = \frac{4}{9}[u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9}[d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9}[s^n(x) + \bar{s}^n(x)] , \quad (2.58)$$

donde $u^p(x)$ y $\bar{u}^p(x)$ son, respectivamente, las funciones de distribución del quark y del antiquark up dentro del protón; y de manera análoga para los sabores *down* (d) y *strange* (s). Se ha despreciado la contribución de los quarks *charm*, *top* y *bottom* en el protón. Puesto que el neutrón y el protón forman parte de un doblete de isospín, su contenido de quarks está relacionado como se muestra:

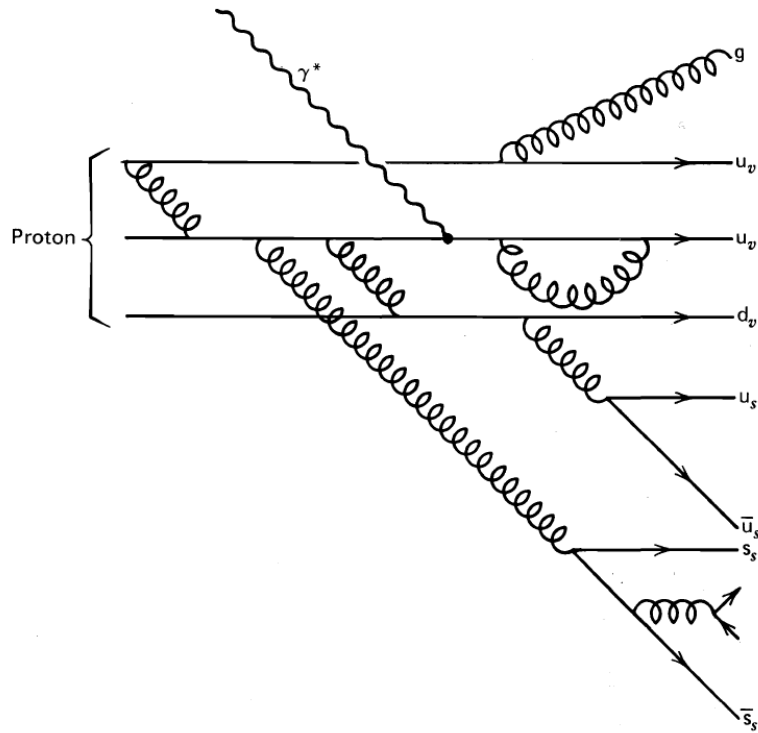


Figura 7: Diagrama de la estructura de quarks del protón formado por quarks de valencia, gluones y parejas quark-antiquark. Figura obtenida de [10].

$$u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x)$$

$$d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x)$$

$$s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x) . \quad (2.59)$$

A las funciones de distribución de quarks anteriores se les puede exigir que cumplan la siguiente restricción:

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad (2.60)$$

$$\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad (2.61)$$

$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 . \quad (2.62)$$

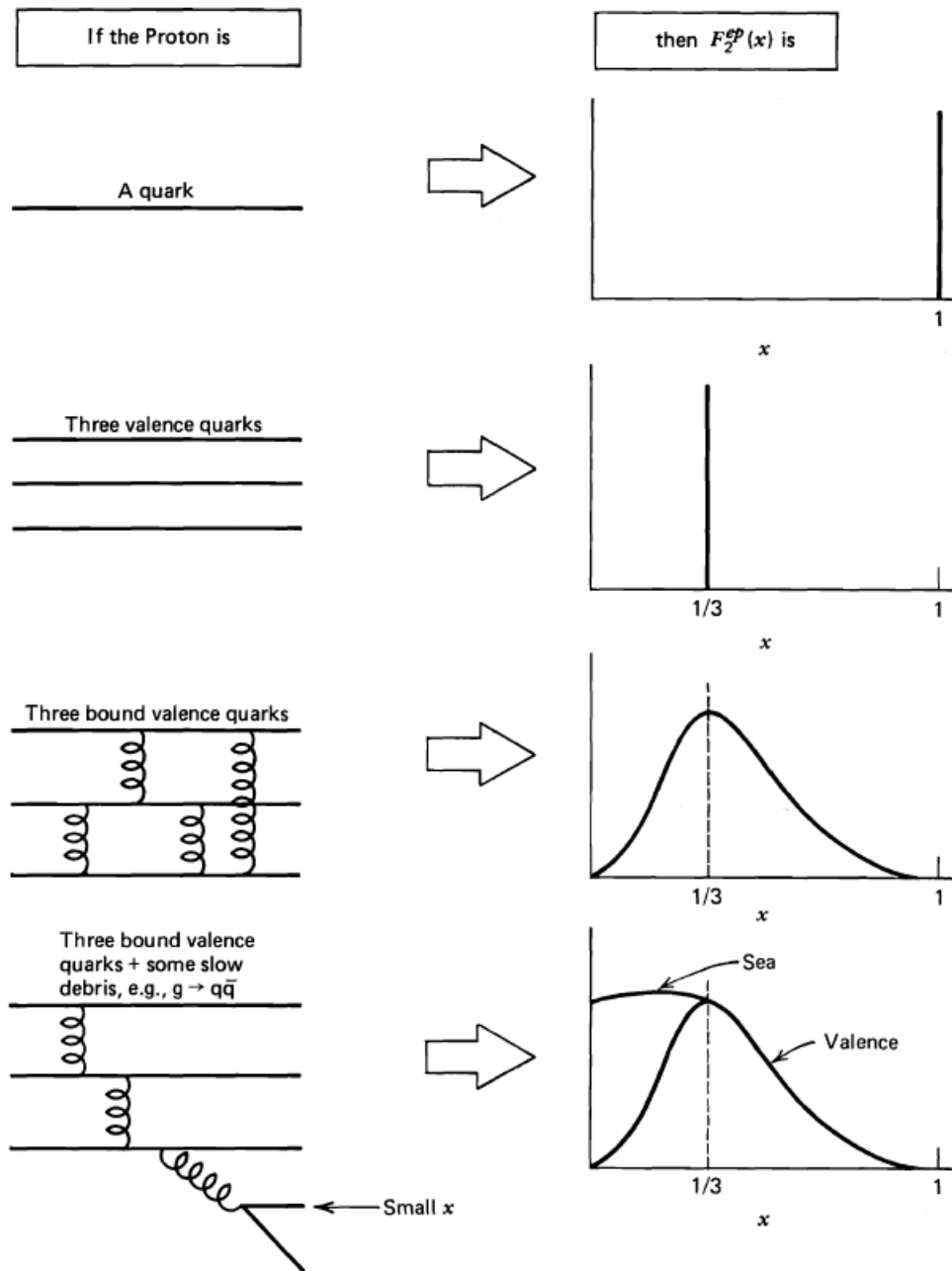


Figura 8: Funciones de estructura correspondientes a diferentes composiciones del protón. Figura obtenida de [10].

Esta restricción proviene del hecho de que los números cuánticos del protón deben ser los determinados por la combinación de los quarks de valencia (uud).

2.6.2. Parametrizaciones de las funciones de estructura inelásticas

En esta sección se introducen tres parametrizaciones distintas de las funciones de estructura inelásticas del nucleón, F_1 y F_2 o, equivalentemente, W_1 y W_2 . Todas ellas tratan de reproducir fielmente los resultados experimentales que se pueden obtener en los procesos de dispersión electrón-nucleón si bien están ajustadas para cinemáticas diferentes.

Parametrización de Bodek-Ritchie

Esta aproximación ajusta sus parámetros a los datos experimentales de las funciones de estructura W_1 y W_2 para la dispersión electrón-nucleón. La parametrización de Bodek-Ritchie, descrita más en profundidad en Refs. [25, 26], cubre todo el espectro inelástico desde la región de resonancia hasta la región profundamente inelástica. Los datos experimentales a los que se ajusta esta parametrización son los obtenidos en SLAC [27, 28] que cubren el rango energético $0,1 \text{ GeV}^2 < |Q^2| < 20 \text{ GeV}^2$.

Parametrización de Bosted-Christy

La parametrización de Bosted-Christy para protones [29] y para neutrones [30] se ajusta a los datos empíricos de las secciones eficaces electrón-nucleón y electrón-deuterón para construir las funciones de estructura inelásticas del nucleón. Esta es una mejora de la parametrización de Bodek-Ritchie. Aunque la parametrización de Bodek-Ritchie cubre completamente la región inelástica, nuevos estudios demostraron que era necesaria una parametrización más detallada en la región de resonancia. Por esta razón se desarrolló la parametrización de Bosted-Christy, la cual emplea unas funciones de estructura nucleónicas que se ajustan mejor a los datos experimentales en la región de resonancia. Las medidas usadas para desarrollar esta parametrización son secciones eficaces inelásticas inclusivas en el rango de cuadrimomento transferido $0 \leq |Q^2| < 8 \text{ GeV}^2$ y masa invariante en el estado final $1,1 \text{ GeV}^2 < W < 3,1 \text{ GeV}^2$.

