

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Control de actitud de las E-sail mediante la modulación del voltaje de los tethers

Autor: Juan Pérez Gómez

Tutor: Guillermo Pacheco Ramos y Rafael Vázquez Valenzuela

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Control de actitud de las E-sail mediante la modulación del voltaje de los tethers

Autor:

Juan Pérez Gómez

Tutor:

Guillermo Pacheco Ramos y Rafael Vázquez Valenzuela

Profesor Sustituto Interino y Profesor Titular

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Grado: Control de actitud de las E-sail mediante la modulación del voltaje de los tethers

Autor: Juan Pérez Gómez

Tutor: Guillermo Pacheco Ramos y Rafael Vázquez Valenzuela

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

Tras 4 años de duro esfuerzo y trabajo esta etapa llega a su fin. Han sido 4 años duros en los que he pasado por momentos muy difíciles pero de los he conseguido sobreponerme y sobre todo aprender.

No quería cerrar esta etapa sin agradecer a todas las personas que me han acompañado en el camino. Los pilares de mi vida, mis padres, sin sus esfuerzos y sacrificios hoy no estaría en la situación en la que estoy. Por su apoyo incondicional en los peores momentos y por haberme dado la educación que tengo, ellos siempre han estado ahí. Sin ellos, hoy no sería nada. También me gustaría acordarme de mi hermana, Lucía gracias por estar ahí siempre y por sacarme una sonrisa en los momentos de estrés, eres una persona fundamental en mi vida y sin ti no habría logrado llegar hasta aquí. A mis abuelos, mis segundos padres, por su amor y su apoyo incondicional. Abuela allá donde estés, quiero decirte que lo he conseguido y que todo el esfuerzo ha merecido la pena, sigue siendo la luz que me guía desde arriba. Quería acordarme también de mis amigos, por su constante apoyo y por animarme en los momentos duros.

No quería irme sin agradecer a Rafa y a Guillermo toda su ayuda. A pesar de que el comienzo de este proyecto no fue fácil, ellos han estado siempre ahí para ofrecer cualquier ayuda. Gracias por hacer que aún me apasione más este mundo.

Por todas aquellas personas que se han cruzado en mi camino durante estos años. De todas he aprendido algo y me han ayudado a crecer como persona, solo tengo palabras de agradecimiento para ellas.

*Juan Pérez Gómez
Sevilla, 2022*

Resumen

En esta memoria se abordará el tema de control de actitud de las velas solares eléctricas, un nuevo mecanismo de generación de empuje que usa los iones procedentes del plasma del viento solar y que permite, por tanto, eliminar la masa de propulsante necesaria para viajar por el Sistema Solar.

Se comenzará realizando un estudio del estado actual de las velas solares eléctricas, sus posibles aplicaciones y sus ventajas respecto a sistemas cuyo fin es el mismo. Posteriormente, se introducirán aspectos básicos de la representación y la cinemática de la actitud, para luego, basándonos en la literatura de referencia presentar el modelo dinámico del que se ha hecho uso. Además, se reproducirán los resultados obtenidos aplicando la ley de control expuesta en [2] con el objetivo de comprender mejor el comportamiento de las velas solares eléctricas. Asimismo, se propondrá una nueva ley de control basada en el Control LQR con el objetivo de mejorar los resultados anteriormente comentados. Por último, se analizarán los resultados obtenidos en varios casos en los que se han modificado distintos parámetros del sistema, para ver como se comporta la E-sail con la nueva ley de control propuesta.

Abstract

This report will address the issue of attitude control of electric solar sails, a new generation mechanism that uses ions from solar wind plasma and therefore allows to eliminate the mass of propellant necessary to travel through the Solar System.

A study of the current state of electric solar sails, their possible applications and their advantages over systems whose purpose is the same is realised in the first place. Subsequently, basic aspects of the representation and kinematics of attitude are introduced. Then, the dynamic model that has been used and that has been obtained from the reference literature is presented. In addition, the results obtained by applying the control law set out in [2] will be reproduced in order to better understand the behaviour of electric solar sails. Likewise, a new control law based on LQR Control will be proposed with the aim of improving the results mentioned above. Finally, the results obtained in several cases in which different parameters of the system have been modified will be analysed, to see how the E-sail behaves with the proposed new control law.

Índice

<i>Resumen</i>	II
<i>Abstract</i>	III
<i>Notación</i>	VII
<i>Índice de Figuras</i>	1
<i>Índice de Tablas</i>	3
1 Introducción	4
1.1 El concepto de las E-sail	4
1.2 Principio del funcionamiento de las E-sail	4
1.3 Estado actual de las E-sail	5
1.4 Objetivo y alcance del proyecto	6
1.5 Estructura del documento	6
2 Descripción de las E-sail y sus aplicaciones	8
2.1 Principales componentes de las E-sail	8
2.2 Estimación simplificada del empuje	10
2.3 Usos potenciales de las E-sail	12
2.3.1 Definición del incremento de velocidad necesario para la transferencia de órbita	13
2.3.2 Aplicaciones de las E-sail	13
Uso en misiones a planetas próximos a la Tierra y a asteroides	14
Uso en órbitas no keplerianas	14
Uso en misiones próximas al Sol	15
Impulso hacia el exterior del Sistema Solar	15
Uso cómo “data clippers”	15
2.4 Descripción de las distintas aproximaciones del modelo dinámico	15
3 Modelo básico del problema	17
3.1 Sistemas de referencia	17
3.2 Situación de partida	20
3.3 Representación de la actitud	20
3.3.1 Matriz de cosenos directores (DCM)	21
3.3.2 Ángulos de Euler	21
3.3.3 Ángulo y eje de Euler	22
3.3.4 Cuaterniones	23
3.4 Cinemática de la actitud	24
3.4.1 Ecuaciones diferenciales cinemáticas para la DCM	24
3.4.2 Ecuaciones diferenciales cinemáticas para los ángulos de Euler	25
3.4.3 Ecuaciones diferenciales cinemáticas para cuaterniones	25
3.5 Definición de las diferentes fuerzas que intervienen en el problema	26

3.6	Modelo de la deformada del tether	26
3.7	Ecuaciones dinámicas de Euler	27
3.8	Maniobra de control	29
3.8.1	Modelos analíticos de los pares dinámicos	29
	Par de referencia	29
	Par perturbador	31
	Par de control	32
3.8.2	Evoluciones temporales de las componentes del par de fuerzas total	34
3.8.3	Ley de control activo	35
3.8.4	Simulaciones numéricas	36
4	Aplicación del control LQR	41
4.1	Adimensionalización del problema	41
4.1.1	Variables adimensionales	41
4.1.2	Sistema de ecuaciones adimensionalizado	41
4.2	División en fases del problema. Linealización	42
4.2.1	Valores de referencia	42
	Valores de referencia en la fase de regulación	42
	Valores de referencia en la fase de tracking	44
4.2.2	Sistema de ecuaciones adimensional linealizado	46
	Sistema de ecuaciones adimensional linealizado en la fase de regulación	46
	Sistema de ecuaciones adimensional linealizado en la fase de tracking	47
4.3	Control LQR	48
4.3.1	Control LQR de horizonte infinito	48
4.3.2	Control LQR de horizonte finito	49
4.4	Resultados al aplicar el Control LQR	50
4.4.1	Resultados al aplicar el control LQR de horizonte infinito	50
4.4.2	Resultados al aplicar Control LQR de horizonte finito en la fase de tracking y Control LQR de horizonte infinito en la fase de regulación	53
4.5	Posibles extensiones y mejoras a realizar	55
5	Análisis paramétrico de los resultados obtenidos con la ley de control óptimo	61
5.1	Análisis de la influencia del número de tethers	61
5.2	Análisis de la influencia de la actitud final deseada	67
5.3	Análisis de la influencia del tiempo de maniobra	71
6	Conclusiones	78
6.1	Líneas de trabajo futuro	78

Notación

A	Sistema de referencia auxiliar
A_{trans}	Área de la sección transversal de los cables de la malla, [m ²]
A_s	Superficie total de todos los cables, [m ²]
A_{s1}	Superficie de un cable, [m ²]
ACS	Sistema de control de actitud
a	Aceleración, [m/s ²]
a_{\oplus}	Aceleración característica, [m/s ²]
B	Sistema de referencia ejes cuerpo
b_l	Coefficiente adimensional de forma; ver ecuación (3.34)
C	Matriz de cosenos directores
c_k	Parámetro de control; ver ecuación (3.44)
ds	Elemento diferencial de longitud del tether, [m]
E	Campo eléctrico a lo largo del tether, [V/m]
e	Carga de un electrón, [A · s]
$\vec{e}_{B/I}$	Eje de Euler de B respecto a I
$(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$	Componentes del par de fuerzas total sobre la E-sail en ejes B , [N · m]
F	Fuerza ejercida por el viento solar sobre el sistema, [N]
f	Distancia de ds al plano (x_B, y_B) ; ver ecuación (3.33), [m]
G	Constante de gravitación universal, [N m ² /kg ²]
H	Momento angular del vehículo espacial, [kg m ² /s]
I	Sistema de referencia inercial ligado al vehículo
I_e	Intensidad de corriente total de los electrones en la malla, [A]
I_1	Intensidad de corriente en un cable, [A]
I_t	Momento de inercia transversal, [kg m ²]
I_z	Momento de inercia longitudinal, [kg m ²]
(i_A, j_A, k_A)	Vectores unitarios de A
(i_B, j_B, k_B)	Vectores unitarios de B
(i_I, j_I, k_I)	Vectores unitarios de I
j	Densidad de corriente máxima en un cable, [A/m ²]
L	Longitud del tether, [m]
m_p	Masa de propulsante, [kg]
m_p	Masa del protón, [kg]
m_0	Masa seca del vehículo espacial, [kg]
N	Número de tethers
n	Densidad del plasma del viento solar, [m ⁻³]
P	Potencia consumida para la evacuación de electrones, [W]
p_{din}	Presión dinámica del viento sola, [nPa]
RU	Unidad remota
r	Distancia entre el vehículo espacial y el Sol, [m]

\hat{r}	Vector unitario Sol-vehículo espacial
S	Centro de masas del vehículo espacial
t	Tiempo, [s]
\vec{T}_a	Par de referencia (con $T_a \triangleq \ \vec{T}_a\ $), [N · m]
\vec{T}_c	Par de control (con $T_c \triangleq \ \vec{T}_c\ $), [N · m]
\vec{T}_d	Par perturbador (con $T_d \triangleq \ \vec{T}_d\ $), [N · m]
t_f	Tiempo de maniobra, [s]
V	Potencial eléctrico en el tether, [V]
V_w	Potencial eléctrico del viento solar, [V]
ΔV	Impulso en términos de velocidad, [m/s]
v	Velocidad orbital, [m/s]
v_e	Velocidad de escape, [m/s]
v_{vs}	Velocidad del viento solar, [m/s]
x	Distancia de ds al eje de giro de la E-sail, [m]
(X_g, Y_g, Z_g)	Ejes del Sistema de referencia heliocéntrico
(X_0, Y_0, Z_0)	Ejes del Sistema de referencia orbital
(x_A, y_A, z_A)	Ejes de A
(x_B, y_B, z_B)	Ejes de B
(x_I, y_I, z_I)	Ejes de I
α_n	Ángulo de cabeceo; ver ecuación (3.2), [rad]
β	Ángulo entre el plano de control y el eje x_A ; ver ecuación (3.56), [rad]
γ_k	Ángulo entre el k-ésimo tether y el eje x_A ; ver ecuación (3.57), [rad]
δ_n	Ángulo horario; ver ecuación (3.3), [rad]
ϵ_0	Permitividad del vacío, [F/m]
ζ_k	Posición angular del k-ésimo tether, [rad]
λ	Parámetro auxiliar; ver ecuación (3.59)
ρ	Densidad de masa lineal del tether, [kg/m]
σ	Parámetro de diseño; ver ecuación (3.35), [kg/(m · s)]
(ϕ, θ, ψ)	Ángulos de Euler, [rad]
μ	Parámetro gravitacional de las masas combinadas, [N · m ² /kg]
ω	Velocidad de giro de la E-sail, [rad/s]
Ω_A	Velocidad angular de A , [rad/s]
$(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$	Componentes de la velocidad angular del vehículo espacial en B , [rad/s]
Subíndices:	
0	Inicial
f	Final
k	Referido al k-ésimo tether
max	Máximo
min	Mínimo
ref	Referido al valor de referencia
Superíndices:	
.	Derivada con respecto al tiempo
-	Valor deseado
ref	Referido al valor de referencia

Índice de Figuras

1.1	Esquema conceptual del funcionamiento de una E-sail. Extraída de [2]	5
1.2	Satélite ESTCube-1. Extraída de [11]	6
2.1	Componentes de la E-sail. Extraída de [4]	9
2.2	Esquema simplificado de una E-sail. Extraído de [1]	11
2.3	Esquema del modelo de masas puntuales. Extraída de [8]	16
2.4	Esquema del modelo de elementos finitos. Extraída de [9]	16
3.1	Sistema de referencia heliocéntrico junto con el sistema de referencia orbital. Adaptada de [9]	18
3.2	Sistema de referencia ejes cuerpo. Extraída de [2]	18
3.3	Representación gráfica de los ángulos de actitud. Extraída de [2]	19
3.4	Situación de partida. Extraída de [2]	20
3.5	Esquema del modelo de deformada del tether. Extraída de [2]	27
3.6	Evolución temporal que se desea que tenga α_n , definida por la ecuación (3.48)	30
3.7	Evolución temporal que se desea que tenga $\dot{\alpha}_n$, definida por la ecuación (3.49)	30
3.8	Evolución temporal de par de referencia T_a , considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1	31
3.9	Evolución temporal de par perturbador T_d , considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1	32
3.10	Evolución temporal del par de control T_c , considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1	33
3.11	Evolución temporal de la componente \mathcal{E} del momento de fuerzas total considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1	34
3.12	Evolución temporal de la componente \mathcal{F} del momento de fuerzas total considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1	34
3.13	Evolución temporal de la componente \mathcal{G} del momento de fuerzas total considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1	35
3.14	Esquema de la maniobra de actitud con el par de control. Extraída de [2]	36
3.15	Evolución ideal (azul) de α_n junto con la evolución considerando perturbaciones (rojo) de α_n	37
3.16	Evolución temporal de ϕ , θ y ψ para la maniobra correspondiente a $\alpha_{nf} = 5^\circ$	38
3.17	Evolución temporal de las velocidades angulares para la maniobra correspondiente a $\alpha_{nf} = 5^\circ$	39
3.18	Evolución temporal de las variables de control para la maniobra correspondiente a $\alpha_{nf} = 5^\circ$	39
3.19	Evolución de α_n con \mathcal{S} nulo (rojo) y con \mathcal{S} no nulo (azul).	40
4.1	Evolución temporal de α_n aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47)	50
4.2	Evolución temporal de ϕ (azul) y θ (rojo) aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47)	51
4.3	Evolución temporal de ψ aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47)	51
4.4	Evolución temporal de las velocidades angulares aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47)	52
4.5	Evolución temporal de las variables de control aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47)	52

4.6	Evolución temporal de α_n al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación	53
4.7	Evolución temporal de ϕ y θ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación	53
4.8	Evolución temporal de ψ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación	54
4.9	Evolución temporal de las velocidades angulares al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación	55
4.10	Evolución temporal de las variables de control al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación.	55
4.11	Comparativa de las distintas evoluciones que se tienen para diferentes valores de referencia de α_n durante la fase de tracking	56
4.12	Escalón producido en la evolución de las variables de control al pasar de la ley de control (4.52) en régimen transitorio a la ley de control (4.47) en régimen permanente	57
4.13	Evolución temporal de α_n al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden	58
4.14	Evolución temporal de θ y ϕ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden	58
4.15	Evolución temporal de ψ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden	59
4.16	Evolución temporal de las velocidades angulares al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden	59
4.17	Evolución temporal de las variables de control al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden	60
4.18	Evolución de las variables de control en las proximidades de la transición de la ley de control (4.52) en la fase de tracking a la ley de control (4.47) en la fase de regulación	60
5.1	Evolución de α_n variando el número de tethers	62
5.2	Evolución de ϕ y de θ variando el número de tethers	63
5.3	Evolución de ψ variando el número de tethers	64
5.4	Evolución de las velocidades angulares variando el número de tethers	65
5.5	Evolución de las variables de control variando el número de tethers	66
5.6	Evolución de α_n variando el valor de $\bar{\alpha}_{n,f}$	68
5.7	Evolución de ϕ y θ variando el valor de $\bar{\alpha}_{n,f}$	69
5.8	Evolución de ψ variando el valor de $\bar{\alpha}_{n,f}$	70
5.9	Evolución de las velocidades angulares variando el valor de $\bar{\alpha}_{n,f}$	71
5.10	Evolución de las variables de control variando el valor de $\bar{\alpha}_{n,f}$	72
5.11	Evolución de α_n variando el valor de t_f	73
5.12	Evolución de ϕ y θ variando el valor de t_f	74
5.13	Evolución de ψ variando el valor de t_f	75
5.14	Evolución de las velocidades angulares variando el valor de t_f	76
5.15	Evolución de las variables de control variando el valor de t_f	77

Índice de Tablas

2.1	Parámetros de los diferentes subsistemas, con $a_{\oplus} = 1mm/s^2$	10
2.2	Valores de parámetros geométricos y funcionales de una E-sail.	12
3.1	Definición de los valores de los distintos parámetros de la E-sail	29

1 Introducción

1.1 El concepto de las E-sail

La E-sail, es una idea que surge en el año 2004, de la mano del físico espacial, astrobiólogo e inventor finlandés Pekka Janhunen [1]. Esta idea se basa en las velas magnéticas que se encuentran en una magnetosfera artificial y que fueron introducidas por Zubrin y Andrews en 1991, mediante dicha magnetosfera, el viento solar es deflectado y esto permite extraer cantidad de movimiento de él. La adaptación de estas velas magnéticas, hace que surjan las E-sail. Las velas eléctricas (E-sail), consisten en un número de cables conductores de gran longitud (tethers) dispuestos alrededor de un eje de simetría y que están cargados positivamente. Dichos cables de gran longitud son desplegados mediante el giro del vehículo espacial alrededor de su eje de simetría, que permite además que estos cables se mantengan extendidos. Esencialmente, estas velas usan la presión dinámica del viento solar para generar una pequeña, pero continua cantidad de empuje.

La principal causa de por qué esta tecnología es interesante, reside en que permite eliminar la mayor parte de masa de propelente que debe cargar el vehículo espacial para realizar su misión, la que puede suponer una restricción, en cuánto a peso, a la hora de realizar ciertas misiones. Además, la potencia consumida para producir 1 N de empuje es mucho menor que en la mayoría de sistemas de propulsión existentes, cómo se verá más adelante en la sección 2.4.

1.2 Principio del funcionamiento de las E-sail

Las velas solares eléctricas son un nuevo método de propulsión que, usa la presión dinámica del viento solar como fuente de generación de empuje, fundamento por el cual este sistema propulsivo es eficiente desde el punto de vista de consumo de combustible, cómo ya se ha mencionado anteriormente. La base de su funcionamiento, es que las partículas ionizadas del viento solar son repelidas, mediante la Ley de Coulomb, debido a que los tethers que componen la vela están cargados positivamente. Esto modifica las trayectorias de los protones pertenecientes al viento solar, y es dicha modificación en la trayectoria de los protones la que permite la extracción de cantidad de movimiento del viento solar. La ganancia de cantidad de movimiento por parte de los tethers será la empleada para obtener empuje, el cual se transmitirá mecánicamente al vehículo espacial y permitirá el movimiento de este por el Sistema Solar.

Debido a que los tethers se encuentran a una diferencia de potencial positiva, los electrones del plasma del viento solar son atraídos por esa carga positiva, esto provoca que la diferencia de potencial antes mencionada se neutralice. Es por ello, que los electrones que quedan atrapados en los conductores se deben desechar, puesto que penalizan al empuje, magnitud cuya relación con la diferencia de potencial es directa. La eliminación de estos, se lleva a cabo con un cañón de electrones que funciona gracias a unos paneles solares u otros sistemas de generación de potencia eléctrica. En el caso en el que se quiera que la vela eléctrica deje de proporcionar empuje solo bastaría con desactivar el cañón de electrones, de tal forma que la diferencia de potencial en los tethers se neutralizaría [7]. También, se ha analizado que la ausencia de dichos electrones que quedan atrapados hace que el empuje sea cinco veces superior con respecto a la situación en la que sí hay, cómo se trata en la referencia [3]. Además, la diferencia de tensión que se crea en los cables conductores, no solo hace que se genere empuje, sino que también permite controlar la dirección en la que se mueve el vehículo propulsado por la vela solar eléctrica mediante la modulación de la caída de tensión en cada uno de los tethers que la componen.

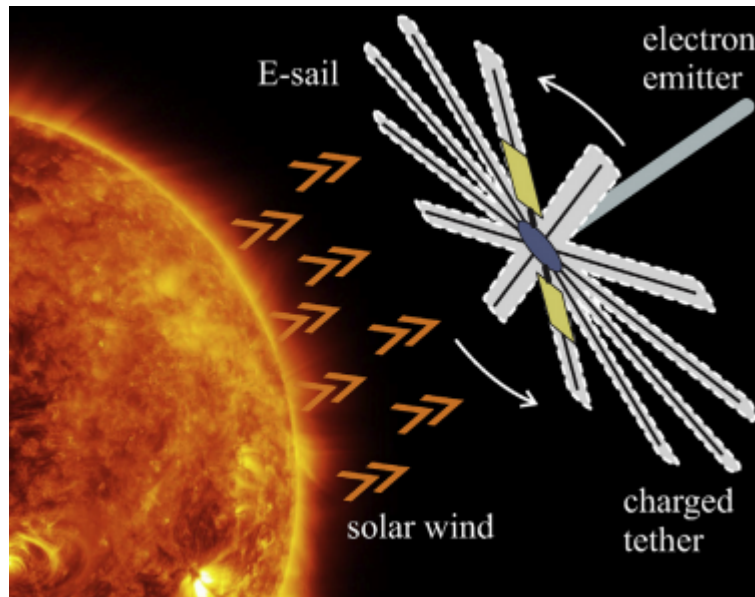


Figura 1.1 Esquema conceptual del funcionamiento de una E-sail. Extraída de [2].

Para que sirva de referencia, a una distancia de 1 AU del Sol, la presión dinámica del viento solar es de 2 nPa. Por lo que si se tiene un vehículo espacial, equipado con este sistema de propulsión, cuya masa sea de 100 kg, con unos 100 tethers de 10 km de longitud cada uno, se puede conseguir que este sufra una aceleración de 1 mm/s^2 aproximadamente y, por tanto, un empuje de 0,1 N, tal y cómo se indica en [7]. Es por ello, que este nuevo sistema de propulsión es tan prometedor para misiones futuras.

En la figura 1.1, extraída de [2], se puede ver un esquema conceptual de este nuevo mecanismo de generación de empuje. En dicha figura se puede ver el cañón de electrones que permite la eliminación de los mismos como se ha dicho antes y el conjunto de cables que conforman la vela solar eléctrica y que se encuentran cargados.

1.3 Estado actual de las E-sail

Las E-sail se trata de una tecnología que ha surgido hace relativamente poco tiempo (2004), es por ello que no se ha usado en demasiadas misiones.

La misión pionera en usar este tipo de tecnología ha sido la ESTCube-1, es por ello, que es en la que nos basaremos para comentar el estado actual de las velas solares eléctricas. Se trata de un proyecto de estudiantes de la Universidad de Taru, Estonia, en colaboración con la Agencia Espacial Europea. El principal fin de dicha misión era el de colocar en órbita el primer satélite que usase una vela solar eléctrica como mecanismo de generación de empuje, y comprobar el funcionamiento de la misma.

El ESTCube-1 se trata de un satélite en forma de cubo de pequeñas dimensiones ($10 \times 10 \times 10 \text{ cm}$) y una masa ligeramente superior a 1 kg. Dicho satélite está conformado por el sistema de potencia eléctrica (EPS), el sistema de comunicación (COM), el sistema de control de datos y comandos (CDHS), el sistema de determinación y control de actitud (ADCS) y la carga asociada a la E-sail. Dicho satélite fue lanzado el 7 de mayo de 2013, y durante su desarrollo, uno de los retos más difíciles de enfrentar fue la integración e instalación de los cables y mazos eléctricos de los que constaba el satélite, debido a su pequeño tamaño.

Con respecto, a la vela solar que lo propulsaba, hay que decir que estaba compuesta por 15 m de cable en total, una fuente de alta tensión al final de cada tether para cargarlo eléctricamente y un tether secundario (se ve en más detalle en la Sección 2.1) que conectaba las fuentes de alta tensión de cada tether principal. El principal problema de la misión fue que al llevar a cabo el despliegue de los tethers, este o fue exitoso dado que se produjo un fallo en las medidas de diagnóstico, la razón exacta de este fallo siguen sin conocerse. Según la referencia [11] uno de las posibles mejoras para las E-sail sería la de instalar sensores que detecten el comportamiento y la situación en cada instante de los distintos componentes de la vela. Lo que nos hace ver que si bien es una tecnología muy prometedora porque permite eliminar la masa de propelente del vehículo espacial, aún no está lo suficientemente madura como para poder implementarla en misiones actuales. A pesar de ello, son muchos los estudios y ensayos en laboratorios lo que se están llevando a cabo para lograr

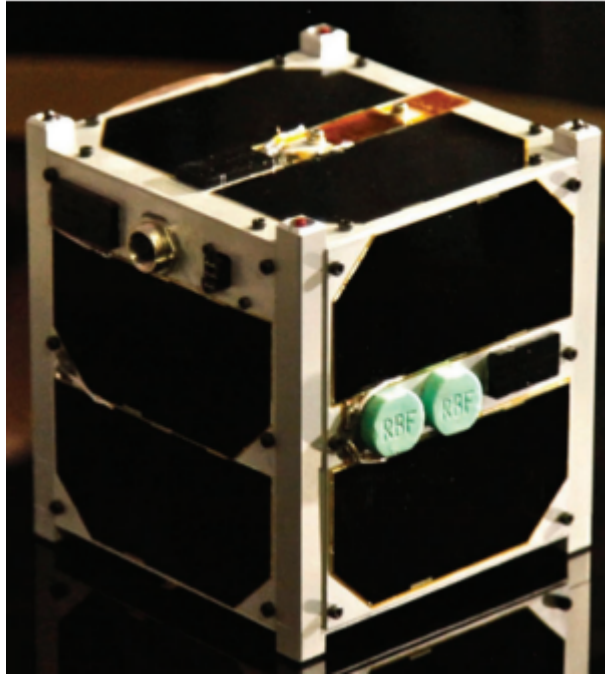


Figura 1.2 Satélite ESTCube-1. Extraída de [11].

solventar los problemas encontrados en cuanto a la complejidad mecánica y estructural del sistema, dado el gran número de cables con los que cuenta la E-sail.

1.4 Objetivo y alcance del proyecto

Una vez definido que son las E-sail y cuál es el mecanismo básico de su funcionamiento, el objetivo de este proyecto es el de modelar una ley de control que permita controlar la actitud de este nuevo método de propulsión mediante la modulación del voltaje al cual están sometidos los tethers. Para ello, se parte de un modelo dinámico obtenido de la literatura que se ha usado de referencia y mediante control LQR se halla esta nueva ley de control que mejore los resultados mostrados en la literatura en la que se basa el modelo dinámico que se ha tomado. Con ello se pretende realizar una maniobra de actitud y posteriormente mantener la actitud alcanzada para una órbita prefijada, sin que se tenga en cuenta el control de la órbita, es por ello que como se verá más adelante el horizonte de tiempo es pequeño. Por último, comentar que para la resolución del problema planteado se despreciarán todas las perturbaciones a las que se encuentran sometidos vela y vehículo y que únicamente se considerará la perturbación provocada por los propios tethers.

1.5 Estructura del documento

Tras presentar cuál es el objetivo que se pretende alcanzar con este proyecto, se prosigue definiendo la estructura, en cuanto a contenido, que seguirá el documento.

En primer lugar, en el Capítulo 2 se hace una descripción de las E-sail y de sus aplicaciones. En este estudio se presentan los principales componentes de una vela solar eléctrica y las posibles misiones a realizar con este mecanismo de propulsión. Asimismo, se muestran los distintos modelos dinámicos que han ido surgiendo a lo largo de estos años y durante el desarrollo del mismo se irán comentando las ventajas e inconvenientes que este sistema presenta con respecto a otros cuyos fines son similares.

Posteriormente, en el Capítulo 3 se muestran los sistemas de referencia de los que se hace uso, así como conceptos básicos pero esenciales para representar la actitud de un vehículo espacial y conocer su cinemática. Además, se presenta el modelo por el que se ha optado a la hora de representar la dinámica del sistema. Dicho modelo incluye las fuerzas que intervienen en el problema, todas las expresiones analíticas de los pares de fuerza que actúan sobre la vela y el modelo de deformada de los cables de la E-sail. Por otro lado, se analizan los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas al aplicar la ley de control propuesta en la referencia [2] para el control de la actitud de una vela solar eléctrica.

Luego en el Capítulo 4, se presenta una nueva ley de control que mejora la propuesta por el artículo que se ha usado como referencia para este proyecto ([2]). Para ello se usa el control LQR como se mencionó en la sección 1.4, pero previamente se llevará un proceso de adimensionalización y de linealización de las variables y ecuaciones que componen el problema.

Por otro lado, en el Capítulo 5 se analizarán una variedad de casos en los que se modifican distintos parámetros del problema para ver como se comportan las leyes de control obtenidas en el Capítulo 4 ante dichas modificaciones.

Por último, en el Capítulo 6 se presentarán las conclusiones obtenidas tras la realización del presente trabajo y posibles líneas de trabajo futuro con las que poder ampliarlo.

2 Descripción de las E-sail y sus aplicaciones

Este capítulo tiene como objetivo mostrar cuál es el estado actual de las E-sail. Para ello, primeramente se definen cuáles son los componentes que constituyen una vela solar eléctrica. Por otro lado, también se realiza un análisis de los órdenes de magnitud, en cuanto a consumo y empuje que se pueden tener en éste nuevo sistema propulsivo. Asimismo, se muestran cuáles pueden ser los campos de aplicación de este novedoso mecanismo de generación de empuje y las consecuencias de su uso. Adicionalmente, se muestra la variedad de modelos dinámicos que han surgido a lo largo de estos últimos años y sus características.

2.1 Principales componentes de las E-sail

Se muestra, de una manera descriptiva, cuáles son los principales subsistemas y componentes necesarios a la hora de integrar la vela solar eléctrica en un vehículo espacial y el impacto que tiene esta sobre dichos subsistemas. Nos centraremos sobre todos en las estimaciones de masa, pues son las que definen las necesidades de empuje para la puesta en órbita del vehículo espacial. Todas las deducciones que aquí se muestran han sido basadas en las que aparecen en [4].

Se muestra en la figura 2.1 un esquema simplificado, a modo descriptivo, de los principales componentes que configuran una E-sail. La imagen ha sido extraída de [4].

Comenzaremos por los tethers principales (main tethers) que se tratan de unos cables de elevada longitud y que están cargados positivamente. Cada uno de ellos está formado por cuatro cables de un material conductor como puede ser el aluminio, donde uno de ellos es recto y es el cable base, mientras que los otros tres son se disponen formando “loops”. Generalmente, sus longitudes son bastante elevadas, siendo 2 km un valor bastante habitual en la longitud de un solo tether. Su masa dependerá linealmente de la longitud que estos tengan, considerando que $\lambda_{tp} = 1,155 \times 10^{-5}$ kg/m es la masa por unidad de longitud del tether principal, se tiene que su masa será $m_{tp} = \lambda_{tp} \cdot L$.

El carrete ensamblador del tether principal (main tether reel assembly) se trata de un mecanismo motorizado que mantiene el tether enrollado en su interior y lo despliega cuando el vehículo espacial se encuentra en órbita.

Por otro lado, el tether auxiliar (auxiliary tether) se usa para conectar las RUs (unidades remotas) con el objetivo de evitar colisiones entre tethers adyacentes. Su longitud es aproximadamente igual a la longitud de una circunferencia de radio L , donde L es la longitud del tether principal. Mientras que su masa se obtendría de manera análoga al caso del tether principal, pero con la longitud y la masa por unidad de longitud correspondientes. Con respecto a dicho componente decir que algunas propuestas lo consideran mientras que otras no. Para el caso que nos ocupa con el fin de simplificar no se ha considerado dicho tether.

Otro elemento a considerar es la unidad remota (RU) ya mencionada, cuya función es la de controlar el giro de la plataforma que componen los tethers. Este componente puede contener impulsores que proporcionen el impulso necesario para producir el giro inicial o para producir giros pequeños durante operaciones en vuelo. Adicionalmente, los tethers necesitarán controladores y cámaras, estas últimas se encuentran dispuestas a lo largo del perímetro del vehículo espacial y su misión es la de localizar la posición de cada RU en el tether principal.

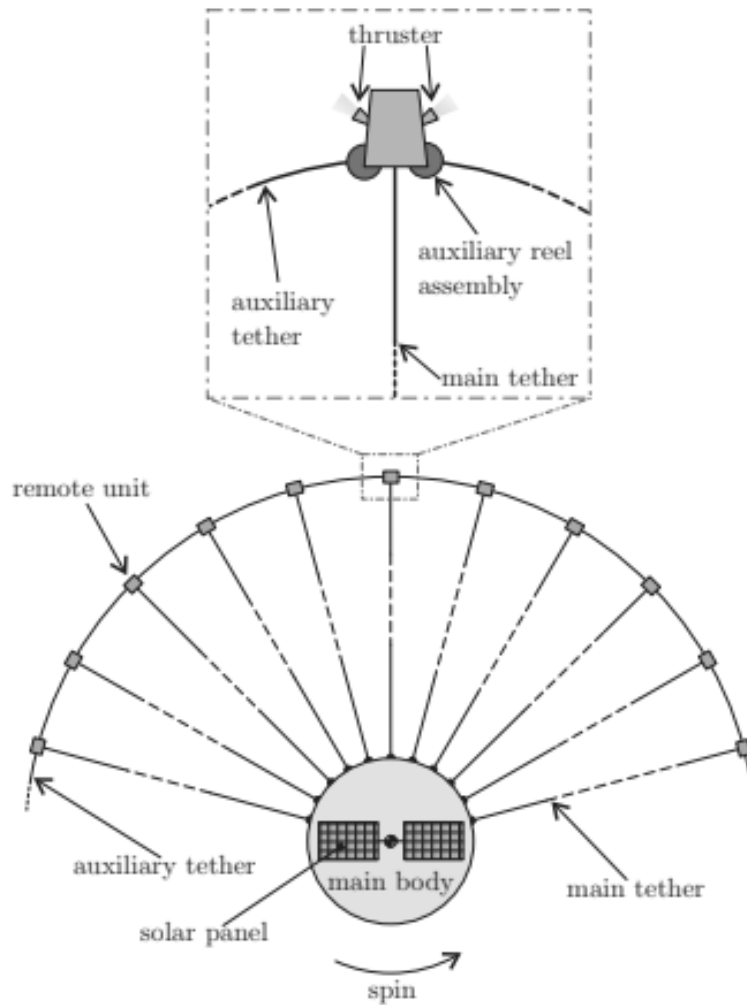


Figura 2.1 Componentes de la E-sail. Extraída de [4].

Cabe hablar también, del subsistema de generación de potencia. Este está formado por paneles solares, que cuentan con sus respectivos mecanismos de despliegues; una unidad encargada de procesar la potencia que produce el voltaje del bus y la gran mayoría de velas incorporan también un paquete de baterías. Su función es la de proveer de potencia suficiente tanto a la carga de pago y al sistema de telemetría, que generalmente estarán compuestos por equipo científico; como a la E-sail, pues la potencia aquí es necesaria para que el cañón de electrones pueda funcionar. En general, unos valores típicos de potencia exigida por estos sistemas suelen ser 1 W/kg para la carga de pago y el sistema de telemetría, más 10 W de potencia base para la E-sail, todo esto referido a distancias entre 0,9 AU y 4 AU. Estos requerimientos de potencia determinarán la masa que tendrá el subsistema.

