



Estudio analítico y numérico del *scattering* de
una onda electromagnética plana por un
cilindro conductor ideal

Héctor Bravo Muñoz

Supervisado por Dr. Rafael Rodríguez Boix

Grado en Física, Universidad de Sevilla

5 de septiembre de 2022

Índice

1. Introducción	1
1.1. Justificación y antecedentes	1
1.2. Breve descripción del trabajo	2
2. Ecuación integral para la densidad de corriente sobre la superficie del cilindro (caso TMz). Resolución de la ecuación integral mediante el Método de los Momentos	4
2.1. Expresiones del campo eléctrico en términos de funciones de Green y de la densidad de corriente en los casos tridimensional y bidimensional	4
2.2. Ecuación integral para la densidad de corriente en el problema de <i>scattering</i> bidimensional	11
2.3. Resolución de la ecuación integral mediante el Método de los Momentos con funciones base rectangulares	14
3. Resultados numéricos	22
3.1. Validación para el caso particular del cilindro de sección circular (sección radar bidimensional y densidad de corriente)	22
3.2. Análisis de convergencia del MmM	26
3.3. Resultados para cilindros con otras secciones transversales (elíptica, ojival y rectangular)	28
4. Conclusiones	43

Agradecimientos

Me gustaría agradecer en primer lugar el trabajo de mi tutor Rafael Rodríguez Boix, ya que a pesar de las dificultades de dirigir un TFG a distancia, decidió contar igualmente conmigo para ello. Agradecerle el tiempo dedicado en la redacción de sus apuntes que explicaban toda la teoría tras este trabajo, y el tiempo dedicado a corregirlo de manera exigente. Sin duda, más allá de haberme enseñado electromagnetismo, me ha enseñado cómo ser un buen profesor. Como él diría: “Me gusta hacer las cosas bien”.

También quiero dar las gracias a mis compañeros de clase Alex y Pablo, por haberme acompañado durante estos 4 años y haberme ayudado tanto. Por supuesto agradecer también a Fernando por su compañía durante los 3 primeros años.

Agradecer también a mis amigos de Montequinto: Abraham, Cristina, Andrea, Álvaro, Mayo y Marta, ya que aunque las cosas se pusieran difíciles, ellos han estado siempre apoyándome.

Dar las gracias por supuesto a mis compañeros de ERASMUS, mi segunda familia: Maribel, Juan, Albert, Boni, Emma, María, Laura, Miriam, Ana, Emmanuelle, Martos y Alex, por acompañarme este último año en Alemania. Gracias a ellos, he aprendido mucho más allá de la física.

Y por último y más importante, dar las gracias a mis padres Paloma y Alberto, y a mi hermano Alberto. A pesar de que estos últimos años han sido especialmente complicados por muchas razones, ellos lo han dado todo por mí. A ellos se lo debo todo.

1. Introducción

1.1. Justificación y antecedentes

Este trabajo se centra en el estudio de los campos electromagnéticos de *scattering* generados al hacer incidir una onda electromagnética plana sobre un cilindro conductor perfecto -esto es, sobre un cilindro conductor de conductividad infinita- de longitud infinita y sección transversal arbitraria. En el caso concreto estudiado en el trabajo, la onda incidente tendrá una polarización del tipo TMz, lo cual significa que el campo eléctrico de la onda incidente es paralelo al eje del cilindro [1]. Adicionalmente, también tiene interés el estudio del *scattering* en el caso en que la onda tiene polarización TEz (esto es, cuando el campo eléctrico es perpendicular al eje del cilindro), pero el estudio completo de los dos casos es demasiado amplio para ser incluido en un Trabajo Fin de Grado [1]. El considerar infinito el cilindro objeto de estudio permite reducir el problema del *scattering* a 2 dimensiones. El estudio del *scattering* por objetos tridimensionales tiene desde luego mayor interés práctico, pero el caso tridimensional es muchísimo más complejo que el bidimensional, y la resolución de ese problema debería abordarse en el marco de un doctorado, y por tanto, queda fuera del ámbito de los Trabajos Fin de Grado.

A lo largo de este Trabajo Fin de Grado, llevaremos a cabo cálculos de la sección radar bidimensional [1] de cilindros de sección arbitraria (en el caso tridimensional, la sección radar es la figura de mérito que caracteriza a los objetos cuando sobre ellos incide una onda electromagnética, y es el parámetro relevante del objeto que interviene en la ecuación de radar [2]) y de las corrientes generadas en el conductor. Con vistas al cálculo de la sección radar y de las corrientes en los cilindros, resolveremos numéricamente una ecuación integral de campo eléctrico mediante el Método de los Momentos. Para verificar que el método numérico se ha implementado correctamente, se llevarán a cabo estudios de convergencia de los distintos parámetros involucrados. En un principio, se llevará a cabo el estudio exhaustivo del *scattering* por un cilindro de sección circular ya que para este caso existe solución analítica. A continuación, se estudiarán cilindros de secciones elípticas, ojivales y rectangulares. Dado que existen casos límites en los que una elipse y una ojiva pasan a ser circunferencias, se estudiarán esos casos límite para validar los resultados obtenidos para cilindros de sección elíptica y ojival.

El cálculo de los campos de *scattering* que se producen cuando una onda electromag-

nética incide sobre un objeto es un problema clásico de la Física. Este problema tiene interés práctico en conexión con el funcionamiento de los radares. Estos sistemas se utilizan para medir la distancia a un objeto, para medir la velocidad del objeto si éste está en movimiento (radar de efecto Doppler), y finalmente, para estimar el tamaño del objeto a través de su sección radar (lo que en Física se suele llamar “sección eficaz de dispersión”). Los radares tienen aplicaciones civiles (tráfico en aeropuertos, meteorología, alarmas para ladrones, radares de velocidad en carreteras, etc.), militares (navegación aérea y marina o detección de misiles), y por supuesto, aplicaciones científicas (astronomía, radiodetección de recursos naturales, etc.). El conocimiento de este campo ha sido determinante en algunos momentos de la historia ya que aporta una gran ventaja militar (así ocurrió, por ejemplo, a finales de la Segunda Guerra Mundial). Un ejemplo muy conocido es el del caza F-117, que fue el primer avión militar de la historia con tecnología *stealth* [3] (tecnología de invisibilidad en castellano). En la tabla 12.3 del libro de David M. Pozar *Microwave Engineering* [2] podemos encontrar valores típicos de secciones radar. Los valores usuales de la sección radar para un caza están entre 3 y 8 m². Sin embargo, debido a su geometría y a los materiales con los que está construido, la sección radar del F-117 es del orden de 0.003 m², que es la sección radar de un pájaro del tamaño de un colibrí. Pues bien, este hecho aportó una considerable ventaja al bando estadounidense durante la Guerra del Golfo, y fue crucial para que los estadounidenses acabaran ganando la guerra.

1.2. Breve descripción del trabajo

Con vistas a obtener los campos de *scattering*, vamos a resolver la ecuación integral que se obtiene al imponer que se anule el campo eléctrico tangencial total (suma del incidente y del de *scattering*) en la superficie de los cilindros. A esta ecuación integral se la suele llamar ecuación integral de campo eléctrico (*electric field integral equation* o EFIE en inglés). Para deducirla, partiremos de las ecuaciones de Maxwell, expresaremos los campos en función de los potenciales, y haciendo uso de funciones de Green para los potenciales y de la ecuación de continuidad, llegaremos a una ecuación integral que tiene como incógnita la densidad de corriente superficial inducida a los cilindros. Dado que esta ecuación integral se obtiene haciendo uso del potencial vector magnético y del potencial escalar eléctrico, también se la llama a veces ecuación integral de potenciales mixtos. Dicha ecuación integral la vamos a resolver mediante el Método de los Momentos.

El Método de los Momentos se basa en aproximar la densidad de corriente inducida en el cilindro como una combinación lineal de funciones base conocidas (en nuestro caso las funciones base serán pulsos rectangulares). Los coeficientes indeterminados de esta combinación lineal se obtienen proyectando la expresión resultante de sustituir la aproximación de la densidad de corriente en la ecuación integral sobre las mismas funciones base (a esta implementación del Método de los Momentos se la conoce como Método de Galerkin), lo cual lleva a que los coeficientes indeterminados sean la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Los elementos de la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones son un conjunto de integrales dobles que es preciso calcular numéricamente. Dado que los integrandos de estas integrales poseen singularidades logarítmicas, hay que utilizar un método específico de integración numérica capaz de tratar con integrandos con singularidades logarítmicas. En este trabajo se ha utilizado el método de integración numérica basado en las cuadraturas de Ma-Rokhlin-Wandzura [4].

El cálculo numérico de las integrales, la resolución del sistema de ecuaciones para obtener la densidad de corriente de los cilindros y el cálculo adicional de la sección radar bidimensional se llevan a cabo mediante códigos en lenguaje MATLAB. Las magnitudes calculadas son validadas mediante comparación con resultados previamente publicados o mediante comparación con resultados analíticos (concretamente, con los resultados que existen para un cilindro de sección circular). Asimismo, se llevan a cabo estudios de convergencia para chequear el buen funcionamiento del Método de los Momentos.

2. Ecuación integral para la densidad de corriente sobre la superficie del cilindro (caso TMz). Resolución de la ecuación integral mediante el Método de los Momentos

2.1. Expresiones del campo eléctrico en términos de funciones de Green y de la densidad de corriente en los casos tridimensional y bidimensional

De ahora en adelante, supondremos que todas las magnitudes electromagnéticas escalares y vectoriales de este trabajo dependen del tiempo sinusoidalmente con una frecuencia angular ω de forma que en las ecuaciones que vamos a manejar dichas magnitudes puedan ser sustituidas por sus fasores complejos. En el caso de que la dependencia con el tiempo fuera arbitraria, dichos fasores representarían las transformadas de Fourier de las magnitudes, y para recuperar la dependencia con el tiempo de las correspondientes magnitudes, habría que calcular la transformada inversa de Fourier.

Consideremos ahora un volumen τ' en el vacío, en el que existen corrientes y cargas (fuentes de campo electromagnético) variables sinusoidalmente en el tiempo (régimen armónico) que llevan asociadas un fador densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}')$ y un fador densidad de carga $\rho(\vec{r}')$ (véase la Figura 1).

Debido a la ecuación de continuidad, se tiene que cumplir que:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') + j\omega\rho(\vec{r}') = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{r}') = \frac{j}{\omega} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}'). \quad (1)$$

donde j es la unidad imaginaria. Las ecuaciones de Maxwell para los fasores del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ y del campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ creados por las fuentes son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{J}(\vec{r}) + j\omega\epsilon_0\mu_0\vec{E}(\vec{r}). \quad (5)$$

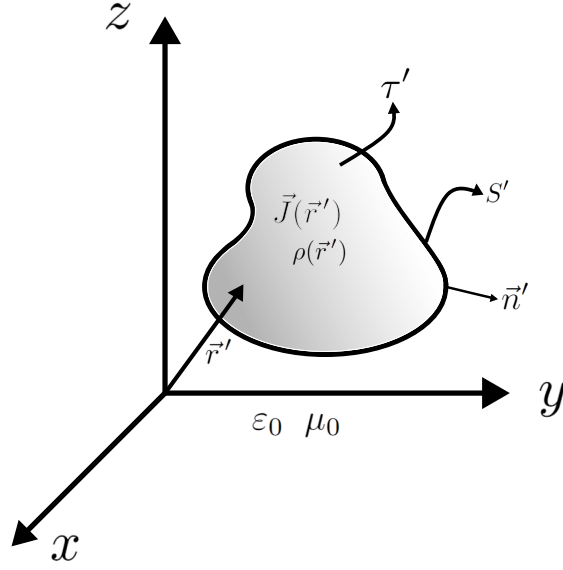


Figura 1: Volumen arbitrario con densidad de carga y densidad de corriente.

Las ecuaciones que relacionan los fasores de los campos con los fasores del potencial vector magnético $\vec{A}(\vec{r})$ y del potencial escalar eléctrico $\phi(\vec{r})$ son:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (7)$$

Si hacemos uso del gauge de Lorentz, se debe cumplir que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) + j\omega\epsilon_0\mu_0\phi(\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (8)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5), se llega a que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \mu_0\vec{J} + j\omega\epsilon_0\mu_0 \cdot (-j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\phi) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} &= \mu_0\vec{J} + k_0^2\vec{A} - j\omega\epsilon_0\mu_0\vec{\nabla}\phi, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$ es el número de ondas del vacío. Introduciendo el gauge de Lorentz (8) en (9) se obtiene:

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} + k_0^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}. \quad (10)$$

Esta es la ecuación de Helmholtz para el fasor del potencial vector \vec{A} . Como es bien sabido, la solución de la ecuación (10) para \vec{A} se puede escribir mediante la expresión para

el potencial retardado:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau' = \iiint_{\tau'} \overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') d\tau', \quad (11)$$

donde $\overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}')$ es la función de Green diádica para el potencial vector, dada por:

$$\overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}') = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0 e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0 e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$G_A^{xx}(\vec{r}-\vec{r}')\hat{x} = \frac{\mu_0 e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\hat{x}$ (véase la ecuación (12)) sería el potencial vector creado por un elemento infinitesimal de densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\hat{x}$. A este elemento de corriente le corresponde una función de Green para el potencial escalar G_ϕ^{xx} que, de acuerdo con la ecuación (8), vendría dada por:

$$\begin{aligned} G_\phi^{xx}(\vec{r}-\vec{r}') &= \frac{j}{\omega\varepsilon_0\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left[G_A^{xx}(\vec{r}-\vec{r}')\hat{x} \right] \frac{j}{\omega\varepsilon_0\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu_0 e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\hat{x} \right] = \\ &= -\frac{j}{\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\left(1 + jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|\right) e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] (x-x'). \end{aligned} \quad (13)$$

Esta función de Green es el potencial escalar electrodinámico creado por un dipolo eléctrico infinitesimal (dos cargas iguales de signo contrario que existen en los extremos del elemento de corriente infinitesimal debido a la ecuación de continuidad). Imaginemos que queremos calcular el potencial de una sola de esas cargas infinitesimales. De acuerdo con Michalsky [5], ese potencial es una función de Green $G_{\phi q}^{xx}(\vec{r}-\vec{r}')$ que se relaciona con la función de Green del dipolo $G_\phi^{xx}(\vec{r}-\vec{r}')$ mediante la ecuación:

$$G_{\phi q}^{xx}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{j\omega} \frac{\partial G_\phi^{xx}(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial x'}. \quad (14)$$

En general, si el elemento infinitesimal de corriente esta orientado en la dirección dada por el vector unitario \hat{u} , la relación será:

$$G_\phi(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{j\omega} \vec{\nabla}' G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \hat{u}. \quad (15)$$