Modelo GRV98

El modelo de Glück-Reya-Vogt [31] (GRV98) se basa en la QCD para obtener funciones de distribución de partones de quarks y antiquarks de forma individual, es decir, las funciones descritas en las ecuaciones (2.57) y (2.58). Las PDFs se emplean para obtener las funciones de estructura inelásticas F_1 y F_2 . Este modelo ajusta las funciones de distribución de partones a resultados experimentales de dispersión profundamente inelástica para valores altos de $|Q^2|$ donde los efectos no perturbativos de la QCD son despreciables. Algunas correcciones relativas a la masa del nucleón, a efectos no perturbativos de la QCD, o a efectos de la dispersión a energías bajas se parametrizan y se incluyen en la descripción del modelo. El modelo GRV98 se adapta con bastante acierto a las secciones eficaces posteriores a la región de resonancia. Sin embargo, se desvía para valores bajos de $|Q^2|$.

3. Análisis y discusión de los resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante métodos numéricos para el proceso de dispersión electrón-nucleón. Se han elaborado varias gráficas en las que se representan funciones de estructura y secciones eficaces en función de distintas variables cinemáticas. Como ya se comentó en la sección 1.3, para obtener estos resultados se han empleado métodos numéricos a partir de las expresiones teóricas con el objetivo de simular el proceso $e-N$ y poder comparar con datos experimentales.

3.1. Sección eficaz

Se estudiará a continuación la sección eficaz diferencial doble del proceso de dispersión electromagnética electrón-nucleón.

En la Fig. 9, se representa la sección eficaz diferencial doble ($\frac{d^2\sigma}{d\epsilon d\Omega}$) frente a la masa invariante (W) para unos valores del ángulo de dispersión y de energía inicial del electrón determinados. Los picos en la sección eficaz corresponden a las resonancias bariónicas. El primer pico es el correspondiente a la resonancia Δ de masa invariante $W = 1232 \text{ MeV}$ [32]. El segundo pico se debe principalmente a la resonancia $S_{11}(1535)$ y el tercero a la resonancia $F_{15}(1680)$. Tras estos picos, la sección eficaz representa la región profundamente inelástica (DIS). Los resultados se han obtenido mediante el uso de códigos que combinan las expresiones analíticas obtenidas en el capítulo 2 para la sección eficaz con el uso de parametrizaciones de las funciones de estructura inelásticas. Estas parametrizaciones arrojan resultados acordes a los datos experimentales en la región de resonancia y la región profundamente inelástica, no así en la región elástica. Por completitud, la Fig. 9 muestra también el pico correspondiente al caso de dispersión elástica $e-N$ (línea vertical negra) que corresponde a un valor de la masa invariante $W = M = 0,938 \text{ GeV}$ (masa del nucleón).

De la Fig. 9 es posible extraer una comparativa entre las tres parametrizaciones empleadas para obtener los resultados. La diferencia más llamativa es la del modelo GRV98

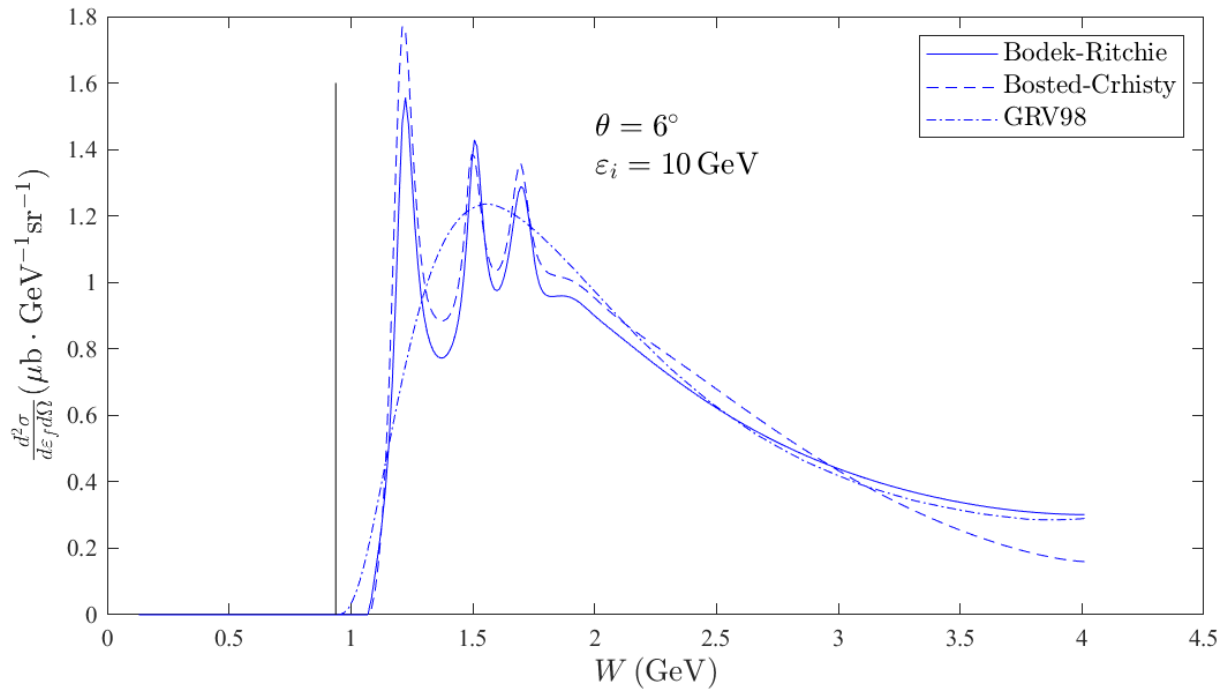


Figura 9: *Sección eficaz diferencial doble frente a la masa invariante para el proceso de dispersión electrón-nucleón.*

con las otras dos. Como ya se ha comentado anteriormente, el modelo GRV98 está diseñado para que concuerde con los datos experimentales, principalmente, en la región inelástica. Sin embargo, en la región de resonancia se ve cómo hace un promedio poco detallado y no es capaz de mostrar las resonancias nucleónicas. Si ahora comparamos la parametrización de Bodek-Ritchie con la de Bosted-Christy, se observa cómo la segunda produce valores más altos en la región de resonancia. Los resultados de Bosted-Christy deben, en un principio, concordar mejor con los experimentos ya que, como se expuso anteriormente, esta parametrización es una mejora de la de Bodek-Ritchie en la región de resonancias nucleónicas. Fuera de la región de resonancia, en la región inelástica ($W > 2 \text{ GeV}$) las tres parametrizaciones proporcionan predicciones muy similares.

En la Fig.10, se representa la misma medida que en la Fig. 9 pero en este caso con datos experimentales obtenidos en SLAC por los físicos J. I. Friedman, H. W. Kendall y R. E. Taylor en los años 60 y 70. Esta fue aceptada como la primera prueba empírica de la existencia de los quarks, la cual les valió a sus autores para ser galardonados con el premio Nobel de Física en 1990. Si comparamos esta con la Fig. 9, vemos como concuerdan bastante bien. Obsérvese que las parametrizaciones de Bodek-Ritchie y de Bosted-Christy

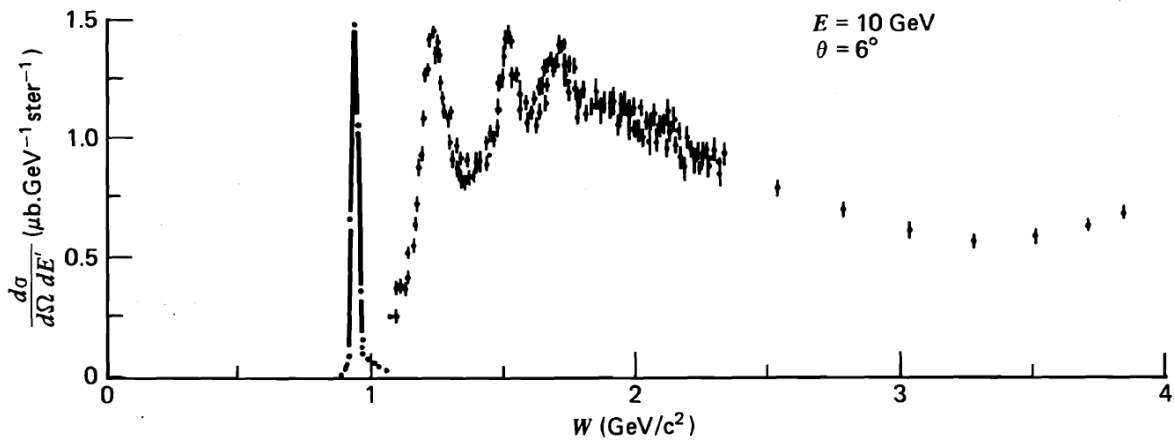


Figura 10: *Datos experimentales obtenidos en SLAC de la sección eficaz diferencial doble frente a la masa invariante para el proceso de dispersión electrón-nucleón. Figura obtenida de [10].*

reproducen de manera aproximada los datos experimentales de la Fig. 10. Si bien, estas parametrizaciones concuerdan muy bien con los datos experimentales en la posición de los máximos de las resonancias, no existe tal acierto en la magnitud de estos máximos. A diferencia de lo que cabría esperar, los datos obtenidos mediante la parametrización de Bodek-Ritchie son los que mejor se ajustan a los de la Fig. 10. Esto puede deberse a las posibles limitaciones experimentales para obtener medidas precisas. Otra posible razón es la presencia de procesos de orden superior en los diagramas de Feynman que no se han incluido en el análisis.

3.2. Factores de forma del nucleón

A continuación estudiaremos las funciones de estructura inelásticas $F_1(x, Q^2)$ y $F_2(x, Q^2)$ y su dependencia en x y en Q^2 .