En general, el sistema de telemetría se considera conjuntamente con la carga de pago, esto es debido a que cada instrumento científico genera datos que deben ser transmitidos por el sistema de telemetría. Además, las E-sail requieren de un sistema de actitud (ACS) cuyo objetivo es apuntar el eje de giro hacia el Sol, iniciando así el movimiento de giro al inicio necesario para el despliegue de la E-sail. Aunque la mayor parte de la cantidad de movimiento al inicio es suministrada por los impulsores de las RUs, una pequeña parte es proporcionada por el ACS gracias a que este orienta el eje de giro adecuadamente.

En la tabla 2.1 se muestran las estimaciones de las masas de los distintos subsistemas y algunos parámetros de interés, para una aceleración característica (a_{\oplus} , que es la aceleración máxima propulsiva que se tiene a la distancia de referencia, r_{\oplus}) de 1 mm/s².

Con esta tabla, se hace ver cuáles son los órdenes de magnitud con los que se trabaja y cuáles serán los requerimientos de empuje que la E-sail deberá satisfacer para poder propulsar el vehículo espacial y todos los subsistemas que lo componen. Estos resultados no son sencillos de obtener, pues hay que tener en cuenta

la integración entre los distintos subsistemas que componen el vehículo y las implicaciones que esto conlleva a la hora de diseñarlos, ya que cada subsistema impone unos requisitos sobre los demás.

Tabla 2.1 Parámetros de los diferentes subsistemas, con $a_{\oplus} = 1mm/s^2$.

Carga de pago (kg)	100	200	300
Número de tethers (N)	44	62	86
Longitud del tether L (km)	15,3	19,4	20
Empuje E-sail a 1 AU (N)	0,39	0,70	1,00
Potencia E-sail (W)	409	720	1026
Potencia con carga de pago no operando (W)	12,5	25,0	37,5
Potencia con carga de pago operando (W)	125	250	375
Masa tethers principales (kg)	7,79	13,9	19,8
Masa carrete tether principal (kg)	9,21	14,8	20,8
Masa cañón de electrones (kg)	1,20	2,13	3,05
Masa cámaras y computador (kg)	1,48	1,48	1,48
Masa RUs (kg)	43,1	59,3	77,6
Masa tether aux. (kg)	26,1	32,9	34,0
Masa sist. de Potencia (kg)	32,0	61,6	91,3
Masa sist. de Telemetría (kg)	25,0	50,0	75,0
Masa ACS (kg)	13,8	24,7	35,3
Masa estructura (kg)	65,2	116	166
Masa total sin E-sail (kg)	248	490	732
Masa efectiva E-sail (kg)	143	206	264
Masa Total (kg)	391	696	996

2.2 Estimación simplificada del empuje

En esta sección se muestra a efectos descriptivos los órdenes de magnitud de los principales parámetros que podemos encontrar en una E-sail. Para ello, se considerará un modelo muy simple consistente en una malla compuesta de cables conductores, que representan a los tethers, tal y como se ha hecho en [1], referencia en la que se basan todas las deducciones que aquí se muestran. Dicha malla se dispone de tal forma que el viento solar la atraviesa, como se muestra en la figura

Asumiendo que $r = 5 \times 10^{-6}$ m, el área de la sección transversal de los cables que componen la malla será,

$$A_{trans} = \pi r^2 \quad (2.1)$$

Teniendo en cuenta que la malla es cuadrada para simplificar cálculos y que el espacio entre cables es Δx , el número total de cables será

$$N = L / \Delta x \quad (2.2)$$

donde L es la longitud lateral de la malla, suponiendo unos valores de $L = 35$ km y de $\Delta x = 5$ km se obtiene que la longitud total de cable en la estructura es

$$2NL = 2L^2 / \Delta x = 490 \text{ km} \quad (2.3)$$

y su masa será

$$m = 2L^2 A \rho / \Delta x = 342,512 \text{ kg} \quad (2.4)$$

donde se ha asumido que la densidad del material de los alambres conductores es $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$. Una vez calculados estos parámetros básicos, se procede a calcular la fuerza que actúa sobre la malla, esta fuerza vendrá dada por la presión dinámica que el viento solar ejerce sobre la estructura,

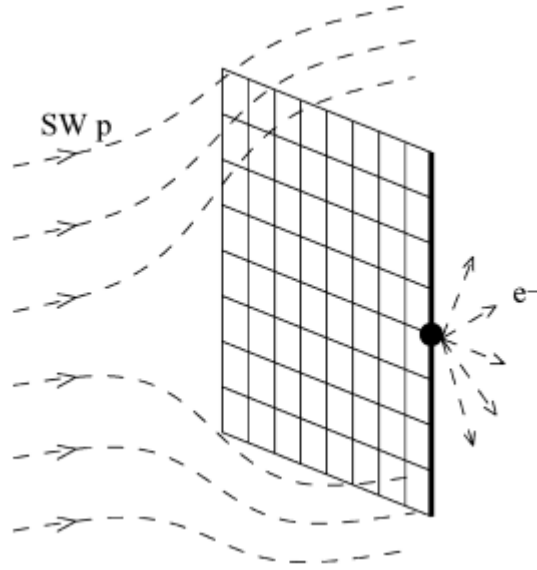


Figura 2.2 Esquema simplificado de una E-sail. Extraído de [1].

$$p_{din} = \rho_{vs} v^2 \quad (2.5)$$

siendo $\rho_{vs} = n \cdot m_p$ la densidad del viento solar que viene dada por el producto entre la densidad de iones del viento solar (n [m^{-3}]) y la masa del protón (m_p [kg]), mientras que $v_{vs} = 400$ km/s, es la velocidad del viento solar que se supone constante. Todos estos datos se han obtenido asumiendo una distancia de 1 AU. Con todo esto obtenemos que $p_{din} = 2\text{nPa}$. Así, se obtiene un valor de

$$F = p_{din} L^2 = 2,45 \text{ N} \quad (2.6)$$

Aunque, el empuje que proporcionan las E-sail pueda parecer pequeño, debido a que el peso de los tethers por unidad de longitud es muy pequeño, se pueden conseguir velocidades del orden de los 50 km/s según se indica en [6], valor que es mucho mayor que las velocidades que se alcanzan en un cohete de combustible sólido (~ 1 km/s) o en un cohete bipropelente (~ 5 km/s). Además, una de las ventajas que tienen las E-sail con respecto a las velas solares convencionales es que en el caso de las primeras el empuje es inversamente proporcional a la distancia que separa el Sol del vehículo espacial, mientras que en las segundas el empuje es inversamente proporcional al cuadrado de la la distancia que separa el Sol del vehículo espacial, como se indica en [3]. Es por tanto, que con las E-sail se pueden realizar misiones más lejanas. Esta diferencia, en la relación entre el empuje y la distancia al Sol en velas eléctricas y convencionales, se debe a que en ambos casos al alejarnos del Sol se produce un aumento de la longitud de Debye, que se trata de la escala a través de la cual los electrones móviles generan un apantallamiento del campo eléctrico en los conductores, de tal forma que el potencial eléctrico disminuye y por tanto el empuje. Sin embargo, en las E-sail esta disminución se ve contrarrestada porque a medida que aumenta la distancia entre el vehículo y el Sol, el área efectiva de la E-sail aumenta de tamaño también y por tanto, se produce un crecimiento del diámetro del campo eléctrico y como consecuencia de ello, del empuje como se indica en [12].

Se procede ahora a ver cuál es la potencia consumida para evacuar los electrones del plasma del viento solar fuera de los cables de la malla, para ello se tiene que

$$I_e = e n v_e A_s = 17,7 \text{ mA} \quad (2.7)$$

siendo e la carga que posee un electrón, mientras que

$$A_s = (2N) 2\pi r L = 15393,8 \text{ m}^2 \quad (2.8)$$

es el área total de todos los cables conductores y $v_e = 10^6$ m/s es la velocidad de los electrones del viento solar. Tomando como valor de voltaje uno razonable, por ejemplo $V = 6$ kV, se tiene que

$$P = V I_e = 106,2 \text{ W} \quad (2.9)$$

A continuación, se estimará el orden de magnitud de la potencia consumida por los cables conductores de la vela solar eléctrica, que será la potencia que consuma la malla, y, por tanto, la necesaria para proporcionar empuje. Para ello, nos basaremos en la información que viene recogida en [1]. La corriente de electrones que circulará por un cable será

$$I_1 = env_e A_{s1} = 1,28 \mu\text{A} \quad (2.10)$$

La densidad de corriente de un solo conductor será

$$j = I_1/A = 16297,47 \text{ A/m}^2 \quad (2.11)$$

con estos resultados ya se puede determinar cuál es el campo eléctrico generado por la circulación de electrones en uno de los cables

$$E = j/\sigma = 2,72 \times 10^{-4} \text{ V/m} \quad (2.12)$$

donde $\sigma = 6 \times 10^7 \Omega/\text{m}$ es la conductividad del cable. Esto último, permite determinar la caída de tensión en el cable conductor

$$\Delta V = EL = 9,51 \text{ V} \quad (2.13)$$

Por tanto, la potencia consumida por el tether será

$$I_1 V = 12,17 \mu\text{W} \quad (2.14)$$

La potencia consumida por la totalidad de conductores será entonces

$$2NI_1 V = 0,9 \text{ W} \quad (2.15)$$

cómo se ve esta cantidad es irrisoria con respecto a la mínima potencia necesaria para producir un 1 N de empuje en un propulsor iónico, siendo esta de 25 W. Sin embargo, con ambas tecnologías se obtienen velocidades del mismo orden de magnitud.

Por otro lado, se presenta una tabla extraída de [1], en la que se muestran, para varias configuraciones los siguientes valores: la masa del mallado de cables, la longitud de la malla, el diámetro del cable, la aceleración obtenida bajo condiciones nominales del viento solar a 1 AU, la potencia total consumida y la fracción de potencia consumida por la distribución de cables del mallado con respecto a la potencia total consumida.

Tabla 2.2 Valores de parámetros geométricos y funcionales de una E-sail..

L [km]	2r [μm]	m [kg]	a [m/s^2]	P [W]	P_{cable}/P , %
30	5,000	63	0,027	40	0,110
60	2,500	63	0,110	80	1
200	2,500	700	0,110	1000	10

En general, el empuje proporcionado por una vela eléctrica suele rondar los 50-100 nN/m y depende de las condiciones del viento solar y del potencial al que esté sometido el tether, según predicciones teóricas obtenidas mediante simulaciones [7]. A primera vista este valor puede ser pequeño, pero hay que tener en cuenta que el peso de los tethers es también considerablemente pequeño, como se muestra en la tabla 2.1.

2.3 Usos potenciales de las E-sail

En este apartado se hace ver cuál es el potencial de las velas solares eléctricas para misiones espaciales en el sistema solar, para ello se hará uso de los razonamientos que se muestran en la referencia [3]. Algunas aplicaciones pueden ser: vuelos de reconocimiento en planetas próximos a la Tierra y a asteroides, misiones basadas en órbitas no keplerianas, misiones fuera del Sistema Solar, sondas de impacto de bajo coste para añadir valor científico a otras misiones y otras muchas más aplicaciones de interés. La principal causa por la que este nuevo método de generación de empuje puede ser tan potencialmente eficiente es porque no es necesaria ninguna masa de combustible para viajar grandes distancias, cómo se ha comentado ya en alguna

ocasión. Es esta ventaja la que hace que su uso pueda ser muy beneficioso para misiones interplanetarias o de cualquier otra índole.

Dada la larga lista de aplicaciones que pueden tener las E-sail, aquí se hace una categorización en cinco grupos principales, basándonos en la clasificación que aparece en [3]: asteroides y planetas próximos a la Tierra, órbitas no keplerianas (por ejemplo: Monitorización del viento solar en los puntos de Lagrange), misiones cercanas al Sol, impulso unidireccional al exterior del Sistema Solar y aplicaciones de “data clippers” que transportan datos como carga útil y usan recursos in situ.

Antes de comenzar a describir las distintas misiones comentadas anteriormente, se exponen los métodos matemáticos utilizados para poder comparar las distintas alternativas. Esta comparación se realiza mediante el valor de Δv que representa el impulso, en términos de velocidad, que se le debe proporcionar al vehículo para que este modifique su órbita y pueda realizar la misión para la que es requerido. Se toma dicho parámetro dado que está directamente relacionado con el consumo de combustible, mediante la expresión:

$$\Delta v = v_e \cdot \ln\left(\frac{m_0 + m_p}{m_0}\right) \quad (2.16)$$

En la expresión (2.16), v_e representa la velocidad específica de escape del propulsante, m_0 es la masa seca del vehículo espacial (sin propulsante) y m_p es la masa de propulsante.

2.3.1 Definición del incremento de velocidad necesario para la transferencia de órbita

El presente apartado tiene como objetivo mostrar las ecuaciones matemáticas que se usarán a lo largo del desarrollo para determinar el impulso que permite al vehículo espacial realizar la misión, y por tanto, la masa de combustible necesaria para ello. Esto se hace, porque más adelante se compara, en términos de Δv los resultados obtenidos al realizar las distintas misiones con una E-sail o mediante una transferencia de Hohmann. Cabe resaltar además, que únicamente se consideran órbitas circulares y coplanarias. En primer lugar, de la ecuación de las Fuerzas Vivas (forma arcaica de denominar a la energía cinética, [5]), obtenemos que:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \quad (2.17)$$

Esta ecuación, permite calcular la velocidad orbital v a una distancia r que es la distancia instantánea medida desde el foco de la cónica donde se encuentra el cuerpo masivo. Por otro lado, $\mu = G(m_1 + m_2)$ es el Parámetro Gravitacional de las Masas Combinadas, siendo G la constante de gravedad de Newton y, m_1 y m_2 las masas de los cuerpos en el Problema de los dos cuerpos. Por último, a es la semi-suma del radio de perigeo y del radio de apogeo. Nomenclatura que ha sido tomada de [5].

En el caso en el que se quiera que el vehículo escape de la influencia del planeta sobre el que está orbitando, este deberá hacerlo con la velocidad de escape, definida por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (2.18)$$

Deducida al hacer tender a a ∞ , en la ecuación 2.17, tal y como se indica en [3].

Si consideramos la ecuación de conservación de la energía, cuya expresión viene dada por la ecuación 2.19

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(v_e + \Delta v)^2 - \frac{\mu}{r} \quad (2.19)$$

Operando con las ecuaciones 2.18 y 2.19, se llega a que:

$$\Delta v = \sqrt{v^2 + v_e^2} - v_e \quad (2.20)$$

Ecuación que nos proporciona el parámetro deseado (Δv), y que sirve para comparar los distintos sistemas propulsivos más adelante.

2.3.2 Aplicaciones de las E-sail

Este nuevo método propulsivo puede proporcionar empuje en casi todo el Sistema Solar. La única restricción que se considera por razones de inestabilidad mecánica es que α_n (ángulo de inclinación de la vela solar, definido en sección 3.1) no debe ser superior a 30° (aunque no se sabe exactamente con certeza este valor máximo). Por otro lado, el empuje proporcionado por una E-sail es inversamente proporcional a r , es

decir, que el empuje varía como $1/r$, donde r es la distancia al Sol. Esto puede parecer a primera vista una restricción, sin embargo, este efecto se puede suavizar si se controla el voltaje del cañón de electrones durante el vuelo, de tal forma que se proporcione el mayor empuje con la potencia eléctrica disponible, haciendo que el empuje sea menos variable que la presión dinámica del viento solar, y por tanto, consiguiéndose una navegación más precisa. Además de las restricciones ya mencionadas, en cuanto al uso de las E-sail, cabría también mencionar que las velas solares eléctricas no son capaces de generar una cantidad considerable de empuje dentro de la magnetosfera de los planetas, ya que aquí apenas hay viento solar, lo cual supone una nueva restricción.

Una vez dicho esto, se procede a analizar las diferentes misiones posibles.

Uso en misiones a planetas próximos a la Tierra y a asteroides

En primer lugar, se considera el planeta Venus. Dicho planeta es el más próximo a la Tierra y en consecuencia, el de más fácil acceso desde el punto de vista del Δv a aplicar. Estudios ([3]) han demostrado que las E-sail, pueden proporcionar el Δv necesario (entre 0,7 km/s y 3,3 km/s, dependiendo de la órbita de destino) para colocar al vehículo espacial en una órbita venusiana en aproximadamente el mismo tiempo que requeriría una transferencia de Hohmann, pero con la ventaja de no usar combustible y el ahorro de peso que esto conllevaría.

En segundo lugar, si se considera una transferencia a una órbita baja en Marte, empleando una vela solar eléctrica, podemos ahorrarnos un impulso de 1,1 km/s y una maniobra de “aerobraking”. Adicionalmente, en misiones de retorno a la Tierra desde Fobos (luna de Marte), la utilización de una vela solar eléctrica puede suponer un ahorro de 3,8 km/s y hacer que la reentrada en la Tierra sea más suave. Por otro lado, comparando las E-sail con la propulsión eléctrica, se puede llegar a la conclusión de que las primeras pueden producir el mismo empuje que un propulsor eléctrico o incluso mayor, sin la necesidad de incluir un propelente y necesitando solo una cantidad razonable de potencia eléctrica. Además, puede ofrecer un mayor Δv sin aumentar la masa inicial con la que se parte. Aunque, hay que decir que la operatividad de las E-sail aún no han sido analizadas con detalle en las proximidades de Marte y la estela de plasma generada por el planeta puede modificar el efecto que este tiene sobre la E-sail en la parte opuesta al Sol.

Para concluir con los planetas cercanos a la Tierra, analizaremos cómo influye el uso de las E-sail en una transferencia a Mercurio. Se parte de la idea de que llegar a Mercurio es complicado debido a que se encuentra muy próximo al Sol y, por tanto, cualquier sonda que se encuentre en sus proximidades se verá muy afectada por el fuerte campo gravitatorio que posee el Sol. Dicho esto, si comparamos el tiempo de transferencia de la BepiColombo, misión lanzada en 2018, que usa propulsión química e iónica, con el tiempo que llevaría la misma transferencia, pero usando como sistema de propulsión una vela solar eléctrica, este es seis veces inferior. Aunque, en este tipo de misiones tan próximas al Sol, los materiales que componen los tethers (generalmente aluminio) pueden no ser tolerantes a las altas temperaturas a las que son sometidos, es por ello que será necesaria la adición de un sistema de refrigeración, que adecue la temperatura de estos cables.

Centrémonos ahora en misiones cuyo objetivo son los asteroides. Actualmente, hay muchos estudios donde se están analizando cómo utilizar las E-sail a la hora de interceptar asteroides que sean potencialmente peligrosos para la vida en la Tierra, o que tengan relevancia desde el punto de vista científico, por lo que es una tecnología en auge. La principal ventaja que ofrecen las velas eléctricas, es que son capaces realizar misiones de sobrevuelo o de rendezvous a multitud de asteroides, con fines científicos, sin limitación de propelente, pues no lo incorporan, siendo, por tanto, la durabilidad de la vida del equipo el único factor limitante. Además, otra aplicación importante que puede tener este nuevo modo de propulsión es la de modificar la trayectoria de asteroides que puedan impactar potencialmente con la Tierra, ya que pueden ser capaces de desplazar 150 m la trayectoria de un asteroide en un periodo de 7 años, aplicando únicamente una fuerza de 1 N.

Uso en órbitas no keplerianas

Su uso en este campo de aplicación se basa en mantener a la sonda en una órbita no kepleriana pues esta es inestable de forma inherente, ya que los puntos en torno a los que se encuentra, lo son por naturaleza. Un ejemplo de este tipo de órbitas podrían ser las órbitas Halo que se encuentra en torno al punto de Lagrange L_1 . La utilización de esta nueva tecnología en este campo puede ser muy interesante, ya que los vehículos que se encuentran en órbitas de este tipo tienen vida limitada, dado que al ser órbitas inestables es necesario estar constantemente empleando combustible para evitar que se alejen de ellas.

En la actualidad se están investigando un número abundante de órbitas no keplerianas en torno a la Tierra, las cuales se podrían adaptar al uso de las E-sail, que generalmente proporcionarían más empuje que otros

métodos propulsivos, pero con la principal limitación de que las velas solares eléctricas serán incapaces de proporcionar empuje dentro de la magnetosfera donde hay ausencia de viento solar, puesto que esta actúa como un escudo protector antes partículas de alta energía procedentes del Sol, como se mencionó al inicio del presente apartado.

Otro ejemplo de aplicación en este campo, sería el poder estudiar las auroras y los cambios que el viento solar provoca en ellas, en planetas jovianos, como puede ser Júpiter, ya que las velas solares eléctricas permiten a un vehículo espacial situarse por encima del punto L_1 del sistema Sol-Júpiter, donde hay presencia de viento solar, y ver continuamente el polo norte del planeta en cuestión. Mientras que la forma tradicional de realizar estas misiones era empleando varios vehículos, de los que un grupo se dedicaba a medir el viento solar y otros monitorizaban continuamente las auroras. Además, estos vehículos debían soportar la radiación intensa de los cinturones de radiación jovianos.

Otra aplicación puede ser la de monitorizar el viento solar fuera de los puntos de Lagrange. La principal razón de usar las E-sail en este ámbito, es que pueden producir empuje de manera continua sin consumir propelente, pero con la desventaja de que los tethers perturban la medición del plasma solar, por lo que hay que introducir nuevos sistemas de medición.

Uso en misiones próximas al Sol

En general, las misiones consistentes en llevar un vehículo espacial a las proximidades del Sol son muy costosas en términos de Δv que pueden llegar a alcanzar valores de ~ 15 km/s (dependiendo del tipo de órbita objetivo). Sin embargo, como se ha visto anteriormente, en una E-sail el empuje es inversamente proporcional a la distancia al Sol, por lo que en una misión en la que dicha distancia se reduce provocará que el empuje que pueda suministrar la vela eléctrica sea mayor al que se tiene a 1 AU de distancia. A cambio, el consumo energético del cañón de electrones se incrementa (aumenta como $1/\sqrt{r}$), de la misma forma que el flujo de radiación solar en los paneles solares, que se degradan al estar sometidos a tan elevadas temperaturas. Por lo que, introducir las E-sail en este tipo de aplicaciones puede suponer un reto tecnológico.

Impulso hacia el exterior del Sistema Solar

De manera general, el límite de operación de las E-sail, considerando su distancia al Sol, está entre 0,9-4 AU debido a razones de diseño del prototipo de hardware. Sin embargo, este límite se puede extender a 0,9-8 AU sin necesidad de realizar demasiadas modificaciones en las especificaciones de los componentes y manteniendo el Sol como fuente de potencia, siempre y cuando la masa a transportar, no sea demasiado pesada para la vela eléctrica (1-1,5 toneladas), como se indica en la referencia [3]. Además, en el caso en el que la carga de pago necesitase otra fuente de potencia, como puede ser la energía nuclear, también puede ser aprovechada para mejorar la actuación de la vela eléctrica. Otra alternativa que ofrece este sistema de propulsión, es la de aumentar el número de posibles ventanas de lanzamiento, por lo que se podrían ejecutar ciertas misiones con mayor frecuencia.

Uso como "data clippers"

El concepto "data clippers" hace referencia a vehículos espaciales cuya labor es la de aproximarse a la Tierra, llevando consigo un gran volumen de datos científicos de alta resolución almacenados en su memoria. Una vez en las proximidades de la Tierra, estos datos pueden ser descargados mediante antenas terrestres. Este tipo de misiones pueden usar las E-sail como mecanismo de propulsión, disminuyendo así el coste de las mismas, ya que, el viaje hacia el cuerpo objeto de estudio se puede realizar sin consumir propelente.

2.4 Descripción de las distintas aproximaciones del modelo dinámico

A lo largo de los años que lleva desarrollándose esta tecnología, son multitud de modelos dinámicos los que han surgido gracias a la contribución de diferentes autores. El presente apartado tiene como objetivo describir de manera breve algunos de los modelos dinámicos actuales, a modo de introducción, pues más tarde se entrará en más detalle en el modelo concreto que se ha seleccionado para el presente proyecto.

- **Masas puntuales:** algunos de los modelos dinámicos anteriormente mencionados como [8], representan a los tethers de la vela solar eléctrica a través de masas puntuales que se encuentran situadas en su raíz (parte donde el tether se conecta al cuerpo central que gira) y en su extremo final, donde se une al tether auxiliar y a la RU. Además, los nexos de unión entre estas masas se pueden representar mediante un muelle y un amortiguador, ambos sin masas, como elementos que aportan rigidez y amortiguamiento respectivamente al sistema. Como se indica en la referencia anterior, la ventaja que

muestra dicho modelo con respecto a un modelo elástico multipunto, es que es mucho más sencillo y lo suficientemente preciso para describir el movimiento del tether cuando la velocidad de giro de este alcanza su límite inferior.

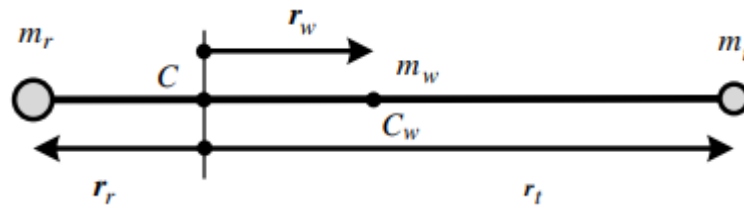


Figura 2.3 Esquema del modelo de masas puntuales. Extraída de [8].

En la figura 2.3, m_r y m_t representan a las masas puntuales que se colocan en la raíz y en la punta del cable respectivamente, C es el centro de masas del sistema, mientras que C_w es el centro de masas del cable.

- **Deformada supuesta:** otros autores representan la deformada de los tethers mediante una función logarítmica [2]. La idea de este modelo radica en que debido al efecto combinado que producen la fuerza centrífuga y la presión dinámica del viento solar, el tether sufre un doblamiento y su deformada se asemeja al arco que se obtiene al graficar una función logarítmica. Por lo que al usar este modelo, se tiene una expresión analítica de la deformada del tether que puede llegar a representar fielmente la realidad, siempre y cuando dicha expresión se tome de manera consecuente, según se indica en [2]. Este modelo se verá más en detalle en la Sección 3.6.
- **Elementos finitos:** por último, hay autores que modelan los tethers mediante elementos finitos dada la complejidad de modelar estos elementos mediante la teoría elástica catenaria, pues solo tiene solución analítica en ciertos casos, como bien se indica en [9]. Este modelo consiste en discretizar el tether en un número finito de elementos, obtener la deformada de cada elemento diferencial y con ello obtener la solución de deformada del tether como elemento continuo. La ventaja de usar este modelo con respecto al anterior es que, este último puede admitir geometrías más complejas y permite introducir propiedades diferentes a lo largo de la longitud del tether.

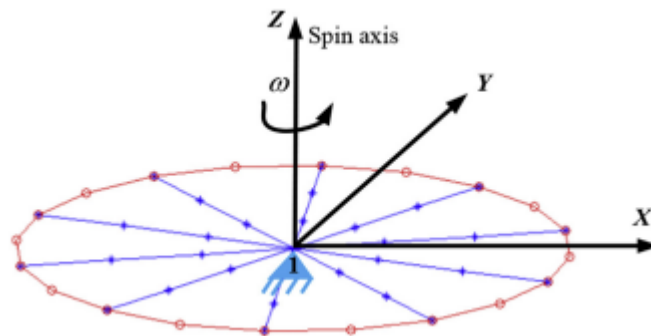


Figura 2.4 Esquema del modelo de elementos finitos. Extraída de [9].

3 Modelo básico del problema

El presente capítulo tiene como objetivo presentar el modelo del que se hará uso para alcanzar el propósito del proyecto, el control de la actitud de una E-sail. Pero para ello, previamente se repasarán conceptos básicos, que se consideran esenciales y sin los cuales no se podría avanzar. Primeramente, en la Sección 3.1 se presentarán los sistemas de referencia que definirán el modelo y que se emplearán a lo largo del proyecto. Posteriormente, se abordarán aspectos básicos tanto de la representación de la actitud como de su cinemática en las Secciones 3.3 y 3.4, debido a que el control de actitud es el tema principal que nos atañe, por lo que es muy importante tener claro los conceptos que aquí se muestran. Más adelante, en la Sección 3.6 se modelará la deformada del cable, y además, en la Sección 3.8.1 se presentarán las expresiones analíticas de los pares dinámicos que intervienen en el problema y que permitirán modelar la dinámica de este. Por otro lado, se mostrarán las ecuaciones de Euler que describen el movimiento de un sólido que rota con un punto fijo, pues son las que definen la dinámica del sistema. Y por último, se mostrarán las simulaciones numéricas obtenidas al integrar conjuntamente las ecuaciones cinemáticas diferenciales que describen la actitud junto con las ecuaciones dinámicas de Euler. Todo esto se hará basándonos en las deducciones y formulaciones que se muestran en [2] y en [10].

3.1 Sistemas de referencia

Los sistemas de referencia usados son: el Heliocéntrico, el orbital, el de ejes cuerpo, un sistema de referencia inercial ligado al cuerpo y otro auxiliar. Estos sistemas de referencia son los que permitirán el modelado del problema. A continuación se definen cada uno de ellos:

- **Sistema de referencia heliocéntrico:** Se trata de un sistema de referencia inercial cuyo origen se encuentra en el Sol y su plano (x_G, y_G) , coincide con el plano de la eclíptica. La dirección x_G , está determinada desde la Tierra hacia al Sol en el equinoccio vernal, que también recibe el nombre de Primer Punto de Aries (Υ), tal y como se define en [5]. Mientras que el eje z_G tiene la dirección de la normal al plano de la eclíptica. El eje y_G completaría el triedro a derechas.
- **Sistema de referencia orbital:** Este sistema de referencia vendrá denotado por $(O_O; x_O, y_O, z_O)$, donde O_O representa el origen del sistema de referencia que se encontrará en el centro de masas del vehículo espacial. Por otro lado, el eje z_O positivo se corresponderá con aquel que parte del centro de masas del vehículo espacial y apunta hacia el exterior del Sistema Solar, siendo su dirección la definida por el segmento que une al Sol con centro de masas del vehículo, el eje y_O positivo es aquel que tiene la dirección contraria al momento específico de la órbita siendo tangente en todo momento a la trayectoria de la misma, y el eje x_O positivo es perpendicular a los ejes z_G y z_O completando el triedro mediante la regla de la mano derecha.

En la figura 3.1, adaptada de [9], se muestra conjuntamente un esquema del sistema de referencia heliocéntrico junto con uno del sistema de referencia orbital.

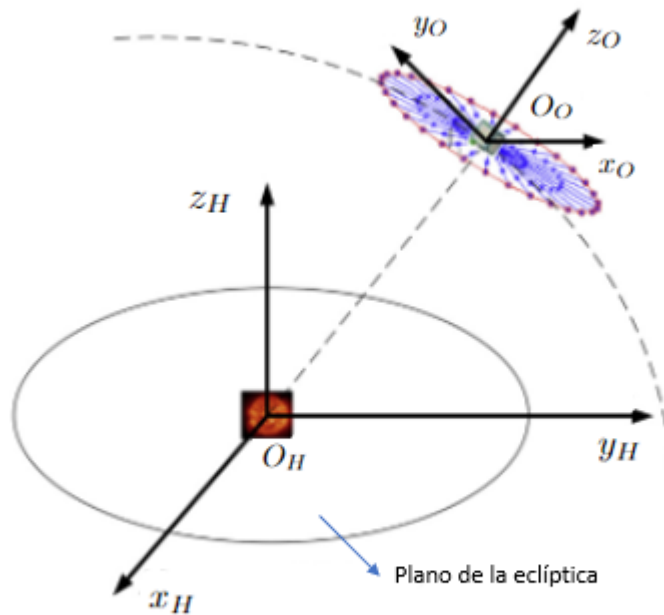


Figura 3.1 Sistema de referencia heliocéntrico junto con el sistema de referencia orbital. Adaptada de [9].

- Sistema de referencia ejes cuerpo:** Se trata de un sistema de referencia ligado al cuerpo principal del vehículo espacial y que se mueve solidariamente con él. Este sistema está definido por $B(S; x_B, y_B, z_B)$, cuyos vectores unitarios son $(\hat{i}_B, \hat{j}_B, \hat{k}_B)$, donde \hat{k}_B se encuentra alineado con el eje de simetría de del vehículo espacial, mientras que los vectores (\hat{i}_B, \hat{j}_B) , definen el plano nominal de la vela, como se ve en la figura 3.2, obtenida de [2]. Además, S que es el origen del sistema de referencia, se encuentra en el centro de masas del vehículo espacial.

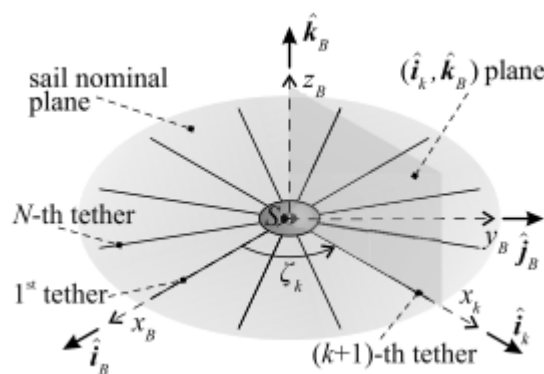


Figura 3.2 Sistema de referencia ejes cuerpo. Extraída de [2].

La vela eléctrica consistirá en un número de cables (tethers), cada uno de ellos denotado por el subíndice k , con $k \in [0, 1, 2, \dots, N - 1]$. La posición de cada tether en el plano (x_B, y_B) viene definida por el ángulo de azimut que comienza a medirse desde el eje x_B en sentido antihorario. Este ángulo se define como:

$$\zeta_k \triangleq \left(\frac{2\pi}{N} \right) k \quad (3.1)$$

Por otro lado, la orientación del vehículo espacial viene definida por $[\alpha_n, \delta_n]$. Donde $\alpha_n \in [0, \pi/2]$ es el ángulo de inclinación (pitch angle), siendo este el ángulo entre \hat{r} y el eje z_B , definiéndose \hat{r} como el vector unitario que determina la dirección Sol-vehículo y que coincide aproximadamente con la dirección del viento solar. Mientras que $\delta_n \in [0, 2\pi)$, es el ángulo horario, siendo este el formado por la proyección de \hat{r} sobre el plano nominal de la vela y el eje x_B . Basándonos en las anteriores definiciones de ambos ángulos, las expresiones que los determinan serán las mostradas en (3.2) y (3.3).

$$\alpha_n \triangleq \arccos(\hat{r} \cdot \hat{k}_B) \quad (3.2)$$

$$\delta_n \triangleq \begin{cases} \arccos\left(\frac{\hat{r} \cdot \hat{j}_B}{\|\hat{r}\|} \right) & \text{si } (\hat{r} \cdot \hat{j}_B) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\hat{r} \cdot \hat{j}_B}{\|\hat{r}\|} \right) & \text{si } (\hat{r} \cdot \hat{j}_B) < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Estas relaciones trigonométricas se pueden obtener fácilmente de la figura 3.3, extraída de [2].

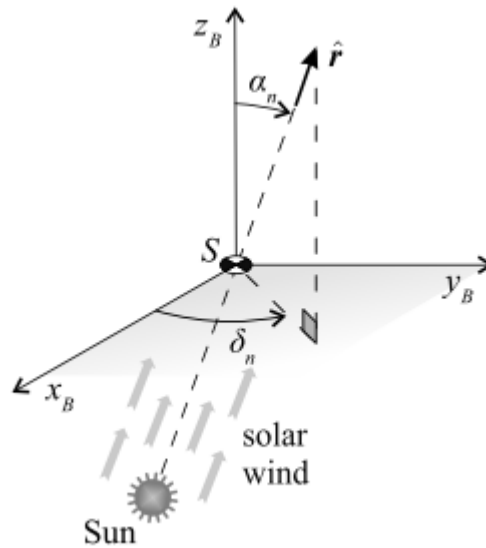


Figura 3.3 Representación gráfica de los ángulos de actitud. Extraída de [2].