Por otro lado, a partir de las ecuaciones (8) y (11) y suponiendo que tenemos un elemento de corriente infinitesimal dirigido en la dirección del vector unitario \hat{u} , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} G_\phi(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{j}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} \vec{\nabla} \cdot \left[\iiint_{\tau''} \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}'') \delta(x - x'') \delta(y - y'') \delta(z - z'') \cdot \hat{u} d\tau'' \right] = \\ &= \frac{j}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} [\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}')] \cdot \hat{u}. \end{aligned} \quad (16)$$

Comparando (15) y (16), se llega a que:

$$\frac{1}{j\omega} \vec{\nabla}' G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{u} = \frac{j}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} [\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}')] \cdot \hat{u}. \quad (17)$$

Dado que (17) se satisface para todos los vectores unitarios posibles \hat{u} , necesariamente debe cumplirse que:

$$\frac{1}{j\omega} \vec{\nabla}' G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{j}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} [\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}')]. \quad (18)$$

Teniendo en cuenta la expresión (12) para los elementos de $\overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}')$, la ecuación (18) obliga a $G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}')$ a cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{j\omega} \frac{\partial G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial x'} = \frac{j}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_0 e^{-jk_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (19)$$

$$\frac{1}{j\omega} \frac{\partial G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial y'} = \frac{j}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_0 e^{-jk_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (20)$$

$$\frac{1}{j\omega} \frac{\partial G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial z'} = \frac{j}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu_0 e^{-jk_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (21)$$

Y estas 3 ecuaciones se satisfacen si elegimos para $G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}')$ la siguiente expresión:

$$G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e^{-jk_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (22)$$

Ya tenemos las funciones de Green para el potencial vector electrodinámico creado por una corriente infinitesimal y para el potencial escalar electrodinámico creado por una carga puntual. Ahora obtendremos el campo eléctrico creado por las cargas y corrientes de la Figura 1 en términos de $G_{\phi q}$ y $\overline{\overline{G}}_A$. Si sustituimos (8) en (7) se obtiene que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \frac{j}{\mu_0\varepsilon_0\omega}\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})]. \quad (23)$$

De acuerdo con (11), se cumple que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\left[\iiint_{\tau'}\overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')d\tau'\right] = \iiint_{\tau'}[\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}')]\cdot\vec{J}(\vec{r}')d\tau'. \quad (24)$$

Sustituyendo (18) en (24) se llega a que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\varepsilon_0\iiint_{\tau'}\vec{\nabla}'G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')d\tau'. \quad (25)$$

Pero se cumple la siguiente identidad vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}'(G_{\phi q}\vec{J}) &= \vec{\nabla}'G_{\phi q}\cdot\vec{J} + (\vec{\nabla}'\cdot\vec{J})G_{\phi q} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{\nabla}'G_{\phi q}\cdot\vec{J} &= \vec{\nabla}'(G_{\phi q}\vec{J}) - (\vec{\nabla}'\cdot\vec{J})G_{\phi q} = \vec{\nabla}'(G_{\phi q}\vec{J}) + j\omega\rho(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (26)$$

donde se ha utilizado la ecuación de continuidad (1). Introduciendo (26) en (25) y aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\varepsilon_0\oint\!\!\!\oint_{S'}G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{n}dS' - j\omega\mu_0\varepsilon_0\iiint_{\tau'}G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')d\tau'. \quad (27)$$

Como las fuentes se consideran fijas en el volumen τ' (no salen ni entran), se debe cumplir en toda la superficie del volumen que $\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{n}\Big|_{S'} = 0$. Así, la ecuación (27) queda:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0\varepsilon_0\iiint_{\tau'}G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')d\tau'. \quad (28)$$

Sustituyendo (11) y (28) en (23), se obtiene finalmente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\iiint_{\tau'}\overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')d\tau' - \vec{\nabla}\left[\iiint_{\tau'}G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')d\tau'\right]. \quad (29)$$

La expresión (29) se conoce como expresión del campo eléctrico mediante potenciales mixtos. De acuerdo con la ecuación de continuidad (1), la ecuación (29) se puede reescribir como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\iiint_{\tau'}\overline{\overline{G}}_A(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')d\tau' - \frac{j}{\omega}\vec{\nabla}\left[\iiint_{\tau'}G_{\phi q}(\vec{r}-\vec{r}')[\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{r}')]d\tau'\right]. \quad (30)$$

Si el volumen τ' es un conductor eléctrico perfecto (conductor ideal de conductividad infinita), las cargas y corrientes estarán distribuidas en la superficie, de modo que la ecuación (29) se reescribe como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \iint_{S'} \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{K}(\vec{r}') dS' - \frac{j}{\omega} \vec{\nabla} \left[\iint_{S'} G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}') \sigma(\vec{r}') d\tau' \right], \quad (31)$$

donde $\vec{K}(\vec{r}')$ es la densidad superficial de corriente y $\sigma(\vec{r}')$ es la densidad superficial de carga. Para estas magnitudes, la ecuación de continuidad bidimensional toma esta forma:

$$\vec{\nabla}'_S \cdot \vec{K}(\vec{r}') + j\omega\sigma(\vec{r}') = 0, \quad (32)$$

donde $\vec{\nabla}'_S$ es el operador divergencia superficial, definido en la ecuación (A.3.18) del libro de Van-Bladel *Electromagnetic fields* [6]. Haciendo uso de (31) y (32), se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \iint_{S'} \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{K}(\vec{r}') dS' - \frac{j}{\omega} \vec{\nabla} \left[\iint_{S'} G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}') [\vec{\nabla}'_S \cdot \vec{k}(\vec{r}')] dS' \right]. \quad (33)$$

Consideremos ahora un cilindro infinito de sección arbitraria (curva C'), que es conductor eléctrico perfecto y alberga corrientes y cargas superficiales que no dependen de la coordenada z (véase la Figura 2). Si esto es así, los campos creados por esas corrientes y cargas tampoco dependerán de la coordenada z .

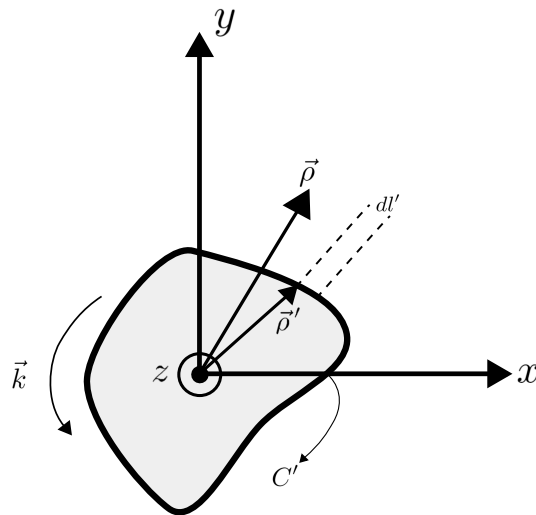


Figura 2: Cilindro de sección arbitraria con corrientes y cargas superficiales.

Definimos a continuación los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}\vec{\rho} &= x\hat{x} + y\hat{y} = \vec{r} - z\hat{z} \\ \vec{\rho}' &= x'\hat{x} + y'\hat{y} = \vec{r}' - z'\hat{z}.\end{aligned}$$

Con esta definición, se cumple la siguiente expresión:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}. \quad (34)$$

En el caso del cilindro infinito, las integrales de superficie de la ecuación (33) pasan a ser:

$$\iint_{S'} I_0 dS' = \int_{C'} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 dz' dl', \quad (35)$$

donde I_0 es un integrando genérico y C' es el contorno de la sección transversal del cilindro, de modo que lo que se ha hecho es escribir explícitamente los límites de integración para la coordenada z' . Como no hay dependencia de los campos y las fuentes con la coordenada z , podemos particularizar la ecuación (33) para $z = 0$, en cuyo caso se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{\rho}) = -j\omega \int_{C'} \overline{\overline{G}}_A^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \cdot \vec{K}(\vec{\rho}') dl' - \frac{j}{\omega} \vec{\nabla} \left[\int_{C'} G_{\phi q}^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') [\vec{\nabla}'_S \cdot \vec{K}(\vec{\rho}')] dl' \right], \quad (36)$$

donde, de acuerdo con (33) y (36):

$$\overline{\overline{G}}_A^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{G}}_A(\vec{r} - \vec{r}') dz' \Big|_{z=0} \quad (37)$$

$$G_{\phi q}^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\phi q}(\vec{r} - \vec{r}') dz' \Big|_{z=0}. \quad (38)$$

Sustituyendo (12) y (22) en (37) y (38) obtenemos:

$$\overline{\overline{G}}_A^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \overline{\overline{I}}_3 P(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \quad (39)$$

$$G_{\phi q}^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P(\vec{\rho} - \vec{\rho}'), \quad (40)$$

donde $\overline{\overline{I}}_3$ es la matriz identidad 3×3 y $P(\vec{\rho} - \vec{\rho}')$ es la siguiente integral:

$$P(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2 + z'^2}}}{\sqrt{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2 + z'^2}} dz'. \quad (41)$$

Utilizando la identidad de Euler en la exponencial, las ecuaciones (3.876.1) y (3.876.2) del libro de Gradshteyn *Table of integrals, series and products* [7], y la ecuación (9.1.4) de [8], se obtiene:

$$P(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = -\pi j H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|), \quad (42)$$

donde $H_0^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de segunda especie de orden 0 [8]. Sustituyendo (42) en (39) y (40), se obtiene que:

$$\overline{\overline{G}}_A^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{-j\mu_0 \overline{\overline{I}}_3}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \quad (43)$$

$$G_{\phi q}^{2D}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{-j}{4\epsilon_0} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|). \quad (44)$$

Y sustituyendo (43) y (44) en (36), se obtiene finalmente:

$$\vec{E}(\vec{\rho}') = -\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{C'} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \overline{\overline{I}}_3 \vec{K}(\vec{r}') dl' - \frac{1}{4\omega\epsilon_0} \vec{\nabla} \left[\int_{C'} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) [\vec{\nabla}'_S \cdot \vec{K}(\vec{r}')] dl' \right]. \quad (45)$$

La ecuación (45) es la versión bidimensional de la ecuación (31), y es la ecuación que relaciona el campo eléctrico con la densidad de corriente existente en el cilindro a través de las funciones de Green bidimensionales de (43) y (44).

2.2. Ecuación integral para la densidad de corriente en el problema de *scattering* bidimensional

Consideremos una onda plana que incide sobre el cilindro conductor de la Figura 2 en dirección perpendicular al eje del cilindro (eje z en la Figura) con vector número de ondas $\vec{k}_i = k_0(\cos \varphi_i \hat{x} + \sin \varphi_i \hat{y})$ (esto es, la dirección de incidencia forma un ángulo φ_i con el eje x positivo). Supondremos que el campo eléctrico de la onda es paralelo al eje del cilindro, en cuyo caso se suele decir que la onda tiene polarización TMz (véase la Figura 3).

Como la polarización es TMz y el campo eléctrico es paralelo al eje z , el fasor del campo eléctrico de la onda incidente se puede escribir:

$$\vec{E}_i = E_z^i(x, y) \hat{z} = E_0 e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{\rho}} \hat{z} = E_0 e^{-jk_0(\cos \varphi_i x + \sin \varphi_i y)} \hat{z}. \quad (46)$$

Por tanto, el campo magnético será:

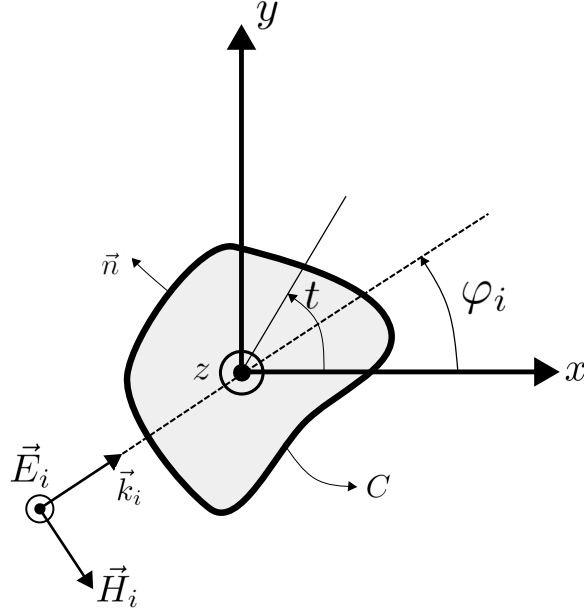


Figura 3: Onda incidente sobre cilindro conductor perfecto.

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\omega \mu_0} = \frac{E_0}{Z_0} (\sin \varphi_i \hat{x} - \cos \varphi_i \hat{y}) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{\rho}}, \quad (47)$$

donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$ es la impedancia del vacío. En este caso, como el campo eléctrico \vec{E}_i es paralelo al eje z , la densidad de corriente superficial inducida en el cilindro tendrá dirección z y se podrá escribir así:

$$\vec{K} = K(x', y') \hat{z} \quad (x', y') \in C'. \quad (48)$$

Dado que el problema no depende de la coordenada z , se va a cumplir que:

$$\vec{\nabla}'_S \cdot \vec{K} = \frac{\partial}{\partial z'} K(x', y') = 0. \quad (49)$$

El campo eléctrico de *scattering* generado por la corriente inducida en la dirección z solo tendrá componente z , y el campo magnético solo tendrá componentes x e y . Teniendo en cuenta este hecho, y teniendo en cuenta las ecuaciones (45), (48) y (49), se llega a que la componente z del campo eléctrico de *scattering* vendrá dada por la siguiente expresión:

$$E_z^{SC}(x, y) = -\frac{\omega \mu_0}{4} \int_{C'} H_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) K(x', y') dl'. \quad (50)$$

Como el campo eléctrico total (suma del campo de la onda incidente y el campo de

scattering) tiene que ser nulo en la superficie del cilindro conductor perfecto, se va a cumplir que:

$$E_z^i(x, y) + E_z^{SC}(x, y) = 0 \quad (x, y) \in C. \quad (51)$$

O lo que es lo mismo, que:

$$E_z^i(x, y) = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_{C'} H_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) K(x', y') dl' \quad (x, y) \in C. \quad (52)$$

La ecuación (52) es una ecuación integral de campo eléctrico (EFIE en inglés) para la densidad superficial de corriente inducida en el cilindro. En el próximo subapartado, se explicará cómo se puede resolver numéricamente esta ecuación integral mediante el Método de los Momentos (MmM). No obstante, y para facilitar la aplicación del MmM, vamos a parametrizar primero la curva C que limita la sección transversal del cilindro en función del parámetro angular $t \in [0, 2\pi)$ que se define en la Figura 4.