En la Fig. 11, se representa la función de estructura F_2 frente a $|Q^2|$ para valores distintos de la variable x de Bjorken. Para esta gráfica se han empleado la parametrización de Bodek-Ritchie y el modelo GRV98¹, descritos anteriormente. En la Fig. 11 se

¹El modelo de Bosted-Christy no se ha usado en la comparación de la Fig. 11 pues presenta algunos problemas de convergencia para valores de $|Q^2|$ muy elevados.

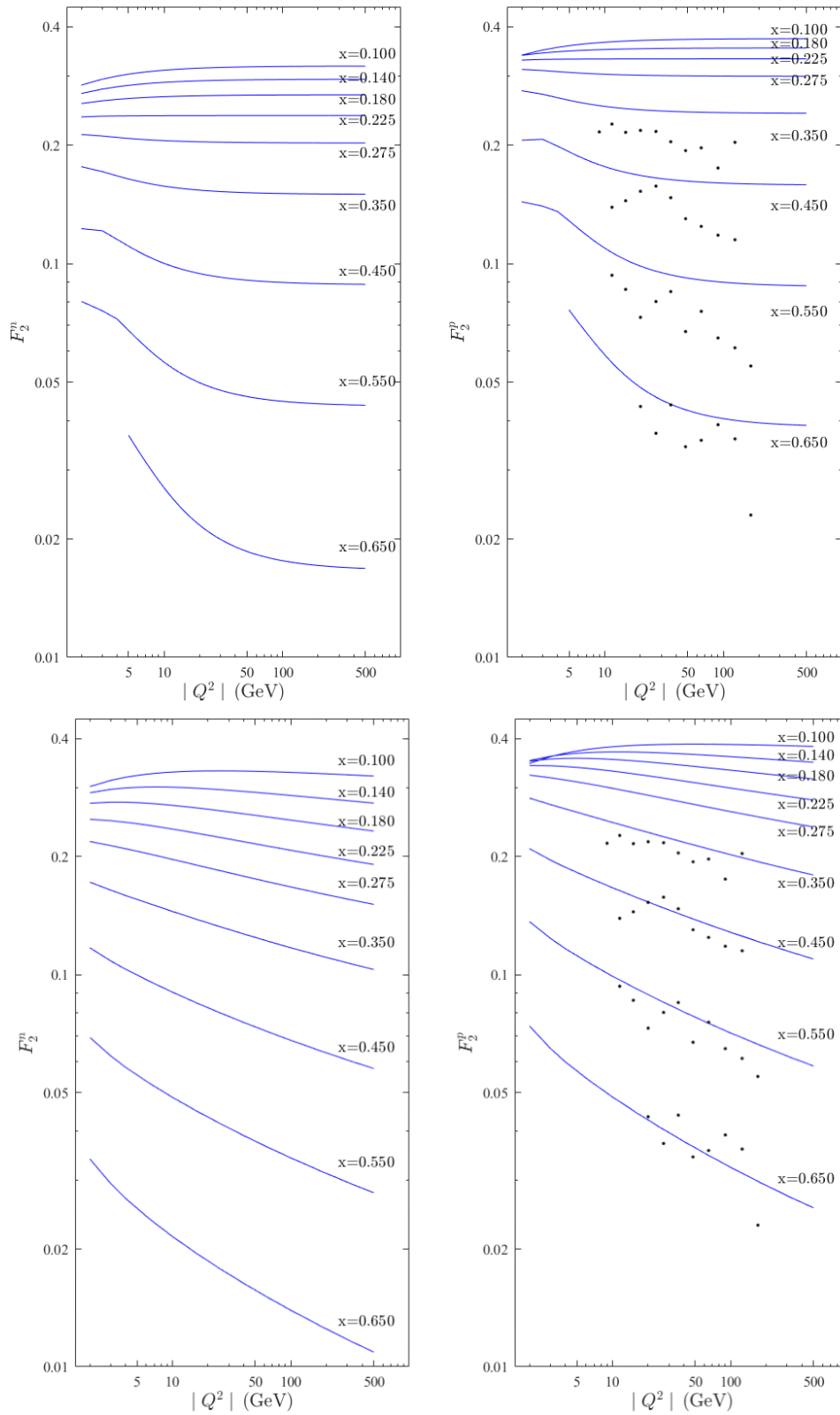


Figura 11: *Función de estructura F_2 del neutrón (izq.) y del protón (der.) para distintos valores de x . Se han usado la parametrización de Bodek-Ritchie (arriba) y el modelo GRV98 (abajo). Los datos experimentales (puntos negros) se han extraído de [24].*

observa como, para valores altos de $|Q^2|$, la función de estructura F_2 mantiene un valor aproximadamente constante para cada valor de x . Esto es una demostración del *scaling* de Bjorken [22], que afirma que en el régimen profundamente inelástico, la función de estructura $F_2(x, Q^2)$ pasa a depender únicamente de la variable x .

También se puede observar cómo en la Fig. 11, el valor de F_2 decrece a medida que aumenta x . La variable x de Bjorken proporciona una medida de cuán inelástico es el proceso de dispersión. En el caso límite $x = 1$ el proceso sería elástico y correspondería al mínimo de F_2 . Por lo tanto, deducimos que a medida que el proceso se aleja más de una dispersión elástica, es decir, hacia valores menores de x , la función de estructura F_2 adquiere mayor relevancia en la sección eficaz de la colisión. Esta dependencia se debe a la presencia de gluones en el nucleón [1].

Se puede analizar también las diferencias entre neutrones y protones. Se observa que F_2 adquiere valores más altos para el caso de protones respecto a los neutrones. Esto puede deberse a que el protón, a diferencia del neutrón, sí tiene carga eléctrica. Esto hace que la dispersión electrón-protón sea más probable que en el caso electrón-neutrón, y por tanto tenga un valor más alto de la función de estructura.

Por último, cabe estudiar la diferencia entre las dos parametrizaciones usadas en la Fig. 11. Para valores bajos de x , las diferencias entre los modelos no son muy acusadas aunque se observa que el modelo GRV98 genera unos resultados en torno al 3-5 % mayores que la parametrización Bodek-Ritchie tanto para el caso de neutrones como para el de protones. Para valores más altos ($x = 0,45; 0,55; 0,65$) sí se aprecian ciertas desigualdades: en la parametrización de Bodek-Ritchie, F_2 mantiene un valor aproximadamente constante al aumentar $|Q^2|$, mientras que en el modelo GRV98 la función de estructura decrece. Si comparamos con los datos experimentales de la Fig. 12, vemos como en el caso descrito ($x = 0,45; 0,55; 0,65$) la parametrización de Bodek-Ritchie se ajusta mejor a los resultados que el modelo GRV98. Esto podría deberse a que el modelo GRV98 no está diseñado para reproducir los resultados en la región cercana a la dispersión elástica ($x = 1$), donde aparecen las resonancias nucleónicas. Sin embargo, si lo comparamos con los resultados experimentales de la propia Fig. 11, se puede apreciar como el modelo GRV98 es el que mejor se ajusta. Las razones de las diferencias entre los resultados experimentales y los

valores obtenidos mediante los modelos pueden ser las posibles limitaciones experimentales a la hora de obtener medidas precisas o los términos de orden superior que no se han tenido en cuenta en el modelo. Estas diferencias también podrían deberse a que los datos experimentales que se muestran se corresponden a procesos con una cinemática muy alta ($|Q^2| > 20 \text{ GeV}^2$) para las cuales, la parametrización de Bodek-Ritchie puede producir resultados poco precisos.

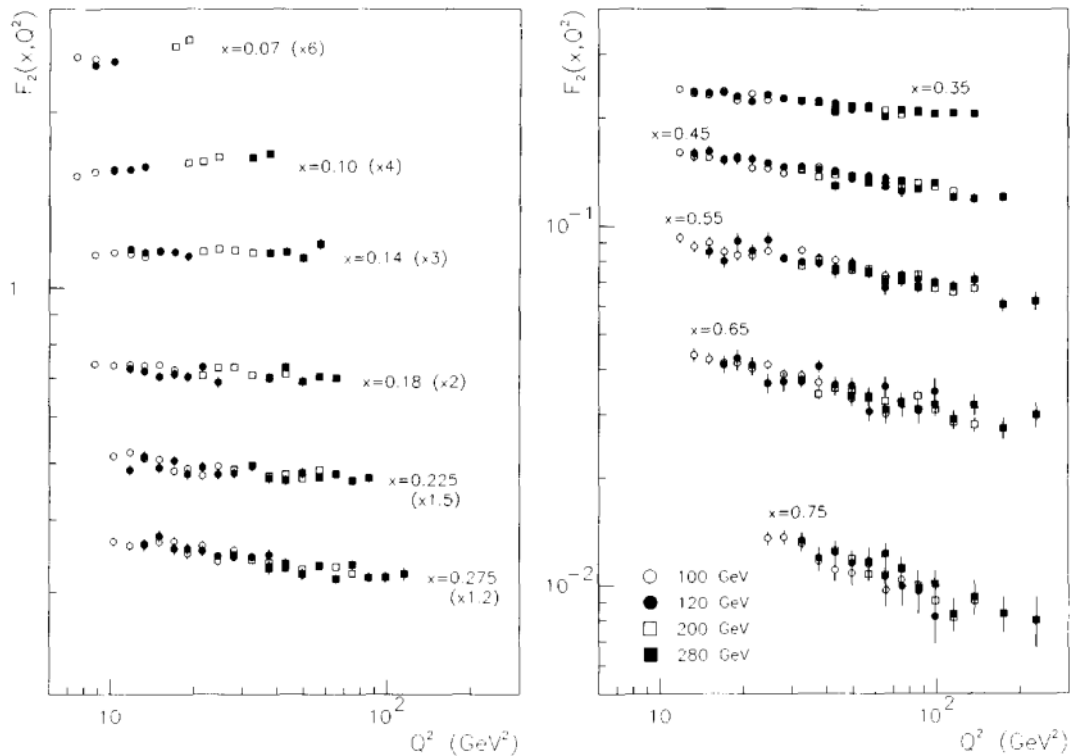


Figura 12: Datos experimentales de la función de estructura F_2 del protón para distintos valores de x . Figura obtenida de [33].