- **Sistema de referencia inercial ligado al cuerpo:** Como su propio nombre indica, se trata de un sistema de referencia inercial, cuyo origen es el centro de masas del vehículo y que viene definido por $I(S; x_I, y_I, z_I)$ siendo la base de vectores unitarios $(\hat{i}_I, \hat{j}_I, \hat{k}_I)$. En la situación de partida, estos vectores unitarios coinciden con los vectores unitarios de los ejes cuerpo. Dicho sistema se usa para referir la actitud que tiene el vehículo en un determinado instante con respecto a la que tenía inicialmente.
- **Sistema de referencia auxiliar:** Se trata de un sistema de referencia no inercial. Este sistema viene denotado por $A(S; x_A, y_A, z_A)$, la base de vectores unitarios que lo define es $(\hat{i}_A, \hat{j}_A, \hat{k}_A)$. El vector \hat{j}_A coincide en todo momento con el vector \hat{j}_I de tal forma que tanto x_A como z_A se encuentran girando alrededor del eje y_A hasta alcanzar ambos un ángulo α_n con respecto a los ejes x_I y z_I respectivamente, cuando la maniobra es completada. Este sistema de referencia, definido en [2], se usa posteriormente para definir la evolución temporal de α_n es por ello que se incluye aquí. Un esquema visual de dicho sistema se puede ver en la figura 3.14.

3.2 Situación de partida

A la hora de definir la posición desde la que partirá el vehículo cabe mencionar que el viento solar es variable, este pierde intensidad al alejarnos del Sol y por ello la fuerza que experimenta la E-sail variará a lo largo de su trayecto, tal y como se expuso en el capítulo 2. Es por ello, que seleccionar una situación de partida u otra influye en el empuje inicial que experimente el vehículo espacial. Dicho esto, parece razonable elegir como posición de partida aquella en la que el vehículo se encuentre a una distancia de 1 AU del Sol coincidiendo \hat{r} con el vector \hat{k}_I en dirección, en la que el empuje al inicio de la misión no será demasiado pequeño. Dicha configuración inicial se muestra en la figura 3.4, extraída de [2].

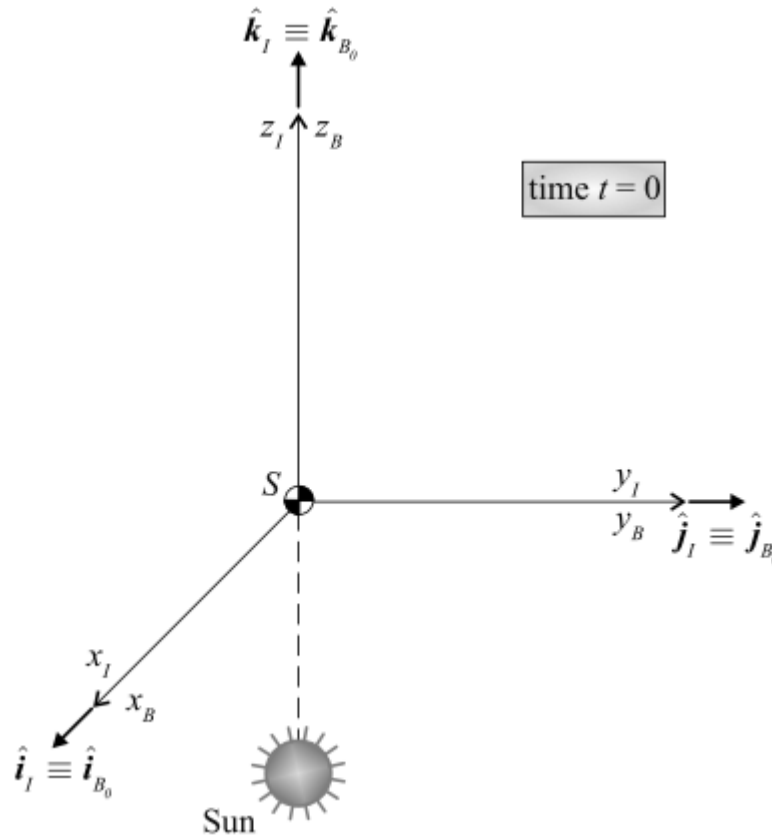


Figura 3.4 Situación de partida. Extraída de [2].

3.3 Representación de la actitud

La actitud de un vehículo se define como la orientación relativa de un sistema de referencia ligado a este respecto a un sistema de referencia concreto, en nuestro caso estos sistemas serían el sistema de referencia ejes cuerpo B y el sistema de referencia inercial I respectivamente.

En general, hay varias maneras de representar la actitud de un vehículo como los ángulos de Euler, los cuaterniones o la matriz de los cosenos directores. Cada representación, presenta ventajas e inconvenientes. Uno de los beneficios de que existan varias formas de representar la actitud es que la dificultad de un problema puede ser rebajada en función de si se usa un tipo de representación en lugar de otro. De esta forma, se puede trabajar con el modo de representación de la actitud que más convenga y que menos inconvenientes genere a la hora de abordar un problema. Además, es importante destacar también que posible pasar de un tipo de representación a otra.

Otro aspecto interesante a comentar es que existe la posibilidad de que dos combinaciones de parámetros representen la misma actitud. En este caso se dice que la representación tiene ambigüedades. Lo que se hace en la mayoría de estas situaciones es limitar los posibles valores que pueden tomar los parámetros que definen

la actitud. Algunas de dichas ambigüedades se comentarán para cada caso de representación de la actitud cuando se definan cada una de ellas.

Por otro lado, hay casos en los que es necesario pasar por sistemas de referencia intermedios para alcanzar una actitud final partiendo de una inicial. En estos casos lo que se hace para llegar a esa actitud final es componer actitudes, dicha composición dependerá de la representación utilizada.

3.3.1 Matriz de cosenos directores (DCM)

Dado el sistema de referencia I cuya base de vectores unitarios es $(\hat{i}_I, \hat{j}_I, \hat{k}_I)$ y el sistema de referencia B determinado por $(\hat{i}_B, \hat{j}_B, \hat{k}_B)$, ambos definidos en la Sección 3.1, la orientación de B con respecto a I , está completamente determinada por la matriz de cambio de base C_I^B , que permite expresar un vector genérico \vec{v} , definido inicialmente en la base de vectores unitarios de I , en la base de vectores unitarios de B mediante:

$$\vec{v}^B = C_I^B \vec{v}^I \quad (3.4)$$

donde

$$C_I^B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta la expresión 3.4 el vector \hat{i}_I expresados en ejes cuerpo sería:

$$\hat{i}_I^B = C_I^B \hat{i}_I^I = C_I^B [1, 0, 0]^T = [c_{11}, c_{21}, c_{31}]^T \quad (3.6)$$

Usando el resultado de 3.6, si se realiza el producto escalar entre \hat{i}_B y \hat{i}_I estando ambos expresados en la base de vectores unitarios de B , se llega a que

$$\hat{i}_B \cdot \hat{i}_I = [1, 0, 0] \cdot [c_{11}, c_{21}, c_{31}]^T = c_{11} \quad (3.7)$$

Por lo que el elemento c_{11} de la matriz DCM sería el coseno director entre \hat{i}_B y \hat{i}_I , de ahí el nombre que esta toma. Con el resto de términos se procedería igual y entonces quedaría que:

$$C_I^B = \begin{pmatrix} \hat{i}_B \cdot \hat{i}_I & \hat{i}_B \cdot \hat{j}_I & \hat{i}_B \cdot \hat{k}_I \\ \hat{j}_B \cdot \hat{i}_I & \hat{j}_B \cdot \hat{j}_I & \hat{j}_B \cdot \hat{k}_I \\ \hat{k}_B \cdot \hat{i}_I & \hat{k}_B \cdot \hat{j}_I & \hat{k}_B \cdot \hat{k}_I \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Razonando de la misma forma se tendría que el cambio de base inverso vendría dado por la siguiente matriz:

$$C_B^I = \begin{pmatrix} \hat{i}_B \cdot \hat{i}_I & \hat{j}_B \cdot \hat{i}_I & \hat{k}_B \cdot \hat{i}_I \\ \hat{i}_B \cdot \hat{j}_I & \hat{j}_B \cdot \hat{j}_I & \hat{k}_B \cdot \hat{j}_I \\ \hat{i}_B \cdot \hat{k}_I & \hat{j}_B \cdot \hat{k}_I & \hat{k}_B \cdot \hat{k}_I \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

puesto que, $C_I^B = (C_B^I)^{-1}$, al observar las matrices (3.8) y (3.9) vemos que $C_B^I = (C_I^B)^T$, por lo que se concluye que la DCM que define la actitud a través de nueve parámetros dependientes entre sí no puede ser cualquiera, sino que debe ser una matriz ortogonal y con determinante +1. Esta última condición implica que el sistema de referencia en cuestión será dextrógiro, es decir, girará en el sentido de las agujas del reloj.

Por otro lado, la composición de actitudes en este tipo de representación viene dada por un simple producto matricial, es decir, supongamos unos sistemas de referencia genéricos S_1 , S_2 y S_3 , y supongamos además que se tiene que la actitud de S_2 respecto a S_1 viene dada por $C_{S_1}^{S_2}$ y que la actitud de S_3 respecto a S_2 viene definida por $C_{S_2}^{S_3}$, la actitud de S_3 respecto a S_1 vendrá determinada por $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3} C_{S_1}^{S_2}$.

3.3.2 Ángulos de Euler

Estos ángulos permiten definir la actitud de un sistema de referencia respecto al sistema de referencia origen mediante una secuencia de tres rotaciones en ejes no consecutivos.

Existen hasta 12 posibles secuencias de ángulos de Euler para representar la actitud. Esto implica que el orden en el que se realizan las rotaciones es importante, pues es posible llegar a una misma actitud pero usando diferentes ternas de rotaciones. La elección de una u otra dependerá de la aplicación. En particular, en este proyecto se seguirá la secuencia:

$$I \xrightarrow[\psi]{z_I} S' \xrightarrow[\phi]{x_{S'}} S'' \xrightarrow[\theta]{y_{S''}} B$$

Dicha secuencia se puede explicar de la siguiente manera: se parte del sistema de referencia inercial I , primeramente se ejecuta un giro de ángulo ψ alrededor del eje z_I , mediante dicho giro se pasa a unos ejes intermedios que se denotarán por S' . Una vez se está en los ejes S' , se realiza un giro de ángulo ϕ alrededor del eje $x_{S'}$ y se llega a unos nuevos ejes S'' que serán también intermedios. Partiendo de estos ejes S'' se vuelve a realizar una rotación de ángulo θ pero esta vez alrededor del eje $y_{S''}$ llegando finalmente a los ejes cuerpo B . Cabe aclarar que los ejes S' y S'' no son más que sistemas auxiliares, no tienen ningún tipo de aplicación en el proyecto, es por ello que no se definen como sí que se ha hecho con los ejes cuerpo y los ejes inerciales I .

La obtención de la matriz de cosenos directores a partir de los ángulos de Euler se realiza mediante la multiplicación de matrices de rotación elementales que se muestran a continuación:

$$C_{S''}^B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad C_{S'}^{S''}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad C_I^{S'}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Para el caso que nos ocupa, que es el de la secuencia mostrada anteriormente, la DCM se obtendría mediante el producto matricial representado en la expresión (3.11), este producto entre las matrices de rotación correspondiente a cada ángulo de Euler debe seguir el orden inverso al realizado en la secuencia, al igual que se indicó en la Sección 3.3.1:

$$C_I^B = C_{S''}^B(\theta) C_{S'}^{S''}(\phi) C_I^{S'}(\psi) \quad (3.11)$$

Una vez realizado este producto matricial, la matriz a la que se llega es la mostrada en (3.12)

$$C_I^B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \sin \phi & \cos \theta \sin \psi + \sin \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ -\cos \phi \sin \psi & \cos \psi \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Obsérvese que analizando la matriz (3.12), se puede comprobar que la actitud mostrada por $(180 + \psi, 180 - \phi, 180 + \theta)$ representa la misma orientación que (ψ, ϕ, θ) . Es por ello, que generalmente se suele limitar $\phi \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

La gran ventaja de usar los ángulos de Euler es el significado físico que aportan. Sin embargo, operar con dichos ángulos a veces es complicado, pues en muchos casos se tienen singularidades que evitan que en ciertas situaciones la actitud esté bien definida. Además, otro problema que surge al usar este tipo de representación, es que a la hora de componer actitudes, cuando se tienen rotaciones mixtas, las matrices resultantes son demasiado complejas para ciertas aplicaciones.

3.3.3 Ángulo y eje de Euler

Según el Teorema de Euler: “*El movimiento más general posible de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje*”.

A partir del Teorema anterior, se puede ver que la actitud de un sistema respecto de otro, en nuestro caso B y I respectivamente, queda totalmente definida indicando el ángulo de giro θ y el eje respecto del cual se produce ese giro, $\vec{e}_{B/I} = [e_x, e_y, e_z]^T$.

Esto se traduce en que el eje de Euler es el eje en torno al cual debe de producirse el giro del sistema de referencia origen para obtener la actitud del sistema de referencia objeto de representación. Mientras que el ángulo de Euler es la cantidad a girar en torno al eje de Euler. Es por ello, que tiene la ventaja de poseer un sencillo significado físico. Sin embargo, presenta ambigüedades para ciertas rotaciones, por ejemplo un giro de 0° y uno de 360° son físicamente iguales, pero para el primero $\theta = 0$, mientras que para el segundo no está bien definido. Esencialmente, es una representación que se usa para análisis teóricos o para ángulos pequeños, es por ello que no se entra en ella con mucho más detalle. Aunque otro posible uso sería el de obtener con cierta facilidad errores de apuntamiento, es decir, este tipo de representación permite ver con un solo número (ángulo de Euler) cuál es la desviación existente entre dos sistemas de referencia.

3.3.4 Cuaterniones

Los cuaterniones fueron introducidos por Hamilton en el siglo XIX como herramienta matemática necesaria para la resolución de ciertos problemas físicos. Los cuaterniones son una extensión de los números complejos a cuatro dimensiones. Un cuaternión genérico se trata de una cuaterna de número q_0, q_1, q_2, q_3 , que se escribe de la siguiente manera:

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad (3.13)$$

Generalmente q_0 se denomina parte escalar, mientras que $\vec{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ es conocida como la parte vectorial de q .

Algunos aspectos importantes de su álgebra se muestran a continuación:

- Suma: La suma se realiza componente a componente, es decir, dados dos cuaterniones $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ y $q' = q'_0 + iq'_1 + jq'_2 + kq'_3$, se tiene que

$$q + q' = (q_0 + q'_0) + i(q_1 + q'_1) + j(q_2 + q'_2) + k(q_3 + q'_3) \quad (3.14)$$

- Producto: El producto se da componente a componente, conociendo las siguientes reglas de multiplicación:

$$i \cdot i = -1, \quad i \cdot j = k, \quad i \cdot k = -j, \quad j \cdot i = -k, \quad j \cdot j = -1, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = -i, \quad k \cdot k = -1 \quad (3.15)$$

Se tiene también la fórmula de Hamilton que implica que $i \cdot j \cdot k = -1$. Además, como se puede deducir de las relaciones mostradas en (3.15), el producto no es conmutativo, es decir, $q \cdot q' \neq q' \cdot q$.

El producto entre dos cuaterniones también se puede escribir en forma matricial y en forma vectorial [10].

- Conjugado: Se define el conjugado de un cuaternión de manera similar a cómo se hace en el caso de los números complejos, es decir, si se tiene que $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ su conjugado será:

$$q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3 \quad (3.16)$$

- Módulo: El módulo se define como:

$$|q|^2 = q \cdot q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (3.17)$$

- División: Se define haciendo uso del conjugado y del módulo:

$$q'/q = q'/q \cdot q^*/q^* = (q' \cdot q^*)/|q|^2 \quad (3.18)$$

Una vez definida el álgebra del cuaternión, cabe decir que se trata de una representación matemática sin sentido físico, pero que ofrece ciertas facilidades a la hora de operar con ellos.

Dada una actitud determinada mediante el ángulo y el eje de Euler (\vec{e} y θ), el cuaternión que representa a esta actitud se puede definir como:

$$q_0 = \cos \theta/2, \quad \vec{q} = \sin \theta/2 \vec{e} \quad (3.19)$$

Además, se observa de las expresiones (3.19) que $|q| = 1$, propiedad que se debe cumplir para un cuaternión que represente una actitud.

Sin embargo, se puede observar que para cuaterniones también existe un problema de ambigüedad, pues la actitud representada por (\vec{e}, θ) es equivalente a la representada por $(-\vec{e}, 360 - \theta)$, lo cual indicaría que $q = -q$ estableciéndose que un cuaternión y su opuesto representan la misma actitud.

Por otro lado, la fórmula que se sigue para pasar de cuaterniones a DCM, C , es la de Euler-Rodrigues para cuaterniones:

$$C = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) Id + 2\vec{q} \vec{q}^T - 2q_0 \vec{q}^\times \quad (3.20)$$

donde el operador \vec{q}^\times toma la siguiente forma:

$$\vec{q}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Aplicando la fórmula de Euler-Rodrigues, (3.20), se llega a:

$$C(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Esta matriz es la DCM en función del cuaternión asociado, que permitirá transformar los datos proporcionados en ejes inerciales a ejes cuerpo.

Si comparamos término a término la matriz (3.22) con la matriz de (3.12) se pueden obtener las siguientes relaciones que son las que permiten conocer los tres ángulos de Euler a partir del cuaternión asociado.

$$\phi = \arcsin(2(q_2q_3 + q_0q_1)), \quad \theta = \arctan\left(\frac{2(q_0q_2 - q_1q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right), \quad \psi = \arctan\left(\frac{2(q_0q_3 - q_2q_1)}{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}\right) \quad (3.23)$$

donde el problema de soluciones múltiples estaría solventado al limitar el rango de variación de $\phi \in [-90^\circ, 90^\circ]$, por la razón mencionada anteriormente. Una vez hecho esto ya se podría conocer en que cuadrante se encuentran θ y ψ mediante los términos, (1, 3) y (3, 3), y, (2, 1) y (2, 2), de la matriz (3.12) respectivamente.

Sin embargo, las fórmulas que permiten pasar de la DCM C al cuaternión asociado son las mostradas en (3.24)

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + Tr(C)}}{2}, \quad \vec{q}^\times = \frac{1}{4q_0}(C^T - C) \quad (3.24)$$

siendo $Tr(C)$ la traza de la matriz DCM.

3.4 Cinemática de la actitud

En esta sección, se entra a describir las ecuaciones cinemáticas de la actitud para cada una de las representaciones descritas anteriormente. En el caso de la actitud, las ecuaciones cinemáticas diferenciales (EDC) son las que relacionan la representación de la actitud con la velocidad angular. Generalmente, estas ecuaciones son no lineales.

Es interesante conocer las diferentes EDC para las diferentes representaciones de la actitud, para así ver cuál es la que tiene más ventajas desde el punto de vista computacional.

3.4.1 Ecuaciones diferenciales cinemáticas para la DCM

A continuación, se muestra la ecuación cinemática diferencial correspondiente a la representación mediante DCM a efectos descriptivos únicamente, ya que, no se entrará en mucho detalle, puesto que, estas ecuaciones no se usarán a lo largo del desarrollo del proyecto. Para ello, hay que tener en cuenta que el sistema de referencia B gira respecto a I con una velocidad angular $\vec{\Omega}_{B/I}^B$. Siguiendo el desarrollo que aparece en [10], se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}C_I^B = -(\vec{\Omega}_{B/I}^B)^\times C_I^B \quad (3.25)$$

se trata de una ecuación diferencial matricial, que habrá que resolver componente a componente, por lo que se tendrían nueve ecuaciones diferenciales acopladas dado que dichos componentes son dependientes entre sí.

Sin embargo, no es muy operativo trabajar con ella, ya que la integración numérica de las ecuaciones formuladas en términos de la DCM no garantiza que la matriz resultante sea ortogonal debido a errores de redondeo que se introducen y la corrección de la matriz mediante un método iterativo para que esta sea ortogonal hace que este tipo de representación no sea eficiente. En cambio, es bastante útil para realizar el cambio de base de un vector de un sistema de referencia a otro.

3.4.2 Ecuaciones diferenciales cinemáticas para los ángulos de Euler

Partiendo de la definición de la secuencia mostrada anteriormente, se tiene que la relación entre las velocidades angulares obtenidas de la mecánica y correspondientes a las rotaciones, expuestas en la Sección 3.3.2, de cada sistema de referencia es:

$$\vec{\Omega}_{B/I}^B = \vec{\Omega}_{B/S''}^B + \vec{\Omega}_{S''/S'}^b + \vec{\Omega}_{S'/I}^B \quad (3.26)$$

donde $\vec{\Omega}_{B/I}^B$ es la velocidad angular con la que B (sistema de referencia ejes cuerpo) gira respecto a I (sistema de referencia inercial). La definición del resto de velocidades angulares se realizaría de forma análoga.

Como consecuencia de las rotaciones producidas durante el proceso de composición de actitud de ejes cuerpo con respecto a ejes inerciales, se tiene que $\vec{\Omega}_{B/S''}^B = [\dot{\phi}, 0, 0]^T$, $\vec{\Omega}_{S''/S'}^b = [0, \dot{\theta}, 0]^T$ y $\vec{\Omega}_{S'/I}^B = [0, 0, \dot{\psi}]^T$, por lo que para llegar a la ecuación 3.26 tendremos que expresar cada velocidad angular en el sistema de referencia B mediante las matrices de rotación elementales mostradas en (3.10).

$$\vec{\Omega}_{B/I}^B = \vec{\Omega}_{B/S''}^B + C_{S''}^B \vec{\Omega}_{S''/S'}^b + C_{S'}^B C_{S''}^{S'} \vec{\Omega}_{S'/I}^B \quad (3.27)$$

Mediante la ecuación (3.27), se llega al sistema de ecuaciones mostrado por la expresión (3.28)

$$\vec{\Omega}_{B/I}^B = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\cos \phi \sin \theta \\ 0 & 1 & \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

en la que, para obtener una expresión para las derivadas de los ángulos de Euler en función de $\vec{\Omega}_{B/I}^B = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]$, habría que invertir la matriz llegándose al sistema (3.29).

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & 0 & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Como se puede ver, el sistema de ecuaciones (3.29) está compuesto por 3 ecuaciones diferenciales no lineales con multitud de funciones trigonométricas que además posee una singularidad para $\phi = \pm 90^\circ$. Lo mismo sucede para cualquier otro conjunto de ángulos de Euler, posee singularidades. A pesar de ello, en el caso que aquí se trata estos problemas de singularidades no se tienen, ya que, los valores que toman los ángulos de Euler son pequeños.

3.4.3 Ecuaciones diferenciales cinemáticas para cuaterniones

Partiendo de la formulación de las ecuaciones cinemáticas diferenciales en función del ángulo y del eje de Euler, que se muestran en las expresiones de (3.30)

$$\dot{\vec{e}}_{B/I}^B = \frac{1}{2} \left[(\vec{e}_{B/I}^B)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} (Id - \vec{e}_{B/I}^B (\vec{e}_{B/I}^B)^T) \right] \vec{\Omega}_{B/I}^B, \quad \dot{\theta} = (\vec{e}_{B/I}^B)^T \vec{\Omega}_{B/I}^B \quad (3.30)$$

para obtener las ecuaciones diferenciales cinemáticas formuladas con cuaterniones es necesario derivar las expresiones (3.19) respecto del tiempo y sustituir $\dot{\vec{e}}_{B/I}^B$ y $\dot{\theta}$ en ellas. Tras esto se llega a que:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{q}^T \vec{\Omega}_{B/I}^B \\ \frac{1}{2} [q^\times + q_0 Id] \vec{\Omega}_{B/I}^B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Se tratan de cuatro ecuaciones diferenciales bilineales y sin singularidades. Estas propiedades son la razón más importante por la cual generalmente son las usadas a la hora de representar la actitud en vehículos espaciales. Se realizan los cálculos necesarios con cuaterniones y posteriormente, si es necesario visualizar la solución, se transforma esta a ángulos de Euler.

Debido a la acumulación de errores a causa de imprecisiones numéricas, que provoca que el módulo del cuaternión que representa la actitud ya no sea unitario, es posible llevar a cabo un proceso de renormalización. En cualquier caso, la manera de corregir esta fuente de error es mucho más sencilla que en el caso relativo a los problemas de ortogonalidad en la DCM.

3.5 Definición de las diferentes fuerzas que intervienen en el problema

En este apartado, se presentan las distintas fuerzas que intervienen en el problema, aunque no todas ellas se tendrán en cuenta, pues la contribución de algunas, como puede ser el caso de las fuerzas elásticas o de las fuerzas de amortiguación se desprecian en el modelo implementado en el presente trabajo, por lo que simplemente se comenta la posibilidad de la existencia de las mismas. Dicho esto, las fuerzas que actúan son las siguientes:

- Fuerza gravitatoria: Esta fuerza aparece debido a la atracción gravitatoria que el Sol ejerce sobre el vehículo por el hecho de que este tiene masa. El modelo gravitatorio que se usará a la hora de plantear las ecuaciones dinámicas viene definido por el Problema de los dos cuerpos, y será el mostrado por la ecuación (3.32)

$$\vec{F}_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad (3.32)$$

dónde G representa la constante de gravitación universal, cuyo valor es $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. Por otro lado, M y m son las masas de los cuerpos que interactúan, en nuestro caso M se corresponde con la masa del Sol mientras que m con la masa del vehículo espacial. Por último, r hace referencia a la distancia que separan a ambas masas y \vec{u}_r es el vector unitario que expresa la dirección de actuación de la fuerza.

- Fuerzas inerciales: Su existencia se debe al movimiento del vehículo espacial a lo largo de su órbita. En concreto, encontramos una fuerza inercial que se opondrá al movimiento orbital del vehículo en torno al Sol, y otra fuerza inercial que se opondrá al de giro de la E-sail alrededor de su eje, definido por el eje z_B . Ambos movimientos están acoplados, a causa del efecto Coriolis, como se puede ver en [8].
- Fuerza de Coulomb: Su inclusión se debe a la interacción que se produce entre los protones que se encuentran confinados en los tethers y las partículas ionizadas del viento solar. Una estimación de la misma ya ha sido realizada en la Sección 2.2. Es esta fuerza, la que permite la generación de empuje y la que nos permitirá controlar la actitud de la E-sail. Su magnitud dependerá del viento solar siendo la velocidad y energía de este variables, pues estas últimas varían en función de la distancia a la que el vehículo se encuentre del Sol.
- Fuerza de ligadura: Esta fuerza surge al considerar la composición total del vehículo como un sistema multicuerpo, formado por los cables y el cuerpo principal del vehículo, que se idealiza como una masa puntual. Es por ello, que será necesario eliminar el vínculo entre ambos para poder ver la contribución que el cuerpo principal del vehículo ejerce sobre el tether y viceversa.
- Fuerzas elásticas: Estas fuerzas aparecen debido a que se considera a los tethers como elementos que se pueden deformar y que tienen rigidez, por lo que dependerán del modelo que se elija a la hora de representar la deformada de los tethers.
- Fuerzas de amortiguamiento: Son fuerzas que surgen debido a la consideración del tether como un elemento que posee amortiguación. Sucede igual que en el caso de las fuerzas elásticas, dependerán del modelo de deformada que se elija.

3.6 Modelo de la deformada del tether

Para el presente proyecto, se considera que los tethers son elementos que se pueden deformar debido a la interacción de estos con el viento solar. A la hora de seleccionar el modelo que define la deformada de estos, se ha optado por aquel que usa la función logarítmica proporcionada por [2] y ya introducida en la Sección 2.4. La ventaja de emplear este modelo es que aporta una gran simplicidad sin dejar de representar fielmente la realidad, siempre y cuando la vela eléctrica tenga una configuración de “Sun-facing” en la que la recta Sol-vehículo espacial es perpendicular al plano nominal de la vela. En caso de no ser así el modelo pierde validez, pues la deformada no se aproximaría al arco descrito al graficar una función logarítmica.. Además, nos permite tener una expresión analítica con la que poder trabajar. Esta expresión viene dada por la ecuación (3.33).

$$f = b_l L \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right) \tag{3.33}$$

Donde f representa la distancia de un elemento diferencial de longitud del tether (ds) al plano (x_B, y_B) , el parámetro x representa la distancia de ds al eje z_B , mientras que L es la longitud del cable. Por otro lado, la variable b_l que aparecen en (3.33) se trata de un coeficiente adimensional de forma cuya expresión viene dada por la ecuación (3.34)

$$b_l \triangleq \frac{2\sigma v_{vs}}{\rho \omega^2 L} \tag{3.34}$$

siendo v_{vs} la velocidad del viento solar cuyo valor ya es conocido de secciones anteriores, ρ es la densidad de masa lineal del tether ($\sim 10^{-5}$ kg/m), mientras que ω es la velocidad de giro de la E-sail. Adicionalmente, σ se trata de un parámetro de diseño que representa a la fuerza de Coulomb y que puede modificar su valor en función de la tensión eléctrica que tengan los tethers, sus unidades serían [kg/(m · s)]. Su expresión analítica viene dada por la ecuación (3.35) y esta tendrá validez siempre y cuando la distancia que separa al Sol y al vehículo espacial sea de 1 AU, lo cual supone una nueva limitación del modelo.

$$\sigma = 0,18 \cdot \max(0, V - V_w) \cdot \sqrt{\epsilon_0 m_p n} \tag{3.35}$$

En la ecuación (3.35), V representa el voltaje del tether, V_w es el voltaje de las partículas ionizadas del viento solar (cuyo valor aproximado es de 1 kV, como se indica en [2]), ϵ_0 es la permitividad del vacío siendo su valor $\epsilon_0 = 8,8541878176 \cdot 10^{-12}$ F/m, mientras que el resto de parámetros son ya conocidos de secciones anteriores.

A continuación, en la figura 3.5 se muestra un esquema del modelo expuesto anteriormente con el objetivo de aclarar ideas. Dicha imagen ha sido extraída de [2].

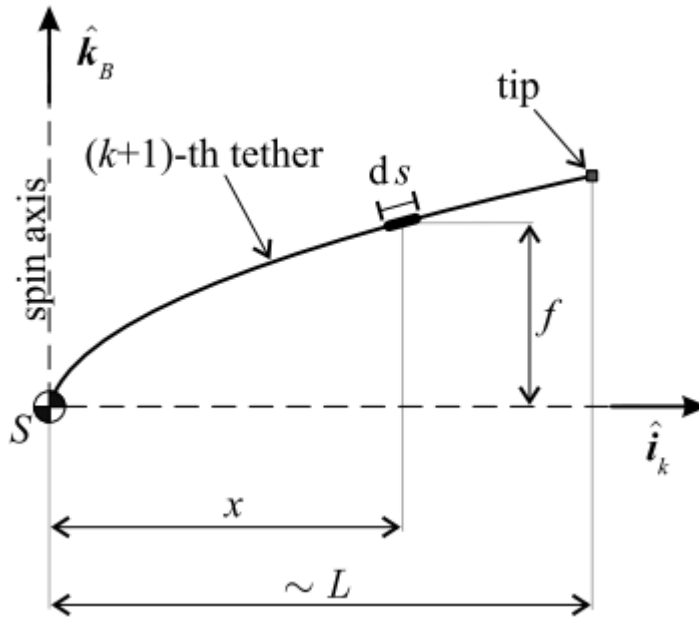


Figura 3.5 Esquema del modelo de deformada del tether. Extraída de [2].

3.7 Ecuaciones dinámicas de Euler

En el presente apartado se presentan las ecuaciones de Euler para un sólido rígido, procedentes de la mecánica, que definen la evolución temporal de la velocidad angular bajo la acción de unos pares y que son integradas numéricamente junto con las ecuaciones diferenciales cinemáticas presentadas en la Sección 3.4.2 para obtener la actitud de la vela una vez transcurra un periodo de tiempo concreto. Para ello, nos basaremos en la formulación de la referencia [2].

Las ecuaciones en cuestión son las siguientes:

$$\dot{\Omega}_x = \frac{I_l - I_z}{I_l} \Omega_y \Omega_z + \frac{\mathcal{E}}{I_l} \quad (3.36)$$

$$\dot{\Omega}_y = \frac{I_z - I_l}{I_l} \Omega_x \Omega_z + \frac{\mathcal{F}}{I_l} \quad (3.37)$$

$$\dot{\Omega}_z = \frac{\mathcal{G}}{I_z} \quad (3.38)$$

donde I_l y I_z son los momentos de inercia transversal y longitudinal respectivamente, mientras que $[\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}]$ son las componentes, referidas a ejes cuerpo B , del par dinámico total generado por la vela solar eléctrica en el vehículo espacial. Estas componentes incluyen tanto la contribución del momento de fuerzas dado por la modulación del voltaje eléctrico en los tethers, así como los efectos de deformación en el tether debido a la presión dinámica ejercida por el viento solar y la fuerza centrífuga causada por el giro de la vela. De acuerdo con la referencia [2], estas componentes del par total pueden ser escritas como:

$$\mathcal{E} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{F} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{G} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{G}_k \quad (3.39)$$

donde

$$\mathcal{E}_k \triangleq \int_0^L d\mathcal{E}_k, \quad \mathcal{F}_k \triangleq \int_0^L d\mathcal{F}_k, \quad \mathcal{G}_k \triangleq \int_0^L d\mathcal{G}_k \quad (3.40)$$

son las componentes del par total asociadas al k -ésimo tether. Asumiendo que $b_l^2 \simeq 0$ (es del orden de 10^{-5}), las expresiones de $d\mathcal{E}_k$, $d\mathcal{F}_k$ y $d\mathcal{G}_k$, según la referencia [2] son:

$$d\mathcal{E}_k = \sigma_k v_{vs} [(f - x f') \sin \zeta_k \sin \alpha_n \cos(\delta_n - \zeta_k) - f \sin \alpha_n \sin \delta_n + x \sin \zeta_k \cos \alpha_n] dx \quad (3.41)$$

$$d\mathcal{F}_k = \sigma_k v_{vs} [(x f' - f) \cos \zeta_k \sin \alpha_n \cos(\delta_n - \zeta_k) + f \sin \alpha_n \cos \delta_n + x \cos \zeta_k \cos \alpha_n] dx \quad (3.42)$$

$$d\mathcal{G}_k = \sigma_k v_{vs} x \sin \alpha_n \sin(\delta_n - \zeta_k) dx \quad (3.43)$$

donde

$$c_k = \sigma_k v_{vs} L^2 \quad (3.44)$$

Teniendo en cuenta la expresión analítica de la deformada del tether (3.33) e integrando las ecuaciones (3.41), (3.42) y (3.43), las expresiones de las componentes del par de fuerzas total para el k -ésimo tether son:

$$\mathcal{E}_k = c_k \left[b_l \sin \alpha_n [\cos(\delta_n - \zeta_k) \sin \zeta_k (\ln 8 - 2) - \sin \delta_n (\ln 4 - 1)] + \frac{\cos \alpha_n \sin \zeta_k}{2} \right] \quad (3.45)$$

$$\mathcal{F}_k = c_k \left[b_l \sin \alpha_n [\cos \delta_n (\ln 4 - 1) - \cos(\delta_n - \zeta_k) \cos \zeta_k (\ln 8 - 2)] - \frac{\cos \alpha_n \cos \zeta_k}{2} \right] \quad (3.46)$$

$$\mathcal{G}_k = c_k \left[\frac{\sin(\delta_n - \zeta_k) \sin \alpha_n}{2} \right] \quad (3.47)$$

principalmente estas expresiones dependen de la longitud de los tethers, la forma que estos tienen, la orientación angular entre los diferentes tethers, las características del viento solar y la actitud que tenga la vela solar en cada instante, por lo que las componentes del momento de fuerzas total variarán con el tiempo.

3.8 Maniobra de control

En el presente apartado se muestran los modelos analíticos de los pares dinámicos que intervienen en el problema. Además, se presentan las evoluciones temporales, para el caso de la maniobra que se define a continuación, de las componentes del par de fuerzas total que se mostraron en la Sección 3.7. Por otro lado, se muestra la ley de control activo que se aplicará para alcanzar la actitud deseada, dicha ley ha sido obtenida de [2]. Por último, se reproducirán y analizarán los resultados obtenidos en el artículo que se ha usado de referencia ([2]).