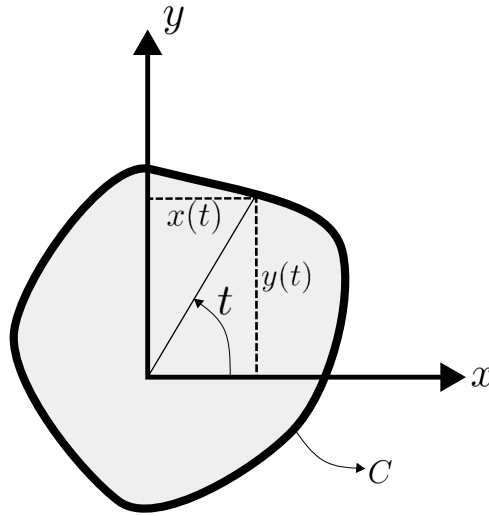


Figura 4: Parametrización usada para la curva C que limita la sección transversal del cilindro.

De acuerdo con la Figura 4, se cumple que en los puntos de la curva C se cumple que:

$$x(t) = \rho(t) \cos(t) \quad (53)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin(t). \quad (54)$$

En ese caso, el diferencial de longitud que aparece en la integral de línea de la ecuación (52) viene dado por:

$$dl' = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2} = \sqrt{\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2} dt' = w(t')dt'. \quad (55)$$

Expresando x e y en función de t y x' e y' en función de t' y utilizando la ecuación (55), la ecuación integral (52) se puede reescribir en términos de las dos variables t y t' como:

$$E_z^i(x(t), y(t)) = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x(t) - x'(t'))^2 + (y(t) - y'(t'))^2} \right) \cdot K(x'(t'), y'(t')) w(t') dt' \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (56)$$

De hecho, la ecuación integral (56) se puede reescribir de forma más simplificada como:

$$F(t) = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_0^{2\pi} M(t, t') I(t') dt' \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (57)$$

donde las funciones $F(t)$, $M(t, t')$ e $I(t')$ se definen como:

$$F(t) = E_z^i(x(t), y(t)) = E_0 e^{-jk_0(\cos\varphi_i x(t) + \sin\varphi_i y(t))} \quad (58)$$

$$M(t, t') = H_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x(t) - x'(t'))^2 + (y(t) - y'(t'))^2} \right) w(t') \quad (59)$$

$$I(t') = K(x'(t'), y'(t')). \quad (60)$$

La ecuación integral (57), que es una expresión más simplificada de la ecuación (56), es la que se va a resolver mediante el MdM.

2.3. Resolución de la ecuación integral mediante el Método de los Momentos con funciones base rectangulares

El objetivo que se busca es despejar la función incógnita $I(t)$ de la ecuación integral (57), que básicamente representa la densidad de corriente inducida en el cilindro conductor de la Figura 3 en función del parámetro angular t . Como ya hemos dicho anteriormente, el cálculo de $I(t)$ lo haremos mediante el Método de los Momentos (MdM), para lo cual, aproximaremos $I(t)$ como una combinación lineal de funciones base conocidas. Siguiendo

las recomendaciones del libro *Computational Methods for Electromagnetics* de Peterson, Ray y Mittra [9], utilizaremos pulsos rectangulares como funciones base. Esto es así porque, al no depender la componente z de la densidad de corriente de la coordenada z (en el caso de una onda incidente con polarización TM $_z$), dicha corriente no lleva aparejada densidad de carga de acuerdo con la ecuación de continuidad (véase la ecuación (49)), y por tanto, puede ser aproximada mediante una función discontinua. En el caso del *scattering* por un cilindro cuando incide una onda con polarización TE $_z$, la densidad de corriente inducida lleva aparejada densidad de carga y la densidad de corriente debe ser aproximada mediante una función continua para evitar que la densidad de carga presente singularidades que no tienen sentido físico [9] (téngase en cuenta que la densidad de carga es proporcional a la divergencia de la densidad de corriente de acuerdo con la ecuación de continuidad).

Vamos a dividir el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ en N subintervalos $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ($i = 1, \dots, N$), cumpliéndose que $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = 2\pi$. Definimos el pulso rectangular i -ésimo ($i = 1, \dots, N$) como (véase la Figura 5):

$$R_i(t) = \begin{cases} 1 & t_{i-1} < t < t_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (61)$$

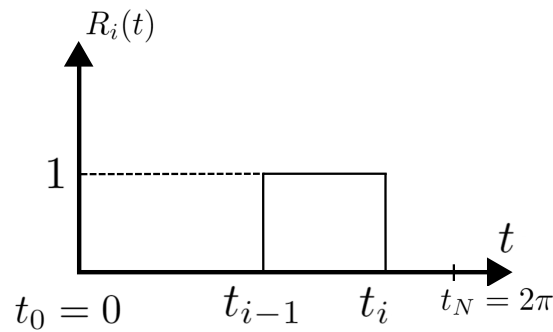


Figura 5: Esquema de los pulsos rectangulares.

Ahora aproximamos la función $I(t')$ como una combinación lineal de los pulsos rectangulares $R_i(t)$, esto es:

$$I(t') = \sum_{j=1}^N a_j R_j(t'), \quad (62)$$

donde a_j ($j = 1, \dots, N$) son coeficientes indeterminados que hay que determinar. Sustituyendo (62) en (57) se obtiene que:

$$F(t) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{t_{j-1}}^{t_j} M(t, t') dt' \right] a_j. \quad (63)$$

A continuación, siguiendo el esquema del MmM, multiplicamos la ecuación (63) por $R_i(t)$ e integramos en el intervalo $t_{i-1} < t < t_i$. Esto equivale a decir que en el marco del MmM, estamos utilizando funciones peso del mismo tipo que las funciones base, y por tanto, que estamos utilizando la versión ‘‘Galerkin’’ del MmM. Al proyectar la ecuación (63) sobre las funciones peso $R_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$), se obtienen las siguientes N ecuaciones:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) dt = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} M(t, t') dt' dt \right] a_j. \quad (64)$$

La expresión (64) se puede reescribir como:

$$b_i = \sum_{j=1}^N Q_{ij} a_j, \quad (65)$$

que básicamente es un sistema de N ecuaciones lineales en los coeficientes indeterminados a_j . En este sistema de ecuaciones, los elementos de la matriz de coeficientes Q_{ij} y los términos independientes b_i vienen dados por las siguientes integrales:

$$Q_{ij} = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} M(t, t') dt' dt \quad (66)$$

$$b_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) dt. \quad (67)$$

Las integrales de (66) y de (67) no se pueden hacer analíticamente, y hay que hacerlas mediante integración numérica. El problema que surge al llevar a cabo la integración numérica es que la función de dos variables $M(t, t')$ tiene una singularidad logarítmica cuando $t = t'$, y esta singularidad aparece en el dominio de integración de Q_{ij} cuando $i = j$ (véase la Figura 6), lo cual puede introducir errores importantes en el proceso de integración numérica de las citadas integrales.

Se puede demostrar que en el dominio de integración de Q_{ii} ($t_{i-1} \leq t \leq t_i$ y $t_{i-1} \leq t' \leq t_i$), cuando $t \rightarrow t'$ la función $M(t, t')$ se comporta como se indica a continuación:

$$M(t, t') \Big|_{t \rightarrow t'} \simeq \{A + B \ln |t - t'|\} \quad (68)$$

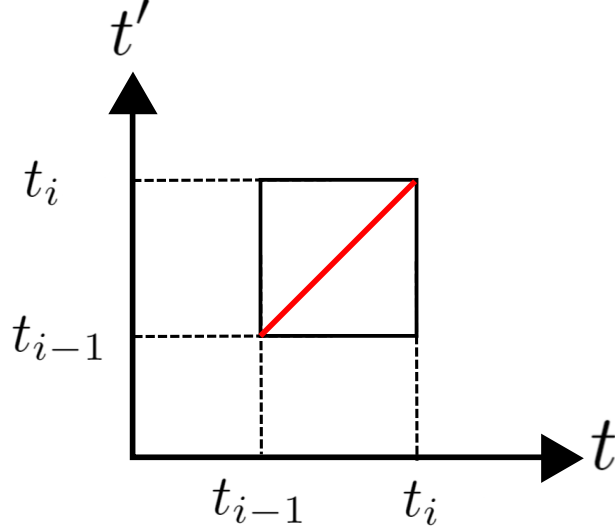


Figura 6: Dominio de integración en t y t' para Q_{ii} . Las singularidades se encuentran en la recta $t' = t$, marcada en rojo.

donde A y B son constantes, y donde se ha tenido en cuenta el desarrollo en serie en torno al origen de la función de Hankel $H_0^{(2)}(\cdot)$ cuando su argumento tiende a cero [8]. La ecuación (68) muestra claramente la singularidad logarítmica de $M(t, t')$ cuando $t \rightarrow t'$.

Para solventar el problema de las singularidades logarítmicas, al llevar a cabo la integración numérica de las integrales de (66) y de (67), se han utilizado fórmulas de cuadratura de Ma-Rokhlin-Wandzura (MRW) [4], que están especialmente pensadas para integrar funciones con singularidades logarítmicas. Concretamente, si $F(x) = h(x) + f(x) \ln x$ es una función de una variable que es una combinación lineal de dos funciones, una $h(x)$ que tiene un comportamiento suave y otra $f(x) \ln x$ que tiene una singularidad logarítmica en $x = 0$ -se supone que $f(x)$ también tiene un comportamiento suave-, las fórmulas de cuadratura MRW permiten integrar $F(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ con gran precisión mediante la siguiente ecuación:

$$\int_0^1 F(x) dx \simeq \sum_{m=1}^{N_c} w_m F(x_m), \quad (69)$$

donde los pesos w_m y los nodos x_m están tabulados en [4], y donde N_c es el orden de la cuadratura. La ecuación (69) es tanto más precisa cuanto mayor es el valor de N_c . En [4] se presentan tablas de w_m y x_m para $N_c = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ y 40 . Debido a la expresión de $F(x)$, las fórmulas de cuadratura MRW permiten integrar, tanto funciones suaves (en ese caso $f(x) = 0$) como funciones con singularidades logarítmicas (en ese caso

$h(x) = 0$)), con lo cual, han sido utilizadas indistintamente para hacer todas las integrales de (66) y (67).

Por ejemplo, con vistas a calcular las integrales de (66) cuando $i \neq j$, definimos primero:

$$N_j(t) = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_{t_{j-1}}^{t_j} M(t, t') dt'. \quad (70)$$

Teniendo en cuenta la definición de los coeficientes Q_{ij} en (66), se cumple que:

$$Q_{ij} \Big|_{i \neq j} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} N_j(t) dt = (t_i - t_{i-1}) \int_0^1 N_j((t_i - t_{i-1})u + t_{i-1}) du. \quad (71)$$

donde se ha introducido el cambio de variables $t = (t_i - t_{i-1})u + t_{i-1}$ en (71) para que la integral vaya de 0 a 1 y así poder aplicar la fórmula de cuadratura MRW que aparece en (69). Al utilizar esta fórmula se obtiene:

$$Q_{ij} \Big|_{i \neq j} \simeq (t_i - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{N_c} w_m N_j(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}), \quad (72)$$

pero:

$$\begin{aligned} N_j(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}) &= \frac{\omega\mu_0}{4} \int_{t_{j-1}}^{t_j} M(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}, t') dt' \\ &= \frac{\omega\mu_0}{4} \int_0^1 M(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}, t' = (t_j - t_{j-1})v + t_{j-1}) dv' \\ &\simeq \frac{\omega\mu_0}{4} (t_j - t_{j-1}) \sum_{n=1}^{N_c} w_n M(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}, t' = (t_j - t_{j-1})v + t_{j-1}). \end{aligned} \quad (73)$$

Sustituyendo ahora (73) en (72), se obtiene una expresión para los $Q_{ij} \Big|_{i \neq j}$, que está dada por:

$$Q_{ij} \Big|_{i \neq j} = \frac{\omega\mu_0}{4} (t_j - t_{j-1})(t_i - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} w_m w_n M(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}, t' = (t_j - t_{j-1})x_n + t_{j-1}). \quad (74)$$

Haciendo unos cálculos similares, la integral de (67) se puede obtener mediante la ecuación:

$$b_i \simeq (t_i - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{N_c} w_m F(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}). \quad (75)$$

Como se indicó anteriormente, el cálculo de Q_{ii} es más problemático debido a la singularidad logarítmica que aparece en la ecuación (68). Por tanto, en este caso, lo que se hace es dividir la integral de (70) en dos sumandos de forma que el punto del intervalo del intervalo de intergración donde aparece la singularidad logarítmica aparezca como límite de integración en cada uno de los sumandos como ocurre en la fórmula de cuadratura de (69), y a continuación, se llevan a cabo en cada sumando los mismos pasos de las ecuaciones (72) a (74). El resultado final es una expresión para Q_{ii} basada en las fórmulas de cuadratura MRW, que está dada por:

$$Q_{ii} \simeq (t_i - t_{i-1})^2 \frac{\omega \mu_0}{4} \cdot \left[\sum_{m=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} w_m w_n x_m \cdot M \left(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}, \right. \right. \\ \left. \left. t' = -(t_i - t_{i-1})x_m x_n + (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1} \right) + \sum_{m=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} w_m w_n (1 - x_m) \cdot \right. \\ \left. \cdot M \left(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}, t' = (t_i - t_{i-1})(1 - x_m)x_n + (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1} \right) \right]. \quad (76)$$

Sustituyendo (74), (75) y (76) en (65), podemos resolver el sistema de ecuaciones para los coeficientes indeterminados a_j ($j = 1, \dots, N$) de (62), y así llegar a una expresión para $I(t)$. Una vez conocida $I(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, podemos llegar a calcular la sección radar bidimensional (sección eficaz de dispersión por unidad de longitud) del cilindro conductor de la figura 3 para ondas incidentes con polarización TMz. Esta sección radar bidimensional tiene dimensiones de longitud, y de alguna manera, nos da una medida de la anchura que presenta el cilindro a la onda incidente. De acuerdo con la ecuación (1.125) de [9], la sección radar bidimensional vendría dada por:

$$\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|E_z^{SC}(\rho, \varphi)|^2}{|E_0|^2}, \quad (77)$$

donde $E_z^{SC}(\rho, \varphi)$ es el campo eléctrico de *scattering* de la ecuación (50) escrito en coordenadas cilíndricas y E_0 es la amplitud compleja del campo eléctrico de la onda incidente definido en la ecuación (46). Para poder obtener $\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i)$ mediante la ecuación (77), necesitamos calcular $E_z^{SC}(\rho, \varphi)$ cuando $\rho \gg \lambda$. Para ello, reescribimos la ecuación (50) en

coordenadas cilíndricas como se indica a continuación:

$$E_z^{SC}(\rho, \varphi) = -\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{C'} H_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(\rho \cos \varphi - x')^2 + (\rho \sin \varphi - y')^2} \right) K(x', y') dl'. \quad (78)$$