En la Fig. 13 se representa la función de estructura inelástica F_2 para neutrones y protones frente a la variable x de Bjorken. En ella se comparan las distintas parametrizaciones usadas para obtener los resultados. A simple vista, se observa como el modelo GRV98 de PDFs hace un promedio de las funciones de estructura inelásticas. Por el contrario, los modelos de Bodek-Ritchie y Bosted-Christy reproducen más acertadamente las resonancias de los procesos electrón-nucleón. Esta diferencia es debida a que, mientras que el modelo GRV98 modela las funciones de estructura partiendo de funciones de distribución de partones, las otras dos parametrizaciones son meros ajustes a los datos experimentales. La diferencia entre los modelos es más notable en las gráficas con un valor de $|Q^2|$ menor

independientemente del valor de x considerado. Aquí los efectos de las resonancias nucleónicas adquieren mayor relevancia. Conforme aumenta el valor de $|Q^2|$, las diferencias entre los modelos se concentran en los valores más altos de x , para los cuales las resonancias se hacen más notables. De todo lo anterior se deduce que el modelo GRV98 se ajusta bien a los datos experimentales en el régimen profundamente inelástico, no así para las regiones en las que dominan la dispersión elástica o las resonancias nucleónicas. En la referencia [34], se comparan en mayor profundidad las tres parametrizaciones para procesos de dispersión electrón-núcleo y neutrino-núcleo. Se toman además datos experimentales que sirven para determinar qué modelo se ajusta mejor a estos.

De la Fig. 13 también cabe destacar las diferencias entre la parametrización de Bodek-Ritchie y la de Bosted-Christy, siendo la segunda algo mayor para el caso de neutrones, especialmente a valores bajos de $|Q^2|$. La razón de dicha diferencia es que, como ya se comentó en 2.6.2, la parametrización de Bosted-Christy es una versión mejorada de la de Bodek-Ritchie para ajustarse mejor a los datos experimentales en la región de resonancia.

Si comparamos las distintas gráficas de la Fig. 13, notamos como para valores altos de $|Q^2|$, la función de estructura F_2 alcanza su valor máximo a bajo x . Esto se debe a que a dichos valores de $|Q^2|$, la dispersión inelástica adquiere mayor relevancia. Por el contrario, a valores bajos de $|Q^2|$, los máximos de la función de estructura se alcanzan en los picos de resonancias nucleónicas ya que en estos rangos, dichas resonancias son más probables que la dispersión inelástica.

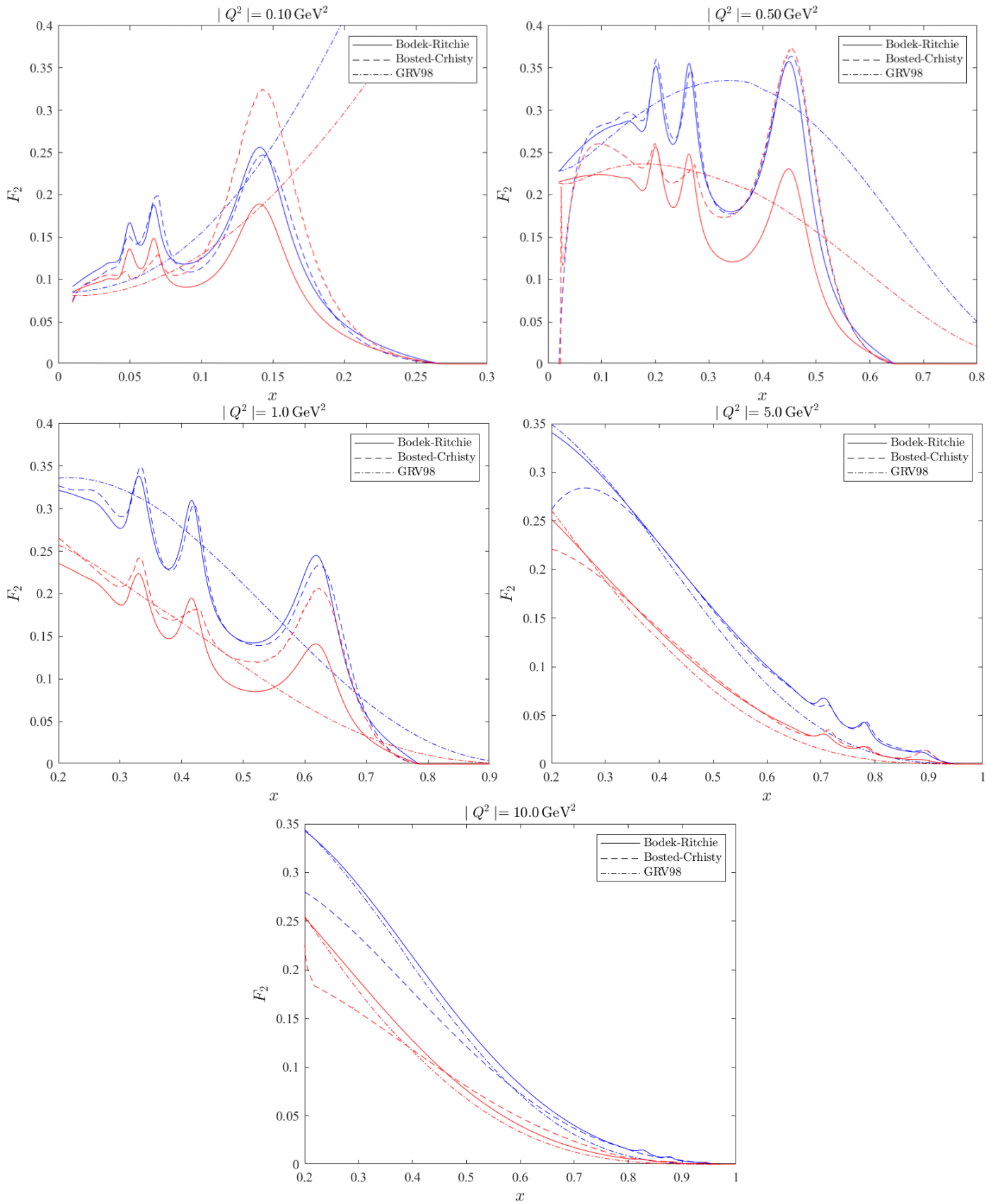


Figura 13: Funciones de estructura inelástica F_2^p (lineas azules) y F_2^n (lineas rojas) para valores distintos de $|Q^2|$.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un amplio estudio de la dispersión electrón-nucleón, centrándonos especialmente en el régimen profundamente inelástico y en el análisis de la estructura interna de los nucleones. Se ha desarrollado un análisis formal de la dispersión electromagnética electrón-nucleón, mediante el cual se han obtenido resultados que pueden ser contrastados con datos experimentales así como las expresiones de los factores de forma o la expresión de la sección eficaz del proceso. En este desarrollo, se han empleado múltiples conocimientos del campo de la Mecánica Cuántica Relativista y de la Física de Partículas entre otros. Mediante el proceso electrón-nucleón y, más concretamente, a través del análisis de los factores de forma del nucleón hemos sido capaces de revelar información acerca de las características intrínsecas del nucleón.

Se han obtenido resultados, mediante cálculos computacionales, de las funciones de estructura del nucleón así como de la sección eficaz del proceso $e-N$ para cinemáticas distintas. Esto nos ha permitido comprobar resultados ya conocidos como el *scaling* de Bjorken. Estos resultados indican claramente que el nucleón no es una partícula puntual, sino que está constituido por partículas elementales: los quarks.

El estudio de la sección eficaz de la dispersión ha servido para identificar los distintos mecanismos de interacción a distintas energías, donde se han logrado diferenciar los rangos energéticos del proceso, y con ello, distinguir las distintas resonancias nucleónicas y la región profundamente inelástica.

Para obtener los resultados, se han empleado cálculos numéricos para los cuales han sido necesarios una serie de modelos que nos han proporcionado información acerca de los factores de forma del nucleón. Parte de nuestro trabajo de análisis ha consistido en comparar estos modelos entre sí y con datos experimentales con el objetivo de determinar qué modelo se ajusta mejor a los datos empíricos en un determinado rango cinemático.