El objetivo de control para el caso que nos ocupa, es realizar una maniobra que permita al vehículo alcanzar un valor de $\alpha_n = 5^\circ$ en un periodo de tiempo igual a 120 s. Por otro lado, las características de la vela solar eléctrica para el caso que se analiza son las siguientes

Tabla 3.1 Definición de los valores de los distintos parámetros de la E-sail .

L [km]	2
Nº tethers	16
V [kV]	16,5
V_w [kV]	1
I_t [kg m ²]	1000
I_z [kg m ²]	3000
ω [rad/s]	0,0758

3.8.1 Modelos analíticos de los pares dinámicos

Se presentan a continuación las expresiones analíticas de los momentos de fuerza que hay actuando sobre el vehículo, estando la presencia de dos de ellos (par de referencia y par de control) justificada con el objetivo de conseguir que la orientación final del vehículo sea la deseada. La resultante de estos momentos dinámicos, generan términos en las ecuaciones de Euler, mostradas en la Sección 3.7. Otro aspecto por el cual es importante conocer las contribuciones de dichos pares, es que de ellos dependen varios parámetros que intervienen en el modelo y que se presentarán más adelante. Además, decir que estos pares son muy dependientes de la maniobra que se quiera realizar. Para la definición de estos pares dinámicos se hacen uso de los modelos y deducciones presentados en [2].

Par de referencia

La introducción de este par dinámico en el modelo está justificada con el objetivo de permitir que la actitud de la E-sail se adecúe a la actitud de referencia fijada. La evolución del parámetro α_n que se toma como referencia viene definida por la ecuación (3.48), las razones por la que se toma dicho valor se muestran un poco más adelante. Por otro lado, la actitud final que se quiere tener en el vehículo viene definida por $\bar{\alpha}_{nf}$.

A continuación, se muestran la expresión que determinan la referencia a seguir por la evolución temporal de α_n y la expresión de su derivada temporal. Dichas definiciones, extraídas de [2], serán fundamentales a la hora de definir \vec{T}_a .

$$\bar{\alpha}_n = \frac{6 \bar{\alpha}_{nf}}{2 t_f^2} \left(t^2 - \frac{2 t^3}{3 t_f} \right) [1(t) - 1(t - t_f)] \quad (3.48)$$

$$\dot{\bar{\alpha}}_n = \frac{6 \bar{\alpha}_{nf}}{t_f} \left[\frac{t}{t_f} - \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 \right] [1(t) - 1(t - t_f)] \quad (3.49)$$

Nótese que en la ecuación (3.48), cuando la maniobra de actitud llega a su fin, es decir, cuando transcurre un tiempo t_f , se tiene que $\bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}_{nf}$ como debería ser en concordancia con lo que se ha dicho anteriormente. Por otro lado, remitiéndonos a [10], la razón por la que se toma la expresión (3.49) para definir la velocidad angular es que esta se corresponde con la velocidad angular que permitiría pasar de una actitud a otra empleando la menor energía posible.

Fijando que la velocidad angular de A alrededor del eje y_A sea $\Omega_A = \dot{\bar{\alpha}}_n \hat{j}_A$, si α_n siguiera la evolución mostrada por la ecuación (3.48), los ejes cuerpo (B) seguirían exactamente a los ejes auxiliares, A , durante

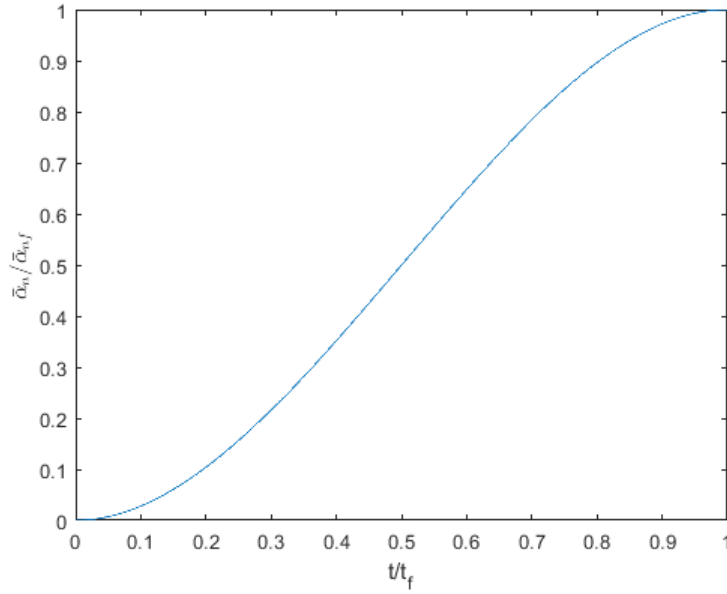


Figura 3.6 Evolución temporal que se desea que tenga α_n , definida por la ecuación (3.48).

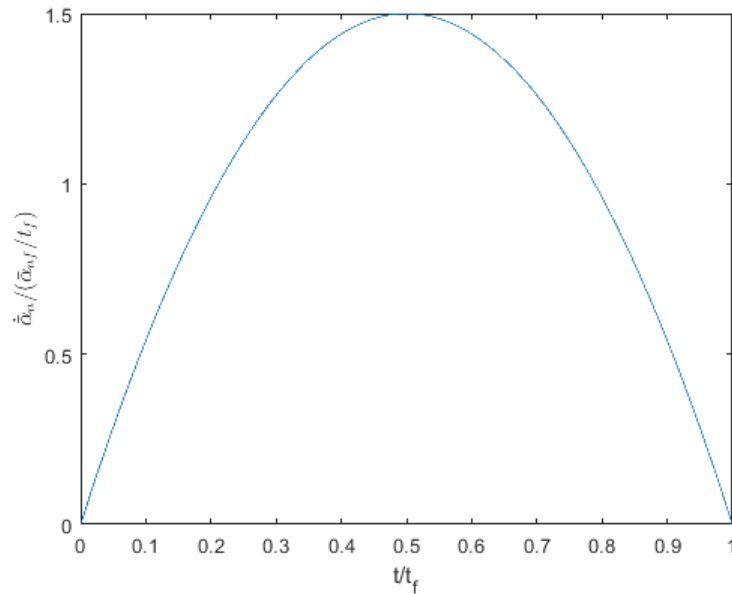


Figura 3.7 Evolución temporal que se desea que tenga $\dot{\alpha}_n$, definida por la ecuación (3.49).

todo el tiempo que dure la maniobra, de esta manera se consigue llegar a la actitud deseada. El momento angular deseado del vehículo en el sistema de referencia auxiliar será $\vec{H} = I_z \omega \hat{k}_A$, donde I_z es la inercia longitudinal del vehículo. Por tanto, la expresión del par de referencia, \vec{T}_a , será:

$$\vec{T}_a = \Omega_A \times \vec{H} = T_a \hat{i}_A \quad (3.50)$$

siendo su módulo el indicado por la ecuación 3.51.

$$T_a \triangleq \|\vec{T}_a\| = I_z \frac{6 \omega \bar{\alpha}_n}{t_f} \left[\frac{t}{t_f} - \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 \right] [1(t) - 1(t-t_f)] \quad (3.51)$$

Como se puede ver en la expresión del módulo de T_a la evolución que este sigue con respecto al tiempo es parabólica, al igual que la evolución temporal de la velocidad angular que minimiza la energía en el paso de una actitud a otra. Por otro lado, en las ecuaciones anteriores el término $[1(t) - 1(t - t_f)]$ se identifica con la función escalón que se extiende desde $t = 0$ hasta el tiempo que dura la maniobra $t = t_f$, por lo que fuera de ese intervalo de tiempo el par de referencia sería nulo y, por tanto, solo se tendría contribución de este mientras se está llevando a cabo la maniobra de actitud. En la figura 3.8 se puede visualizar lo anteriormente comentado, para la maniobra definida al inicio de la sección. Para la obtención de la misma se han usado como valores de los parámetros los que aparecen en la tabla 3.1

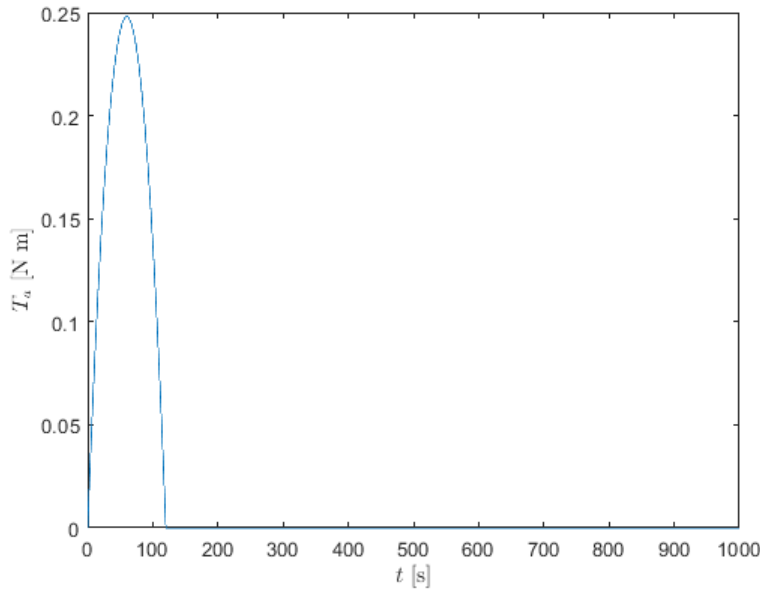


Figura 3.8 Evolución temporal de par de referencia T_a , considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1.

Par perturbador

La presencia de este par, al que se le denominará \vec{T}_d , está asociada de manera inherente al hecho de que, como se ha dicho ya, los tethers se deforman debido a la presencia del viento solar. La introducción del par de referencia lleva asociada la existencia de un par de fuerzas alterador que actúa sobre el vehículo espacial.

Si se asume que todos los tethers tienen el mismo voltaje, la expresión analítica de \vec{T}_d viene dada por la expresión (3.52):

$$\vec{T}_d = b_l N L^2 \sigma v_{vs} \ln \sqrt{2} (\hat{k}_B \times \hat{r}) \quad (3.52)$$

por lo que el módulo de dicho par será

$$T_d \triangleq \|\vec{T}_d\| = b_l N L^2 \sigma v_{vs} \ln \sqrt{2} \sin \alpha_n \quad (3.53)$$

Este par puede ser contrarrestado a través de una pequeña modulación del voltaje eléctrico en el tether mediante el parámetro de diseño σ , siendo dicha variable la que define la ley de control que permite modificar la actitud de la E-sail. Esta ley de control se mostrará en la Sección 3.8.3.

Dicho momento de fuerza depende del ángulo α_n y como consecuencia de ello, este aparece cuando el eje nominal de la vela y los rayos solares no estén alineados.

Su evolución temporal se puede observar en la figura 3.9. Cabe decir, que dicha evolución se ha obtenido considerando la maniobra definida al inicio de la sección.

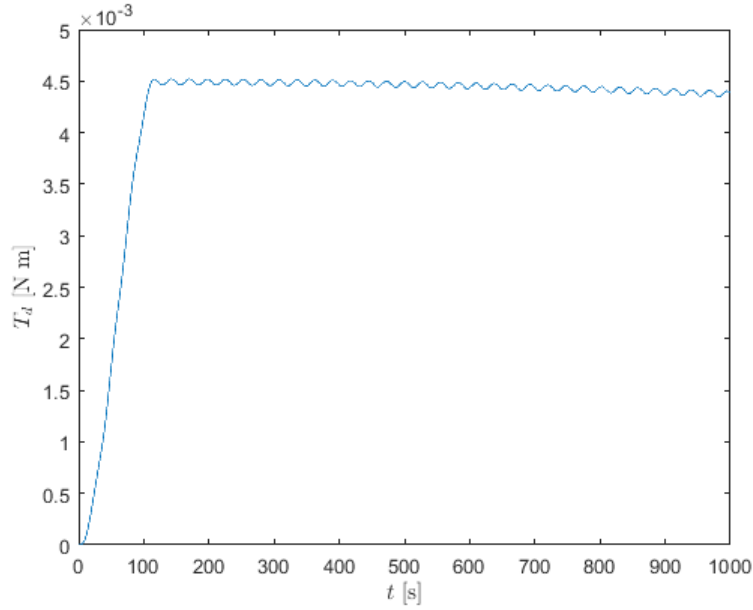


Figura 3.9 Evolución temporal de par perturbador T_d , considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1.

Par de control

Mediante la introducción de este momento dinámico generado a través de la modulación del potencial eléctrico del tether, se consigue ajustar la actitud de la vela eléctrica. Este par es el que resulta de restar \vec{T}_a y $\vec{T}_d = -\|T_d\| \hat{j}_B$, este último con signo menos para eliminar el par perturbador producido por el doblamiento del tether. De tal manera queda que $\vec{T}_c \simeq \vec{T}_a - \vec{T}_d$, desarrollando esta expresión se llega a la ecuación (3.54).

$$\vec{T}_c = I_z \frac{6\bar{\alpha}_n \omega}{t_f} \left[\frac{t}{t_f} - \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 \right] [1(t) - 1(t-t_f)] \hat{i}_A + \frac{NL(\sigma v_{vs})^2 \ln 2}{\rho \omega^2} \sin \alpha_n \hat{j}_A \quad (3.54)$$

Por tanto, el módulo de dicho par viene dado por la ecuación (3.55).

$$T_c \triangleq \|\vec{T}_c\| = \sqrt{\frac{36\bar{\alpha}_n^2 I_z^2 \omega^2}{t_f^2} \left[\frac{t}{t_f} - \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 \right]^2 [1(t) - 1(t-t_f)] + \frac{N^2 L^2 (\sigma v_{vs})^4 (\ln 2)^2}{\rho^2 \omega^4} (\sin \alpha_n)^2} \quad (3.55)$$

Como se puede ver en la expresión (3.54), el par de control, que se encuentra situado en el plano nominal de la E-sail, es una función explícita del tiempo, dado que \vec{T}_a lo es, y además depende del ángulo de cabeceo α_n que variará a lo largo de la maniobra. Su evolución temporal, teniendo en cuenta la maniobra definida al inicio de la sección, es prácticamente similar a la de T_d durante el tiempo de duración de la maniobra debido a que el orden de magnitud de T_d es considerablemente menor al de T_a . Sin embargo, finalizada la maniobra de actitud es T_d quien impone cual es la evolución de T_c . Todo esto se puede observar en la figura 3.10. Al igual que para el cálculo de T_d y T_a , para el cálculo de T_c se han usado los valores que aparecen en la tabla 3.1 en relación a los distintos parámetros de la E-sail.

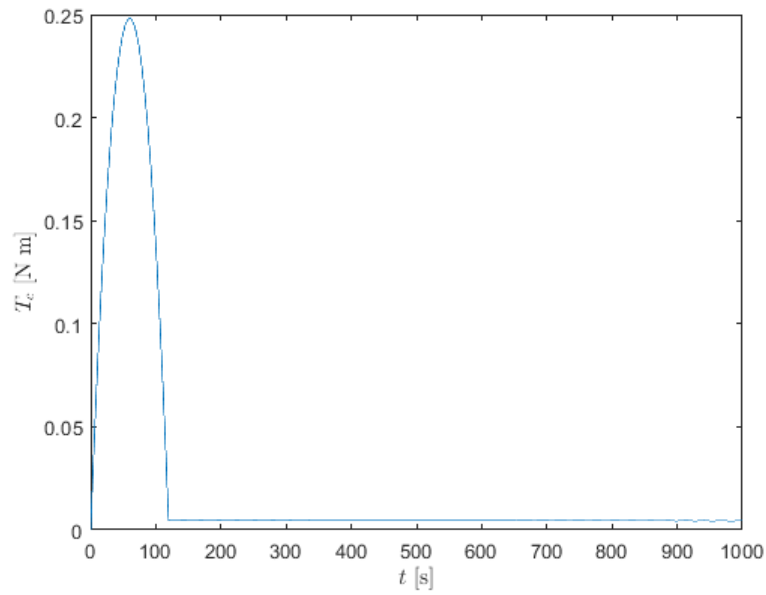


Figura 3.10 Evolución temporal del par de control T_c , considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1.

Descansando sobre \vec{T}_c y dispuesto ortogonalmente sobre él está situado el plano de control de la E-sail. Este plano de control divide al plano nominal de la E-sail en dos semiplanos, estando ambos caracterizados por dos niveles de tensión diferentes. En esta última idea es en la que se basa la ley de control activo.

3.8.2 Evoluciones temporales de las componentes del par de fuerzas total

A continuación, se muestran cual es la evolución temporal de las distintas componentes (\mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G}), definidas por las expresiones 3.45, 3.46, 3.47) que generan el momento de fuerzas total que actúa sobre la vela para el caso en el que se considera la maniobra y los parámetros de la E-sail definidos al inicio de la sección. Cabe recordar, que estas componentes incluyen tanto la contribución del momentos de fuerzas dado por la modulación del voltaje eléctrico, así como los efectos de la deformación en los tethers debido a la presión dinámica del viento solar y el par causado por la fuerza centrífuga debida al giro de la vela.

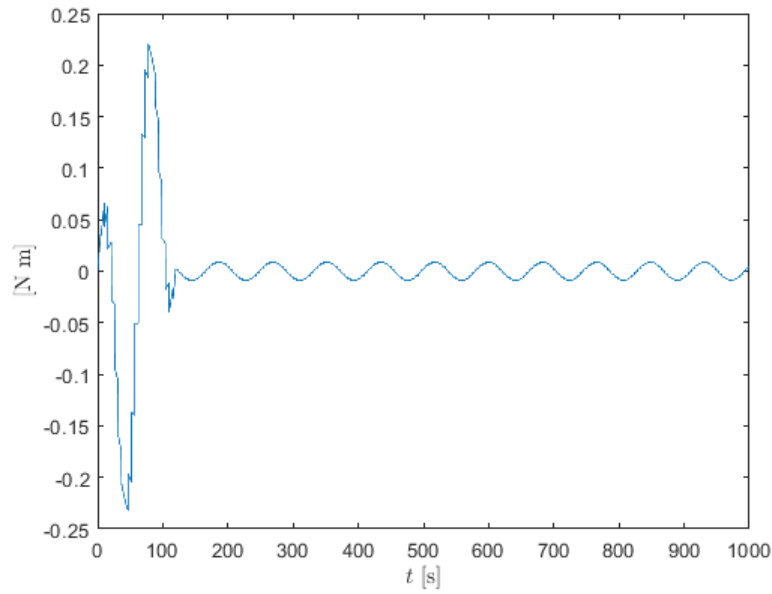


Figura 3.11 Evolución temporal de la componente \mathcal{E} del momento de fuerzas total considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1.

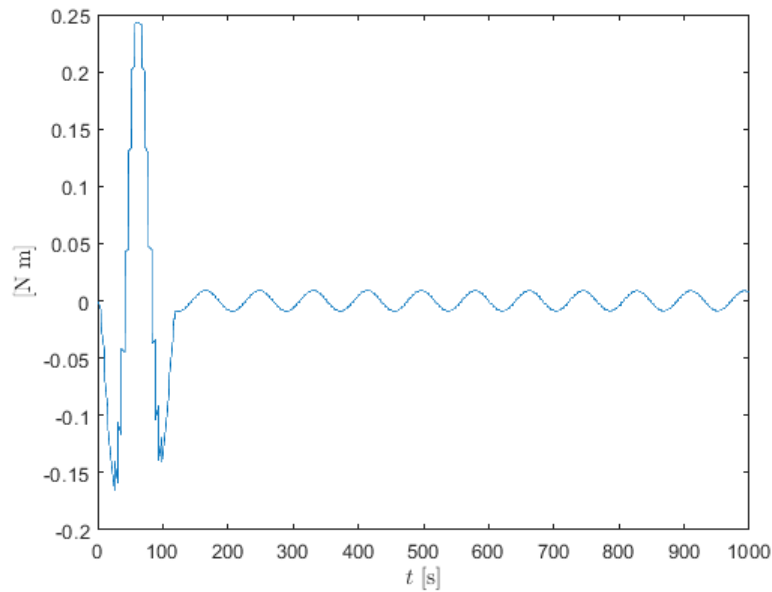


Figura 3.12 Evolución temporal de la componente \mathcal{F} del momento de fuerzas total considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1.

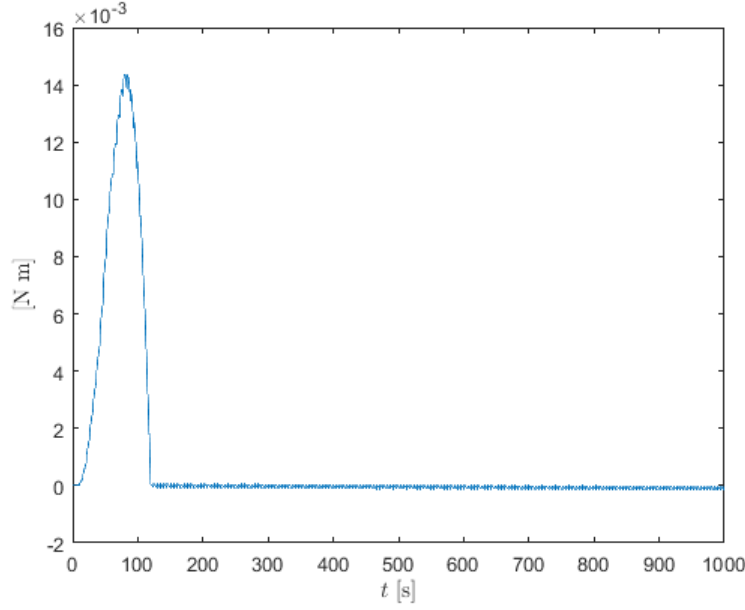


Figura 3.13 Evolución temporal de la componente \mathcal{G} del momento de fuerzas total considerando la maniobra definida y los valores de los parámetros que aparecen en la tabla 3.1.

3.8.3 Ley de control activo

Para conseguir que el vehículo espacial se desplace por el Sistema Solar es necesario la existencia de una componente transversal del empuje que será la que permita direccionar el vehículo. Para ello, el plano nominal de la vela eléctrica debe ser orientado de tal forma que se tenga un valor de α_n pequeño, pero distinto de 0, con el fin de que la E-sail siga manteniendo simetría axial. Con esta sección, se pretende mostrar cómo la actitud del vehículo y, por tanto, α_n , pueden ser ajustados con el par T_c presentado anteriormente. Para esto, se usarán los razonamientos deducidos en [2].

Como se dijo en la Sección 3.8.1, la presencia del plano de control divide el plano nominal de la E-sail en dos. Ambos semiplanos están sometidos a diferentes niveles de tensión. Dichos niveles de tensión vienen impuestos por la ley de control, de tal modo que el semiplano en el que se encuentra la proyección de \hat{r} está sometido a un nivel de tensión mayor que el semiplano restante. Con esta modulación lo que se pretende es contrarrestar el par perturbador y generar la componente transversal del empuje requerida.

Antes de entrar a definir la ley de control, se establece que $\beta = \beta(t, \alpha_n) \in [0, 2\pi]$ es el ángulo que define la orientación del plano de control. Dicho ángulo es el formado por \vec{T}_c y el eje x_A medido en sentido antihorario desde x_A , como se muestra en la figura 3.14 adaptada de [2].

Este ángulo está definido por la ecuación (3.56), y tiende a $\frac{\pi}{2}$ cuando T_a tiende a 0.

$$\beta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{T_d}{T_a}\right) & \text{si } t \leq t_f \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } t > t_f \end{cases} \quad (3.56)$$

El valor de σ_k correspondiente a un tether genérico dependerá del desplazamiento angular γ_k de este con respecto al plano de control, dicho desplazamiento angular es:

$$\gamma_k \triangleq \omega t + \zeta_k - \beta \quad (3.57)$$

Por tanto, la ley de control resultante sería

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma - \frac{\lambda T_c}{2} & \text{si } \gamma_k \in [0, \pi) \\ \sigma + \frac{\lambda T_c}{2} & \text{si } \gamma_k \in [\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (3.58)$$

donde λ es el $\Delta\sigma$ requerido por unidad de T_d generado:

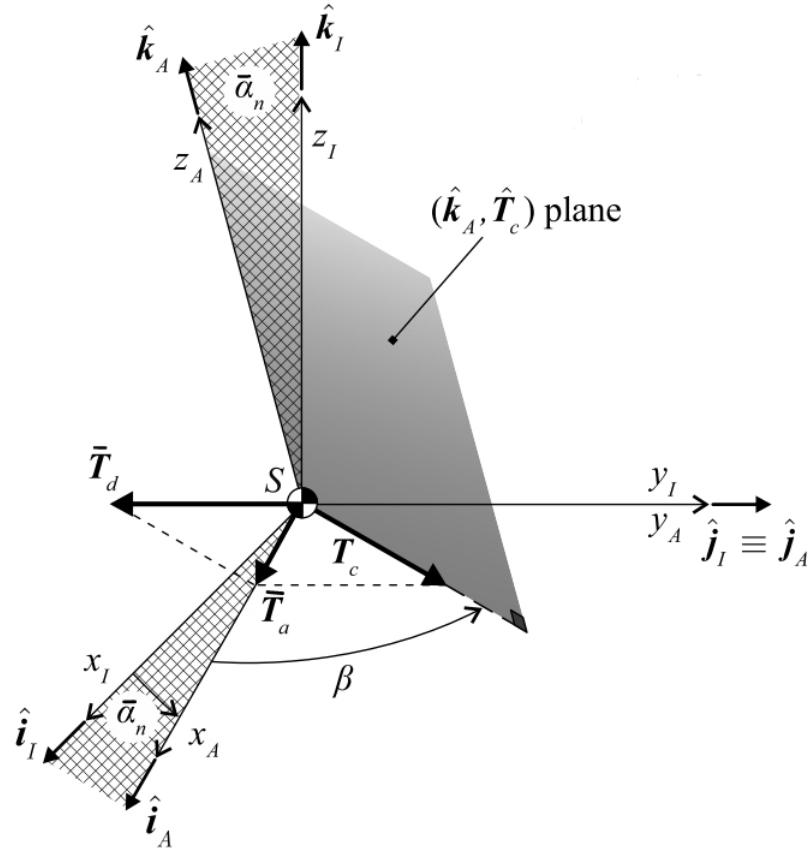


Figura 3.14 Esquema de la maniobra de actitud con el par de control. Extrída de [2].

$$\lambda \triangleq \frac{\Delta\sigma}{T_d} = \frac{2 \sin(\pi/N)}{v_{vs} L^2 \cos \alpha_n} \quad (3.59)$$

Como se puede ver en (3.58), se trata de una ley de control en bucle abierto, es decir, sin realimentación, puesto que la salida de la ley de control no es remitida de nuevo a la entrada como primera información, permitiendo que esta se regule de forma independiente.

Por otro lado, el incremento del parámetro de diseño en el semiplano en el cual se encuentra la proyección de \hat{r} viene dado por el término $\frac{\lambda T_c}{2}$, siendo esta misma cantidad la que disminuye este mismo parámetro en el semiplano restante. Además, el valor de σ para todos los tethers que se encuentran en un mismo semiplano es el mismo, variando este únicamente con el tiempo y con α_n .

3.8.4 Simulaciones numéricas

Con esta sección, se muestra la evolución de α_n , obtenida al integrar numéricamente, con el comando ODE45 de MATLAB, el sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por las ecuaciones diferenciales cinemáticas (3.29) y las ecuaciones dinámicas de Euler (3.36), (3.37) y (3.38), que a continuación se presenta, de esta forma se reproducen y analizan los resultados del artículo que se ha usado como referencia ([2]).

$$\begin{cases} f_1 \equiv \dot{\phi} = \Omega_x \cos \theta + \Omega_z \sin \theta \\ f_2 \equiv \dot{\theta} = \Omega_y - (\Omega_z \cos \theta - \Omega_x \sin \theta) \tan \phi \\ f_3 \equiv \dot{\psi} = (\Omega_z \cos \theta - \Omega_x \sin \theta) \sec \phi \\ f_4 \equiv \dot{\Omega}_x = \frac{I_t - I_z}{I_t} \Omega_y \Omega_z + \frac{\mathcal{C}}{I_t} \\ f_5 \equiv \dot{\Omega}_y = \frac{I_z - I_t}{I_t} \Omega_x \Omega_z + \frac{\mathcal{F}}{I_t} \\ f_6 \equiv \dot{\Omega}_z = \frac{\mathcal{G}}{I_z} \end{cases} \quad (3.60)$$

Para ello se toman los siguientes valores de los parámetros del sistema, siendo estos obtenidos de [2]: $I_z = 3I_t = 3000 \text{ kg m}^2$, $L = 2 \text{ km}$, $\omega = 0,0758 \text{ rad/s}$, $N = 16$, $V = 16,5 \text{ kV}$, y $V_w = 1 \text{ kV}$. Las condiciones iniciales son $\phi(0) = \theta(0) = \psi(0) = \Omega_x = \Omega_y = 0$ y $\Omega_z = \omega$. Por otro lado, los valores elegidos para $\tilde{\alpha}_{nf}$ y t_f son: $\tilde{\alpha}_{nf} = 5^\circ$ y $t_f = 120 \text{ s}$.

Además, esta evolución es comparada con la evolución que seguiría α_n al resolver el mismo sistema de ecuaciones, pero eliminando las perturbaciones existentes e imponiendo que el único momento de fuerzas aplicado fuese el obtenido al exigir que la velocidad del sistema en las ecuaciones dinámicas de Euler sea $\Omega_A = \tilde{\alpha}_n \hat{j}_A$, donde $\tilde{\alpha}_n$ viene dada por la ecuación (3.49). Se considera que la evolución que aquí se obtiene es la ideal, es decir, la que seguiría α_n sin ningún tipo de perturbación. El proceso seguido para obtener el par anterior se muestra a continuación:

$$I_t \dot{\Omega}_x + (I_z - I_t) \Omega_y \Omega_z = M_x \quad (3.61)$$

$$I_t \dot{\Omega}_y + (I_t - I_z) \Omega_x \Omega_z = M_y \quad (3.62)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + (I_t - I_t) \Omega_x \Omega_y = M_z \quad (3.63)$$

Teniendo en cuenta que tanto Ω_x como Ω_y son nulas y que $\Omega_y = \tilde{\alpha}_n$, la única componente del momento de fuerzas distinta de 0 sería M_y , cuya expresión es:

$$M_y = I_t \frac{6 \tilde{\alpha}_{nf}}{t_f} \left[\frac{1}{t_f} - \frac{2t}{t_f^2} \right] [1(t) - 1(t - t_f)] \quad (3.64)$$

Por lo que las ecuaciones dinámicas de Euler a integrar junto con 3.29 quedarían:

$$\dot{\Omega}_x = \frac{I_t - I_z}{I_t} \Omega_y \Omega_z \quad (3.65)$$

$$\dot{\Omega}_y = \frac{I_z - I_t}{I_t} \Omega_x \Omega_z + \frac{6 \tilde{\alpha}_{nf}}{t_f} \left[\frac{1}{t_f} - \frac{2t}{t_f^2} \right] [1(t) - 1(t - t_f)] \quad (3.66)$$

$$\dot{\Omega}_z = 0 \quad (3.67)$$

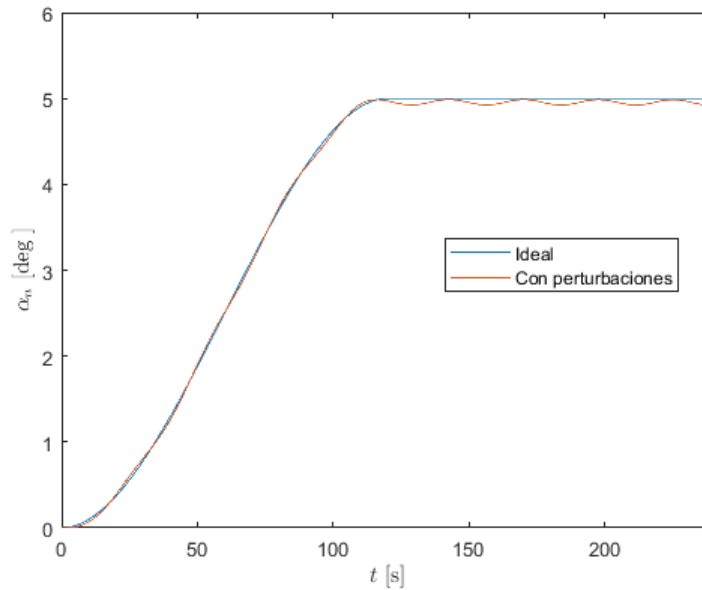


Figura 3.15 Evolución ideal (azul) de α_n junto con la evolución considerando perturbaciones (rojo) de α_n .

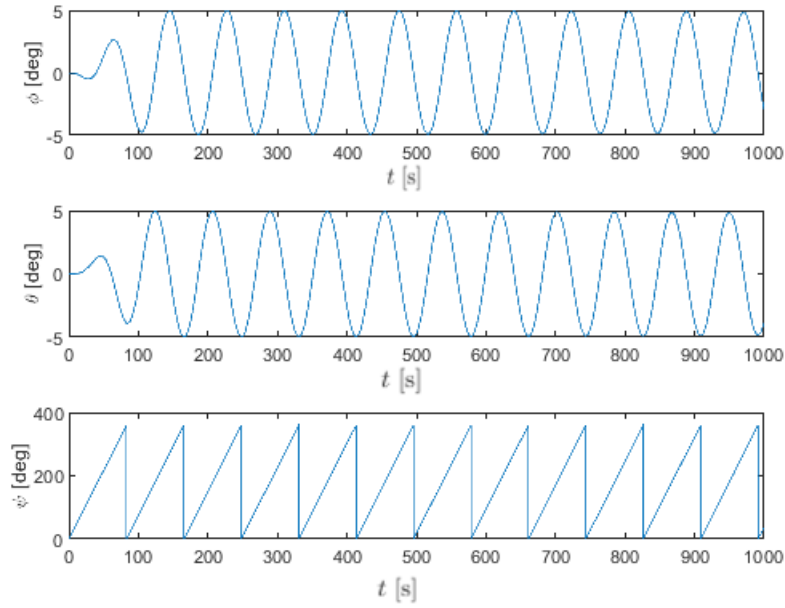


Figura 3.16 Evolución temporal de ϕ , θ y ψ para la maniobra correspondiente a $\alpha_{nf} = 5^\circ$.

En la figura 3.15, se puede ver la evolución, considerando perturbaciones, de α_n en comparación con la evolución ideal, refiriéndonos por evolución con perturbaciones a la evolución obtenida al resolver íntegramente el sistema de ecuaciones compuesto por (3.29), (3.36), (3.37) y (3.38). En ambos casos, se ha tomado un tiempo de simulación mayor al de 2 minutos para verificar que el comportamiento de la vela eléctrica es capaz de mantenerse en la actitud final propuesta mediante la ley de control que se indicó en la Sección 3.8.3. Como puede observarse, las dos evoluciones son prácticamente coincidentes desde que se inicia la maniobra de actitud hasta que se finaliza. Sin embargo, mientras que en la evolución ideal α_n es capaz de mantenerse perfectamente en la actitud final deseada transcurrido un tiempo de 2 minutos, en la evolución normal α_n tiene un comportamiento oscilatorio alrededor de un valor muy próximo al ángulo deseado que es de 5° .

Se muestran además las evoluciones temporales de las distintas variables de estado del problema en las figuras 3.16 y 3.17, y de las potencias de control en la figura 3.18

Como se puede ver la evolución de ψ es periódica en todo instante de tiempo, esto es debido a que la vela está constantemente girando alrededor de su eje de giro, siendo este el eje z_B . Por otro lado, las evoluciones de ϕ y θ tras un periodo de tiempo, que coincide con la fase en la que se realiza la maniobra para llegar a la actitud deseada, alcanzan también una periodicidad en sus evoluciones.

Es interesante resaltar que debido a la presencia del par perturbador y a la componente \mathcal{G} del par total en el eje z_B , se produce una pequeña variación de Ω_z que hace que α_n no se mantenga oscilando en ese valor próximo al deseado, sino que su valor decae al aumentar el tiempo de integración, como se indica en [2] y como se puede ver en la figura 3.19. Por lo que se concluye que la ley de control presentada en la referencia [2], si bien funciona razonablemente bien para intervalos de tiempo cortos, si queremos que el vehículo espacial se mantenga en una determinada actitud un periodo de tiempo mayor como puede ser una hora, esta ley de control no es muy efectiva, ya que, el comportamiento de α_n sería mejor en el caso de que no hubiese ley de control aplicada, lo que se correspondería con un valor de $\sigma_k = 0$ y por tanto, con un valor nulo de \mathcal{G} .