Ahora aproximamos la raíz cuadrada que aparece en el argumento de la función de Hankel para $\rho \gg$:

$$\sqrt{(\rho \cos \varphi - x')^2 + (\rho \sin \varphi - y')^2} \Big|_{\rho \gg} \simeq \rho - (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi). \quad (79)$$

Teniendo en cuenta la aproximación de (79) en (78), se obtiene:

$$E_z^{SC}(\rho, \varphi) \Big|_{\rho \gg} \simeq -\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{C'} H_0^{(2)} \left[k_0 \left(\rho - (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) \right) \right] K(x', y') dl' \Big|_{\rho \gg}. \quad (80)$$

De acuerdo con la ec (9.2.4) del libro de Abramowitz y Stegun [8], se cumple que:

$$H_0^{(2)}(x) \Big|_{x \gg} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j(x-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{2j}{\pi x}} e^{-jx}. \quad (81)$$

Haciendo uso de (81) en (80), se obtiene:

$$\begin{aligned} E_z^{SC}(\rho, \varphi) \Big|_{\rho \gg} &\simeq -\frac{\omega\mu_0}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi}} \int_{C'} \frac{e^{-jk_0\rho} e^{jk_0(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)}}{\sqrt{k_0\rho - k_0(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)}} K(x', y') dl' \Big|_{\rho \gg} \\ &\simeq -\frac{\omega\mu_0 \sqrt{j} e^{-jk_0\rho}}{2\sqrt{k_0} \sqrt{2\pi\rho}} \int_{C'} e^{jk_0(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} K(x', y') dl'. \end{aligned} \quad (82)$$

Introduciendo (82) en (77) y teniendo en cuenta que $\frac{\omega^2 \mu_0^2}{k_0} = k_0 Z_0^2$, se llega a que:

$$\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i) = \frac{k_0 Z_0^2}{4E_0^2} \left| \int_{C'} e^{jk_0(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} K(x', y') dl' \right|^2. \quad (83)$$

Por analogía con las ecuaciones (52) y (56), se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_{C'} e^{jk_0(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} K(x', y') dl' &= \int_0^{2\pi} e^{jk_0(x'(t') \cos \varphi + y'(t') \sin \varphi)} K(x'(t'), y'(t')) w(t') dt' \\ &= \int_0^{2\pi} S(t') I(t') dt', \end{aligned} \quad (84)$$

donde:

$$S(t') = e^{jk_0(x'(t') \cos \varphi + y'(t') \sin \varphi)} w(t') \quad (85)$$

e $I(t')$ ha sido definida en la ecuación (60). Sustituyendo ahora (62) en (84) y teniendo en cuenta la definición de los pulsos rectangulares dada en (61), llegamos a que:

$$\int_{C'} e^{jk_0(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} K(x', y') dl' = \sum_{j=1}^N a_j \int_0^{2\pi} S(t') R_j(t') dt' = \sum_{j=1}^N a_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} S(t') dt'. \quad (86)$$

Sustituyendo (86) en (83), podemos expresar $\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i)$ como:

$$\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i) = \frac{k_0 Z_0^2}{4E_0^2} \left| \sum_{j=1}^N a_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} S(t') dt' \right|^2. \quad (87)$$

Las integrales de (87) se pueden calcular utilizando cuadraturas MRW como ocurre con las integrales de (66) y (67). siguiendo un procedimiento análogo al seguido en las ecuaciones (72) a (74), se deduce que:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} S(t') dt' \simeq (t_i - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{N_c} w_m S(t = (t_i - t_{i-1})x_m + t_{i-1}). \quad (88)$$

Por lo tanto y a modo de resumen, para calcular $\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i)$ basta con utilizar las ecuaciones (74), (75) y (76) para calcular los coeficientes Q_{ij} y b_i ($i, j = 1, \dots, N$), con resolver el sistema de ecuaciones (65) para obtener a_i ($i = 1, \dots, N$), y con utilizar (88) para obtener las integrales de (87).

3. Resultados numéricos

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente, podemos calcular distintas magnitudes como la sección radar bidimensional σ_{TM} o la densidad de corriente K para cilindros de distintas secciones. Con el fin de validar nuestros códigos en MATLAB, empezaremos por mostrar resultados para el cilindro de sección circular ya que para este caso existen resultados analíticos.

3.1. Validación para el caso particular del cilindro de sección circular (sección radar bidimensional y densidad de corriente)

Sea un cilindro de sección circular de radio R . Sin pérdida de generalidad, en todos los casos tratados en este subapartado supondremos que la onda incidente sobre el cilindro viene de izquierda a derecha en la Figura 3 con un ángulo de incidencia $\varphi_i = 0$. La parametrización de curva C que limita la sección transversal del cilindro (véase la Figura 7) vendrá dada por las ecuaciones:

$$x(t) = R \cos(t) \quad (89)$$

$$y(t) = R \sin(t). \quad (90)$$

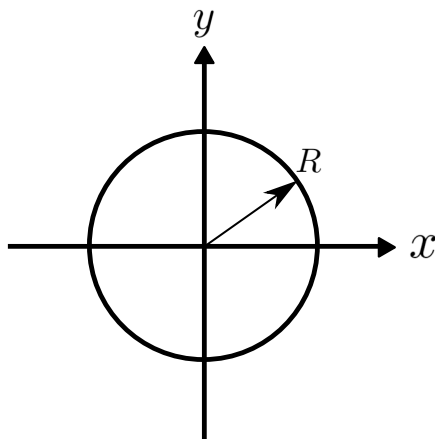


Figura 7: Sección transversal circular.

El diferencial de longitud dl' de la ecuación (52) se calcula mediante la ecuación (55):

$$dl' = \sqrt{((-R \sin(t'))^2 + (R \cos(t'))^2) dt'} = R dt' = w(t') dt' \quad \Rightarrow \quad w(t') = R. \quad (91)$$

La geometría circular es la única geometría de sección transversal de cilindro para la que existe solución analítica de σ_{TM} . Esta solución viene dada por la ecuación (11.102) del libro de Balanis *Advanced Engineering Electromagnetics* [1]:

$$\sigma_{TM}(\varphi, \varphi_i = 0) = \frac{4}{k_0} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n \frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \cos(n\varphi) \right|^2, \quad (92)$$

donde $J_n(\cdot)$ es la función de Bessel de primera especie de orden n y el parámetro ϵ_n viene dado por:

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases} \quad (93)$$

En la Figura 8 se representan los resultados obtenidos para la sección radar bidimensional normalizada a λ mediante la ecuación (92) frente al ángulo φ para distintos valores de la razón R/λ ($\lambda = 2\pi/k_0$ es la longitud de onda en vacío). Los resultados obtenidos con la ecuación (92) son comparados con los obtenidos mediante el MdM utilizando el procedimiento descrito en el apartado 2 de la Memoria. Se observa una excelente concordancia entre ambos conjuntos de resultados. Es más, hemos comprobado que los dos conjuntos de resultados coinciden con los representados en la Figura 11.13 de [1]. Para generar los resultados obtenidos con el MdM, se ha utilizado un orden de cuadratura $N_c = 20$ y un número de funciones base $N = 60$. Con valores mayores de N_c y N se podrían obtener resultados más precisos, pero eso conlleva un tiempo de CPU más alto, y para un estudio cualitativo, con estos valores es suficiente. En el subapartado 3.2 se llevará a cabo un estudio de la convergencia del MdM con N_c y N , lo cual nos permitirá estimar qué valores de N_c y N se requieren para una precisión dada.

Podemos comparar también la solución analítica para la densidad de corriente generada en la superficie del cilindro con la solución obtenida mediante el MdM. Esta solución analítica viene dada para el caso $\varphi_i = 0$ por la ecuación (11.97) del libro de Balanis [1], y vale:

$$K(\varphi) = \frac{2E_0}{\pi R \omega \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \frac{e^{jn\varphi}}{H_n^{(2)}(k_0 R)}. \quad (94)$$

En la Figura 9 se representan los resultados analíticos y los resultados numéricos obtenidos para el módulo de la densidad de corriente superficial (recordemos que el fasor

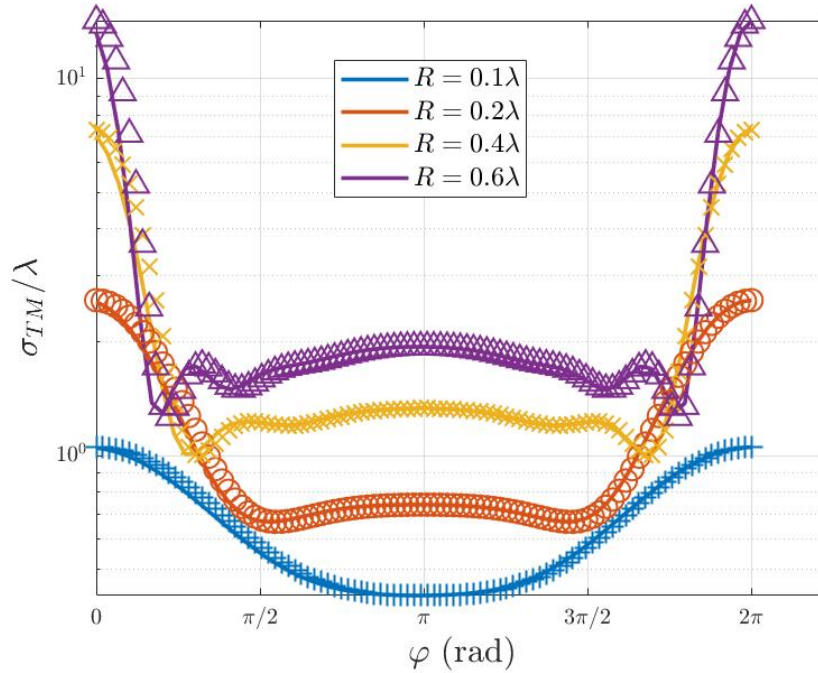


Figura 8: Representación de la sección radar bidimensional normalizada a la longitud de onda. Se hace una comparación de los resultados numéricos obtenidos mediante MmM (líneas continuas) con los analíticos (marcadores) para distintos valores del radio del cilindro.

de la densidad de corriente es un número complejo). De nuevo, se observa una excelente concordancia entre unos y otros resultados. Se observa un máximo en la densidad de corriente para $\varphi = \pi$, que es la dirección contraria a la de incidencia de la onda sobre el cilindro.

Otro parámetro de interés es la sección radar monoestática (también conocida como *backscattered radar section* en inglés), que es el valor que tiene la sección radar en la dirección contraria a la de incidencia la onda (en el caso tridimensional, este valor concreto de la sección radar es el que aparece en la famosa ecuación de radar), o lo que es lo mismo, el valor de $\sigma_{TM}(\varphi = \pi, \varphi_i = 0)$. En la Figura 10 se representa la sección radar monoestática normalizada a la longitud de onda frente al radio del cilindro. Los resultados representados han sido obtenidos mediante el MmM. Se observa un comportamiento prácticamente lineal para valores del radio superiores a 0.2λ , y un ligero “codo” para radios tendiendo a cero. Se puede comprobar que estos resultados coinciden muy aproximadamente con los que aparecen en la Figura (11.14) del libro de Balanis [1] en el caso de polarización TMz.

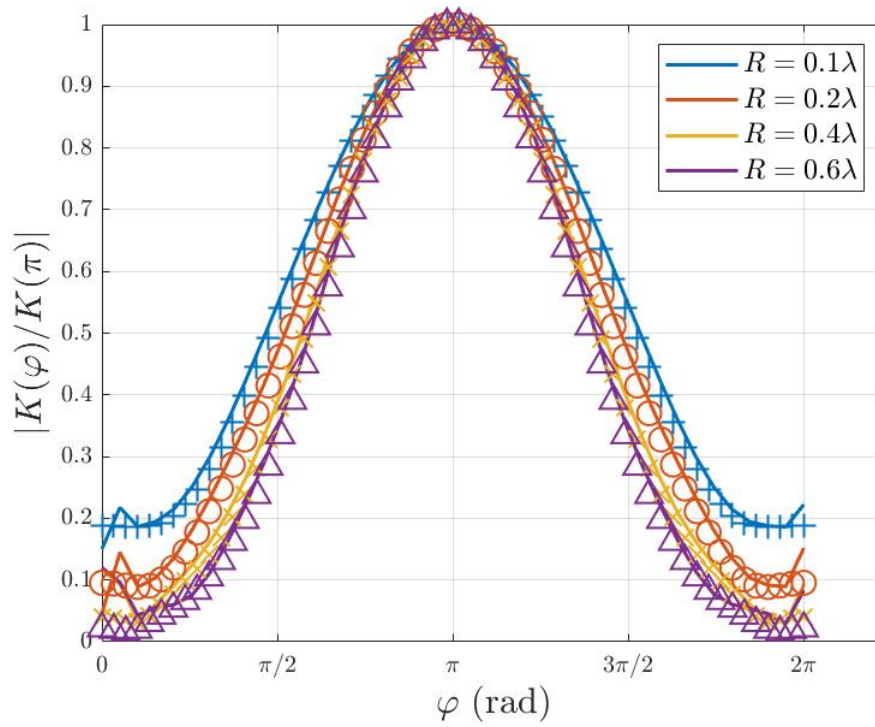


Figura 9: Representación del módulo la densidad superficial de corriente normalizada frente al ángulo φ . La densidad superficial de corriente se ha normalizado a su valor máximo. Los resultados numéricos obtenidos mediante MmM (líneas continuas) con los analíticos (marcadores) para distintos valores de radio del cilindro.

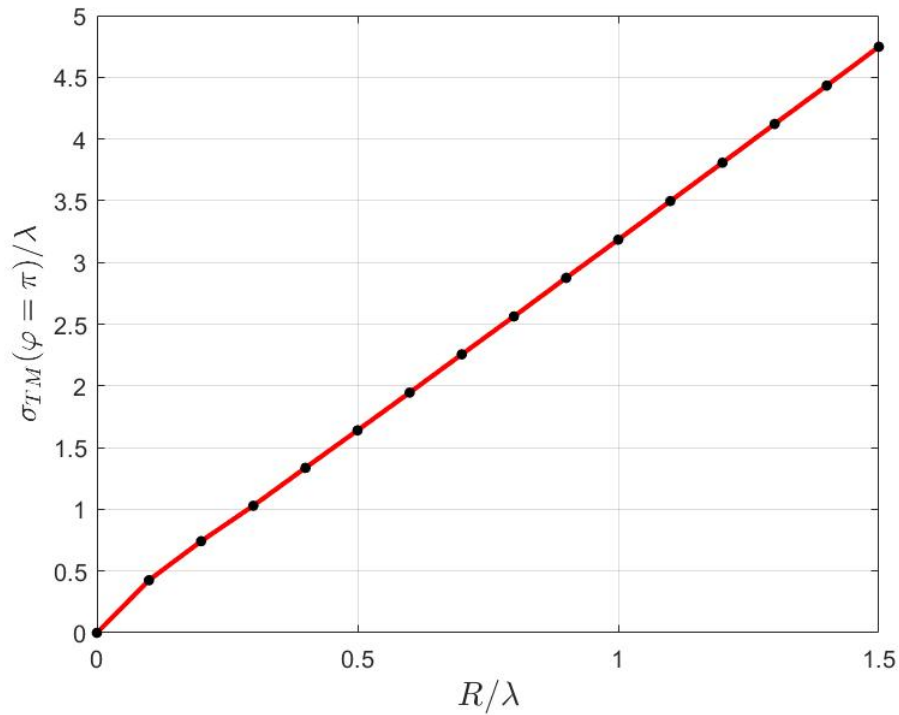


Figura 10: Sección radar monoestática normalizada en función del radio del cilindro.