Finalmente, cabe destacar la relevancia de los procesos de dispersión profundamente inelástica de electrones en las investigaciones llevadas a cabo en la actualidad. Por un lado, la teoría que describe la interacción fuerte, la cromodinámica cuántica, se vale de este tipo

de pruebas ya que revelan la estructura y la dinámica internas del hadrón con el que se hace colisionar el electrón. Por otro lado, la dificultad que conllevan los experimentos realizados con neutrinos hace que se recurran a procesos con electrones para así modelar y servir de guía a los respectivos procesos con neutrinos. Esto último es de gran ayuda en el estudio de las oscilaciones de neutrinos.

A. Fundamentos de teoría de dispersión relativista

A.1. Ecuación de Dirac

En este apartado se tratará con más profundidad la ecuación de Dirac, la cual supone una herramienta fundamental en el formalismo desarrollado en este trabajo, puesto que describe partículas leptónicas de espín semientero.

El objetivo de Dirac era encontrar una ecuación covariante relativista de 1^{er} orden en la derivada temporal, de la forma general $i\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$, con una densidad de probabilidad definida positiva y que trate las variables espaciales y temporales de forma simétrica. Todas estas propiedades fueron tenidas en cuenta por Paul Dirac cuando, en 1928, formuló su ecuación. Esta puede expresarse como:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \beta M)\Psi, \quad (\text{A.1})$$

donde α_i y β son las matrices de Dirac, $\hat{\boldsymbol{p}}$ es el operador momento de la partícula y M su masa.

La ecuación de Dirac puede escribirse en notación covariante como:

$$(i\cancel{\partial} - M)\Psi = 0, \quad (\text{A.2})$$

donde $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ es el operador *nabla slash* con γ^μ las matrices γ de Dirac.

Las matrices γ^μ se pueden definir como:

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde σ^i son las matrices de Pauli que se definen como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Las matrices γ de Dirac cumplen la relación de anticonmutación siguiente:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Lorentz. Introducimos también las definiciones:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma^{\nu\mu} = \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu] \quad (\text{A.7})$$

puesto que tanto γ^5 como $\sigma^{\nu\mu}$ aparecerán en el trabajo.

A.2. Teorema de trazas

El cálculo de la traza de productos de matrices γ es fundamental en el desarrollo de las secciones eficaces de procesos como el que estudiamos en este caso. Por ello, es de gran utilidad conocer las relaciones siguientes:

- La traza de un n^{o} impar de matrices es cero.
- $\text{Tr } \mathbb{1} = 4$.
- $\text{Tr } \not{a}\not{b} = 4a \cdot b$.
- $\text{Tr } \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)]$.

B. Sección eficaz

B.1. Propiedades de la función δ de Dirac.

A continuación, se expone una propiedad que nos será de ayuda en los cálculos desarrollados a lo largo del trabajo:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad / \quad f(x_i) = 0 . \quad (\text{B.1})$$

B.2. Desarrollo de la función δ asociada a S_{fi}

Para obtener la expresión (2.29) es necesario usar la igualdad que vamos a obtener a continuación. Partimos del caso genérico siguiente:

$$\begin{aligned} [(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)]^2 &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \int d^4x e^{-i(P_f - P_i)x} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \int d^4x = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) VT , \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde V y T son, respectivamente, el volumen y el tiempo considerados. Para nuestro caso, la igualdad toma la siguiente forma:

$$[(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i)]^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) VT . \quad (\text{B.3})$$

B.3. Expresión para el flujo incidente Φ_{inc}

En la expresión (2.33) se usa una relación para el flujo de partículas incidentes la cual se desarrolla a continuación. Partimos de (2.32) teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{\varepsilon_i} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{E_i}. \quad (\text{B.4})$$

Con esto, se puede desarrollar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{mM}{\varepsilon_i E_i} \frac{1}{V\Phi_{inc}} &= \frac{mM}{\varepsilon_i E_i |\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_i|} = \frac{mM}{\varepsilon_i E_i \sqrt{\mathbf{v}_i^2 + \mathbf{V}_i^2 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{V}_i}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{k}_i^2 E_i^2 + \mathbf{p}_i^2 \varepsilon_i^2 - 2\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i \varepsilon_i E_i}}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ahora veremos que este resultado es muy similar al siguiente escalar Lorentz:

$$\frac{mM}{\sqrt{(k_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}}. \quad (\text{B.6})$$

Desarrollamos (B.6):

$$\begin{aligned} \frac{mM}{\sqrt{(k_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}} &= \frac{mM}{\sqrt{(\varepsilon_i E_i - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - m^2 M^2}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{\varepsilon_i^2 E_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i + (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - m^2 M^2}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{(m^2 + \mathbf{k}_i^2)(M^2 + \mathbf{p}_i^2) - 2\varepsilon_i E_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i + (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - m^2 M^2}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{k}_i^2 E_i^2 + m^2 \mathbf{p}_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i + (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2}} \\ &\approx \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{k}_i^2 E_i^2 + m^2 \mathbf{p}_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i + \mathbf{k}_i^2 \cdot \mathbf{p}_i^2}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{k}_i^2 E_i^2 + \varepsilon_i^2 \mathbf{p}_i^2 - 2\varepsilon_i E_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i}}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde se ha supuesto que tratamos colisiones colineales o cuasi-colineales ($(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 \approx \mathbf{k}_i^2 \mathbf{p}_i^2$). Si particularizamos para nuestro caso, en el cual $\mathbf{p}_i = 0$ y $E_i = M$, finalmente obtenemos:

$$\frac{mM}{\varepsilon_i E_i} \frac{1}{V \Phi_{inc}} \approx \frac{mM}{\sqrt{\varepsilon_i^2 M^2 - m^2 M^2}} = \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - m^2}} = \frac{m}{|\mathbf{k}_i|}. \quad (\text{B.8})$$

B.4. Integración de la función δ de Dirac

En el desarrollo de la sección eficaz del proceso que estamos estudiando es útil la relación que vamos a obtener a continuación:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - \mathbf{p}_f^2 - M^2) d^2 \mathbf{p}_f &= \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - E_f^2) d^3 \mathbf{p}_f \\ &= \int_0^\infty dp_0 \delta[(p_0 - E_f)(p_0 + E_f)] d^3 \mathbf{p}_f = \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{2E_f}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde se ha hecho uso de propiedad (B.1) de la función δ de Dirac.

Finalmente, el término inicial de (B.9) se puede transformar de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - \mathbf{p}_f^2 - M^2) d^2 \mathbf{p}_f = \int_0^\infty d^4 P_f \delta(P_f^2 - M^2) = \int_{-\infty}^\infty d^4 P_f \delta(p_f^2 - M^2) \Theta(p_0), \quad (\text{B.10})$$

con:

$$\Theta(p_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_0 > 0 \\ 0 & \text{si } p_0 < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.11})$$

Otro resultado muy útil en el desarrollo de la sección eficaz diferencial del proceso de dispersión que estamos estudiando es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\int d^4 P_f \delta^4(P_i + Q - P_f) \Theta(p_0) \delta(P_f^2 - M^2) &= \delta[(P_i + Q)^2 - M^2] \underbrace{\Theta(M + \omega)}_{=1} \\
&= \delta\left(\underbrace{P_i^2}_{=M^2} + Q^2 + 2P_i \cdot Q - M^2\right) = \delta(2M\omega - |Q^2|) = \frac{1}{2M} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M}\right), \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

donde se ha usado (B.1).

C. Tensores hadrónico y leptónico

C.1. Cálculo del tensor leptónico

En esta sección vamos a desarrollar la expresión (2.38) hasta obtener una forma más simple.

Para empezar, vemos que el segundo factor de (2.38) es un escalar, o también una matriz 1×1 para la cual el complejo conjugado coincide con su hermítico conjugado:

$$\begin{aligned}
 [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\nu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)]^* &= [u_e^\dagger(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_0 \gamma_\nu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)]^\dagger \\
 &= [u_e^\dagger(\mathbf{k}_i, s_i) \gamma_\nu^\dagger \gamma_0 u_e(\mathbf{k}_f, s_f)] \\
 &= [\bar{u}_e(\mathbf{k}_i, s_i) \gamma_\nu u_e(\mathbf{k}_f, s_f)], \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado $\gamma_\nu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\nu$. Introducimos este resultado en la expresión del tensor leptónico:

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu} &= \overline{\sum_{s_i, s_f} [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)] [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\nu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)]^*} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} [\bar{u}_e(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u_e(\mathbf{k}_i, s_i)] [\bar{u}_e(\mathbf{k}_i, s_i) \gamma_\nu u_e(\mathbf{k}_f, s_f)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon=1}^4 \sum_{s_f} \bar{u}_\alpha(\mathbf{k}_f, s_f) [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} \underbrace{\sum_{s_i} u_\beta(\mathbf{k}_i, s_i) \bar{u}_\delta(\mathbf{k}_i, s_i)}_{\left(\frac{k_i+m}{2m}\right)_{\beta\delta}} \\
 &\quad \times [\gamma_\nu]_{\delta\varepsilon} u_\varepsilon(\mathbf{k}_f, s_f) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon=1}^4 \sum_{s_f} \bar{u}_\alpha(\mathbf{k}_f, s_f) [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} \left(\frac{k_i+m}{2m}\right)_{\beta\delta} [\gamma_\nu]_{\delta\varepsilon} u_\varepsilon(\mathbf{k}_f, s_f) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \varepsilon=1}^4 \sum_{s_f} u_\varepsilon(\mathbf{k}_f, s_f) \bar{u}_\alpha(\mathbf{k}_f, s_f) \left(\gamma_\mu \frac{k_i+m}{2m} \gamma_\nu\right)_{\alpha\varepsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \varepsilon=1}^4 \left(\frac{\not{k}_f + m}{2m} \right)_{\varepsilon\alpha} \left(\gamma^\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma^\nu \right)_{\alpha\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\not{k}_f + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{k}_i + m}{2m} \gamma^\nu \right) \\
&= \frac{1}{8m^2} \text{Tr} (\not{k}_f \gamma^\mu \not{k}_i \gamma^\nu + m \not{k}_f \gamma^\mu \gamma^\nu + m \gamma^\mu \not{k}_i \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu) . \tag{C.2}
\end{aligned}$$