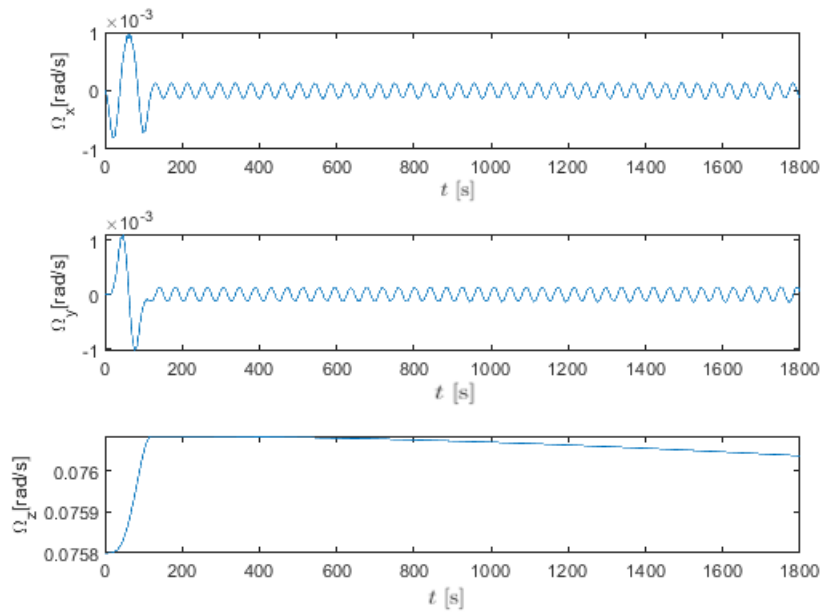


Figura 3.17 Evolución temporal de las velocidades angulares para la maniobra correspondiente a $\alpha_{nf} = 5^\circ$.

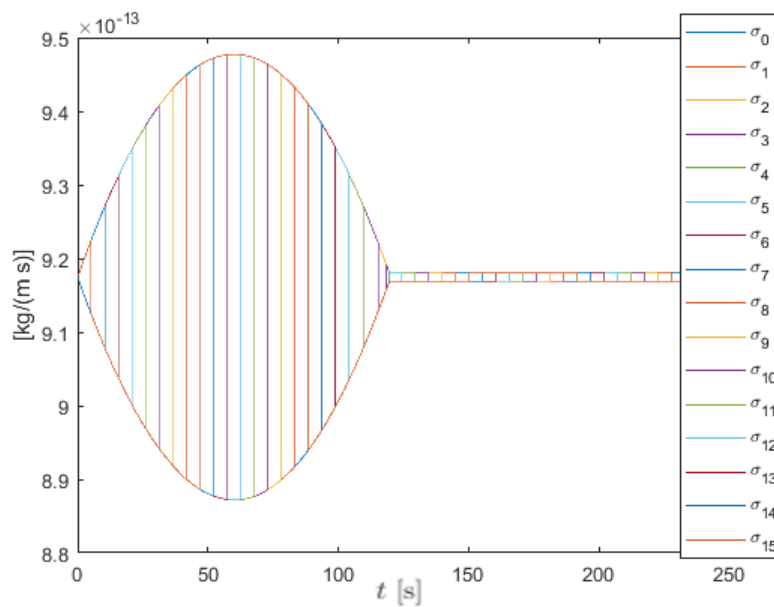


Figura 3.18 Evolución temporal de las variables de control para la maniobra correspondiente a $\alpha_{nf} = 5^\circ$.

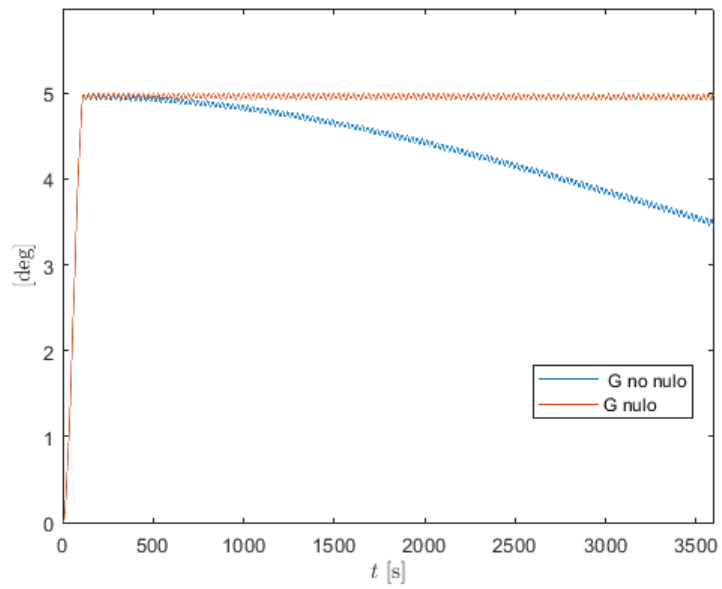


Figura 3.19 Evolución de α_n con \mathcal{G} nulo (rojo) y con \mathcal{G} no nulo (azul)..

4 Aplicación del control LQR

Con este capítulo, se pretende mejorar la ley de control propuesta en la referencia [2]. Tal y como se muestra en la Sección 3.8.4 la ley de control propuesta en [2] presenta algunos aspectos mejorables, entre ellos: la eliminación de las oscilaciones que se producen cuando se llega al régimen permanente y la estabilización de la vela en la actitud final deseada pues el valor de α_n decae con el tiempo, como se ve en la figura 3.19. Para ello, primero se lleva a cabo un proceso de adimensionalización de todas las variables del problema. Posteriormente, se lleva a cabo la linealización del sistema de ecuaciones diferenciales (3.60). Por último, se presenta el control LQR tanto de horizonte infinito como de horizonte finito que se usará para obtener las ganancias que definan la nueva ley de control.

4.1 Adimensionalización del problema

Para evitar la proliferación de valores muy elevados que oculten posibles errores que se cometan durante el proceso, se llevará a cabo un proceso de adimensionalización. De esta forma aseguramos que las simulaciones numéricas realizadas son correctas pues los valores de las variables que intervienen no son elevados y de esta manera no se están ocultando errores que pueda haber a lo largo del proceso. Para ello, previamente se mostrarán las variables adimensionales a utilizar y posteriormente, se presentará como queda el sistema de ecuaciones (3.60) adimensionalizado.

4.1.1 Variables adimensionales

Se presentan a continuación las variables adimensionales que se usarán a lo largo del desarrollo de este capítulo, y por tanto para definir la nueva ley de control. Las variables son las siguientes:

$$\omega_x = \frac{\Omega_x}{\omega}, \quad \omega_y = \frac{\Omega_y}{\omega}, \quad \omega_z = \frac{\Omega_z}{\omega} \quad (4.1)$$

$$\Gamma_k = \frac{\sigma_k}{\sigma} \quad (4.2)$$

$$t^* = \omega \cdot t \quad (4.3)$$

siendo ω la velocidad de giro nominal de la vela solar eléctrica, como se expuso ya con anterioridad, y estando σ definido por la ecuación (3.35), mientras que σ_k viene dada por las expresiones (3.58). Hay que tener en cuenta que los ángulos de Euler son ya adimensionales, por lo que no se introducen variables para ellos.

4.1.2 Sistema de ecuaciones adimensionalizado

Teniendo en cuenta las variables adimensionales definidas en (4.1), (4.2) y (4.3), y aplicando la regla de la cadena se llega a que:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = \frac{d\phi}{dt^*} \cdot \omega \quad (4.4)$$

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{d\Omega_x}{d\omega_x} \cdot \frac{d\omega_x}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = \omega^2 \cdot \frac{d\omega_x}{dt^*} \quad (4.5)$$

Procediendo de igual manera para el resto de variables de estado, el sistema definido en (3.60) en su forma adimensional quedaría de la siguiente manera:

$$f = \begin{cases} f_1 \equiv \frac{d\phi}{dt^*} \cdot \omega = \omega \cdot (\omega_x \cos \theta + \omega_z \sin \theta) \\ f_2 \equiv \frac{d\theta}{dt^*} \cdot \omega = \omega_y \cdot \omega - \omega \cdot (\omega_z \cos \theta - \omega_x \sin \theta) \tan \phi \\ f_3 \equiv \frac{d\psi}{dt^*} \cdot \omega = \omega \cdot (\omega_z \cos \theta - \omega_x \sin \theta) \sec \phi \\ f_4 \equiv \frac{d\omega_x}{dt^*} \cdot \omega^2 = \frac{I_l - I_z}{I_l} \cdot \omega^2 \omega_y \omega_z + \frac{\mathcal{E}}{I_l} \\ f_5 \equiv \frac{d\omega_y}{dt^*} \cdot \omega^2 = \frac{I_z - I_l}{I_l} \cdot \omega^2 \omega_x \omega_z + \frac{\mathcal{F}}{I_l} \\ f_6 \equiv \frac{d\omega_z}{dt^*} \cdot \omega^2 = \frac{\mathcal{G}}{I_z} \end{cases} \quad (4.6)$$

donde las componentes del par de fuerzas total, mostradas en las expresiones (3.45), (3.46) y (3.47); quedarían de la siguiente forma introduciendo la variable adimensional de control:

$$\mathcal{E}_k = uL^2\Gamma_k\sigma \left[b_l \sin \alpha_n [\cos(\delta_n - \zeta_k) \sin \zeta_k (\ln 8 - 2) - \sin \delta_n (\ln 4 - 1)] + \frac{\cos \alpha_n \sin \zeta_k}{2} \right] \quad (4.7)$$

$$\mathcal{F}_k = uL^2\Gamma_k\sigma \left[b_l \sin \alpha_n [\cos \delta_n (\ln 4 - 1) - \cos(\delta_n - \zeta_k) \cos \zeta_k (\ln 8 - 2)] - \frac{\cos \alpha_n \cos \zeta_k}{2} \right] \quad (4.8)$$

$$\mathcal{G}_k = uL^2\Gamma_k\sigma \left[\frac{\sin(\delta_n - \zeta_k) \sin \alpha_n}{2} \right] \quad (4.9)$$

4.2 División en fases del problema. Linealización

En el presente apartado se presentan las ecuaciones resultantes de linealizar el sistema de ecuaciones diferenciales adimensional (4.6). Este proceso de linealización se realiza con el objetivo de poder aplicar el método LQR que nos permite obtener la ley del control óptimo, y así mejorar los resultados mostrados en la referencia [2].

La linealización se hace en torno a la trayectoria de equilibrio en cada una de las fases de las que se compone el problema: una primera fase de tracking, donde el sistema dinámico se encuentra realizando la maniobra que le permite pasar de una actitud inicial a una final y una segunda fase de regulación donde las variables del problema llegan a régimen permanente y se mantienen en los valores que se desean tener al finalizar la maniobra de actitud. En el presente proyecto, primeramente se ha resuelto la fase de regulación y posteriormente la de tracking, con el objetivo de comprobar primeramente si la vela solar eléctrica era capaz de mantenerse en la actitud deseada durante una cantidad considerable de tiempo.

4.2.1 Valores de referencia

Valores de referencia en la fase de regulación

Los valores de referencia aquí mostrados, se obtienen del equilibrio del sistema, siendo este un equilibrio dinámico pues la vela al final de la maniobra sigue girando alrededor de su eje. Estos valores son los valores que tienen que tener las distintas variables del problema para que la actitud al final de la maniobra sea la deseada. Dichos valores, además, deben verificar las ecuaciones diferenciales que componen el sistema de ecuaciones (4.6). Es por ello, que el valor de referencia de algunas de las variables se obtiene a partir de dichas ecuaciones.

Teniendo en cuenta la situación de partida definida en la Sección 3.2; la expresión (3.12) de la matriz DCM, que permite expresar un vector definido en ejes inerciales I en ejes cuerpo B y la definición de los parámetros α_n y δ_n de la Sección 3.1, se llega a las expresiones:

$$\cos \alpha_n = \cos \theta \cos \phi \quad (4.10)$$

$$\sin \delta_n \sin \alpha_n = \sin \phi \quad (4.11)$$

$$\cos \delta_n \sin \alpha_n = -\sin \theta \cos \phi \quad (4.12)$$

Por lo que si fijamos que $\alpha_n^{ref} = 5^\circ$, que es la actitud que queremos mantener al final de la maniobra y tenemos en cuenta la expresión (4.10), podríamos fijar que $\phi_{ref} = 0^\circ$ y, por tanto, obtendríamos que $\theta_{ref} = \alpha_n^{ref}$. El valor de referencia de δ_n se podría obtener fácilmente de la expresión (4.11) o de la (4.12), y este sería $\delta_n^{ref} = 180^\circ$. Una vez hecho esto, considerando la expresión f_2 del sistema (4.6) y teniendo en cuenta las imposiciones anteriores con respecto a ϕ_{ref} y a θ_{ref} se deduce que $\omega_{y_{ref}} = 0$. Por otro lado, si imponemos que $\omega_{z_{ref}} = 1$ de la ecuación f_1 del sistema (4.6) obtendríamos que el valor de referencia de la velocidad angular en el eje x_B adimensionalizada es $\omega_{x_{ref}} = -\tan \theta_{ref}$. Por último, para obtener el valor de referencia de la variable de estado ψ se recurre a la tercera ecuación del sistema (4.6), en la que sustituyendo los valores de referencia de las variables anteriores se llega a que $\psi_{ref} = \omega / \cos \theta_{ref}$, por lo que integrando se tendría que $\psi_{ref} = \omega \cdot t / \cos \theta_{ref}$.

A modo de resumen, se muestran a continuación los valores de referencia de las distintas variables de estado adimensionalizadas

$$\vec{X}_{ref} = \begin{pmatrix} \phi_{ref} \\ \theta_{ref} \\ \psi_{ref} \\ \omega_{x_{ref}} \\ \omega_{y_{ref}} \\ \omega_{z_{ref}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_n^{ref} \\ \omega \cdot t / \cos \theta_{ref} \\ -\tan \theta_{ref} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Con el procedimiento seguido para el cálculo de los valores de referencia en la fase de regulación es posible asegurar que dichos valores son válidos para el proceso de linealización, pues satisfacen las ecuaciones del problema (4.6).

Por otro lado, para obtener los valores de referencia de las variables de control, $\vec{\Gamma}_{ref}$, se minimiza la siguiente función

$$f(\vec{\Gamma}) = \Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \dots + \Gamma_{N-1}^2 \quad (4.14)$$

pero teniendo en cuenta que, dichos valores tienen que satisfacer las ecuaciones dinámicas de Euler, siendo estas las expresiones f_4 , f_5 y f_6 del sistema (4.6) ya adimensionalizado, lo que supondrán restricciones a la hora de resolver el sistema de ecuaciones resultante. Además, dichas ecuaciones deberán ser particularizadas para los valores de referencia ya calculados anteriormente, por lo que, los términos correspondientes a las derivadas de las velocidades angulares en las ecuaciones dinámicas de Euler serían nulos. Por tanto, las restricciones a las que estaría sujeto el sistema serían

$$\vec{\omega}_{ref}^\times \cdot I \cdot \vec{\omega}_{ref} = D \cdot \vec{\Gamma}_{ref} \quad (4.15)$$

donde I sería la matriz de inercias del sistema, mientras que, D sería la matriz de coeficientes de las variables de control, estando esta particularizada para los valores de referencia. Teniendo en cuenta esto el sistema (4.15) un poco más desarrollado sería

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_{ref}} & \omega_{y_{ref}} \\ \omega_{z_{ref}} & 0 & -\omega_{x_{ref}} \\ -\omega_{y_{ref}} & \omega_{x_{ref}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_{ref}} \\ \omega_{y_{ref}} \\ \omega_{z_{ref}} \end{pmatrix} = D \cdot \vec{\Gamma}_{ref} \quad (4.16)$$

La matriz D tendría la siguiente forma

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & \dots & d_{2N} \\ d_{31} & \dots & d_{3N} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

identificando a N con el número de tethers en la vela solar eléctrica y siendo los valores de los elementos de la matriz D los a continuación mostrados:

$$d_{1k} = \frac{v_{vs} L^2 \sigma}{\omega^2} \left[b_l \sin \alpha_n^{ref} [\cos(\delta_n^{ref} - \zeta_k) \sin \zeta_k (\ln 8 - 2) - \sin \delta_n^{ref} (\ln 4 - 1)] + \frac{\cos \alpha_n^{ref} \sin \zeta_k}{2} \right] \quad (4.18)$$

$$d_{2k} = \frac{v_{vs} L^2 \sigma}{\omega^2} \left[b_l \sin \alpha_n^{ref} [\cos \delta_n^{ref} (\ln 4 - 1) - \cos(\delta_n^{ref} - \zeta_k) \cos \zeta_k (\ln 8 - 2)] - \frac{\cos \alpha_n^{ref} \cos \zeta_k}{2} \right] \quad (4.19)$$

$$d_{3k} = \frac{v_{vs} L^2 \sigma}{\omega^2} \left[\frac{\sin(\delta_n^{ref} - \zeta_k) \sin \alpha_n^{ref}}{2} \right] \quad (4.20)$$

Dichas componentes de la matriz D son valores constantes, debido a que los valores de referencia de las variables de estado del problema lo son en la fase de regulación (excepto ψ , pero esta variable no aparece en ninguna expresión).

Las expresiones resultantes del sistema (4.15) serían

$$\begin{cases} G_1(\vec{\Gamma}_{ref}) \equiv d_{11} \cdot \Gamma_0^{ref} + d_{12} \cdot \Gamma_{1ref} + \dots + d_{1N} \cdot \Gamma_{N-1}^{ref} - (I_z - I_t) \omega_y \omega_z = 0 \\ G_2(\vec{\Gamma}_{ref}) \equiv d_{21} \cdot \Gamma_0^{ref} + d_{22} \cdot \Gamma_1^{ref} + \dots + d_{2N} \cdot \Gamma_{N-1}^{ref} - (I_t - I_z) \omega_y \omega_z = 0 \\ G_3(\vec{\Gamma}_{ref}) \equiv d_{31} \cdot \Gamma_0^{ref} + d_{32} \cdot \Gamma_1^{ref} + \dots + d_{3N} \cdot \Gamma_{N-1}^{ref} = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Para minimizar la función (4.14) sujeta a las restricciones (4.21), se usa el teorema de los multiplicadores de Lagrange. De tal forma que el sistema a resolver para hallar los valores de referencia de las variables de control es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0^{ref}} - \kappa_1 \frac{\partial G_1(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0^{ref}} - \kappa_2 \frac{\partial G_2(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0^{ref}} - \kappa_3 \frac{\partial G_3(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0^{ref}} = 0 \\ \frac{\partial f(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_1^{ref}} - \kappa_1 \frac{\partial G_1(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_1^{ref}} - \kappa_2 \frac{\partial G_2(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_1^{ref}} - \kappa_3 \frac{\partial G_3(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_1^{ref}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} - \kappa_1 \frac{\partial G_1(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} - \kappa_2 \frac{\partial G_2(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} - \kappa_3 \frac{\partial G_3(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} = 0 \\ G_1(\vec{\Gamma}_{ref}) = 0 \\ G_2(\vec{\Gamma}_{ref}) = 0 \\ G_3(\vec{\Gamma}_{ref}) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

donde $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3]$ son los multiplicadores de Lagrange. El sistema (4.22) se trata de un sistema de $N+3$ ecuaciones con $N+3$ incógnitas (variables de control adimensionales y multiplicadores de Lagrange) completamente lineal, por lo que se puede resolver mediante la aplicación de la eliminación gaussiana y la posterior sustitución regresiva. Además, se puede asegurar que la solución obtenida se trata de un mínimo, pues según como se ha definido la función $f(\vec{\Gamma})$, su matriz diferencial segunda, particularizada en la solución del sistema, es definida positiva.

Al obtener los valores de referencia de las variables de control de esta manera, lo que se pretende es repartir el control de una manera relativamente equitativa entre los distintos tethers que componen la vela solar eléctrica.

Valores de referencia en la fase de tracking

Esta fase es la que identificamos con el periodo durante el cual el sistema dinámico está realizando la maniobra para pasar de la actitud que tenía inicialmente a la deseada o final, es decir, como la fase transitoria.

La forma de obtener los valores de referencia aquí será similar a la seguida en la fase de regulación, con la única salvedad de que ahora muchos de esos valores dependerán del tiempo, pues el sistema aún no ha alcanzado su equilibrio dinámico.

Recordando que la expresión (3.48) de α_n era la que permitía pasar de una actitud a otra empleando la menor energía posible si el giro se produce alrededor de un eje de simetría del cuerpo y se tiene un actuador

que genera el par de giro como ocurre en el caso que nos ocupa, parece buena razón para tomar dicho valor dependiente del tiempo como el valor de referencia de α_n durante la fase de tracking. Por tanto, se tiene que

$$\alpha_n^{ref}(t^*) = \frac{6\bar{\alpha}_{nf}}{2(t_f^*)^2} \left((t^*)^2 - \frac{2}{3} \frac{(t^*)^3}{t_f^*} \right) [1(t^*) - 1(t^* - t_f^*)] \quad (4.23)$$

donde ya se ha introducido la variable temporal adimensional.

De igual forma a como se hizo en la fase de regulación, se fija que $\phi_{ref} = 0$, de esta manera mediante la expresión (4.10) se obtiene que $\theta_{ref} = \alpha_n^{ref}$, por lo que

$$\theta_{ref}(t^*) = \frac{6\bar{\alpha}_{nf}}{2(t_f^*)^2} \left((t^*)^2 - \frac{2}{3} \frac{(t^*)^3}{t_f^*} \right) [1(t^*) - 1(t^* - t_f^*)] \quad (4.24)$$

El valor de referencia de δ_n se obtiene de igual forma que en la fase de regulación y el resultado es el mismo.

De la segunda expresión del sistema (4.6), teniendo en cuenta los valores de referencia de ϕ_{ref} y de θ_{ref} se deduce que

$$\omega_{yref}(t^*) = \dot{\theta}_{ref} = \frac{6\bar{\alpha}_{nf}}{(t_f^*)^2} \left(t^* - \frac{(t^*)^2}{t_f^*} \right) [1(t^*) - 1(t^* - t_f^*)] \quad (4.25)$$

Por otro lado, fijando que $\omega_{zref} = 1$, el valor de referencia de ω_x se puede obtener de la primera expresión del sistema (4.6). Dicho valor es

$$\omega_{xref}(t^*) = -\tan(\theta_{ref}(t^*)) \quad (4.26)$$

Por ultimo, el valor de referencia de la variable de estado ψ se obtendría de forma análoga a la hecha en la fase de regulación y su valor es el mismo.

Por tanto a modo de resumen, igual que se hizo anteriormente se muestran los valores de referencia para las distintas variables de estado durante la fase transitoria

$$\vec{X}_{ref}(t^*) = \begin{pmatrix} \phi_{ref}(t^*) \\ \theta_{ref}(t^*) \\ \psi_{ref}(t^*) \\ \omega_{xref}(t^*) \\ \omega_{yref}(t^*) \\ \omega_{zref}(t^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_n(t^*) \\ t^* / \cos(\theta_{ref}(t^*)) \\ -\tan \theta_{ref}(t^*) \\ \dot{\theta}_{ref}(t^*) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Para obtener los valores de referencia de las variables de control en esta fase, se procede de igual manera que en régimen permanente. Es decir, se minimiza la función (4.14) pero teniendo en cuenta que ahora las variables de control dependen del tiempo, no son constantes. Además, estos valores deben seguir satisfaciendo las ecuaciones dinámicas de Euler, por lo que, al igual que antes, suponen restricciones a la hora de resolver el sistema. Sin embargo, ahora en estas ecuaciones no solo aparecerían los términos giroscópicos, sino que también aparecen el término asociado a las derivadas temporales de las velocidades angulares en la referencia. De esta forma las restricciones a las que está sujeto el sistema son

$$I \cdot \dot{\vec{\omega}}_{ref} + \vec{\omega}_{ref}^\times \cdot I \cdot \vec{\omega}_{ref} = D(t^*) \cdot \vec{\Gamma}_{ref} \quad (4.28)$$

La matriz D tendría la misma estructura que antes pero ahora sus componentes dependen de la variable temporal adimensional como a continuación se muestra

$$d_{1k}(t^*) = \frac{v_{vs} L^2 \sigma}{\omega^2} \left[b_l \sin(\alpha_n^{ref}(t^*)) [\cos(\delta_n^{ref} - \zeta_k) \sin \zeta_k (\ln 8 - 2) - \sin \delta_n^{ref} (\ln 4 - 1)] + \frac{\cos(\alpha_n^{ref}(t^*)) \sin \zeta_k}{2} \right] \quad (4.29)$$

$$d_{2k}(t^*) = \frac{v_{vs} L^2 \sigma}{\omega^2} \left[b_l \sin(\alpha_n^{ref}(t^*)) [\cos \delta_n^{ref} (\ln 4 - 1) - \cos(\delta_n^{ref} - \zeta_k) \cos \zeta_k (\ln 8 - 2)] - \frac{\cos(\alpha_n^{ref}(t^*)) \cos \zeta_k}{2} \right] \quad (4.30)$$

$$d_{3k}(t^*) = \frac{v_{vs} L^2 \sigma}{\omega^2} \left[\frac{\sin(\delta_n^{ref} - \zeta_k) \sin(\alpha_n^{ref}(t^*))}{2} \right] \quad (4.31)$$

Por tanto, expresiones resultantes del sistema (4.28) serían

$$\begin{cases} G_1(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*) \equiv d_{11}(t^*) \cdot \Gamma_0^{ref} + d_{12}(t^*) \cdot \Gamma_{1ref} + \dots + d_{1N}(t^*) \cdot \Gamma_{N-1}^{ref} - (I_z - I_t) \omega_y \omega_z - I_t \dot{\omega}_x = 0 \\ G_2(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*) \equiv d_{21}(t^*) \cdot \Gamma_0^{ref} + d_{22}(t^*) \cdot \Gamma_1^{ref} + \dots + d_{2N}(t^*) \cdot \Gamma_{N-1}^{ref} - (I_t - I_z) \omega_y \omega_z - I_t \dot{\omega}_y = 0 \\ G_3(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*) \equiv d_{31}(t^*) \cdot \Gamma_0^{ref} + d_{32}(t^*) \cdot \Gamma_1^{ref} + \dots + d_{3N}(t^*) \cdot \Gamma_{N-1}^{ref} - I_z \dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

De igual forma que antes, para minimizar la función (4.14) sujeta a las restricciones (4.32) se usa el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Por lo que el sistema a resolver es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0^{ref}} - \kappa_1 \frac{\partial G_1(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_0^{ref}} - \kappa_2 \frac{\partial G_2(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_0^{ref}} - \kappa_3 \frac{\partial G_3(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_0^{ref}} = 0 \\ \frac{\partial f(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_1^{ref}} - \kappa_1 \frac{\partial G_1(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_1^{ref}} - \kappa_2 \frac{\partial G_2(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_1^{ref}} - \kappa_3 \frac{\partial G_3(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_1^{ref}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} - \kappa_1 \frac{\partial G_1(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} - \kappa_2 \frac{\partial G_2(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} - \kappa_3 \frac{\partial G_3(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*)}{\partial \Gamma_{N-1}^{ref}} = 0 \\ G_1(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*) = 0 \\ G_2(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*) = 0 \\ G_3(\vec{\Gamma}_{ref}, t^*) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Al igual que antes se trata de un sistema de $N+3$ ecuaciones con $N+3$ incógnitas, completamente lineal. La principal diferencia con la fase de regulación es la dependencia que se tiene con respecto al tiempo que obligará a resolver el sistema (4.33) en cada instante de tiempo hasta que se complete la fase de tracking, es decir, hasta que finalice la maniobra de actitud, por tanto, los valores de referencia de las variables de control son diferentes en cada instante. Esto se realizará de manera previa, es decir, el sistema no se resolverá durante tiempo real mientras se ejerce el control, pues como se verá en el apartado 4.3.2 el control LQR de horizonte finito se resuelve desde el futuro hacia el presente.

4.2.2 Sistema de ecuaciones adimensional linealizado

Para llevar a cabo el proceso de linealización, es necesario derivar cada una de las ecuaciones, que componen el sistema de ecuaciones diferenciales (4.6), con respecto a las variables de estado (ángulos de Euler y velocidades angulares) y con respecto a las variables de control, estando estas en su versión adimensional. Las derivadas de las ecuaciones con respecto a las variables de estado adimensionales se almacenan en una matriz denominada A , mientras que las derivadas con respecto a las variables de control adimensionales se almacenan en una matriz denominada B . Dichas matrices se particularizarán para los valores de referencia de las variables del problema. Estos valores de referencia se corresponden con los valores de las variables del problema que se desean tener en cada instante de tiempo. Dichos valores deben satisfacer cada una de las ecuaciones diferenciales que componen el problema. Adicionalmente, se realiza un cambio de variables en el que se sustituyen las variables originales del problema por unas incrementales, definiéndose estas como la desviación de las variables del problema de su referencia. El producto entre las matrices A y B , anteriormente indicadas por las correspondientes variables incrementales es el que proporciona las ecuaciones diferenciales linealizadas.

Sistema de ecuaciones adimensional linealizado en la fase de regulación

La expresión linealizada del sistema de ecuaciones (4.6) en régimen permanente viene dada por:

$$\delta \dot{\vec{X}} = \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \vec{X}} \delta \vec{X} + \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \vec{\Gamma}} \delta \vec{\Gamma} \quad (4.34)$$

donde \vec{X} es el vector compuesto por todas las variables de estado adimensionales y $\vec{\Gamma}$ el compuesto por todas las variables de control adimensionales, es decir:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

En concordancia con lo que se dijo al inicio de la Sección 4.2.2, se tienen las siguientes igualdades $A = \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \vec{X}}$ y $B = \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \vec{\Gamma}}$. Por lo que ambas matrices tendrían la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \phi} & \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \psi} & \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_x} & \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_y} & \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_2(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \phi} & \frac{\partial f_2(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \psi} & \frac{\partial f_2(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_x} & \frac{\partial f_2(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_y} & \frac{\partial f_2(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_3(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \phi} & \frac{\partial f_3(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \psi} & \frac{\partial f_3(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_x} & \frac{\partial f_3(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_y} & \frac{\partial f_3(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_4(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \phi} & \frac{\partial f_4(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \theta} & \frac{\partial f_4(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \psi} & \frac{\partial f_4(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_x} & \frac{\partial f_4(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_y} & \frac{\partial f_4(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_5(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \phi} & \frac{\partial f_5(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \theta} & \frac{\partial f_5(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \psi} & \frac{\partial f_5(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_x} & \frac{\partial f_5(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_y} & \frac{\partial f_5(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \phi} & \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \theta} & \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \psi} & \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_x} & \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_y} & \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \omega_z} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_0} & \dots & \frac{\partial f_6(\vec{X}_{ref}, \vec{\Gamma}_{ref})}{\partial \Gamma_{N-1}} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Por otro lado, $\delta \vec{X}$ y $\delta \vec{\Gamma}$ son las variables incrementales, que se definen como la desviación de las variables del problema respecto de sus valores de referencia

$$\delta \vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_{ref}, \quad \delta \vec{\Gamma} = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}_{ref} \quad (4.38)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones linealizado tendría la siguiente forma

$$\delta \dot{\vec{X}} = A \delta \vec{X} + B \delta \vec{\Gamma} \quad (4.39)$$

Como se puede ver, ni A ni B dependen del tiempo, ya que, ninguno de los valores de referencia dependen del tiempo excepto ψ_{ref} , sin embargo, esta variable no aparece en ninguna de las ecuaciones que componen el sistema (4.6), por tanto, las derivadas que aparecen en A con respecto a dicha variable son nulas. Este motivo es el que permite la utilización del control LQR con horizonte infinito, que se presenta en la Sección 4.3, para la obtención de la nueva ley de control en la fase de regulación.

Sistema de ecuaciones adimensional linealizado en la fase de tracking

En esta ocasión, la expresión linealizada del sistema de ecuaciones (4.6) es la siguiente

$$\delta \dot{\vec{X}} = \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}(t^*), \vec{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \vec{X}} \delta \vec{X} + \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}(t^*), \vec{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \vec{\Gamma}} \delta \vec{\Gamma} \quad (4.40)$$

donde se muestra la dependencia con el tiempo adimensional tanto de las variables de estado como de las variables de control. Al igual que antes, se tiene las siguientes igualdades $A(t^*) = \frac{\partial f(\vec{X}_{ref}(t^*), \vec{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \vec{X}}$ y

$B(t^*) = \frac{\partial f(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \bar{\Gamma}}$, donde ahora tanto A como B dependen del tiempo. La forma de ambas matrices es la siguiente

$$A(t^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \phi} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_2(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \phi} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_3(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \phi} & \cdots & \frac{\partial f_3(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_4(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \phi} & \cdots & \frac{\partial f_4(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_5(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \phi} & \cdots & \frac{\partial f_5(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial f_6(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \phi} & \cdots & \frac{\partial f_6(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \omega_z} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$B(t^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \Gamma_0} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \Gamma_{N-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_6(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \Gamma_0} & \cdots & \frac{\partial f_6(\bar{X}_{ref}(t^*), \bar{\Gamma}_{ref}(t^*))}{\partial \Gamma_{N-1}} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

El sistema de ecuaciones adimensional y linealizado en esta fase sería

$$\delta \dot{\bar{X}} = A(t^*) \delta \bar{X} + B(t^*) \delta \bar{\Gamma} \quad (4.43)$$

Dada la dependencia de A y de B con el tiempo en la fase transitoria en la que se está realizando la maniobra para alcanzar la actitud final, en esta ocasión, a diferencia del régimen permanente, no es posible aplicar el control LQR de horizonte infinito y hay que recurrir al control LQR de horizonte finito que se define en la Sección (4.3).

4.3 Control LQR

El control LQR (*Linear Quadratic Regulator*) se trata de un método de control óptimo que pretende controlar un sistema dinámico al mínimo coste posible y asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado a través de ganancias de realimentación. Este método, lo que pretende es minimizar las desviaciones de los valores de las variables del problema respecto a los valores deseados, es decir, los valores de referencia mostrados en la Sección 4.2.1. De esta forma, se pretende determinar aquellas ganancias que minimizan estas desviaciones no deseadas. En concreto, se usará el control LQR con horizonte infinito para la regulación pues, como se ha dicho anteriormente, las matrices A y B del sistema no dependen del tiempo. Sin embargo, para la fase de tracking será necesario el uso del control LQR con horizonte finito, pues las matrices A y B resultantes de la linealización sí que dependen del tiempo. Para presentar ambos modelos nos basaremos en la referencia [10].

4.3.1 Control LQR de horizonte infinito

Con el control LQR de horizonte infinito lo que se pretende es encontrar una ley de control con realimentación que minimice el siguiente potencial

$$J = \int_{t=0}^{t=\infty} (\delta \bar{X}^T(t) Q \delta \bar{X}(t) + \delta \bar{\Gamma}^T(t) R \delta \bar{\Gamma}(t)) dt \quad (4.44)$$

siendo Q y R dos matrices definidas positivas que representan los pesos asignados a las variables de estado y a las de control respectivamente. Además, su selección determina en gran medida la calidad del controlador. Estas matrices han sido elegidas mediante un proceso de prueba y error, y son las siguientes

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{V_w^2} \cdot 10^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

La ley de control óptima que minimiza el potencial mostrado en (4.44) es

$$\delta\vec{\Gamma} = K\delta\vec{X} \quad (4.46)$$

desarrollándola un poco más se tiene que

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_{ref} + K(\vec{X} - \vec{X}_{ref}) \quad (4.47)$$

donde la ganancia K se encuentra de la siguiente manera

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (4.48)$$

siendo P la matriz resultante de hallar la solución de la Ecuación Algebraica de Riccati que se muestra a continuación

$$Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (4.49)$$

Dicha ecuación solo es resoluble si el sistema es controlable. Para ello, la matriz $C=[B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B]$ debe ser de rango completo. En nuestro caso, en el que se tienen 16 tethers se satisface dicha condición.