3.2. Análisis de convergencia del MdM

Los resultados obtenidos mediante el MdM se calculan de manera numérica. Como es bien sabido, el cálculo numérico no es matemáticamente exacto. No obstante, los resultados deben convergen a los valores exactos esperados conforme aumentan los valores de los parámetros utilizados en el procedimiento numérico, que en nuestro caso son el orden de cuadratura utilizado en la integración numérica N_c y el número de funciones base N . Es conveniente conocer con qué rapidez se produce esa convergencia para saber si el procedimiento numérico es eficiente. Por este motivo, en este subapartado se va a llevar un estudio de la convergencia de la sección radar monoestática en función de N_c y en función de N .

En primer lugar, vamos a ver cómo convergen los resultados en función del orden de la cuadratura utilizada N_c . Dado que en el artículo de Ma, Rokhlin y Wandzura se tabulan los pesos y los nodos de las cuadraturas hasta un valor máximo $N_c = 40$, tomaremos como exacto el valor de las integrales para $N_c = 40$ y referiremos los errores de los resultados obtenidos para valores inferiores de N_c al valor obtenido para $N_c = 40$. El logaritmo decimal del error relativo de la sección radar monoestática lo vamos a definir como:

$$\epsilon(\sigma_{TM}(N_c)) = \log_{10} \left(\frac{\sigma_{TM}(N_c) - \sigma_{TM}(N_c = 40)}{\sigma_{TM}(N_c = 40)} \right), \quad (95)$$

donde $\sigma_{TM}(N_c)$ y $\sigma_{TM}(N_c = 40)$ son los valores de la sección radar monoestática para N_c y $N_c = 40$ respectivamente cuando se mantiene fijo el número de funciones base N . El logaritmo decimal $\epsilon(\sigma_{TM}(N_c))$ definido en (95) nos indica el número de cifras significativas que se repiten entre el valor de la sección radar monoestática que se obtiene para N_c y el que se obtiene para $N_c = 40$.

En la Figura 11 se representa $\epsilon(\sigma_{TM}(N_c))$ frente a N_c . Si suponemos que $\sigma_{TM}(N_c = 40)$ es un valor de la sección radar monoestática virtualmente exacto, la Figura 11 nos está diciendo que se consiguen al menos cuatro cifras significativas de precisión cuando $N_c = 5$, y que se consiguen siete cifras significativas cuando $N_c = 20$. Esto significa que un orden de cuadratura $N_c = 20$ es lo suficientemente preciso para nuestros propósitos (al menos, es casi tres cifras significativas más preciso que el orden de cuadratura $N_c = 5$).

De forma análoga se puede definir el logaritmo decimal del error relativo en el valor de la sección radar monoestática en función del número de funciones base N . En este caso

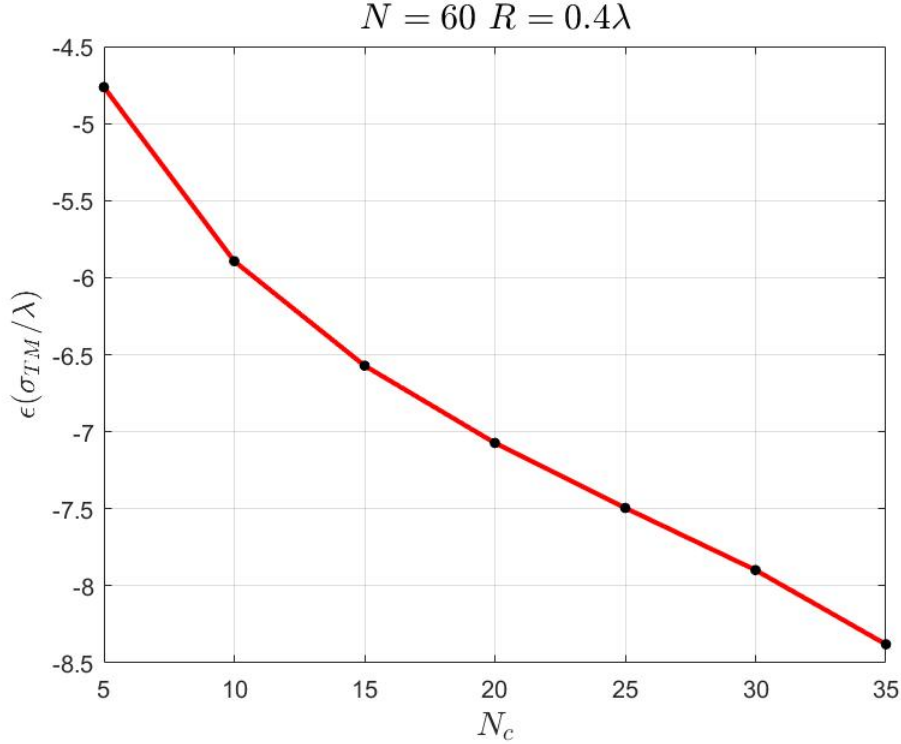


Figura 11: Análisis de convergencia con N_c para $N = 60$, $R = 0.4\lambda$, $\varphi_i = 0$ y $\varphi = \pi$.

vamos a tomar como valor virtualmente exacto de la sección radar monoestática el que se obtiene para $N = 340$ y vamos a definir el logaritmo decimal del error relativo de dicha función radar en función de N como:

$$\epsilon(\sigma_{TM}(N)) = \log_{10} \left(\frac{\sigma_{TM}(N) - \sigma_{TM}(N = 340)}{\sigma_{TM}(N = 340)} \right). \quad (96)$$

De nuevo, $\epsilon(\sigma_{TM}(N))$ me está indicando el número de cifras significativas que se repiten entre el valor de la sección radar monoestática obtenido para N y el obtenido para $N = 340$.

En la Figura 12 se representa $\epsilon(\sigma_{TM}(N))$ frente a N . Si suponemos que $\sigma_{TM}(N = 340)$ es un valor de la sección radar monoestática virtualmente exacto, la Figura 12 nos está diciendo que se consiguen unas dos cifras significativas de precisión cuando $N = 10$, y unas cuatro cifras significativas cuando $N = 60$. Se pueden llegar a conseguir seis cifras significativas cuando $N = 260$, pero eso implica un aumento importante en el coste computacional ya que es bien sabido que el coste computacional del MDM crece aproximadamente como N^3 cuando N es suficientemente grande (en ese caso la mayor parte del gasto computacional procede del tiempo necesario para resolver el sistema de

ecuaciones (65)). Por tanto, a efectos prácticos, un valor de $N = 60$ es más que suficiente.

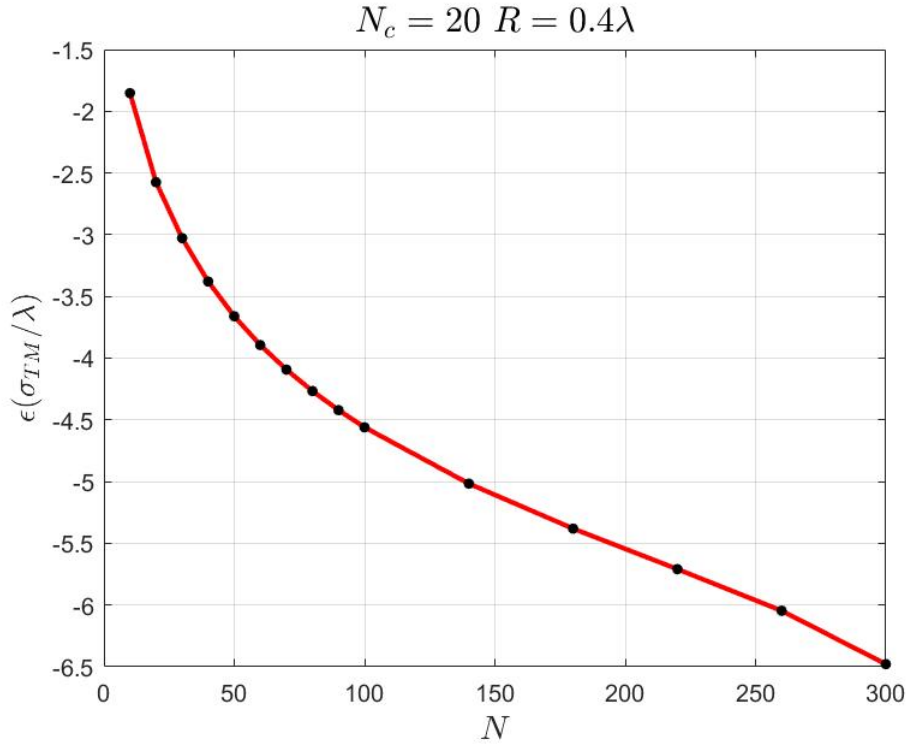


Figura 12: Análisis de convergencia con N para $N_c = 20$, $R = 0.4\lambda$, $\varphi_i = 0$ y $\varphi = \pi$.

Si comparamos las Figuras 11 y 12, se observa que la convergencia con N es más rápida que la convergencia con N_c . Es más, las simulaciones realizadas indican que el coste computacional de aumentar N al aplicar el MdM es mayor que el de aumentar N_c . Por poner un ejemplo, cuando se aplica el MdM con $N_c = 40$ y $N = 60$ no se necesita más de un minuto en un ordenador portátil, mientras que si se aplica el MdM con $N_c = 20$ y $N = 200$, se necesitan tres minutos y medio.

3.3. Resultados para cilindros con otras secciones transversales (elíptica, ojival y rectangular)

El MdM se puede aplicar al cálculo de la sección radar y de la densidad de corriente para cilindros con una sección transversal arbitraria. Basta con conocer en cada caso la parametrización de la curva que limita la sección transversal en función de la variable angular t . En este subapartado obtendremos resultados para la sección radar bidimensional en función del ángulo, para la densidad de corriente y para la sección radar monoestática de

cilindros con secciones elíptica, ojival y rectangular. Asimismo, en los tres casos llevaremos a cabo un análisis de convergencia en función del número de funciones base utilizadas en el MmM para un N_c fijo (esto es, haremos análisis de convergencia del tipo mostrado en la Figura 12). En todos los casos asumiremos que la onda incidente viaja de izquierda a derecha con un ángulo de incidencia $\varphi_i = 0$ y, mientras no se indique lo contrario, los cálculos se harán con un orden de cuadratura $N_c = 15$ y un número de funciones base $N = 100$.

En primer lugar, estudiaremos el caso del cilindro de sección elíptica que se muestra en la Figura 13. La parametrización de la curva C que limita la sección transversal del cilindro vendrá dada por las ecuaciones:

$$x(t) = a \cos(t) \quad (97)$$

$$y(t) = b \sin(t), \quad (98)$$

donde a y b son los semiejes horizontal y vertical, respectivamente.

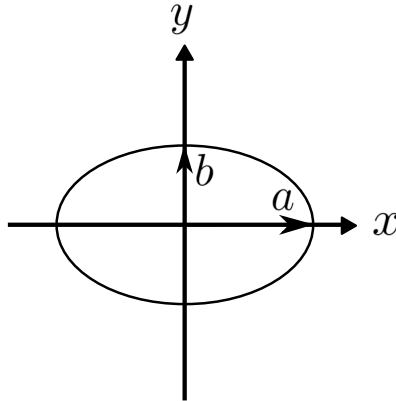


Figura 13: Sección transversal elíptica.

El diferencial de longitud dl' la ecuación (55) viene dado por:

$$dl' = \sqrt{((-a \sin(t'))^2 + (b \cos(t'))^2) dt'} = w(t') dt'. \quad (99)$$

En la Figura 14 se representa la sección radar normalizada a la longitud de onda para cilindros elípticos en los que $b/\lambda = 0.4$ y a/λ toma valores 0.2, 0.4 y 0.6. En el caso en el que $a = b = 0.4\lambda$ los valores obtenidos coinciden con los que se representan en la Figura 8 para un cilindro circular en el que $R = 0.4\lambda$, lo cual sirve para validar el código implementado para cilindros elípticos. Al igual que en el caso de la Figura 8, en la Figura

14 se observa que la sección radar como función de φ tiene un máximo en la dirección de propagación de la onda ($\varphi = 0$).

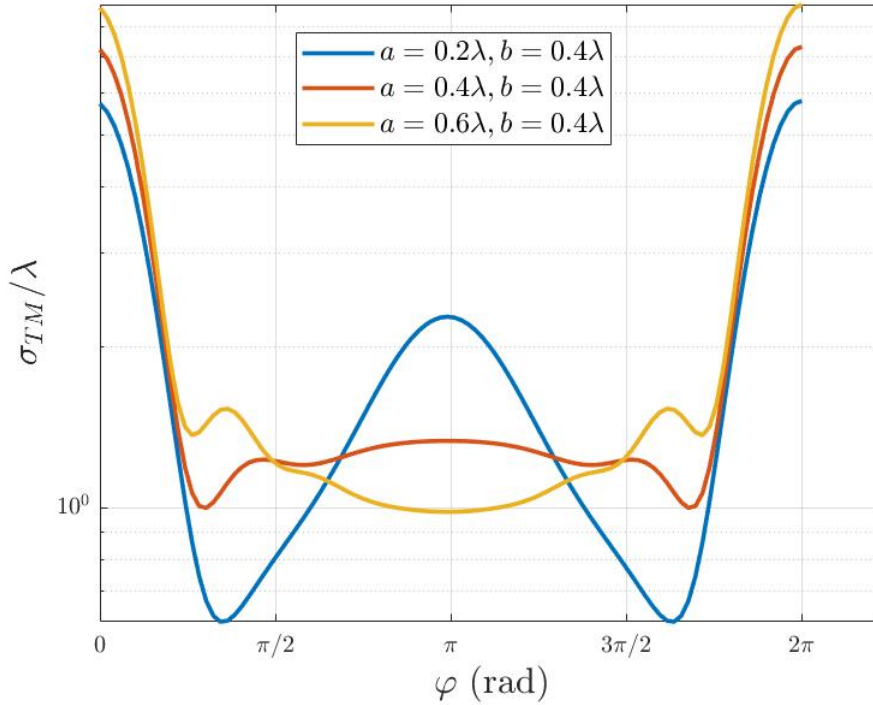


Figura 14: Representación de la sección radar bidimensional en función del ángulo φ para cilindros de sección elíptica.