Para proseguir con los cálculos, hacemos uso del teorema de trazas. Introducimos los siguientes resultados en el desarrollo:

$$\text{Tr} (\not{k}_f \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr} (\gamma^\mu \not{k}_i \gamma^\nu) = 0 \tag{C.3}$$

$$\text{Tr} (\not{k}_f \gamma^\mu \not{k}_i \gamma^\nu) = 4k_f^\mu k_i^\nu - 4k_f k_i g^{\mu\nu} + 4k_f^\nu k_i^\mu \tag{C.4}$$

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} . \tag{C.5}$$

Finalmente, el tensor leptónico resulta:

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} (k_f^\mu k_i^\nu + k_f^\nu k_i^\mu - (k_f \cdot k_i - m^2) g^{\mu\nu}) . \tag{C.6}$$

C.2. Cálculo del tensor hadrónico

En esta sección expresamos el desarrollo de (2.39) del tensor hadrónico como se muestra a continuación.

Inicialmente hacemos un desarrollo del segundo factor de la expresión del tensor hadrónico:

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\nu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)]^* &= [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\nu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)]^\dagger \\
&= [u_N^\dagger(\mathbf{p}_i, S_i) \hat{\Gamma}^{\nu\dagger} \gamma^0 u_N(\mathbf{p}_f, S_f)] \\
&= [\bar{u}_N(\mathbf{p}_i, S_i) \overline{\hat{\Gamma}^\nu} u_N(\mathbf{p}_f, S_f)] , \tag{C.7}
\end{aligned}$$

donde se hace uso de la notación $\overline{\hat{\Gamma}^\nu} \equiv \gamma^0 \hat{\Gamma}^\nu \gamma^0$. Además, se tiene que:

$$\overline{\hat{\Gamma}^\nu} = F_1(Q^2) \gamma^\mu - \frac{i F_2(Q^2)}{2M} \sigma^{\mu\nu} Q_\nu , \tag{C.8}$$

donde se ha usado $\gamma_\nu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\nu$ y $\sigma^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu}$. Con todo esto, el tensor hadrónico queda:

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \sum_{S_i, S_f} \overline{[\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)] [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\nu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)]^*} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} [\bar{u}_N(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}^\mu u_N(\mathbf{p}_i, S_i)] [\bar{u}_N(\mathbf{p}_i, S_i) \overline{\hat{\Gamma}^\nu} u_N(\mathbf{p}_f, S_f)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon=1}^4 \sum_{S_f} \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \underbrace{\sum_{S_i} u_\beta(\mathbf{p}_i, S_i) \bar{u}_\delta(\mathbf{p}_i, S_i)}_{\left(\frac{\mathbf{p}_i + M}{2M}\right)_{\beta\delta}} \\
&\quad \times \overline{\hat{\Gamma}_{\delta\varepsilon}^\nu} u_\varepsilon(\mathbf{p}_i, S_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon=1}^4 \sum_{S_f} \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}_f, S_f) \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \left(\frac{\not{P}_i + M}{2M} \right)_{\beta\delta} \hat{\Gamma}_{\delta\varepsilon}^\nu u_\varepsilon(\mathbf{p}_i, S_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \varepsilon=1}^4 \sum_{S_f} \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}_f, S_f) u_\varepsilon(\mathbf{p}_i, S_i) \left(\hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right)_{\alpha\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \varepsilon=1}^4 \left(\frac{\not{P}_f + M}{2M} \right)_{\varepsilon\alpha} \left(\hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right)_{\alpha\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} Tr \left(\frac{\not{P}_f + M}{2M} \hat{\Gamma}^\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \hat{\Gamma}^\nu \right) \\
&= \frac{1}{8M^2} Tr \left[(\not{P}_f + M) \left(F_1 \gamma^\mu + \frac{iF_2}{2M} \sigma^{\mu\sigma} Q_\sigma \right) (\not{P}_i + M) \left(F_1 \gamma^\nu - \frac{iF_2}{2M} \sigma^{\nu\rho} Q_\rho \right) \right] \\
&= \frac{1}{8M^2} \left[A^{\mu\nu} (F_1)^2 + \frac{1}{4M^2} B^{\mu\nu} (F_2)^2 + \frac{i}{2M} C^{\mu\nu} F_1 F_2 \right], \tag{C.9}
\end{aligned}$$

donde $A^{\mu\nu}$ viene dado por:

$$\begin{aligned}
A^{\mu\nu} &= Tr[(\not{P}_f + M) \gamma^\mu (\not{P}_i + M) \gamma^\nu] \\
&= 4[P_i^\mu P_f^\nu + P_i^\nu P_f^\mu - (P_i P_f - M^2) g^{\mu\nu}], \tag{C.10}
\end{aligned}$$

y donde se ha usado la expresión (C.6) del desarrollo del tensor leptónico. $B^{\mu\nu}$ viene dado por:

$$\begin{aligned}
B^{\mu\nu} &= Tr[(\not{P}_f + M) \sigma^{\mu\sigma} Q_\sigma (\not{P}_i + M) \sigma^{\nu\rho} Q_\rho] \\
&= [Tr(\not{P}_f \sigma^{\mu\sigma} \not{P}_i \sigma^{\nu\rho}) + M Tr(\not{P}_f \sigma^{\mu\sigma} \sigma^{\nu\rho}) \\
&\quad + M Tr(\sigma^{\mu\sigma} \not{P}_i \sigma^{\nu\rho}) + M^2 Tr(\sigma^{\mu\sigma} \sigma^{\nu\rho})] Q_\sigma Q_\rho, \tag{C.11}
\end{aligned}$$

donde, haciendo uso del teorema de trazas, obtenemos:

$$Tr(\not{P}_f \sigma^{\mu\sigma} \sigma^{\nu\rho}) = Tr(\sigma^{\mu\sigma} \not{P}_i \sigma^{\nu\rho}) = 0, \tag{C.12}$$

y el primer término no nulo de $B^{\mu\nu}$ es:

$$\begin{aligned}
Tr(\not{P}_f \sigma^{\mu\sigma} \not{P}_i \sigma^{\nu\rho}) &= -\frac{1}{4} Tr(\not{P}_f [\gamma^\mu, \gamma^\sigma] \not{P}_i [\gamma^\nu, \gamma^\rho]) \\
&= -\frac{1}{4} Tr[(\not{P}_f \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{P}_i \gamma^\nu \gamma^\rho) - (\not{P}_f \gamma^\sigma \gamma^\mu \not{P}_i \gamma^\nu \gamma^\rho) \\
&\quad - (\not{P}_f \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{P}_i \gamma^\rho \gamma^\nu) + (\not{P}_f \gamma^\sigma \gamma^\mu \not{P}_i \gamma^\rho \gamma^\nu)] . \tag{C.13}
\end{aligned}$$

Para continuar, desarrollamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
Tr(\not{P}_f \gamma^a \gamma^b \not{P}_i \gamma^c \gamma^d) &= P_f^a Tr(\gamma^b \not{P}_i \gamma^c \gamma^d) - P_f^b Tr(\gamma^a \not{P}_i \gamma^c \gamma^d) \\
&\quad + P_f P_i Tr(\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d) - P_f^c Tr(\gamma^a \gamma^b \not{P}_i \gamma^d) + P_f^d Tr(\gamma^a \gamma^b \not{P}_i \gamma^c) \\
&= 4[P_f^a (P_i^b g^{cd} - g^{bc} P_i^d + g^{bd} P_i^c) - P_f^b (P_i^c g^{cd} - g^{ac} P_i^d + g^{ad} P_i^c) \\
&\quad + P_f P_i (g^{ab} g^{cd} - g^{ac} g^{bd} + g^{ad} g^{bc}) - P_f^c (P_i^d g^{ab} - g^{bd} P_i^a + g^{ad} P_i^b) \\
&\quad + P_f^d (P_i^c g^{ab} - g^{bc} P_i^a + g^{ac} P_i^b)] . \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en (C.13), se llega a:

$$\begin{aligned}
Tr(\not{P}_f \sigma^{\mu\sigma} \not{P}_i \sigma^{\nu\rho}) &= 4[P_f^\mu P_i^\rho g^{\sigma\nu} - P_f^\mu P_i^\nu g^{\sigma\rho} - P_f^\sigma P_i^\rho g^{\mu\nu} + P_f^\sigma P_i^\nu g^{\mu\rho} \\
&\quad - P_f P_i (-g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} + g^{\sigma\nu} g^{\mu\rho}) \\
&\quad - P_f^\nu P_i^\mu g^{\sigma\rho} + P_f^\nu P_i^\sigma g^{\mu\rho} + P_f^\rho P_i^\mu g^{\sigma\nu} - P_f^\rho P_i^\sigma g^{\mu\nu}] . \tag{C.15}
\end{aligned}$$