La ley de control recogida en (4.47) está compuesta por una referencia a seguir y una realimentación que tiene como fin corregir las desviaciones que se producen con respecto a los valores de referencia. Esta es la nueva ley que se le aplica al sistema en la fase de regulación con el fin de eliminar las oscilaciones que aparecen en el régimen permanente al aplicar la ley de control mostrada en la Sección 3.8.3.

4.3.2 Control LQR de horizonte finito

Con el objetivo de mejorar el comportamiento de las variables durante la fase de tracking se introduce este control en el transitorio. Además, al realizar esto se recupera el poder de decisión en cuanto a la fijación del tiempo en el que se quiere llegar a la actitud deseada. Por tanto, se aplica la ley de control conseguida mediante el control LQR con horizonte finito durante la fase transitoria y posteriormente se pasa a aplicar la ley de control obtenida con el control LQR de horizonte infinito que se mostró en la Sección 4.3.1.

En contraposición al control LQR con horizonte infinito, este método se usa en la práctica cuando las matrices A y B resultantes de realizar el proceso de linealización dependen del tiempo, en nuestro caso en la fase de tracking como se indicó en la Sección 4.2.2.

Esta variación de A y B con el tiempo hace que la solución se complique y que, por tanto, sea necesario un método más avanzado para poder obtener una nueva ley de control.

El método LQR con horizonte infinito se basa en buscar, una ley de control $\delta\vec{\Gamma}(t)$ con realimentación que minimice el siguiente potencial

$$J = \int_0^T (\delta\vec{X}^T(t) Q \delta\vec{X}(t) + \delta\vec{\Gamma}^T(t) R \delta\vec{\Gamma}(t)) dt + \delta\vec{X}^T(T) Q_{fin} \delta\vec{X}(T) \quad (4.50)$$

siendo Q , R y Q_{fin} matrices definidas positivas que se identifican con los pesos asignados a las distintas variables del problema, Q el peso asignado a las variables de estado, R el peso asignado a las variables de control y Q_{fin} el peso asignado al estado final. Al igual que en el control LQR de horizonte infinito, la elección de Q , R y Q_{fin} determina en gran medida la calidad del controlador. En este caso las matrices Q y R se definen de la misma forma que en la Sección 4.3.1, mientras que Q_{fin} sería la siguiente

$$Q_{fin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

A diferencia del método LQR con horizonte infinito, este método al ser de horizonte finito, no requiere la hipótesis de controlabilidad, es decir, no es necesario que la matriz C , definida anteriormente, sea de rango completo. Sin embargo, puede haber problemas para obtener resultados si hay pérdida de controlabilidad en algún instante de tiempo, como bien se indica en [10].

La ley de control que minimiza el funcional mostrado en (4.50) es la siguiente

$$\delta \vec{\Gamma} = K(t) \cdot \delta \vec{X} \quad (4.52)$$

desarrollándola un poco más se tiene que

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_{ref} + K(t)(\vec{X} - \vec{X}_{ref}) \quad (4.53)$$

donde la ganancia $K(t)$ se encuentra de la siguiente manera

$$K(t) = -R^{-1}(t)B(t)^T P(t) \quad (4.54)$$

siendo $P(t)$ la matriz resultante de resolver la Ecuación Diferencial de Riccati que a continuación se muestra. Dicha ecuación es siempre resoluble pero no se puede resolver por los métodos convencionales del cálculo diferencial. Además, no se puede resolver en tiempo real, sino que hay que resolverla desde el futuro hacia el presente pues la condición de contorno está dada en el instante final (actitud final).

$$-\dot{P} = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t), \quad P(t_f) = Q_{fin} \quad (4.55)$$

La ecuación (4.52) define la ley de control que se aplica en la fase transitoria, durante la realización de la maniobra. Al igual que antes en la fase de regulación dicha ley de control está compuesta por una referencia a seguir y una realimentación que pretende minimizar las desviaciones que se produzcan respecto a los valores de referencia. La principal diferencia ahora en relación con el régimen permanente es que se tiene una dependencia con el tiempo tanto de la ganancia como de los valores de referencia.

4.4 Resultados al aplicar el Control LQR

4.4.1 Resultados al aplicar el control LQR de horizonte infinito

A continuación, se muestran los resultados obtenidos, con respecto a las variables del problema sin adimensionalizar, en las simulaciones numéricas al aplicar la ley de control (4.47) durante todo instante de tiempo.

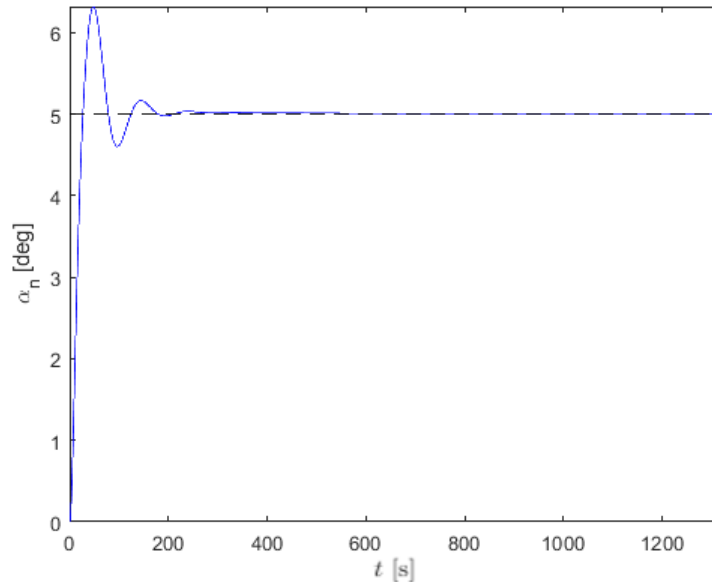


Figura 4.1 Evolución temporal de α_n aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47).

Como se puede ver en la figura 4.1 tras un transitorio la variable α_n alcanza el valor deseado de 5° , que se fija al inicio. Se ha logrado el primer objetivo que era el de eliminar las oscilaciones que se producían en

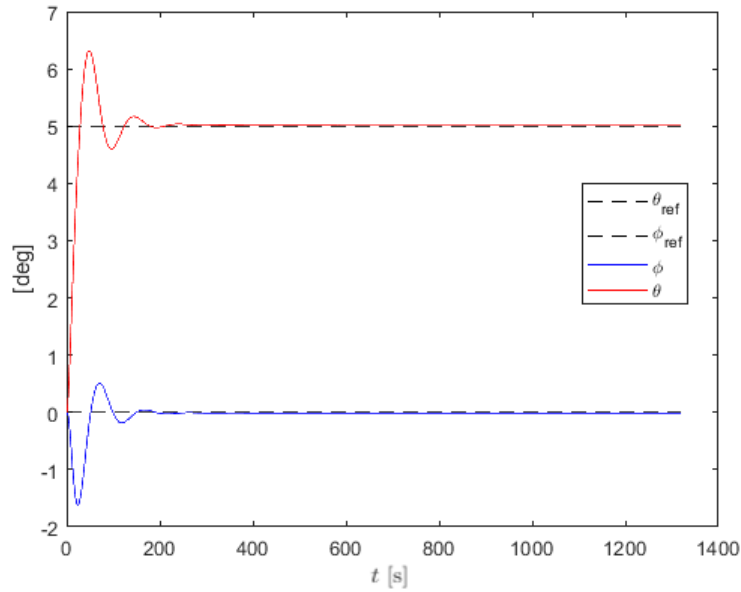


Figura 4.2 Evolución temporal de ϕ (azul) y θ (rojo) aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47).

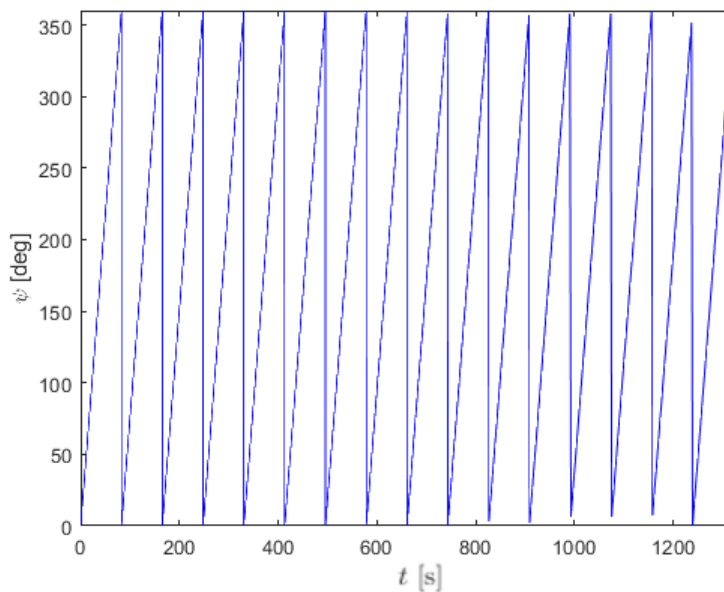


Figura 4.3 Evolución temporal de ψ aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47).

dicha variable al alcanzar el régimen permanente. Además se puede ver como α_n se mantiene en dicho valor, no decae con el tiempo, algo que sí ocurría al aplicar la ley de control de la referencia [2].

En la figura 4.2, se puede ver como también las variables ϕ y θ se estabilizan en torno a sus valores de referencia tras el transcurso de un cierto periodo de tiempo. Además, se puede observar como la evolución de θ es prácticamente la misma que la de α_n , algo lógico pues se había fijado que durante la fase de regulación ambas variables tomaran el mismo valor de referencia.

Por otro lado, en la figura 4.3 se ve como la evolución de ψ es periódica debido al valor de referencia de esta variable, que se tomó en la fase de regulación. Dicho valor era dependiente del tiempo y es esa dependencia la que produce la periodicidad que se observa.

Como pasa con el resto de variables de estado, las velocidades angulares alcanzan los valores de referencia

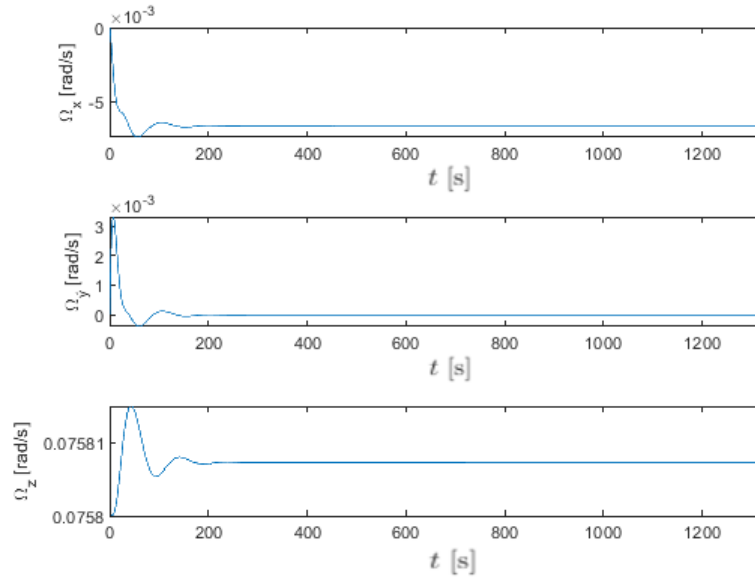


Figura 4.4 Evolución temporal de las velocidades angulares aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47).

fijados en la fase de regulación tras un periodo transitorio, siendo estos valores una vez se deshace la adimensionalización $\omega_{z_{ref}} = \omega = 0,0758$ rad/s (valor que se fijó en la Sección 3.8.4), $\omega_{y_{ref}} = 0$ y $\omega_{x_{ref}} = -\omega \cdot \tan \theta_{ref}$ como bien se observa en la figura 4.4.

Por ultimo, en la figura 4.5 se puede ver la evolución de todas las variables de control para el caso en el que se tienen 16 tethers. Como se puede observar el control ha quedado relativamente repartido con equidad entre los distintos tethers. Además, dichas variables también se estabilizan en sus valores de referencia cuando las variables de estado lo hacen, pues si se observa la ley de control (4.47) el término correspondiente a la diferencia entre los valores de las variables de estado y sus valores de referencia se anularía, y por tanto, las variables de control serían iguales a sus valores de referencia.

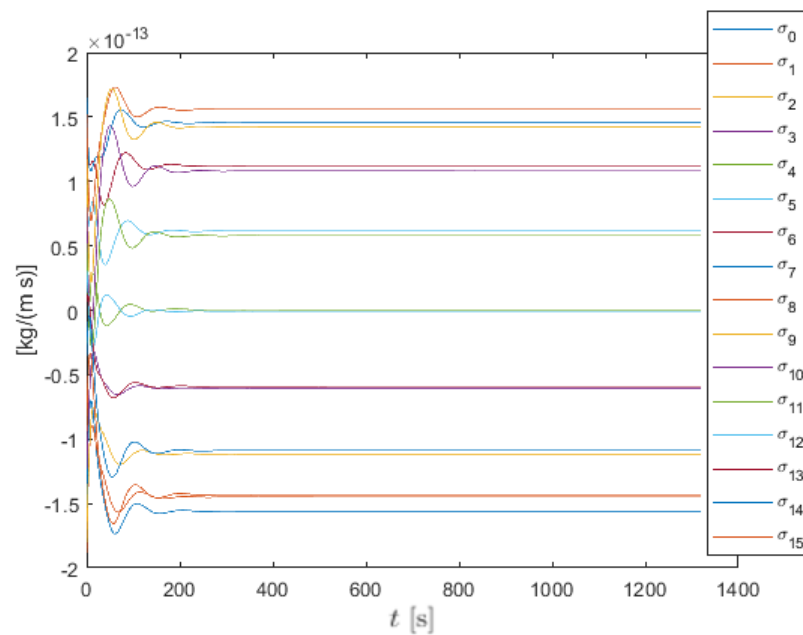


Figura 4.5 Evolución temporal de las variables de control aplicando en todo instante de tiempo la ley de control (4.47).

4.4.2 Resultados al aplicar Control LQR de horizonte finito en la fase de tracking y Control LQR de horizonte infinito en la fase de regulación

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al aplicar, como se ha dicho al inicio de la sección, la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

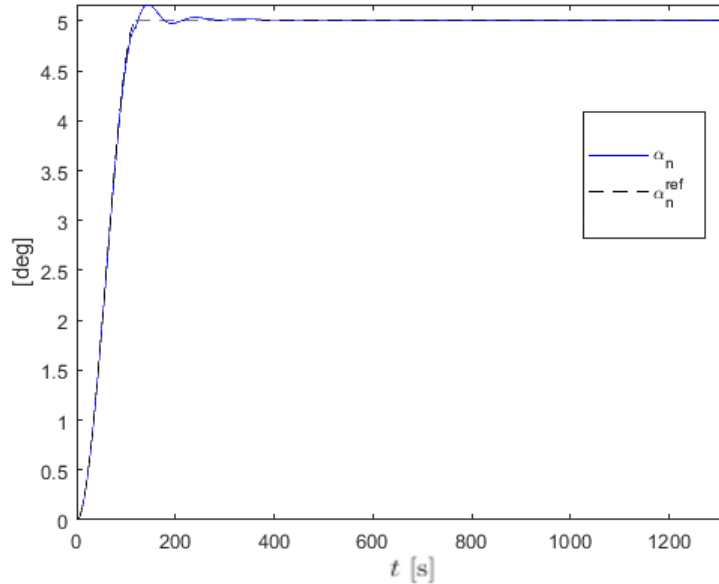


Figura 4.6 Evolución temporal de α_n al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

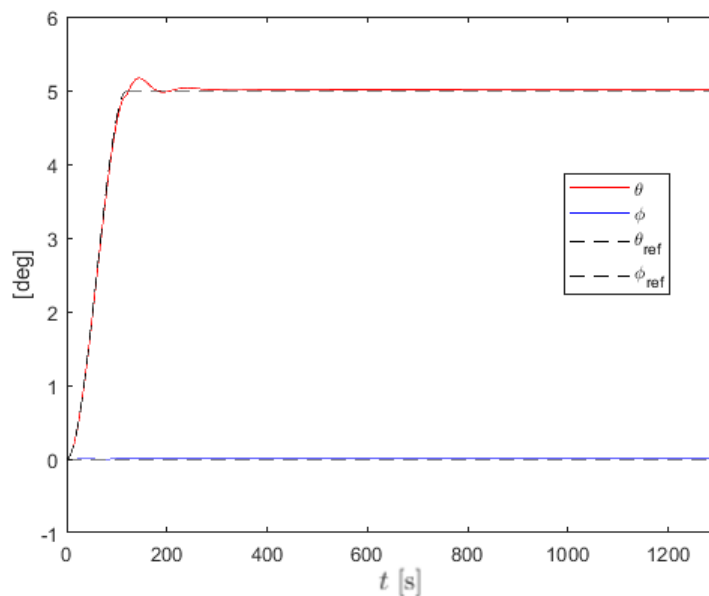


Figura 4.7 Evolución temporal de ϕ y θ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

Como se puede ver en las figuras 4.6 y 4.7 la evolución en la fase transitoria de las variables aquí representadas ha mejorado con respecto a las que se veían en las figuras 4.1 y 4.2, puesto que ya no se producen tantas oscilaciones. Sin embargo, es cierto que en las figuras 4.6 y 4.7 se puede apreciar una cierta

oscilación en las variables α_n y θ , justo antes de llegar al régimen permanente, coincidiendo esto con el instante en el que se pasa de aplicar una ley de control a aplicar la otra. A pesar de ello, dicha oscilación no es muy elevada y tanto en régimen transitoria (obviando la oscilación) como en régimen permanente las evoluciones se ajustan bastantes a las referencias (representadas en línea negra rayada). En esta sección, se estudia la mejoría de la sobreoscilación comentada a través de la consideración de un polinomio cúbico como valor de referencia en la variable α_n durante la fase transitoria, pues al ser su derivada un polinomio de segundo grado la transición entre leyes de control podría ser más suave.

Por otro lado, la evolución de ψ mostrada en la figura 4.8 es idéntica a la que aparecía en la figura 4.3, algo que tiene lógica pues los valores de referencia obtenidos en la fase de tracking y en la de regulación para dicha variable eran idénticos.

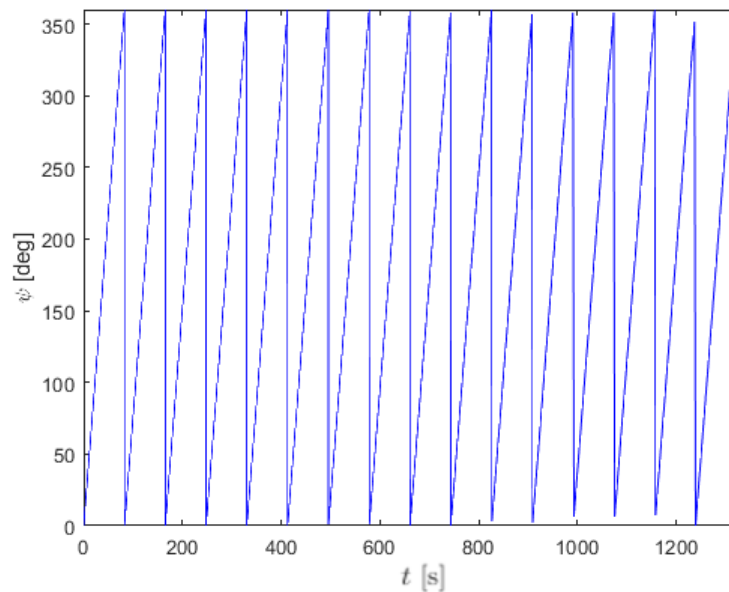


Figura 4.8 Evolución temporal de ψ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

Con respecto a las velocidades angulares puede visualizarse en la imagen 4.9 que la evolución en la fase transitoria tanto de Ω_x como de Ω_y se ha suavizado bastante con respecto a las evoluciones mostradas en la figuras 4.4. Sin embargo, Ω_z permanece prácticamente igual que en la fase de regulación, pues se han tomado los mismos valores de referencia en ambos casos. La componente Ω_x se ajusta bastante bien a la evolución de su referencia, mientras que en la componente Ω_y el ajuste ya no es tan exacto, hay diferencias entre los valores que toma la variable y los que toma su valor de referencia en la fase de tracking. Por otro lado, la evolución de Ω_z difiere un poco de la evolución de su valor de referencia, esto se puede deber a las perturbaciones existentes, sin embargo, esta diferencia no es muy grande pues la escala que se muestra en la tercera imagen de la figura 4.9 es muy pequeña.

Por último, en la figura 4.10 puede verse como las oscilaciones que se tenían en la fase transitoria al aplicar únicamente la ley de control (4.47) se han eliminado y ahora se tienen evoluciones mucho más suaves en dicha fase, aunque en ciertas variables de control, se puede ver como se producen pequeñas oscilaciones al darse el cambio en la aplicación de una ley de control a la otra. Además, se sigue teniendo el control relativamente repartido con equidad entre los distintos tethers que componen la vela.

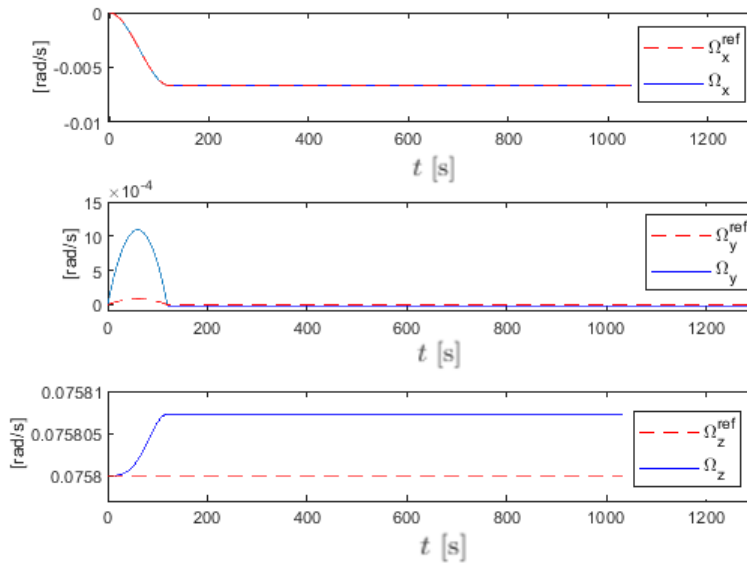


Figura 4.9 Evolución temporal de las velocidades angulares al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

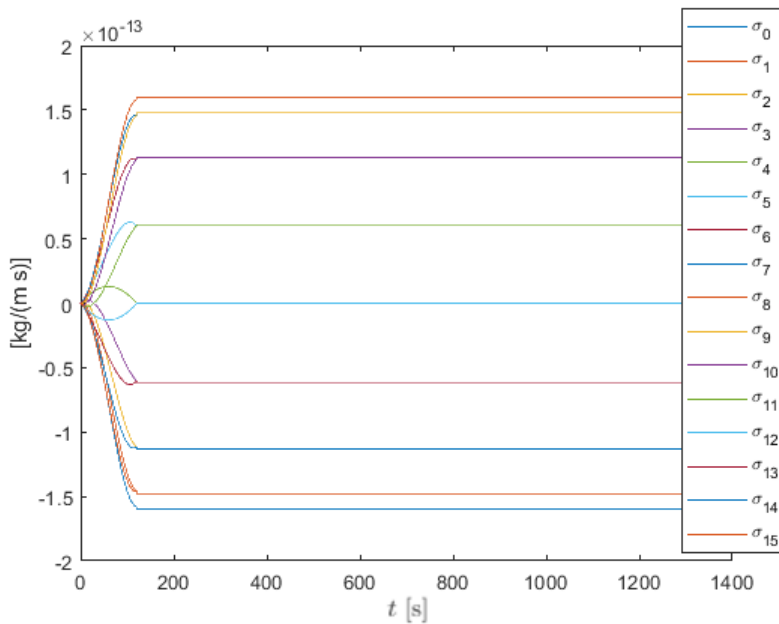


Figura 4.10 Evolución temporal de las variables de control al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación..

4.5 Posibles extensiones y mejoras a realizar

El objetivo aquí es el de presentar diferentes alternativas con el fin de conseguir eliminar la oscilación que se produce al pasar de aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking a la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

Primeramente, se ha modificado el valor de referencia que se ha tomado en la fase de tracking para la variable α_n , con el objetivo de suavizar la transición entre una ley de control y la otra. Este nuevo valor propuesto es

$$\alpha_n^{ref} = \int_0^{t_f} K \cdot t^2 \cdot (t_f - t)^2 \quad (4.56)$$

siendo K una constante a determinar para que se cumpla que la integral de $K \cdot t^2 \cdot (t_f - t)^2$ entre 0 y t_f sea igual a $\bar{\alpha}_{nf}$. Imponiendo esto el valor de K obtenido es

$$K = \frac{30 \bar{\alpha}_{nf}}{t_f^5} \quad (4.57)$$

Por lo que el nuevo valor de referencia en el régimen transitorio de la variable α_n es

$$\alpha_n^{ref} = \frac{30 \bar{\alpha}_{nf}}{t_f^5} \left(\frac{t^3}{3} t_f^2 + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} t_f \right) \quad (4.58)$$

con las implicaciones que esto tendría en el resto de valores de referencia que depende de dicha variable.

Con el valor de la expresión (4.58), se tendría que la aceleración $\ddot{\alpha}_n^{ref}$ sería nula tanto al inicio como al llegar al final de la maniobra, es por ello que la transición comentada anteriormente podría realizarse de una manera más suave de forma que se omita la oscilación que se observa en las figuras 4.6 y 4.7 con respecto a la evolución de las variables α_n y θ .

La comparativa se muestra en la figura 4.11 donde también se muestra los resultados obtenidos para el polinomio $K \cdot t^3 \cdot (t_f - t)^3$ donde aquí K se determina de la misma forma que se hizo anteriormente.

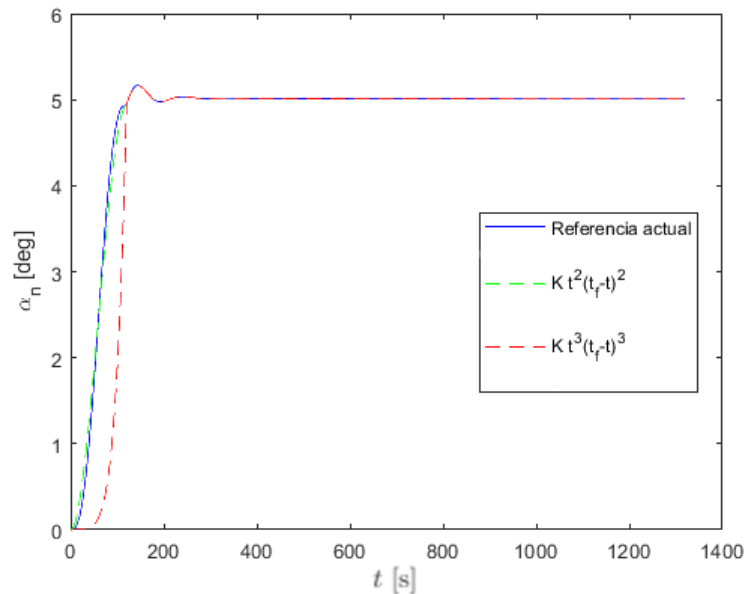


Figura 4.11 Comparativa de las distintas evoluciones que se tienen para diferentes valores de referencia de α_n durante la fase de tracking.

Como se puede ver no hay mejora, la oscilación se sigue produciendo a pesar de modificar α_n^{ref} en la fase de tracking.

Por lo que se considera una alternativa diferente. Al hacer una ampliación en la figura 4.10 en la zona donde se da la transición entre las leyes de control (en torno a 120 s), se observa que al cambiar la ley de control entre el transitorio y el régimen permanente se produce un escalón en las variables de control, que se puede observar en la figura 4.12. Por tanto, la solución adoptada para este caso, es realizar una pequeña transición que permita realizar el paso de una ley de control a la otra de una manera más suave, para así eliminar la oscilación que se genera en las evoluciones de α_n y θ .

Para ello, se introduce un filtro de primer orden, de tal forma que el valor de las variables de control en la transición es

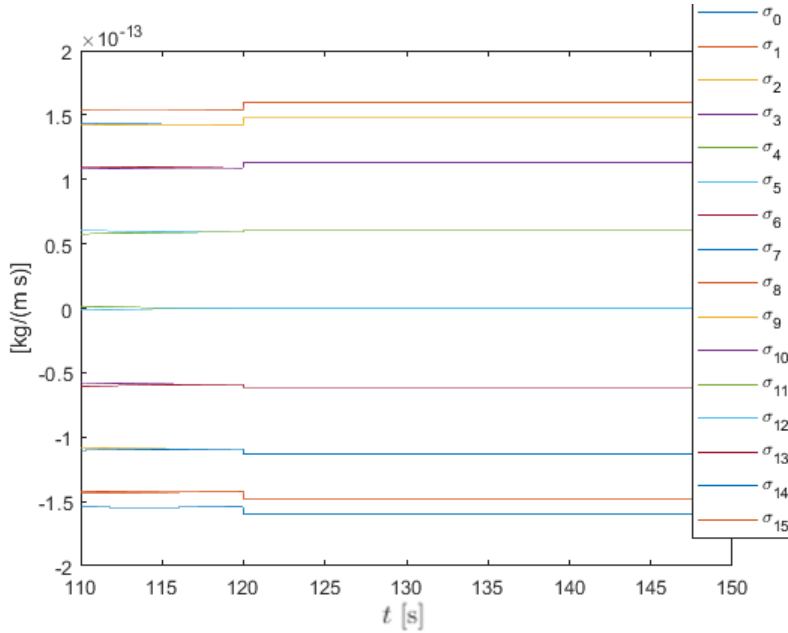


Figura 4.12 Escalón producido en la evolución de las variables de control al pasar de la ley de control (4.52) en régimen transitorio a la ley de control (4.47) en régimen permanente.

$$\sigma_N^{trans} = \sigma_N^{track}(t) \cdot e^{-c \cdot t} + \sigma_N^{regul} \cdot (1 - e^{-c \cdot t}) \quad (4.59)$$

donde $\sigma_N^{track}(t)$ es el último valor de las variables de control durante la fase de tracking al aplicar la ley de control (4.52), mientras que σ_N^{regul} se trata del primer valor que toman las variables de control tras la transición, una vez se alcanza el régimen permanente, donde se aplica la ley de control (4.47). Por otro lado, c es un parámetro a elegir que cuanto mayor sea, más rápido se producirá la transición. Es por ello, que se ha decidido tomar $c = 1000$. Por último, decir que el tiempo en la expresión (4.59) empezaría a contar cuando de comienzo la transición.

Como se puede observar en la figura 4.13, al añadir esta pequeña transición al modelo la oscilación se ha eliminado, lo que supone una considerable mejora. Ya se consigue llegar a la actitud deseada o final en el tiempo de maniobra fijado. Además, se puede apreciar una pequeña diferencia entre la evolución de α_n y su referencia, sin embargo, esta diferencia es pequeña, de tal forma que α_n se ajusta bastante bien a los valores que toma su valor de referencia. Dicha oscilación en la evolución de la variable θ también se ha eliminado como se puede ver en la figura 4.14. Con respecto a ϕ , su evolución es muy similar a la mostrada en la figura 4.7 y se ajusta bastante bien a su referencia.

Por las razones ya comentadas, la evolución temporal de ψ no sufre ninguna variación al introducir el filtro de primer orden que elimina las oscilaciones visualizadas en las variables α_n y θ , como se puede ver en la figura 4.15.

Por otro lado, con respecto a las velocidades angulares, en la figura 4.16 no se aprecia ninguna diferencia significativa con respecto a la figura 4.9

Para finalizar, en la figura 4.17 se puede ver que aparentemente al introducir el filtro de primer orden las evoluciones de las variables de control son iguales a las mostradas en la figura 4.10. Sin embargo, si nos centramos en las proximidades del instante de tiempo (120 s) en el cual se produce la transición de una ley de control a la otra (figura 4.18), se puede ver como el escalón observado en la figura 4.12 se ha eliminado, gracias a la transición introducida.

Dicho escalón es el que originaba la oscilación en las evoluciones de las variables α_n y θ , y su eliminación ha conllevado la omisión de las oscilaciones comentadas, por lo que el objetivo del proyecto se ha conseguido de manera satisfactoria.

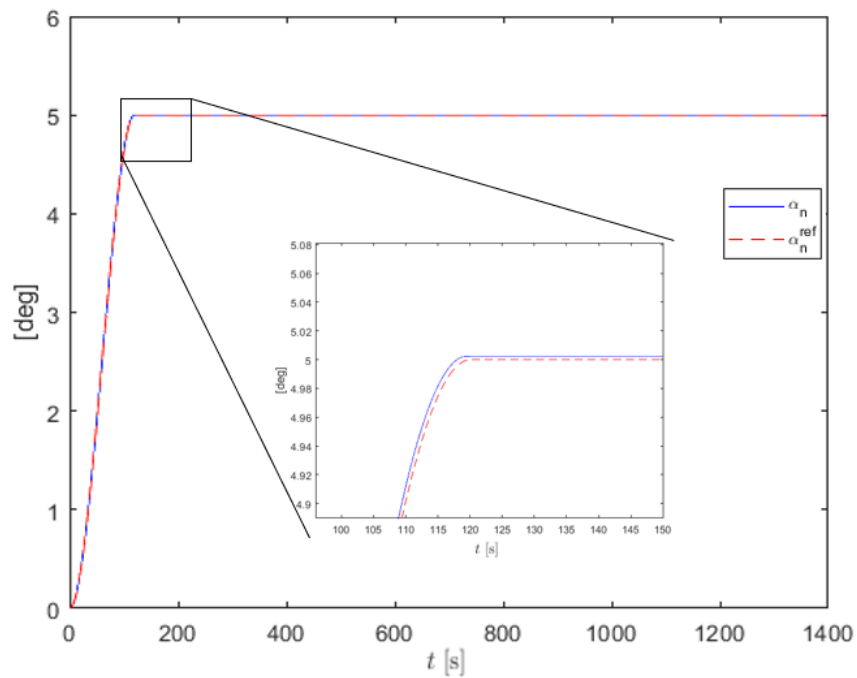


Figura 4.13 Evolución temporal de α_n al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden.

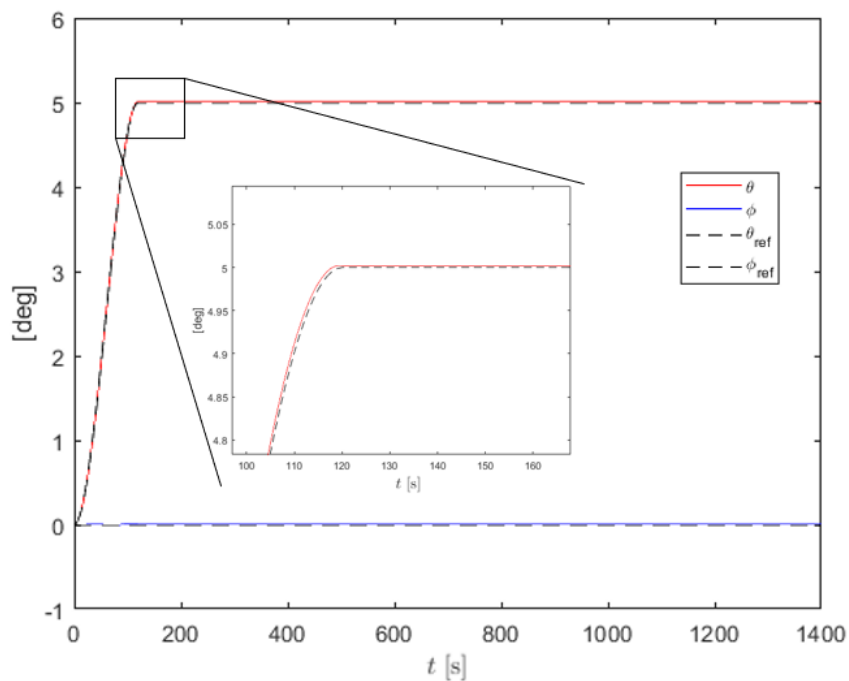


Figura 4.14 Evolución temporal de θ y ϕ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden.