En la Figura 15 se representa la densidad de corriente inducida en los cilindros elípticos estudiados en la Figura 14. Se observa que el máximo de la densidad de corriente en la dirección $\varphi = \pi$ se va haciendo más agudo conforme se va achatando el cilindro elíptico en dirección vertical, esto es, conforme a/b va disminuyendo. Esto es lógico si pensamos que en una tira conductora infinita, que sería un cilindro elíptico en el que $a/b = 0$, la densidad de corriente en los bordes de la tira es singular [6], con lo cual, lo que ocurre es que el comportamiento del cilindro elíptico va tendiendo al de la tira conductora conforme a va disminuyendo. En la Figura 15 también se observa que la forma de la densidad de corriente en el caso $a = b = 0.4\lambda$ coincide con la que se aprecia en la Figura 9 para un cilindro circular en el que $R = 0.4\lambda$, lo cual sirve una vez más para validar los resultados obtenidos para el cilindro elíptico.

En la Figura 16 se representa la sección radar monoestática de cilindros elípticos frente a a/λ , suponiendo que $b/a = 2$. Como era de esperar, al aumentar el tamaño del cilindro, aumentar su sección radar monoestática, y lo hace de forma “cuasi-lineal” como ocurría

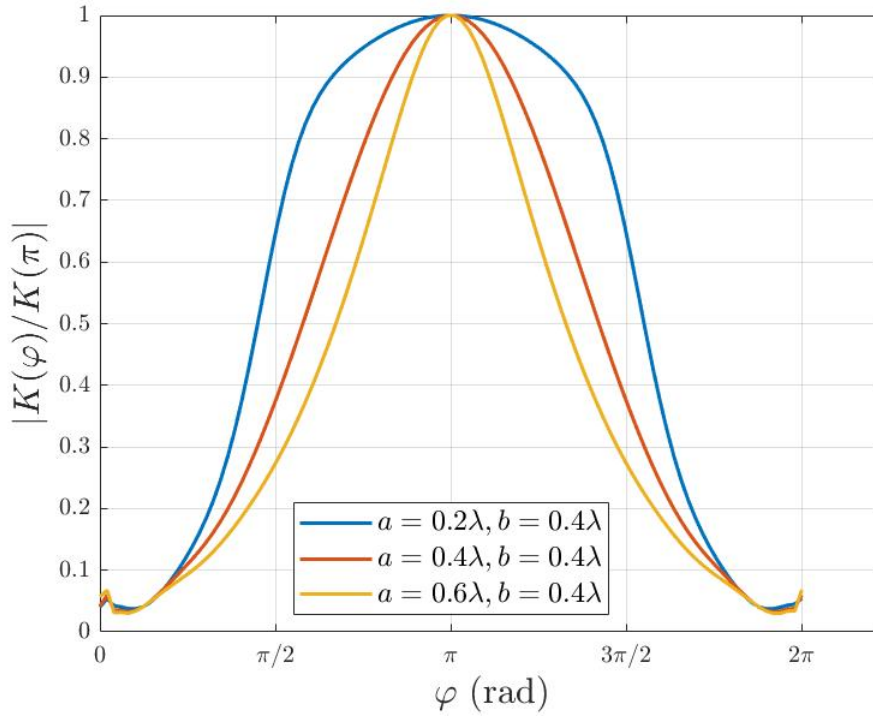


Figura 15: Módulo de la densidad superficial de corriente normalizada frente al ángulo φ en cilindros elípticos.

en el caso de los cilindros de sección circular (véase la Figura 10).

En la Figura 17 se lleva a cabo un estudio de convergencia con el número de funciones base N para la sección radar monoestática de un cilindro elíptico, que es similar al que se llevó a cabo para un cilindro circular en la Figura 12. Se observa que el ritmo de convergencia en la Figura 17 es muy similar al que se observa en la Figura 12. Si tomamos como valores virtualmente exactos los que se obtienen cuando $N = 340$, cuando $N = 10$ se está obteniendo una cifra significativa de precisión en los valores de la sección radar monoestática, cuando $N = 100$, se obtienen cuatro cifras significativas, y cuando $N = 260$, se obtienen seis cifras significativas. Estos resultados justifican haber utilizado $N = 100$ en nuestros cálculos para cilindros elípticos.

A continuación, vamos a obtener resultados para cilindros de sección ojival con una sección del tipo mostrado en la Figura 18. La ojiva está formada por dos porciones iguales de circunferencia, que son imagen especular una de la otra a través del plano $y = 0$.

La parametrización de la curva C que limita la sección ojival vendrá dada por las ecuaciones (53) y (54) con la siguiente función $\rho(t)$:

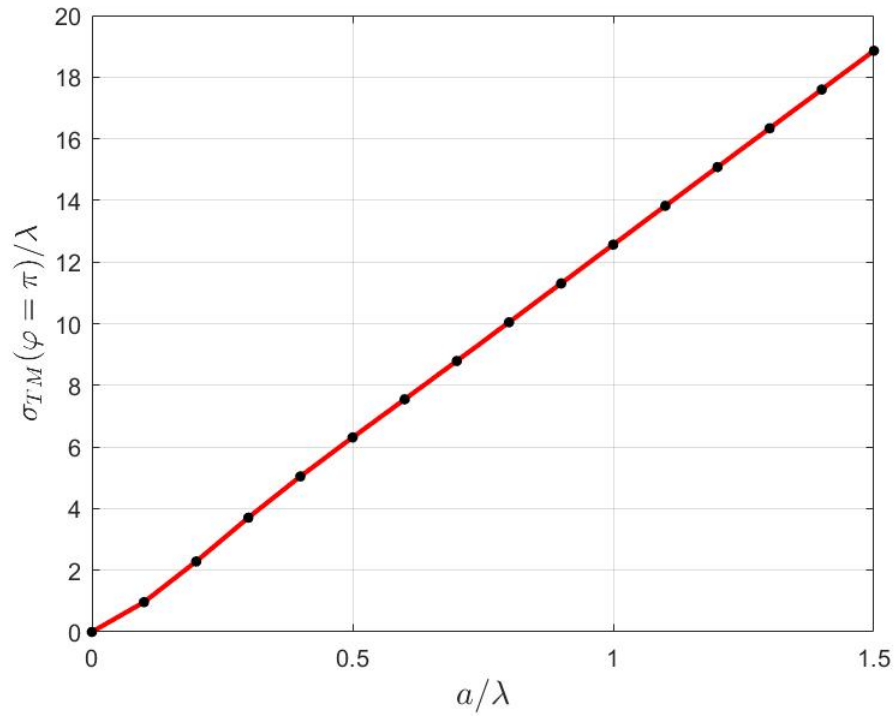


Figura 16: Sección radar monoestática para cilindros elípticos en función del tamaño del semieje horizontal a para $\frac{b}{a} = 2$.

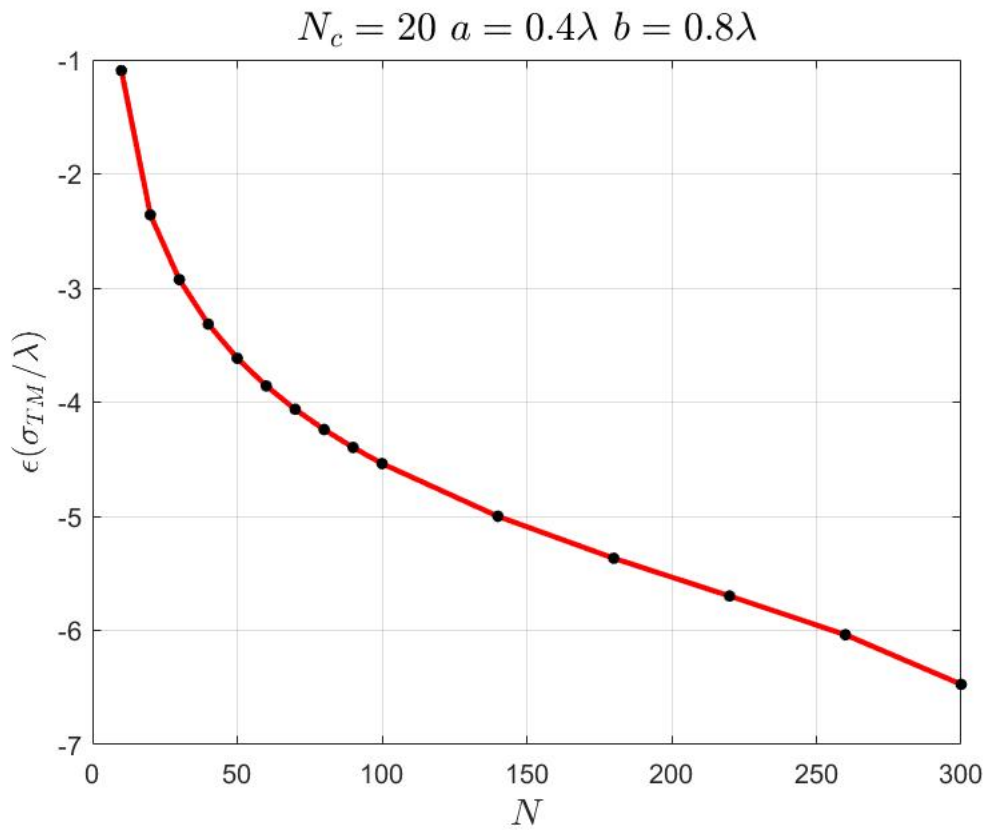


Figura 17: Análisis de convergencia con N para cilindros de sección elíptica. $N_c = 20$, $a/\lambda = 0,4$ y $b = 2a$.

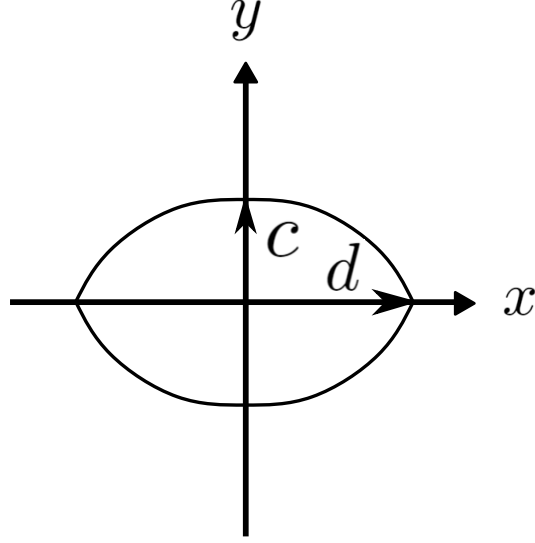


Figura 18: Sección transversal ojival.

$$\rho(t) = \begin{cases} -(R - c) \sin(t) + \sqrt{(R - c)^2 \sin^2(t) + (2Rc - c^2)} & 0 \leq t \leq \pi \\ (R - c) \sin(t) + \sqrt{(R - c)^2 \sin^2(t) + (2Rc - c^2)} & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (100)$$

donde:

$$R = \frac{c^2 + d^2}{2c}. \quad (101)$$

Aplicando la ecuación (55), se puede demostrar que el diferencial de longitud dl' en este caso viene dado por:

$$dl' = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt'}\right)^2 + (\rho(t'))^2} dt' = w(t') dt'. \quad (102)$$

donde la derivada de la coordenada radial $\rho(t)$ con respecto al parámetro t viene dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} = \begin{cases} -(R - c) \cos(t) + \frac{(R-c)^2 \sin(t) \cos(t)}{\sqrt{(R-c)^2 \sin^2(t) + (2Rc - c^2)}} & 0 \leq t \leq \pi \\ (R - c) \cos(t) + \frac{(R-c)^2 \sin(t) \cos(t)}{\sqrt{(R-c)^2 \sin^2(t) + (2Rc - c^2)}} & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad (103)$$

A la hora de aplicar el MmM al análisis del *scattering* por una sección ojival, esta sección presenta ciertas dificultades que no nos encontrábamos en los casos de las secciones circular y elíptica. La ojiva tiene esquinas en $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$, y en esas esquinas la corriente inducida en la superficie de la ojiva va a ser singular [6]. Si alguno de los pulsos rectangulares

elegidos como funciones base muestrea la corriente en una esquina, ello puede a dar a lugar a errores numéricos en la aplicación del MDM. Por tanto, es conveniente escoger los pulsos rectangulares de manera que las esquinas estén en los extremos de los intervalos en los que están definidos. En el caso de la sección ojival, solventar este problema es tan sencillo como elegir un número de funciones base N que sea par.

En la Figura 19 se presentan resultados para la sección radar de cilindros de sección ojival en función del ángulo φ . Se observa que conforme se va achatando la ojiva en dirección vertical (esto es, conforme c/d va disminuyendo), el mínimo de la sección radar para $\varphi = \pi$ va disminuyendo, y esos mínimos son más profundos que los que se observan para cilindros circulares y elípticos de dimensiones similares. También se observa que los valores obtenidos en la Figura 19 para la sección radar de una sección ojival en la que $c = d = 0.6\lambda$ coinciden con los obtenidos en la Figura 8 para un cilindro circular en el que $R = 0.6\lambda$, lo cual sirve para validar el código implementado para cilindros de sección ojival.

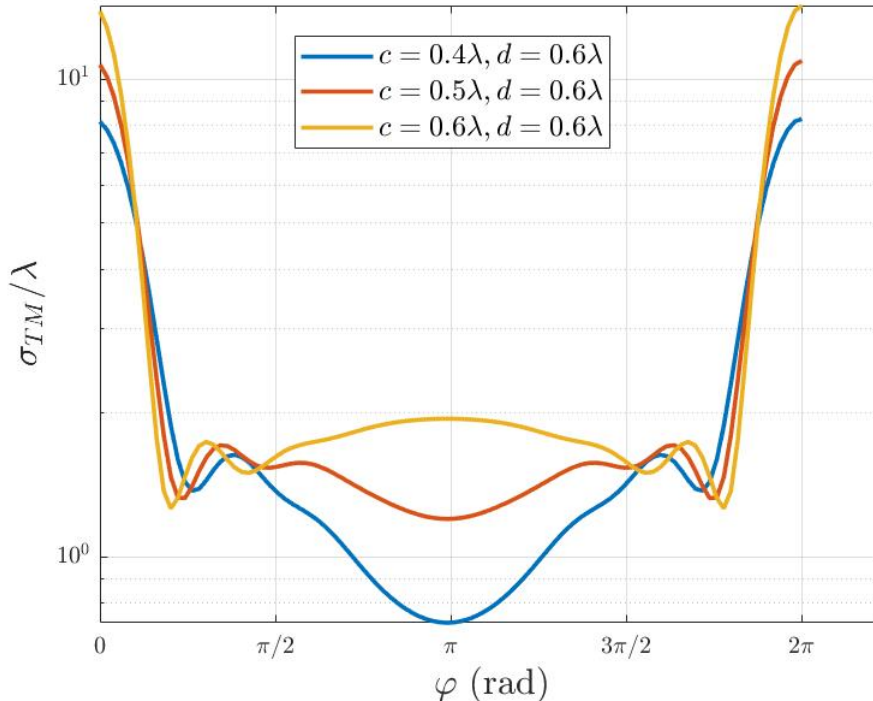


Figura 19: Representación de la sección radar bidimensional en función del ángulo φ para cilindros de sección ojival.