El segundo término no nulo de $B^{\mu\nu}$ es:

$$\begin{aligned}
Tr(\sigma^{\mu\sigma}\sigma^{\nu\rho}) &= -\frac{1}{4}Tr([\gamma^\mu, \gamma^\sigma][\gamma^\nu, \gamma^\rho]) \\
&= \frac{1}{4}Tr(\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu) \\
&= 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho} - g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}), \tag{C.16}
\end{aligned}$$

donde se ha usado:

$$Tr(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d) = 4(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd} + g^{ad}g^{bc}). \tag{C.17}$$

Finalmente, el término $B^{\mu\nu}$ queda:

$$\begin{aligned}
B^{\mu\nu} &= -4[Q^2(P_f^\mu P_i^\nu + P_f^\nu P_i^\mu) - P_f \cdot Q(P_i^\mu Q^\nu + P_i^\nu Q^\mu) - P_i \cdot Q(P_f^\nu Q^\mu + P_f^\mu Q^\nu) \\
&\quad + Q^\mu Q^\nu(P_f P_i + M^2) + g^{\mu\nu}\{2(P_i \cdot Q)(P_f \cdot Q) - Q^2(P_f P_i + M^2)\}]. \tag{C.18}
\end{aligned}$$

Para el término $C^{\mu\nu}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu} &= Tr[(\not{P}_f + M)\sigma^{\mu\sigma}Q_\sigma(\not{P}_i + M)\gamma^\nu - (\not{P}_f + M)\gamma^\mu(\not{P}_i + M)\sigma^{\nu\rho}Q_\rho] \\
&= MTr(\not{P}_f\sigma^{\mu\sigma}\gamma^\nu)Q_\sigma + MTr(\sigma^{\mu\sigma}\not{P}_i\gamma^\nu)Q_\sigma \\
&\quad - MTr(\not{P}_f\gamma^\mu\sigma^{\nu\rho})Q_\rho - MTr(\gamma^\mu\not{P}_i\sigma^{\nu\rho})Q_\rho. \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Calculamos cada término por separado:

$$\text{Tr}(\not{P}_f \sigma^{\mu\sigma} \gamma^\nu) Q_\sigma = 4i(P_f^\mu Q^\nu - P_f \cdot Q g^{\mu\nu}) \quad (\text{C.20})$$

$$\text{Tr}(\sigma^{\mu\sigma} \not{P}_i \gamma^\nu) Q_\sigma = 4i(P_i \cdot Q g^{\mu\nu} - P_i^\mu Q^\nu) \quad (\text{C.21})$$

$$\text{Tr}(\not{P}_f \gamma^\mu \sigma^{\nu\rho}) Q_\rho = 4i(P_f \cdot Q g^{\mu\nu} - Q^\mu P_f^\nu) \quad (\text{C.22})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \not{P}_i \sigma^{\nu\rho}) Q_\rho = 4i(Q^\mu P_i^\nu - P_i \cdot Q g^{\mu\nu}) . \quad (\text{C.23})$$

Finalmente, reagrupando y simplificando términos, llegamos a:

$$C^{\mu\nu} = 4iM(P_f^\mu Q^\nu + Q^\mu P_f^\nu - 2g^{\mu\nu} P_f \cdot Q - P_i^\mu Q^\nu - Q^\mu P_i^\nu + 2g^{\mu\nu} P_i \cdot Q) . \quad (\text{C.24})$$

Queda, por tanto, calculado completamente el tensor hadrónico. Ahora buscamos una nueva forma de expresar el tensor que sea más compacta. Para ello, hacemos uso de las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{array}{l} P_f^2 = P_i^2 = M^2 \\ Q^\nu = P_f^\nu - P_i^\nu \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} P_i \cdot Q = P_i \cdot P_f + M^2 \\ |Q^2| = -Q^2 = 2P_i \cdot P_f - 2M^2 \end{array} \right. . \quad (\text{C.25})$$

De estas relaciones obtenemos:

$$\frac{P_i \cdot Q}{|Q^2|} = \frac{1}{2} , \quad (\text{C.26})$$

y con esto podemos definir el cuadrivector X^μ como:

$$X^\mu = P_i^\mu + \frac{P_i \cdot Q}{|Q^2|} Q^\mu = P_i^\mu + \frac{1}{2} Q^\mu . \quad (\text{C.27})$$

Ya podemos expresar las funciones $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$ y $C^{\mu\nu}$ de forma más compacta:

$$\begin{aligned}
A^{\mu\nu} &= 4[P_i^\mu P_f^\nu + P_i^\nu P_f^\mu - (P_i P_f - M^2)g^{\mu\nu}] \\
&= 4[2P_i^\mu P_i^\nu - Q^\mu Q^\nu + X^\mu Q^\nu + X^\nu Q^\mu - g^{\mu\nu} \frac{|Q^2|}{2}] \\
&= -2|Q^2| \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + 8X^\mu X^\nu
\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned}
B^{\mu\nu} &= -4[Q^2(P_f^\mu P_i^\nu + P_f^\nu P_i^\mu) - P_f \cdot Q(P_i^\mu Q^\nu + P_i^\nu Q^\mu) - P_i \cdot Q(P_f^\nu Q^\mu + P_f^\mu Q^\nu) \\
&\quad + Q^\mu Q^\nu (P_f P_i + M^2) + g^{\mu\nu} \{2(P_i \cdot Q)(P_f \cdot Q) - Q^2(P_f P_i + M^2)\}] \\
&= -4[Q^2(2X^\mu X^\nu - \frac{1}{2}Q^\mu Q^\nu) - (2P_i \cdot Q + Q^2)(X^\mu Q^\nu + X^\nu Q^\mu) \\
&\quad - Q^2 \cdot Q^\mu Q^\nu - \frac{Q^2}{2}Q^\mu Q^\nu + g^{\mu\nu} \{2(X \cdot Q - \frac{1}{2}Q^2)(X \cdot Q + \frac{1}{2}Q^2) + Q^2 \frac{Q^2}{2}\}] \\
&= -8M^2|Q^2| \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + 8|Q^2|X^\mu X^\nu
\end{aligned} \tag{C.29}$$

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu} &= 4iM(P_f^\mu Q^\nu + Q^\mu P_f^\nu - 2g^{\mu\nu}P_f \cdot Q - P_i^\mu Q^\nu - Q^\mu P_i^\nu + 2g^{\mu\nu}P_i \cdot Q) \\
&= 4iM[2Q^\mu Q^\nu + 2g^{\mu\nu}(P_i \cdot Q - P_f \cdot Q)] \\
&= 8iM|Q^2| \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) .
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Con esto podemos, reescribir el tensor hadrónico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{8M^2}[(F_1)^2 \{ -2|Q^2| \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + 8X^\mu X^\nu \} \\
&\quad + (F_2)^2 \{ -2|Q^2| \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + 2\frac{|Q^2|}{M^2}X^\mu X^\nu \} \\
&\quad - 4|Q^2|F_1F_2 \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) .
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Desarrollando un poco esta expresión llegamos a:

$$H^{\mu\nu} = -W_1(Q^2) \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + \frac{W_2(Q^2)}{M^2} X^\mu X^\nu, \quad (\text{C.32})$$

donde:

$$W_1 = \frac{|Q^2|}{4M^2} (F_1 + F_2)^2 \quad (\text{C.33})$$

$$W_2 = (F_1)^2 + \frac{|Q^2|}{4M^2} (F_2)^2. \quad (\text{C.34})$$

C.3. Contracción de los tensores hadrónico y leptónico

Una vez que hemos obtenido las expresiones de los tensores hadrónico y leptónico, se calcula la contracción de estos. Esta contracción es necesaria para poder determinar la sección eficaz del proceso que estamos estudiando.

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2}(k_{f,\mu}k_{i,\nu} + k_{f,\nu}k_{i,\mu} - (k_f \cdot k_i - m^2)g_{\mu\nu})$$

$$H^{\mu\nu} = -W_1(Q^2) \left(g^{\mu\nu} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{|Q^2|} \right) + \frac{W_2(Q^2)}{M^2} X^\mu X^\nu .$$

A continuación, se calculan por separado cada uno de los elementos de la contracción. Para ello, se tienen en cuenta las siguientes relaciones ya expuestas anteriormente:

$$Q^\mu = k_i^\mu - k_f^\mu = P_f^\mu - P_i^\mu \quad (\text{C.35})$$

$$|Q^2| = -Q^2 = 2(k_f \cdot k_i - m^2) . \quad (\text{C.36})$$

1. Contracción $L_{\mu\nu}Q^\mu Q^\nu$:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}Q^\mu Q^\nu &= \frac{1}{2m^2}[k_{f,\mu}k_{i,\nu} + k_{f,\nu}k_{i,\mu} - (k_f \cdot k_i - m^2)g_{\mu\nu}]Q^\mu Q^\nu \\ &= \frac{1}{2m^2}[(k_f \cdot k_i - m^2)Q_\nu - (k_f \cdot k_i - m^2)Q_\nu]Q^\nu = 0 . \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

2. Contracción $L_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= \frac{1}{2m^2}(k_{f,\mu}k_{i,\nu} + k_{f,\nu}k_{i,\mu} - (k_f \cdot k_i - m^2)g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2m^2}[k_f \cdot k_i + k_f \cdot k_i - 4(k_f \cdot k_i - m^2)] \\ &= \frac{1}{2m^2}2(2m^2 - k_f \cdot k_i) . \end{aligned}$$

3. Contracción $L_{\mu\nu}X^\mu X^\nu$:

Podemos separar esta contracción en tres sumandos:

- $L_{\mu\nu}P_i^\mu P_i^\nu$:

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}P_i^\mu P_i^\nu &= \frac{1}{2m^2}(k_{f,\mu}k_{i,\nu} + k_{f,\nu}k_{i,\mu} - (k_f \cdot k_i - m^2)g_{\mu\nu})P_i^\mu P_i^\nu \\
&= \frac{1}{2m^2}[(k_f \cdot P_i)(k_i \cdot P_i) + (k_f \cdot P_i)(k_i \cdot P_i) - (k_f \cdot k_i - m^2)P_\nu P^\nu] \\
&= \frac{M^2}{2m^2}[2\varepsilon_f\varepsilon_i + m^2 - k_f \cdot k_i] .
\end{aligned} \tag{C.38}$$

- $L_{\mu\nu}Q^\mu Q^\nu$: Calculado anteriormente.