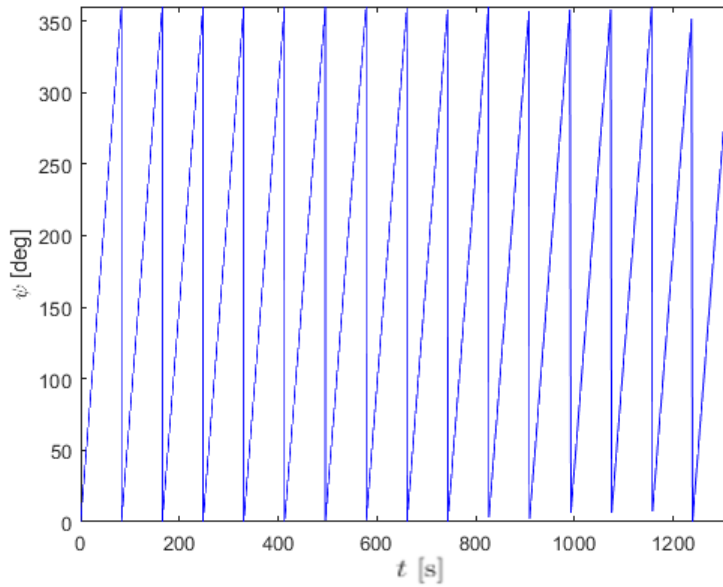


Figura 4.15 Evolución temporal de ψ al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden.

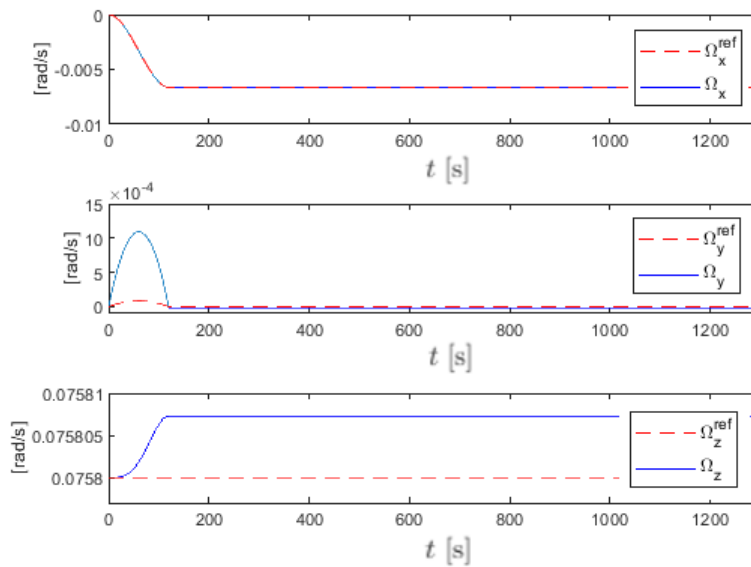


Figura 4.16 Evolución temporal de las velocidades angulares al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden.

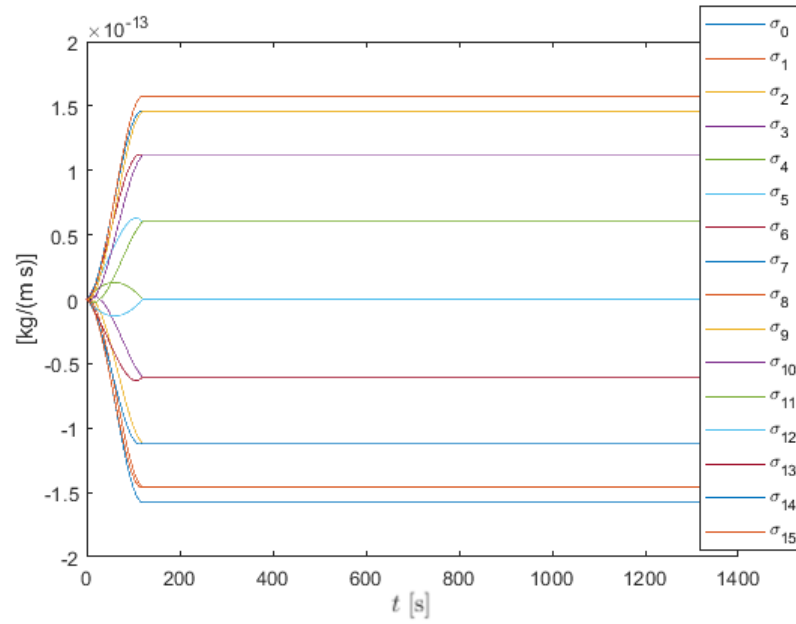


Figura 4.17 Evolución temporal de las variables de control al aplicar la ley de control (4.52) en la fase de tracking y posteriormente la ley de control (4.47) en la fase de regulación, añadiendo además el filtro de primer orden.

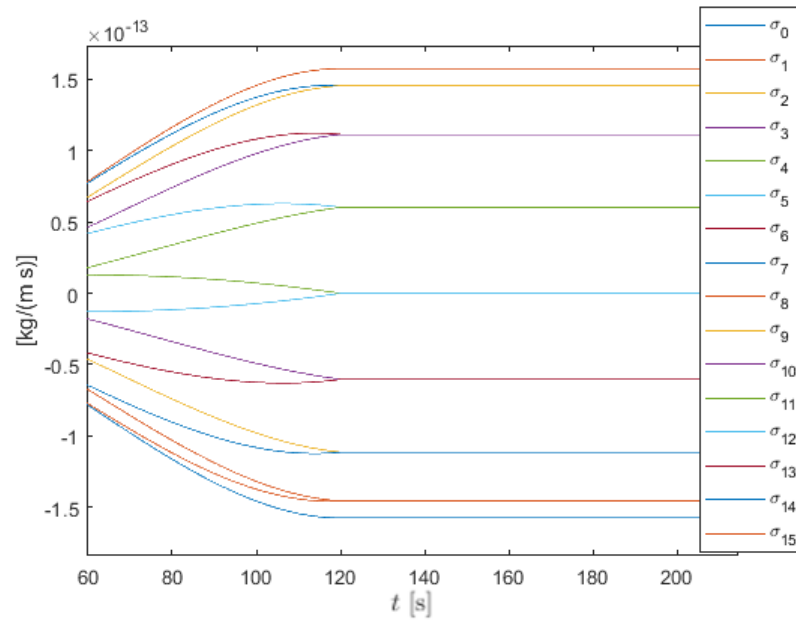


Figura 4.18 Evolución de las variables de control en las proximidades de la transición de la ley de control (4.52) en la fase de tracking a la ley de control (4.47) en la fase de regulación.

5 Análisis paramétrico de los resultados obtenidos con la ley de control óptimo

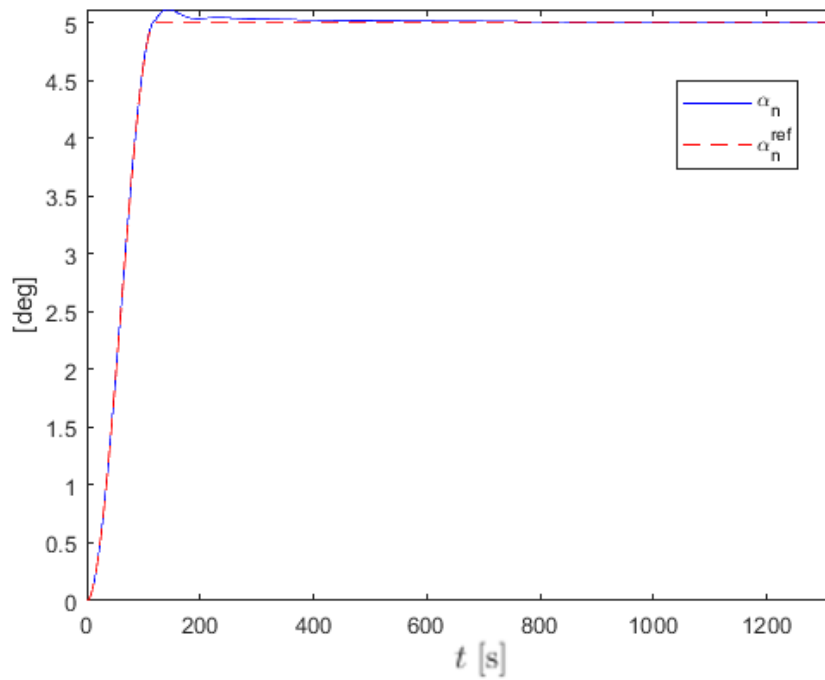
En el presente capítulo se aplican las leyes de control mostradas en el Capítulo 4 a casos diferentes en los que se varían parámetros distintos con el fin de ver como se comporta la vela solar eléctrica a través de las distintas variables de estado y de las variables de control. En concreto, primeramente se hace un análisis donde se varíen el número de tethers con los que cuenta la vela. Posteriormente, se varía también el valor de α_n que se desea tener al final de la maniobra y por último, se hace un estudio en el que se modifica el tiempo de maniobra.

Dicho análisis se realiza sin considerar el filtro de primer orden aplicado a las variables de control que elimina las oscilaciones producidas en las evoluciones de α_n y ϕ , con el objetivo de ver como afectan los parámetros comentados anteriormente al sistema de partida sin la adición del filtro, pues al añadir el filtro las evoluciones de las distintas variables del problema son prácticamente iguales.

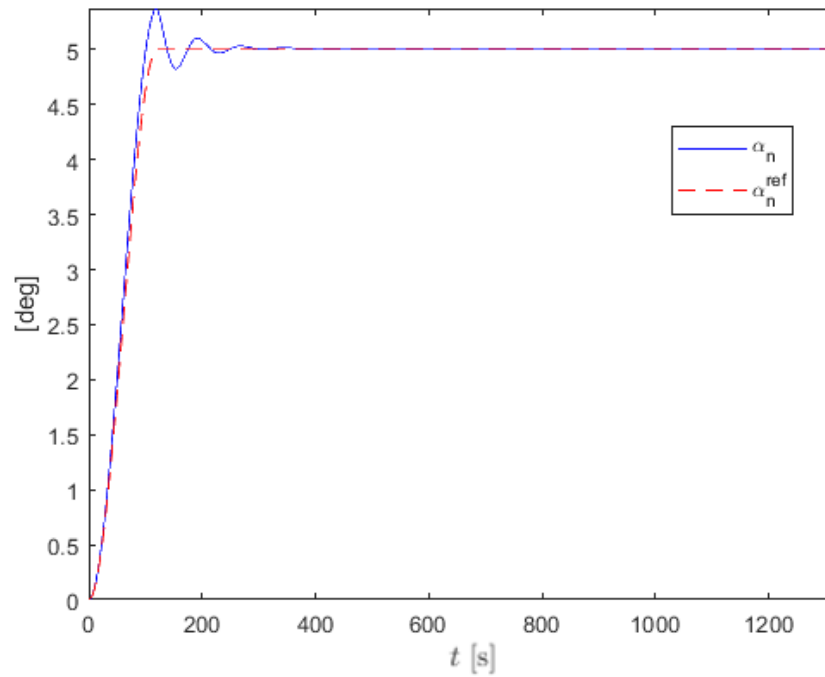
5.1 Análisis de la influencia del número de tethers

Se analiza el comportamiento de la actitud de la vela para los casos en los que se tienen 32 tethers y 8 tethers, que junto con el caso nominal en el que se tenían 16 tethers, se considera un análisis suficientemente completo como para ver la influencia del número de cables en la actitud de la E-sail.

Por otro lado, el resto de parámetros se consideran iguales a los valores que estos tienen en la situación nominal, y que vienen definidos en la Sección 3.8.4.



(a) 32 tethers.

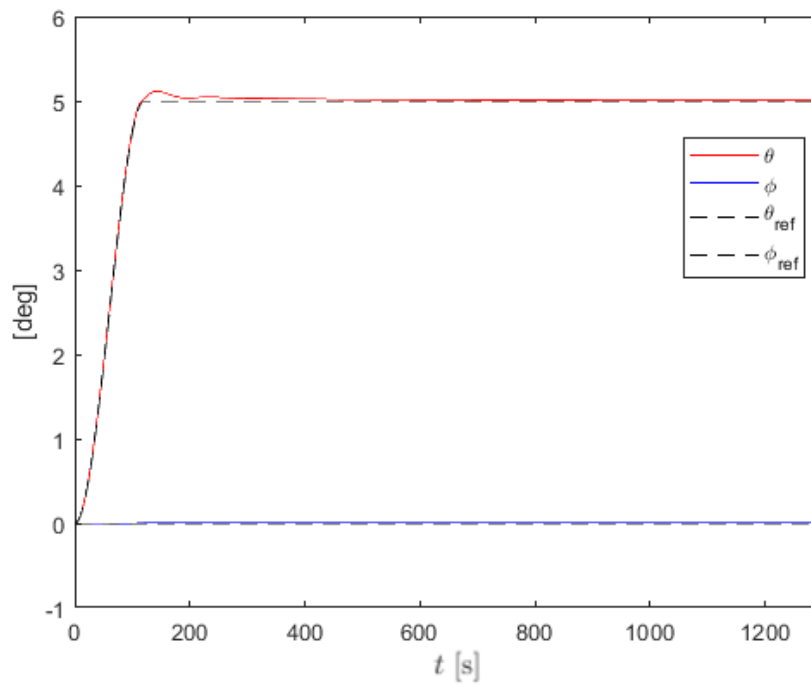


(b) 8 tethers.

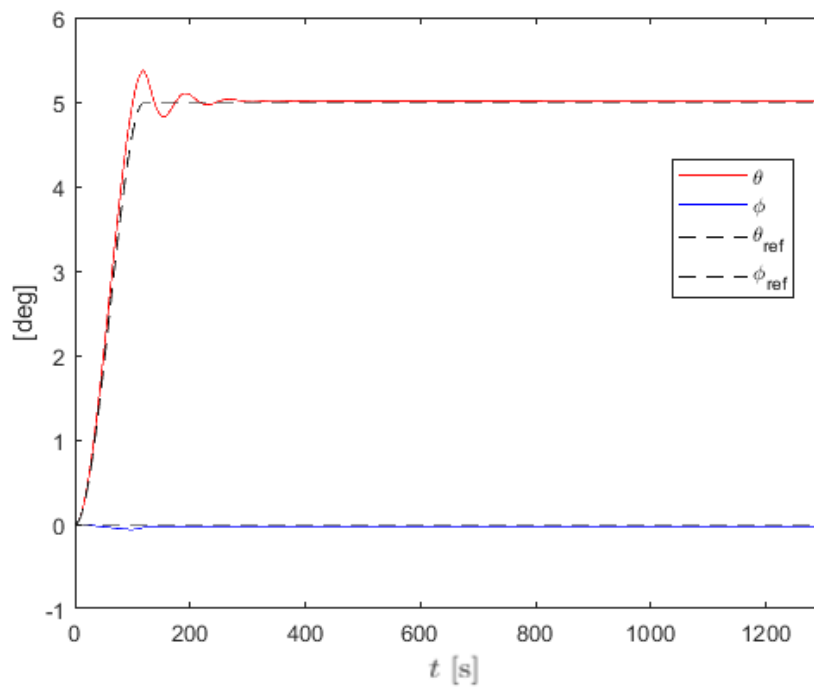
Figura 5.1 Evolución de α_n variando el número de tethers.

Como se puede ver en las figuras 5.1 y 5.2 al aumentar el número de tethers la amplitud de la oscilación que se produce en las variables α_n y θ , al pasar de la ley de control (4.52) en la fase de tracking, a la (4.47) en la fase de regulación, se disminuye. Mientras que sucede lo contrario si el número de cables es menor, es decir, la amplitud de dicha oscilación aumenta. Por lo que, el incremento del número de cables de la E-sail

tiene un aspecto beneficioso a la hora de atenuar dicha oscilación y poder llegar a la actitud deseada en el tiempo fijado para la maniobra.

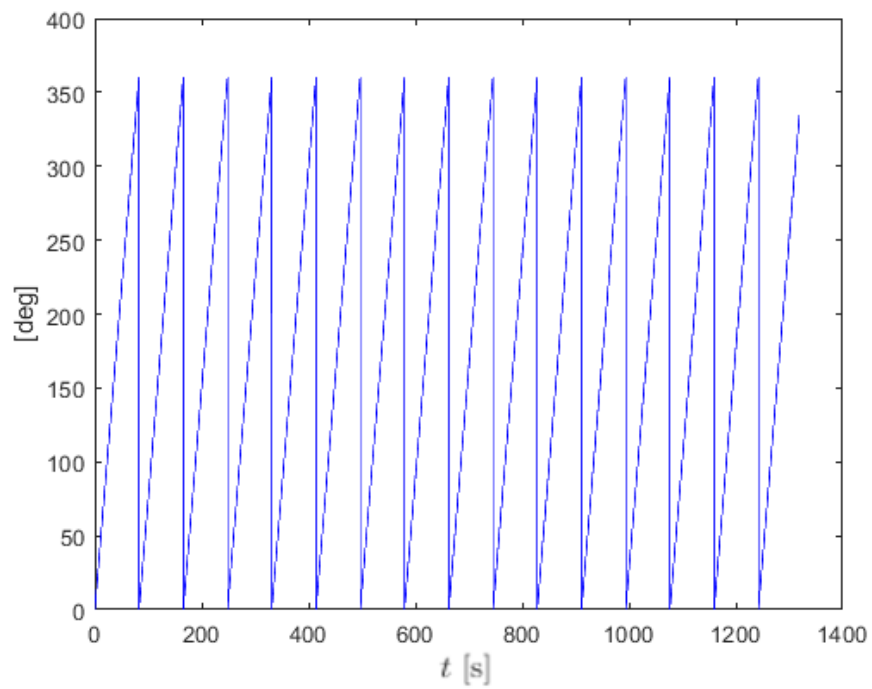


(a) 32 tethers.

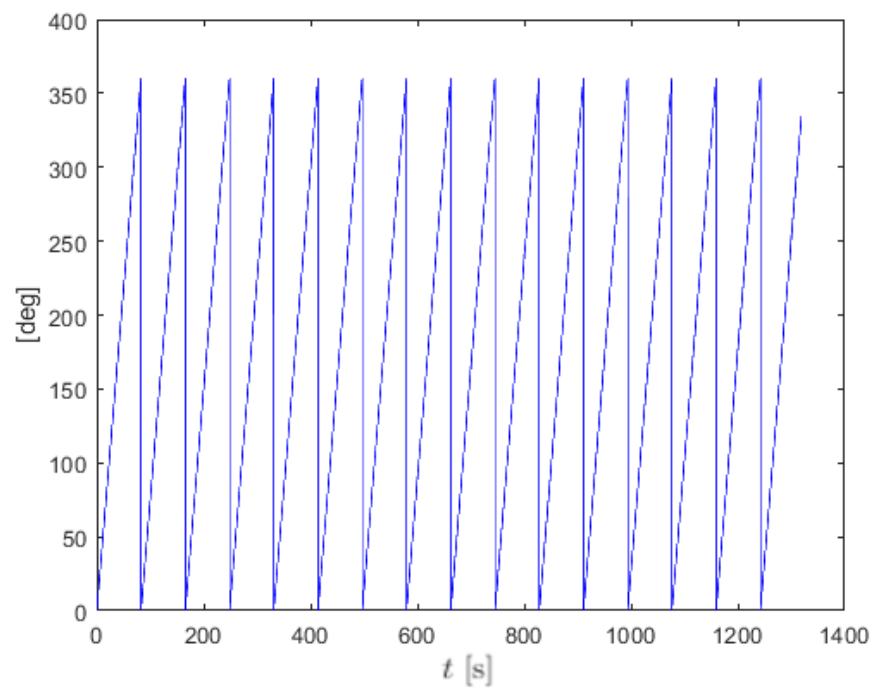


(b) 8 tethers.

Figura 5.2 Evolución de ϕ y de θ variando el número de tethers.

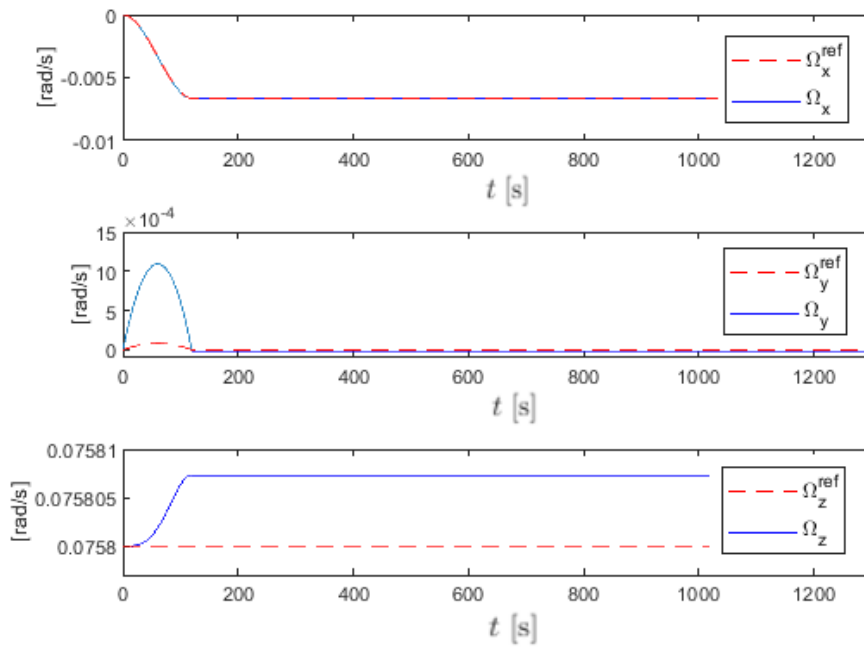


(a) 32 tethers.

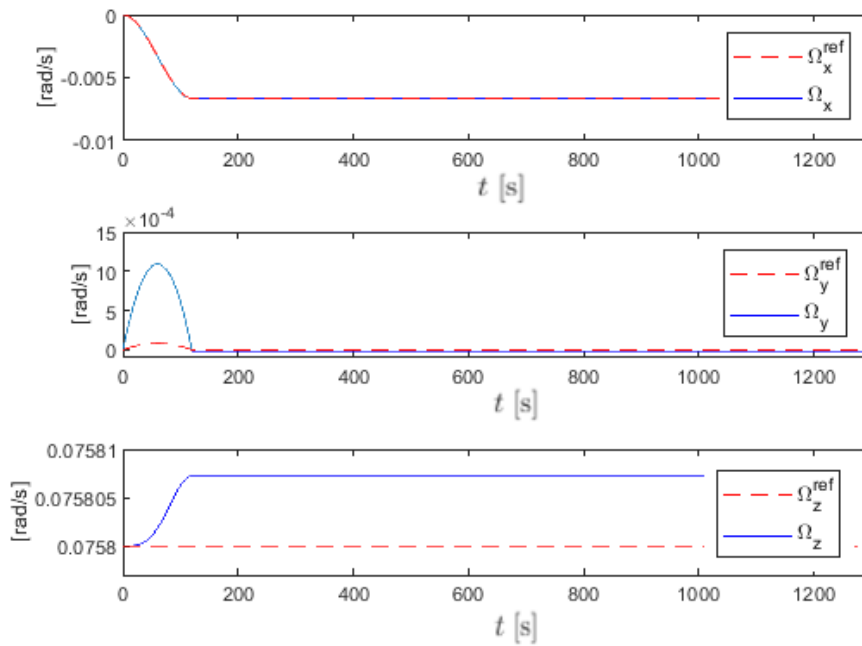


(b) 8 tethers.

Figura 5.3 Evolución de ψ variando el número de tethers.



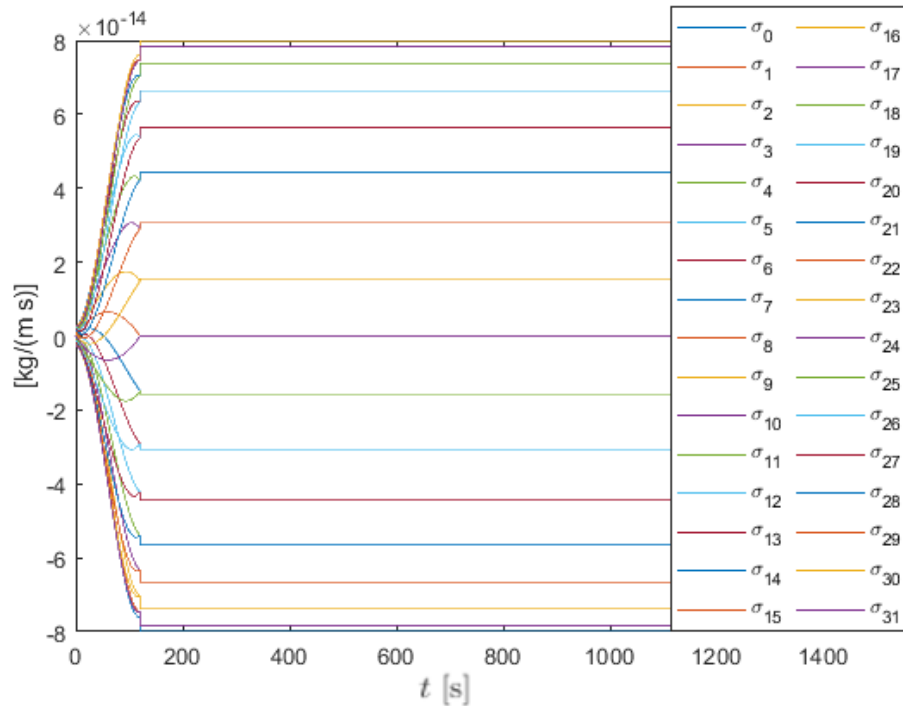
(a) 32 tethers.



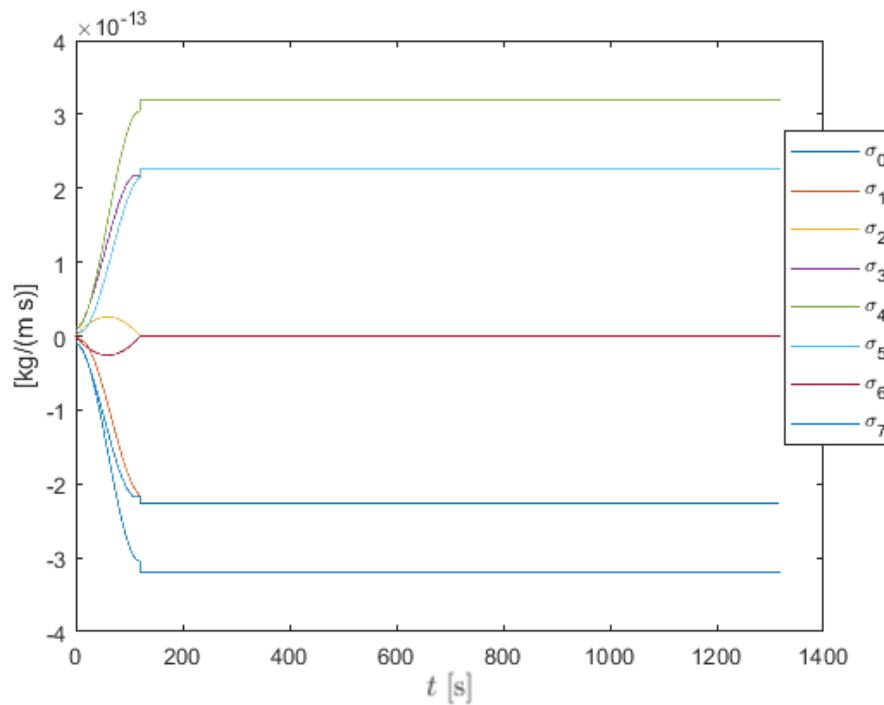
(b) 8 tethers.

Figura 5.4 Evolución de las velocidades angulares variando el número de tethers.

Por otro lado, la evolución del resto de variables de estado es prácticamente igual en los dos casos bajo estudio, no se aprecian variaciones significativas. En concreto, para ψ la evolución en ambos casos es idéntica, esto es así porque dicha variable está desacoplada del problema como se ha comentado ya anteriormente.



(a) 32 tethers.



(b) 8 tethers.

Figura 5.5 Evolución de las variables de control variando el número de tethers.

En la figura 5.5 se puede ver como las evoluciones de las potencias de control en ambos casos son similares. La única salvedad es el número de variables de control que se tienen en un caso y en otro, estando dicho número directamente relacionado con el número de tethers que tiene la vela (una variable de control por cada tether que tiene la vela). Además, los valores que adquieren las variables de control en el caso en el que se

tienen 32 tethers es menor pues al tener un mayor número de tethers el control está más repartido. Por otro lado, se sigue teniendo ese escalón al pasar de una ley de control a la otra, pues como se ha dicho ya este análisis se está realizando sin incluir el filtro de primer orden.

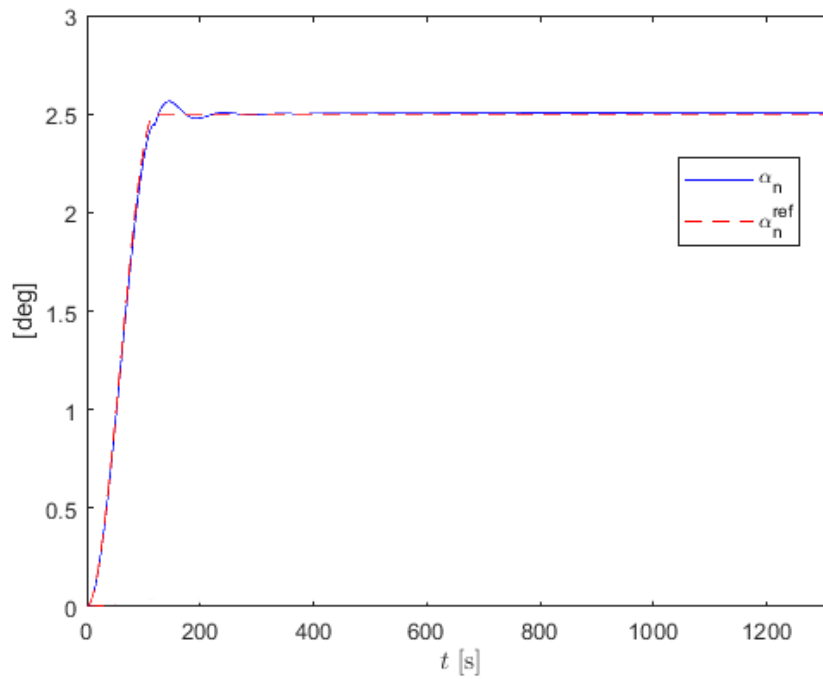
5.2 Análisis de la influencia de la actitud final deseada

Aquí se estudia el comportamiento de las distintas variables del problema en función de la actitud final que se quiera tener que viene definida, como en ocasiones anteriores, por el parámetro α_n .

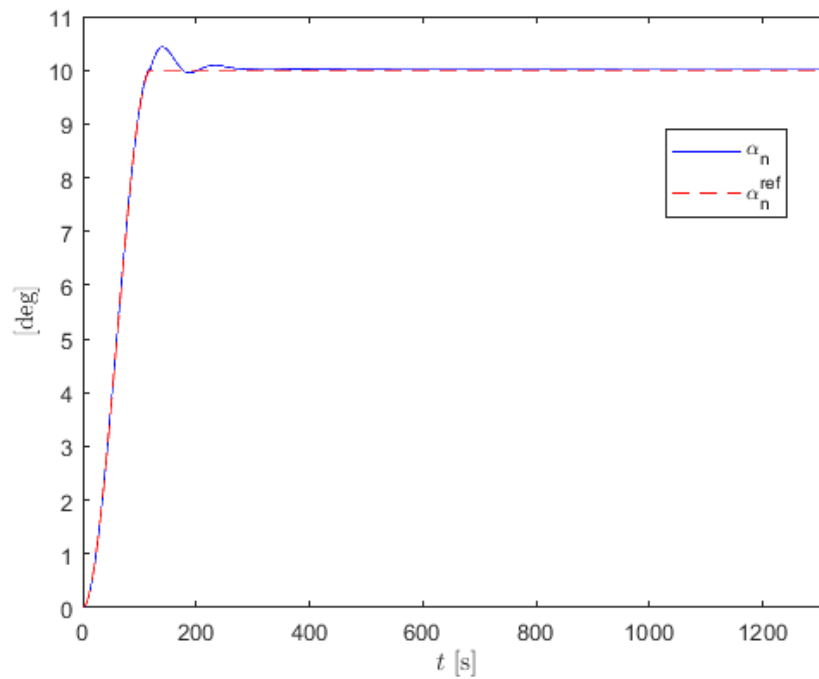
Al igual que antes, el resto de parámetros se consideran iguales a los que se tenían en la situación nominal, y sólo se varía el valor de $\bar{\alpha}_{nf}$. En concreto se analizan dos casos, uno en el que $\bar{\alpha}_{nf} = 2,5^\circ$ y otro en el que $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$.

Con respecto a α_n , se puede visualizar en la figura 5.6 que no se aprecian cambios significativos en la forma de la evolución. Se sigue teniendo dicha oscilación, pues se está realizando el presente análisis para el caso en el que se tienen 16 tethers, si este número aumentase la amplitud de la oscilación se vería disminuida como se mostró en la Sección 5.1. En ambos casos α_n consigue alcanzar el valor final deseado de una forma bastante exacta al igual que sucede en el caso en el que $\alpha_{nf} = 5^\circ$. Sin embargo, dicho ajuste si es bastante preciso en la fase de tracking.

Al igual que para el caso nominal, en los dos casos bajo estudio la evolución de θ es prácticamente igual a la de α_n , mientras que ϕ se mantiene prácticamente en 0° durante la totalidad del tiempo de simulación, por las razones ya comentadas en el Capítulo 4. Sin embargo, no se aprecian diferencias significativas con respecto a la evolución de la variable ψ en los dos casos bajo estudio y en la situación nominal mostrada en el Capítulo 4, así como tampoco se observan en las diferentes componentes de la velocidad angular de la vela.

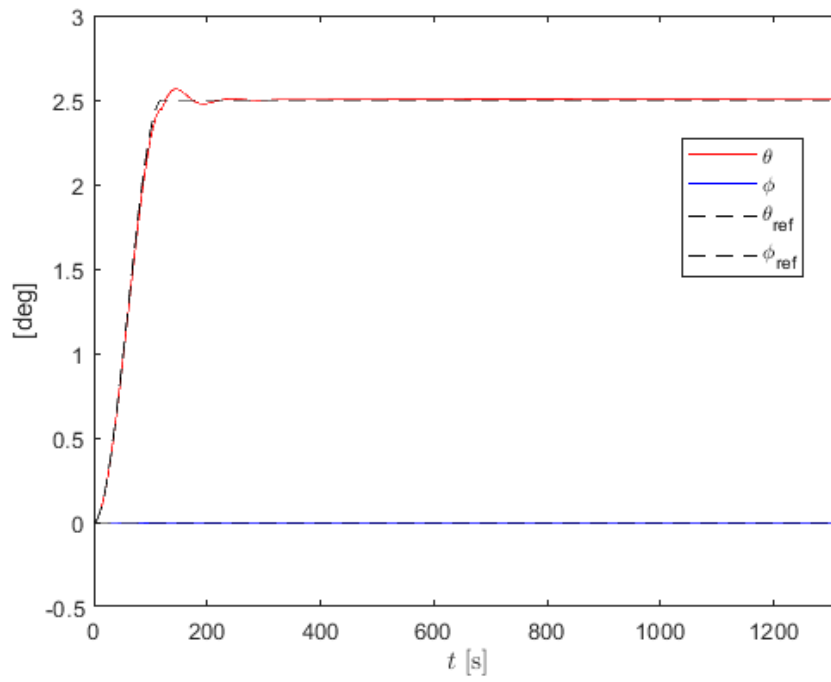


(a) $\bar{\alpha}_{nf} = 2,5^\circ$.