En la Figura 20 se presentan resultados para la densidad de corriente en cilindros de sección ojival. Se observa de nuevo que los resultados obtenidos para el caso $c = d = 0.6\lambda$

coinciden con los resultados obtenidos en el caso $R = 0.6\lambda$ en la Figura 9. La Figura 20 pone de manifiesto la singularidad de la corriente en la esquina $\varphi = \pi$ de las ojivas cuando $c = 0.5\lambda$ y cuando $c = 0.4\lambda$. La singularidad es tanto más abrupta cuanto menor es la razón c/d . La densidad de corriente no se puede ir a infinito en esas esquinas porque no hemos utilizado funciones base que den cuenta de la singularidad de borde. Si las hubiéramos utilizado, estaríamos dando cuenta de forma exacta de la singularidad de la corriente en las esquinas [6]. Los resultados obtenidos en la Figura 20 se pueden comparar con los que aparecen en la Figura 2.3 de [9] para una ojiva con una esquina más pronunciada ($c = 1.5\lambda$ y $d = 5\lambda$) observándose que la forma cualitativa de la densidad de corriente es esencialmente la misma.

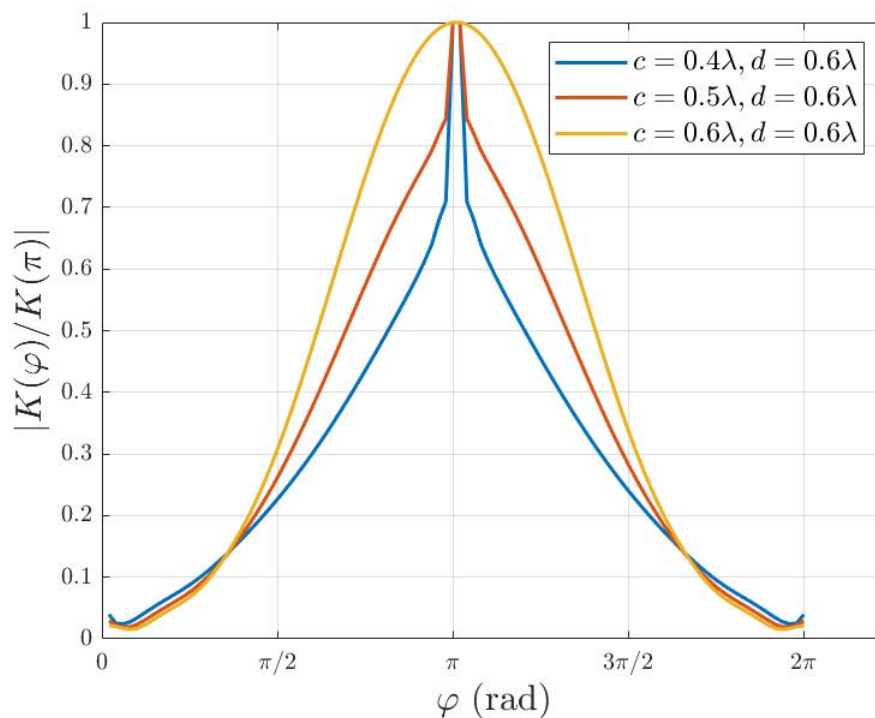


Figura 20: Módulo de la densidad superficial de corriente normalizada frente al ángulo φ en cilindros de sección ojival.

La Figura 21 muestra resultados para la sección radar monoestática de cilindros de sección ojival frente a c/λ cuando $c/d=2/3$. De nuevo, la sección radar monoestática crece al crecer las dimensiones del cilindro pero, a diferencia de lo que ocurre en las Figuras 10 y 16, ya no crece de forma “cuasi-lineal”. Es más, se puede comprobar que los valores de la sección radar monoestática de los cilindros de sección ojival son sustancialmente inferiores a los de cilindros de sección circular y elíptica, lo cual significa que la energía

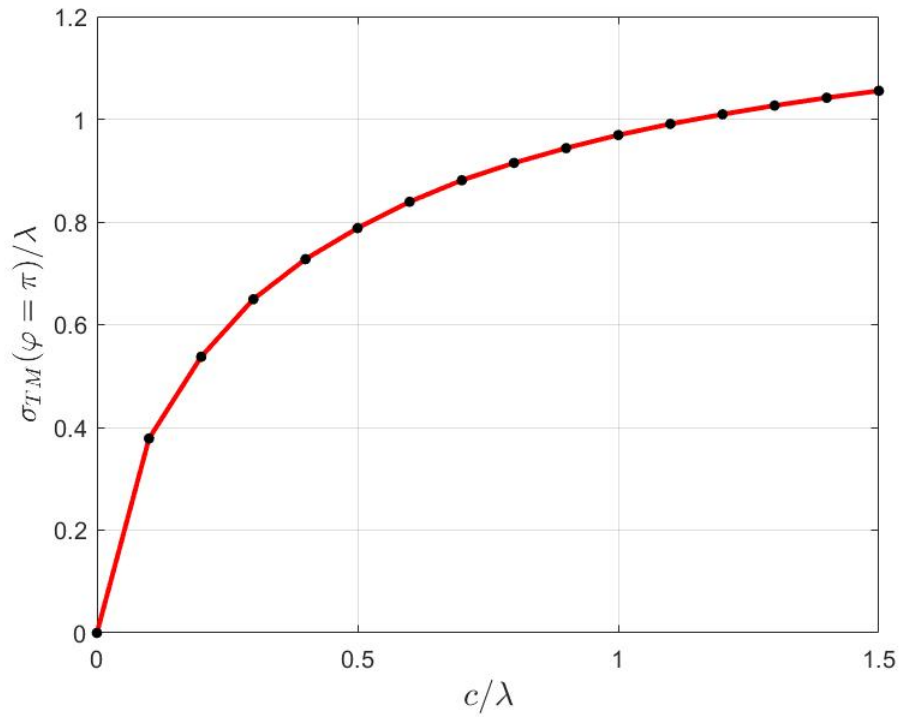


Figura 21: Sección radar monoestática para cilindros de sección ojival en función del tamaño del semieje vertical c para $c/d = 2/3$.

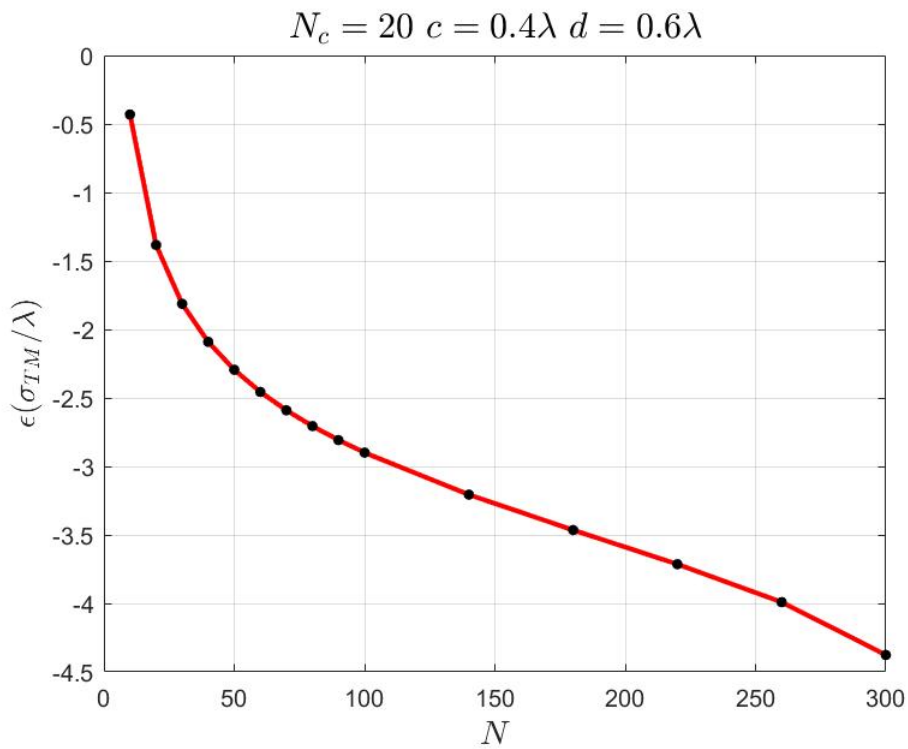


Figura 22: Análisis de convergencia con N para cilindros de sección ojival. $N_c = 20$, $c = 0.4\lambda$ y $d = 0.6\lambda$.

“rebotada” por el objeto al incidir la onda es muy inferior. De alguna manera, la arista de la ojiva, dispersa la onda en todas las direcciones en lugar de rebotarla hacia atrás. Esto podría explicar por qué los aviones con tecnología *stealth* tienen muchas aristas en su fuselaje para conseguir reducir la sección radar.

La Figura 22 muestra la convergencia del MmM para la sección radar monoestática de cilindros de sección ojival con el número de funciones base N . Es evidente que la convergencia es peor que en el caso de cilindros de sección circular y elíptica, lo cual se atribuye a que las funciones base no son capaces de reproducir con precisión las singularidades de borde de la densidad de corriente en las esquinas. Si tomamos como valores virtualmente exactos los que se obtienen cuando $N = 340$, cuando $N = 20$ se está obteniendo una cifra significativa de precisión en los valores de la sección radar monoestática, cuando $N = 100$, se obtienen aproximadamente tres cifras significativas, y cuando $N = 260$, se obtienen cuatro cifras significativas.

Por último, vamos a estudiar el caso de un cilindro de sección rectangular. La sección va a ser un rectángulo de semilados a y b , tal y como se indica en la Figura 23.

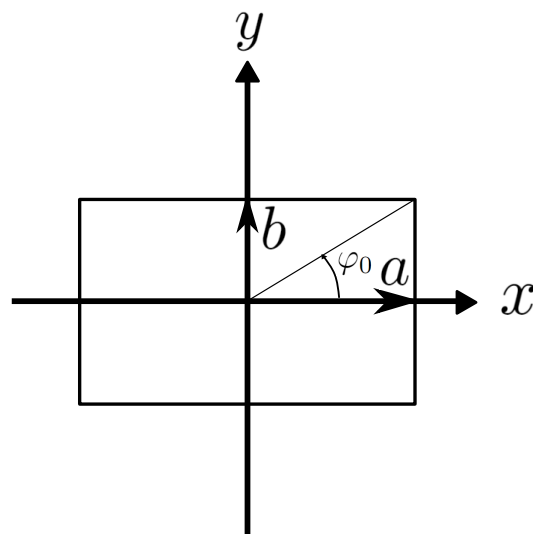


Figura 23: Sección transversal rectangular.

En el caso del cilindro de sección rectangular, la parametrización de la curva C que

limita la sección rectangular vendrá dada por las ecuaciones:

$$x(t) = \begin{cases} a & 0 < t < \varphi_o \\ b \cotg(t) & \varphi_o < t < \pi - \varphi_o \\ -a & \pi - \varphi_o < t < \pi + \varphi_o \\ -b \cotg(t) & \pi + \varphi_o < t < 2\pi - \varphi_o \\ a & 2\pi - \varphi_o < t < 2\pi \end{cases} \quad (104)$$

$$y(t) = \begin{cases} a \tg(t) & 0 < t < \varphi_o \\ b & \varphi_o < t < \pi - \varphi_o \\ -a \tg(t) & \pi - \varphi_o < t < \pi + \varphi_o \\ -b & \pi + \varphi_o < t < 2\pi - \varphi_o \\ a \tg(t) & 2\pi - \varphi_o < t < 2\pi, \end{cases} \quad (105)$$

donde $\varphi_o = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. La función $w(t')$ que aparece en la ecuación (55) puede ser calculada fácilmente, obteniéndose:

$$w(t') = \begin{cases} a \sec^2(t') & 0 < t' < \varphi_o \\ b \csc^2(t') & \varphi_o < t' < \pi - \varphi_o \\ a \sec^2(t') & \pi - \varphi_o < t' < \pi + \varphi_o \\ b \csc^2(t') & \pi + \varphi_o < t' < 2\pi - \varphi_o \\ a \sec^2(t') & 2\pi - \varphi_o < t' < 2\pi. \end{cases} \quad (106)$$

De manera similar a lo que ocurre en la sección ojival, la aplicación del MdM al cilindro de sección rectangular plantea problemas porque el cilindro presenta cuatro esquinas en los que la densidad de corriente es singular [6]. Para evitar problemas numéricos, los intervalos en los que están definidos los pulsos rectangulares utilizados como funciones base no deben incluir a estas cuatro esquinas. Los cálculos que se presentan en este subapartado se han realizado para una sección cuadrada ($\varphi_o = \frac{\pi}{4}$) y para 2 secciones rectangulares distintas en las que $\varphi_o = \frac{\pi}{6}$ y $\varphi_o = \frac{\pi}{3}$. En todos los casos analizados se ha utilizado un número de funciones base $N = 96$ (ya que este número es próximo a 100, que es el número de funciones base utilizados para los cálculos de los cilindros de secciones elíptica y ojival). El número 96 es divisible por 8 y por 12, lo cual es necesario para que los intervalos de los pulsos rectangulares no incluyan a las esquinas en los casos particulares de secciones

rectangulares que se han tratado. Uno podría pensar que este hecho es una limitación del método que se ha utilizado, pero el problema se resuelve utilizando pulsos rectangulares definidos en intervalos de distinta anchura, lo cual queda fuera del ámbito de problemas abarcado en este Trabajo Fin de Grado.

La Figura 24 muestra resultados para la sección radar de cilindros de sección cuadrada y rectangular en función del ángulo φ . Comparando un cuadrado de semilado 0.2λ con una circunferencia de ese mismo radio, podemos observar que el cuadrado tiene una sección radar ligeramente mayor, pero del mismo orden de magnitud. Se observa que el rectángulo con menor valor de b tiene la sección radar más pequeña ya que es el que presenta un perfil más pequeño a la onda incidente.