- $L_{\mu\nu}\frac{1}{2}(P_i^\mu Q^\nu + P_i^\nu Q^\mu)$:

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}\frac{1}{2}(P_i^\mu Q^\nu + P_i^\nu Q^\mu) &= \frac{1}{4m^2}(k_{f,\mu}k_{i,\nu} + k_{f,\nu}k_{i,\mu} - (k_f \cdot k_i - m_e^2)g_{\mu\nu})(P_i^\mu Q^\nu + P_i^\nu Q^\mu) \\
&= \frac{1}{4m^2}[2\varepsilon_f M(m^2 - k_f \cdot k_i) + 2\varepsilon_i M(k_f \cdot k_i - m^2) \\
&\quad - (k_f \cdot k_i - m^2)2M(\varepsilon_i - \varepsilon_f)] = 0 .
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Uniendo todos los cálculos anteriores, llegamos a la expresión siguiente para la contracción de los tensores leptónico y hadrónico:

$$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = -\frac{W_1}{m^2}(2m^2 - k_f \cdot k_i) + \frac{W_2}{2m^2}(2\varepsilon_f\varepsilon_i + m^2 - k_f \cdot k_i) . \tag{C.40}$$

Para los rangos de energías que consideramos en este caso (superior a las decenas de MeV), es válida la aproximación ultrarrelativista para el electrón inicial y final. Por tanto se pueden aplicar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{k}_i| &\approx \varepsilon_i & |\mathbf{k}_f| &\approx \varepsilon_f \\
m &\ll \varepsilon_i & m &\ll \varepsilon_f
\end{aligned} . \tag{C.41}$$

Con las relaciones anteriores, las siguientes expresiones quedan:

$$|Q^2| = 2(k_f \cdot k_i - m^2) \approx 2\varepsilon_f \varepsilon_i (1 - \cos \theta) = 4\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{C.42})$$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \approx \frac{W_1}{m^2} 2\varepsilon_f \varepsilon_i \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{W_2}{m^2} \varepsilon_f \varepsilon_i \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (\text{C.43})$$

Finalmente, combinando (C.42) y (C.43) podemos obtener una nueva expresión de la contracción de los tensores hadrónico y leptónico:

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_f \varepsilon_i}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (\text{C.44})$$

donde G_E y G_M son los factores de forma de Sachs eléctrico y magnético respectivamente. Estos vienen dados por:

$$G_E(Q^2) = F_1 - \tau F_2 \quad \text{y} \quad G_M(Q^2) = F_1 + F_2, \quad (\text{C.45})$$

con:

$$\tau = \frac{|Q^2|}{4M^2} = \frac{\mathbf{q}^2 - \omega^2}{4M^2}.$$

Referencias

- [1] T.W. Donnelly, J.A. Formaggio, B.R. Holstein, R.G. Milner, and B. Surrow. *Foundations of Nuclear and Particle Physics*. Cambridge University Press, 1st edition, 2017.
- [2] Hyperphysics. Electron scattering from nuclei. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Nuclear/elescat.html#c1>. Último acceso: 2022-8-27.
- [3] Henry W. Kendall. Deep inelastic scattering: Experiments on the proton and the observation of scaling. *Reviews of Modern Physics*, 63(3):597–614, July 1991.
- [4] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8(3):214–215, February 1964.
- [5] G. Zweig. An su_3 model for strong interaction symmetry and its breaking; version 2. page 80 p, 1964. Version 1 is CERN preprint 8182/TH.401, Jan. 17, 1964.
- [6] A. Petermann. Propriétés de l'étrangeté et une formule de masse pour les mésons vectoriels. *Nuclear Physics*, 63(2):349–352, March 1965.
- [7] Juan Antonio Caballero Carretero. Notas de clase de Mecánica Cuántica Relativista.
- [8] W. Greiner and J. Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer, 4th edition, 2009.
- [9] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2nd edition, 2008.
- [10] F. Halzen and A.D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1st edition, 1984.
- [11] M. Thomson and N. Serra. Kern- und Teilchenphysik II. Lecture 9: Deep Inelastic Scattering. <https://www.physik.uzh.ch/dam/jcr:f51bc74c-1edc-47a3-9255-c29731f6b6c3/Lecture8New.pdf>. Último acceso: 2022-8-27.
- [12] G. D. Megías Vázquez. Interacción neutrino-núcleo mediada por corrientes cargadas. Master's thesis, Universidad de Sevilla, 2012.
- [13] Sitio web de SLAC. <https://www6.slac.stanford.edu/>. Último acceso: 2022-8-27.

-
- [14] Sitio web del CEBAF. <https://science.osti.gov/np/Facilities/User-Facilities/CEBAF>. Último acceso: 2022-8-27.
- [15] Sitio web del Jefferson Lab. https://www.jlab.org/research/rhl_firstresult. Último acceso: 2022-8-27.
- [16] Electrons set the stage for neutrino experiments. <https://www.jlab.org/news/releases/electrons-set-stage-neutrino-experiments-0>. Último acceso: 2022-8-27.
- [17] J.J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley series in advanced physics. Addison-Wesley, 1st edition, 1967.
- [18] Paul Strange. *Relativistic Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1st edition, 1998.
- [19] R. González Jiménez. *Violación de paridad en dispersión elástica y cuasielástica de electrones por nucleones y núcleos*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2014.
- [20] A.W. Thomas and W. Weise. *The Structure of the Nucleon*. Wiley, 1st edition, 2001.
- [21] M. N. Rosenbluth. High energy elastic scattering of electrons on protons. *Physical Review*, 79(4):615–619, August 1950.
- [22] J. D. Bjorken. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Physical Review*, 179(5):1547–1553, March 1969.
- [23] C. G. Callan and David J. Gross. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. *Physical Review Letters*, 22(4):156–159, January 1969.
- [24] J.J. Aubert *et al.* A detailed study of the proton structure functions in deep inelastic muon-proton scattering. *Nuclear Physics B*, 259(2-3):189–265, September 1985.
- [25] A. Bodek and J. L. Ritchie. Fermi-motion effects in deep-inelastic lepton scattering from nuclear targets. *Physical Review D*, 23(5):1070–1091, March 1981.
- [26] A. Bodek and J. L. Ritchie. Further studies of fermi-motion effects in lepton scattering from nuclear targets. *Physical Review D*, 24(5):1400–1402, September 1981.

- [27] A. Bodek, M. Breidenbach, D. L. Dubin, J. E. Elias, J. I. Friedman, H. W. Kendall, J. S. Poucher, E. M. Riordan, M. R. Sogard, D. H. Coward, and D. J. Sherden. Experimental studies of the neutron and proton electromagnetic structure functions. *Physical Review D*, 20(7):1471–1552, October 1979.
- [28] S. Stein, W. B. Atwood, E. D. Bloom, R. L. A. Cottrell, H. DeStaebler, C. L. Jordan, H. G. Piel, C. Y. Prescott, R. Siemann, and R. E. Taylor. Electron scattering at 4° with energies of 4.5-20 GeV. *Physical Review D*, 12(7):1884–1919, October 1975.
- [29] M. E. Christy and P. E. Bosted. Empirical fit to precision inclusive electron-proton cross sections in the resonance region. *Physical Review C*, 81(5), May 2010.
- [30] P. E. Bosted and M. E. Christy. Empirical fit to inelastic electron-deuteron and electron-neutron resonance region transverse cross sections. *Physical Review C*, 77(6), June 2008.
- [31] M. Glück, E. Reya, and A. Vogt. Dynamical parton distributions revisited. *The European Physical Journal C*, 5(3):461–470, September 1998.
- [32] W. Melnitchouk. QCD and the structure of the nucleon in electron scattering. June 2000.
- [33] A.C. Benvenuti *et al.* A high statistics measurement of the proton structure functions $F_2(x, Q^2)$ and R from deep inelastic muon scattering at high Q^2 . *Physics Letters B*, 223(3-4):485–489, June 1989.
- [34] G. D. Megías Vázquez. *Charged-current neutrino interactions with nucleons and nuclei at intermediate energies*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, September 2017.