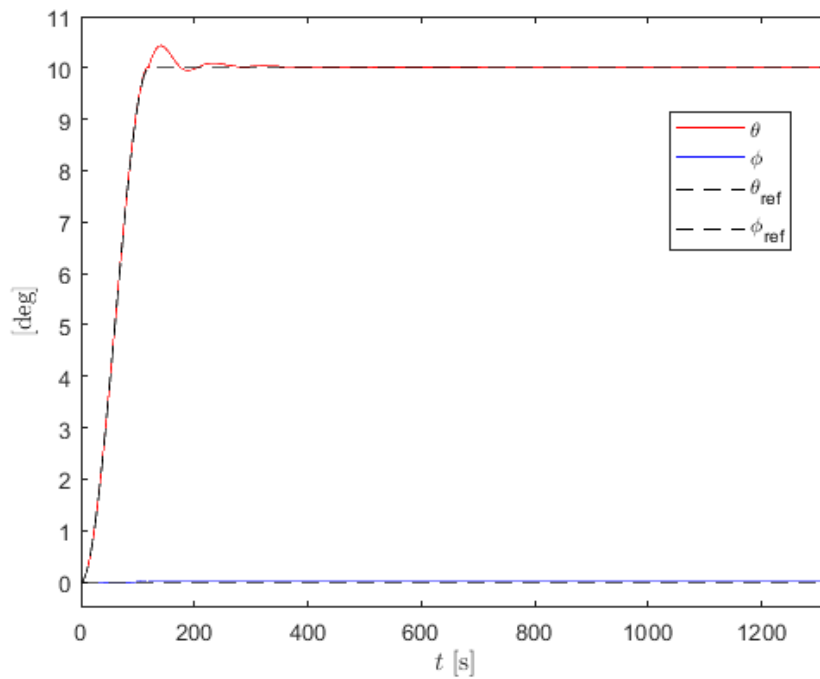


(b) $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$.

Figura 5.6 Evolución de α_n variando el valor de $\bar{\alpha}_{nf}$.

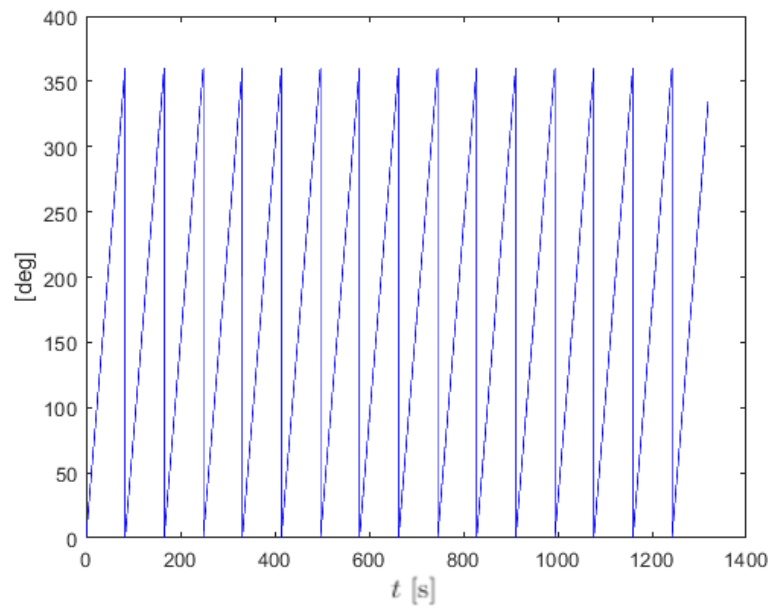
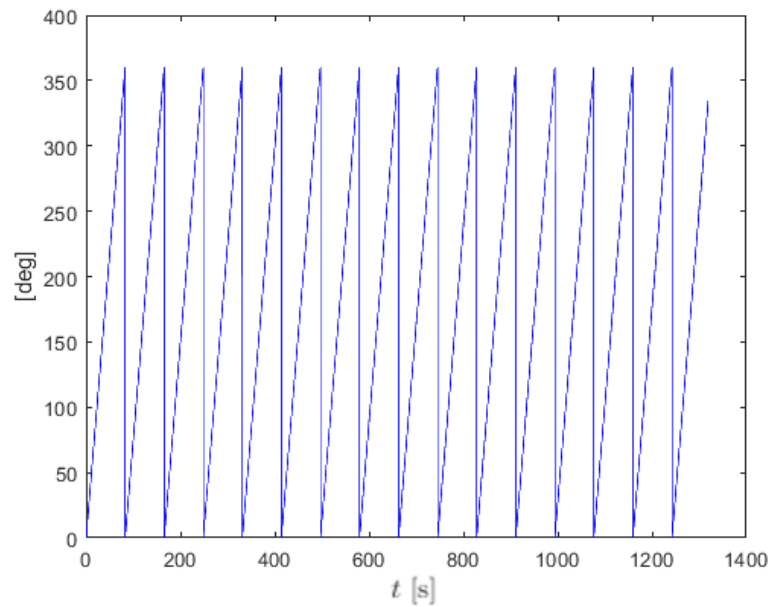


(a) $\bar{\alpha}_{nf} = 2,5^\circ$.

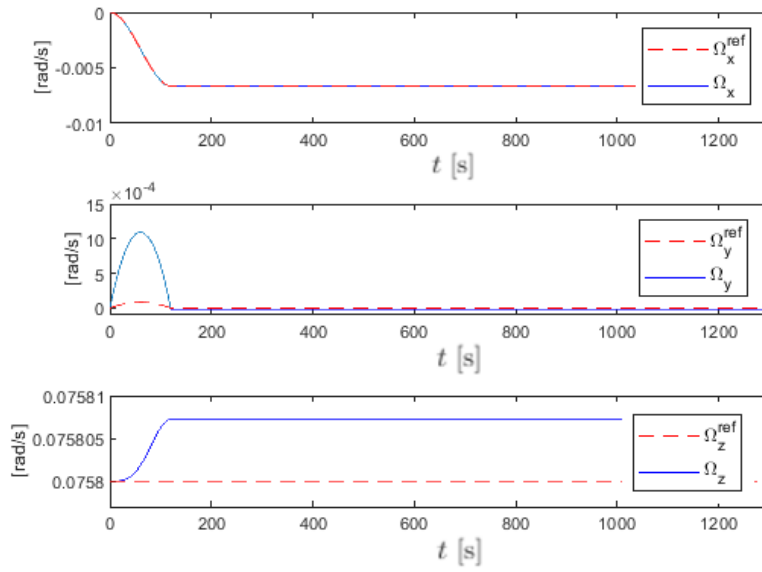


(b) $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$.

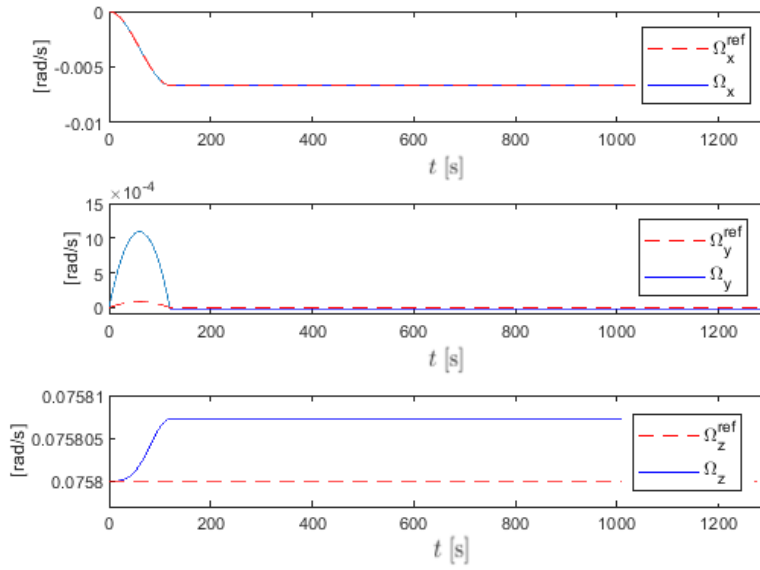
Figura 5.7 Evolución de ϕ y θ variando el valor de $\bar{\alpha}_{nf}$.

(a) $\bar{\alpha}_{nf} = 2,5^\circ$.(b) $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$.**Figura 5.8** Evolución de ψ variando el valor de $\bar{\alpha}_{nf}$.

Como se puede ver en la figura 5.10 al aumentar el valor de α_n que se quiere tener al final de la maniobra, el módulo de los valores de las variables de control aumenta, algo lógico pues mayor debe ser la diferencia de potencial eléctrico entre los distintos cables para alcanzar un valor de α_n mayor. Además, se ha comprobado, para el caso en el que $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$, que las potencias de control no alcanzan su valor de saturación. Dicho valor de saturación se ha definido como $1,15 \cdot \sigma$ y se alcanza para $\bar{\alpha}_{nf} = 15^\circ$ aproximadamente, a partir de dicho valor, las variables del problema dejan de comportarse como lo hacen en la mayoría de casos aquí mostrados y no alcanzan los valores que se desea que alcancen en régimen permanente.



(a) $\bar{\alpha}_{nf} = 2,5^\circ$.



(b) $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$.

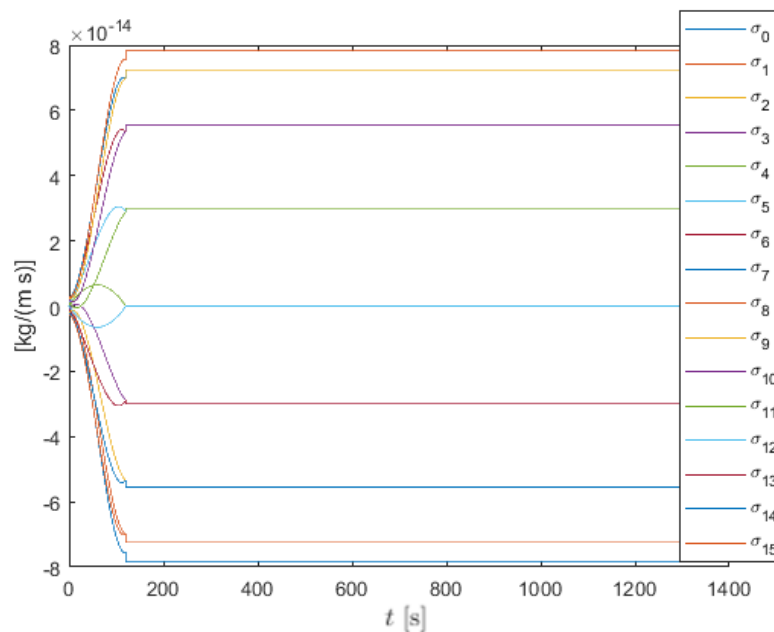
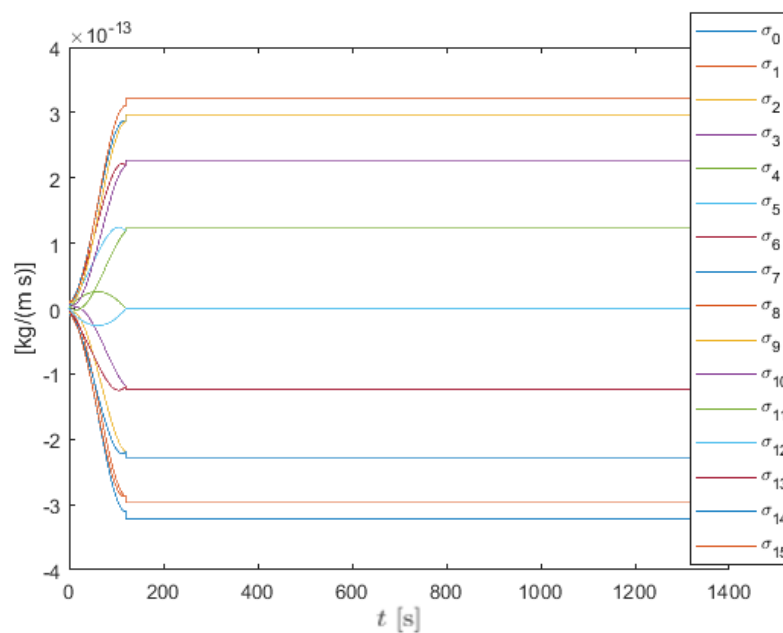
Figura 5.9 Evolución de las velocidades angulares variando el valor de $\bar{\alpha}_{nf}$.

5.3 Análisis de la influencia del tiempo de maniobra

Se estudia a continuación la influencia que tiene el tiempo de realización de la maniobra de actitud, t_f sobre la evolución de las distintas variables del problema.

Igual que en casos anteriores, únicamente se modifica t_f , el resto de parámetros serán iguales al caso nominal. Más concretamente se hace el análisis para los casos en los que se tiene que $t_f = 60$ s y $t_f = 240$ s.

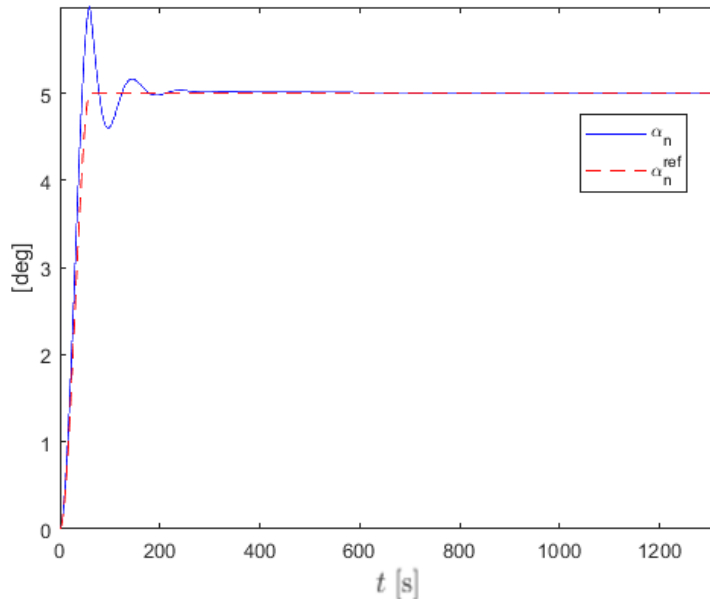
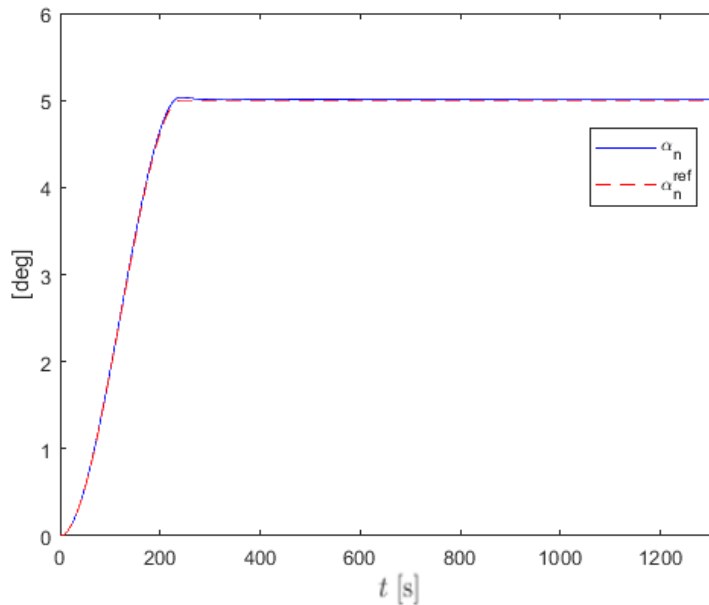
Como se puede ver en las figuras 5.11 y 5.12 al disminuir el tiempo de maniobra, es decir, al hacer la maniobra de actitud más rápida, mayor es la amplitud de las oscilaciones que se producen en las variables α_n y θ , al pasar de la ley de control (4.52), en la fase de tracking, a la (4.47) en la fase de regulación, lo que

(a) $\bar{\alpha}_{nf} = 2,5^\circ$.(b) $\bar{\alpha}_{nf} = 10^\circ$.**Figura 5.10** Evolución de las variables de control variando el valor de $\bar{\alpha}_{nf}$.

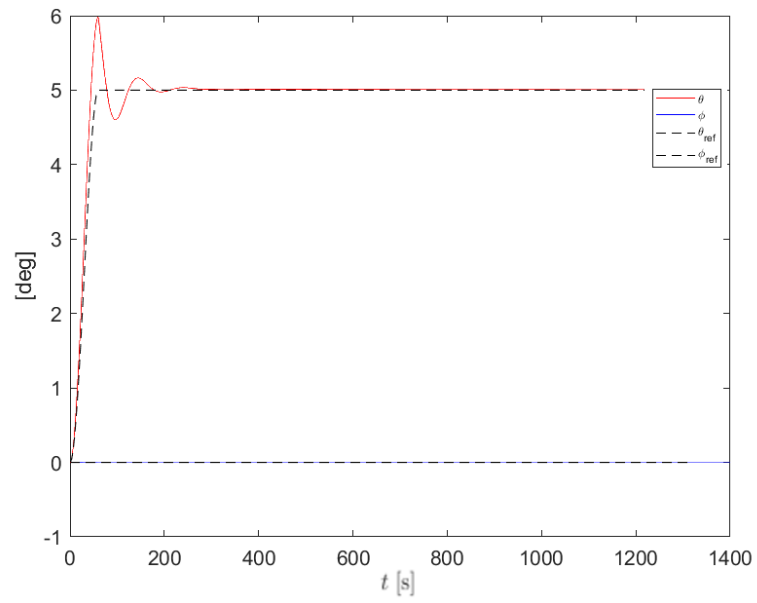
no permite llegar a la actitud final deseada en el tiempo indicado. Sin embargo, al aumentar el tiempo de maniobra, dicha oscilación disminuye en amplitud, pudiendo incluso desaparecer como se muestra en la figura 5.11b.

Por otro lado, al igual que en los casos analizados anteriormente, la modificación del tiempo de maniobra no provoca variaciones en la evolución de ψ .

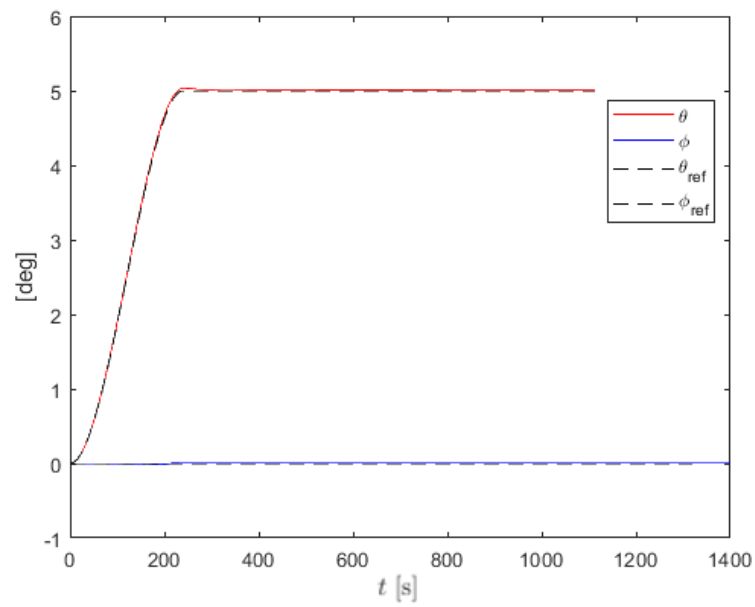
Con respecto a las velocidades angulares en la figura 5.14 se puede visualizar como al aumentar el tiempo de maniobra la oscilación que se produce en Ω_y , se suaviza disminuyendo la amplitud, además, el ajuste con respecto a su referencia ya no es tan exacto como lo es en el caso en el que el tiempo de maniobra es de 60 s. Mientras que con el resto de componentes no hay cambios significativos.

(a) $t_f = 60 \text{ s}$.(b) $t_f = 240 \text{ s}$.**Figura 5.11** Evolución de α_n variando el valor de t_f .

Por último, con respecto a las variables de control, decir que los órdenes de magnitud de las mismas no cambian de un caso a otro, pues se quiere llegar en ambos a la misma actitud final. Sin embargo, la pendiente de las potencias de control durante la fase de tracking es mayor en el caso en el que $t_f = 60 \text{ s}$ que cuando $t_f = 240 \text{ s}$, algo evidente pues en el primero de los casos se desea llegar a la actitud final en un intervalo de tiempo menor y por tanto, las potencias de control tienen que alcanzar su valor de régimen permanente mucho más rápido. Además en la figura 5.15b se puede ver como el escalón que se produce en el tránsito de una ley de control a la otra ha disminuido, esta es la razón por la que en las figuras 5.11b y 5.12b a penas se observa la oscilación en las evoluciones de α_n y θ .

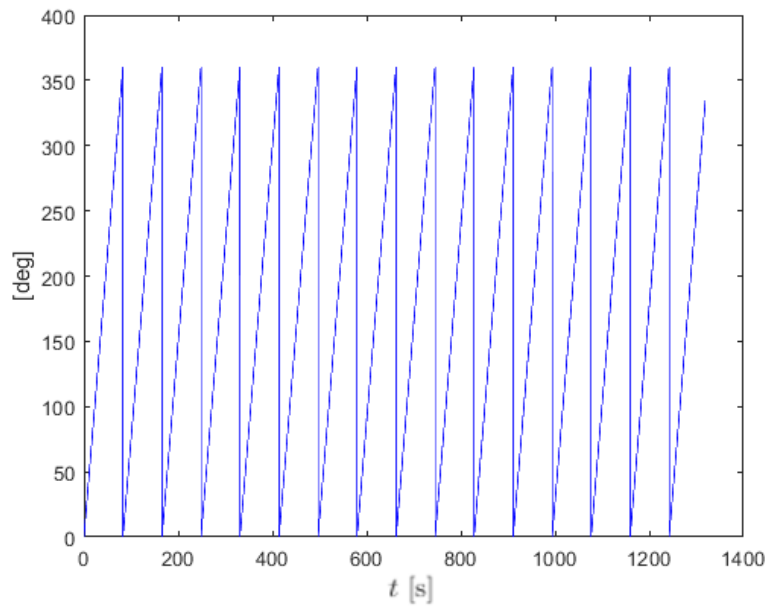


(a) $t_f = 60$ s.

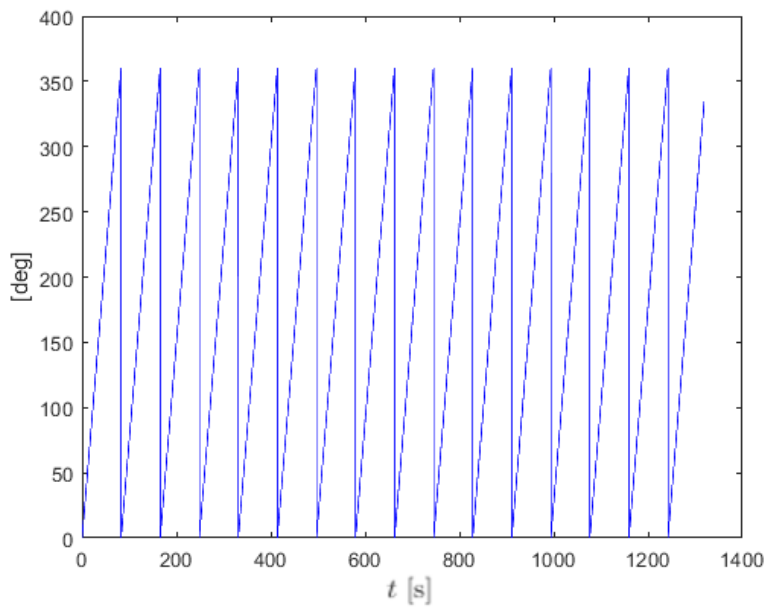


(b) $t_f = 240$ s.

Figura 5.12 Evolución de ϕ y θ variando el valor de t_f .

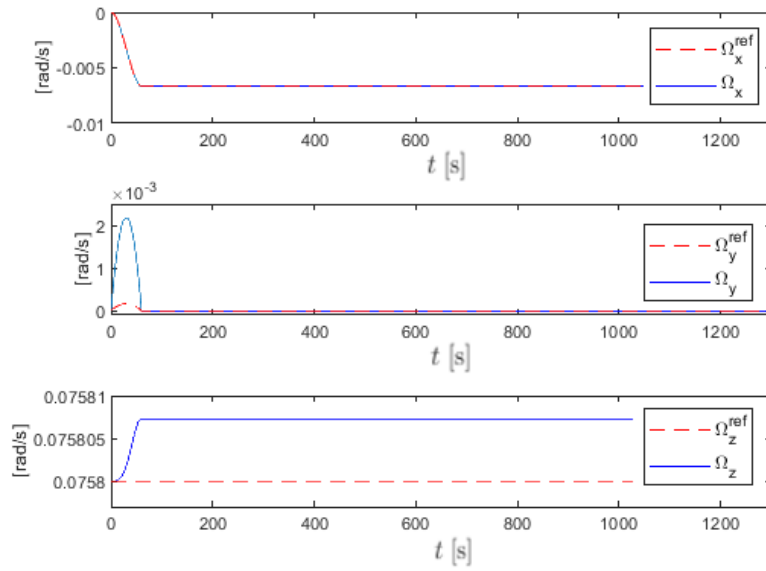


(a) $t_f = 60$ s.

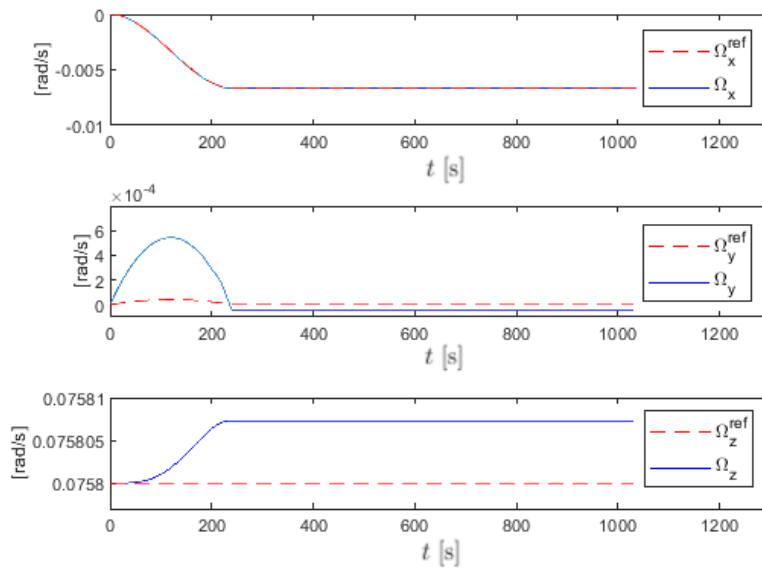


(b) $t_f = 240$ s.

Figura 5.13 Evolución de ψ variando el valor de t_f .

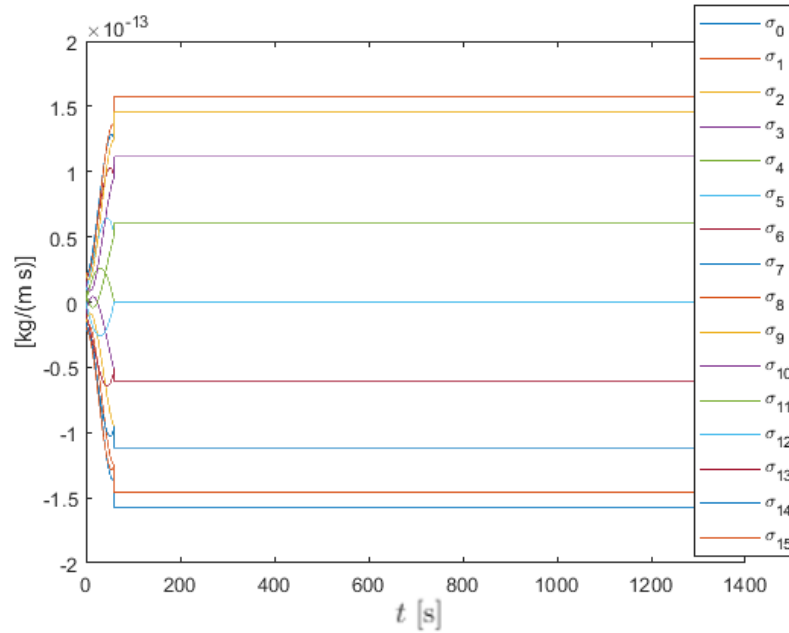
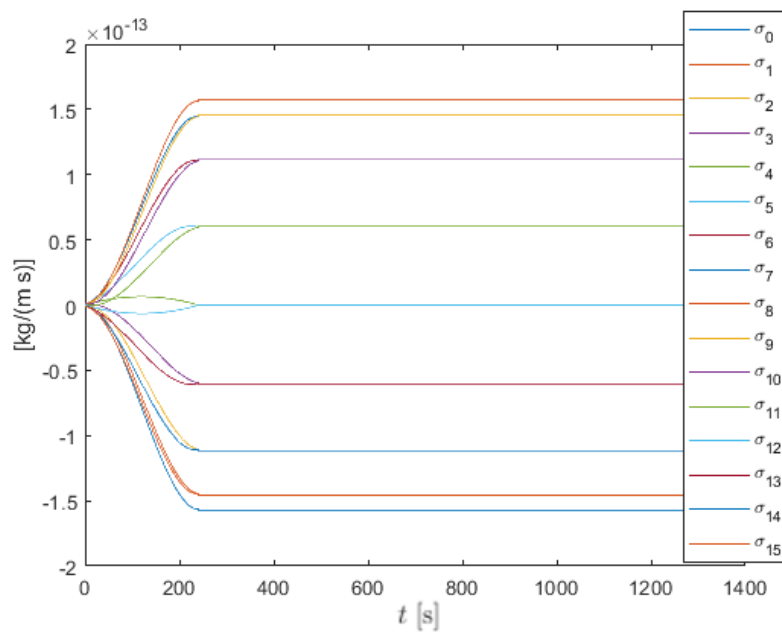


(a) $t_f = 60$ s.



(b) $t_f = 240$ s.

Figura 5.14 Evolución de las velocidades angulares variando el valor de t_f .

(a) $t_f = 60$ s.(b) $t_f = 240$ s.**Figura 5.15** Evolución de las variables de control variando el valor de t_f .

6 Conclusiones

En este trabajo se estudia el control óptimo de actitud de las velas solares eléctricas, un nuevo método de generación de empuje que usa el viento solar para propulsarse. En concreto, en este escrito se ha usado el Control LQR para generar una ley de control que permita modificar la orientación del vehículo donde se integra la E-sail, mediante una modulación del voltaje al que están sometido los cables que la componen.

Primeramente, se ha realizado una breve revisión de las E-sail para ver cual es el estado actual de este novedoso mecanismo de propulsión, las posibles aplicaciones que este tiene y sus ventajas sobre otros sistemas cuyo fin es similar.

Posteriormente se ha tomado un modelo dinámico de la literatura en la que se basa este trabajo ([2]) y se reprodujeron los resultados obtenidos en dicha referencia con el fin de comprender correctamente el funcionamiento de la ley de control allí propuesta. Se ha comprobado además, que estos resultados no eran del todo satisfactorios pues α_n , parámetro usado para definir la actitud, no logra mantenerse en el valor deseado durante el transcurso del tiempo y aparecen oscilaciones en su evolución en régimen permanente.

El siguiente paso ha sido la aplicación del Control LQR para generar una nueva ley de control, la óptima, que mejorara el comportamiento de α_n y del resto de variables del problema. En particular, en primer lugar se aplica la ley de control con ganancias de realimentación, obtenida de aplicar el control LQR de horizonte finito con la que se consigue disminuir las oscilaciones en régimen permanente y evitar la disminución de los valores tomados por α_n durante el transcurso del tiempo. Sin embargo, no contentos con esto, se genera una nueva ley de control, esta vez dependiente del tiempo pero de nuevo con ganancias de realimentación, con el objetivo de suavizar las oscilaciones producidas durante el régimen transitorio al aplicar durante todo instante de tiempo la ley de control (4.47). Previo a esto, se lleva a cabo un proceso de adimensionalización y linealización.

Tras analizar los resultados obtenidos, puede verse que el objetivo del trabajo se ha alcanzado de manera satisfactoria a pesar de la oscilación que se genera al pasar de una ley de control a otra en la evolución de los parámetros α_n y θ . Sin embargo, se ha visto como dichos resultados se pueden mejorar mediante la adición de un filtro de primer orden en las variables de control, que permita suavizar la transición entre las leyes de control. Se ha visto también mediante la aplicación del teorema de los multiplicadores de Lagrange, cómo optimizar la repartición del control entre los distintos tethers de la vela obteniendo distribuciones simétricas de las variables de control en cada caso analizado. Por otro lado, realizar un análisis paramétrico de los resultados nos ha permitido visualizar como aumentar el número de tethers tiene un impacto positivo en la sobreoscilación producida en las evoluciones de las variables α_n y θ , y como aumentar el tiempo de maniobra también contribuye de manera positiva a la disminución de la misma. Además, se ha visto como para alcanzar mayores valores de α_n en régimen permanente hay que aumentar los valores de las potencias de control y por tanto, la diferencia de voltaje entre los cables de la E-sail, identificándose el valor de α_n (15° aproximadamente) deseado al final de la maniobra que produce la saturación de las variables de control.

6.1 Líneas de trabajo futuro

En cuanto a posibles trabajos o ampliaciones a varias líneas de trabajo pueden ser:

- Estudiar la implementación de esta ley de control en los prototipos de velas solares eléctricas existentes y ensayar su funcionamiento, aunque a día de hoy no se haya realizado ninguna misión que demuestre la funcionalidad del sistema.

- Análisis del despliegue de los tethers, fase que no ha sido considerada en el presente trabajo debido a su complejidad mecánica.
- Otra posible línea de trabajo futura sería incluir ciertas perturbaciones a la hora de recoger todas las fuerzas en las componentes del momento de fuerzas total generado presentado en la sección 3.7, como por ejemplo el efecto del gradiente gravitatorio (aunque en primera aproximación pueda ser despreciable). Además, de eliminar las hipótesis simplificadores que se han ido tomado durante el desarrollo del presente trabajo como la axilsimetría, la elección de la deformada tomada y demás hipótesis que permitirían hacer del modelo uno más realista.
- En cuarto lugar, sería interesante poder realizar una mejora del modelo que permitiese alcanzar mayores valores de α_n sin que se produzca la saturación de las potencias de control.

Bibliografía

- [1] Pekka Janhunen, "*Electric sail for Spacecraft Propulsion*", J.Propulsion, vol.20, No.4, 2004.
- [2] Marco Bassetto, Giovanni Mengali, Alessandro A. Quarta, "*E-sail attitude control with tether voltage modulation*", Acta Astronautica, vol.166, pp. 350-357, 2020.
- [3] Pekka Janhunen, Petri Toivanen, Jouni Envall, Sini Merikallio, Giuditta Montesanti y Jose Gonzalez del Amo , "*Electric solar wind sail applications overview*", 2012.
- [4] P. Janhunen, A. A. Quarta y G. Mengali, "*Electric solar wind sail mass budget model*", 2013
- [5] Rafael Vázquez Valenzuela. *Mecánica orbital y vehículos espaciales*. Apuntes de clase (ETSI Sevilla), extraídos de <http://www.aero.us.es/astro/desc.html>.
- [6] P. Janhunen and A. Sandroos *Simulation study of solar wind push on a charged wire: basis of solar wind electric sail propulsion* Ann. Geophys., vol. 25, pp. 755–767, 2007
- [7] Giovanni Mengali, Alessandro A. Quarta y Pekka Janhunen "*Electric Sail Performance Analysis*" Journal of spacecraft and rockets, vol. 45, No. 1, 2008.
- [8] Fei Liu , Quand Hu y Yufei Liu *Attitude Dynamics of Electric Sail from Multibody Perspective* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018.
- [9] Gangqiang Li, Zheng H. Zhu, Chonggang Du, S.A. Meguid "*Characteristics of coupled orbital-attitude dynamics of flexible electric solar wind sail*", Acta astronautica, vol. 159, pp. 593-608, 2019.
- [10] Rafael Vázquez Valenzuela. *Dinámica de vehículos espaciales*. Apuntes de clase (ETSI Sevilla), extraídos de <http://aero.us.es/dve/desc.html>
- [11] Andris Slavinskis et al. *ESTCube-1 In-Orbit Experience and Lessons Learned*, IEEE A&E SYSTEMS MAGAZINE, 2015
- [12] Les Johnsona and Kurt Polzin *Electric Sail Propulsion for Deep Space Missions*, IAC-19/C4/10x49175, 2019