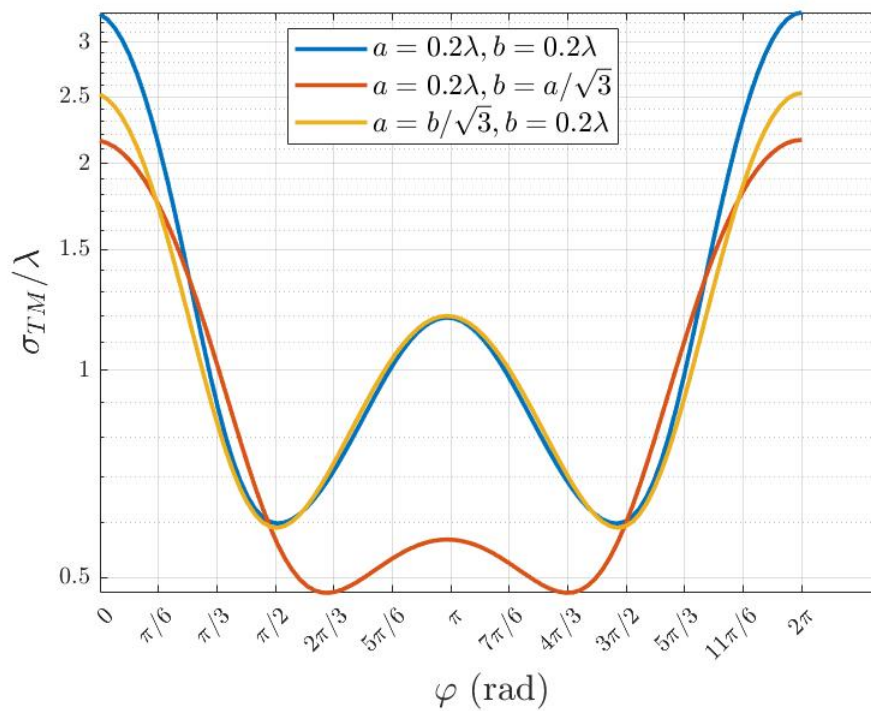


Figura 24: Representación de la sección radar bidimensional en función del ángulo φ para cilindros de sección rectangular.

La Figura 25 muestra la densidad de corriente para los cilindros de sección rectangular analizados en la Figura 24. Al igual que ocurría con los cilindros de sección ojival, se ponen de manifiesto las singularidades de la densidad de corriente en las cuatro esquinas de los rectángulos, siendo más relevantes esas singularidades en las esquinas situadas en el segundo y en el tercer cuadrantes donde la densidad de corriente toma valores mayores (compárese con las Figuras 9, 15 y 20).

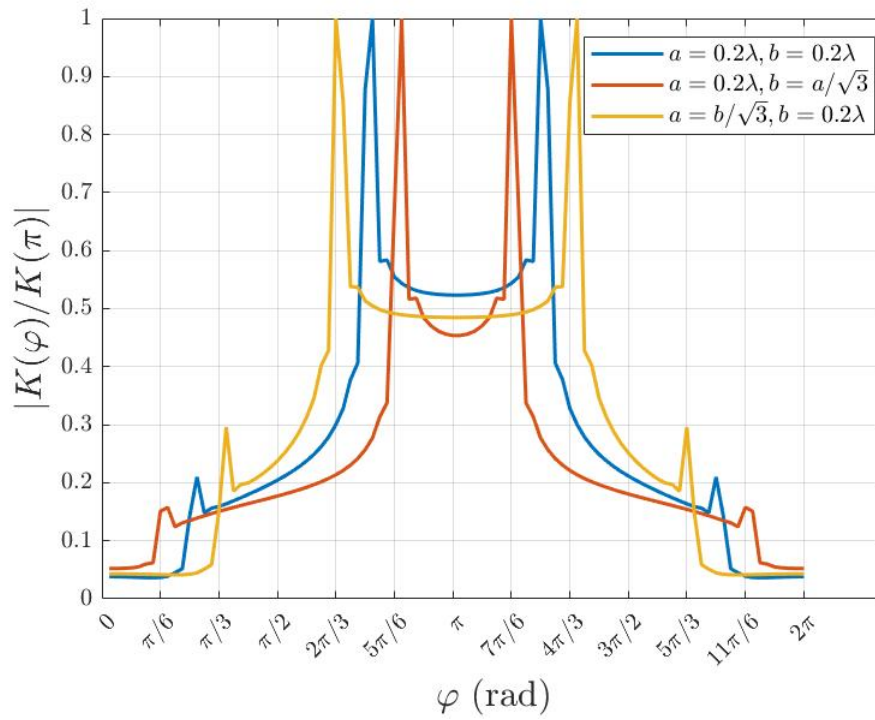


Figura 25: Módulo de la densidad superficial de corriente normalizada frente al ángulo φ en cilindros de sección rectangular.

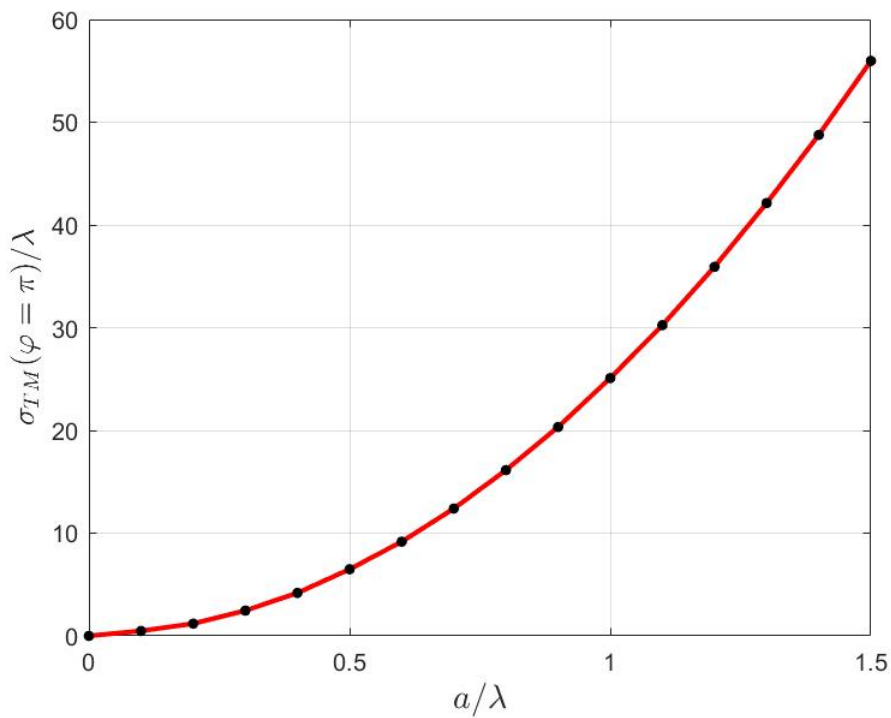


Figura 26: Sección radar monoestática para cilindros de sección cuadrada en función del semilado normalizado a la longitud de onda.

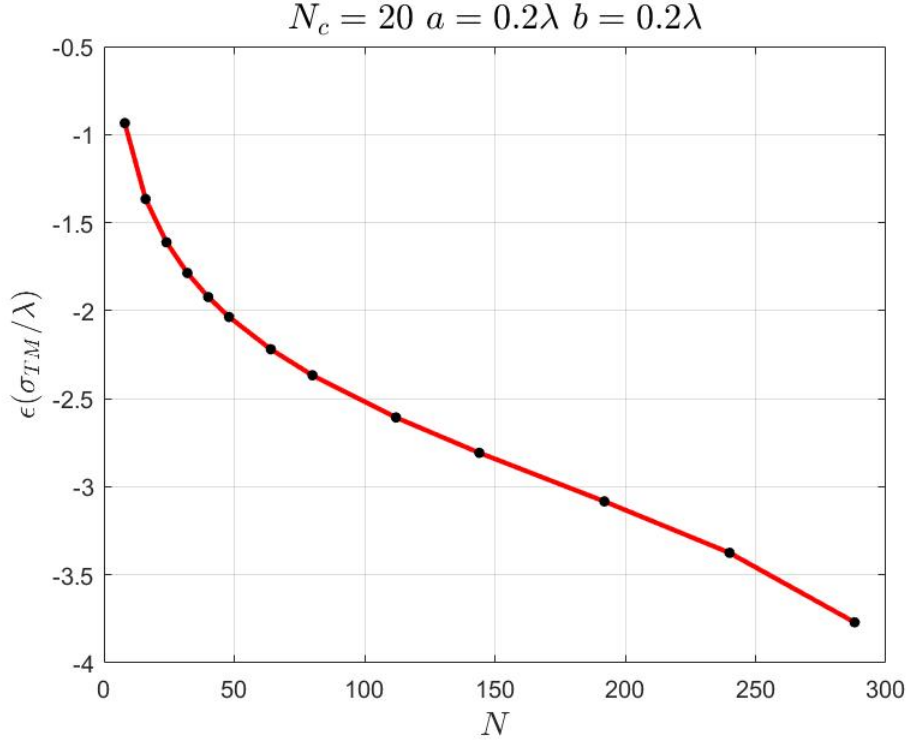


Figura 27: Análisis de convergencia con N para cilindros de sección cuadrada. $N_c = 20$ y $a = b = 0.2\lambda$.

En la Figura 26 se presentan resultados para la sección radar monoestática de un cilindro de sección cuadrada ($b = a$) en función del semilado del cuadrado normalizado a la longitud de onda. Se observan valores de sección radar monoestática muy superiores a los obtenidos para cilindros de sección circular, elíptica u ojival de dimensiones similares. Esto nos indica que la sección cuadrada tiene mucha más capacidad para reflejar la energía que las otras tres secciones estudiadas hasta ahora y que, por tanto, no debe ser utilizada en aplicaciones en las que se busca la “invisibilidad” del objeto dispersor.

Para finalizar, haremos un último análisis de convergencia para la sección radar monoestática de un cilindro de sección cuadrada en el que $a = b = 0.2\lambda$ con respecto al número de funciones base N . Con el fin de evitar las singularidades en las esquinas, en el estudio de convergencia se han utilizado valores de N divisibles por ocho, y se ha tomado como valor virtualmente exacto de la sección radar el que se obtiene para $N = 336$ en lugar de utilizar el que se obtiene para $N = 340$. Debido a este hecho, el logaritmo decimal del error relativo se ha definido en este caso como:

$$\epsilon(\sigma_{TM}(N)) = \log_{10} \left(\frac{\sigma_{TM}(N) - \sigma_{TM}(N = 336)}{\sigma_{TM}(N = 336)} \right). \quad (107)$$

En la Figura 27 se representa la convergencia de la sección radar para el cilindro de sección cuadrada frente a N . Debido a la imposibilidad de reproducir las singularidades de la densidad de corriente en las esquinas con los pulsos rectangulares, el ritmo de convergencia es incluso peor que en el caso de los cilindros de sección ojival. De hecho, para $N = 48$ se obtienen escasamente dos cifras significativas y para $N = 184$, tres cifras significativas.

4. Conclusiones

Se ha formulado el Método de los Momentos (MmM) para el estudio del *scattering* de una onda plana por un cilindro conductor perfecto de sección arbitraria cuando sobre él inciden ondas electromagnéticas con polarización TMz. En particular, se ha resuelto mediante el MmM la ecuación integral para la densidad de corriente inducida en el cilindro. Como funciones base para la densidad de corriente, se han utilizado pulsos rectangulares. En el cálculo de las integrales que intervienen en el cálculo de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones del MmM se han utilizado cuadraturas de Ma-Rokhlin-Wandzura (MRW) para dar cuenta de las singularidades logarítmicas en los integrandos.

Se han escrito códigos en MATLAB que implementan el cálculo de la densidad de corriente inducida en los cilindros mediante el MmM y el cálculo de la sección radar bidimensional de los cilindros. Los resultados numéricos obtenidos mediante el MmM para cilindros de sección circular se han comparado con resultados analíticos, obteniéndose una excelente concordancia entre unos y otros resultados.

Se han obtenido resultados numéricos para cilindros con secciones elíptica, ojival y rectangular. Se ha comprobado que la sección radar monoestática, que es una magnitud crucial en aplicaciones de radar, es mínima para los cilindros de sección ojival y máxima para cilindros de sección rectangular. Se ha comprobado que los resultados obtenidos para la corriente inducida en cilindros de sección ojival y rectangular muestran singularidades en las esquinas, lo cual está en consonancia con la física de los campos en presencia de conductores. Este hecho constituye una validación cualitativa de los resultados obtenidos.

Se han llevado a cabo análisis de convergencia con respecto al número de puntos utilizado en las cuadraturas numéricas de MRW, y con respecto al número de funciones base utilizado en el MmM. Se observa que la convergencia con el número de puntos en las cuadraturas MRW es rápida, pero en cambio, la convergencia con el número de funciones base es fuertemente dependiente de la geometría de los cilindros. Así en el caso de cilindros con contornos suaves (circular o elíptico) la convergencia con el número de funciones base es muy buena. En cambio, en cilindros con esquinas donde la densidad de corriente se vuelve singular, la convergencia es mala, lo cual se atribuye a las singularidades de la densidad de corriente en dichas esquinas.

Si bien los programas creados no se pueden utilizar de manera directa en aplicaciones prácticas debido a que habría que extender el caso bidimensional al caso tridimensional,

el desarrollo de esos programas y la obtención de resultados han aportado a su autor conocimiento y experiencia suficientes para atreverse en un futuro con la programación de problemas de *scattering* tridimensionales en los que intervienen ondas con polarización arbitraria que inciden sobre objetos conductores o dieléctricos, lo cual tiene múltiples aplicaciones civiles, militares y científicas.

Referencias

- [1] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 570-658, New York, 1989.
- [2] David M. Pozar, *Microwave Engineering*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., pp. 673-679, New York, 1998.
- [3] Wikipedia. *Stealth Technology*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Stealth_technology (Accedido: 29/08/2022).
- [4] J. Ma, V. Rokhlin and S. Wandzura, "Generalized Gaussian Cuadrature Rules for Systems of Arbitrary Functions", *SIAM Journal Num. Anal.*, Vol. 33, No. 3, June 1996, pp. 971-996.
- [5] K. A. Michalsky, "On the Scalar Potential of a Point Charge Associated with a Time-Harmonic Dipole in a Layered Medium", *IEEE Transactions on Antennas and Propagations*, Vol. AP-35, No. 11, November 1987, pp. 1299-1301.
- [6] J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, 2nd edition, IEEE Press/Wiley-Interscience, pp. 172-175, pp. 749-751 and p. 1027, Hooboken, New Jersey, 2007.
- [7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, 7th edition, Elsevier & Academic Press, p. 482, Amsterdam, 2007.
- [8] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, 9th printing, Dover Publications, pp. 358-389, New York, 1970.
- [9] A. F. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press and Oxford University Press, pp. 1-93, New York, 1998.